Analízis I vizsga tételek és bizonyítások

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Bajári Lúcia, Árpás Eszter, Provender Roxána, Gecse Viktória és Csonka Szilvia jegyzete alapján Dr. Szili László előadásáról.

1. **A szuprémum elv.**

   Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset R$, H felülről korlátos. Ekkor:

   $$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \;:\; K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

   Bizonyítás: Legyen $H \neq \emptyset$ felső korlátos halmaz, $A := H$, $B := \{K \in \mathbb{R} \;:\; K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$. Ekkor

   $$\left.\begin{array}{r} A \neq \emptyset \quad \text{és} \quad B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B, a \leq K \end{array}\right\} \overset{\text{teljességi}}{\underset{\text{axióma}}{\Longrightarrow}} \begin{array}{l} \exists \xi \in \mathbb{R}: \quad a \leq \xi \leq K \\ \forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B. \end{array}$$

   ξ ekkor a legkisebb felső korlát. ■

2. **Az Archimedes-tétel.**

   $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}:$

   $$b < an.$$

   Bizonyítás: Ha $b \leq 0$, akkor $n = 1$ is megfelelő.

   Ha $b > 0$: indirekt bizonyítással

   $$\exists a > 0, \quad \exists b > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad b \geq na.$$

   Ekkor:

   $H := \{na \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow H \neq \emptyset$,

   H felülről korlátos $\overset{\text{szuprémum}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}} \exists \sup H =: \xi$.

   Mivel $\xi = \sup H$, $(\xi - a)$ nem felső korlát.

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad n_0 a > \xi - a \quad \Rightarrow \quad \xi < (n_0 + 1)a \;\lightning \quad ■$$

3. **A Cantor-féle közösrész-tétel.**

   Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$, adott $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, korlátos és zárt intervallum, úgy hogy

   $$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

   Ekkor:

   $$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

   Bizonyítás: Legyen $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   Ekkor: $a_n \leq b_m \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$. Ha:

   - $n \leq m: \quad a_n \leq a_m \leq b_m$
   - $n > m: \quad a_n \leq b_n \leq b_m$

   $$\overset{\text{teljességi}}{\underset{\text{axióma}}{\Longrightarrow}} \exists \xi \in \mathbb{R}: \quad a_n \leq \xi \leq b_m \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

   $$\overset{n=m}{\Longrightarrow} a_n \leq \xi \leq b_n \quad \Rightarrow \quad \xi \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   $$\xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset. \quad ■$$

4. **Minden sorozatnak van monoton részsorozata.**

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás:

Definíció: a_{n_0} az (a_n) sorozat csúcsa, ha $\forall n \geq n_0 : \quad a_{n_0} \geq a_n$.

2 eset lehet:

a) Végtelen sok csúcs van.

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : &\quad a_{n_0} \text{ csúcs} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad a_{n_0} \geq a_n \\ \exists n_1 > n_0 : &\quad a_{n_1} \text{ csúcs} : \quad \forall n \geq n_1 : \quad a_{n_1} \geq a_n \\ \exists n_2 > n_1 : &\quad a_{n_2} \text{ csúcs} : \quad \forall n \geq n_2 : \quad a_{n_2} \geq a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots \quad \Rightarrow \quad \text{monoton csökkenő részsorozat.}$$

b) Véges sok csúcs:

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : &\quad a_n \text{ nem cúcs.} \\ n_0 = N : &\quad a_{n_0} \text{ nem csúcs.} \\ \exists n_1 > n_0 : \quad a_{n_0} < a_{n_1} : &\quad a_{n_1} \text{ nem csúcs.} \\ \exists n_2 > n_1 : \quad a_{n_1} < a_{n_2} : &\quad a_{n_2} \text{ nem csúcs.} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots \quad \Rightarrow \quad \text{monoton növekvő részsorozat.} \quad \blacksquare$$

5. **Konvergens sorozat határértéke egyértelmű.**

Konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás: Inderekt módon: tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$ is határérték.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1 : \quad |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2 : \quad |a_n - A_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

Legyen $n_0 := \max(n_1, n_2) \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq n_0$-ra:

$$|a_n - A_1| < \varepsilon \quad \text{és} \quad |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Legyen $0 < \varepsilon < \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$:

$$0 < |A_1 - A_2| \overset{\text{CSEL}}{=} |(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)| \underset{\text{egyenlőtlenség}}{\overset{\text{háromszög}}{\leq}} |a_n - A_1| + |a_n - A_2| \leq \varepsilon + \varepsilon =$$

$$= 2\varepsilon < |A_1 - A_2|. \quad ↯ \quad \blacksquare$$

6. **A konvergencia és a korlátosság kapcsolata.**

Ha (a_n) konvergens $\Rightarrow$ (a_n) korlátos.

Bizonyítás: $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon = 1, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - A| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| = |(a_n - A) + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

ha $n \geq n_0$:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |A|\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow (a_n)$ korlátos. $\blacksquare$

7. Műveletek nullsorozatokkal.

a) Ha (a_n) és (b_n) nulla sorozat akkor $(a_n + b_n)$ is nulla sorozat.

b) Ha (a_n) nulla sorozat és (c_n) korlátos sorozat akkor $(a_n c_n)$ is nulla sorozat.

c) Ha (a_n) és (b_n) 0 sorozat akkor $(a_n b_n)$ is nulla sorozat.

Bizonyítás:

a) (a_n) és (b_n) nullasorozat

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1 : \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2 : \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad n_0 := \max\{n_1, n_2\}, \quad \forall n \geq n_0$

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim(a_n + b_n) = 0.$$

b) (c_n) korlátos: $\quad \exists K > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |c_n| \leq K.$

(a_n) nullasorozat: $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |c_n a_n| = |c_n||a_n| \leq K\varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim(a_n c_n) = 0.$$

c) (a_n) nullasorozat.

(b_n) nullasorozat $\quad \Rightarrow \quad (b_n)$ korlátos $\quad \overset{b)}{\Longrightarrow} \quad (a_n b_n)$ is nullasorozat. $\blacksquare$

8. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel.

Tegyük fel, hogy $a := (a_n)$ és $b := (b_n)$ konvergens, és $\lim(a_n) =: A, \quad \lim(b_n) =: B,$ $0 \notin \mathcal{R}_{b_n}, \quad B \neq 0.$

Ekkor $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ is konvergens, és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$

Bizonyítás:

Segédtétel: Ha (b_n) konvergens, $0 \notin \mathcal{R}_{b_n}$ és $\lim(b_n) = B \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{|b_n|}\right)$ korlátos.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $B > 0$.

$\lim(b_n) = B \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$-hoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

$$|b_n| = |b_n - B + B| = |B - (B - b_n)| \underset{\text{egyenlőtlenség}}{\overset{\text{háromszög}}{\geq}} |B| - |B - b_n| \geq B - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

$$\Rightarrow |b_n| \geq \frac{|B|}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|B|} \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{|b_n|} \leq \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{|b_n|}\right) \text{ korlátos.} \quad \blacksquare$$

Igazoljuk: $\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right)$ nullasorozat.

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - A b_n}{b_n B} = \frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{korl.}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{0 sorozat}}}_{\text{0 sorozat}} + \underbrace{\underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{1}{b_n}}_{\text{korl.}} \underbrace{(B - b_n)}_{\text{0 sorozat}}}_{\text{0 sorozat}}}_{\text{0 sorozat}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}. \quad \blacksquare$$

9. **A közrefogási elv.**

Legyen $(a_n), (b_n), (c_n)$ valós sorozatok. Tegyük fel, hogy

a) $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N: \quad a_n \leq b_n \leq c_n,$

b) $(a_n), (c_n)$ konvergens, $\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A.$

Ekkor (b_n) konvergens, és $\lim(b_n) = A.$

Bizonyítás: $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A:$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1: \quad |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2: \quad |c_n - A| < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$-hoz legyen $\quad n_0 := \max\{n_1, n_2, N.\}$

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad |b_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim(b_n) = A.$ ■

10. **Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételek.**

a) Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos $\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$
Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos $\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$

b) Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos $\Rightarrow (a_n)\ \lim(a_n) = +\infty.$
Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos $\Rightarrow (a_n)\ \lim(a_n) = -\infty.$

Bizonyítás:

a) (a_n) felülről korlátos $\quad \Rightarrow \quad \exists \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: A \in \mathbb{R}$ (véges!) $\quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq A.$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$$

DE!:

$$(a_n) \nearrow: \quad \forall n \geq n_0: \quad A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < A.$$

b) (a_n) felülről nem korlátos $\quad \Rightarrow \quad \forall P \in \mathbb{R}$-hez $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_{n_0} > P.$
DE!:

$$(a_n) \nearrow: \quad \forall n \geq n_0: \quad a_n \geq a_{n_0} \quad \Rightarrow \quad \forall P \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0:$$

$$a_n > P \quad \Rightarrow \quad \lim(a_n) = +\infty.$$ ■

11. **A Cauchy-féle konvergencia kritérium.**

(a_n) konvergens $\quad \Leftrightarrow \quad (a_n)$ Cauchy sorozat.

Bizonyítás:

$\boxed{\Rightarrow:}$

Ha (a_n) konvergens, legyen $\quad \lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}. \quad$ Ekkor:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0: \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

$$n, m > n_0: \quad |a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow (a_n)$ Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Leftarrow:}$

Tegyük fel, hogy (a_n) Cuachy sorozat.

a) (a_n) korlátos, ugyanis:

$$\varepsilon = 1\text{-hez} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1}| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| < 1 + |a_{n_1}|$$

$$\forall n \geq n_1\text{-re}\forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, 1 + |a_{n_1}|\} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \text{ korlátos.}$$

b) A Bolz-Weier kiválasztási tétel alapján $\exists (a_{n_k})$ konvergens részsorozat.
Legyen $\lim(a_{n_k}) =: A$.

c) Igazoljuk: $\lim(a_n) = A$.

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$$

$$\varepsilon > 0 \quad \text{tetszőleges:} \quad a_{n_k} \to A \quad \Rightarrow \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad |a_{n_k} - A| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N_1)$$

(a_n) Cauchy-sorozat:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_{n_k}| < \varepsilon, \quad \forall n, n_k \geq N_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 := \max\{N_1, N_2\}, \quad |a_n - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \lim(a_n) = A$. ■

12. **A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel.**

$q \in \mathbb{R} : \quad (q^n)$ sorozatra:

$$\lim(q^n) = \begin{cases} 0, \quad \text{ha} \quad |q| < 1 \\ 1, \quad \text{ha} \quad q = 1 \\ +\infty \quad \text{ha} \quad q > 1 \\ \text{nincs határérték, ha} \quad q \leq -1 \end{cases}$$

Bizonyítás:

a) $q = 0, \quad q^n = 0 \to 0 \quad \checkmark$

b) $q = 1, \quad q^n = 1 \to 1 \quad \checkmark$

c) $q > 1 : \quad q = 1 + h, \quad h > 0$

$$q^n = (1+h)^n \underset{\text{egyenlőtlenség}}{\overset{\text{Bernoulli}}{\geq}} 1 + nh > nh \quad \Rightarrow \quad \text{Ha} \quad P \in \mathbb{R}, \text{ akkor}$$

$$q^n > nh > P \quad \text{ha} \quad n > \frac{p}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim(q^n) = +\infty.$$

d) $0 < |q| < 1$

$$\frac{1}{|q|} > 1 \quad \overset{c)}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

Azaz:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim(q^n) = 0.$$

e) $q \leq -1$

$$\left.\begin{array}{r} q^n \geq 1 \quad \text{ha} \quad n \quad \text{páros} \\ q^n \leq 1 \quad \text{ha} \quad n \quad \text{páratlan} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \nexists \lim(q^n). \quad ■$$

13. **Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével.**

Legyen $m = 2, 3, \ldots$

a) $\forall A > 0\text{-hoz } \exists!\, \alpha > 0 : \quad \alpha^m = A$

b) Legyen $a_0 > 0$ tetszőleges,

$$a_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

sorozat konvergens és $\lim(a_n) = \alpha$.

Bizonyítás:

I. lépés: (a_n) „jól definiált” és $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

II. lépés: Egyenlőtlenség: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^m < \alpha_2^m$

III. lépés: Az (a_n) sorozat alulról korlátos és $\searrow$, így (a_n) konvergens, ugyanis:

$\boxed{(a_n) \text{ alulról korlátos:}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1}^m = \left(\frac{\frac{A}{a_n^{m-1}} + \overbrace{a_n + \ldots + a_n}^{m-1 \text{ darab}}}{m}\right)^m \geq \frac{A}{a_n^{m-1}} + \overbrace{a_n + \ldots + a_n}^{m-1 \text{ darab}} = A$$

$\boxed{(a_n) \searrow:}$

Igazolnunk kell, hogy $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1.$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^m}\right) + (m-1) = \frac{1}{m}\left(\frac{A - a_n^m}{a_n^m} + m\right) = \underbrace{\frac{A - a_n^m}{m \cdot a_n^m}}_{(a_n)\searrow} + 1 \leq 1 \quad (\forall n = 2,3,\ldots)$$

Ezalapján (a_n) valóban konvergens, és $\alpha := \lim(a_n)$.
$\Rightarrow \alpha \geq 0$, de $\alpha = 0$ nem lehet, ugyanis $a_n^m \geq A > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0$.

IV. lépés: Igazoljuk: $\alpha^m = A$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_n + 1 & = & \dfrac{1}{m} & \Bigg(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} & + & (m-1)a_n & \Bigg) \\ \downarrow & & & \downarrow & (a > 0) & \downarrow & \\ \alpha & & & \dfrac{A}{\alpha^{m-1}} & & (m-1)\alpha & \end{array}$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right)$$

$m\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \quad \Rightarrow \quad \alpha^m = A.$ ■

14. **A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.**

$$\sum a_n \quad \text{sor konvergens} \;\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0, \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}: \quad m > n \geq n_0 \\ \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon. \end{cases}$$

Bizonyítás: A $\sum a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) konvergens $\overset{\text{Cauchy-féle}}{\underset{\substack{\text{kritérium}\\ \text{sorozatokra}}}{\Longleftrightarrow}}$ (s_n) Cauchy-sorozat.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m > n \geq n_0: \quad |s_m - s_n| = |(a_0 + \ldots + a_m) - (a_0 + \ldots + a_n)| =$$

$$= |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon. \quad ■$$

15. **Végtelen sorok konvergenciájának szükséges feltétele.**

Ha $\sum a_n$ sor konvergens $\Rightarrow \lim(a_n) = 0$.

Bizonyítás: $\sum(a_n)$ konvergens $\overset{\text{Cauchy-féle}}{\underset{\substack{\text{kritérium}\\ \text{sorokra}}}{\Longrightarrow}}$ $\forall \varepsilon > 0: \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m > n \geq n_0: \quad |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$

Legyen $m = n + 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon. \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim(a_n) = 0.$ ■

16. **A nemnegatív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó tétel.**

$\sum a_n$ nemnegatív tagú sor konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) korlátos sorozat.

Bizonyítás: $\sum a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) konvergens.

De: $(s_n) \nearrow$, ami konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) korlátos. ■

17. **Végtelen sorokra vonatkozó öszehasonlító kritériumok.**

Tegyük fel, hogy $(a_n), (b_n)$ sorozatokra:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad n \geq N : \quad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor:

a) Majoráns kritérium:
Ha $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens.

b) Minoráns kritérium
Ha $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergens.

Bizonyítás:

a) $$\left.\begin{aligned} s_n^a &:= a_N + a_{N+1} + \ldots + a_n \\ s_n^b &:= b_N + b_{N+1} + \ldots + b_n \end{aligned}\right\} n \geq N$$

Ha $\sum b_n$ konvergens $\overset{(s_n^b \nearrow)}{\Longrightarrow}$ (s_n^b) korlátos $\Rightarrow$ (s_n^a) is korlátos, $\nearrow\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=N} a_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens. ■

18. **A Cauchy-féle gyökkritérium.**

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:

a) $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

b) $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens.

c) $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is (a kritérium nem használható).

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Ekkor $\exists q : \quad A < q < 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A \Rightarrow q\text{-hoz} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\geq 0} < q.$$

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n| \leq q^n, \quad \sum_{n=1} q^n \quad \text{konvergens, mert} \quad 0 < q < 1 \quad \text{(geometriai sor)}$$

$$\sum_{n=1} q^n \quad \text{konvergens} \quad \underset{\text{kritérium}}{\overset{\text{majoráns}}{\Longrightarrow}} \sum |a_n| \text{ konvergens, azaz } \sum a_n \text{ abszolút konvergens.}$$

Tegyük fel, hogy $A > 1$. Ekkor $\exists q : \quad 1 < q < A$.

$$\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = A \Rightarrow 1 < q\text{-hoz} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\geq 0} > q$$

$$\Rightarrow |a_n| > q^n \quad (n \geq n_0) \Rightarrow \lim(|a_n|) = +\infty, \text{ azaz } (a_n) \text{ nem 0-sorozat.} \underset{\text{feltétel}}{\overset{\text{szükséges}}{\Longrightarrow}} \sum a_n \text{ divergens.}$$

Tegyük fel, A=1.

$\sum \dfrac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$

$\sum \dfrac{1}{n^2}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1.$ ■

19. **A D'Alembert-féle hányados-kritérium.**

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra $a_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

a) $0 \leq A < 1 \Rightarrow \sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

b) $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergens.

c) $A = 1 \Rightarrow \sum a_n$ lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Ekkor $\exists q : A < q < 1$, és

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A \Rightarrow q\text{-hoz} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q.$$

Legyen $n > n_0$:

$$|a_{n+1}| < q \cdot |a_n| \overset{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}<q}{<} q^2|a_{n-1}| < \ldots < q^{n+1-n_0}|a_{n_0}| =$$

$$= \overbrace{|a_{n_0}| \cdot q^{1-n_0}}^{=:c} q^n = c \cdot q^n \Rightarrow |a_{n+1}| < c \cdot q^n \quad (\forall n \geq n_0).$$

Mivel: $0 < q < 1$, $\sum\limits_{n=n_0} q^n$ konvergens $\overset{\text{majoráns}}{\underset{\text{kritérium}}{\Longrightarrow}} \sum |a_n|$ konvergens, azaz $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Tegyük fel, hogy A>1. Ekkor $\exists q : 1 < q < A$, és

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A \quad \Rightarrow \quad q\text{-hoz} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q.$$

$$n > n_0 : \quad |a_{n+1}| > q \cdot |a_n| > q^2|a_{n-1}| > \ldots > q^{n+1-n_0}|a_{n_0}|$$

$\overset{q>1}{\Longrightarrow} \lim(|a_{n+1}|) = +\infty$, azaz (a_n) nem 0-sorozat $\Rightarrow \sum a_n$ divergens.

Tegyük fel, hogy $A = 1$.

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{divergens, de} \quad \lim\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergens, de} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1. \quad \blacksquare$$

20. **Leibniz-típusú sorok konvergenciája.**

Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$. Ekkor $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ Leibniz-típusú sor, és

a) Konvergencia: $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ konvergens $\Leftrightarrow \lim(a_n) = 0$.

b) Hibabecslés: tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ konvergens és

$A := \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Ekkor:

$$|A - s_n| = \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás:

a) (konvergencia)

$\boxed{\Rightarrow:}$

$$\sum(-1)^{n+1}a_n \quad \text{konvergens} \quad \underset{\text{feltétel}}{\overset{\text{szükséges}}{\Longrightarrow}} \quad \lim\big((-1)^{n+1}a_n\big)=0 \Rightarrow \lim(a_n)=0.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$

Igazolnunk kell: $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-\ldots$ konvergens.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1-a_2+a_3-\ldots\pm a_n$$

Igazoljuk

α) $(s_{2n+1}) \searrow$

$$s_1=a_1\geq s_1-\underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0}=a_1-a_2+a_3=s_3$$

$$\geq s_3-(a_4-a_5)=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=s_5\geq s_7\geq\ldots\geq s_{2n+1}$$

β) $(s_{2n}) \nearrow$

$$s_2=a_1-a_2\leq s_2+\underbrace{(a_3-a_4)}_{\geq 0}=a_1-a_2+a_3-a_4=s_4\leq s_6\leq\ldots\leq s_{2n}$$

(s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátosak is, ui.:

$$s_2\leq s_{2n}=s_{2n-1}-a_{2n}\leq s_{2n-1}\leq s_1 \underset{\text{korlátos}}{\overset{\text{monoton}}{\Longrightarrow}} \quad \text{konvergens:} \quad \begin{cases}\exists\alpha:=\lim(s_{2n})\\ \exists\beta:=\lim(s_{2n+1})\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} s_{2n} & = & s_{2n-1} & - & a_{2n} & (n\in\mathbb{N}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \alpha & & \beta & & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\lim(s_n)\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad \text{konvergens.}$$

b) (hibabecslés)

$$s_{2n}\leq\alpha=A\leq s_{2n+1}$$

$$|s_{2n}-A|\leq s_{2n+1}-s_{2n}=a_{2n+1}\leq a_{2n}$$

$$|s_{2n+1}-A|\leq s_{2n+1}-s_{2n}=a_{2n+1}$$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \quad |A-s_n|\leq a_n.$ ■

21. **Számok tizedestört alakban való előállítása.**

Ha $\alpha\in[0;1]$, akkor $\exists(a_n): \quad \mathbb{N}^+\to\{0{,}1{,}2,\ldots,9\}: \quad \alpha=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{10^n}$

Bizonyítás:

1. lépés: $[0;1]$-at 10 egyenlő részre osztjuk

$$\Rightarrow \quad \exists a_1\in\{0{,}1{,}2,\ldots,9\}: \quad \alpha\in I_1=\left[\frac{a_1}{10};\frac{a_1+1}{10}\right]$$

2. lépés: I_1-et 10 egyenlő részre osztjuk

$$\Rightarrow \quad \exists a_2\in\{0{,}1{,}2,\ldots,9\}: \quad \alpha\in I_2=\left[\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2};\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}\right]$$

$$\vdots$$

n. lépés: Felosztjuk I_{n-1}-et 10 egyenlő részre $\quad\Rightarrow\quad \exists a_n \in \{0{,}1,\dots,9\}$.

$$\alpha \in I_n = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}; \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}\right],$$

azaz

$$\underbrace{\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{s_n} \le \alpha \le \underbrace{\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{s_n} + \frac{1}{10^n}$$

$$s_n \le \alpha \le s_n + \frac{1}{10^n} \qquad \forall n = 1{,}2,\dots$$

$$\Rightarrow |\alpha - s_n| \le \frac{1}{10^n} \to 0 \quad\Rightarrow\quad \lim(s_n) = \alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad \blacksquare$$

22. **Abszolút konvergens sorok átrendezése.**

Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvegens, és $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció, akkor a $\sum a_{p_n}$ abszolút konvergens, és $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n}$

Bizonyítás: Legyen $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges permutáció.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k}$$

a) Igazoljuk: *a* $\sum a_{p_n}$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is)*

A $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}|, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat $\nearrow$ és felülről korlátos, mert

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + \dots + |a_{p_n}| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K \overset{\sum a_k \text{ abszolút}}{\underset{\text{konvergens}}{<}} +\infty \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow \sum |a_{p_k}|$ abszolút konvergens, azaz $\sum a_{p_k}$ abszolút konvergens.

b) Igazoljuk: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_k}$.

Legyen $\displaystyle A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, azaz $s_n \to A$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens $\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{kritérium}}{\Longrightarrow}}$

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m \ge N: \quad |a_N| + |a_{N+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon.$$

Tekintsük a (a_n) sorozat első $N+1$ tagját.

Ekkor

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_1\text{-re} \quad \sigma_n - s_n = \underbrace{(a_{p_0} + \dots + a_{p_n}) - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)}_{a_0;a_1;\dots;a_N\text{-ek kiesnek, ha } N_1 \text{ elég nagy}} =$$

$$= \sum_{k>N}^{n} \pm a_k \quad\Rightarrow\quad |\sigma_n - s_n| \le \sum_{k>N}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_1 \quad\Rightarrow$$

$$\sigma_n - s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De:

$$\sigma_n = \sigma_n - s_n + s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + A \Rightarrow \sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A, \quad \text{azaz} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = A \quad \blacksquare$$

23. **Abszolút konvergens sorok szorzására vonatkozó Cauchy-tétel.**

Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok mindegyike abszolút konvergens, akkor

a) a téglányszorzat $(\sum t_n)$ is abszolút konvergens,

b) a $\sum c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,

c) az összes $a_i b_j \quad (i,j = 0{,}1,\ldots)$ szorzatokból tetszés szerinti sorrendben és csoportosítással képzett $\sum\limits_{n=0} d_n$ sor is abszolút konvergens és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Bizonyítás: c)

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \to A; \quad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \to B$$

Tekintsük a $\sum d_n$ sort, ahol $\sum a_i b_j$.

Legyen I a maximális i index $d_0, \ldots d_N$-ben, és J a maximális j index $d_0, \ldots d_N$-ben.

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\right) \leq A \cdot B \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow \sum |d_n|$ konvergens, azaz $\sum d_n$ abszolút konvergens.

Tehát $\sum t_n$; $\sum c_n$ is abszolút konvergens.

Azonban: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

Viszont $\sum t_n$ abszolút konvergens $\Rightarrow$ tetszőleges módon átrendezhető és csoportosítható az összes megváltoztatása nélkül.

$\sum d_n, \sum c_n$ is megkapható $\sum t_n$-ből alkalmas átrendezéssel, csoportosítással. ■

24. **Hatványsorok konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergencia sugarát meghatározó tétel.**

Tetszőleges $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$ h.s. konvergencia halmazára (KH) a következő három eset egyike teljesül:

a) $\exists!\, 0 < R < +\infty :$ a h.s. $\begin{cases} \forall x: & |x-a| < R \quad \text{abszolút konvergens} \\ \forall x: & |x-a| > R \quad \text{divergens} \end{cases}$

b) a h.s. csak az $x = a$-ban konvergens $(R := 0)$

c) a h.s. $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens. $(R := +\infty)$

(R : a h.s. konvergencia sugara)

Bizonyítás: Feltehető $a = 0$, azaz $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$, mert ha $a \neq 0$:

$\Rightarrow y := x - a$-val $\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y^n$.

Segédtétel: Tegyük fel, hogy $\sum \alpha_n x^n$ h.s. konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall |x| < |x_0|$ esetén $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

Bizonyítás: $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens $\underset{\substack{\text{szükséges}\\ \text{feltétel}}}{\overset{\text{a konvergencia}}{\Longrightarrow}} \lim(\alpha_n x_0^n) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_n x_0^n)$ korlátos, azaz $\exists M > 0: \quad |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Legyen $|x| < |x_0|$.

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Mivel $|x| < |x_0| \Rightarrow \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ és $\sum M \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ geometriai sor konvergens $\underset{\text{kritérium}}{\overset{\text{majoráns}}{\Longrightarrow}} \sum |\alpha_n x^n|$ konvergens, azaz

$$\sum \alpha_n x^n \quad \text{abszolút konvergens.} \quad \blacksquare$$

Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ h.s.-t. Ez $x = 0$ -ban konvergens $\Rightarrow 0 \in KH(\sum \alpha_n x^n) \Rightarrow \exists \sup KH(\sum \alpha_n x^n) :=$ $= R \in \overline{\mathbb{R}}$, sőt, $R > 0$.

A következő esetek lehetnek:

a) $0 < R < +\infty$:

- Legyen $|x| < R \underset{\text{defíciója}}{\overset{\text{sup.}}{\Longrightarrow}} \exists x_0 : |x| < x_0 \leq R$ és $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens $\underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Segéd-}}{\Longrightarrow}} \sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.
- Legyen $|x| > R \Rightarrow \exists x_0 : \quad R < x_0 < |x| : \sum \alpha_n x_0^n$ divergens $\underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Segéd-}}{\Longrightarrow}} \sum \alpha_n x^n$ divergens.

  (ui.: ha $\sum \alpha_n x^n$ konvergens lenne $\underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Segéd-}}{\Longrightarrow}} \sum \alpha_n x_0^n$ konvergens $\lightning$)
- Egyetlen ilyen tulajdonságú R létezik (indirekt)

b) $R = 0$:

$\sum \alpha_n x^n$ konvergens $x = 0$-ban. De $\forall |x| > 0$ helyen divergens, ui.: $|x| > 0$ rögzített $\Rightarrow \exists x_0$: $0 < x_0 < |x|$ és $\sum \alpha_n x_0^n$ divergens $\Rightarrow \alpha_n x^n$ is divergens.

c) $R = +\infty$:

Ekkor $\sum \alpha_n x^n$ sor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens. ui.:

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{tetszőleges} \quad \Rightarrow \exists x_0 : \quad |x| < x_0 \quad \text{és} \quad \sum \alpha_n x_0^n \quad \text{konvergens} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_n x^n \quad \text{abszolút konvergens.} \quad \blacksquare$$

25. **Cauchy-Hadamard tétel.**

Tekintsük a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort, és tegyük fel hogy

$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Legyen:

$$R := \begin{cases} \dfrac{1}{A}, & \text{ha} \quad 0 < A < +\infty \\ 0, & \text{ha} \quad A = +\infty \\ +\infty & \text{ha} \quad A = 0 \end{cases},$$

a h.s. konvergencia sugara.

Ekkor:

a) Ha $0 < R < +\infty$: a h.s. $\begin{cases} \forall x : \quad |x-a| < R \quad \text{abszolút konvergens,} \\ \forall x : \quad |x-a| > R \quad \text{divergens,} \end{cases}$

b) Ha $R := 0$, a h.s. csak az $x = a$-ban konvergens,

c) Ha $R := +\infty$, a h.s. $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvervens.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ sorra a gyökkritériumot:

a) $0 < A < +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n (x-a)^n|} = |x-a| \cdot \lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} \begin{cases} < 1 & \text{abszolút konvergens} \\ > 1 & \text{divergens} \end{cases}$$

b) $A=+\infty$:

$x=a$-ban konvergens. $x\neq a \Rightarrow |x-a|\cdot A=+\infty>1 \Rightarrow x$-ben a sor divergens.

c) $A=0$:

$\forall x\in\mathbb{R}:\quad |x-a|\cdot A=0<1$ abszolút konvergens. $\blacksquare$

26. **Függvények határértékének egyértelműsége.**

A határérték egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\lim\limits_a f=A\in\overline{\mathbb{R}},\quad \lim\limits_a f=B\in\overline{\mathbb{R}}\quad$ és $\quad A\neq B$

$$\Rightarrow\begin{cases}\forall\varepsilon>0,\quad \exists\sigma_1>0;\quad \forall x\in K_{\sigma_1}(a)\backslash\{a\}\cap\mathcal{D}_f:\quad f(x)\in K_\varepsilon(A)\\ \forall\varepsilon>0,\quad \exists\sigma_2>0;\quad \forall x\in K_{\sigma_2}(a)\backslash\{a\}\cap\mathcal{D}_f:\quad f(x)\in K_\varepsilon(B)\end{cases}$$

$A\neq B\quad\Rightarrow\quad \exists\varepsilon>0:\quad K_\varepsilon(A)\cap K_\varepsilon(B)=\emptyset.\left(\text{pl. } A,B\in\mathbb{R}\quad \varepsilon<\dfrac{|A-B|}{2}\right)$

Tekintsünk egy ilyen ε-t és legyen $\sigma:=\min\{\sigma_1,\sigma_2\}$.

$\Rightarrow\forall x\in K_\sigma(a)\backslash\{a\}\cap\mathcal{D}_f:\quad f(x)\in K_\varepsilon(A)\cap K_\varepsilon(B)=\emptyset$ ↯ $\blacksquare$

27. **A határértékre vonatkozó átviteli elv.**

$$f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad a\in\mathcal{D}'_f.\text{ Ekkor }\lim_a f=A\in\overline{\mathbb{R}}\quad\Leftrightarrow^{(*)}\quad\forall(x_n):\quad\mathbb{N}\to\mathcal{D}_f\backslash\{a\},$$

amire

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n)=a;\qquad \lim_{n\to+\infty}f(x_n)=A$$

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow:}$

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_a f=A\in\overline{\mathbb{R}}\quad\Rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\sigma>0,\quad\forall x\in\mathcal{D}_f\cap K_\sigma(a)\backslash\{a\}:\quad f(x)\in K_\varepsilon(A)$$

Legyen $(x_n):\quad \mathbb{N}\to\mathcal{D}_f\backslash\{a\},\quad \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\quad$ tetszőleges sorozat.

$$\varepsilon>0\ \text{ tetszőleges},\quad \sigma>0:\quad\exists n_0\in\mathbb{N},\quad\forall n\geq n_0:\quad x_n\in K_\sigma(a),$$

azaz

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists n_0\in\mathbb{N},\quad\forall n\geq n_0: f(x_n)\in K_\varepsilon(A)\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=A.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ (Indirekt)

Tegyük fel, hogy (*) (jobb oldal) teljesül, de $\lim\limits_a f\neq A$.

$$\exists\varepsilon>0,\quad\forall\sigma>0,\quad\exists x_\sigma\in\mathcal{D}_f\cap(K_\sigma(a)\backslash\{a\}):\quad f(x)\notin K_\varepsilon(A)$$

Legyen

$$\sigma=\frac{1}{n}\quad(n=1{,}2,\dots):\quad\exists x_n\in\mathcal{D}_f\cap(K_{\frac{1}{n}}(a)\backslash\{a\}):\quad f(x_n)\notin K_\varepsilon(A)$$

$$\Rightarrow\quad x_n\in K_{\frac{1}{n}}(a)\quad(n=1{,}2,\dots)\quad\Rightarrow\quad x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$$

$$f(x_n)\notin K_\varepsilon(A)\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}f(x_n)\neq A\ ↯\ \blacksquare$$

28. **Az e szám sorösszeg előállítása.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e.$$

Bizonyítás:

Igazoljuk: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ konvergens.

a) Monotonitás:
Legyen

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\Rightarrow (s_n) \uparrow, \quad \text{mivel} \quad s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(1+n)!} > s_n, \quad \text{továbbá} \quad 0 < s_n. \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

b) Korlátosság:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 \cdot 1^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ahol:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k)!\overbrace{(n-k+1)(n-k+2)\cdot \ldots \cdot (n-k+k)}^{k \text{ darab}}}{(n-k)! \cdot n^k} =$$

$$\overset{(n-k)!}{\underset{\text{egysz.}}{=}} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+k}{n} = \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Mivel minden zárójeles tag < 1,

$$\frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n$$

Illetve:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!}\left(1-\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Most elhagyjuk a $k+1, k+2, \ldots$tagokat n indexre:

$$> 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Legyen $n \geq k$, k rögzített. $\forall k \in \mathbb{N}$, $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \quad s_k \leq e \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad (s_n) \uparrow \text{ és korlátos} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty}(s_n), \quad \text{így } (s_n) \text{ konvergens.}$$

Így végül:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim(s_n) \leq e$$

$$\underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=e} \leq \lim(s_n) \leq e \quad \Rightarrow \quad \lim(s_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e. \quad \blacksquare$$

Külön köszönet még nekik: Dr. Szili László, Qian Lívia, Pintér Arianna, Hoang László, Kovács Bence, Foltán Dániel, Majer Friderika, Veress Marcell, Menyhárt Sámuel, Babi Néni, Faludi Péter, Puha Márk, Benics Balázs, Solymosi Zsófia, Kámán Sándor, Turák Miranda, Rápli András, Vida Péter, Győri Sándor, András Emese, Shakkour Aram, Szabó Norbert, Hortobágyi Mónika, Mészáros Előd és mégegyszer Csonka Szilvia, Gecse Viktória, Árpás Eszter, Provender Roxána, Bajári Lúcia a jegyzet javításáért.

Utoljára módosítva: 2016. június 2.