

核科学与技术学院

## 点堆动力学模型与求解

学 号:

专 业:

学生姓名:

任课教师:

2015 年 04 月

## 摘要

刚性问题给求解点堆中子动力学方程带来一定难度。对中子密度使用分段全隐式一阶泰勒展开近似，构造求解点堆动力学方程的数值积分方法。该方法具有计算过程简便，易于编程实现的特点。计算结果表明，该方法计算精度高、适应性好，能克服由于方程组刚性带来的数值求解困难，可用于核动力系统的设计分析与仿真计算。

关键词：点堆动力学；刚性；泰勒多项式；数值积分方法

## 概述

计算中子通量密度的瞬变特性，对反应堆动力系统的运行安全分析与仿真而言十分重要。点堆中子动力学模型是反应堆动态学中最常用的方法，它使用集总参数的方法，认为中子通量密度在空间上分布形状不变，即堆内的中子通量密度的涨落随时间同步变化。尽管点堆模型作了相当程度的简化，但当实际动态过程不产生严重的局部效应，以及中子密度变化缓慢时，采用该模型能够获得满意的计算结果，因而点堆模型在工程上获得广泛应用。

点堆中子动力学模型描述了中子密度和缓发中子先驱核浓度随时间变化的规律。由于瞬发中子寿命与缓发中子寿命间存在着数量级的差别，耦合的点堆动力学微分方程组存在着刚性，这给数值求解带来了一定困难。常规的显式方法，如欧拉法、龙格库塔法在计算该问题时存在稳定性问题，这要求时间步长需取得很小，会带来计算耗时以及大的累计误差。针对点堆动力学方程组的刚性问题，发展了许多种处理方法，包括：（1）线性多步法，如 GEAR 算法及其改进形式；（2）基于积分方程的方法，如 Hansen 方法；（3）分段多项式逼近法，如埃尔米特插值型；（4）权重限制法；（5）指数基函数法等。

本文使用一阶泰勒多项式积分方法求解点堆动力学方程，该方法能很好地解决方程的刚性问题，具有计算精度高、适用性好的特点。文章内容包括：探讨点堆方程的刚性问题；给出一阶泰勒多项式积分方法的推导过程及计算流程；编制计算程序，完成计算验证与相关讨论。

## 1 点堆中子动力学方程

$I$  组缓发中子点堆动力学方程如下：

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(t) + q \quad (1-1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad i=1,2,\dots,I \quad (1-2)$$

该微分方程组的初始条件为：

$$n(t)|_{t=0} = n_0, C_i(t)|_{t=0} = C_{i0}, \quad i=1,2,\dots,I$$

式中， $n(t)$  为中子密度； $C_i(t)$  为第  $i$  组缓发中子先驱核的浓度； $\rho(t)$  为反应性； $\Lambda$  为中子代时间； $\lambda_i$  为第  $i$  组缓发中子先驱核衰变常数； $\beta_i$  为第  $i$  组缓发中子份额； $\beta$  为缓发中子的总份额； $q$  为外加中子源项。

为方便讨论，忽略外中子源，将式 (1-1)、(1-2) 写成矩阵的形式，如下：

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= f(t) = F(t)y(t) \\ Y(t)|_{t=0} &= Y_0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中， $Y(t)=[n(t), C_1(t) \cdots C_I(t)]^T$ ， $Y_0=[n_0, C_{10} \cdots C_{I0}]^T$ ，它们都是列向量。 $F(t)$  为  $(I+1) \times (I+1)$  的矩阵：

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{\rho(t)-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_I \\ \beta_1/\Lambda & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_I/\Lambda & 0 & \cdots & -\lambda_I \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

在阶跃反应性扰动下，方程的解析解为：

$$n(t) = n_0 \sum_{j=1}^{I+1} A_j e^{\omega_j t} \quad (1-6)$$

其中， $A_j$  为各指数项的份额； $\omega_j$  为  $F(t)$  的特征值，且满足反应性方程：

$$\rho = \omega\Lambda + \omega \sum_{i=1}^I \beta_i / (\omega + \lambda_i) \quad (1-7)$$

(1-7) 表征了特征值  $\omega$  和反应堆特性参数  $\rho$ 、 $\Lambda$ 、 $\lambda_i$ 、 $\beta_i$  之间的关系，它是关于  $\omega$  的  $I+1$  次代数方程。对于有六组缓发中子的典型热中子堆，方程有 7 个解，使用图解法将方程的解定性地表示在图 1.1 中。

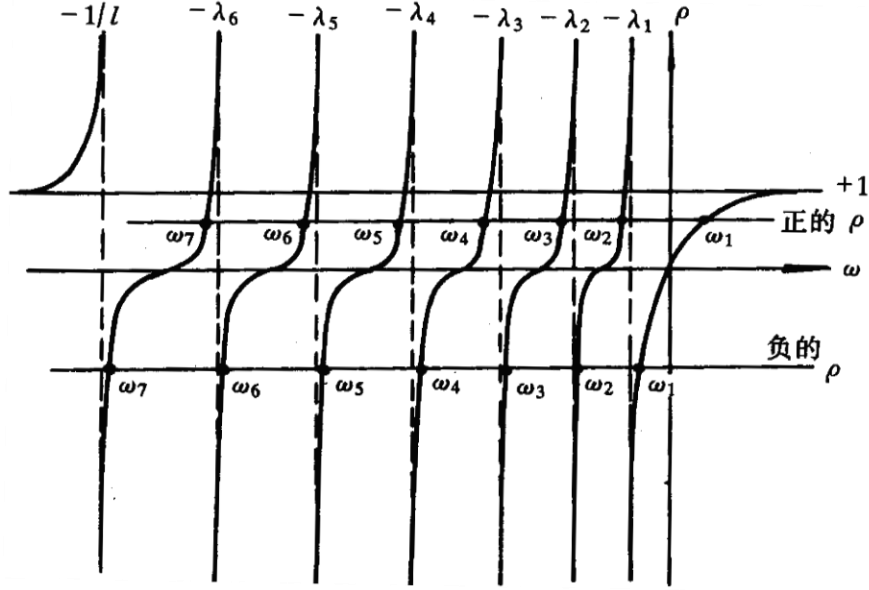


图 1.1 六组缓发中子反应性方程图解

根据图 1.1，特征值  $\omega_j$  的范围如下：

$$\omega_1 > -\lambda_1 > \omega_2 > -\lambda_2 > \cdots > \omega_l > -\lambda_l > \omega_{l+1} > -l^{-1} \quad (1-8)$$

下面讨论点堆方程的刚性问题。在工程上，对于形如式 (1-3) 所示的微分方程组的初值问题，如果其雅可比矩阵  $J = \frac{\partial f}{\partial t}$  满足：

(1)  $J$  的所有特征值的实部  $\text{Re } \omega_i < 0$ ；

(2) 刚性比  $r = \frac{\max_i |\text{Re } \omega_i|}{\min_i |\text{Re } \omega_i|} \gg 1$

按照申平 (Shempine) 和吉尔 (Gear) 的观点：

若矩阵的  $J$  所有特征值  $\omega_i$  的实部都不是很大的正数，同时至少有一个特征值是很大的负数，且对应的解分量变化是缓慢的，则该系统也视为具有刚性。

由式 (1-8) 可知，特征值  $\omega$  具有不同的数量级，这是由瞬发中子寿命与缓发中子寿命间存在着数量级的差别造成的。点堆动力学方程属于典型的刚性方程。

## 2 一阶泰勒多项式积分方法

将式 (1-2) 代入式 (1-1) 得：

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \frac{dC_i(t)}{dt} \right] + q \\ &= \frac{\rho(t)}{\Lambda} n(t) - \sum_{i=1}^6 \frac{dC_i(t)}{dt} + q \end{aligned} \quad (2-1)$$

对式 (2-1) 沿区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 两边积分，有：

$$n(t_{n+1}) - n(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\rho(t)}{\Lambda} n(t) dt - \sum_{i=1}^6 [C_i(t_{n+1}) - C_i(t_n)] + q \cdot h \quad (2-2)$$

求解式 (1-2)，可获得  $C_i(t)$  的解析解：

$$C_i(t) = ce^{-\lambda_i t} + e^{-\lambda_i t} \frac{\beta_i}{\Lambda} \int n(\tau) e^{\lambda_i \tau} d\tau \quad (2-3)$$

定义函数  $f(\tau) = n(\tau) e^{\lambda_i \tau}$ ，其原函数为  $F(\tau)$ ，则有：

$$C_i(t_{n+1}) = ce^{-\lambda_i t_{n+1}} + e^{-\lambda_i t_{n+1}} \frac{\beta_i}{\Lambda} F(t_{n+1}) \quad (2-4)$$

$$C_i(t_n) = ce^{-\lambda_i t_n} + e^{-\lambda_i t_n} \frac{\beta_i}{\Lambda} F(t_n) \quad (2-5)$$

据式 (2-4)、(2-5) 可得  $C_i(t_{n+1})$  与  $C_i(t_n)$  的关系：

$$\begin{aligned} C_i(t_{n+1}) &= \exp(-\lambda_i h) \left\{ C_i(t_n) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \cdot \exp(-\lambda_i t_n) [F(t_{n+1}) - F(t_n)] \right\} \\ &= \exp(-\lambda_i h) \left[ C_i(t_n) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{t_n}^{t_{n+1}} n(\tau) \exp(\lambda_i(\tau - t_n)) d\tau \right] \end{aligned} \quad (2-6)$$

$n(\tau)$  在  $t_{n+1}$  处一阶泰勒展开：

$$n(\tau) = n(t_{n+1}) + n'(t_{n+1})(\tau - t_{n+1}) \quad (2-7)$$

其中：

$$n'(t_{n+1}) = \left. \frac{dn(t)}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} = \frac{\rho(t_{n+1}) - \beta}{\Lambda} n(t_{n+1}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t_{n+1}) + q \quad (2-8)$$

将式 (2-7) 代入 (2-6) 中可得：

$$C_i(t_{n+1}) = \exp(-\lambda_i h) C_i(t_n) + \frac{\beta_i}{\Lambda} [G_{1,i} n(t_{n+1}) - G_{2,i} n'(t_{n+1})] \quad (2-9)$$

式中：

$$\begin{aligned} G_{1,i} &= \exp(-\lambda_i h) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(\lambda_i(\tau - t_n)) d\tau \\ G_{2,i} &= \exp(-\lambda_i h) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tau - t_{n+1}) \exp(\lambda_i(\tau - t_n)) d\tau \end{aligned} \quad (2-10)$$

将 (2-7) 代入 (2-2) 中可得：

$$n(t_{n+1}) - n(t_n) = F_1 n(t_{n+1}) + F_2 n'(t_{n+1}) + q \cdot h + \sum_{i=1}^6 C_i(t_n) - \sum_{i=1}^6 C_i(t_{n+1}) \quad (2-11)$$

其中：

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\rho(\tau)}{\Lambda} d\tau \\ F_2 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\rho(\tau)}{\Lambda} (\tau - t_{n+1}) d\tau \end{aligned} \quad (2-12)$$

在对点堆程序进行验证阶段，上式中的  $\rho(\tau)$  往往是已知输入量，具有确定的表达式，如阶跃、线性等，以便于和参考值进行对比。这时可直接获得上式的解析解。但若后续考虑控制棒效应或热工反馈的作用， $\rho(\tau)$  的形式未知，因此只能获得上式的数值解。在一个时间步长内积分，可表示为：

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{h[\rho(t_{n+1}) + \rho(t_n)]}{2\Lambda} \\ F_2 &= -\frac{F_1 h}{2} \end{aligned}$$

将 (2-9) 代入 (2-8) 中，整理后可得用  $n(t_{n+1})$  表示的线性函数  $n'(t_{n+1})$ ：

$$n'(t_{n+1}) = \frac{(\frac{\rho(t_{n+1}) - \beta}{\Lambda} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} G_{1,i}) n(t_{n+1}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \exp(-\lambda_i h) C_i(t_n) + q}{(1 - \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} G_{2,i})} \quad (2-13)$$

联立式 (2-8)、(2-9) 与 (2-13)，可得  $t_{n+1}$  时刻的中子密度  $n(t_{n+1})$ ：

$$n(t_{n+1}) = \frac{n(t_n) + q \cdot h + \sum_{i=1}^6 C_i(t_n) - \sum_{i=1}^6 \exp(-\lambda_i h) C_i(t_n) + \frac{(F_2 - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\Lambda} G_{2,i})(\sum_{i=1}^6 \lambda_i \exp(-\lambda_i h) C_i(t_n) + q)}{(1 - \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} G_{2,i})}}{1 - F_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\Lambda} G_{1,i} - (F_2 - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\Lambda} G_{2,i})(\frac{\rho(t_{n+1}) - \beta}{\Lambda} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} G_{1,i}) / (1 - \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} G_{2,i})} \quad (2-14)$$

式 (2-9)、(2-13) 和 (2-16) 是本方法的三个基本方程。式 (2-7) 为一阶泰勒展开，因而会带来一定的截断误差。除此之外，本方法在建立过程中，数学上推导的每一步都是严格成立的。因而截断误差是该方法的主要误差来源，可考虑更高阶数的泰勒展开，当然这会使模型更加复杂，求解过程也不够简便。

### 3 计算流程与计算程序

图 3-1 为计算流程图。首先给出初始条件，即  $t_n=0$  时的中子密度  $n(t_n)$ 、 $C_i(t_n)$ ，确定已知项  $\rho(t)$ 、 $\beta_i$ 、 $\lambda_i$ 、 $\Lambda$ 、 $q$  等；然后给定计算条件：计算时长与时间步长；分别根据式 (2-16)、(2-13) 与 (2-9) 逐时刻依次计算下一时刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  时的  $n(t_{n+1})$ 、 $n'(t_{n+1})$

与  $C_i(t_{n+1})$ ，直至达到计算时间要求。

认为反应堆初始状态是稳定的，给定初始的中子密度  $n(0)$ ，根据式 (1-2) 可得：

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = 0 \Rightarrow C_i(0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n(0) \quad (3-1)$$

令初始反应性为零，即  $\rho(0) = 0$ 。据式 (1-1)、(3-1) 可得： $dn(t)/dt = 0$ 。此时中子密度与先驱核浓度处于稳定状态。

本文采用采用 Fortran95 程序语言编制计算程序，程序代码见附件。

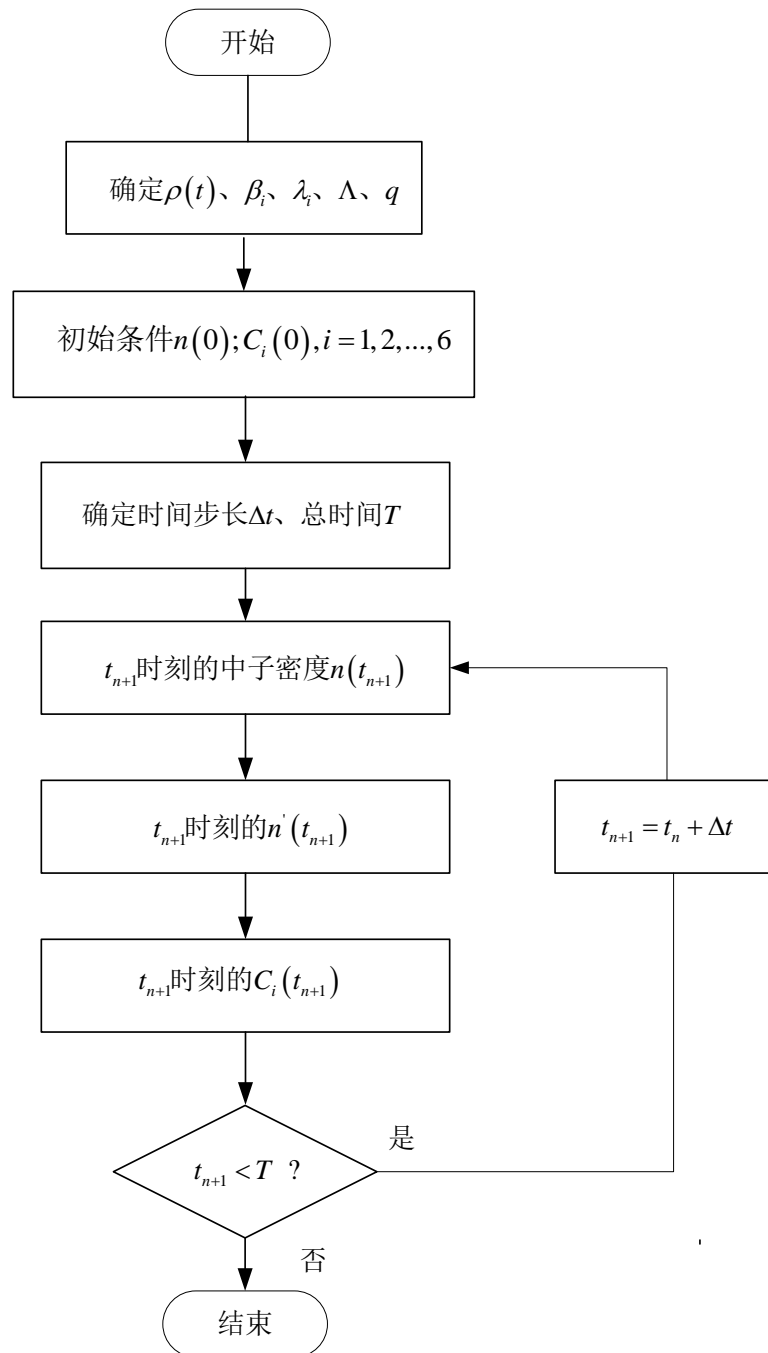


图 3-1 计算流程图

## 4 计算验证

### 4.1 典型热堆

含有 6 组缓发中子的热堆参数为：



$$\Lambda = 2 \times 10^{-5} s, \quad q = 0, \quad \beta = 0.007$$

$$\beta_1 = 0.000266, \quad \beta_2 = 0.001491, \quad \beta_3 = 0.001316, \quad \beta_4 = 0.002849, \quad \beta_5 = 0.000896,$$

$$\beta_6 = 0.000182$$

$$\lambda_1 = 0.0127 s^{-1}, \quad \lambda_2 = 0.0317 s^{-1}, \quad \lambda_3 = 0.115 s^{-1}, \quad \lambda_4 = 0.311 s^{-1}, \quad \lambda_5 = 1.40 s^{-1}, \quad \lambda_6 = 3.87 s^{-1}$$

初始条件为:  $n(0)=1.0\text{cm}^{-3}$ ;  $C_i(0)$  由式 (3-1) 确定。

如图 4.1 所示, 考察 4 种类型的反应性引入后中子密度随时间的变化。

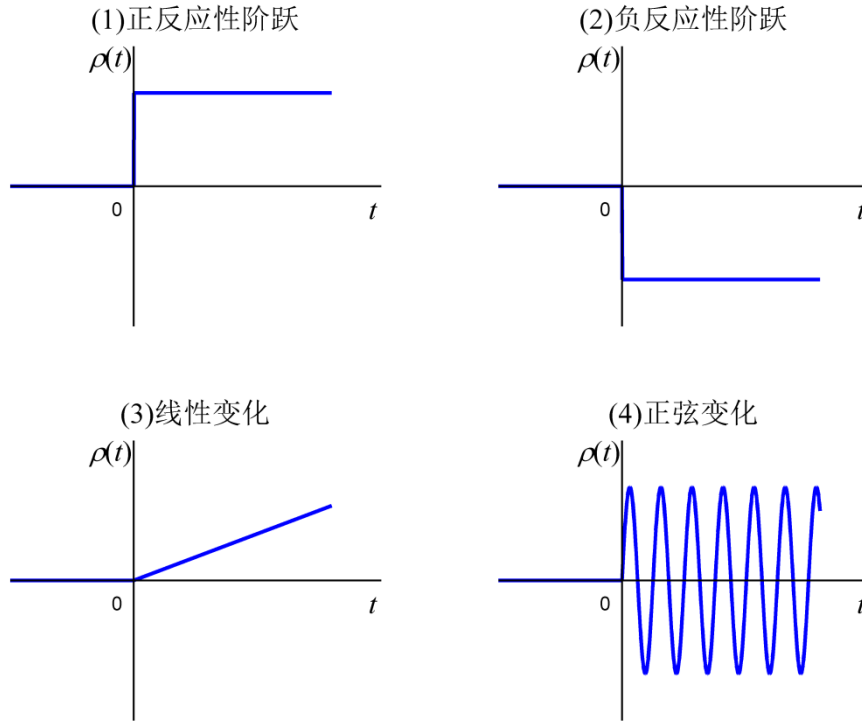


图 4.1 四种反应性引入

#### (1) 正反应性阶跃

图 4.2 描述了不同的正反应性引入下的中子密度变化规律。小的正反应阶跃  $\rho = 0.003$  与大的正反应阶跃  $\rho = 0.007$  的计算结果分别如表 4.1、4.2 所示。

在小的阶跃正反应性下, 步长  $h = 0.01s$  时, 计算结果与精确解对比可知, 计算精度可达  $10^{-5}$ 。但在大的阶跃正反应性下, 在大步长下本方法误差较大。可通过缩短时间步长来提高计算精度。当步长  $h = 0.001s$  时, 与精确解相比, 计算精度达到 4 位有效数字。

可见对于正反应性阶跃而言, 使用该方法求解方程时, 不同大小的反应性引入有着不同的数值特性, 这与文献[2]得出的结论一致。文献[2]中指出, 对于大的正反应性阶跃情况, 方程的刚性不再明显, 这时截断误差变得重要。事实上不同的数值方法有着不同的数值求解特性, 文献[1]中的隐式龙格库塔法能很好地处理大的正反应阶跃问题。

表 4.1 正反应性阶跃  $\rho = 0.003$  下各时刻中子密度

$t/s$	精确解	$h = 0.1s$	$h = 0.01s$	$h = 0.001s$
0.1	1.799528	1.796151	1.799522	1.799528
0.2	1.851268	1.851170	1.851264	1.851268
0.3	1.900405	1.900342	1.900402	1.900405
0.4	1.947593	1.947546	1.947591	1.947593
0.5	1.993313	1.993277	1.993311	1.993313
0.6	2.037922	2.037895	2.037921	2.037922
0.7	2.081692	2.081671	2.081691	2.081692
0.8	2.124832	2.124816	2.124831	2.124832
0.9	2.167504	2.167493	2.167504	2.167504
1.0	2.209841	2.209833	2.209840	2.209840

表 4.2 正反应性阶跃  $\rho = 0.007$  下各时刻中子密度

$t/s$	精确解	$h = 0.1s$	$h = 0.01s$	$h = 0.001s$
0.1	4.522302E+01	3.799802E+01	4.519464E+01	4.522280E+01
0.2	1.597257E+02	1.094642E+02	1.594248E+02	1.597230E+02
0.3	5.188961E+02	2.841128E+02	5.171806E+02	5.188805E+02
0.4	1.667286E+02	7.255829E+02	1.659352E+03	1.667213E+03
0.5	5.345879E+03	1.846436E+03	5.312645E+03	5.345575E+03
0.6	1.713190E+03	4.693989E+03	1.700042E+04	1.713069E+04
0.7	5.489493E+04	1.192908E+04	5.439367E+04	5.489032E+04
0.8	1.758905E+04	3.031256E+04	1.740285E+05	1.758733E+05
0.9	5.635701E+04	7.702304E+04	5.567851E+05	5.635072E+05
1.0	1.805726E+06	1.957097E+05	1.781367E+06	1.805500E+06

## (2) 负反应性阶跃

图 4.3 描述了不同的负反应性引入下的中子密度变化规律。表 4.3 给出了负反应性阶跃  $\rho = -0.007$  下各时刻中子密度。可见即使在  $h = 0.1s$  这种较大的时间步长下，计算结果与精确解也能符合 5 位有效数字。

表 4.3 负反应性阶跃  $\rho = -0.007$  下各时刻中子密度

t/s	精确解	$h = 0.1s$	$h = 0.01s$
0.1	4.900708E -1	4.902775E-1	4.900705E-1
0.2	4.809743E -1	4.809821E-1	4.809739E-1
0.3	4.727747E -1	4.727806E-1	4.727741E-1
0.4	4.652903E -1	4.652950E-1	4.652898E-1
0.5	4.583873E -1	4.583910E-1	4.583867E-1
0.6	4.519650E -1	4.519679E-1	4.519643E-1
0.7	4.459467E -1	4.459491E-1	4.459460E-1
0.8	4.402732E -1	4.402752E-1	4.402725E-1
0.9	4.348978E -1	4.348994E-1	4.348970E-1
1.0	4.297830E -1	4.297843E-1	4.297822E-1

### (3) 引入线性变化的反应性

引入的反应性为  $\rho(t) = 0.0007t$ 。图 4.4 给出了引入反应性后 10s 内中子密度随时间的变化。在 6s 内中子密度不产生量级的变化，6~10s 内中子密度变化可跨 5 个数量级。参考文献[1]中全隐式龙格库塔方法的计算结果，将其与本文的计算误差绘制在图 4.5 中。可见在计算引入线性变化的反应性问题时，本方法明显优于全隐式龙格库塔方法。

### (4) 引入正弦变化的反应性

引入的反应性为  $\rho = 0.0014\sin(\pi t/5)$ 。图 4.6 描述了引入这种复杂反应性下中子密度随时间的变化。中子密度产生震荡变化，并有上升趋势，且振幅越来越大。计算结果与文献[1]相符。

表 4.4 给出了中子密度的第一个峰值与对应时刻，计算结果与 Hermite 方法计算结果符合得很好。可见本文的方法可精确计算复杂的反应性引入下中子的动态响应。

表 4.4 正弦反应性引入下中子密度的第一个峰值与对应时刻

达到峰值的时刻		峰值	
Hermite	本文	Hermite	本文
$h = 1E-4s$	$h = 1E-4s$	$h = 1E-4s$	$h = 1E-4s$
2.9894	2.9893	1.40733017	1.40733020

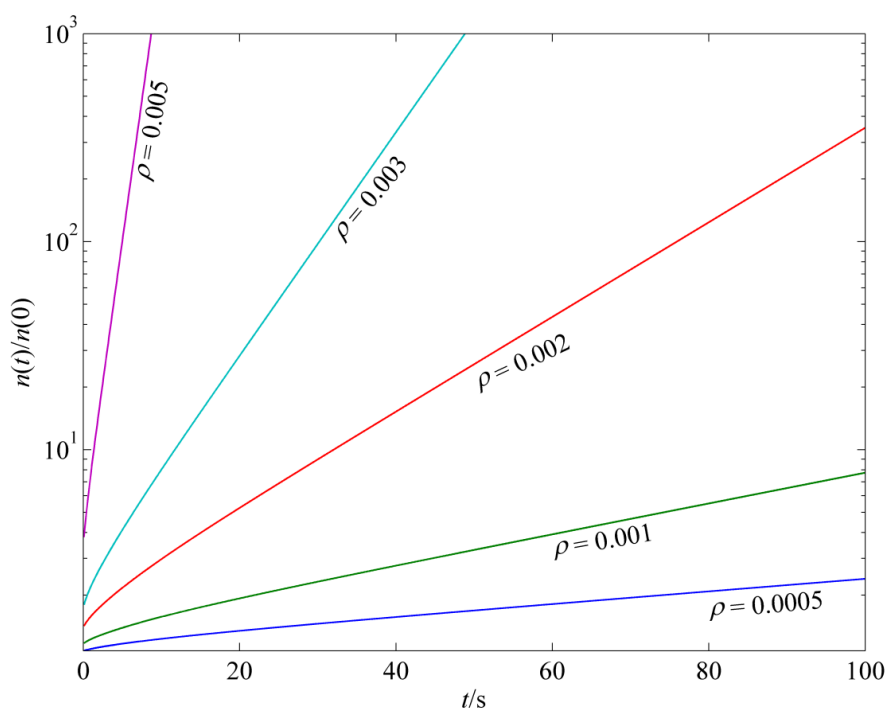


图 4.2 正反应性阶跃下中子密度随时间的变化

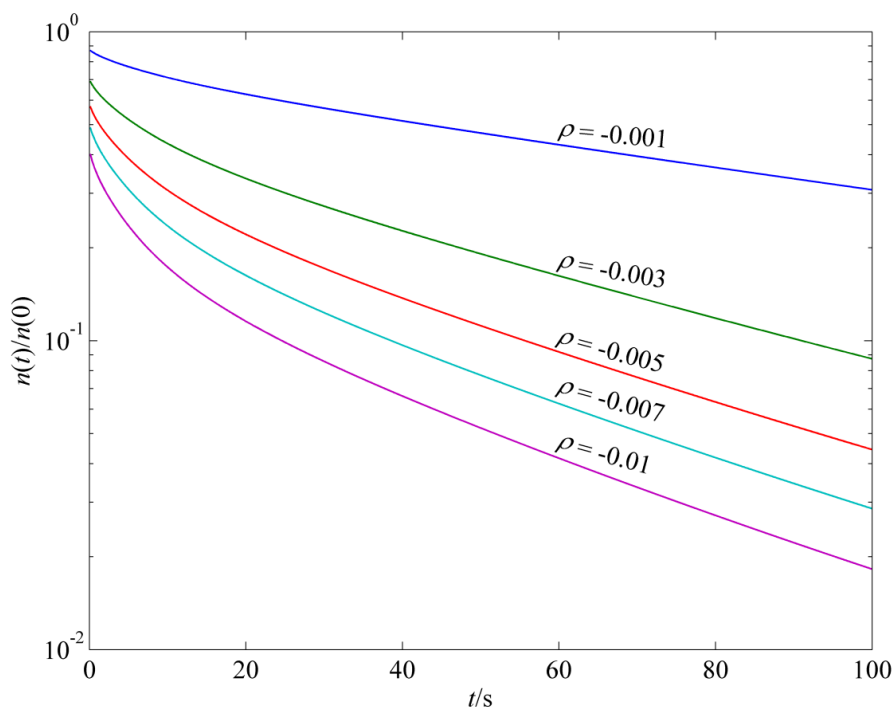


图 4.3 负反应性阶跃下中子密度随时间的变化

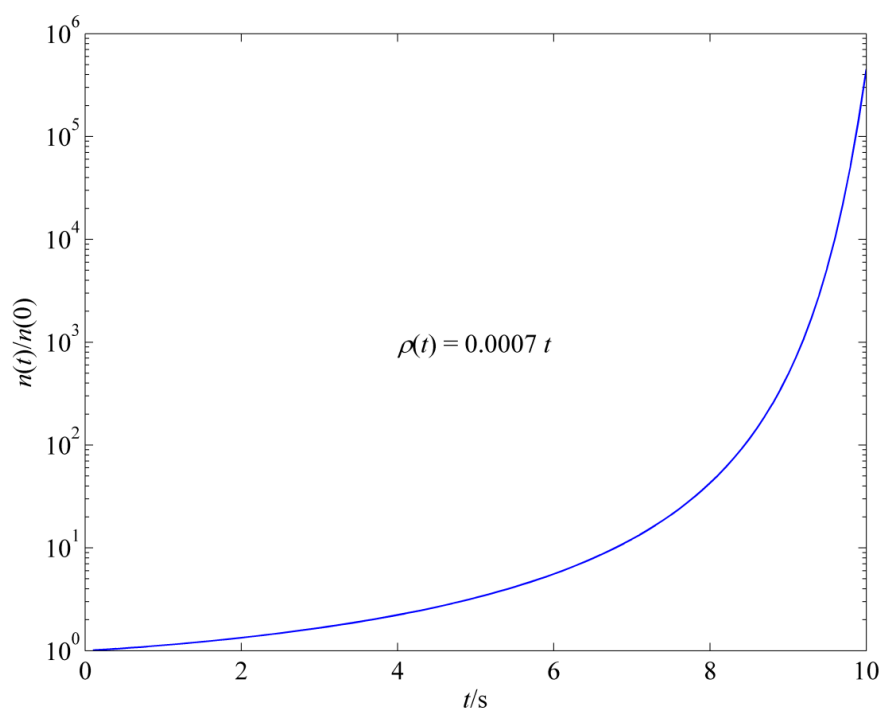


图 4.4 反应性线性变化下中子密度随时间的变化

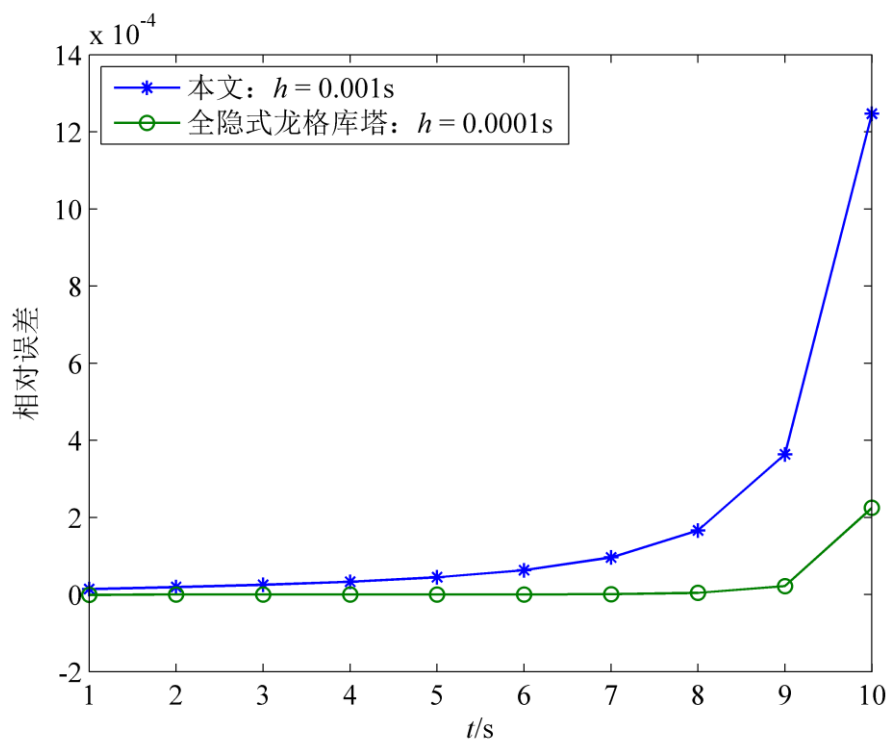


图 4.5 计算结果对比

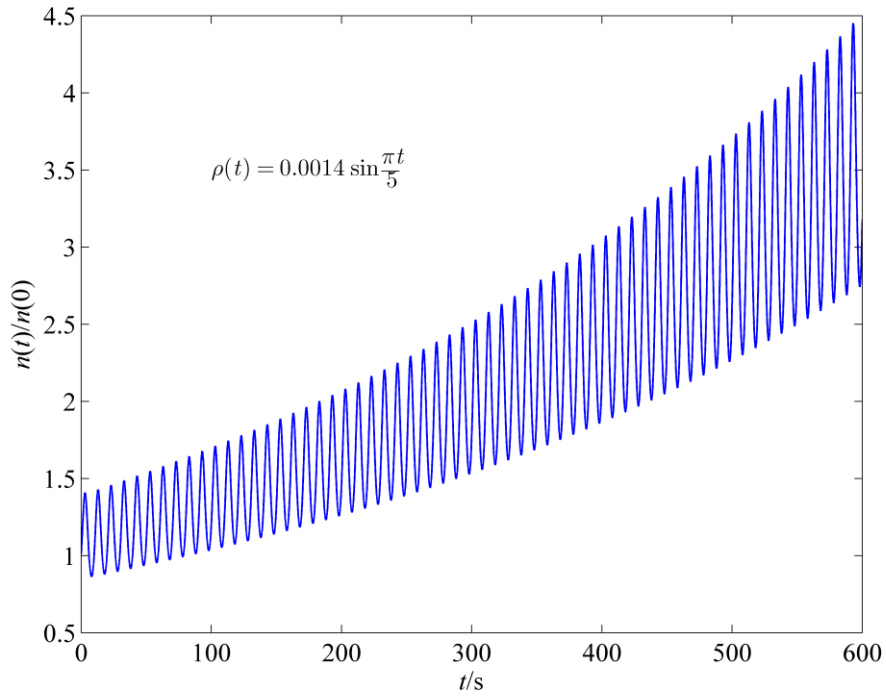


图 4.6 反应性正弦变化下中子密度随时间的变化

## 4.2 单组缓发中子的快堆

等效的快堆单组缓发中子的等效参数为： $\beta=0.0065$ ； $\lambda=0.08$ ； $\Lambda=10^{-8}$ 。

初始状态下， $n(0)=1.0\text{cm}^{-3}$ ，0 时刻引入反应性阶跃  $\rho=0.0022$ 。中子密度具有解析解： $n(t)=Ae^{w_1 t}+(1-A)e^{w_2 t}$ ，其中， $A=1.5116276192$ ， $w_1=0.0409302209\text{s}^{-1}$ ， $w_2=-430000.1209\text{s}^{-1}$ 。

选取 10s、20s 两种时间步长，将计算结果与方程的解析解画到同一张图上，如图 4.7 所示。在 100s 前两种时间步长下获得的计算结果与解析解相符。100s 后， $h=20\text{s}$  的计算结果偏离了解析解，而  $h=10\text{s}$  的计算结果没发生偏离。当步长选取太大时，一阶泰勒展开过程中的截断误差较大，会降低该方法的求解精度。

本算例说明本文的方法适用于只含有一组缓发中子的中子动态计算，具有很好的普适性。

由于最初的推导过程中没有省略外加中子源项，因而一阶泰勒展开方法同样适用于有外加中子源的计算。

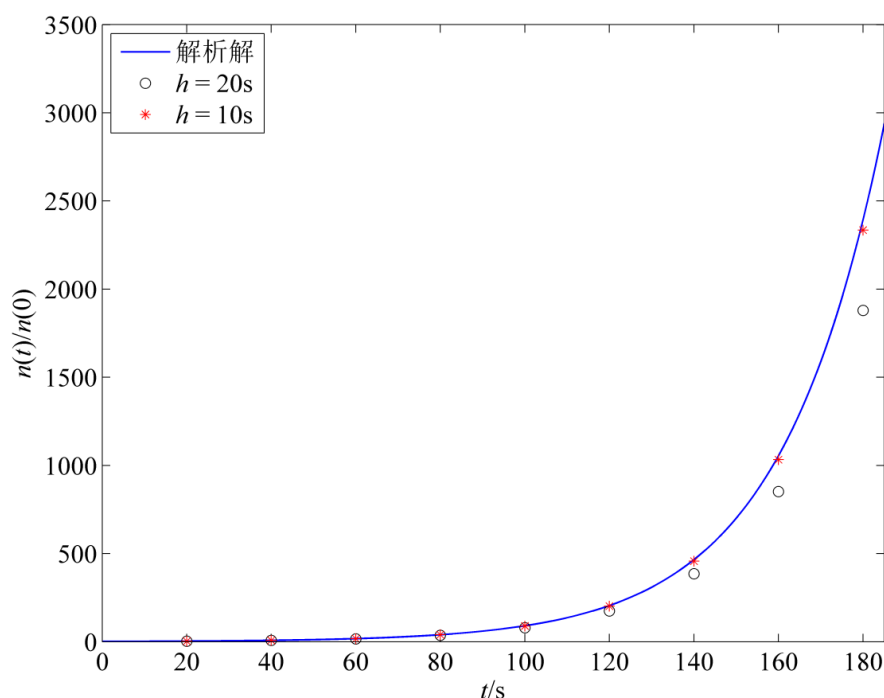


图 4.7 不同时间步长下计算结果与解析解的对比

## 5 结论

本文采用一阶泰勒多项式积分方法求解点堆动力学方程。针对典型热堆的计算结果表明：

(1) 在小的正反应性阶跃或负反应性阶跃变化情形下，步长  $h$  为  $0.01s$  时即可获得满意的计算精度；

(2) 在大的正反应性阶跃情形下，截断误差变得重要，需缩小时间步长来提高计算精度；

(3) 本方法同样适用于引入线性变化、正弦变化反应性的计算。

单组缓发中子快堆的计算结果表明，计算程序的使用不局限于含有 6 组缓发中子的典型热堆。

综上所述，一阶泰勒多项式积分方法可显著消除由方程刚性带来的数值求解不利影响。本方法具有计算精度高、适应性强的特点，可用于核动力系统安全分析与仿真计算。在当前工作的基础上，可进一步考虑检验计算程序的运行速度、优化代码及添加热工反馈模型。

## 参考文献

- [1] 王伟吉, 叶金亮, 方成跃. 全隐式龙格库塔法求解点堆动力学方程[J]. 核科学与工程, 2014, 34(3): 289-295.
- [2] 黎浩峰, 陈文振, 朱倩, 等. 用高阶泰勒多项式积分方法求解点堆中子动力学方程[J]. 原子能科学技术, 2008 (S1): 162-168.
- [3] 濮继龙. 点堆动态方程的半解析解 [J]. 核动力工程, 1983, 4(1): 7-16.
- [4] 陈昌友. 一个求解点堆中子动力学方程组的数值积分方法[J]. 核科学与工程, 2005, 25(1): 20-23.
- [5] 谢仲生, 吴宏春, 张少弘. 反应堆物理分析[J]. 2000.