



计算机组成与结构 —运算方法2

计算机科学与技术学院



温故 — 关于数制表示

- 补码加减法的过程?
 - $[X + Y]_{\text{补}} = [X]_{\text{补}} + [Y]_{\text{补}}$
 - $[X - Y]_{\text{补}} = [X]_{\text{补}} + [-Y]_{\text{补}}$
- 简述双符号法溢出判断方法?
 - 符号位 S 变成 S_2S_1
 - • 正数 $\rightarrow 00$
 - • 负数 $\rightarrow 11$
 - 溢出判断条件: $OF = S_1 \oplus S_2$
- 简述半加器和全加器?
 - 没有进位输入(Carry In)的加法器
 - 包含进位输入(Carry In)的加法器



温故 — 关于数制表示

- 简述行波进位加法器？
 - 自低位向高位，依次计算、进位，计算、进位
- 简述先行进位加法器？
- 各级的进位彼此是独立产生，通过输入数据A，B和C_{in}可先行获取进位C_i，减小进位产生的延时



本节学习要点

- 原码乘法（一位/两位）
- 补码乘法—booth
- 除法（原码/补码）



定点数运算—原码乘法



定点数运算—乘法

原码一位乘法就是模拟手工乘法:

- 符号 $S_m = S_A \oplus S_b$, 数值 $|m| = |A| \times |B|$

例, $[X]_{\text{原}} = 0.1101$, $[Y]_{\text{原}} = 1.1011$, 求积

解: 符号, $S = 0 \oplus 1 = 1$; 数值部分如下:

模拟手工乘法

$$\begin{array}{r} \text{X} \quad \quad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}} \right\} \text{如何描述这一过程?}$$



定点数运算—乘法

原码一位乘法就是模拟手工乘法:

- 符号 $S_m = S_A \oplus S_b$, 数值 $|m| = |A| \times |B|$

例, $[X]_{\text{原}} = 0.1101$, $[Y]_{\text{原}} = 1.1011$, 求积

解: 符号, $S = 0 \oplus 1 = 1$; 数值部分如下:

模拟手工乘法

				1	1	0	1
X				1	0	1	1
				1	1	0	1
			1	1	0	1	
		0	0	0	0		
	1	1	0	1			
	1	0	0	0	1	1	1

如何描述这一过程?

1. 设一临时变量 $D = 0$
2. 若 Y 末位为 1, $D = D + X$
3. D 右移一位; Y 右移一位
4. 若 Y 有剩余位数, 回到第 2 步
5. 结束



定点数运算—乘法

原码一位乘法就是模拟手工乘法:

• 符号 $S_m = S_A \oplus S_b$, 数值 $|m| = |A| \times |B|$

例, $[X]_{\text{原}} = 0.1101$, $[Y]_{\text{原}} = 1.1011$, 求积

解: 符号, $S = 0 \oplus 1 = 1$; 数值部分如下:

模拟手工乘法

$\begin{array}{r} X \quad 1101 \\ 1011 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 10001111 \end{array}$

1. 设一临时变量 $D = 0$
2. 若 Y 末位为 1, $D = D + X$
3. D 右移一位; Y 右移一位
4. 若 Y 有剩余位数, 回到第 2 步
5. 结束

通过临时变量 D 累加逐层结果

第一层 加1101	0 0 0 0	<-临时变量 D , 初值为 0 $Y = 1011$; $D = D + X$
	+ 1 1 0 1	
	1 1 0 1	
第二层 加1101	0 1 1 0 1	D 右移 $Y = 101$; $D = D \gg 1 + X$
	+ 1 1 0 1 0	
	1 0 0 1 1 1	
第三层 加0000	1 0 0 1 1 1	D 右移 $Y = 10$; $D = D \gg 1 + X$
	+ 0 0 0 0 0 0	
	1 0 0 1 1 1	
第四层 加1101	0 1 0 0 1 1 1	D 右移 $Y = 1$; $D = D \gg 1 + X$
	+ 1 1 0 1 0 0 0	
	1 0 0 0 1 1 1 1	

<<是左移操作, >>是右移操作



定点数运算—乘法

原码一位乘法就是模拟手工乘法:

• 符号 $S_m = S_A \oplus S_b$, 数值 $|m| = |A| \times |B|$

例, $[X]_{\text{原}}=0.1101$, $[Y]_{\text{原}}=1.1011$, 求积

解: 符号, $S = 0 \oplus 1 = 1$; 数值部分如下:

模拟手工乘法

```

      1 1 0 1
X    1 0 1 1
-----
      1 1 0 1
     1 1 0 1
    0 0 0 0
   1 1 0 1
  -----
 1 0 0 0 1 1 1 1
```

1. 设一临时变量 $D = 0$
2. 若 Y 末位为1, $D = D + X$
3. D 右移一位; Y 右移一位
4. 若 Y 有剩余位数, 回到第2步
5. 结束

	D					A		A ₀	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	1	A ₀ =1, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0		1	1	0	→ 右移一次
+0	1	1	0	1					A ₀ =1, +X
1	0	0	1	1		1	1	0	
0	1	0	0	1		1	1	1	→ 右移一次
0	0	0	0	0					A ₀ =0, +0
0	1	0	0	1		1	1	1	
0	0	1	0	0		1	1	1	→ 右移一次
+0	1	1	0	1					A ₀ =1, +X
1	0	0	0	1		1	1	1	
0	1	0	0	0		1	1	1	→ 右移一次

原码一位乘法运算过程

最终结果, $[X]_{\text{原}} \times [Y]_{\text{原}} = 1.10001111$



定点数运算—乘法

练习, $[X]_{\text{原}}=0.100111$, $[Y]_{\text{原}}=1.100111$, 求积

结果为: **1.010111110001**

1. 设一临时变量 $D = 0$
2. 若 Y 末位为1, $D = D + X$
3. D 右移一位; Y 右移一位
4. 若 Y 有剩余位数, 回到第2步
5. 结束

	D	A	A_0	操作
00 +00	0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1	1 0 0 1 1 1	1	$A_0=1, +X$
00 00 +00	1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1	1 1 0 0 1 1	1	右移一次 $A_0=1, +X$
00 00 +00	1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1	1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1	1	右移一次 $A_0=1, +X$
01 00 +00	0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0	1	右移一次 $A_0=0, +0$
00 00 +00	1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0	1	右移一次 $A_0=0, +0$
00 00 +00	0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1	0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1	1	右移一次 $A_0=1, +X$
00 00 +00	1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1	1	右移一次



定点数运算—乘法

练习, $[X]_{\text{原}}=0.110111$, $[Y]_{\text{原}}=1.1001$, 求积 **1.01 1110 1111**

1. 设一临时变量 $D = 0$
2. 若 Y 末位为1, $D = D + X$
3. D 右移一位; Y 右移一位
4. 若 Y 有剩余位数, 回到第2步
5. 结束

	D	Y	操作
00	0 0 0 0 0 0	1 0 0 1	$A_0=1, +X$
00	1 1 0 1 1 1		
00	1 1 0 1 1 1		
00	0 1 1 0 1 1	1 1 0 0	右移一次
00	0 0 1 1 0 1	1 1 1 0	右移一次
00	0 0 0 1 1 0	1 1 1 1	右移一次 $A_0=1, +X$
00	1 1 0 1 1 1		
00	1 1 1 1 0 1	1 1 1 1	
00	0 1 1 1 1 0	1 1 1 1	右移一次



定点数运算—乘法

原码二位乘法,

一次乘两位数字? 这个在十进制下很反人类啊..., 但在二进制下, 似乎还好...

$$\begin{array}{r} \times \quad 1101 \\ \quad 1001 \\ \hline \quad 1101 \quad \text{+|X|} \\ 11010 \quad \text{+2|X|} \\ \hline 01110101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 1101 \\ \quad 1100 \\ \hline \quad 0000 \quad \text{+0} \\ 100111 \quad \text{+3|X|} \\ \hline 10011100 \end{array}$$

规则似乎很直观:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{i+1}Y_i = 00, +0 \\ Y_{i+1}Y_i = 01, +|X| \\ Y_{i+1}Y_i = 10, +2|X| \\ Y_{i+1}Y_i = 11, +3|X| \end{array} \right.$$



定点数运算—乘法

原码二位乘法,

一次乘两位数字? 这个在十进制下很反人类啊..., 但在二进制下, 似乎还好...

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times 1001 \\ \hline 1101 \quad +|X| \\ 11010 \quad +2|X| \\ \hline 01110101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times 1100 \\ \hline 0000 \quad +0 \\ 100111 \quad +3|X| \\ \hline 10011100 \end{array}$$

规则似乎很直观:

$$\begin{cases} Y_{i+1}Y_i = 00, +0 \\ Y_{i+1}Y_i = 01, +|X| \\ Y_{i+1}Y_i = 10, +2|X| \\ Y_{i+1}Y_i = 11, +3|X| \end{cases}$$

规则还可以更进一步优化:

$$3|X| = +4|X| - |X|$$

⇒先减 $|X|$, 平移2位后加 $|X|$

怎么做减法? 把 X 和 D 用补码表示

$$\begin{array}{r} 001101 \\ \times 001100 \\ \hline 000000 \\ 110011 \quad -|X| \\ 001101 \quad +|X| \\ \hline 0110011100 \end{array}$$

+4X



怎么做减法？把X和D用补码表示

A diagram illustrating a 6x6 grid of binary digits (0s and 1s). A large 'X' is drawn on the left side of the grid. The grid is divided into two horizontal sections by a thick black line. The top section contains the following rows of digits:

- Row 1: 0 0 1 1 0 1
- Row 2: 0 0 1 1 0 0
- Row 3: 0 0 0 0 0 0
- Row 4: 1 1 0 0 1 1

The bottom section contains the following rows of digits:

- Row 5: 0 0 1 1 0 1
- Row 6: 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0

Green lines are drawn under the bottom row of the top section (1 1 0 0 1 1) and the top row of the bottom section (0 0 1 1 0 1).

通过临时变量D累加逐层结果

第一层 加0000	0 0 0 0 0 0	<-临时变量D，初值为0 $Y=1100; D = D + X$
	+ 0 0 0 0 0 0	
	0 0 0 0 0 0	
第二层 减1101	0 0 0 0 0 0 0 0	末两位为11 $Y=11;$ $D = D \gg 2 - X$
	+ 1 1 0 0 1 1 0 0	
	1 1 0 0 1 1 0 0	
第三层 加1101	1 1 1 1 0 0 1 1 0 0	末两位为00，欠1 $D = D \gg 2 + X$
	+ 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0	
	0 0 1 0 0 1 1 1 0 0	

<<是左移操作, >>是右移操作



定点数运算—乘法

原码二位乘法

规则还可以更进一步优化:

$$3|X| = +4|X| - |X|$$

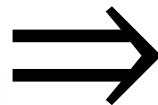
⇒先减 $|X|$ ，平移2位后加 $|X|$

怎么做减法？把X和D用补码表示

补充的规则:

无论是否“欠” $|X|$ ，一次最多 $+2|X|$;

如果“当轮”+“欠的” >2 ，继续“欠”下去~



标记是否要 $+4|X|$

Y_{i+1}	Y_i	C	操作
0	0	0	+0, 右移2次, C=0
0	0	1	+ $ X $, 右移2次, C=0
0	1	0	+ $ X $, 右移2次, C=0
0	1	1	+2 $ X $, 右移2次, C=0
1	0	0	+2 $ X $, 右移2次, C=0
1	0	1	- $ X $, 右移2次, C=1
1	1	0	- $ X $, 右移2次, C=1
1	1	1	+0, 右移2次, C=1



定点数运算—乘法

原码二位乘法，完整规则表

标记是否进位

Y_{i+1}	Y_i	C	操 作
0	0	0	+0, 右移2次, C=0
0	0	1	+ X , 右移2次, C=0
0	1	0	+ X , 右移2次, C=0
0	1	1	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	0	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	1	- X , 右移2次, C=1
1	1	0	- X , 右移2次, C=1
1	1	1	+0, 右移2次, C=1

例, $[X]_{\text{原}}=0.100111$, $[Y]_{\text{原}}=1.100111$, 求积

解: $[2X]_{\text{补}}=01.001110$; $[-X]_{\text{补}}=1.011001$

符号位	D	A	操作
0 0 0 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1	1 0 0 1 1 1	C=0 -X
1 1 1 1 1 1 0 0 1	0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0	0 1 1 0 0 1	C=1 →右移二次 C=1,+2X
0 0 1 0 0 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0	0 0 0 1 1 0	C=0 →右移二次 C=0,+2X
0 0 1 0 0 0	0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1	1 1 0 0 0 1	C=0 →右移二次

图 3-9 例 3-12 的二位乘法的运算过程

原码两位乘法运算过程

最终结果, $[X]_{\text{原}} \times [Y]_{\text{原}}$
 $=1.010111110001$



定点数运算—乘法

练习, $[X]_{\text{原}}=0.110110$, $[Y]_{\text{原}}=1.101101$,

求积

解: $[-X]_{\text{补}}=1.001010$;

$[2X]_{\text{补}}=01.101100$;

结果为: **1. 1001 0111 1110**

Y_{i+1}	Y_i	C	操 作
0	0	0	+0, 右移2次, C=0
0	0	1	+ X , 右移2次, C=0
0	1	0	+ X , 右移2次, C=0
0	1	1	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	0	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	1	- X , 右移2次, C=1
1	1	0	- X , 右移2次, C=1
1	1	1	+0, 右移2次, C=1

	D	A	操作
0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0	1 0 1 1 <u>0 1</u>	C=0,+X
0 0 0 0 0 0 1 1 1	1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0	1 0 1 1 <u>0 1</u> 1 0 1 0 <u>1 1</u>	右移两次 C=0,-X
1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0	1 0 1 0 <u>1 1</u> 1 1 1 0 <u>1 0</u>	右移两次 C=1,-X
1 1 0 1 1 1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0	1 1 1 0 <u>1 0</u> 1 1 1 1 1 0	右移两次 C=1,+X
0 0 0	1 0 0 1 0 1	1 1 1 1 1 0	



定点数运算—乘法

练习, $[X]_{\text{原}}=0.110110$, $[Y]_{\text{原}}=1.101101$,

求积

解: $[-X]_{\text{补}}=1.001010$;

$[2X]_{\text{补}}=01.101100$;

结果为: **1. 1001 0111 1110**

Y_{i+1}	Y_i	C	操 作
0	0	0	+0, 右移2次, C=0
0	0	1	+ X , 右移2次, C=0
0	1	0	+ X , 右移2次, C=0
0	1	1	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	0	+2 X , 右移2次, C=0
1	0	1	- X , 右移2次, C=1
1	1	0	- X , 右移2次, C=1
1	1	1	+0, 右移2次, C=1

	D	A	操作
0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0	1 0 1 1 <u>0 1</u>	C=0,+X
0 0 0 0 0 0 1 1 1	1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0	1 0 1 1 <u>0 1</u> 1 0 1 0 <u>1 1</u>	右移两次 C=0,-X
1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0	1 0 1 0 <u>1 1</u> 1 1 1 0 <u>1 0</u>	右移两次 C=1,-X
1 <u>1 0</u> 1 <u>1 1</u> 0 0 0	<u>1 1 1 1 1 1</u> <u>1 0 1 1 1 1</u> 1 1 0 1 1 0	1 1 1 0 <u>1 0</u> <u>1 1</u> 1 1 1 0	右移两次 C=1,+X
0 0 0	1 0 0 1 0 1	1 1 1 1 1 0	



定点数运算—补码乘法



定点数运算—补码乘法

补码乘法

- ~~校正法~~
- Booth法
- ~~两位Booth法~~



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

<—无脑计算需要6步
v.s
略用心机只需3步—>

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

<—无脑计算需要6步
v.s
略用心机只需3步—>

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

只关心Y为1的位



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

<—无脑计算需要6步
v.s
略用心机只需3步—>

能不能更简化! ?

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

←无脑计算需要6步
v.s
略用心机只需3步→

能不能更简化! ?

先看一个日常使用的技巧:

$$12345 \times 1001 = 12345 \times (1000 + 1)$$

$$2342 \times 999 = 2342 \times (1000 - 1)$$

对二进制, 也一样!

$$1010 \times 0111 = 1010 \times (1000 - 1)$$

$$1010 \times 1110 = 1010 \times (10000 - 10)$$

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \quad \quad 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

简化条件:
存在“一串1”



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

← 略用心机需要3步
V.S
运用技巧只需2步→

在此处加 $|X|$

在此处减 $|X|$

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline [-X]_{\text{补}} \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

问题来了：如何高效地识别“一串1”的开始和结束？



定点数运算—补码乘法

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

<—略用心机需要3步
V.S
运用技巧只需2步—>

在此处加 $|X|$

在此处减 $|X|$

$$\begin{array}{r} X \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline [-X]_{\text{补}} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

问题来了：如何高效地识别“一串1”的开始和结束？

Booth算法：

- 从右向左，遇到“1 0”就是“一串1”的开始，在1的位置减 $|X|$ ；
- 从右向左，遇到“0 1”就是“一串1”的结束，在0的位置加 $|X|$ ；
- 中间的“00”和“11”都不管！

y_i	y_{i-1}	操 作
0	0	部分积+0，右移1位
0	1	部分积+ $[X]_{\text{补}}$ ，右移1位
1	0	部分积+ $[-X]_{\text{补}}$ ，右移1位
1	1	部分积+0，右移1位



booth乘法

Booth算法:

- 从右向左, 遇到“1 0”就是“一串1”的开始, 在1的位置减 $|X|$;
- 从右向左, 遇到“0 1”就是“一串1”的结束, 在0的位置加 $|X|$;
- 中间的“00”和“11”都不管!

y_i	y_{i-1}	操 作
0	0	部分积+0, 右移1位
0	1	部分积+[X] _补 , 右移1位
1	0	部分积+[-X] _补 , 右移1位
1	1	部分积+0, 右移1位

- ①: booth乘法的乘数和被乘数还有结果都应由补码表示。
- ②: booth乘法计算前应在乘数末尾补零。(防止末尾出现11的情况)
- ③: booth乘法的符号位参与计算。
- ④: booth乘法应以双符号位方式进行计算, 防止结果溢出。



补码乘法

y_i	y_{i-1}	操 作
0	0	部分积+0, 右移1位
0	1	部分积+[X] _补 , 右移1位
1	0	部分积+[-X] _补 , 右移1位
1	1	部分积+0, 右移1位

【例】 $X = 0.1010$, $Y = -0.1101$, 利用Booth法求积。

【解】：

$$[X]_{\text{补}} = 00.1010$$

$$[-X]_{\text{补}} = 11.0110$$

$$[Y]_{\text{补}} = 11.0011$$

$$\therefore [X \cdot Y]_{\text{补}} = 1.01111110$$

符号	D	A	A_{-1}	操作说明
0 0	0 0 0 0	1 0 0 1 1	0	
1 1	0 1 1 0			+[-X] _补
1 1	0 1 1 0			
1 1	1 0 1 1	0 1 0 0 1	1	右移1位
0 0	0 0 0 0			+0
1 1	1 0 1 1			
1 1	1 1 0 1	1 0 1 0 0	1	右移1位
0 0	1 0 1 0			+ [X] _补
0 0	0 1 1 1			
0 0	0 0 1 1	1 1 0 1 0	0	右移1位
0 0	0 0 0 0			+0
0 0	0 0 1 1			
0 0	0 0 0 1	1 1 1 0 1	0	右移1位
1 1	0 1 1 0			+ [-X] _补
1 1	0 1 1 1	1 1 1 0 1	0	不移位

在此处减|X|

在此处加|X|



定点数运算—乘法

练习, $[X]_{\text{原}}=0.110110$, $[Y]_{\text{原}}=1.101101$

采用booth算法求积

等效: $[X]_{\text{原}}=1.101101$, $[Y]_{\text{原}}=0.110110$

解: $[Y]_{\text{补}}=00.110110$;

$[-X]_{\text{补}}=00.101101$

$[X]_{\text{补}}=11.010011$

结果为: **1.0110 1000 0010**

$[XY]_{\text{补}} = \text{1.0110 1000 0010}$

$[XY]_{\text{反}} = \text{1.0110 1000 0001}$

$[XY]_{\text{原}} = \text{1.1001 0111 1110}$

符号	D	A	A_{-1}	操作说明
0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 1 0 1 1 0	0	
0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 0 1 1	0	右移1位
0 0	1 0 1 1 0 1			$+[-X]_{\text{补}}$
0 0	1 0 1 1 0 1	0 0 1 1 0 1 1	0	
0 0	0 1 0 1 1 0	1 0 0 1 1 0 1	1	右移1位
0 0	0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 1 1 0	1	右移1位
1 1	0 1 0 0 1 1			$+ [X]_{\text{补}}$
1 1	0 1 1 1 1 0	0 1 0 0 1 1 0	1	
1 1	1 0 1 1 1 1	0 0 1 0 0 1 1	0	右移1位
0 0	1 0 1 1 0 1			$+ [-X]_{\text{补}}$
0 0	0 1 1 1 0 0	0 0 1 0 0 1 1	0	
0 0	0 0 0 1 1 1	0 0 0 0 1 0 0	1	右移2位
1 1	0 1 0 0 1 1			$+ [X]_{\text{补}}$
1 1	0 1 1 0 1 0	0 0 0 0 1 0 0	1	
1 1	0 1 1 0 1 0	0 0 0 0 1 0 0	1	不移位