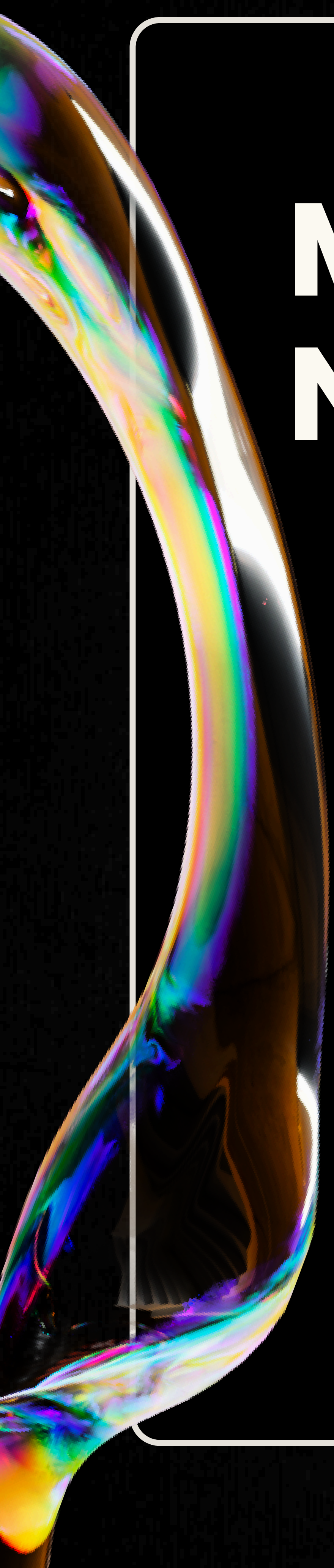
Análisis Númerico

ANÁLISIS NÚMERICO

Present by
Michael Aponte Rodriguez
Camilo Jaimes Avila

GoogleColab

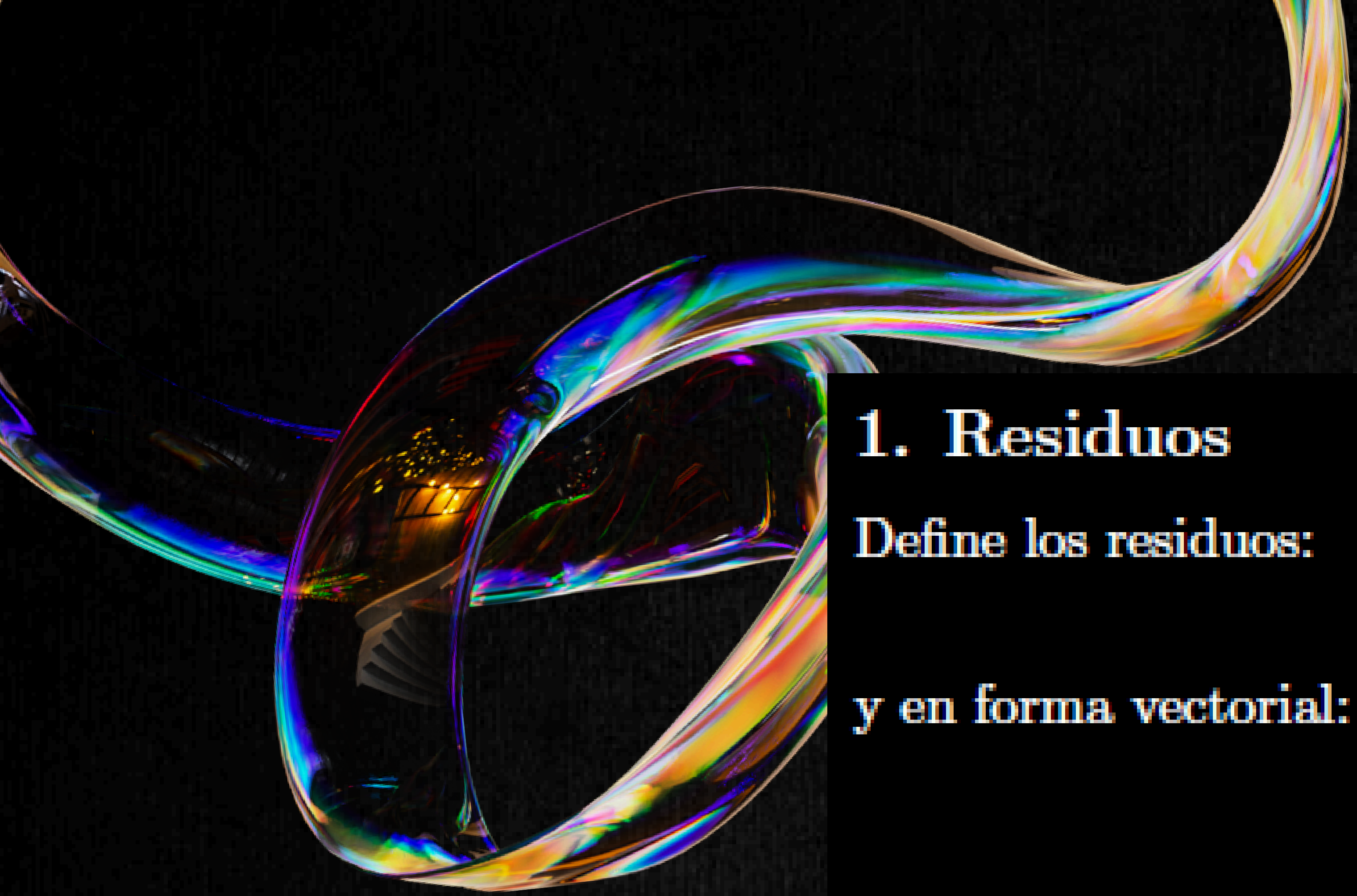
CONTENIDO



METODO DE GAUSS NEWTON

El método de Gauss-Newton es una técnica iterativa utilizada para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales, comunes en aplicaciones donde se ajustan parámetros de un modelo matemático a datos observados. Este método optimiza los parámetros de forma que el modelo se ajuste lo mejor posible a los datos, minimizando la suma de los cuadrados de los errores o residuos.

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i;\theta)\right)^2$$



Pasos del método de Gauss-Newton El método realiza iteraciones para ajustar los parámetros θ, aproximando el sistema de ecuaciones no lineales:

EXPLICACIÓN DEL MÉTODO

1. Residuos

Define los residuos:

$$r_i(\theta) = y_i - f(x_i;\theta)$$

y en forma vectorial:

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} r_1(\theta) \\ r_2(\theta) \\ \vdots \\ r_n(\theta) \end{bmatrix}$$

2. Función objetivo

Reescribe $S(\theta)$ en términos de los residuos:

$$S(\theta) = \|\mathbf{r}(\theta)\|^2 = \mathbf{r}(\theta)^T\mathbf{r}(\theta)$$

3. Linearización mediante aproximación de Taylor

Linealiza $\mathbf{r}(\theta)$ en torno a un punto inicial θ_k:

$$\mathbf{r}(\theta) \approx \mathbf{r}(\theta_k) + J(\theta_k)(\theta - \theta_k)$$

donde $J(\theta_k)$ es la matriz Jacobiana de los residuos:

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i(\theta)}{\partial \theta_j}$$

4. Iteración de Gauss-Newton

Encuentra una actualización para θ resolviendo:

$$\Delta\theta_k = (J^TJ)^{-1}J^T\mathbf{r}(\theta_k)$$

Luego actualiza:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta_k$$

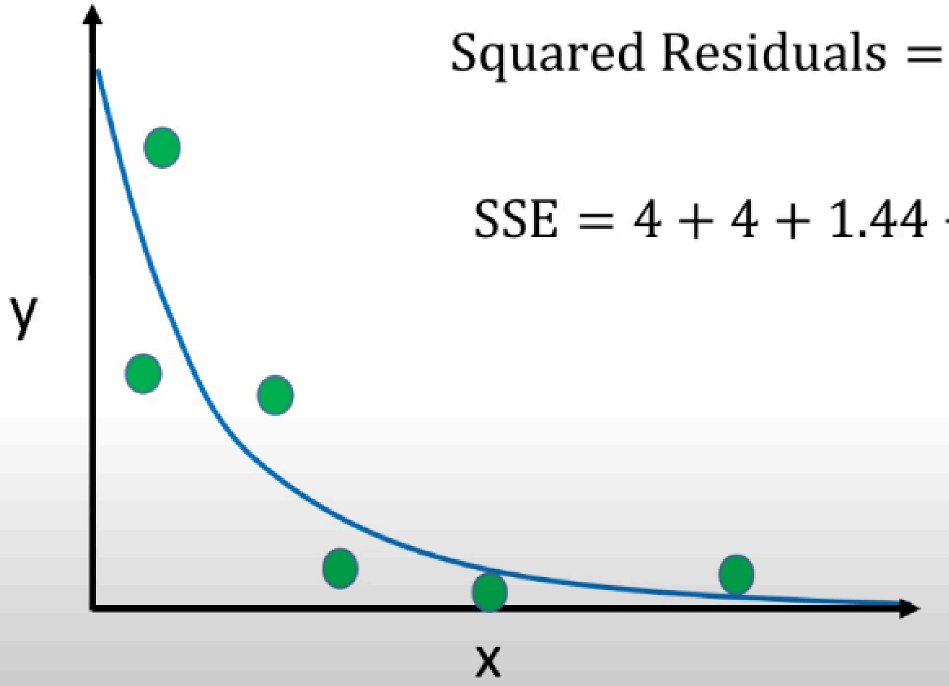
5. Criterio de convergencia

Repite hasta que $\|\Delta\theta_k\|$ o el cambio en $S(\theta)$ sea menor que un umbral predefinido.

EJEMPLO DEL MÉTODO

$$\text{Residuals} = [2 \quad -2 \quad 1.2 \quad -1.2 \quad -0.5 \quad 0.5]$$

$$\text{Squared Residuals} = [4 \quad 4 \quad 1.44 \quad 1.44 \quad 0.25 \quad 0.25]$$



$$\text{SSE} = 4 + 4 + 1.44 + 1.44 + 0.25 + 0.25 = 11.38$$

$$\text{SSE} = \sum_{i}^{n} \boxed{(y_i - \hat{y}_i)}^2$$

$$y = y_0 e^{-kt} \qquad \text{SSE} = \sum_{i}^{n} \left(y_i - y_0 e^{-kt_i}\right)^2 \qquad r_i = y_i - y_0 e^{-kt_i}$$

$$\begin{pmatrix} k_{new} \\ y_{0_{new}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{old} \\ y_{0_{old}} \end{pmatrix} - J_r^T J_r^{-1} J_r^T r \begin{pmatrix} k_{old} \\ y_{0_{old}} \end{pmatrix}$$

$$k_{old} = 0.03$$
$$y_{0_{old}} = 150$$

Drug (mg/L)	Time (min)
147.8	0
78.3	20
44.7	40
29.5	60
15.2	80
7.8	100
3.2	120
3.9	140

$$J_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\partial r_2(k_{old})}{\partial k} & \frac{\partial r_2(y_{0_{old}})}{\partial y_0} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial k} = t_i y_0 e^{-kt_i} = 0 \cdot 150 \cdot e^{-0.03 \cdot 0} = 0$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial y_0} = -e^{-kt_i} = -e^{-0.03 \cdot 0} = \boxed{-1}$$

CÓDIGO

GoogleColab

PREGUNTAS

GRACIAS

Por la atención