Néhány definíció és tétel
Analízis 1. előadások
Programtervező informatikus szak
A, B és C szakirány
2015-2016. tanév 2. félév

1. Mit mond ki a *teljességi axióma*?

Válasz. Ha $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ és $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ esetén $a \leq b$, akkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R},\ \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B :\ a \leq \xi \leq b.$$

2. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.

Válasz. Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz, akkor H felső korlátjai között van legkisebb.

3. Mi a szuprémum definíciója?

Válasz. A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz *szuprémuma* H legkisebb felső korlátja, azaz

$$\min\big\{K \in \mathbb{R} \,:\, K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\big\} =: \sup H.$$

4. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$.

Válasz. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor

$$\xi = \sup H \quad \iff \quad \begin{cases} \text{(i) } \forall\, x \in H \,:\, x \leq \xi, \\ \text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \in H \,:\, \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$

5. Mi az infimum definíciója?

Válasz. A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz *infimuma* H legnagyobb alsó korlátja, azaz

$$\max\big\{K \in \mathbb{R} \,:\, K \text{ alsó korlátja } H\text{-nak}\big\} =: \inf H.$$

6. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$.

Válasz. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor

$$\xi = \inf H \quad \iff \quad \begin{cases} \text{(i) } \forall\, x \in H \,:\, \xi \leq x, \\ \text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \in H \,:\, x < \xi + \varepsilon. \end{cases}$$

7. Fogalmazza meg az Archimedes-tételt.

Válasz. $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, b < na.$

8. Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$