A 2. ZH. témakörei

1.

Szükséges tételek / definíciók

Geometriai sorozat határértéke

q

$$q \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} (q^n) \begin{cases} = 0 & \text{ha } |q| < 1 \quad (\Leftrightarrow q \in (-1,1)) \\ = 1 & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty & \text{ha } q > 1 \\ \nexists & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Az e szám definíciója

Legyen $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ és felülről korlátos $\Rightarrow a_n$ konvergens

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$(\sqrt[n]{a})$ konvergenciája (tétel)

Ha $a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$

$(\sqrt[n]{n})$ konvergenciája (tétel)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Közrefogási elv

$(a_n), (b_n), (c_n)$ sorozatok és tegyük fel, hogy

1) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: a_n \leq b_n \leq c_n$

2.) $(a_n), (c_n)$ konvergens és $\lim (a_n) = \lim (c_n) = A$

Ekkor: (b_n) konvergens és $\lim (b_n) = A$.

Szükséges bizonyítás a gyakorlatról:

Tegyük fel hogy a nemnegatív tagú (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n)>0$.
Mutassuk meg, hogy ekkor: $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=1$.

Legyen $a_n\geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$ tegyük fel hogy $\lim(a_n)=\alpha\in(0,+\infty)$

($\Rightarrow$ a sorozat ekkor konvergens)

$\Rightarrow \lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=1$

Bizonyítás:

$\lim(a_n)=\alpha \Rightarrow$ az $\varepsilon=\frac{\alpha}{2}>0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\cancel{\forall} n\geq n_0: \frac{\alpha}{2}<a_n<\frac{3\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}}_{\to 1\ (n\to\infty)}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)\ (\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0)$$

Közrefogás miatt: $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=1$.

Feladat megoldása

Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

ⓐ $a_n:=\sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}}$ $\quad(0<n\in\mathbb{N})$

Sejtés: Mivel $2n^2+3>0$ és $n^2+2>0 \Rightarrow \left(\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}\right)>0$ és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)=2\in(0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n^2+2}}\right)=1.$$

Bizonyítás: Közrefogási elvvel (lásd. szükséges biz. a gyakorlatról, itt számokkal helyettesítem be, de az eredeti is jó szerintem ide)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}\right)=2 \Rightarrow$ az $\varepsilon=1>0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq n_0$: $\cancel{1<a_n<3}$

$\cancel{\Rightarrow \sqrt[n]{1}<\sqrt[n]{}}$ $\quad 1<\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}<3$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{\to 1\ (n\to\infty)}<\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n^2+2}}<\sqrt[n]{3}\to 1\ (n\to\infty)\qquad(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0)$$

Ekkor a közrefogási elv miatt: $\lim\left(\sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}}\right)=1$.

(e) $a_n := \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} \quad (0 < n \in \mathbb{N})$

Sejtés: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n^2\cdot\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n\cdot\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}\right)}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\underbrace{\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}}_{\to 2}}\right) = 1\cdot 1 = \underline{1}$$

Bizonyítás: Közrefogási elvvel

1.) Nagyságrendszerinti alsó becslés:

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} \underset{n>1}{>} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{n+2n}} = \sqrt[n]{\frac{2n^2}{3n}} = \sqrt[n]{\frac{2n}{3}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{2}{3}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \to 1 \ (n\to\infty)$$

2.) Nagyságrendszerinti felső becslés

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} \underset{n>1}{<} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3n^2}{n}} = \sqrt[n]{\frac{5n^2}{n}} = \sqrt[n]{5n} = \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \to 1 \ (n\to\infty)$$

3.) Tehát:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{2n}{3}}}_{\to 1\ (n\to\infty)} < \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} < \sqrt[n]{5n} \to 1 \ (n\to\infty)$$

$\Longrightarrow$ Közrefogási elv miatt: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right) = 1$

(c) $a_n := \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \quad (n\in\mathbb{N})$ (ekkor már a kitevőből sejtjük, hogy e számra kell majd visszavezetni)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{6n+5}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right)^2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(1)}{\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right)^2\right)}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}(1)}{\lim_{n\to\infty}\left(\left(\underbrace{1}_{\to 1}+\underbrace{\frac{1}{3n+1}}_{\to 0}\right)^3\right)} = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1}{1} = e^{-2}$$

Mivel $\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ sorozat az e számhoz tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(0<n\in\mathbb{N})$ sorozat részsorozata.

(d) $a_n := \left(\frac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5} \quad (n \in \mathbb{N})$ (megj.: $(n-5)$-ről nem elképzelhető, hogy $(5n+3)$-á alakítható lenne, így ezt nem akarjuk e számra visszavezetni)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4\left(n+\frac{1}{4}\right)}{5\left(\cancel{5}n+\frac{3}{5}\right)}\right)^{n-5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\cancel{5}n-5}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}}\right)^{n-5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-5}\right) = 0$$ mivel geometriai sorozat és $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$.

$\left(\frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}}\right)$ korlátos, mivel $n+\frac{1}{4} = n+\frac{5}{20} < n+\frac{12}{20} = n+\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}} < 1$$

Mivel korlátos sorozat és nullasorozat szorzata is ~~nul~~ nullasorozat: (tétel szerint)

$$\lim\left(\left(\frac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5}\right) = 0.$$

(Ismétlés:

Ha (a_n) nullasorozat és (c_n) korlátos sorozat $\Big\} \Rightarrow (c_n \cdot a_n)$ nullasorozat
)

2.

Kapcsolódó állítás:

Monoton sorozatok határértéke

$\forall$ monoton sorozatnak van határértéke

1.) Ha (a_n) monoton növekvő $(\nearrow)$ és felülről korlátos

$\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ha (a_n) monoton fogy $(\searrow)$ és alulról korlátos

$\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid \cancel{a}\, n \in \mathbb{N}\}$

2.) Ha (a_n) monoton nő $(\nearrow)$ és felülről nem korlátos $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$

Ha (a_n) monoton fogy $(\searrow)$ és alulról nem korlátos $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$

Feladat megoldása

Határozza meg $a_1 = \sqrt{3},\ a_{n+1} := \sqrt{3+2a_n}\ (n=1,2,\ldots)$ sorozat határértékét.

1. Monotonitás

a) Sejtés: $a_1 = \cancel{2}\sqrt{3} < \sqrt{3+2\sqrt{3}} = a_2 \Rightarrow (a_n)$ szigorú monoton nő $(\uparrow)$

b) Bizonyítás: teljes indukcióval

1.) Megvizsgáljuk az első néhány tagra

$a_1 = \sqrt{3}\ \cancel{\geq} < \sqrt{3+2\sqrt{3}} = a_2$ ✓

$a_2 = \sqrt{3+2\sqrt{3}} < \sqrt{3+\sqrt{3+2\sqrt{3}}} = a_3$ ✓

2.) Tegyük fel, hogy $a_n < a_{n+1}$ egy $n \in \mathbb{N}$ indexre

3.) Kell: $a_{n+1} < a_{n+2}$

$a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n} < \sqrt{3+2a_{n+1}} = a_{n+2}$ ✓

Mivel az indukciós feltevés miatt $a_n < a_{n+1}$

$\Rightarrow$ Tehát bebizonyítottuk, hogy a sorozat ~~monoton növekvő~~ $\cancel{(\nearrow)}$. szig. mon. nő $(\uparrow)$.

2.) Korlátosság

a) Alsó korlát: mivel $(a_n) \uparrow \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $a_1 = \sqrt{3} \leq a_n$

$\Rightarrow$ alsó korlát: $\sqrt{3}$

b.) Felső korlát keresése

Sejtés: ~~Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens~~

~~(a_n) konvergens (mivel ↗ és ↑ és felülről k~~

Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens (azaz van felső korlátja) és $\lim(a_n) =: A$

Ekkor: $\lim(a_{n+1}) = A$ és $\lim(\sqrt{3+2a_n}) = \sqrt{3+2A}$

$\Rightarrow A = \sqrt{3+2A}$ $\quad /()^2$ mivel $A > \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ alsó korl.)

$\hookrightarrow A > 0$

$A^2 = 3+2A$

$A^2 - 2A - 3 = 0$

$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\nearrow A_1 = 3$, $\searrow A_2 = -1$ ↯ $A > \sqrt{3}$

$\Rightarrow A = 3$

Mivel $(a_n)\uparrow \Rightarrow A = 3$ egy felső korlátja is

Bizonyítás: Teljes indukcióval

1.) Megvizsgáljuk az első néhány tagra

$a_1 = \sqrt{3} \leq 3$

2.) Tegyük fel, hogy $a_n \leq 3$ egy $n \in \mathbb{N}$ indexre

3.) Kell: $a_{n+1} \leq 3$

$a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n} \leq \sqrt{3+2\cdot 3} = 3 \leq 3$ ✓

Mivel $a_n \leq 3$ volt az indukciós feltétel.

$\Rightarrow$ Bebizonyítottuk, hogy 3 valóban egy felső korlát.

~~3.f~~

3. Konvergencia (Tudjuk, hogy konvergens, mivel $(a_n)\uparrow$ és felülről korlátos)

A (határérték) keresése: $\lim(a_{n+1}) = \lim(\sqrt{3+2a_n}) \Leftrightarrow A = \sqrt{3+2A}$

$A = \sqrt{3+2A}$ $\quad /()^2$ $\quad A > 0$ mivel $A > \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ az alsó korlát)

$A^2 = 3 + 2A$

$A^2 - 2A - 3 = 0$ $\qquad A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\nearrow A_1 = 3$ ✓, $\searrow A_2 = -1$ ↯ $A < \sqrt{3}$

$\Rightarrow A = 3$

$\Rightarrow \lim(a_n) = 3$

3.

Szükséges tételek és definíciók:

Az e szám definíciója

Legyen $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2\ldots)$ és felülről korlátos $\Longrightarrow (a_n)$ konvergens

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Hiperharmonikus sor konvergenciája

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Szükséges feltétel arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen

Ha $\sum a_n$ ~~sor~~ sor konvergens $\Longrightarrow \lim(a_n) = 0$

(Tehát: ha $\lim(a_n) \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ nem konvergens (azaz divergens))

Összehasonlító kritérium

Tegyük fel, hogy $(a_n), (b_n)$ sorozatokra:

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: \ 0 \leq a_n \leq b_n$.

Ekkor:

a) Majoráns kritérium: Ha $\sum b_n$ konvergens $\Longrightarrow \sum a_n$ is konvergens

b) Minoráns kritérium: Ha $\sum a_n$ divergens $\Longrightarrow \sum b_n$ is divergens

Cauchy-féle gyökkritérium

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:

- $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.
- $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet divergens és konv. is (krit. nem alkalmazható)
- $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens

Feladat megoldása

Konvergensek-e az alábbi sorok:

(a) $$\sum_{n=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$$

1. Fajta megoldás (nem biztos, hogy mindig alkalmazható lesz ezért érdemes a 2.-at is elsajátítani)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\overset{\to 1}{1}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\underset{\downarrow}{1}+\underset{\downarrow 0}{\frac{2}{n^2}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n^4}}}}\right)=+\infty\cdot 1\neq 0 \implies \sum_{n=1}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}} \text{ sor divergens.}$$

(vigyázat: ha $\lim(a_n)=0 \not\Rightarrow$ konvergens)
(csak ~~lim~~ $\sum(a_n)$ konv $\Rightarrow \lim(a_n)=0$)

2. Fajta megoldás

a) Sejtés: $\sum_{n=1}\frac{n}{n^2}=$ ~~1~~ $\sum_{n=1}\frac{1}{n}$ ami divergens (hiperharmonikus sor miatt)

b) Bizonyítás: Összehasonlító kritériummal

Nagyságrend szerinti alsó becslés: (mivel ~~tudjuk~~ sejtjük, hogy divergens lesz)

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}} \underset{n>1}{>} \frac{n}{\sqrt{n^4+2n^4+3n^4}}=\frac{n}{\sqrt{6n^4}}=\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{n}{n^2}=\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{1}{n}$$

~~(hiperharmonikus sor konvergenciája miatt)~~

$$\sum_{n=1}\frac{1}{\sqrt6\, n}$$ sor divergens (hiperharmonikus sor konvergenciája miatt)

$$\implies \sum_{n=1}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$$ sor is divergens a minoráns kritérium miatt.

(b) $$\sum_{n=1}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$$ (az alakból már látszik hogy gyökkritériumot érdemes használni)

A gyökkritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}\right|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}e=$$

$$=\frac{e}{3}$$ mivel $0<\frac{e}{3}<1 \implies$ a sor konvergens

4.

Szükséges tételek:

Geometriai sor konvergenciája

A $\sum q^n$ sor $(q \in \mathbb{R})$ konvergens $\iff |q|<1$ és ekkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+q+q^2+\dots+\dots = \frac{1}{1-q}$$

Továbbá: ha ~~n ∈ N~~ $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots + q^n + \dots = q^N\left(1+q+q^2+\dots+q^n+\dots\right) =$$

$$= q^N \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^N}{1-q} \qquad \forall q \in (-1,1)$$

Feladat megoldása

Számítsa ki a következő sorösszeget:

(a)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n+4}{9^{n-1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{9^{n-1}} + \frac{4}{9^{n-1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{9^n}\cdot 9 + \frac{4}{9^n}\cdot 9 =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} 9\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n + 4\cdot 9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \underset{\uparrow}{=} 9\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n + 4\cdot 9\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n =$$

$\sum a_n + b_n = \sum a_n + \sum b_n$

$$= 9\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} + 4\cdot 9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{7}{9}\right)} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{8}{9}\right)} = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{7} + \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{8} = \frac{4}{7} + \frac{4}{8} =$$

$$= \cancel{4}\frac{8}{14} + \frac{7}{14} = \frac{15}{14}$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \sum_{n=2} \frac{1}{(n+2)^2-1^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2+1)(n+2-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n+1)}$$

Parciális törtekre bontás:

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} - \frac{B}{n+3} \quad \Big/ \cdot (n+1)(n+3)$$

$$1 = A(n+3) - B(n+1)$$

$$1 = An + 3A - Bn - B = (A-B)n + 3A - B$$

Mindkét oldal n-ner polinomja, tehát egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói megegyeznek:

$$A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

$$3A - B = 1 \quad \Rightarrow \quad 3A = 1 + B$$

$$\Rightarrow \quad 3A = 1 + A$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2} = B$$

Tehát:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\overset{\nearrow 1}{1} + \overset{\nearrow \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n+2}} - \overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n+3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

(Mivel: $\sum a_n$ ~~sor~~ végtelen sor konvergenciája és összege)

A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az (s_n) sorozat (s_n a ~~sorozat~~ sor n-edik részletösszege) konvergens.
Ekkor a $\lim(s_n)$ számot a $\sum a_n$ végtelen sor összegének nevezzük és így jelöljük: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim(s_n)$

$\boxed{5.}$

Szükséges tételek / definíciók:

Geometriai ~~sorozat~~ konvergenciája

A $\sum q^n$ sor $(q \in \mathbb{R})$ konvergens $\iff |q|<1$ és ekkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{Továbbá ha } N \in \mathbb{N}: \sum_{n=N}^{+\infty} q^N \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^N}{1-q}$$

Feladat megoldása

Milyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szám esetén konvergens a $\sum_{n=1} \left(\frac{2}{x^2}-1\right)^n$ végtelen sor, és akkor mi az összege?

A $q = \frac{2}{x^2}-1$ hányadosú geometriai sorról van szó.
Ez pedig pontosan akkor konvergens, ha $\left|\frac{2}{x^2}-1\right|<1 \iff -1 < \frac{2}{x^2}-1<1$

$$\iff 0 < \frac{2}{x^2} < 2 \iff 0 < 2 < 2x^2 \iff 1 < x^2$$

Azaz: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

A $\sum_{n=0}^{*} q^n$ geometriai sor összege $\frac{1}{1-q}$, ezért ~~az összefüggés~~:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x^2}-1\right)^n = \left(\frac{2}{x^2}-1\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}\right) = \left(\frac{2-x^2}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x^2}+1}\right) = \left(\frac{2-x^2}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2x^2 - x^4}{2x^2} = \frac{2 - x^2}{2} \; ??? \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

↳ Szilinek nem ez jött ki ☹ (Szili miért???)

$\boxed{6.}$

Szükséges definíciók/tételek

Hatványsor definíciója

Adott $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú és (α_n) együtthatós hatványsornak nevezzük.

Cauchy-féle gyökkritérium

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:

- $0 \leq A < 1$ esetén $\sum a_n$ sor absz. konv., tehát konvergens is.
- $A = 1$ esetén $\sum a_n$ sor lehet div. és konv. is (kritérium nem használható rá).
- $A > 1$ esetén $\sum a_n$ sor divergens.

Cauchy-Hadamard tétel

Jelöljük a $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort és tegyük fel, hogy $\exists \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

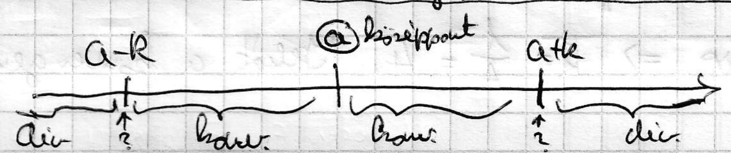
Legyen $R := \begin{cases} \frac{1}{A}, & \text{ha } 0 < A < +\infty \\ 0, & \text{ha } A = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } A = 0 \end{cases}$ a ~~kör~~ hatványsor konvergenciasugara.

Ekkor: a) Ha $0 < R < +\infty$ a hatványsor $\begin{cases} \forall x: |x-a| < R & \text{absz. konv.} \\ \forall x: |x-a| > R & \text{divergens} \end{cases}$

b) Ha $R = 0$ a hatványsor csak $x = a$-ban konv.

c) Ha $R = +\infty$ a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konv.

Szemléltetésül:



Hiperharmonikus sor konvergenciája

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergens, ha} & \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Cauchy-féle gyökkritérium

· Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ sorra $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor:

- $0 \leq A < 1$ esetén $\sum a_n$ sor absz. konv.
- $A = 1$ esetén $\sum a_n$ sor div. és konv. is lehet (krit. nem alkalmazható).
- $A > 1$ esetén $\sum a_n$ sor divergens.

Leibniz-típusú sorok és ezekkel kapcsolatos konvergenciatétel

Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$.

Ekkor $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ ~~Le~~ ~~Leib~~ Leibniz-típusú sor.

a) Konvergencia: $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ konvergens ~~és~~ $\Longleftrightarrow \lim(a_n) = 0$

b) Hibabecslés: Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ konvergens és
$A := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Ekkor:

$$|A - s_n| = \left|A - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k\right| \leq a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Feladat megoldása

Határozza meg a $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n} (x-7)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát.

1. Konvergenciasugár (R) meghatározása

Látszik, hogy egy 7 középpontú hatványsorról van szó (lásd hatványsor def.)

R meghatározásához szükségünk van $A := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^n n}\right|}$ (ha létezik)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^n n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\overset{1}{1}}{\underset{4}{4}\underset{1}{\sqrt[n]{n}}}\Big) = \frac{1}{4} = A$$

Mivel $0 < \frac{1}{4} < +\infty \Rightarrow R = \frac{1}{A} = 4$. Tehát a konvergenciasugár (R) 4.

2.) Konvergenciahalmaz meghatározása

A hatványsor akkor konvergens, ha $|x-7| < R$ (lásd. Cauchy-Hadamard)

$|x-7| < 4 \iff x \in (3, 11)$

A hatványsor divergens, ha $|x-7| > R = 4 \iff x \in (-\infty, 3) \cup (11, +\infty)$

Határon külön vizsgálat:

ha ~~a = 3~~ $x = 3$

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}(3-7)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n} \cdot (-4)^n = \sum_{n=1} \frac{1^n}{4^n n} \cdot 4^n =$$

$$= \sum_{n=1} \frac{1}{n}$$ ami divergens (hiperharmonikus sor konvergenciája)

ha $x = 11$

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}(11-7)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n} \cdot 4^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Leibniz-típusú sor, és mivel $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \iff$ konvergens.

Tehát a konvergenciahalmaz:

$$KH\left(\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}(x-7)^n\right) = (3, 11]$$

$\boxed{17.}$

Szükséges definíciók / tételek:

Hatványsor definíciója

Adott $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort (a) középpontú és (x_n) együtthatós hatványsornak nevezzük.

Geometriai sor konvergenciája

A $\sum q^n$ sor $(q \in \mathbb{R})$ konvergens $\iff$ $|q| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{Továbbá: } N \in \mathbb{N}: \sum_{n=N}^{+\infty} q^N \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^N}{1-q}$$

Feladat megoldása

Állítsa elő az $f(x) := \dfrac{x}{1+x-2x^2}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2,\ 1\})$ függvényt

egy alkalmas intervallumban az $a=0$ pont körüli hatványsor összegfüggvényeként.

$$\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+2x)}$$

Parciális törtekre bontás:

$$\frac{x}{\cancel{(-1)}(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} - \frac{B}{1+2x}$$

$$x = A(1+2x) - B(1-x) = A + 2Ax - B + Bx = (2A+B)x + (A-B)$$

$$1 = 2A + B \Rightarrow 2A = 1 - B$$

$$0 = A - B \Rightarrow A = B$$

$$2A = 1 - A$$

$$3A = 1$$

$$A = \frac{1}{3} = B$$

~~Tehát:~~ $\cancel{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{3} \sum (-2x)^n =}$

Tehát:

$$\frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+2x}$$

Ekkor:

(mivel $|q|<1$ esetben konvergens csak
absz. geometriai sor)

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}x^n \quad \text{ha } x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\cdot(-2)^n(x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{3}x^n \quad \text{ha } \cancel{x\in(-\tfrac{1}{2},}$$

$$x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tehát:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}\;1-x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+2x} = \sum\left(\frac{1}{3}-\frac{(-2)^n}{3}\right)\cancel{x}\,x^n \quad \text{ha } x\in(-1,1)\cap\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$