

金融專題期末報告



隨機波動率和隨機利率下的期權定價 台灣的實證研究

學生: 江鎮安、蘇鈺璇、王本偉

指導教授: 陳亭甫

學系: 數學系

Abstract

金融市場的不確定性和風險對於期權定價提出了嚴峻的挑戰。為了準確估計期權價格，金融學者們一直在探索各種因素對期權價格的影響。其中，隨機波動率和隨機利率是金融市場中兩個重要的隨機因素。

隨著金融市場的不斷演變，傳統的期權定價模型已不足以應對現實市場中的複雜情況。一個重要的原因是傳統模型假設資產的波動率和利率是固定的，而這與實際市場的變動性和不確定性存在著明顯差異。因此，學者們開始將隨機波動率和隨機利率納入模型，以更準確地反映市場變動。

我們引用了台灣加權指數買權，去評估在隨機利率或隨機波動下，評價模型的表現。

目錄

1	Instruction	1
2	The Option Pricing Model	1
3	Pricing Formula for European Options	3
4	The Valuation of European Call Options using the Fast Fourier Transform	5
5	Implementation	5
5.1	Parameter Estimation	5
5.2	Data Description	7
6	Empirical Tests	8
6.1	Method	8
6.2	Static Performance	11
7	Conclusion	12

1 Instruction

期權定價在金融研究中是一個極具吸引力的領域。隨著金融市場的不斷演變和日益複雜化，準確地將各種不確定性因素納入模型中，以實現期權定價變得至關重要。隨機波動率和隨機利率是金融市場中兩個主要的隨機性來源。

在本研究中，我們將調查這些因素對期權定價和對沖效能的影響，並利用台灣的加權指數買權進行實證研究，樣本的區間從 2023/02/17 到 2023/05/22。使用隨機波動度模型能夠捕捉到資產波動性的時間變動性，從而更真實地反映市場動態。同樣地，將隨機利率納入模型中則能夠考慮到借貸成本和利率波動的隨機性變化，這對期權定價具有重大影響。

2 The Option Pricing Model

在經濟學中，在 t 時的利率以 $R(t)$ 表示，其瞬時速率為：

$$dR(t) = [\theta_R - \hat{\kappa}R(t)]dt + \rho_R\sqrt{R(t)}d\omega_R(t)$$

其中， $\hat{\kappa}$ 是一個決定利率到達穩定狀態的參數，穩定狀態為 $\frac{\theta_R}{\hat{\kappa}}$ ，而 $\omega_R(t)$ 是標準布朗運動。

在 t 時的隨機波動度為： $dV(t) = \theta_V - \hat{\kappa}V(t)]dt + \rho_V\sqrt{V(t)}d\omega_V(t)$ 。同樣的， $\hat{\kappa}$ 是一個決定利率到達穩定狀態的參數，穩定狀態為 $\frac{\theta_V}{\hat{\kappa}}$ ， $\omega_R(t)$ 是標準布朗運動。零息股的股票在 t 時，報酬率的動態表現為：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(S, t)dt + \sqrt{V(t)}d\omega_S(t)$$

在 t 時，剩餘日期為 τ 的零息債券，在到期日會給你 \$1 的債券可以表示為

$$B(t, \tau) = E_Q[\exp(-\int_t^{t+\tau} R(s)ds)]$$

接著，考慮在風險溢價上的波動度和利率，得到在 t 時的瞬時波動和瞬時利率為：

$$dV(t) = [\theta_V - \kappa_V V(t)]dt + \rho_V\sqrt{V(t)}d\omega_V(t)$$

$$dR(t) = [\theta_R - \kappa_R R(t)]dt + \rho_R\sqrt{R(t)}d\omega_R(t)$$

其中 $\kappa_R \equiv \hat{\kappa} + \lambda_R$ ， $\kappa_V \equiv \hat{\kappa} + \lambda_V$ 。

風險測度下，報酬率動態表現為：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = R(t)dt + \sqrt{V(t)}d\omega_S(t)$$

接著，我們將 $Cov_t[dS(t), dV(t)] = \rho\sigma_S\sigma_V S(t)V(t)dt$ ，且 $Cov_t(d\omega_S, d\omega_R) = Cov_t(d\omega_V, d\omega_R)=0$ ，這是為了讓模型能用公式解解出來。

於此，我們在風險測度下計算 $E_Q[\exp(-\int_t^{t+\tau} R(s)ds)]$ ，得到

$$B(t, \tau) = \exp[-\varphi(\tau) - \varrho(\tau)R(t)], \quad (37.8)$$

$$\text{where } \varphi(\tau) = \frac{\theta_R}{\sigma_R^2} \left\{ (\varsigma - \kappa_R) \tau + 2 \ln \left[1 - \frac{(1-e^{-\varsigma\tau})(\varsigma-\kappa_R)}{2\varsigma} \right] \right\},$$

$$\varrho(\tau) = \frac{2(1-e^{-\varsigma\tau})}{2\varsigma - [\varsigma - \kappa_R](1-e^{-\varsigma\tau})} \text{ and } \varsigma \equiv \sqrt{\kappa_R^2 + 2\sigma_R^2}.$$

在我們的研究中，我們將針對四種模型，比較它們之間的評價表現，分別是 BS model、隨機利率 (SI)、隨機波動 (SV)、隨機利率及隨機波動 (SVSI)。下表將演示他們之間的關聯：

model/波動度和利率	波動度(Volatility)	利率(Interest Rate)
BS	常數	常數
SI	常數	隨機
SV	隨機	常數
SVSI	隨機	隨機

Figure 1: 橫軸為波動度及利率是否為隨機，縱軸為四種模型

3 Pricing Formula for European Options

針對歐式選擇權，我們令到期日為 τ ，在 t 時的選擇權價格為 $C(t, \tau)$ 表示。因為 (S, R, V) 都尊崇馬可夫決策過程，因此， $C(t, \tau)$ 為 $S(t)$ 、 $V(t)$ 、 $R(t)$ 的函數。我們假定無風險測度下，選擇權價值的變動度的期望值，等於把錢放在無風險資產下的利息，得到

$$E[dC(t - \tau, S, V, R)] = R * C * dt$$

接著，我們將式子 $dC(t, S, V, R)$ 做二階泰勒展開，並將上面的 $dR(t)$ 、 $dV(t)$ 、 $dS(t)$ 都帶進去，得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + R S \frac{\partial C}{\partial S} + \rho \sigma_v V S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \\ & + [\theta_v - \kappa_v V] \frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma_R^2 R \frac{\partial^2 C}{\partial R^2} \\ & + [\theta_R - \kappa_R R] \frac{\partial C}{\partial R} - \frac{\partial C}{\partial \tau} - R C = 0, \end{aligned} \quad (37.9)$$

觀察發現，這個式子只與 t 、 τ 、 S 、 R 、 V 有關，這在做後續計算時須多加留意。經過計算，我們得到：

$$C(t, \tau) = S(t) \Pi_1(t, \tau; S, R, V) - K B(t, \tau) \Pi_2(t, \tau, S, R, V)$$

$$\Pi_j(t, \tau; S(t), R(t), V(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(t, \tau, S(t), R(t), V(t); \phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

在此公式中，隨機利率或隨機波動度，都伴隨著不同的特徵函數，以 SVSI 為例，其特徵多項式為：

$$\begin{aligned} f_1(t, \tau) = \exp \left\{ -\frac{\theta_R}{\sigma_R^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_R - \kappa_R](1 - e^{-\xi_R \tau})}{2\xi_R} \right) + [\xi_R - \kappa_R] \tau \right] \right. \\ \left. - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v \tau})}{2\xi_v} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} [\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v] \tau + i\phi \ln[S(t)] + \frac{2i\phi(1 - e^{-\xi_R \tau})}{2\xi_R - [\xi_R - \kappa_R](1 - e^{-\xi_R \tau})} R(t) \right. \\ \left. + \frac{i\phi(i\phi + 1)(1 - e^{-\xi_v \tau})}{2\xi_v - [\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v \tau})} V(t) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(t, \tau) = \exp \left\{ -\frac{\theta_R}{\sigma_R^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_R^* - \kappa_R](1 - e^{-\xi_R^* \tau})}{2\xi_R^*} \right) + [\xi_R^* - \kappa_R] \tau \right] \right. \\ \left. - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v^* + i\phi\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v^* \tau})}{2\xi_v^*} \right) + [\xi_v^* - \kappa_v + i\phi\rho\sigma_v] \tau \right] \right. \\ \left. + i\phi \ln[S(t)] - \ln[B(t, \tau)] + \frac{2(i\phi - 1)(1 - e^{-\xi_R^* \tau})}{2\xi_R^* - [\xi_R^* - \kappa_R](1 - e^{-\xi_R^* \tau})} R(t) \right. \\ \left. + \frac{i\phi(i\phi - 1)(1 - e^{-\xi_v^* \tau})}{2\xi_v^* - [\xi_v^* - \kappa_v + i\phi\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v^* \tau})} V(t) \right\}, \end{aligned}$$

SV 的特徵多項式為：

$$\begin{aligned}\hat{f}_1 &= \exp \left\{ -i\phi \ln[B(t, \tau)] - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v - \kappa_v + (1+i\phi)\rho\sigma_v](1-e^{-\xi_v\tau})}{2\xi_v} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} [\xi_v - \kappa_v + (1+i\phi)\rho\sigma_v] \tau + i\phi \ln[S(t)] + \frac{i\phi(i\phi+1)(1-e^{-\xi_v\tau})}{2\xi_v - [\xi_v - \kappa_v + (1+i\phi)\rho\sigma_v](1-e^{-\xi_v\tau})} V(t) \right\} \\ \hat{f}_2 &= \exp \left\{ -i\phi \ln[B(t, \tau)] - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v^* - \kappa_v + i\phi\rho\sigma_v](1-e^{-\xi_v^*\tau})}{2\xi_v^*} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} [\xi_v^* - \kappa_v + i\phi\rho\sigma_v] \tau + i\phi \ln[S(t)] + \frac{i\phi(i\phi-1)(1-e^{-\xi_v^*\tau})}{2\xi_v^* - [\xi_v^* - \kappa_v + i\phi\rho\sigma_v](1-e^{-\xi_v^*\tau})} V(t) \right\}\end{aligned}$$

SI 的特徵多項式：

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 &= \exp \left\{ \frac{1}{2} i\phi(1+i\phi)V\tau + i\phi \ln[S(t)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta_R}{\sigma_R^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_R - \kappa_R](1-e^{-\xi_R\tau})}{2\xi_R} \right) + [\xi_R - \kappa_R]\tau \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i\phi(1-e^{-\xi_R\tau})}{2\xi_R - [\xi_R - \kappa_R](1-e^{-\xi_R\tau})} R(t) \right\} \\ \tilde{f}_2 &= \exp \left\{ \frac{1}{2} i\phi(i\phi-1)V\tau + i\phi \ln[S(t)] - \ln[B(t, \tau)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta_R}{\sigma_R^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_R^* - \kappa_R](1-e^{-\xi_R^*\tau})}{2\xi_R^*} \right) + [\xi_R^* - \kappa_R]\tau \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(i\phi-1)(1-e^{-\xi_R^*\tau})}{2\xi_R^* - [\xi_R^* - \kappa_R](1-e^{-\xi_R^*\tau})} R(t) \right\}\end{aligned}$$

$$\xi_R = \sqrt{\kappa_R^2 - 2\sigma_R^2 i\phi}, \xi_v = \sqrt{[\kappa_v - (1+i\phi)\rho\sigma_v]^2 - i\phi(i\phi+1)\sigma_v^2}, \xi_R^* = \sqrt{\kappa_R^2 - 2\sigma_R^2(i\phi-1)}, \text{ and } \xi_v^* = \sqrt{[\kappa_v - i\phi\rho\sigma_v]^2 - i\phi(i\phi-1)\sigma_v^2}$$

4 The Valuation of European Call Options using the Fast Fourier Transform

給定當前對數價格、初始波動度和利率，我們有以下模型的特徵函數表達式

$$f(t, T, x_t, v_t, r_t; \omega) = \exp\{i\omega x_t + C(\tau) + D(\tau)v_t + E(\tau)r_t\}$$

根據 Feynman-Kac Theorem，此特徵函數為以下透過 Ito's lemma 得出的 PDE 的解

$$\begin{aligned} f_t + f_x(r_t - \frac{v_t}{2}) + f_v\kappa(\theta - v_t) + f_r\alpha(\beta - r_t) \\ + \frac{1}{2}f_{xx}v_t + \frac{1}{2}f_{vv}\sigma_v^2v_t + \frac{1}{2}f_{rr}\sigma_r^2r_t + f_{xv}\rho\sigma_vv_t = 0, \end{aligned}$$

在限制條件為 $\tau=T-t$ ， $C(0)=D(0)=E(0)=0$

根據選擇權評價的快速傅立葉轉換，歐式的選擇權價格可表示為

$$C(t, T, k) = \frac{e^{-uk}}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-i\omega k} \frac{e^{-rT} f(t, T, x_t, v_t, r_t; \omega - i(u+1))}{u^2 + u - \omega^2 + i(2u+1)\omega} d\omega \right)$$

其中 $u>0$ ，對數價格 $k = \ln K$

5 Implementation

5.1 Parameter Estimation

除了股票價格和到期日，SVSI 評價模型需要以下參數作為輸入

- 選擇權價格
- 波動度
- 利率
- 週期
- 七個結構參數

$$\Phi \equiv \{\kappa_R, \theta_R, \sigma_R, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v, \rho\}.$$

Procedure A

step 1:

- 藉由得到的短利率、股票收益並使用 GMM 來估算結構參數

step 2:

- 使用前面章節 3 Pricing Formula for European Options 提到的 f_1 、 f_2 作為風險中立的機率值
- 透過兩個機率、股票價格、到期收益 (yield-to-maturity) 計算選擇權價格

$$C(t, \tau) = S(t)\Pi_1(t, \tau; S, R, V) - KB(t, \tau)\Pi_2(t, \tau, S, R, V)$$

缺點:

1. 在經濟學上嚴格的方法來計算結構參數時，step1 需要過去歷史資料，所以沒有那麼方便實用 (歷史數據品質不佳、數據資料有限)
2. 此方法依賴股票波動度的測量 (遇到難測量的)

Procedure B

step 1:

- 收集 N 天的選擇權價格
- 可以觀察出資料上的價格和模型產生的價格誤差會是一個與波動度和 7 個結構參數有關的函數關係，也就是

$$\epsilon_n[V(t), \Phi] \equiv \hat{C}_n(t, \tau_n, K_n) - C_n(t, \tau_n, K_n),$$

- 目標: 找到能極小化模型價格與市場價格的誤差平方和的參數

$$\sum_{n=1}^N |\epsilon_n[V(t), \Phi]|^2$$

- 此步驟是用來估算隱含變異數和七個結構參數的樣本內參數校估

step 2:

- 仿照 ProcedureA step2 的方式計算在相同股票下隔天的選擇權價格

5.2 Data Description

資料來源為台灣新報 TEJ，從 2023 年 2 月 17 日至 2023 年 5 月 22 日期間，我們取得台灣加權指數買權的相關資料，包括履約價、選擇權收盤價、標的證券價格、剩餘日期和一年定存利率。

我們利用這些資訊來計算價格再價內、價外或價平等的資訊，並進一步預估模型價格。

根據貨幣價值分為三類 S/K S: 標的股價, K: 履約價

1. at - the - money(ATM): 價平 (0.97,1.03)
2. out - the -money(OTM): 價外小於 0.97
3. in - the - money(ITM) : 價內大於 1.03

根據到期期限，每個期權可以分為

1. 極短期 (short-term) <30 天
2. 短期 (short-term) 30-60
3. 近期 (near-term)60-120
4. 中期 (middle-maturity) 120-180
5. 長期 (long-term) >180

日期	履約價 (元)	選擇權收盤價	標的證券價格	價內、價外、價平	剩餘期間 (日)	一年定存利率
738934	13800	0	1.5480e+04	1.1217	6	0.0105
738934	13900	0	1.5480e+04	1.1136	6	0.0105
738934	14000	0	1.5480e+04	1.1057	6	0.0105
738934	14100	0	1.5480e+04	1.0979	6	0.0105
738934	14200	0	1.5480e+04	1.0901	6	0.0105
738934	14300	0	1.5480e+04	1.0825	6	0.0105
738934	14400	0	1.5480e+04	1.0750	6	0.0105
738934	14500	0	1.5480e+04	1.0676	6	0.0105
738934	14600	0	1.5480e+04	1.0603	6	0.0105
738934	14700	0	1.5480e+04	1.0530	6	0.0105
738934	14800	0	1.5480e+04	1.0459	6	0.0105
738934	14900	0	1.5480e+04	1.0389	6	0.0105
738934	14950	0	1.5480e+04	1.0354	6	0.0105
738934	15000	469	1.5480e+04	1.0320	6	0.0105
738934	15050	0	1.5480e+04	1.0286	6	0.0105
738934	15100	370	1.5480e+04	1.0251	6	0.0105
738934	15150	328	1.5480e+04	1.0218	6	0.0105
738934	15200	275	1.5480e+04	1.0184	6	0.0105
738934	15250	233	1.5480e+04	1.0151	6	0.0105

註: 交易日期為 Matlab 格式

6 Empirical Tests

6.1 Method

第一階段: 整理資料

- 資料預處理 (將少量資料去除，取比較大眾的資料筆數)、設定起始值

第二階段: 樣本內參數校估

- 設定校估天數並根據每個模型計算出能極小化模型價格與市場價格的誤差平方和的參數

第三階段: 每日的樣本外的定價差

- 計算評價值和模型估計值之間的誤差
- 根據每天的資料，使用不同的模型來估計選擇權的價格，並將估計值與實際值進行比較，計算誤差，以評估模型的準確性和預測能力

model-FFT:

給定當前對數價格、初始波動度和利率，根據模型的特徵函數與快速傅立葉轉換設定歐式的選擇權價格

1. 定義和初始化變數：

- 將輸入參數中的值賦給相應的變數。
- 從資料集中提取相關數據並將其作為變數的值。

2. 計算模型價格：

- 使用-options 函數（基於四種的模型），根據輸入的參數和數據估計選擇權價格，作為模型價格的估計值。

3. 根據評價模型計算 SSE（平方誤差和）：

- 根據模型價格的估計值，選擇將其作為 SSE 的結果，或者繼續計算其他評價選項。

4. 如何計算 SSE：

- 將每個選擇權的模型價格-實際市場價格除以市場價格，得到相對誤差。
- 將每個相對誤差進行平方。
- 將平方誤差加總，得到最終的 SSE 值，作為 FFT 函數的輸出結果。

補充說明：-options 函數是透過模型的特徵函數，並利用快速傅立葉轉換來進行計算。

Calibration:

將模型以及參數預估起始值，代入 Matlab 內建最小化函數，訓練四模型的參數最佳解並且輸出

1. 定義一個函數：

- 函數的輸入包括處理後的資料集、參數和模型。
- 這個函數用於估計模型的參數。

2. 快速傅立葉相關設定：

- 設定一個變數的值為 0.5，用於快速傅立葉相關計算。

3. 根據條件設定使用的模型：

- 如果使用的是 BS 模型，則計算隱含波動度、平均值和平方差和。
- 如果使用的是 SV、SI 或 SVSI 模型，則設定參數的初始值的上下界，並使用函數最小化-FFT 函數來估計參數，同時將資料集作為參數傳入。
- 得到最佳化的參數 & 平方誤差和作為輸出值。

Error-classify:

對資料進行分類和計算誤差平均值和標準差的過程，包括對價格範圍和到期日的分類，以及相關的矩陣儲存和計算結果的存儲

1. 預處理原始資料：

- 將原始資料進行預處理，分為相對誤差、絕對誤差、到期日和價格範圍。

2. 資料分類：

- 根據價格範圍將資料分為價內、價外和價平，並宣告三個矩陣以儲存後續的分類資料。
- 使用三個變數分別紀錄這三個類別中的資料個數。
- 將資料存入相應的子類別矩陣中。

3. 根據到期日細分成六個子類別（同 2）：

- 根據到期日將資料細分為六個子類別，並宣告矩陣以儲存後續的分類資料。

4. 計算每個子類別的誤差平均值和標準差：

- 使用數學函式套件進行計算。
- 將計算結果存入新的矩陣中，該矩陣的大小為 6 行 12 列。

Main:

三個階段的工作流程：整理資料、參數估計和求每日的樣本外評價誤差

- 第一階段：整理資料
 - 將資料集儲存在變量中。
 - 對變量中的數據根據交易日期、到期天數和 S/K 進行排序。
 - 若資料有以下情況，將其刪減，以避免參數估計失真
 - * 現貨價格或選擇權價格為 NaN
 - * 選擇權價格低於 0.2 或高於 500
 - * 選擇權距到期日在 3 日以下或在 365 日以上
 - * $S/K < 0.5$ 或 $S/K > 2.0$
 - * 隱含波動度為 NaN
 - 使用向量表示期始值並初始化一些變量。
 - 遍歷每個交易日期，找出可用於計算的筆數，並將相應的資料儲存在變量中。
- 第二階段：樣本內參數校估
 - 預設一些天數的資料，採用其中幾天資料訓練參數。
 - * 選取 2023 年 4 月 10 日至 2023 年 4 月 20 日期間
 - 使用 procedureB，找出極小化模型價格與市場價格的誤差平方和的參數。
 - BS 模型只能估計隱含波動度。
 - 實作過程最費時。
- 第三階段：求每日的樣本外評價誤差
 - 提取前一天的參數，代入模型評價今天的價格。
 - 計算預估價格和實際市場價格之間的評價誤差。
 - 將不同貨幣價值與到期日的選擇權進行分類。
 - 計算每個類別的誤差平均值與標準誤。
 - 得到的數值即為我們評判不同模型在各個類別中，靜態表現好壞的重要依據。

6.2 Static Performance

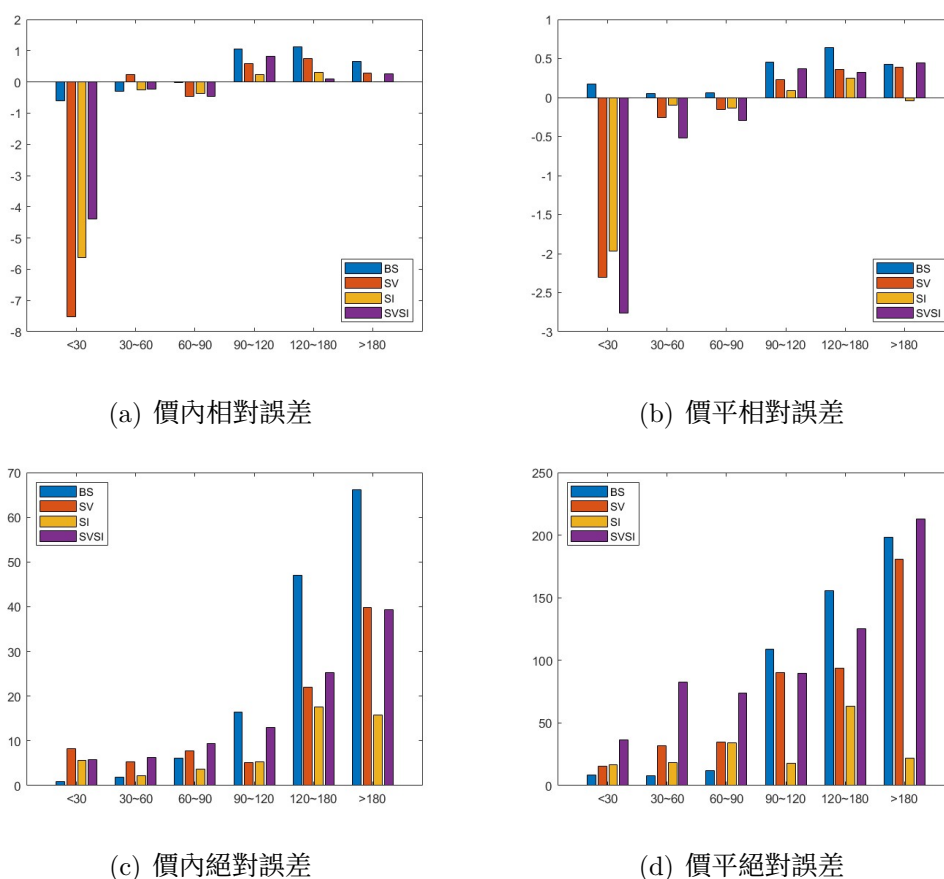


Figure 2: The result of four categories

我們所採納的資料中，價外的資料總共有 8169 筆，計算履約價超過 500，亦即深價外的選擇權共有 800 筆，其餘剩下的皆為收盤價為 0 的資料，因此在第一階段中，所有價外的資料皆被剔除，也導致我們無法評價價外選擇權。實際上，深度價外選擇權的履約價遠離市場價格，所以實現這些選擇權的價值需要股價或標的資產出現大幅波動。此外，台灣的選擇權交易量不如美國，因此，購買深度價外的買家更是乏人問津。

由於相對誤差有正負相消的狀況，較難比較四模型的表現優劣，因此我們主要討論四模型的絕對誤差。從圖中得知，SVSI 模型的絕對誤差雖然隨著到期日的增加而變大，但 BS 模型加大的幅度卻比 SVSI 大很多。此外 SI 模型表現的穩定度，相較於其他模型高很多，這與我們在實驗前所預估的結果有些出入，我們推測的可能原因如下：

1. 資料的樣本不好，或是取樣區間過短
2. 台灣的指數選擇權不適用過於複雜的評價模型
3. 在參數訓練階段，沒有找到最佳參數解

7 Conclusion

使用台灣新報 TEJ 所提供的資料，建構四種模型進行價格預估，能夠為投資者提供重要的參考依據，幫助他們在投資決策中作出明智的選擇。

實證發現，BS 模型還是有它的不可取代性。在計算即期買權時，BS 模型有優於其他模型的靜態表現。然而，在評價遠期買權時，SI 卻異軍突起，表現甚至超越最複雜的模型 SVSI，雖然這可能與資料或是選擇權環境有關，但隨著貨幣價值與到期日的變動，四種模型皆無法獲得壓倒性表現。因此，若日後要預估台灣的指數買權價格，即期可以用 BS 模型，遠期則用 SI 模型進行評價。

References

- [1] Option Pricing and Hedging Performance Under Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rates. In Cheng, FL., Lee, AC. & Lee H (Eds.), Handbook of Quantitative Finance and Risk Management, p. 547-574. New York, N.Y.: Springer, 2010
- [2] Carr, P. and D. B. Madan, 1999, Option Valuation Using the Fast Fourier Transform, Journal of Computational Finance, 2, 61-73.