A 2. zh témakörei

1. feladat. *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:*

(a) $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{n^2+2}} \quad (0 < n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{n+2}} \quad (0 < n \in \mathbb{N}),$

(c) $a_n := \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(d) $a_n := \left(\dfrac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Megoldás. (a)

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n^2+2}} = \sqrt[n]{\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}} =: \sqrt[n]{x_n},$$

és $\lim(x_n) = 2$. A gyakorlaton megmutattuk, hogy ha $\lim(x_n) > 0$, akkor $\lim(\sqrt[n]{x_n}) = 1$. Ezért

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n^2+2}} = 1. \quad \blacksquare$$

(b) Nagy n-ekre a gyök alatti tört n nagyságrendű, továbbá $\sqrt[n]{n} \to 1$, ezért azt a *sejtést* alakíthatjuk ki, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} = 1.$$

A *bizonyításhoz* most a közrefogási elvet alkalmazzuk. Mivel minden n-re

$$1 < \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{n+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n^2}{n}} = \sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n},$$

és $\sqrt[n]{5} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, ezért a sorozat határértéke valóban 1. $\blacksquare$

(c) Tekintsük a következő átalakításokat:

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{6n+5}} == \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right]^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^3}.$$

Az $\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat az e számhoz tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(0 < n \in \mathbb{N})$ sorozat részsorozata, ezért a határértéke e. Másrészt $\lim\left(1+\frac{1}{3n+1}\right) = 1$, ezért

$$\lim(a_n) = e^{-2}. \ \blacksquare$$

(d) A sorozat tagjait most így alakítjuk át:

$$a_n = \left(\frac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5} = \left(\frac{4(n+\frac{1}{4})}{5(n+\frac{3}{5})}\right)^{n-5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-5}\left(\frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}}\right)^{n-5}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-5} = 0$ (geometriai sorozat) és a másik tényező korlátos, mert

$$\frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}} < 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nullasorozat és korlátos sorozat szorzata is nullasorozat, ezért

$$\lim(a_n) = 0. \quad \blacksquare$$

2. feladat. *Határozza meg*

$$a_1 := \sqrt{3}, \quad a_{n+1} := \sqrt{3+2a_n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

sorozat határértékét.

Megoldás. Rekurzív módon megadott sorozatról van szó, ezért először a monotonitást és a korlátosságot vizsgáljuk.

Monotonitás. Az első néhány tag alapján *sejthető*, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő.

Bizonyítás: teljes indukcióval. Nyilvánvaló, hogy $a_1 = \sqrt{3} \leq \sqrt{3+2\sqrt{3}} = a_2$. Tegyük fel, hogy $a_n \leq a_{n+1}$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n} \leq \sqrt{3+2a_{n+1}} = a_{n+2},$$

a sorozat tehát valóban monoton növekedő.

Korlátosság. *Egy felső korlát keresése:* tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $\lim(a_n) =: A$. A rekurzív összefüggésben vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet. Mivel

$$\lim(a_{n+1}) = A \quad \text{és } \lim(\sqrt{3+2a_n}) = \sqrt{3+2A},$$

ezért $A = \sqrt{3+2A}$. Az egyenlet egyetlen megoldása $A = 3$. Ha a sorozat konvergens, akkor csak 3 lehet a határértéke. A sorozat azonban monoton növekedő, ezért ha felülről korlátos, akkor 3 egy felső korlátja is.

Teljes indukcióval megvizsgáljuk, hogy 3 egy *felső korlátja-e* a sorozatnak.

(i) $n=1$-re $a_1 = \sqrt{3} \leq 3$ nyilván igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy $a_n \leq 3$ egy $n \in \mathbb{N}$ indexre. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n} \leq \sqrt{3+2\cdot 3} = 3,$$

és ez azt jelenti, hogy 3 valóban egy felső korlát, azaz (a_n) felülről korlátos sorozat.

Konvergencia. A korlátos és monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételünk alapján az (a_n) sorozat konvergens. Fentebb megmutattuk azt, hogy az A-val jelölt határértékére az $A = \sqrt{3+2A}$ egyenlet teljesül. Ennek egyetlen gyöke 3. A sorozatnak a határértéke tehát 3.

Összefoglalva: a sorozat konvergens és 3 a határértéke. ■

3. feladat. *Konvergensek-e az alábbi sorok:*

$$\text{(a)} \sum_{n=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}?$$

Megoldás. (a) Az összehasonlító kritériumot érdemes alkalmazni. Ehhez egy sejtést kell kialakítani arról, hogy a sor konvergens-e vagy sem. Az $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$ tört „nagy n-ekre $\frac{n}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n}$ nagyságrendű”, továbbá a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a *sejtés* az, hogy a megadott sor divergens. Ezután már a bizonyítás igen egyszerű: mivel

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4+2n^4+3n^4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{n} \qquad (0 < n \in \mathbb{N}),$$

valamint a $\sum \frac{1}{n}$ sor (meg persze a $\sum \frac{1}{\sqrt{6}n}$ sor is) divergens, ezért a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$ **sor divergens.**

(b) A gyökkritériumot alkalmazuk:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} \quad (n \to +\infty).$$

Mivel $0 < \frac{e}{3} < 1$, ezért a $\sum_{n=1} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ **sor konvergens.** ■

4. feladat *Számítsa ki a következő sorösszegeket:*

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + 4}{9^{n-1}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}.$$

5. feladat *Milyen* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *szám esetén konvergens a*

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^n$$

végtelen sor, és akkor mi az összege?

Megoldás. A $q = \dfrac{2}{x^2} - 1$ hányadosú geometriai sorról van szó; ez pedig pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{2}{x^2} - 1\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < \frac{2}{x^2} - 1 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{2}{x^2} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < x^2,$$

azaz $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ezért a sor pontosan akkor konvergens, ha

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

A $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor összege $\dfrac{1}{1-q}$, ezért az összegfüggvény:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^n = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^3 + \cdots =$$

$$= \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \left[1 + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^2 + \cdots\right] = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \frac{1}{1 - (\frac{2}{x^2} - 1)} =$$

$$= \frac{2 - x^2}{2(x^2 - 1)} \quad (x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)). \ ■$$

6. feladat. *Határozza meg a*

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n} (x-7)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát.

Megoldás. 7 középpontú hatványsorról van szó. Az abszolút értékekből képzett *nemnegatív* tagú sor konvergenciájának a vizsgálatához a gyökkritériumot alkalmazzuk:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^n n}(x-7)^n\right|} = \frac{|x-7|}{4\sqrt[n]{n}} \to \frac{|x-7|}{4}, \qquad \text{ha } n \to +\infty,$$

mert $\lim \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$. A sor tehát abszolút konvergens (következésképpen konvergens is) azokban az $x \in \mathbb{R}$ pontokban, amelyekre

$$\frac{|x-7|}{4} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-7| < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (3, 11).$$

Ha

$$\frac{|x-7|}{4} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-7| > 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 3 \ \text{ vagy } \ x > 11,$$

akkor a sor divergens, mert a generáló sorozata nem nullasorozat.

A hatványsor *konvergenciasugara* tehát 4.

Ha $\left|\frac{x-7}{4}\right| = 1$, azaz $x = 3$ vagy $x = 11$, akkor a gyökkritérium nem alkalmazható; ezeken a helyeken külön vizsgálatra van szükség.

Ha $x = 3$, akkor a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}(-4)^n = \sum_{n=1} \frac{1}{n}$$

harmonikus sort kapjuk, ami divergens.

Ha $x = 11$, akkor pedig a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}\,4^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$$

sor adódik. Ez Leibniz-típusú sor, ezért konvergens.

Összefoglalva: a hatványsor konvergenciahalmaza a

$$KH\left(\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{4^n n}(x-7)^n\right) = (3, 11]$$

intervallum. ■

7. feladat. *Állítsa elő az*

$$f(x) := \frac{x}{1 + x - 2x^2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}\big)$$

függvényt egy alkalmas intervallumban az $a = 0$ pont körüli hatványsor összegfüggvényeként.

Megoldás. A nevezőt szorzattá alakítjuk: $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$, így

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}).$$

Vegyük észre azt, hogy a tört két egyszerűbb alakú tört összegére bontható (többször segítségünkre volt már hasonló jellegű észrevétel!):

$$(*) \qquad \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\Big).$$

(Erre a felbontásra némi „kísérletezéssel” is rájöhetünk, azonban „módszeresen” is dolgozhatunk: keresünk olyan $A, B \in \mathbb{R}$ számokat, – ha egyáltalán vannak ilyenek –, amelyekre

$$\frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ esetén. A jobb oldalon közös nevezőre hozás után az A és a B ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszer adódik, aminek a megoldása $A = 1/3$ és $B = -1/3$. Ezt az eljárást a „*parciális törtekre bontás*” módszerének szokás nevezni. Később teljes általánosságban is megvizsgáljuk ezt az eljárást.)

A $(*)$-ban szereplő tagokat mértani sorba fejthetjük:

$$\frac{1/3}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}x^n, \quad \text{ha } x \in (-1, 1),$$

illetve

$$\frac{-1/3}{1+2x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}(-2x)^n, \quad \text{ha } x \in (-1/2, 1/2).$$

Így minden $x \in (-1,1) \cap (-1/2, 1/2) = (-1/2, 1/2)$ esetén

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3}\, x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \right) x^n. \quad \blacksquare$$