Az 1. zh témakörei

1. feladat. *Legyen*

$$A := \left\{ \frac{x^2-2}{3x^2+2} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Határozza meg $\sup A$*-t és* $\inf A$*-t. Van-e az* A *halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?*

Megoldás. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2-2}{3x^2+2} = \frac{\frac{1}{3}(3x^2+2) - \frac{2}{3} - 2}{3x^2+2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2},$$

ezért

$$(*) \qquad -1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 0 + 2} \leq \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} < \frac{1}{3}.$$

A halmaz tehát **korlátos**: -1 egy alsó és $\frac{1}{3}$ egy felső korlát.

A halmaznak **van legkisebb eleme**, ez az $x = 0$ értékhez tartozó -1 szám, tehát

$$\min A = \inf A = -1.$$

$(*)$-ból **sejthető**, hogy

$$\sup A = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás:

(i) $\frac{1}{3}$ egy felső korlát, l. $(*)$-ot.

(ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legkisebb felső korlát, azaz

$$(**) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x^2-2}{3x^2+2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} > \frac{1}{3} - \varepsilon.$$

Legyn $\varepsilon > 0$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} > \frac{1}{3} - \varepsilon \iff \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{3}\Big(\frac{8}{3\varepsilon} - 2\Big),$$

ezért $(**)$ például az $x := \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$ választással teljesül, tehát $\sup A = \frac{1}{3}$.

Mivel $\sup A \notin A$, ezért a halmaznak **nincs legnagyobb eleme**. ■

2. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$f(x) := \frac{2x-1}{x+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$$

függvény invertálható. Határozza meg a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ *és az* $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ *halmazokat, illetve* $x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ *esetén* $f^{-1}(x)$*-et.*

Megoldás. Célszerű először elvégezni a következő átalakítást:

$$(\#) \qquad f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big).$$

Az invertálhatóság igazolása: Legyen $x, t \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \Longrightarrow 2 - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{t+1} \Longrightarrow x = t,$$

és ez azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: (#) alapján *sejthető*, hogy
$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$
Ennek igazolása:

(i) $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R} \setminus \{2\}$ nyilvánvaló, mert (#) alapján $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(ii) Fordítva:
$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \subset \mathcal{R}_f \iff \forall\, y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\text{-höz } \exists\, x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) = y.$$
Ez azonban igaz, mert
$$f(x) = y \iff 2 - \frac{3}{x+1} = y \iff x = -1 + \frac{3}{2-y} = \frac{1+y}{2-y},$$
és $x \neq -1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$; ezért $\mathbb{R} \setminus \{2\} \subset \mathcal{R}_f$.

(i) és (ii)-ből következik, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

A fentiek alapján f inverze az
$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{2-y} \qquad \big(y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big)$$
függvény. ■

3. feladat. *Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:*
$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \textit{és} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. $f \circ g$:
$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \ : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 \leq 1\} = [-1, 1],$$
$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = \sqrt{1-x^2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

$g \circ f$:
$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \ : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in (-\infty, 1] \ : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1],$$
$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x \qquad \big(x \in (-\infty, 1]\big). \quad ■$$

4. feladat. *Sejtse meg az*
$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

Megoldás. Az
$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} = \frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{n^3}} - \dfrac{3}{n}}{2 + \dfrac{1}{n^2}}$$
átalakítás alapján a

sejtés: $\lim(a_n) = \frac{1}{2}$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy
$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n \geq n_0,\, n \in \mathbb{N}\text{-re}: \ \left|\frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$\left|\frac{n^2-2\sqrt{n}-3n}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-4\sqrt{n}-6n-1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{6n+4\sqrt{n}+1}{2(2n^2+1)} \leq \frac{6n+4n+n}{4n^2} \leq \frac{12n}{4n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{3}{\varepsilon}$, ezért az

$$\left|\frac{n^2-2\sqrt{n}-3n}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennáll, ha $n \geq n_0 := \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$. (Az $\varepsilon > 0$ számhoz tehát $\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$ egy „jó" küszöbindex). ■

5. feladat. *Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:*

(a) $a_n := \dfrac{\sqrt{n^4-n+1}}{n^2-\sqrt{n+2}} \quad (n = 1, 2, \ldots);$

(b) $b_n := n+3-\sqrt{n^2-2} \quad (n = 2, 3, \ldots);$

(c) $c_n := \dfrac{2^{1-n}+(-3)^{n+2}+4^n}{2^{2n+1}+n^3 3^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Megoldás. (a) A számlálót és a nevezőt leosztjuk n^2-tel:

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4-n+1}}{n^2-\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}}{1-\sqrt{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k} = 0 \ (k = 3, 4) \text{ és } \lim_{n\to+\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{A}, \text{ ha } \lim(x_n) = A,$$

ezért a számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő sorozat 1-hez tart. A hányadosuk határértéke tehát 1, azaz

$$\lim(a_n) = 1.$$

(b) Most gyöktelenítéssel alakítjuk át a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$b_n = n+3-\sqrt{n^2-2} = \left(n+3-\sqrt{n^2-2}\right)\cdot\frac{n+3+\sqrt{n^2-2}}{n+3+\sqrt{n^2-2}} =$$

$$= \frac{(n+3)^2-(n^2-2)}{n+3+\sqrt{n^2-2}} = \frac{6n+11}{n+3+\sqrt{n^2-2}} = \frac{6+\dfrac{11}{n}}{1+\dfrac{3}{n}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n^2}}}.$$

Mivel $\lim(1/n) = 0$ és $\lim\left(\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right) = 1$, ezért a konvergens sorozatok összegére és szorzatára vonatkozó tételeink alapján a számlálóban levő sorozat 6-hoz, a nevezőben levő sorozat pedig 2-höz tart. A hányadosuk határértéke 3, ezért

$$\lim(b_n) = 3.$$

(c) A következő átalakításokat végezzük el:

$$c_n = \frac{2^{1-n} + (-3)^{n+2} + 4^n}{2^{2n+1} + n^3 3^{n-1}} = \frac{\dfrac{2}{2^n} + (-3)^2(-3)^n + 4^n}{2 \cdot 4^n + \dfrac{1}{3} n^3 3^n} = \frac{2\left(\dfrac{1}{8}\right)^n + 9\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n + 1}{2 + \dfrac{1}{3} n^3 \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}.$$

Mivel $\lim(q^n) = 0$ és $\lim(n^3 q^n) = 0$, ha $|q| < 1$, ezért a számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő pedig 2-höz tart, ezért a hányadosuk határértéke 1/2, azaz

$$\lim(c_n) = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$