Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С.П. Королева»

Институт информатики и кибернетики

Кафедра технической кибернетики

**Отчет по курсовой работе**

Дисциплина: «Уравнения математической физики»

Тема: **«АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Вариант № 5

Выполнили студенты: Курицын Н.С., Елисеев И.В.

Группа 6308-010302D

Преподаватель Дегтярев А.А.

2022

**Исходные данные и задание к курсовой работе**

**Тема:** Аналитическое решение краевых задач математической физики.

**Исходные данные**

Вариант работы №5, значения физических и геометрических параметров, заданные преподавателем:

* ;
* ;
* ;
* ;
* .

**Задание к курсовой работе**

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.

2. Используя метод разделения переменных (метод Фурье) получить решение краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье, соответствующим краевым условиям задачи.

3. Исследовать сходимость ряда Фурье, получить оценку остатка ряда.

4. Разработать компьютерную программу расчета функции-решения краевой задачи (суммирования ряда Фурье) с требуемой точностью. При расчете коэффициентов ряда использовать метод численного интегрирования, если это необходимо. Обеспечить контроль погрешности численного интегрирования. Если необходимо, то разработать специальный программный модуль для вычисления используемых собственных чисел оператора Лапласа. Обеспечить контроль погрешности вычисления собственных чисел. Компьютерная программа должна обеспечивать возможность диалогового режима ввода физических, геометрических параметров задачи, числа суммируемых элементов ряда, графическую визуализацию рассчитанного решения задачи.

5. Используя разработанную программу, провести экспериментальное исследование качества полученной аналитической оценки остатка ряда Фурье.

6. Оформить отчет о выполненной курсовой работе в соответствии с требованиями, изложенными в подразделе 3.2 настоящих методических указаний.

**Вариант задачи 5**

Разработать программу численного решения задачи теплопроводности в тонком однородном кольце радиусом R, сечением s на временном промежутке 0 *< t ≤ T*, если на поверхности кольца происходит теплообмен с окружающей средой, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена *α*. Коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости материала кольца равны *k* , и *c* соответственно.

Начальное распределение температуры кольца описывает функцией

*,*

где – полярный угол.

Предполагается, что в кольце отсутствует внутренние источники тепла.

Для численного моделирования процесса теплопроводности в кольце использовать представление решения описанной задачи математической физики в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, удовлетворяющим краевым условиям задачи.

При проведении расчетов использовать значения параметров , а также выражение функции , указанные преподавателем [1].

РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 18 c., 2 рисунка, 2 таблицы, 2 источника, 1 приложение.

*УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, РЯД ФУРЬЕ, ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА.*

Целью курсовой работы является получение решения краевой задачи теплопроводности в тонком однородном кольце в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа и создание компьютерной программы для расчета функции-решения с заданной точностью.

Для получения аналитического решения краевой задачи использован метод разделения переменных (метод Фурье). Решение задачи получено в виде бесконечного ряда Фурье. Получена оценка остатка ряда.

Разработана компьютерная программа, обеспечивающая расчет и графическую визуализацию задачи теплопроводности в тонком однородном кольце на временном промежутке . Для контроля погрешности усечения бесконечного ряда использована оценка остатка ряда.

Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности, а также результаты экспериментального исследования практической пригодности полученной оценки остатка ряда.

Программа написана на языке Python в среде разработки PyCharm Community Edition 2021.3.2, операционная система Windows 10 Home.

**Содержание**

[Введение 7](#_Toc104200345)

[1 Математическая постановка задачи 8](#_Toc104200346)

[2 Построение решения в виде ряда Фурье (Курицын Н.С) 9](#_Toc104200347)

[3 Оценка остатка ряда (Елисеев И.В.) 11](#_Toc104200348)

[4 Проверка качества оценки остатка ряда (Курицын Н.С.) 12](#_Toc104200349)

[5 Графическая демонстрация динамики физических процессов (Елисеев И.В.) 13](#_Toc104200350)

[Заключение 15](#_Toc104200351)

[Список использованных источников 16](#_Toc104200352)

[Приложение А 17](#_Toc104200353)

# **ВВЕДЕНИЕ**

Метод разделения переменных, один из старейших и наиболее широко используемых методов решения некоторых типов дифференциальных уравнений в частных производных.

Многие проблемы в физике связаны с вибрациями и колебаниями. Часто колебательное движение является простым и могут быть представлены в виде отдельных синусоидальных или косинусоидальных функций. Однако во многих случаях формы волн непросты и, в отличие от синусов и косинусов, могут быть трудны для аналитической обработки. Методы Фурье дают нам набор мощных инструментов для представления любой периодической функции в виде суммы синусов и косинусов.

Задачи, которые можно решить с помощью разделения переменных, относительно ограничены. Прежде всего, уравнение должно быть линейным. Ведь решение находится как сумма простых решений. Уравнение в частных производных не обязательно должно быть уравнением с постоянными коэффициентами, но коэффициенты не могут быть слишком сложными. Вы должны уметь разделять переменные. Такой коэффициент, как  в уравнении, не является разделимым.

Метод разделения переменных состоит в факторизации по каждой независимой переменной функции, определяющей решение уравнения математической физики. Далее осуществляется переход к задаче Штурма-Лиувилля, решение которой приводит к получению собственных функций и соответствующих им собственных чисел оператора Лапласа. Затем решение исходной задачи ищется в виде ряда Фурье по этим собственным функциям.

# **1 Математическая постановка задачи**

В общем виде уравнение теплопроводности выглядит следующим образом [2]:

. (1.1)

Оно будет действовать на всей длине кольца. Тогда уравнение действует при .

Для удобства представим кольцо в виде трубки.

Так как мы разделили кольцо, то левый и правый концы трубки будут одинаково распределять тепло:

. (1.2)

Из-за разделения кольца изменение распределения тепла, также одинаково на двух концах:

. (1.3)

В условии дан закон, по которому можно определить концентрацию вещества в трубке в начальный момент времени:

. (1.4)

Таким образом, имеем следующую систему:

(1.5)

# **2 Построение решения в виде ряда Фурье (Курицын Н.С)**

Для получения ряда Фурье применим метод разделения переменных. Пусть ,. Тогда система (1.5) примет вид: (2.1)

Поделим уравнение из системы (2.1) на , получаем:

. (2.2)

Из (2.2) получаем два уравнения для и :

, (2.3)

. (2.4)

Согласно геометрическому смыслу задачи, функция –- периодическая, поэтому зафиксируем и исходя из краевых условий системы (2.1) получаем:

, (2.5)

. (2.6)

Итак, мы пришли к периодической задаче Штурма-Лиувилля:

(2.7)

Общее решение уравнения системы (2.7) имеет вид:

. (2.8)

Найдем производную уравнение (2.8):

. (2.9)

Подставим (2.8) и (2.9) в краевые условия системы (2.7) и найдем нетривиальное решение. Получаем, что собственные значения и функции равны соответственно:

, (2.10)

. (2.11)

Обратимся теперь к решению уравнения (2.4) при :

. (2.12)

Общее решение уравнения (2.12) имеет вид:

, (2.13)

где – произвольная постоянная.

Таким образом, частные решение системы (2.1) имеют вид:

(2.14)

где – коэффициенты Фурье, находящиеся по формулам:

,,. (2.15)

Пользуясь формулами (2.15), вычислим:

*,*

,

*,*

,

.

Посчитав коэффициенты приходим к ряду Фурье:

. (2.16)

# **3 Оценка остатка ряда (Елисеев И.В.)**

Частичная сумма:

.(3.1)

Пусть существует – погрешность ().

Сделаем замену тогда получаем:

,

посчитаем интеграл:

,

приходим к функции–мажоранта и обозначим её :

,. (3.2)

Введем положительное число , при котором неравенство (3.2) верно. С помощью полученной функции найдем Nmin, при заданных и *t*. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Нахождение *Nmin*для заданной погрешности

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 1 | 45.0 | 90.0 | 135.0 | 180.0 |
| *Nmin* | 83 | 5 | 3 | 2 | 2 |

# **4 Проверка качества оценки остатка ряда (Курицын Н.С.)**

Для исследования качества полученной оценки введем положительное число . Для получения будем уменьшать , найденное в 3 части, пока выполняется неравенство:

(4.1)

Полученные результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Нахождение *Nmin* и*Nexp* для заданного времени *T*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |  |  |  |
|  | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Таким образом, можно сделать вывод о том, что найденная нами оценка достаточно высокого качества.

# **5 Графическая демонстрация динамики физических процессов (Елисеев И.В.)**

Используя значения оценки остатка ряда, приведенных в таблице 1, построим графики зависимости . На рисунке 1 представлен график зависимости при фиксированном времени.

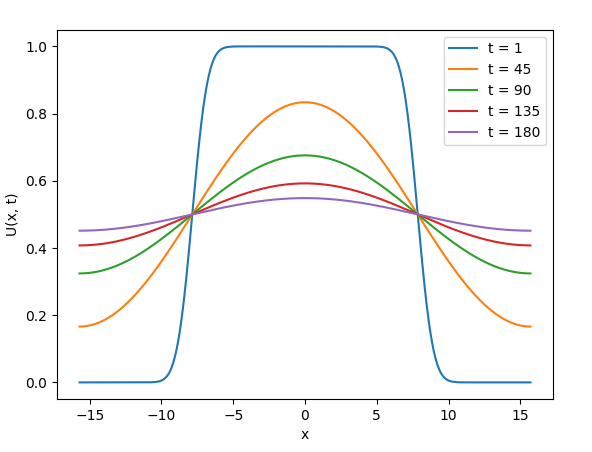


Рисунок 1 – График изменения температуры от координаты при , ,  
, ,.

На графике видно, что чем больше времени проходит, тем больше тепла распределяется по всему кольцу. В начальный момент времени тепло находиться в центре кольца. Затем тепло начинает распределяться по кольцу, поэтому со временем график стремится принять форму прямой, что говорило бы о том, что во всем кольце установился один уровень тепла.

На рисунке 2 представлен график зависимости при фиксированном положении .

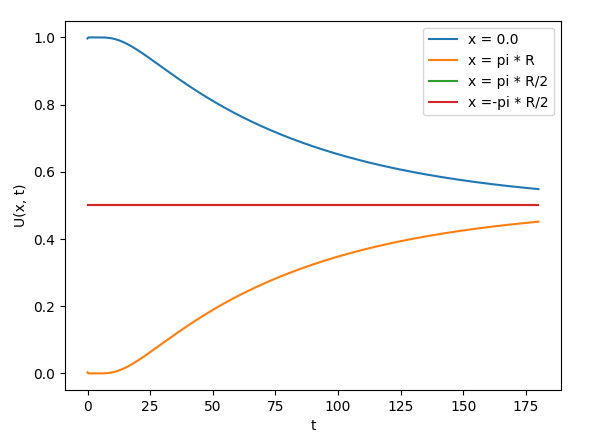


Рисунок 2 – График изменения температуры от времени при .

Рисунок 2 показывает, как изменяется температура кольца в разных точках со временем. Видно, что температура на крае, что соответствует точке при , возрастает. Именно на краях происходят максимальные изменения температуры. При и , видим, что это графики, которые совпадают и в этих точка с течением времени не меняется. Это точки теплового баланса. При , в центре кольца, видим, что температура была максимальной, а затем с течение времени уменьшается. По всем графикам видно, что они стремятся к температуре в точке теплового баланса.

# **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности, получено аналитическое решение задачи в виде бесконечного ряда Фурье.

Получена оценка сверху остатка ряда, которая была использована в компьютерной программе численного моделирования волнового процесса и позволила обеспечить контроль погрешности усечения бесконечного ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что использование в программе полученной оценки остатка ряда может приводить к несущественной избыточности числа суммируемых элементов ряда, оценка ряда высокого качества.

# **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Дегтярев, А.А. Аналитическое решение краевых задач математической физики [Текст]: методические указания / А.А. Дегтярев. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2020. – 60 с.
2. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. пособие / И.Г. Араманович, В.И. Левин. - М.: Наука, 1969. – 288 с.

# **ПРИЛОЖЕНИЕ А**

Программная реализация аналитического решения

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import math

k = 0.59

c = 1.65

R = 5

T = 180

alpha = 0.004

S = 0.04

a = math.sqrt(k / c)

A0 = 0.5

x\_array = np.linspace(-math.pi \* R, math.pi \* R, 500)

eps\_array = [0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 10 \*\* -5, 10 \*\* -6, 10 \*\* -7]

T\_array = [0.01, T / 4, T / 2, 3 \* T / 4, T]

def An(n):

return 2 \* np.sin(math.pi \* n / 2) / (n \* math.pi)

def Psi(x):

if -math.pi \* R <= x <= math.pi \* R:

return 1

else:

return 0

def F(eps, time):

n = 1

while True:

G = (c \* pow(R, 2) \* np.exp(-(k \* time \* n) / (c \* pow(R, 2)))) / (math.pi \* pow(n, 2) \* k \* time)

# print(G)

if G < eps:

break

n = n + 1

##print("eps=", eps, " T=", time, "N=", n)

return n

def U(x, t, b):

u = A0

for i in range(1, b + 1):

u += An(i) \* np.cos(i \* x / R) \* np.exp(-pow(i \* a / R, 2) \* t)

# print("x=", x, " i=", i, An(i) \* np.cos(i \* x / R) \* np.exp(-pow(i \* a / R, 2) \* t), "U=", u)

# print("end")

return u

def Fexp(n, time, eps):

i = n

while all([abs(U(x, time, i) - U(x, time, i - 1)) < eps for x in x\_array]):

i -= 1

#print(i)

return i

EPS = 0.001

#for i in eps\_array:

# print("T=", T, " eps=", i, " Nmin=", F(i, T), " Nexp=", Fexp(F(i, T), T, i))

y1 = [U(\_x\_array, T\_array[0], F(EPS, T\_array[0])) for \_x\_array in x\_array]

y2 = [U(\_x\_array, T\_array[1], F(EPS, T\_array[1])) for \_x\_array in x\_array]

y3 = [U(\_x\_array, T\_array[2], F(EPS, T\_array[2])) for \_x\_array in x\_array]

y4 = [U(\_x\_array, T\_array[3], F(EPS, T\_array[3])) for \_x\_array in x\_array]

y5 = [U(\_x\_array, T\_array[4], F(EPS, T\_array[4])) for \_x\_array in x\_array]

plt.plot(x\_array, np.abs(y1), label="t = 0.01")

plt.plot(x\_array, np.abs(y2), label="t = T/4")

plt.plot(x\_array, np.abs(y3), label="t = T/2")

plt.plot(x\_array, np.abs(y4), label="t = 3\*T/4")

plt.plot(x\_array, np.abs(y5), label="t = T")

# print(Fexp(F(EPS, T\_array[0]), T\_array[0], EPS))

plt.xlabel("t")

plt.ylabel("U(x, t)")

plt.legend()

plt.show()