EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Bevezetés az analízisbe I.

egyetemi jegyzet

Budapest, 2013

A jegyzet a
TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0052
pályázat támogatásával készült

Lektorálta: Dr. Gát György egyetemi tanár

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kara által oktatott programtervező informatikus hallgatók számára íródott. Az említett képzés keretében a hallgatók három féléven keresztül hallgatják az *Analízis* című tárgyat. Ennek során megismerkednek az egy- és a többváltozós analízis alapfogalmaival és tételeivel, különös tekintettel az alkalmazási lehetőségekre (pl. a numerikus módszerek, a matematikai modellezés, stb. szempontjából). Mindezt olyan szinten és mélységben, ami egy, az informatika matematikai jellegű alkalmazásaiban is eligazodni tudó leendő informatikus szakembertől elvárható. Az új rendszerű, kétlépcsős BSC-MSC oktatási formához igazodó, célzottan megírt segédanyagok nélkülözhetetlenek az eredményes képzéshez. Az ebben a rendszerben folyó oktatás során mára már felgyűlt annyi tapasztalat, amely lehetővé teszi az ilyen, a hallgatók által is eredményesen felhasználható jegyzetek, tankönyvek, példatárak, stb. elkészítését. A jelen jegyzet ezt az eddigi hiányt hivatott pótolni az Analízis-tárgy első két félévét illetően. A szerző évtizedek óta oktatta-oktatja az analízist ezen a szakterületen, ill. az azt megelőző képzési formában a volt programtervező matematikus hallgatók képzésében. Ennek keretében rengeteg egyéni tapasztalatot is gyűjtött az analízis (és alkalmazásai) oktatási területén, amelyet speciálisan a programtervező informatikus hallgatók analízis oktatási igényeihez igazodva ennek a tankönyvnek a megírása során is maximálisan igyekezett hasznosítani.

Több jegyzet, szakkönyv, monográfia áll azok rendelkezésére (magyar nyelven is), akik esetleg más aspektusból is kíváncsiak a tárgyalt témakörökre, a lehetséges általánosítási, kitekintési lehetőségekre. Számukra a teljesség igénye nélkül az alábbiakban ajánlunk néhány művet:

- Balázs Márton - Kolumbán József: *Matematikai Analízis,* egyetemi tankönyv, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1978.

- Járai Antal: *Kalkulus,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2013.

- Kósa András: *Útban a felsőbb matematikához,* egyetemi tankönyv, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1995.

- Kósa András: *Kezdeti lépések a felsőbb matematikához. 1. Differenciálszámítás,* egyetemi tankönyv, LSI Oktatóközpont, Budapest, 2000.

- Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis II,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.
- Leindler László - Schipp Ferenc: *Analízis 1*, egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- Schipp Ferenc: *Analízis I,* egyetemi jegyzet, JPTE, Pécs, 1994.
- Schipp Ferenc: *Analízis II,* egyetemi jegyzet, JPTE, Pécs, 1997.
- Simon Péter: *Fejezetek az analízisből,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1997.
- Szili László: *Analízis feladatokban I,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 2005.
- Walter Rudin: *A matematikai analízis alapjai,* egyetemi tankönyv, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.

Köszönettel tartozom feleségemnek, *Dr. S. Gyarmati Erzsébet* egyetemi adjunktusnak, és volt tanítványomnak, *Szarvas Kristóf* doktorandusznak a kézirat lelkiismeretes elolvasásáért, értékes megjegyzéseikért, valamint a sajtóhibák gondos kijavításáért.

A szerző

Budapest, 2013. április.

1. fejezet

Valós számok

1.1. A valós számok axiómái

Elöljáróban felelevenítjük az $\mathbf{R}$ valós számtesttel kapcsolatos alapvető tudnivalókat. Legyen tehát $\mathbf{R} \neq \emptyset$ olyan halmaz, amelyre igazak az alábbiak.

A) Megadhatók a $\theta, \varepsilon \in \mathbf{R}$, $\theta \neq \varepsilon$ elemek, ill. bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén léteznek az $x + y \in \mathbf{R}$ és az $xy \in \mathbf{R}$ szimbólummal jelölt elemek úgy, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbf{R}$ választással

i) $a + b = b + a$ és $ab = ba$,

ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$ és $(ab)c = a(bc)$,

iii) $a + \theta = a$ és $a\varepsilon = a$,

iv) alkalmas $\tilde{a} \in \mathbf{R}$ elemmel $a + \tilde{a} = \theta$,

v) ha $b \neq \theta$, akkor valamilyen $\mathbf{R} \ni \hat{b}$-vel $b\hat{b} = \varepsilon$,

vi) $(a + b)c = ac + bc$.

B) Létezik egy $\leq \subset \mathbf{R}^2$ teljes rendezés: a $\leq$ reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ elemekre $a \leq b$ és $b \leq a$ közül legalább az egyik teljesül.

C) Bármely $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ esetén

i) $a + c \leq b + c$,

ii) ha még $\theta \leq c$ is igaz, akkor $ac \leq bc$.

D) Nevezzük az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmazt *felülről korlátosnak,* ha létezik olyan $K \in \mathbf{R}$ szám, amellyel az $x \leq K$ egyenlőtlenség minden $x \in A$ elemre teljesül. Legyen $\mathcal{K} := \{K \in \mathbf{R} : x \leq K \ \ (x \in A)\}$ a *felső korlátok* halmaza. Ekkor a $\mathcal{K}$ halmaznak van legkisebb eleme (más szóval: az A halmaznak van legkisebb felső korlátja).

1.2. Megjegyzések

i) A „szokásos" elnevezések: $\mathbf{R}$ elemei az ún. *valós számok*, és $a, b \in \mathbf{R}$ esetén

a és b *összege* $:= a + b$,

a és b *szorzata* $:= ab$,

nulla $:= 0 := \theta$, *egy* $:= 1 := \varepsilon$,

mínusz $a := -a := \tilde{a}$ (vagy más szóval: az a *ellentettje*),

a és b *különbsége* $:= a - b := a + \tilde{b}$,

ha $b \neq 0$, akkor: *egy per* $b := \frac{1}{b} := \hat{b}$ (vagy más szóval: a b *reciproka*),

ha $b \neq 0$, akkor: a *per* $b := \frac{a}{b} := a\frac{1}{b}$ (vagy más szóval: a és b *hányadosa*),

$a \leq b$ esetén: a *kisebb vagy egyenlő, mint* b (vagy más szóval: $b \geq a$, azaz b *nagyobb vagy egyenlő, mint* a.)

ii) Az **A)** axiómák az ún. *testaxiómák,* ezek alapján azt mondjuk, hogy $\mathbf{R}$ *test.*

iii) A **B)** és **C)** axiómák együttesen az ún. *rendezési axiómák,* ezért **A)**, **B)**, **C)** szerint $\mathbf{R}$ *rendezett test.*

iv) A **D)** axióma a *felső határ axióma.* Az ottani jelölésekkel legyen $\alpha := \min \mathcal{K}$ (a $\mathcal{K}$ halmaz legkisebb eleme), és

$$\sup A := \alpha$$

az A halmaz *felső határa* (idegen szóval *szuprémuma*). Tehát a felülről korlátos A halmaz szuprémuma az A legkisebb felső korlátja:

$$\sup A = \min \mathcal{K}.$$

v) Az **A)**, **B)**, **C)**, **D)** axiómák együttesét figyelembe véve röviden azt mondjuk, hogy az $\mathbf{R}$ *rendezett teljes test.*

vi) A részletek mellőzésével annyit jegyzünk meg csupán, hogy a fenti axiómarendszernek van (és lényegében egyetlen) modellje. (Hasonló a helyzet, mint mondjuk pl. a sakkjáték esetén: azt is a szabályai (*axiómái*) határozzák meg, és független attól, hogy fejben vagy bábokkal, asztalon, homokban, stb. játsszák, vagy pl. attól, hogy a bábok fából, aranyból, stb. készültek-e.)

vii) A valós számokkal kapcsolatos minden (eddig tanult, vagy később sorra kerülő) „manipuláció" az axiómákból felépíthető, levezethető, stb. Ezt az utat nem fogjuk bejárni, így pl. a továbbiakban ismertnek tételezzük fel a speciális számhalmazokat:

$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ a *természetes számok halmaza,*

$\mathbf{Z} := \mathbf{N} \cup \{x \in \mathbf{R} : -x \in \mathbf{N}\}$ az *egész számok halmaza,*

$\mathbf{Q} := \{p/q \in \mathbf{R} : p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ *racionális számok halmaza.*

viii) Idézzük fel a *teljes indukció* elvét: legyen $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ olyan halmaz, amelyre $0 \in \mathcal{N}$, és bármely $n \in \mathcal{N}$ esetén $n+1 \in \mathcal{N}$. Ekkor $\mathcal{N} = \mathbf{N}$. Az ún. *teljes indukciós bizonyítások* illusztrálására tekintsük a következő, az elemi tanulmányokból is jól ismert állítást:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen ekkor

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbf{N} : (*) \text{ igaz}\}.$$

Világos, hogy $0 \in \mathcal{N}$, ami azzal ekvivalens, hogy $(*)$ „$n = 0$-ra igaz". Könnyű belátni, hogy ha $n \in \mathcal{N}$ (azaz „$(*)$ igaz valamilyen $n \in \mathbf{N}$ természetes számra"), akkor $n + 1 \in \mathcal{N}$ (más szóval „$(*)$ igaz $(n + 1)$-re is"). Ui. a feltételezésünk miatt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

ix) Tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos és $\alpha \in \mathbf{R}$. Ekkor az $\alpha = \sup A$ egyenlőség a következőkkel ekvivalens:

1^o az α felső korlátja az A-nak, azaz $x \leq \alpha$ $(x \in A)$,

és

2^o az α a legkisebb az A felső korlátjai között, azaz tetszőleges $\beta \in \mathbf{R}, \beta < \alpha$ szám nem felső korlátja az A-nak. Ez utóbbi tehát azt jelenti, hogy alkalmas $a \in A$ elemmel $\beta < a$. Nyilvánvaló, hogy az előbbi „*tetszőleges* $\beta \in \mathbf{R}, \beta < \alpha$ *szám* ..." megfogalmazás helyettesíthető az alábbival: bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a \in A$, amelyre $a > \alpha - \varepsilon$.

x) Alulról korlátos halmazokra a fentiekkel analóg módon kapjuk az alábbiakat. Legyen ehhez az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz *alulról korlátos*: van olyan $M \in \mathbf{R}$ (ún. *alsó korlát*), hogy $M \leq x$ $(x \in A)$. Ha $\mathcal{M} := \{M \in \mathbf{R} : M \leq x \ (x \in A)\}$, akkor az $\mathcal{M}$ halmazban van legnagyobb elem. Vezessük be a következő jelölést, ill. elnevezést:

$$\inf A := \max \mathcal{M}$$

az A halmaz *infimuma* (vagy *alsó határa*). Mindez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $x \in A$ elemre $\inf A \leq x$, és bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a \in A$, amellyel $a < \inf A + \varepsilon$.

xi) Könnyen meggondolható, hogy ha valamilyen alulról korlátos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmazra

$$-A := \{-x \in \mathbf{R} : x \in A\},$$

akkor $\inf A = -\sup(-A)$.

xii) Világos, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaznak akkor és csak akkor van maximuma, ha $\sup A \in A$, és ekkor $\max A = \sup A$. Ugyanígy, a szóban forgó A-nak pontosan akkor van minimuma, ha $\inf A \in A$ és ekkor $\min A = \inf A$.

xiii) Állapodjunk meg a következő jelölésekben: ha az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz *felülről nem korlátos* (azaz bármely $K \in \mathbf{R}$ esetén valamilyen $x \in A$ elemmel $x > K$), akkor $\sup A := +\infty$. Hasonlóan, ha A *alulról nem korlátos* (azaz bármely $M \in \mathbf{R}$ esetén valamilyen $x \in A$ elemmel $x < M$), akkor $\inf A := -\infty$.

xiv) A továbbiakban egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmazt *korlátosnak* fogunk nevezni, ha az A alulról is és felülről is korlátos. Könnyű meggondolni, hogy ez a következővel ekvivalens: van olyan $q \in \mathbf{R}$, hogy $|x| \leq q \ \ (x \in A)$, ahol

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

xv) Legyen $\alpha \in A \subset \mathbf{R}$ és

$$A_\alpha := \{x \in A : x \leq \alpha\} \ \ , \ \ A^\alpha := \{x \in A : x \geq \alpha\}.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\sup A = \sup A^\alpha \ \ , \ \ \inf A = \inf A_\alpha.$$

1.3. A valós számok alaptételei

Az alábbiakban (a fent tárgyalt axiómák alkalmazásaként is) néhány, a későbbiekben alapvető szerepet játszó állítást bizonyítunk be.

1.3.1. Tétel (*Archimedes*). *Tetszőleges $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$ valós számokhoz létezik olyan $n \in \mathbf{N}$ természetes szám, hogy $nx > y$.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen, a tételben említett x és y esetén bármely $n \in \mathbf{N}$ mellett $nx \le y$. Ez más szóval azt jelenti, hogy az

$$A := \{nx \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\}$$

halmaz felülről korlátos. Legyen $\alpha := \sup A$. Az 1.2. ix) megjegyzés szerint (az abban szereplő ε-t x-nek választva) van olyan $a \in A$, hogy $a > \alpha - x$. Az A halmaz definíciója szerint viszont alkalmas $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal $a = nx$, ezért

$$nx > \alpha - x \iff nx + x = (n+1)x > \alpha.$$

Ugyanakkor $n+1 \in \mathbf{N}$, így $(n+1)x \in A$. Lenne tehát az A halmaznak olyan eleme, ami $\sup A$-nál nagyobb. Ez azonban a már említett 1.2. ix) megjegyzés szerint nem lehet. ■

1.3.2. Tétel (*Dedekind*). *Tegyük fel, hogy az $\emptyset \ne A, B \subset \mathbf{R}$ halmazokra az alábbiak teljesülnek: minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \le b$. Ekkor valamilyen $\gamma \in \mathbf{R}$ valós számmal $a \le \gamma \le b \quad (a \in A, b \in B)$.*

Bizonyítás. Legyen ui.

$$\mathcal{K} := \{K \in \mathbf{R} : a \le K \quad (a \in A)\},$$

ekkor a feltételeink szerint $B \subset \mathcal{K}$, azaz A felülről korlátos. Ha tehát $\gamma := \sup A$, akkor (ld. 1.2. ix) megjegyzés) $a \le \gamma \quad (a \in A)$ és $\gamma \le K \quad (K \in \mathcal{K})$. Speciálisan bármely $b \in B$ elemre is $\gamma \le b$. ■

A következő állítás előtt emlékeztetünk az *intervallum* fogalmára. Tekintsük ehhez az $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a \le b$, $c < d$ *végpontokat*, és legyen

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\} \quad , \quad (c, d) := \{x \in \mathbf{R} : c < x < d\},$$

$$(c, d] := \{x \in \mathbf{R} : c < x \le d\} \quad , \quad [c, d) := \{x \in \mathbf{R} : c \le x < d\}.$$

Az így definiált halmazokat rendre *zárt, nyílt, balról nyílt és jobbról zárt, balról zárt és jobbról nyílt* intervallumnak nevezzük.

1.3.3. Tétel (*Cantor*). *Minden $n \in \mathbf{N}$ természetes szám esetén legyenek adottak az $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, $a_n \le b_n$ végpontok, és tegyük fel, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \ne \emptyset.$$

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \le a_{n+s} \qquad (n, s \in \mathbf{N}).$$

Ez ui. $s = 0$ esetén nyilvánvaló, $s = 1$-re pedig nem más, mint a feltételeinkben szereplő $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ tartalmazás triviális következménye. Ha $n \in \mathbf{N}$ és $(*)$ valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett teljesül, akkor (az előbb mondottakat is szem előtt tartva)

$$a_{n+s} \le a_{(n+s)+1} = a_{n+(s+1)}$$

miatt $a_n \le a_{n+(s+1)}$ is igaz. Ezzel (teljes indukcióval) $(*)$-ot beláttuk.

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$b_n \ge b_{n+s} \qquad (n, s \in \mathbf{N}).$$

Más szóval tehát minden $n, k \in \mathbf{N}$, $n \le k$ mellett

$$(**) \qquad a_n \le a_k, \ \text{ ill. } \ b_k \le b_n.$$

Lássuk be mindezek alapján, hogy

$$a_j \le b_l \qquad (j, l \in \mathbf{N}).$$

Valóban, ha itt $j \le l$, akkor ($(**)$, ill. a feltételeink szerint)

$$a_j \le a_l \le b_l.$$

Ha viszont $l < j$, akkor (ismét csak $(**)$, ill. a feltételeink szerint)

$$b_l \ge b_j \ge a_j.$$

Legyen most már

$$A := \{a_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\} \ , \ B := \{b_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\}.$$

Ekkor a fentiek szerint A felülről korlátos, és a B halmaz minden eleme felső korlátja A-nak. Ha tehát

$$\alpha := \sup A,$$

akkor (ld. 1.2. ix) megjegyzés) egyrészt $a_n \le \alpha$ $(n \in \mathbf{N})$, másrészt $\alpha \le b_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Következésképpen $\alpha \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz

$$\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

■

1.3.4. Tétel (*Bernoulli*). *Tetszőleges* $h \in \mathbf{R}$, $h > -1$ *valós szám és* $n \in \mathbf{N}$ *természetes szám esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Igaz továbbá, hogy az előbbi Bernoulli-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll fenn az $(1+h)^n = 1 + nh$ *egyenlőség, ha* $h = 0$, *vagy* $n = 0$, *vagy* $n = 1$.

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy igaz a szóban forgó egyenlőtlenség. Ezt teljes indukcióval tesszük: $n = 0$ esetén mind a két oldalon 1 áll, azaz az egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett igaz az $(1+h)^n \geq 1+nh$ becslés, akkor (kihasználva, hogy a feltételeink szerint $1 + h > 0$)

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) =$$

$$1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h.$$

Ez azt jelenti, hogy a bebizonyítandó egyenlőtlenség $(n+1)$-re is fennáll, ami a teljes indukció értelmében a Bernoulli-egyenlőtlenség teljesülését jelenti.

Ha $h = 0$, akkor $(1+h)^n = 1 = 1+nh$ $(n \in \mathbf{N})$. Ha $n = 0$, akkor $(1+h)^n = 1 = 1+nh$. Ha pedig $n = 1$, akkor $(1+h)^n = 1 + h = 1 + nh$. Más szóval az egyenlőségre vonatkozó kritériumaink elegendőek.

Fordítva, tegyük fel, hogy $h \neq 0$ és $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, azaz alkalmas $k \in \mathbf{N}$ természetes számmal $n = 2 + k$. Mutassuk meg, hogy

$$(1+h)^n = (1+h)^{2+k} > 1 + (2+k)h = 1 + nh \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $k = 0$, azaz $n = 2$, akkor

$$(1+h)^n = (1+h)^{2+k} = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h = 1 + nh.$$

Ha viszont valamilyen $k \in \mathbf{N}$ esetén $(1+h)^{2+k} > 1 + (2+k)h$, akkor

$$(1+h)^{2+k+1} = (1+h)(1+h)^{2+k} > (1+h)(1+(2+k)h) =$$

$$1 + (2+k+1)h + (2+k)h^2 > 1 + (2+k+1)h.$$

A teljes indukcióra hivatkozva ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

1.3.5. Tétel (*számtani-mértani közép*). *Legyen* $n \in \mathbf{N}$ *és az* $a_0, ..., a_n \in \mathbf{R}$ *számokról tegyük fel, hogy valamennyien nem-negatívok:* $a_k \geq 0 \quad (k = 0, ..., n)$. *Ekkor*

$$(*) \qquad \left(\frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n+1}\right)^{n+1} \geq \prod_{k=0}^n a_k.$$

Az itt szereplő egyenlőtlenségben akkor és csak akkor írható egyenlőség, ha az a_k $(k = 0, ..., n)$ *számok mindannyian egyenlők:* $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás. A tételünkben említett *számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget* is teljes indukcióval fogjuk belátni. Az $n = 0$ esetben mindez a triviális $a_0 = a_0$ egyenlőségre redukálódik. Tegyük fel ezért, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén bármilyen $0 \leq a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, ..., n)$ választással fennáll az $(*)$ előbbi egyenlőtlenség, és legyen $a_{n+1} \geq 0$ tetszőleges. Nyilván feltehető, hogy

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1},$$

hiszen ha a szóban forgó számokra ez nem teljesül, akkor így sorba rakva („átrendezve") őket a $(*)$ egyenlőtlenség (n helyett $(n+1)$-re) mindkét oldala változatlan marad. Legyen

$$S_k := \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j}{k+1} \quad , \quad P_k := \prod_{j=0}^{k} a_j \qquad (k = 0, ..., n+1).$$

Vegyük észre, hogy

$$S_k = \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j}{k+1} \leq \frac{\sum_{j=0}^{k} a_k}{k+1} = a_k \leq a_{n+1} \qquad (k = 0, ..., n+1).$$

Továbbá az *indukciós feltevésünk* úgy szól, hogy

$$S_n^{n+1} \geq P_n.$$

Ennek alapján azt kell megmutatnunk, hogy

$$S_{n+1}^{n+2} \geq P_{n+1}.$$

Világos, hogy

$$P_{n+1} = a_{n+1} P_n \leq a_{n+1} S_n^{n+1} = S_n^{n+2} + (a_{n+1} - S_n) S_n^{n+1} =$$

$$S_n^{n+2} + (n+2) \frac{a_{n+1} - S_n}{n+2} S_n^{n+1},$$

ahol a fentiek szerint $a_{n+1} - S_n \geq 0$. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$a := S_n \quad , \quad b := \frac{a_{n+1} - S_n}{n+2}.$$

Ekkor tehát $a, b \geq 0$, és

$$P_{n+1} \leq a^{n+2} + (n+2) a^{n+1} b.$$

Emlékeztetünk a binomiális tétel szerint fennálló egyenlőségre:

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} a^{n+2-j} b^j,$$

azaz $a, b \geq 0$ miatt

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} a^{n+2-j} b^j \geq \binom{n+2}{0} a^{n+2} + \binom{n+2}{1} a^{n+1} b =$$

$$a^{n+2} + (n+2) a^{n+1} b.$$

Ezért

$$P_{n+1} \leq (a+b)^{n+2} = \left(S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+2}\right)^{n+2} = S_{n+1}^{n+2}.$$

Ezzel a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget beláttuk.

Ha valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ számmal $a_0 = \cdots = a_n = \alpha$, akkor nyilván

$$P_n = \alpha^{n+1} = S_n^{n+1},$$

más szóval az „egyenlőséggel" kapcsolatban megfogalmazott feltételünk triviális módon elégséges. Lássuk be, hogy szükséges is. Ez azt jelenti, hogy ha a tételben szereplő $a_0, ..., a_n$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_n^{n+1} > P_n.$$

Ekkor nyilván csak $n \geq 1$ lehet, azaz valamilyen $k \in \mathbf{N}$ segítségével $n = k+1$. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha az $a_0, ..., a_{k+1}$ nem-negatív számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_{k+1}^{k+2} > P_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Most is teljes indukcióval dolgozunk. Ha itt $k = 0$, azaz $(0 \leq)\, a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ és $a_0 \neq a_1$, akkor azt kell ellenőrizni, hogy

$$S_1^2 = \left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right)^2 = \frac{a_0^2 + 2a_0 a_1 + a_1^2}{4} > a_0 a_1 = P_1.$$

Ez (átrendezés után) azzal ekvivalens, hogy

$$a_0^2 - 2a_0 a_1 + a_1^2 = (a_0 - a_1)^2 > 0,$$

ami az $a_0 \neq a_1$ feltételezés (tehát $a_0 - a_1 \neq 0$) miatt igaz. Ha valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett az

$$S_{k+1}^{k+2} > P_{k+1}$$

egyenlőtlenség fennáll minden olyan $(0 \leq)\, a_0, ..., a_{k+1} \in \mathbf{R}$ választás mellett, amikor az $a_0, ..., a_{k+1}$ számok nem mind egyenlők, akkor ugyanezt kell bebizonyítanunk k helyett $(k+1)$-re: ha az $a_0, ..., a_{k+2}$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_{k+2}^{k+3} > P_{k+2}.$$

Ehhez ismét feltehetjük, hogy $(0 \leq)\, a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{k+2}$. Mivel az itt szereplő számok nem mind egyenlők, ezért $a_{k+2} > 0$. Legyen most (ld. fent)

$$a := S_{k+1} \ , \ \ b := \frac{a_{k+2} - S_{k+1}}{k+3}.$$

Ekkor (ld. a binomiális tételre alapulóan fent már követett módszert)

$$P_{k+2} = a_{k+2} P_{k+1} < a_{k+2} S_{k+1}^{k+2} = S_{k+1}^{k+3} + (a_{k+2} - S_{k+1}) S_{k+1}^{k+2} =$$

$$S_{k+1}^{k+3} + (k+3) \frac{a_{k+2} - S_{k+1}}{k+3} S_{k+1}^{k+2} \leq (a+b)^{k+3} = S_{k+2}^{k+3},$$

következésképpen $S_{k+2}^{k+3} > P_{k+2}$. ■

1.3.6. Tétel (*négyzetgyök*). *Egyértelműen létezik olyan* $0 < \alpha \in \mathbf{R}$, *amelyre*

$$\alpha^2 = 2.$$

Bizonyítás. Legyen ui.

$$A := \{0 < x \in \mathbf{R} : x^2 \leq 2\}.$$

Ekkor $1 \in A$ nyilván igaz, ill. könnyen láthatóan bármely $x \in A$ számra

$$x \leq 2.$$

Valóban, ha valamilyen $x \in A$ elemre $x > 2$ teljesülne, akkor ($x \in A$ miatt) egyrészt $x^2 \leq 2$, másrészt $x^2 > 2^2 = 4 > 2$ miatt $x^2 > 2$, azaz $2 < x^2 \leq 2$. Ez nyilván nem igaz.

Az A halmaz tehát korlátos, legyen

$$\alpha := \sup A.$$

Mivel $1 \in A$, ezért $1 \leq \alpha$. Lássuk be, hogy $\alpha^2 = 2$. Ezt indirekt úton tesszük.

1^o eset: $\alpha^2 < 2$. Legyen $0 < \varepsilon < \alpha$ egyelőre tetszőleges, és számítsuk ki $(\alpha + \varepsilon)^2$-et:

$$(\alpha + \varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Könnyen adódik, hogy alkalmas ε mellett $\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$. Ez ui. azt jelenti, hogy

$$2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 - \alpha^2.$$

Vegyük figyelembe, hogy $2 - \alpha^2 > 0$. Ha itt már $\varepsilon < 1$, akkor $\varepsilon^2 < \varepsilon$, azaz

$$2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 < (2\alpha + 1)\varepsilon.$$

Ezért, ha az eddigi feltételeken kívül még

$$(2\alpha + 1)\varepsilon < 2 - \alpha^2,$$

azaz

$$\varepsilon < \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}$$

is teljesül, akkor $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$. Ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha + \varepsilon \in A$, ami nem lehet, hiszen α felső korlátja A-nak és $\alpha < \alpha + \varepsilon$.

2^o eset: $\alpha^2 > 2$. Most vizsgáljuk $(\alpha - \varepsilon)^2$-et $0 < \varepsilon < \alpha$ mellett:

$$(\alpha - \varepsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 + \alpha^2 - 2 - 2\alpha\varepsilon.$$

Itt $\alpha^2 - 2 > 0$. Válasszuk az eddigieken túl ε-t úgy, hogy

$$2\alpha\varepsilon < \alpha^2 - 2,$$

azaz

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}.$$

Az eddigieket összegezve ekkor egy alkalmas $0 < \varepsilon < \alpha$ számmal $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$. Mivel $\alpha - \varepsilon$ már nem felső korlátja A-nak, így van olyan $b \in A$, hogy $(0 <)\, \alpha - \varepsilon < b$. Tehát

$$2 \geq b^2 > (\alpha - \varepsilon)^2 > 2,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás.

Az „maradt tehát", hogy (amint állítottuk) $\alpha^2 = 2$.

Ha $\beta > 0$ és $\beta^2 = 2$ is igaz, akkor

$$0 = 2 - 2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta),$$

amiből $\alpha + \beta > 0$ miatt $\alpha - \beta = 0$, más szóval $\alpha = \beta$ következik. ■

1.4. Megjegyzések

i) Beláttuk tehát, hogy a felülről korlátos halmazok felső határának a létezését feltételező **D)** axióma maga után vonja a Dedekind-tételt. Lássuk be, hogy ez fordítva is igaz:

$$\text{Dedekind-tétel} \implies \text{szuprémum létezése.}$$

Ha ui. az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos, akkor legyen

$$B := \{K \in \mathbf{R} : a \leq K \ \ (a \in A)\}.$$

Ekkor minden $a \in A, b \in B$ esetén $a \leq b$. Ezért (feltételezve a Dedekind-tétel állítását) van olyan $\alpha \in \mathbf{R}$, hogy

$$a \leq \alpha \leq b \qquad (a \in A,\, b \in B).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy α felső korlátja A-nak, és ugyanakkor az A bármely felső korlátjánál kisebb vagy egyenlő. Így $\alpha = \min B = \sup A$.

ii) Ha tehát a **D)** axiómát kicseréljük a Dedekind-tétel állítására, akkor egy, az eredetivel ekvivalens axiómarendszert kapunk.

iii) Belátható, hogy a most mondott ii) megjegyzés végkövetkeztetése igaz marad akkor is, ha a **D)** axiómát az Archimedes+Cantor-tételek együttesével váltjuk fel. Valóban, feltételezve ez utóbbiak teljesülését legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ egy felülről korlátos halmaz, és jelöljük B-vel az A felső korlátjainak a halmazát. Legyen $a_0 \in A, b_0 \in B$ egy-egy elem, és

$$c := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

az $[a_0, b_0]$ intervallum felezőpontja. Ha $c \notin B$, azaz c nem felső korlátja A-nak, akkor egy alkalmas $\alpha \in A$ elemmel $\alpha > c$. Legyen

$$[a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, c] & (c \in B) \\ \\ [\alpha, b_0] & (c \notin B). \end{cases}$$

Világos, hogy $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ és $b_1 - a_1 \leq (b_0 - a_0)/2$. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén már ismerjük az $[a_n, b_n]$ intervallumot, és „ismételjük meg" az $[a_1, b_1]$ intervallumhoz vezető fenti lépéseket. Legyen tehát

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

az $[a_n, b_n]$ intervallum felezőpontja, és

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, c_n] & (c_n \in B) \\ \\ [\alpha_n, b_n] & (c_n \notin B), \end{cases}$$

ahol $c_n \notin B$ esetén $\alpha_n \in A$ olyan elem, amelyre $\alpha_n > c_n$. (Az $a_n, b_n \ \ (n \in \mathbf{N})$ végpontok definíciójának a „korrektségét" illetően ld. 3.2. viii) megjegyzés.) Ekkor

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ \ , \ \ b_{n+1} - a_{n+1} \leq (b_n - a_n)/2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$b_n - a_n \le \frac{b_0 - a_0}{2^n} \le \frac{b_0 - a_0}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A Cantor-tétel feltételezett fennállása alapján létezik olyan $\gamma \in \mathbf{R}$ szám, amelyre

$$\gamma \in [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mutassuk meg, hogy egyetlen ilyen γ létezik. Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy valamilyen $\beta \in \mathbf{R}$ esetén is igaz a $\beta \in [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbf{N})$ tartalmazás, és $\beta \ne \gamma$, pl. $\beta > \gamma$. Következésképpen

$$0 < \beta - \gamma \le b_n - a_n \le \frac{b_0 - a_0}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz bármely $m \in \mathbf{N}$ természetes számra

$$m(\beta - \gamma) \le b_0 - a_0.$$

Ez nyilván ellentmond az Archimedes-tételnek.

Most lássuk be, hogy $\gamma \in B$, azaz γ felső korlátja A-nak. Ismét indirekt bizonyítási módot választva tegyük fel, hogy ez nem igaz. Van tehát olyan $x \in A$ elem, amelyre $x > \gamma$ teljesül. Mivel az $[a_n, b_n] \quad (n \in \mathbf{N})$ intervallumok fenti definíciójából triviálisan következik, hogy $b_n \in B$, ezért

$$a_n \le \gamma < x \le b_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Így

$$0 < x - \gamma \le b_n - a_n \le \frac{b_0 - a_0}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$m(x - \gamma) \le b_0 - a_0 \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Ez ismét ellentmond az Archimedes-tételnek.

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\gamma = \min B$. Ezt megint indirekt úton tesszük, feltételezve egy olyan $y \in B$ létezését, amelyre $y < \gamma$. Mivel $a_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért

$$a_n \le y < \gamma \le b_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$0 < y - \gamma \le b_n - a_n \le \frac{b_0 - a_0}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$m(y - \gamma) \le b_0 - a_0 \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Ezzel újra ellentmondásba kerültünk az Archimedes-tétellel. Más szóval létezik a B felső korlátok között legkisebb, ami a felső határ axiómában megfogalmazott állítás.

Az 1.3.1. Tétel alapján azt mondjuk, hogy $\mathbf{R}$ *egy archimedeszien rendezett teljes test.*

iv) Alkalmazzuk az Archimedes-tételt az $x = 1$ választással, amikor is a következőt kapjuk: minden $y \in \mathbf{R}$ esetén valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$n1 = n > y.$$

Ez azt jelenti, hogy a természetes számok halmaza felülről nem korlátos. Analóg módon kapjuk ugyanezt $\mathbf{Z}$-re is, ill. azt, hogy $\mathbf{Z}$ alulról sem korlátos. Tekintettel arra, hogy $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, így mindez $\mathbf{Q}$-ra és $\mathbf{R}$-re is igaz.

v) Bizonyítsuk be, hogy bármely nyílt (a, b) intervallum tartalmaz racionális számot:

$$(a, b) \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset.$$

Valóban, ha $a \geq 0$, akkor az Archimedes-tétel miatt alkalmas $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal $n(b-a) > 1$, amiből $n \neq 0$ és $1/n < b - a$ következik. Ezért újra az Archimedes-tételt alkalmazva kapunk olyan $m \in \mathbf{N}$ természetes számot, amellyel $m/n > a$. Mivel $a \geq 0$, ezért $m > 0$. Legyen p az előbbi tulajdonságú m számok között a legkisebb. (Az 1.1. axiómákból levezethetően a természetes számok bármely $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ részhalmazának van minimuma.) Tehát $(p-1)/n \leq a$, azaz

$$\frac{p-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$

így $a < p/n < b$.

Ha $a < 0 < b$, akkor $0 \in \mathbf{Q}$ miatt az állításunk nyilvánvaló.

Legyen végül $b \leq 0$. Ekkor $0 \leq -b < -a$, azaz az első eset alapján valamilyen $r \in \mathbf{Q}$ racionális számmal $-b < r < -a$, amiből viszont $a < -r < b$ következik. Mivel $-r \in \mathbf{Q}$, ezért mindez a bizonyításunk végét jelenti.

vi) Az előző megjegyzést „iterálva" könnyen adódik már, hogy bármilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ végpontokkal az (a, b) nyílt intervallum végtelen sok racionális számot tartalmaz.

vii) Ha $h \geq 0$, akkor (a $0^0 := 1$ pillanatnyi megállapodással) az 1.3.4. Tételbeli egyenlőtlenség triviálisan következik a binomiális tételből:

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \binom{n}{0} h^0 + \binom{n}{1} h^1 = 1 + nh \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

viii) A Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) könnyen beláthatóan igaz marad a $h = -1$ esetben is (ha most is a $0^0 := 1$ megállapodással élünk). Ekkor ti. $n = 0$ esetén $(1+h)^n = 1 = 1 + nh$, míg $n \geq 1$ mellett az $(1+h)^n \geq 1 + nh$ $(n \in \mathbf{N})$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $1 - n \leq 0$, azaz $1 \leq n$, amiből kiindultunk.

ix) Ha az előbbi megjegyzésben $h = -1$ helyett $h = -2$-t írunk, akkor formálisan a Bernoulli-egyenlőtlenség a következőt jelenti:

$$(-1)^n \geq 1 - 2n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez nyilván igaz, hiszen $(-1)^n$ vagy 1 (ha n páros), vagy -1 (ha n páratlan), ugyanakkor $1 - 2n = 1$, ha $n = 0$, míg $0 < n$ esetén $1 - 2n \leq -1$.

x) Tehát a Bernoulli-egyenlőtlenség teljesül (az ottani jelöléssel) $h = -1$ és $h = -2$ esetén is. Belátható, hogy igaz marad tetszőleges $h \geq -2$ választással, de $h < -2$ mellett már nem. Ui. a $-2 < h < -1$ esetben írjuk fel h-t egy alkalmas $0 < \varepsilon < 1$ szám segítségével a következő alakban: $h = -1 - \varepsilon$. Ekkor azt kell ellenőrizni, hogy

$$(1+h)^n = (1 - 1 - \varepsilon)^n = (-\varepsilon)^n \geq 1 + n(-1 - \varepsilon) = 1 - n - n\varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$1 - n - n\varepsilon = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ -\varepsilon & (n = 1) \\ < 1 - n \leq -1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

és

$$(-\varepsilon)^n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ -\varepsilon & (n = 1) \\ > -1 & (n \geq 2), \end{cases}$$

ezért a Bernoulli-egyenlőtlenség valóban igaz a $-2 < h < -1$ esetben is. Ha $h < -2$, akkor $h = -2 - \delta$ alakú valamilyen $\delta > 0$ számmal, azaz a szóban forgó egyenlőtlenség azt jelentené, hogy

$$(-1 - \delta)^n = (-1)^n (1 + \delta)^n \geq 1 - 2n - n\delta \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez ugyan páros n-ekre könnyen láthatóan igaz, viszont $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N})$ (azaz páratlan n) esetén a következőképpen szólna:

$$(1 + \delta)^{2k+1} \leq 2k(2 + \delta) + 1 + \delta \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

A későbbi vizsgálódásainkból majd kiderül, hogy egy alkalmas $k_0 \in \mathbf{N}$ mellett az utóbbi egyenlőtlenség egyetlen $k_0 < k \in \mathbf{N}$ esetén sem áll fenn (ld. 3.10. xiii) megjegyzés).

xi) Az 1.3.4. Tétel könnyen kiterjeszthető tetszőleges $n \in \mathbf{Z}$ kitevőre is. Nevezetesen, legyen $-1 < h \in \mathbf{R}$ és $0 < n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$(1+h)^{-n} \geq 1 - nh.$$

Valóban,

$$(1+h)^{-n} = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \left(1 + \frac{-h}{1+h}\right)^n,$$

ahol

$$\frac{-h}{1+h} > -1 \iff -h > -1-h \iff 1 > 0,$$

ami nyilván igaz. Ezért alkalmazható az 1.3.4. Tétel (h helyébe $-h/(1+h)$-t írva), azaz

$$(1+h)^{-n} \geq 1 + n\frac{-h}{1+h}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$1 + n\frac{-h}{1+h} \geq 1 - nh,$$

hiszen ez azzal ekvivalans, hogy $h^2 \geq 0$.

xii) Végül jegyezzük meg az 1.3.4. Tétel alábbi kiterjesztését (*általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség*): tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és azonos előjelű $x_0, ..., x_n \in (-1, +\infty)$ számokra igaz, hogy

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Világos, hogy ha itt valamilyen $-1 < h \in \mathbf{R}$ mellett $x_0 = \cdots = x_n = h$, akkor (a triviális $n = 0$ esettől eltekintve) az 1.3.4. Tétel adódik.

xiii) Az 1.3.6. Tételben kapott $\alpha > 0$ számot *négyzetgyök kettőnek* nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{2}$. Tehát $\sqrt{2}$ az egyetlen olyan szám, amely nem-negatív és a négyzete kettő. Analóg módon látható be, hogy akármilyen $0 \leq a \in \mathbf{R}$ esetén egyértelműen létezik olyan $0 \leq x \in \mathbf{R}$, amellyel $x^2 = a$. Ezt az x-et az a *négyzetgyökének* nevezzük, és a következőképpen jelöljük: $\sqrt{a}$ (vagy más szóval *négyzetgyök* a).

xiv) Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ (azaz $\sqrt{2}$ *irracionális szám*: nem racionális szám). Ha ui. az lenne, akkor alkalmas $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ egész számokkal

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

teljesülne. Itt nyilván feltehető, hogy p-nek és q-nak (± 1-en kívül) nincs közös osztója. Ugyanakkor $2q^2 = p^2$, következésképpen p csak páros szám lehet: alkalmas $s \in \mathbf{Z}$ számmal $p = 2s$. Így

$$2q^2 = (2s)^2 = 4s^2,$$

azaz $q^2 = 2s^2$. Ez azt jelenti, hogy q is páros szám, tehát a 2 p-nek is és q-nak is osztója, szemben az előbb mondottakkal. Innen az is egyszerűen belátható, hogy bármely (a, b) nyílt intervallum tartalmaz irracionális számot. Ti. az $a \geq 0$ esetben az v) megjegyzésben szereplő gondolatmenetet ismételjük meg azzal a különbséggel, hogy az ottani $n \in \mathbf{N}$ számot az

$$n(b - a) > \sqrt{2}$$

egyenlőtlenségnek megfelelően választjuk meg. A továbbiakban $1/n$ helyett $\sqrt{2}/n$-et írva végül $a < p \cdot \sqrt{2}/n < b$ adódik, ahol könnyen láthatóan a $p \cdot \sqrt{2}/n$ szám irracionális. Az $a < b < 0$ eset ugyanúgy vezethető vissza a $0 \leq a < b$ esetre, mint v)-ben. Ha pedig $a < 0 < b$, akkor az elsőként vizsgált esetet alkalmazzuk pl. a $(b/2, b)$ intervallumra.

xv) Egyszerűen meggondolható, hogy a valós számok 1.1-beli axiómái a **D)** felső határ axióma kivételével $\mathbf{R}$ helyett (értelemszerű módosítással) $\mathbf{Q}$-ra is teljesülnek. Következésképpen $\mathbf{Q}$ is egy rendezett test, de pl. az

$$\{0 < x \in \mathbf{Q} : x^2 \leq 2\}$$

felülről korlátos halmaznak (ld. xiv)) $\mathbf{Q}$-ban nincs legkisebb felső korlátja.

xvi) A későbbiekben (más úton, ld. 3.9.4. Tétel) bebizonyítjuk a xiii) megjegyzés alábbi kiterjesztését: bármely $0 \leq a \in \mathbf{R}$ és $2 \leq k \in \mathbf{N}$ esetén egyértelműen van olyan $x \in \mathbf{R}$, hogy $x \geq 0$ és $x^k = a$. Ezt az x számot az a szám *k-adik gyökének* nevezzük, és a $\sqrt[k]{a}$ szimbólummal jelöljük.

xvii) Az 1.3.5. Tétel bizonyításában szereplő

$$S_n := \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az $a_0, ..., a_n \in \mathbf{R}$ számok *számtani közepe,* míg ($a_0, ..., a_n \geq 0$ esetén)

$$Q_n := \sqrt[n+1]{\prod_{j=0}^{n} a_j} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

a szóban forgó számok *mértani közepe* (innen a tétel elnevezése). Hasonlóan,

$$R_n := \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{n} a_j^2}{n+1}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az illető $a_0, ..., a_n$ számok *négyzetes közepe,*

$$H_n := \frac{n+1}{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

pedig azok *harmonikus közepe* (feltéve, hogy valamennyi itt szereplő $a_0, ..., a_n$ szám nullától különböző). Megmutatható, hogy

$$H_n \le Q_n \le S_n \le R_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan, ha $n = 1,$ akkor az elemei matematikából jól ismert egyenlőtlenség-láncot kapjuk: tetszőleges $0 < a, b \in \mathbf{R}$ számokra

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

xviii) Az $\mathbf{R}^2$ halmaz segítségével könnyű megadni a komplex számtest egy modelljét. Értelmezzük ehhez az $(x, y), (u, v) \in \mathbf{R}^2$ elemek *összegét* és *szorzatát* rendre az alábbiak szerint:

$$(x, y) \oplus (u, v) := (x + u, y + v) \ \ , \ \ (x, y) \odot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Ha $\theta := (0, 0),\ \varepsilon := (1, 0)$, akkor egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy a valós számokkal kapcsolatban megismert **A)** műveleti axiómák teljesülnek. Egy $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ elem ellentettje $(-x, -y),$ egy θ-tól különböző $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ reciproka pedig

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}, -\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

lesz. Következésképpen $\mathbf{R}^2$ a fenti műveletekre nézve test. Bármely $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ egyértelműen felírható az

$$(x, y) = (x, 0) \oplus ((0, 1) \odot (y, 0))$$

alakban. Továbbá minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén $(x, 0) \oplus ((0, 1) \odot (y, 0)) \in \mathbf{R}^2,$ azaz az

$$\hat{x} := (x, 0) \quad (x \in \mathbf{R})\ ,\ \imath := (0, 1)$$

jelölésekkel $\mathbf{R}^2$ elemei

$$\hat{x} \oplus (\hat{y} \odot \hat{\imath}) \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

alakúak. Egyszerűen igazolható, hogy az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \hat{x} \in \hat{\mathbf{R}} := \{\hat{z} \in \mathbf{R}^2 : z \in \mathbf{R}\}$$

megfeleltetés egy bijekció, és bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén

$$\widehat{x+y} = \hat{x} \oplus \hat{y}\ ,\ \widehat{xy} = \hat{x} \odot \hat{y}.$$

Ha $\hat{x} \preceq \hat{y}$ azt jelenti, hogy $x \leq y$ $(\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\mathbf{R}})$, akkor $\hat{\mathbf{R}}$-ban $\preceq$ egy rendezés, és az

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} \oplus \hat{y} \in \hat{\mathbf{R}},$$

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} \odot \hat{y} \in \hat{\mathbf{R}}$$

műveletekkel a valós számok valamennyi axiómája teljesül $\hat{\mathbf{R}}$-ben. Más szóval $\hat{\mathbf{R}}$ is tekinthető a valós számok egy modelljének. Így nem okoz félreértést, ha $(x, 0)$ (azaz $\hat{x}$) helyett az x szimbólumot $(x \in \mathbf{R})$, $\hat{\mathbf{R}}$ helyett az $\mathbf{R}$-et használjuk. Hasonlóan nem fog félreértést okozni az a megállapodásunk sem, hogy $\mathbf{R}^2$-beli, ill. $\mathbf{R}$-beli elemek összegét, szorzatát ugyanúgy (a megszokott módon) jelöljük. A $\preceq$ szimbólum helyett is $\leq$-t fogunk írni.

xix) Az $\mathbf{R}^2$ elemeit (a fenti modellben) *komplex számoknak* nevezzük. A „modellalkotást" úgy is kifejezésre juttatjuk, hogy $\mathbf{R}^2$ helyett a $\mathbf{C}$ jelet használjuk. Megmutatható, hogy a komplex számoknak is lényegében egyetlen modellje létezik. Bármely $z \in \mathbf{C}$ szám egyértelműen felírható tehát

$$z = x + \imath y$$

alakban, ahol x, y alkalmasan választott valós számok. A z számnak ezt az előállítását a z *kanonikus* (vagy *algebrai*) *alakjának*, $\operatorname{Re} z := x$-et a z *valós részének*, ill. $\operatorname{Im} z := y$-t a z *képzetes részének* nevezzük. Könnyen belátható, hogy a $\mathbf{C}$ testben nem adható meg olyan rendezés, amellyel $\mathbf{C}$ rendezett testté válna (azaz az 1.1-beli rendezési axiómák is teljesülnének). Ha ui. $r \subset \mathbf{C}^2$ egy ilyen rendezés lenne, akkor vagy $(0, \imath) \in r$, vagy $(\imath, 0) \in r$ teljesülne. Az előbbi esetben $\imath^2 = -1$, és a rendezési axiómák alapján $(1, 0)$, $(0, 1) \in r$ is igaz lenne. Az r antiszimmetriája miatt innen $0 = 1$ következne, ami nem igaz. Az $(\imath, 0) \in r$ feltételezés hasonlóan vezetne ellentmondásra.

xx) A $z = x + \imath y \in \mathbf{C}$ $(x, y \in \mathbf{R})$ komplex szám *abszolút értékén* a

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

(nem-negatív) számot értjük. Ekkor a $\overline{z} := x - \imath y$ jelöléssel $|z|^2 = z\overline{z}$. Ha $z \neq 0$, akkor egyértelműen van olyan $\alpha \in [0, 2\pi)$ „szög" (ld. 6. fejezet), amellyel

$$z = |z|(\cos \alpha + \imath \sin \alpha).$$

A z számnak ez utóbbi felírását a z *trigonometrikus alakjának* nevezzük. Itt emlékeztetünk az ún. *Moivre-formulára*:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + \imath \sin(n\alpha)) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

xxi) A későbbiekben a $\mathbf{K}$ szimbólum vagy a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát, vagy pedig a komplex számok $\mathbf{C}$ halmazát jelöli. Emlékeztetünk a meglehetősen sokszor alkalmazott *háromszög-egyenlőtlenségekre*:

$$|a+b| \le |a|+|b| \ , \ \ |a-b| \ge ||a|-|b|| \qquad (a,b \in \mathbf{K}).$$

Valóban, az itt szereplő első egyenlőtlenség nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$|a+b|^2 = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) \le (|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|,$$

ahol a bal oldalon

$$(a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a}+b\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{b} =$$

$$|a|^2+|b|^2+a\overline{b}+\overline{a\overline{b}} = |a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(a\overline{b}).$$

Következésképpen a szóban forgó első egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\mathrm{Re}(a\overline{b}) \le |a|\cdot|b|.$$

Mindez viszont

$$\left|\mathrm{Re}(a\overline{b})\right| \le |ab| = |a|\cdot|b|$$

alapján triviálisan igaz. Az $|a-b| \ge ||a|-|b||$ „második" háromszög-egyenlőtlenség ugyanakkor egyszerű következménye az „elsőnek". Ui. az első alapján

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b| \ , \ \ |b| = |(b-a)+a| \le |a-b|+|a|,$$

amiből

$$|a|-|b| \le |a-b| \ , \ \ -(|a|-|b|) = |b|-|a| \le |a-b|$$

következik. Mivel

$$||a|-|b|| = \begin{cases} |a|-|b| & (|a| \ge |b|) \\ \\ |b|-|a| & (|a| < |b|), \end{cases}$$

ezért az utóbbi két egyenlőtlenség valóban azt jelenti, hogy $|a-b| \ge ||a|-|b||$.

xxii) Mivel a későbbiekben „lépten-nyomon" alkalmazzuk a fenti háromszög-egyenlőtlenségeket, ezért bizonyítsuk be (az elsőt) formailag másképp is. Legyen ui.

$$a = x+\imath y \ , \ \ b = u+\imath v \qquad (x,y,u,v \in \mathbf{R}),$$

ekkor

$$|a+b| = |x+u+\imath(y+v)| = \sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2},$$

ill.

$$|a| = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ \ |b| = \sqrt{u^2+v^2}.$$

Ezért $|a+b| \leq |a|+|b|$ azzal ekvivalens, hogy

$$\sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2},$$

azaz (négyzetreemelés után) azzal, hogy

$$x^2+u^2+y^2+v^2+2(xu+yv) \leq x^2+u^2+y^2+v^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}.$$

Egyszerűsítés után tehát azt kell igazolnunk, hogy

$$xu+yv \leq \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}.$$

Ennél „több is" igaz, ti.

$$(*) \qquad |xu+yv| \leq \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)},$$

azaz ((lévén az egyenlőtlenség mindkét oldala nem-negatív) négyzetreemelés után)

$$x^2u^2+y^2v^2+2xyuv \leq x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2.$$

Egyszerűsítéssel így oda jutunk, hogy

$$0 \leq x^2v^2+y^2u^2-2xyuv = (xv-yu)^2,$$

ami nyilván igaz.

xxiii) A $(*)$ egyenlőtlenség „ismerős" a lineáris algebrából. Ha ui.

$$\xi := (x,y) \quad , \quad \eta := (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

esetén

$$\langle \xi, \eta \rangle := xu+yv$$

a ξ, η vektorok *skaláris szorzata,* ill. egy $\omega := (z,w) \in \mathbf{R}^2$ vektor *hossza* (vagy *normája*)

$$\|\omega\| := \sqrt{z^2+w^2},$$

akkor $(*)$ nem más, mint a

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$$

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz-egyenlőtlenség.

2. fejezet

Függvények

2.1. Relációk

Bevezetésképpen röviden emlékeztetünk a reláció fogalmára. Induljunk ki ehhez az A, B halmazokból. Az $A \times B$ Descartes-szorzat elemeit a „szokásos" módon fogjuk jelölni:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \qquad (a \in A,\, b \in B).$$

Itt a az (a, b) *rendezett pár első komponense,* b pedig a *második komponense.* (Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$, ezért a továbbiakban hallgatólagosan feltesszük, hogy $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$.)

Az $A \times B$ Descartes-szorzat bármely részhalmazát (bináris) *relációnak* nevezzük. Ha $r \subset A \times B$ és valamilyen $a \in A, b \in B$ elemek esetén $(a, b) \in r$, akkor azt mondjuk, hogy az a, b elemek *(r-)relációban vannak.* Mindezt gyakran az arb szimbólummal is szokás jelölni. (A későbbiekben a relációkkal kapcsolatban is feltesszük hallgatólagosan, hogy $r \neq \emptyset$.) Vezessük be az alábbi halmazokat:

i) $\mathcal{D}_r := \{x \in A : \text{ létezik } (x, y) \in r\}$,

ii) $\mathcal{R}_r := \{y \in B : \text{ létezik } (x, y) \in r\}$.

Világos, hogy pl. $\mathcal{D}_{A\times B} = A$, $\mathcal{R}_{A\times B} = B$. A $\mathcal{D}_r$ halmazt az r reláció *értelmezési tartományának*, az $\mathcal{R}_r$ halmazt az r *értékkészletének* nevezzük. Más szóval tehát az r reláció értelmezési tartománya az r-et alkotó rendezett párok első komponenseinek, az értékkészlete az említett rendezett párok második komponenseinek a halmaza.

Az $r \subset A \times B$ reláció *homogén,* ha $A = B$ és $\mathcal{D}_r = A$. Ekkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó r reláció

i) *reflexív,* ha bármely $a \in A$ elemre $(a, a) \in r$,

ii) *szimmetrikus,* ha tetszőleges $(a, b) \in r$ rendezett párra $(b, a) \in r$,

iii) *antiszimmetrikus,* ha minden olyan $(a, b) \in r$ rendezett pár esetén, amelyre egyúttal $(b, a) \in r$ is teljesül, igaz az $a = b$ egyenlőség,

iv) *tranzitív,* ha bármely $(a, b), (b, c) \in r$ rendezett pár mellett $(a, c) \in r$ is igaz.

Az (egyszerre) reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt *ekvivalencia-relációnak* (vagy röviden *ekvivalenciának*), a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt pedig *rendezési relációnak* (vagy röviden *rendezésnek*) nevezzük. Ez utóbbi *teljes,* ha tetszőleges $a, b \in A$ elemekre $(a, b) \in r$ vagy $(b, a) \in r$ fennáll.

2.2. A függvény fogalma

Tekintsük az $\emptyset \neq A, B$ halmazokat és az $f \subset A \times B$ relációt. Valamely $x \in A$ elemre legyen

$$f_x := \{y \in B : (x, y) \in f\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $f_x \subset \mathcal{R}_f$, ill. $f_x \neq \emptyset$ akkor és csak akkor igaz, ha $x \in \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az f reláció *függvény,* ha tetszőleges $x \in A$ választással az f_x halmaz legfeljebb egy elemű. Ekkor tehát a fentiek szerint minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre egyértelműen létezik olyan $y \in \mathcal{R}_f$, amellyel $(x, y) \in f$. Minderre a következő jelölést, ill. elnevezést fogjuk használni:

$$f(x) := y$$

az f függvény által az x-helyen felvett *függvényérték* (vagy *helyettesítési érték*). Azt is mondjuk, hogy az f függvény *x-hez az y-t rendeli* (vagy f az x-nek y-t *felelteti meg*). Szokás itt x-et *független változónak*, a neki megfeleltetett elemet pedig *függő változónak* nevezni. Következésképpen

$$f_x = \{f(x)\} \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Azt, hogy valamilyen $x \in \mathcal{D}_f$, $y \in \mathcal{R}_f$ esetén $y = f(x)$, szokás az $x \mapsto y$ (vagy $x \mapsto f(x)$) szimbólummal is kifejezésre juttatni. Más szóval tehát az f reláció akkor és csak akkor függvény, ha bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $y, z \in \mathcal{R}_f$ választással $(x, y), (x, z) \in f$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $y = z$. Ezért, ha f függvény, és $(u, v), (s, w) \in f$, továbbá $v \neq w$, akkor $u \neq s$.

Azt a tényt, hogy az $f \subset A \times B$ reláció függvény, az alábbi módon fogjuk jelölni:

$$f \in A \to B.$$

Ez tehát azt fejezi ki, hogy az f szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_f \subset A$ és $\mathcal{R}_f \subset B$. Röviden azt is fogjuk mondani ekkor, hogy az f függvény az A *halmazból a B*

halmazba képez (vagy röviden: A*-ból* B*-be képez*). Ha itt még a $\mathcal{D}_f = A$ egyenlőség is igaz, akkor azt írjuk, hogy

$$f : A \to B.$$

Azt is mondjuk ekkor, hogy az f függvény az A halmaz*on* van értelmezve. Így pl. az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény egy ún. *egyváltozós valós függvény*: $\mathcal{D}_f \subset \mathbf{R}$ és $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$.

Ha $f, g \in A \to B$ egy-egy függvény, akkor az $f = g$ egyenlőség a következőt jelenti:

$$(x, y) \in f \iff (x, y) \in g.$$

A fent bevezetett elnevezésekkel, ill. jelölésekkel élve tehát ez azzal ekvivalens, hogy

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \text{ és tetszőleges } x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) = g(x).$$

Tekintsük az $f \in A \to B$ függvényt, és legyen $U \subset \mathcal{D}_f$, $V \subset \mathcal{R}_f$. Ekkor az U halmaznak az f függvény által létesített *képén* az alábbi halmazt értjük:

$$f[U] := \{f(x) \in B : x \in U\}$$

(speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$) . Hasonlóan, a V halmaznak az f függvény által létesített *ősképe* legyen az alábbi halmaz:

$$f^{-1}[V] := \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in V\}$$

(speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$) . Világos, hogy $f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f$ és $f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f$. Tetszőleges $X \subset A$, $Y \subset B$ halmazok esetén állapodjunk meg abban, hogy

$$f[X] := f[X \cap \mathcal{D}_f] \ , \ f^{-1}[Y] := f^{-1}[Y \cap \mathcal{R}_f].$$

2.3. Függvénytulajdonságok

A továbbiakban egy $f \subset A \times B$ függvényt *injektívnek* nevezünk, ha tetszőlegesen választott $x, v \in \mathcal{D}_f$, $x \neq v$ esetén

$$f(x) \neq f(v).$$

Eléggé nyilvánvaló, hogy ekkor az

$$f^{-1} := \{(s, w) \in B \times A : (w, s) \in f\}$$

reláció is függvény, amelyre

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \ , \ \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f.$$

Valóban, ha $s \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $w, z \in \mathcal{R}_{f^{-1}}$ és $(s, w), (s, z) \in f^{-1}$, akkor $(w, s), (z, s) \in f$, azaz $s = f(w)$ és $s = f(z)$. Ha itt $w \neq z$ lenne, akkor az f injektivitása miatt $s = f(z) \neq f(w) = s$ teljesülne, ami nem igaz. Így $w = z$, azaz f^{-1} valóban függvény.

Ezért $f^{-1} \in B \to A$, és tetszőleges $u \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $v \in \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ választással a $v = f^{-1}(u)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $u = f(v)$. Mindez tekinthető úgy is, mint az f^{-1} függvény egy ekvivalens definíciója. Formálisan tehát $f^{-1}(u)$ meghatározása az $f(v) = u$ egyenlet (v-re való) „megoldása" révén történik.

Az injektív $f \in A \to B$ függvény mellett a fentiekben definiált $f^{-1} \in B \to A$ függvény az f függvény *inverzfüggvénye* (röviden *inverze*). A most mondott terminológiával élve az injektív függvényt más szóval *invertálható függvénynek* is nevezzük. Az invertálható függvény értelmezéséből rögtön adódik, hogy ha f injektív függvény, akkor az f^{-1} inverzfüggvény is az, és $(f^{-1})^{-1} = f$.

Legyen pl.

$$f(x) := \frac{2x}{x-1} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}).$$

Könnyen látható, hogy az f függvény injektív. Ui.

$$f(x) = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}).$$

Világos továbbá, hogy ha $x, t \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ és $x \neq t$, akkor $(0 \neq)\ x-1 \neq t-1\ (\neq 0)$, így

$$\frac{2}{x-1} \neq \frac{2}{t-1},$$

azaz

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1} \neq 2 + \frac{2}{t-1} = f(t).$$

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Valóban, ha $y \in \mathbf{R}$ és $y \neq 2$, akkor az

$$x := 1 + \frac{2}{y-2}$$

választással $f(x) = y$, hiszen

$$f(x) = 2 + \frac{2}{2/(y-2)} = 2 + y - 2 = y.$$

Ugyanakkor nincs olyan $x \in \mathbf{R}$ valós szám, amellyel $f(x) = 2$ lenne. Ui. mindez azzal lenne ekvivalens, hogy

$$2 + \frac{2}{x-1} = 2 \ \ , \ \ \text{azaz} \ \ \frac{1}{x-1} = 0,$$

ami nyilván nem lehet. Tehát $\mathcal{R}_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ és a fenti "$f(x) = y$ egyenlet" megoldása alapján

$$f^{-1}(y) = 1 + \frac{2}{y-2} \qquad (y \in \mathbf{R} \setminus \{2\}).$$

Az inverzfüggvényhez hasonlóan alapvető fontosságú a függvények elméletében az összetett függvény fogalma. Ez utóbbi értelmezéséhez induljunk ki a $g \in A \to B$ és az $f \in C \to D$ függvényből, továbbá tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Definiáljuk ezek után az $f \circ g$ szimbólummal jelölt *összetett függvényt* (más terminológiával élve az f és a g *kompozícióját*) a következőképpen:

$$(f \circ g)(x) := f\left(g(x)\right) \qquad \Big(x \in \mathcal{D}_{f\circ g} := g^{-1}[\mathcal{D}_f]\Big)\,.$$

Az $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$ feltételezés miatt

$$g^{-1}[\mathcal{D}_f] = g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f] \neq \emptyset,$$

azaz az előbbiekben valóban egy, az f (*külső függvény*) és a g (*belső függvény*) által meghatározott (összetett) függvényt definiáltunk.

Tehát $\mathcal{D}_{f\circ g} \subset \mathcal{D}_g$ és $\mathcal{R}_{f\circ g} \subset \mathcal{R}_f$. Ha pl.

$$g(x) := 3x \quad (x \in \mathbf{R}) \ \ , \ \ f(x) := \frac{2x}{x-1} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}),$$

akkor

$$\mathcal{D}_g = \mathcal{R}_g = \mathbf{R} \ \ , \ \ \mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{1\},\ \mathcal{R}_f = \mathbf{R} \setminus \{2\},$$

azaz

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}[\mathbf{R} \setminus \{1\}] = \mathbf{R} \setminus \{1/3\},$$

és

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = \frac{2(3x)}{(3x)-1} = \frac{6x}{3x-1} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1/3\}).$$

2.4. Megjegyzések

i) A „függvény" szó helyett gyakran használjuk a *leképezés, megfeleltetés, hozzárendelés, transzformáció, operátor, funkcionál, ...* stb. (szinonim) kifejezéseket. Bár nincsenek „kötött" jelölések, de a függvényekkel kapcsolatban a legtöbbször az $f, g, h, ...$, vagy az $F, G, H, S, T, ...$ szimbólumokat fogjuk használni.

ii) Az elemi tanulmányok során találkozni pl. *függvény megadása* címszó alatt az alábbi megfogalmazással, hogy ti. *mikor ismerünk egy függvényt: ha megadtuk az A, B (nem üres) halmazokat, és megadtuk azt a hozzárendelési szabályt, amely szerint az A halmaz bizonyos elemeihez hozzárendelünk a B halmazból egy-egy elemet.* Világos, hogy valójában semmitmondó ez a „meghatározás", hiszen a függvény fogalmát egy azzal szinonim fogalommal, a „hozzárendelés" fogalmával akarja értelmezni, ami tautológia.

iii) A függvény általunk adott egzakt definíciója után az a kérdés, hogy mikor ismerünk egy f függvényt, nagyon egyszerűen megválaszolható: akkor, ha ismerjük az $f \subset A \times B$ halmazt. Más szóval, ha tudjuk, hogy az f halmaznak (mint speciális (függvény-)relációnak) milyen $(x, y) \in A \times B$ rendezett párok az elemei. Ehhez tudnunk kell, hogy az itt szereplő x elemek az A halmaz melyik részhalmazából kerülnek ki (azaz mi az f függvény értelmezési tartománya), és egy ilyen x esetén melyik az a B-beli y, amellyel $(x, y) \in f$ (más szóval a fenti értelmezéseink szerint mi az x-hez hozzárendelt elem). Így nyer egzakt értelmet a ii) megjegyzésben említett, az ún. naív függvényelméletből merített függvénymegadás.

iv) Azt mondjuk, hogy az $f \in A \to B$ függvény *szürjektív,* ha $\mathcal{R}_f = B$. Más kifejezéssel élve ekkor az f függvény egy *szürjekció* a B halmaz*ra.*

v) Az injektív függvényre használatos a *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés* elnevezés is. Ha az $f : A \to B$ függvény egyszerre injektív és (B-re) szürjektív, akkor f egy ún. *bijekció.* Ebben az esetben A, B *ekvivalens* halmazok (*kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak*), más szóval azonos a *számosságuk.* Itt a B halmaz *megszámlálható számosságú* (röviden *megszámlálható*), ha $A = \mathbf{N}$. Tehát, B megszámlálható számosságú, ha létezik $f : \mathbf{N} \to B$ bijekció. Világos, hogy pl. $\mathbf{N}$ megszámlálható számosságú, hiszen az $f(n) := n \quad (n \in \mathbf{N})$ leképezés nyilván bijekcó. Ismert, hogy pl. a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza és egyúttal tetszőleges nem egy pontból álló I intervallumra az $I \cap \mathbf{Q}$ halmaz is megszámlálható. Ugyanakkor pl. a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza, vagy bármely előbbi I intervallum nem az. Továbbá, tetszőleges ilyen I intervallum esetén I ekvivalens $\mathbf{R}$-rel, azaz létezik olyan $f : I \to \mathbf{R}$ függvény, amely ($\mathbf{R}$-re) bijekció. Ennek alapján azt mondjuk, hogy I *kontinuum számosságú.* Speciálisan $\mathbf{R}$ is ilyen.

vi) Valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz mellett vezessük be az alábbi id_X függvényt:

$$\mathrm{id}_X(t) := t \qquad (t \in X).$$

Ekkor bármely invertálható f függvény esetén egyszerűen adódik az alábbi két egyenlőség:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_f} \ , \ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{R}_f}.$$

vii) Könnyen meggondolható: az f függvény injektivitásának szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármely $y \in \mathcal{R}_f$ esetén az $f^{-1}[\{y\}]$ halmaznak egyetlen eleme legyen.

viii) A „kompozíció-képzés" nem kommutatív eljárás: $f \circ g$ és $g \circ f$ nem feltétlenül ugyanaz a függvény. Például az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto 1 \ , \ \mathbf{R} \ni x \mapsto 2x$$

függvények közül az előbbit g-vel, az utóbbit f-fel jelölve

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(1) = 2 \ , \ g \circ f(x) = g(f(x)) = 1 \ \ (x \in \mathbf{R}).$$

ix) Egy halmaz valamilyen függvény által létesített képének, ill. ősképének az értelmezéséből rögtön következnek az alábbiak: tetszőleges f függvény és minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén $f[f^{-1}[D]] = D$. Ha f injektív, akkor bármely $E \subset \mathcal{D}_f$ halmazra $f^{-1}[f[E]] = E$. (Belátható, hogy az utóbbi egyenlőség elégséges is ahhoz, hogy f injektív legyen.)

x) Egy f injektív függvény esetén valamilyen $D \subset \mathcal{R}_f$ halmazt véve

$$f^{-1}[D] = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in D\} = \{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : y \in D\},$$

azaz ekkor a D halmaz f által létesített ősképe megegyezik D-nek az f^{-1} által létesített képével. (Ez az észrevétel húzódik meg az ősképre bevezetett jelölés mögött.)

xi) Nem nehéz belátni, hogy ha $g : A \to B$, $f : B \to C$ mindegyike bijekció, akkor $f \circ g : A \to C$ is bijekció. Valamely $X \neq \emptyset$ esetén $\mathcal{P}(X)$-szel jelölve az X *hatványhalmazát* (azaz az X részhalmazaiból álló halmaz(rendszer)t), legyen

$$r \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$

a következő reláció:

$$r := \{(U, V) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : \text{létezik } f : U \to V \text{ bijekció}\}.$$

Ekkor (a jelen megjegyzés „felvezetését" (is) felhasználva) egyszerűen megmutatható, hogy r ekvivalencia. Ez az oka az v) megjegyzésben bevezetett definíciónak, hogy ti. két halmaz mikor ekvivalens.

xii) Tegyük fel, hogy az f, g függvények *valós* (vagy *komplex*) *értékűek,* amikor tehát $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{K}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathbf{K}$ és $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$ igaz. Ekkor a

$$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbf{K}$$

függvényt az f és a g *összegének*, a

$$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ni x \mapsto f(x)g(x) \in \mathbf{K}$$

függvényt pedig az f és a g *szorzatának* nevezzük, és rendre az $f+g$, fg szimbólummal (esetenként fg helyett $f \cdot g$-vel) jelöljük. Az $f + c$ szimbólum jelentse az $f + g$ összegfüggvényt, ahol $g(x) := c \quad (x \in \mathbf{K},\, c \in \mathbf{R})$. Ha

$$\mathcal{D}_f \cap \{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \neq 0\} \neq \emptyset,$$

akkor a

$$\mathcal{D}_f \cap \{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \neq 0\} \ni x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{K}$$

függvényt az f és a g *hányadosának* nevezzük, és az $\frac{f}{g}$ szimbólummal jelöljük. Speciálisan, ha $\{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \neq 0\} \neq \emptyset$, akkor a g függvény $\frac{1}{g}$ *reciproka* a következő:

$$\{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \neq 0\} \ni x \mapsto \frac{1}{g(x)} \in \mathbf{K}.$$

Világos, hogy $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Ha $0 < n \in \mathbf{N}$, akkor $f^n := f \cdot ... \cdot f$ (n-szeres szorzat) az f függvény n*-edik hatványa*: $f^n(x) := (f(x))^n$ $(x \in \mathcal{D}_f)$.

xiii) Valamely $A \neq \emptyset$ halmaz esetén az $m : A \times A \to A$ függvényről azt mondjuk, hogy (A-beli belső) *művelet*. Ekkor egy $(x, y) \in A^2 := A \times A$ rendezett pár esetén

$$xmy := m(x, y) := m((x, y))$$

az m művelet *eredménye* x és y között. Pl. a valós számok axióma-rendszerében (ld. 1.1.) a „... bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén léteznek az $x+y \in \mathbf{R}$ és az $xy \in \mathbf{R}$ szimbólummal jelölt elemek ..." kitétel más szóval azt jelenti, hogy adott egy-egy művelet $\mathbf{R}$-ben: $m, \tilde{m} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, amelyekre a „szokásos" jelöléseket használva: $x + y := xmy$, ill. $xy := x\tilde{m}y$.

xiv) A függvények körében kiemelkedően fontos szerepet játszanak a polinomok. Ezek értelmezéséhez legyenek adottak valamilyen $n \in \mathbf{N}$ természetes szám mellett az $a_0, ..., a_n \in \mathbf{K}$ számok (*együtthatók*), és tekintsük a következő $P : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvényt:

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a P függvény egy ún. *polinom.* Azt mondjuk továbbá, hogy P *legfeljebb* n*-ed fokú.* Ha $a_n \neq 0$, akkor P egy n*-ed fokú* polinom. Az $\alpha \in \mathbf{K}$ szám a P polinom *gyöke,* ha $P(\alpha) = 0$. Az *algebra alaptétele* szerint, ha $n > 0$, akkor az előbbi n-ed fokú P polinom esetén egyértelműen léteznek olyan $s \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbf{K}$ és $\nu_1, ..., \nu_s \in \{1, ..., n\}$ számok, hogy $\sum_{i=1}^{s} \nu_i = n$ és

$$P(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{\nu_i} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

(a P polinom ún. *gyöktényezős alakja*). Következésképpen

$$P(\alpha_i) = 0 \qquad (i = 1, ..., s),$$

és

$$P(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbf{K},\, x \neq \alpha_i \quad (i = 1, ..., s)).$$

A ν_i $(i = 1, ..., s)$ „kitevő" az α_i gyök *multiplicitása.* Ha itt $s = n$, akkor minden $i = 1, ..., n$ esetén szükségképpen $\nu_i = 1$, azaz az α_i gyök *egyszeres* és

$$P(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Egyébként az α_i $(i = 1, ..., s)$ gyök *többszörös,* ha $\nu_i > 1$.

xv) Az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ *racionális törtfüggvény,* ha alkalmas P, Q polinomokkal

$$f = \frac{P}{Q}.$$

Speciálisan minden P polinom racionális törtfüggvény (a $Q \equiv 1$ (konstans) polinomra gondolva).

xvi) Legyen valamilyen $\emptyset \neq A, B$ halmazok esetén $f : A \to B$ és $\emptyset \neq C \subset A$. Ekkor az

$$f_{|C}(x) := f(x) \qquad (x \in C)$$

módon értelmezett $f_{|C} : C \to B$ függvényt az f függvény *C-re való leszűkítésének* nevezzük. Világos, hogy $\mathcal{D}_{f_{|C}} = C$ és $\mathcal{R}_{f_{|C}} \subset \mathcal{R}_f$. Hasonlóan, ha $g : A \to B$, és valamilyen $D \supset A$, $E \supset B$ halmazokkal, ill. $h : D \to E$ függvénnyel $g = h_{|A}$, akkor azt mondjuk, hogy a h függvény a g *kiterjesztése* a D halmazra.

xvii) Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *páros,* ha $\mathcal{D}_f$ „szimmetrikus az origóra", tehát bármely $t \in \mathcal{D}_f$ esetén $-t \in \mathcal{D}_f$, és

$$f(-t) = f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_f).$$

Hasonlóan, azt mondjuk, hogy valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *páratlan,* ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus az origóra és

$$f(-t) = -f(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_f).$$

Könnyű belátni, hogy ha $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus az origóra, akkor alkalmas g páros és h páratlan függvénnyel $f = g + h$. Ti. legyen

$$g(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2} \ , \ h(t) := \frac{f(t) - f(-t)}{2} \qquad (t \in \mathcal{D}_f).$$

xviii) Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *periodikus,* ha alkalmas $p \in \mathbf{R}, p > 0$ számmal tetszőleges $t \in \mathcal{D}_f$ elemre $t \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(t + p) = f(t).$$

Világos, hogy egyúttal

$$f(t) = f(t-p+p) = f(t-p) \qquad (t \in \mathcal{D}_f)$$

is igaz. Továbbá (teljes indukcióval) bármely $t \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbf{Z}$ esetén $t + kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(t+kp) = f(t).$$

Minden ilyen p számot az f függvény *periódusának* nevezünk. Nyilvánvaló, hogy ha $0 < k \in \mathbf{N}$, akkor kp is periódusa f-nek. Ha $\mathcal{P}_f$ jelöli a periodikus f függvény periódusainak a halmazát, akkor a következő igaz: vagy $\inf \mathcal{P}_f = 0$, vagy pedig létezik a

$$p_0 := \min \mathcal{P}_f$$

alapperiódus, és

$$\mathcal{P}_f = \{kp_0 \in \mathbf{R} : 0 < k \in \mathbf{N}\}.$$

Ti. először is vegyük észre, hogy bármely $p, q \in \mathcal{P}_f$, $q < p$ esetén $p - q \in \mathcal{P}_f$. Valóban, ha $t \in \mathcal{D}_f$, akkor $p \in \mathcal{P}_f$ miatt $t \pm p \in \mathcal{D}_f$, ill. $q \in \mathcal{P}_f$ miatt $t+p-q$, $t-p+q \in \mathcal{D}_f$ és $f(t+p-q) = f(t-q) = f(t)$. Tegyük fel ezután, hogy

$$p_0 := \inf \mathcal{P}_f > 0,$$

és lássuk be, hogy $p_0 \in \mathcal{P}_f$ (azaz egyúttal $p_0 = \min \mathcal{P}_f$). Ha ui. $p_0 \notin \mathcal{P}_f$ lenne, akkor az infimum értelmezése alapján (ld. 1.2. x) megjegyzés) bármely $\varepsilon > 0$ mellett létezne olyan $r \in \mathcal{P}_f$, amelyre $p_0 < r < p_0 + \varepsilon$. Hasonlóan, megadható lenne olyan $s \in \mathcal{P}_f$ is, hogy $p_0 < s < r$. Az előbbiek alapján ezért $r - s \in \mathcal{P}_f$ és nyilván $r - s < \varepsilon$. Ha itt $\varepsilon < p_0$, akkor a $\mathcal{P}_f$-beli $r - s$ periódusra $r - s < \inf \mathcal{P}_f$, ami - lévén $\inf \mathcal{P}_f$ alsó korlátja a $\mathcal{P}_f$ halmaznak - nem lehetséges. Tehát $p_0 \in \mathcal{P}_f$. Legyen most $r \in \mathcal{P}_f$ tetszőleges, ekkor egyértelműen van olyan $1 \leq k \in \mathbf{N}$ szám, amellyel

$$kp_0 \leq r < (k+1)p_0 = kp_0 + p_0.$$

Ha itt $kp_0 < r$ lenne, akkor $r, kp_0 \in \mathcal{P}_f$ miatt $r - kp_0 \in \mathcal{P}_f$, ahol $r - kp_0 < p_0$. Innen az előbbiekkel analóg módon jutnánk ellentmondásra, tehát $r = kp_0$.

xix) Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egyváltozós valós függvények körében fontos szerepet játszanak a *monoton* függvények. Nevezetesen az előbbi f függvény *monoton növő,* ha tetszőleges $x, t \in \mathcal{D}_f$, $x < t$ helyeken $f(x) \leq f(t)$. Ha minden ilyen x, t esetén $f(x) < f(t)$, akkor az f *szigorúan monoton növő.* Hasonlóan, az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *monoton fogyó,* ha bármely $x, t \in \mathcal{D}_f$, $x < t$ esetén $f(x) \geq f(t)$, ill. *szigorúan monoton fogyó,* ha az előbbi x, t-re $f(x) > f(t)$.

3. fejezet

Sorozatok

3.1. A sorozat fogalma

A sorozat fogalma kiemelkedő jelentőséggel bír nem csupán a matematika (és így pl. az analízis), hanem a mindennapi élet szempontjából is. Hiszen gondoljunk csak a közelítő számítások algoritmusaira, vagy pl. az eléggé hétköznapi kamatszámítási feladatokra. A valós számokkal való „manipulációk" során használt tizedes törtek mögött szintén meghúzódik a sorozat fogalma. Ugyanakkor a jelentőségéhez képest a sorozat definíciója meglehetősen egyszerű. Ti. az f függvényt *sorozatnak* nevezzük, ha $\mathcal{D}_f = \mathbf{N}$. Az alábbi elnevezéseket, ill. jelöléseket fogjuk használni:

$$f_n := f(n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az f sorozat *n-edik* (vagy *n-indexű*) *tagja.* (Ha esetleg az illető sorozat jele egy betű helyett egy hosszabb (pl. több betűből, jelből álló) szimbólum, akkor a félreértések elkerülése érdekében a sorozatot jelölő szimbólumot zárójelbe tesszük: pl. $(f * g)_n$ az $f * g$ sorozat n-edik tagja.) A szóban forgó f sorozat jelölésére időnként az f szimbólum helyett ezt is írjuk: (f_n), vagy $n \mapsto f_n$. Így pl. a $(2n^2 + 1)$ szimbólum (vagy $n \mapsto 2n^2 + 1$) azt a (mondjuk f) sorozatot jelöli, amelyre $f_n = 2n^2 + 1 \quad (n \in \mathbf{N})$. A sorozatokkal kapcsolatban sincsenek „kötött", vagy „előírt" jelölések, ezzel együtt itt többnyire az $a, b, c, ...$, esetleg az $x, y, z, ...$ szimbólumokat fogjuk használni.

Attól függően, hogy az (x_n) sorozat értékkészlete „milyen", jelzőket használunk a sorozat megnevezésekor. Így pl. az (x_n) sorozat egy *számsorozat,* ha $x_n \in \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$ (ezen belül *valós számsorozat,* ha $x_n \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$, míg *komplex számsorozat,* ha $x_n \in \mathbf{C} \quad (n \in \mathbf{N})$). Világos ezek után, hogy mit értünk pl. *intervallumsorozaton*: egy olyan sorozatot, amelynek minden tagja intervallum (ld. pl. a Cantor-tételben szereplő $([a_n, b_n])$ intervallumsorozat). Hasonlóan, a szóban forgó sorozat *halmazsorozat,* ha minden tagja halmaz, és í.t.

A „jelzősített" sorozatok között kiemelt szerep jut az ún. indexsorozatoknak. Azt mondjuk, hogy a (ν_n) számsorozat *indexsorozat,* ha minden tagja természetes szám és

$$\nu_n < \nu_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a fenti $(2n^2+1)$ sorozat nyilván indexsorozat. Tetszőleges x sorozat és bármely $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat esetén nyilvánvaló, hogy az $x \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az x sorozat ν indexsorozat által meghatározott *részsorozatának* nevezünk. Így az $x \circ \nu$ sorozat n-edik tagja a következő:

$$(x \circ \nu)_n = (x \circ \nu)(n) = x(\nu(n)) = x_{\nu_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}_{x\circ\nu} \subset \mathcal{R}_x$. Ha pl.

$$x_n := \frac{3n-1}{n^2+n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és ν az előbbi indexsorozat:

$$\nu_n := 2n^2+1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$(x \circ \nu)_n = x_{2n^2+1} = \frac{3(2n^2+1)-1}{(2n^2+1)^2+2n^2+1+1} = \frac{6n^2+2}{4n^4+6n^2+3} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan a $\nu_n := n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat indexsorozat, és tetszőleges x sorozat esetén $x \circ \nu = x$. Hasonlóan, ha x egy *konstanssorozat,* azaz az $\mathcal{R}_x$ értékkészlethalmaz egy elemű (más szóval valamilyen α elemmel $x_n = \alpha \quad (n \in \mathbf{N})$), akkor bármely ν indexsorozatra szintén igaz az $x \circ \nu = x$ egyenlőség.

3.2. Megjegyzések

i) Gyakran találkozni a sorozat „tagja" elnevezés helyett a sorozat „eleme" terminológiával, ami meglehetősen értelemzavaró. Ha ui. x sorozat, azaz egy speciális függvény, akkor (ld. 2.1.) az x (reláció) „elemei" az $(n, x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ rendezett párok. Ezért egy ilyen (n, x_n) rendezett pár második komponensét (x_n-et) nem szerencsés „elemnek" nevezni.

ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $N \in \mathbf{Z}$ mellett adott egy g leképezés, amelyre

$$\mathcal{D}_g = \{m \in \mathbf{Z} : m \geq N\}.$$

Ekkor az

$$f(n) := g(n+N) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

definícióval értelmezett f függvény sorozat. Ezért - kissé tágabb értelemben - az ilyen g függvényt is sorozatnak fogjuk nevezni. Így pl. az $(1/n)$ sorozat azt a $g \in \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ leképezést jelenti, amelyre

$$g(n) := \frac{1}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

iii) Egy $A \neq \emptyset$ halmazról azt mondjuk, hogy az elemei *sorozatba rendezhetők*, ha valamilyen injektív s sorozattal

$$\mathcal{R}_s = A.$$

Más szóval $s : \mathbf{N} \to A$ bijekció. Pl. $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ ilyen halmazok, míg pl. $\mathbf{R}$ nem. Ha az A, B halmazok elemei egyaránt sorozatba rendezhetők, azaz alkalmas x, y injektív sorozatokkal $\mathcal{R}_x = A$, $\mathcal{R}_y = B$, akkor egyszerűen belátható módon

$$y \circ x^{-1} : A \to B$$

bijekció. Egy korábbi elnevezéssel élve (ld. 2.4. v) megjegyzés) A és B ekvivalensek, sőt, mindkettő ekvivalens $\mathbf{N}$-nel. Röviden: megszámlálható halmazok.

iv) Valamely $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekciót az $\mathbf{N}$ (egy) *permutációjának* nevezünk. Ha p ilyen, x pedig egy sorozat, akkor $x \circ p$ is nyilván sorozat: az x sorozat (p által meghatározott) *átrendezése.*

v) Gondoljuk meg, hogy tetszőleges (ν_n) indexsorozatra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\nu_n \geq n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, mivel $\nu_0 \in \mathbf{N}$, ezért $\nu_0 \geq 0$ nyilvánvaló. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $\nu_n \geq n$, akkor

$$\nu_{n+1} > \nu_n \geq n.$$

Tehát $\nu_{n+1} > n$. Figyelembe véve, hogy $\nu_{n+1} \in \mathbf{N}$, ezért $\nu_{n+1} \geq n+1$, azaz (ld. teljes indukció) az állításunk valóban igaz.

vi) Eléggé nyilvánvaló, hogy indexsorozatok kompozíciója is indexsorozat: ha a $\nu = (\nu_n)$, $\mu = (\mu_n)$ sorozatok indexsorozatok, akkor a $\nu \circ \mu = (\nu_{\mu_n})$ sorozat is indexsorozat.

vii) Nem csupán az analízis számára bírnak különös fontossággal az ún. rekurzív megadású sorozatok. Legyen ehhez valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $f : X \to X$ függvény, és legyen $a \in X$. Ekkor az

$$x_0 := a \ , \ \ x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rekurzív összefüggésnek eleget tevő $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatot *a kezdőpontú rekurzív megadású sorozatnak* nevezzük. A kérdés az, hogy (ismerve a-t és f-et) van-e ilyen (x_n) sorozat. Erre a kérdésre válaszol az ún. *rekurzió tétel*: egyértelműen létezik a fenti (x_n) sorozat.

viii) A téma iránt mélyebben érdeklődő olvasók (és a teljesség) kedvéért az alábbiakban vázoljuk a vii)-beli rekurzió tétel (egy) bizonyítását. Nevezzük ehhez az

$$r \subset \mathbf{N} \times X$$

relációt *rekurzívnak,* ha

$$(0,a) \in r \text{ és bármely } (n,t) \in r \text{ esetén } (n+1, f(t)) \in r.$$

Világos, hogy pl. $\mathbf{N} \times X$ ilyen reláció. Legyen

$$\mathcal{R} := \{r \subset \mathbf{N} \times X : r \text{ rekurzív}\}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$x := \bigcap_{r \in \mathcal{R}} r$$

a kívánt tulajdonságú sorozat. Ui.

1^o $\mathcal{D}_x = \mathbf{N}$, hiszen $(0,a) \in r$ $(r \in \mathcal{R})$, ezért $(0,a) \in x$. Következésképpen $0 \in \mathcal{D}_x$. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $n \in \mathcal{D}_x$, akkor egy alkalmas $t \in X$ elemmel $(n,t) \in x$. Így minden $r \in \mathcal{R}$ relációra $(n,t) \in r$. Utóbbiból $(n+1, f(t)) \in r$ $(r \in \mathcal{R})$ adódik, tehát $(n+1, f(t)) \in x$. Más szóval $n+1 \in \mathcal{D}_x$. Innen (ld. teljes indukció) $\mathcal{D}_x = \mathbf{N}$ már következik.

2^o Lássuk be, hogy x függvény (azaz 1^o szerint sorozat). Indirekt gondolkodva legyen ehhez $(n,t), (n,s) \in x$ két olyan pár, amelyekre $t \neq s$. Tegyük fel először, hogy $n = 0$, azaz $(0,t), (0,s) \in x$. Mivel $t \neq s$, ezért (pl.) $s \neq a$. Tekintsük ekkor az

$$\tilde{x} := x \setminus \{(0,s)\}$$

relációt. Nyilván igaz, hogy $(0,a) \in \tilde{x}$. Továbbá bármely $(k,z) \in \tilde{x}$ pár esetén $((k+1, f(z)) \in \tilde{x}$ (hiszen $k+1 \neq 0$ és $(k,z) \in x$), így

$$(k+1, f(z)) \in x \setminus \{(0,s)\} = \tilde{x}.$$

Mindebből az adódik, hogy $\tilde{x} \in \mathcal{R}$, ami nem lehet, ui. $\tilde{x} \subset x$ és

$$\tilde{x} \neq x = \bigcap_{r \in \mathcal{R}} r.$$

Ha viszont az előbbiekben $n > 0$, akkor legyen $(n-1, p) \in x$, továbbá (pl.) $s \neq f(p)$ és

$$\hat{x} := x \setminus \{(n, s)\}.$$

Világos, hogy $(0, a) \in \hat{x}$. Mutassuk meg, hogy minden $(k, v) \in \hat{x}$ párra egyúttal $(k+1, f(v)) \in \hat{x}$ is teljesül. Valóban, $(k, v) \in x$ miatt $(k+1, f(v)) \in x$. Ha $k+1 \neq n$, akkor $(k+1, f(v)) \neq (n, s)$, így $(k+1, f(v)) \in \hat{x}$. Ha viszont $k+1 = n$, azaz $k = n-1$, akkor

$$(k+1, f(v)) = (n, f(v)).$$

Tehát

$$(n-1, p)\ ,\ (n-1, v) \in x,$$

amiből (n-szerinti teljes indukcióra gondolva) $p = v$ már következik. Ezért

$$(k+1, f(v)) = (n, f(p)) \neq (n, s),$$

azaz $(k+1, f(v)) \in \hat{x}$. Tehát $\hat{x} \in \mathcal{R}$, amiből ugyanúgy jutunk ellentmondásra, mint az előbb.

3^o Egyszerűen kapjuk, hogy $x_0 = a$, ui. $(0, a) \in x$. Hasonlóan: $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, mivel

$$(n, x_n) \in x \implies (n+1, f(x_n)) \in x.$$

4^o Az egyértelműség igazolásához legyen $z : \mathbf{N} \to X$ is olyan sorozat, amelyre

$$z_0 = a\ ,\ z_{n+1} = f(z_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $\mathcal{N} := \{n \in \mathbf{N} : x_n = z_n\}$. Ekkor $0 \in \mathcal{N}$, ui. $x_0 = z_0 = a$. Ha $n \in \mathcal{N}$ (azaz $x_n = z_n$), akkor

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(z_n) = z_{n+1}.$$

Ezért $n+1 \in \mathcal{N}$, így (ld. teljes indukció) $\mathcal{N} = \mathbf{N}$. Ez azt jelenti, hogy $x = z$.

ix) Az előbbiek illusztrálására tekintsük a következő példát:

$$X := [1, +\infty)\ ,\ f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in X).$$

Egyszerűen adódik, hogy $f : X \to X$, azaz tetszőleges $t \in \mathbf{R}, t \geq 1$ helyen $f(t) \geq 1$. Alkalmazva ui. a számtani-mértani közép tételét (ld. 1.3.5. Tétel)

$$f^2(t) = 4 \cdot \left(\frac{t/2 + 1/t}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{4}{2} = 2 \qquad (t \geq 1),$$

azaz ($f(t) > 0$ miatt) $f(t) \geq \sqrt{2} > 1$. Ezért a fenti rekurzió tétel miatt létezik olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to [1, +\infty)$ sorozat, amelyre

$$x_0 = 2\ ,\ x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

3.3. Monoton sorozatok

Azt mondjuk (ld. 2.4. xix) megjegyzés), hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (valós) számsorozat *monoton növő,* ha

$$x_n \leq x_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Szigorúan monoton növő sorozatról beszélünk, ha

$$x_n < x_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Így pl. minden indexsorozat szigorúan monoton növő. Analóg módon értelmezzük a monoton (szigorúan monoton) fogyó (szám)sorozatot, nevezetesen: az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat *monoton fogyó*, ha

$$y_n \geq y_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ill. *szigorúan monoton fogyó*, ha

$$y_n > y_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A későbbiek szempontjából alapvető fontosságú a következő állítás.

3.3.1. Tétel. *Bármely $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ számsorozatnak van monoton részsorozata, azaz létezik olyan ν indexsorozat, amellyel $x \circ \nu$ monoton növő (vagy monoton fogyó).*

Bizonyítás. Az állításunk igazolásához vezessük be a szóban forgó x sorozat csúcsának a fogalmát. Nevezetesen, valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett x_n az x sorozat *csúcsa,* ha

$$x_n \geq x_k \qquad (k \in \mathbf{N}, k \geq n).$$

Két eset lehetséges. Először tételezzük fel, hogy végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén x_n csúcs. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas ν indexsorozattal x_{ν_n} $(n \in \mathbf{N})$ csúcs, azaz

$$x_{\nu_n} \geq x_k \qquad (k \in \mathbf{N}, k \geq \nu_n).$$

Speciálisan $\nu_n < \nu_{n+1}$ miatt

$$x_{\nu_n} \geq x_{\nu_{n+1}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

más szóval az (x_{ν_n}) részsorozat monoton fogyó.

Induljunk ki most abból, hogy legfeljebb véges sok $n \in \mathbf{N}$ indexre igaz az, hogy x_n csúcs. Ekkor van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy bármely $n \in \mathbf{N}, n \geq N$ esetén x_n nem csúcs. Legyen $\nu_0 := N$. Mivel x_{ν_0} nem csúcs, ezért van olyan $m \in \mathbf{N}, m > \nu_0$, amelyre $x_{\nu_0} < x_m$. Ha

$\nu_1 := m,$ akkor a keresett ν indexsorozat első két tagja már ismert. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbf{N}$ és a $\nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_k$ tagokat már definiáltuk úgy, hogy

$$x_{\nu_0} < x_{\nu_1} < \cdots < x_{\nu_k}.$$

Ekkor - lévén $x_{\nu_k} > x_{\nu_0} = x_N$ miatt x_{ν_k} nem csúcs - valamilyen $j \in \mathbf{N}, j > \nu_k$ mellett $x_{\nu_k} < x_j$. Legyen $\nu_{k+1} := j,$ amikor is $x_{\nu_k} < x_{\nu_{k+1}}$. Ezzel definiáltuk a szigorúan monoton növő $(\nu_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sorozatot (azaz egy indexsorozatot), amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat szigorúan monoton növő. ■

Az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ (valós vagy komplex) számsorozat *korlátos,* ha az értékkészlete *korlátos halmaz,* azaz van olyan $K \in \mathbf{R}$ szám, amellyel

$$|x_n| \leq K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valós esetben, amikor tehát $\mathbf{K} = \mathbf{R},$ az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat *felülről korlátos,* ha egy alkalmas $M \in \mathbf{R}$ *felső korláttal*

$$x_n \leq M \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan azt mondjuk, hogy az $y = (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat *alulról korlátos,* ha valamilyen $m \in \mathbf{R}$ *alsó korláttal*

$$y_n \geq m \qquad (n \in \mathbf{N})$$

igaz. Világos, hogy egy (valós) számsorozat akkor és csak akkor korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos.

Különösen fontosak a monoton növő (fogyó) felülről (alulról) korlátos sorozatok. Tegyük fel ui., hogy az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat pl. monoton növő és felülről korlátos. Legyen

$$\alpha := \sup \mathcal{R}_x.$$

Ekkor (figyelembe véve a szuprémumról mondottakat (ld. 1.2. ix) megjegyzés)) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan eleme az $\mathcal{R}_x$ halmaznak, amely nagyobb, mint $\alpha - \varepsilon$. Más szóval van olyan $N \in \mathbf{N},$ hogy

$$x_N > \alpha - \varepsilon.$$

Mivel a feltételezésünk szerint az (x_n) sorozat monoton növő, ezért egyúttal az

$$x_n > \alpha - \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N)$$

becslés is igaz. Figyelembe véve még azt, hogy α felső korlátja az $\mathcal{R}_x$ halmaznak azt kapjuk, hogy

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leq \alpha \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Tehát egyúttal $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N},\, n > N)$.

Értelemszerű módosítással kapjuk ugyanezt monoton fogyó alulról korlátos sorozatokra, ha $\alpha := \inf \mathcal{R}_x$.

3.4. Megjegyzések

i) Legyen pl.

$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén x_{2n} csúcs (ld. 3.3.1. Tétel bizonyítása), de x_{2n+1} nem az. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy bármely szigorúan monoton növő (x_n) sorozat esetén x_n egyetlen $\mathbf{N} \ni n$-re sem csúcs, míg ha (x_n) monoton fogyó, akkor minden $n \in \mathbf{N}$ mellett x_n csúcs.

ii) Bármely $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmazhoz könnyen konstruálható olyan valós (x_n) sorozat, amelyre pontosan az x_n $(n \in \mathcal{N})$ tagok a csúcsok (speciálisan, ha $\mathcal{N} = \emptyset$, akkor nincs csúcs). Ilyen pl. az a sorozat, amelyre

$$x_n := \begin{cases} 1 & (n \in \mathcal{N}) \\ \\ 1 - \dfrac{1}{n+1} & (n \in \mathbf{N} \setminus \mathcal{N}). \end{cases}$$

iii) Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat felülről is és alulról is korlátos, legyen M egy felső, m egy alsó korlátja, azaz

$$m \leq x_n \leq M \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha $K := \max\{-m, M\}$, akkor

$$|x_n| \leq K \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz (ld. fentebb) az (x_n) sorozat valóban korlátos.

3.5. Konvergens sorozatok

Emeljük ki külön is az előbb (pl.) monoton növő felülről korlátos sorozatokra kapott eredményt: ha az $x = (x_n)$ valós számsorozat ilyen, akkor alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ valós számmal (ti. $\alpha := \sup \mathcal{R}_x$) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$(*) \qquad |x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

A „végeredmény" szempontjából közömbös, hogy a szóban forgó sorozat monoton növő (vagy fogyó), sőt, még az is, hogy a tagjai valós számok. A $(*)$ tulajdonsággal rendelkezhet nem monoton sorozat vagy akár egy komplex számokból álló sorozat is. Legyen pl.

$$x_n := (-1)^n \frac{\imath}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy a most definiált sorozat nem monoton (sőt, nem is valós számokból áll), ugyanakkor a $(*)$ tulajdonság az $\alpha := 0$ választással triviális módon igaz. Ha ui. $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és az $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindexre" $N > 1/\varepsilon$, akkor bármely $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ mellett

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Mindezek után egy $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatot *konvergensnek* nevezünk, ha van olyan $\alpha \in \mathbf{K}$, amellyel bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindex", hogy

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N). \tag{3.5.1}$$

3.5.1. Tétel. *Ha az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő α egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel ui., hogy valamilyen $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat és $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ esetén egyaránt teljesül a konvergencia definíciója, továbbá (indirekt módon gondolkodva) $\alpha \neq \beta$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók tehát olyan $N, M \in \mathbf{N}$ küszöbindexek, hogy (3.5.1) mellett

$$|x_n - \beta| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > M)$$

is igaz. Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

(pozitív) számot, ill. az ennek megfelelő N, M-et figyelembe véve legyen

$$S := \max\{N, M\}.$$

Ha $n \in \mathbf{N}$ és $n > S$, akkor nyilván $n > N$ és $n > M$ is fennáll, következésképpen

$$|\alpha - \beta| = |x_n - \alpha - (x_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |x_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = |\alpha - \beta|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ egyenlőtlenség következne. Ezért csak $\alpha = \beta$ lehet. ■

Ha tehát az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens, akkor egyértelműen létezik olyan $\alpha \in \mathbf{K}$, amely eleget tesz a konvergencia definíciójában megfogalmazottaknak. Ezt az α-t az x sorozat *határértékének* (vagy *limeszének*) nevezzük, és minderre az alábbi jelölések valamelyikét használjuk:

$$\lim x := \lim\,(x_n) := \lim_{n\to\infty} x_n := \alpha.$$

(Ha a sorozatot jelölő szimbólum esetleg több karakterből áll, akkor a félreértések elkerülése érdekében zárójeleket is használunk. Pl. $\lim(u * v)$ az $u * v$ sorozat határértéke.) Azt is mondjuk, hogy az x sorozat *α-hoz konvergál* (vagy *α-hoz tart*). Esetenként az

$$x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

szimbólumot is alkalmazzuk annak a kifejezésére, hogy az (x_n) sorozat α-hoz konvergál.

3.5.2. Tétel. *Ha az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges ν indexsorozat esetén az $x \circ \nu$ résszorozat is konvergens, és $\lim(x \circ \nu) = \lim x$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \lim x$, ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Mivel (ld. 3.2. v) megjegyzés) $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén $\nu_n > N$ is igaz. Következésképpen

$$|x_{\nu_n} - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ez éppen azt jelenti, amit állítottunk. ∎

A 3.4. pontban mondottak szerint tehát teljesül a következő állítás:

3.5.3. Tétel. *Bármely monoton és korlátos $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat konvergens. Ha x monoton növő, akkor*

$$\lim x = \sup \mathcal{R}_x,$$

ha pedig monoton fogyó, akkor

$$\lim x = \inf \mathcal{R}_x.$$

Nem nehéz belátni, hogy a sorozatok esetén a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának. Nevezetesen igaz a

3.5.4. Tétel. *Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Legyen ui. (3.5.1)-ben (pl.) $\varepsilon := 1$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x_n - \alpha| < 1 \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Más szóval

$$|x_n| = |x_n - \alpha + \alpha| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ha tehát

$$K := \max\{1 + |\alpha|, |x_0|, ..., |x_N|\},$$

akkor nyilván $|x_n| \leq K \ \ (n \in \mathbf{N})$, azaz az (x_n) sorozat korlátos. ■

Tekintsünk most egy $z = (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ komplex számsorozatot. Ha $n \in \mathbf{N}$ és

$$z_n = x_n + \imath y_n := \operatorname{Re} z_n + \imath \operatorname{Im} z_n,$$

akkor a

$$\operatorname{Re} z := (x_n) \ \ , \ \ \operatorname{Im} z := (y_n)$$

valós sorozatokat rendre a z *valós részének,* ill. *képzetes részének* nevezzük, és a következő írásmódot követjük:

$$z = \operatorname{Re} z + \imath \operatorname{Im} z.$$

Ha pl.

$$z_n := \frac{\imath^n}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor (a páros természetes számok halmazát $\mathbf{N}_0$-val jelölve)

$$x_n = \operatorname{Re} z_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n+1} & (n \in \mathbf{N}_0) \\[2ex] 0 & (n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_0), \end{cases}$$

$$y_n = \operatorname{Im} z_n = \begin{cases} 0 & (n \in \mathbf{N}_0) \\[2ex] \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n+1} & (n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_0). \end{cases}$$

Mindezek alapján a komplex sorozatok konvergencia-kérdéseit visszavezethetjük a valós sorozatok analóg vizsgálatára. Ezzel kapcsolatos a

3.5.5. Tétel. *Bármely $z = (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ komplex sorozatra fennáll a következő ekvivalencia: a z sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ sorozatok konvergensek. Igaz továbbá, hogy ha a z sorozat konvergens és $\alpha := \lim z$, akkor*

$$\operatorname{Re} \alpha = \lim(\operatorname{Re} z) \ \ , \ \ \operatorname{Im} \alpha = \lim(\operatorname{Im} z).$$

Bizonyítás. Legyen

$$x_n := \operatorname{Re} z_n \;\; , \;\; y_n := \operatorname{Im} z_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\operatorname{Re} z = (x_n)$, $\operatorname{Im} z = (y_n)$, és $\alpha = u + \imath v$, ahol

$$u := \operatorname{Re} \alpha \;\; , \;\; v := \operatorname{Im} \alpha .$$

Tegyük fel először, hogy a z sorozat konvergens és $\alpha = \lim z$. Következésképpen bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Mivel

$$|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} \geq \begin{cases} |x_n - u| \\ \\ |y_n - v| \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért egyúttal

$$|x_n - u|,\, |y_n - v| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(x_n), (y_n)$ sorozatok konvergensek, és $\lim(x_n) = u$, $\lim(y_n) = v$.

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy az $(x_n) := \operatorname{Re} z$, $(y_n) := \operatorname{Im} z$ sorozatok konvergensek és $u := \lim(x_n)$, $v := \lim(y_n)$. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, léteznek olyan $M, S \in \mathbf{N}$ küszöbindexek, amelyekkel

$$|x_n - u| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \;\; (n \in \mathbf{N}, n > M) \;\; , \;\; |y_n - v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \;\; (n \in \mathbf{N}, n > S).$$

Ha $\alpha := u + \imath v$ és $R := \max\{M, S\}$, akkor

$$|x_n - u| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \;\; , \;\; |y_n - v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Ugyanakkor

$$|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt

$$|z_n - \alpha| < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > R)$$

következik, azaz $|z_n - \alpha| < \varepsilon \;\; (n \in \mathbf{N},\, n > R)$. Más szóval a z sorozat konvergens és $\lim z = \alpha$. ■

Minden készen áll ahhoz, hogy bebizonyítsuk a későbbiek szempontjából alaptételnek is nevezhető alábbi állításunkat.

3.5.6. Tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely korlátos* $z = (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, azaz a szóban forgó sorozat valós értékű. Tudjuk (ld. 3.3.1. Tétel), hogy alkalmas ν indexsorozattal a $z \circ \nu$ részsorozat monoton. Világos, hogy egy korlátos sorozatnak minden részsorozata is korlátos, így a $z \circ \nu$ monoton sorozat is korlátos. Alkalmazható ezért a 3.5.3. Tétel, miszerint a z-nek a most vizsgált $z \circ \nu$ résszorozata konvergens.

Most tegyük fel, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, tehát a tételbeli sorozat komplex számokból áll, és legyen $(x_n) := \operatorname{Re} z$, $(y_n) := \operatorname{Im} z$. Emlékeztetünk a korlátos sorozat definícójára (ld. 3.3.): van olyan $K \in \mathbf{R}$, hogy $|z_n| \le K \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \ge \begin{cases} |x_n| \\ \\ |y_n| \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $|x_n|, |y_n| \le K \quad (n \in \mathbf{N})$. Következésképpen az $(x_n), (y_n)$ (valós) sorozatok is korlátosak. A bizonyításunk első fele alapján tehát van olyan ν indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) résszorozat konvergens. Nyilvánvaló, hogy az (y_{ν_n}) résszorozat is korlátos, ezért egy alkalmas μ indexsorozattal az $(y_{\nu_{\mu_n}})$ résszorozat konvergens. Legyen

$$\gamma_n := \nu_{\mu_n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor (ld. 3.2. vi) megjegyzés) a (γ_n) sorozat indexsorozat. Továbbá (ld. 3.5.2. Tétel) az (x_{γ_n}) résszorozat is konvergens. A (γ_n) indexsorozattal tehát azt kaptuk, hogy az $(x_{\gamma_n}), (y_{\gamma_n})$ sorozatok konvergensek. Ezért (ld. 3.5.5. Tétel) a z sorozat

$$(z_{\gamma_n}) = (x_{\gamma_n} + \imath y_{\gamma_n})$$

résszorozata konvergens. ∎

3.6. Megjegyzések

i) Vezessük be valamilyen $\alpha \in \mathbf{K}$ és $r > 0$ esetén az α *középpontú* r *sugarú környezet* fogalmát az alábbiak szerint:

$$K_r(\alpha) := \{\xi \in \mathbf{K} : |\xi - \alpha| < r\}.$$

Esetenként $k_r(\alpha)$-t, ill. pusztán $K(\alpha)$-t (vagy $k(\alpha)$-t) írunk, ha az adott szituációban az r sugár nem játszik szerepet. Ekkor a sorozatok konvergenciájára adott fenti definíciónk a következőképpen fogalmazható meg: a $(z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens és a határértéke $\alpha \in \mathbf{K}$, ha bármely $K(\alpha)$ környezethez megadható egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex úgy, hogy $z_n \in K(\alpha) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$.

ii) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ természetes szám esetén $T(n)$ egy állítás. Pl. $T(n)$ jelentse azt, hogy „n négyzetszám", vagy mondjuk azt, hogy „$n > 30$”. Állapodjunk meg abban, hogy a $T(n)$ *majdnem minden* $n \in \mathbf{N}$ *esetén igaz* megfogalmazás a következőt jelenti: van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ mellett $T(n)$ igaz. A „majdnem minden" kitételt a legtöbbször így rövidítjük: m.m. Ezt felhasználva a konvergencia definíciója a következőképpen hangzik: a $(z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens és a határértéke $\alpha \in \mathbf{K}$, ha bármely $K(\alpha)$ környezet esetén $z_n \in K(\alpha)$ m.m. $n \in \mathbf{N}$ esetén igaz (vagy rövidebben írva: $z_n \in K(\alpha)$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$)). (Másképp; fogalmazva: tetszőleges $K(\alpha)$ környezetet véve legfeljebb véges sok $\mathbf{N} \in n$-re fordulhat elő az, hogy x_n nincs benne $K(\alpha)$-ban.)

iii) Világos, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ esetén

$$K_r(\alpha) = (\alpha - r, \alpha + r)$$

egy α középpontú, $2r$ hosszúságú nyílt intervallum, míg a $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ választással

$$K_r(\alpha) = \{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - \alpha| < r\}$$

a komlex számsíkon egy α középpontú, r sugarú (nyílt) körlemez. Ezért pl. a valós esetben egy (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha egy alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

iv) Az előbbi megjegyzésben hallgatólagosan már feltételeztük, hogy ha egy valós $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat konvergens, akkor a $\lim(x_n)$ határérték is valós szám. Valóban, ha $\alpha := \lim(x_n)$ egy nem valós komplex szám lenne (azaz $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$), akkor egy valamilyen $r > 0$ számmal

$$K_r(\alpha) \cap \mathbf{R} = \emptyset.$$

Ugyanakkor (ld. ii)) $x_n \in K_r(\alpha)$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), azaz (a szóban forgó sorozat valós értékűsége miatt) minden ilyen n-re

$$x_n \in K_r(\alpha) \cap \mathbf{R} = \emptyset,$$

ami nyilván nem lehet.

v) Az eddigiek szerint eléggé kézenfekvő az alábbi észrevétel. Tegyük fel ehhez, hogy az (x_n), $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatokra igaz a következő:

$$x_n = y_n \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ebben az esetben az (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az (y_n) is konvergens, továbbá az utóbbi esetben $\lim(x_n) = \lim(y_n)$. Emlékezve a „m.m." terminológiára a feltételünk azt jelenti, hogy egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$x_n = y_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy a két sorozatnak legfeljebb véges sok tagja különbözhet egymástól (ti. legfeljebb $x_0, y_0, ..., x_N, y_N$). Ezért a most mondottakat így is szokták fogalmazni: ha egy sorozat (legfeljebb) véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor ez sem a konvergencia tényén, sem pedig (ha konvergens sorozatból indultunk ki) a határértéken nem változtat.

vi) Valamely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat és $m \in \mathbf{N}$ szám esetén legyen

$$y_n := x_{m+n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (y_n) sorozatot az (x_n) sorozat *elcsúsztatottjának* nevezzük. Nem okoz gondot annak a belátása, hogy ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor az (y_n) elcsúsztatottja is konvergens, és $\lim(x_n) = \lim(y_n)$. Valóban, ha $\alpha := \lim(x_n)$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \qquad (k \in \mathbf{N},\, k > N).$$

Legyen $M := \max\{0, N - m\}$ és $n \in \mathbf{N}$, $n > M$, akkor $k := n + m > M + m > N$, azaz

$$|y_n - \alpha| = |x_k - \alpha| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, amit állítottunk.

vii) Könnyű meggondolni, hogy pl. a $((-1)^n)$ sorozat nem konvergens (*divergens*). Ti. (ld. iv)) ha az lenne és α a határértéke, akkor $\alpha \in \mathbf{R}$. Három eset lehetséges: $\alpha \notin \{-1, 1\}$. Ekkor van olyan $K_r(\alpha)$, hogy $x_n = \pm 1 \notin K_r(\alpha) \quad (n \in \mathbf{N})$. Pl.

$$r := \min\{|\alpha - 1|, |\alpha + 1|\}.$$

Ez nyilván ellentmond annak, hogy (a konvergencia miatt) $x_n \in K_r(\alpha) \quad$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). Most tegyük fel azt, hogy $\alpha = 1$, ekkor $-1 \notin K_1(1) = (0, 2)$. Bármilyen $N \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}, n > N$ (sőt, végtelen sok ilyen n létezik), hogy $x_n = -1$. Következésképpen nem létezik olyan N küszöbindex, amellyel $x_n \in K_1(1)$ teljesülne minden $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ esetén. Analóg módon okoskodhatunk akkor is, ha az $\alpha = -1$ feltételezésből indulunk ki.

viii) Világos, hogy ha $\alpha \in \mathbf{K}$ és

$$x_n := \alpha \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(azaz (x_n) egy ún. *konstanssorozat*), akkor (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$. A fenti v) megjegyzést figyelembe véve ugyanez mondható a *kvázi-konstanssorozatokról*: ha $\alpha \in \mathbf{K}$ és

$$x_n := \alpha \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}),$$

akkor (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$.

ix) Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ és $\alpha \in \mathbf{K}$. Azt mondjuk, hogy az α szám *torlódási pontja* az (x_n) sorozatnak, ha bármely $K(\alpha)$ környezetre igaz a következő: végtelen sok $\mathbf{N} \ni n$-re teljesül az $x_n \in K(\alpha)$ tartalmazás. Pl. a $((-1)^n)$ sorozatnak két torlódási pontja van, ezek az 1 és a -1. Nem nehéz meggondolni, hogy az (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha egyetlen torlódási pontja van, és az utóbbi esetben ez az egyetlen torlódási pont a sorozat határértéke. Valóban, ha (x_n) konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor minden $K(\alpha)$ esetén $x_n \in K(\alpha) \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$. Így végtelen sok $\mathbf{N} \ni n$-re $x_n \in K(\alpha)$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ torlódási pontjai az (x_n) sorozatnak és $\alpha \neq \beta$. Ha az (x_n) sorozat konvergens lenne és $\gamma := \lim(x_n)$, akkor (pl. $\gamma \neq \alpha$ esetén) nyilván van olyan $r > 0$ szám, amellyel $K_r(\alpha) \cap K_r(\gamma) = \emptyset$ (minden $0 < r < |\alpha - \gamma|/2$ szám ilyen). A konvergencia miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel $x_n \in K(\gamma) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, azaz $x_n \notin K(\alpha) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Az utóbbi miatt tehát legfeljebb az $x_0, ..., x_N$ tagok eshetnek $K(\alpha)$-ba, ami ellentmond annak, hogy az α torlódási pontja a sorozatnak.

x) Az előbbi megjegyzésben követett gondolatmenettel kapjuk pl. az alábbi „divergencia" kritériumot. Nevezetesen, tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (valós) számsorozat rendelkezik a következő tulajdonsággal: valamilyen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$ számokkal végtelen sok $n, m \in \mathbf{N}$ esetén $x_n < \alpha < \beta < x_m$. Ekkor az (x_n) sorozat divergens.

xi) A 3.5.6. Tételt szokás *Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételnek* is nevezni.

3.7. Műveletek, Cauchy-sorozatok, rendezés

A sorozatok konvergencia-kérdéseinek a vizsgálatában kiemelt szerep jut a nullasorozatoknak. Nevezzünk egy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatot *nullasorozatnak,* ha konvergens és $\lim(x_n) = 0$. Legyen

$$\mathcal{S}_0 := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \lim x = 0\}$$

a nullasorozatok halmaza. Ekkor az $(x_n) \in \mathcal{S}_0$ tartalmazás azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $|x_n| < \varepsilon \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$. Innen világos, hogy

$$(x_n) \in \mathcal{S}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad (|x_n|) \in \mathcal{S}_0.$$

Ezt szem előtt tartva egyszerűen adódik egy, a későbbiekben gyakran felhasznált állítás. Nevezetesen igaz a

3.7.1. Tétel (majoráns kritérium). *Tegyük fel, hogy az* $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozatokra teljesülnek az alábbiak:* $(y_n) \in \mathcal{S}_0$ *és* $|x_n| \leq |y_n| \quad$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). *Ekkor* $(x_n) \in \mathcal{S}_0$.

Bizonyítás. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám mellett egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|y_n| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ugyanakkor az $|x_n| \leq |y_n|$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) „majoráns feltétel" miatt van olyan $M \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|x_n| \leq |y_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ha tehát $R := \max\{N, M\}$, akkor

$$|x_n| \leq |y_n| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R),$$

azaz $|x_n| < \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N}, n > R)$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $(x_n) \in \mathcal{S}_0$. ■

3.7.2. Tétel. *Bármely* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozat esetén igaz a következő ekvivalencia: az* (x_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha valamilyen* $\alpha \in \mathbf{K}$ *számmal* $(x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$. *Az utóbbi esetben* $\alpha = \lim(x_n)$.

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az (x_n) sorozat konvergens és legyen

$$\alpha := \lim(x_n) \ \ , \ \ y_n := x_n - \alpha \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ szám mellett $|y_n| = |x_n - \alpha| < \varepsilon \quad$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). A fentiek szerint ezért $(y_n) = (x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathbf{K}$ olyan szám, amellyel $(x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$. Következésképpen (ld. fent) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ez nem mást jelent, mint azt, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$. ■

A konvergens sorozatokkal végzett műveletek vizsgálata szempontjából (is) fontos a következő két állítás.

3.7.3. Tétel. *Bármely* $(x_n) \in \mathcal{S}_0$ *nullasorozat és tetszőleges* (y_n) *korlátos sorozat esetén* $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$.

Bizonyítás. A feltételek szerint van olyan $K \in \mathbf{R}$, amellyel

$$|y_n| \leq K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $K = 0$, akkor $y_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ és így $x_n y_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Következésképpen (mint konstanssorozat (ld. 3.6. viii) megjegyzés)) $\lim(x_n y_n) = 0$, azaz $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$.

Ha viszont $K \neq 0$, akkor nyilván $K > 0$. A feltételeink szerint $(x_n) \in \mathcal{S}_0$, ezért tetsző-leges $\varepsilon > 0$ számra

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{K} \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq K|x_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}),$$

azaz $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$. ■

Mivel minden $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ konvergens sorozat korlátos (ld. 3.5.4. Tétel), ezért $(x_n) \in \mathcal{S}_0$ esetén $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$. Így pl. bármely két $(x_n), (y_n) \in \mathcal{S}_0$ sorozatra is igaz, hogy $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$.

3.7.4. Tétel. *Tetszőleges* (x_n), $(y_n) \in \mathcal{S}_0$ *nullasorozatok és bármely* $c \in \mathbf{K}$ *esetén* $(x_n + c y_n) \in \mathcal{S}_0$.

Bizonyítás. A feltételek miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ szám mellett alkalmas $N, M \in \mathbf{N}$ küszöbindexekkel

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N) \;\; , \;\; |y_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > M).$$

Legyen $S := \max\{N, M\}$, ekkor (a háromszög-egyenlőtlenséget (ld. 1.4. xxi) megjegyzés) is felhasználva)

$$|x_n + c y_n| \leq |x_n| + |c| \cdot |y_n| \leq$$

$$(1+|c|)(|x_n| + |y_n|) < 2(1+|c|)\frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > S).$$

Tehát az $(x_n + c y_n)$ sorozat valóban nullasorozat: $(x_n + c y_n) \in \mathcal{S}_o$ ■

Speciálisan: a tételben szereplő jelölésekkel $(x_n + y_n) \in \mathcal{S}_0$ és $(c x_n) \in \mathcal{S}_0$. Innen az is rögtön következik, hogy ha (x_n), $(y_n) \in \mathcal{S}_0$ és $c, d \in \mathbf{K}$, akkor $(c x_n + d y_n) \in \mathcal{S}_0$.

A továbbiakban a konvergens számsorozatok halmazát az $\mathcal{S}$ szimbólummal fogjuk jelölni:

$$\mathcal{S} := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : x \text{ konvergens}\}.$$

A konvergens sorozatok és az „alapműveletek" kapcsolatát fejezi ki a

3.7.5. Tétel. *Tetszőleges* $(x_n), (y_n) \in \mathcal{S}$ *és* $c \in \mathbf{K}$ *esetén*

i) $(x_n + cy_n) \in \mathcal{S}$ *és* $\lim(x_n + cy_n) = \lim(x_n) + c\lim(y_n)$,

ii) $(x_n y_n) \in \mathcal{S}$ *és* $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n)$,

iii) *ha* $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ *és* $\lim(y_n) \neq 0$, *akkor* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \in \mathcal{S}$ *és*

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\alpha := \lim(x_n) \ , \ \beta := \lim(y_n),$$

és lássuk be először az i) állítást. A 3.7.2. Tételt figyelembe véve azt kell ehhez megmutatnunk, hogy

$$(x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)) \in \mathcal{S}_0.$$

Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$|x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)| = |x_n - \alpha + c(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |c| \cdot |y_n - \beta| =: z_n.$$

A 3.7.2. Tétel szerint $(|x_n - \alpha|), (|y_n - \beta|) \in \mathcal{S}_0$, ezért a 3.7.4. Tétel miatt $(z_n) \in \mathcal{S}_0$. Alkalmazható tehát a 3.7.1. Tétel, hogy ti. $(x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)) \in \mathcal{S}_0$.

Hasonlóan járhatunk el a ii) állítás bizonyítása során is. Legyen $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$|x_n y_n - \alpha\beta| = |(x_n - \alpha)y_n + \alpha(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| \cdot |y_n| + |\alpha| \cdot |y_n - \beta| =: s_n.$$

A 3.7.2. Tétel és a 3.7.3. Tétel miatt $(|x_n - \alpha| \cdot |y_n|) \in \mathcal{S}_0$, ill. a 3.7.3. Tétel szerint $(|y_n - \beta|) \in \mathcal{S}_0$. A 3.7.4. Tételből ezért azt kapjuk, hogy $(s_n) \in \mathcal{S}_0$, amiből meg a 3.7.1. Tétel alapján $(x_n y_n - \alpha\beta) \in \mathcal{S}_0$, azaz (ld. 3.7.2. Tétel) ii) következik.

Végül lássuk be a iii) állítást. Ehhez mutassuk meg először is azt, hogy az $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, $\beta = \lim(y_n) \neq 0$ feltételek miatt az $(1/y_n)$ (reciprok) sorozat korlátos. Legyen ehhez $\varepsilon := |\beta|/2$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex mellett

$$|y_n - \beta| < \varepsilon = \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Így

$$|y_n| = |\beta + y_n - \beta| \geq |\beta| - |y_n - \beta| > |\beta| - |\beta|/2 = \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|\beta|} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

következésképpen a

$$q := \max\left\{\left|\frac{1}{y_0}\right|, ..., \left|\frac{1}{y_N}\right|\right\}$$

jelöléssel

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq \max\{q, 2/|\beta|\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Most bizonyítsuk be, hogy $(1/y_n) \in \mathcal{S}$ és $\lim(1/y_n) = 1/\beta$. Ui.

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - y_n}{\beta \cdot y_n} = (\beta - y_n) \cdot \frac{1}{\beta \cdot y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.7.2. Tétel alapján $(\beta - y_n) \in \mathcal{S}_0$, ill. az előbbiek szerint $(1/y_n)$ és így nyilván $(1/(\beta y_n))$ is korlátos sorozat. A 3.7.3. Tétel miatt ezért $((\beta - y_n)/(\beta y_n)) \in \mathcal{S}_0$, ami (ld. 3.7.2. Tétel) éppen azt jelenti, amit állítottunk.

Azt kell már csupán figyelembe venni, hogy

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

más szóval az (x_n/y_n) „hányados-sorozat" két konvergens sorozat szorzata. Így a ii) állítás (és a reciprok sorozatról az előbb mondottak) miatt $(x_n/y_n) \in \mathcal{S}$ és $\lim(x_n/y_n) = \alpha/\beta$. ■

A most bebizonyított tétel i) állításából nyilvánvalóan következik, hogy bármely (x_n), $(y_n) \in \mathcal{S}$, ill. $c, d \in \mathbf{K}$ esetén $(cx_n + dy_n) \in \mathcal{S}$, és

$$\lim(cx_n + dy_n) = c \lim(x_n) + d \lim(y_n).$$

A továbbiakban a konvergencia és a rendezés kapcsolatát vizsgáljuk. Először is mutassuk meg, hogy a két konvergens valós számsorozat tagjai közötti nagyságrendi kapcsolat bizonyos mértékig tükröződik a határértékeik közötti nagyságrendi viszonyban is. Sőt, mindez bizonyos értelemben „fordítva" is fennáll: a határértékek ilyen értelmű viszonyából következtetni tudunk a szóban forgó sorozatok tagjai közötti nagyságrendi összefüggésre. Igaz ti. a

3.7.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (x_n), $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatok konvergensek. Ekkor:*

i) *ha* $x_n \le y_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$, *akkor* $\lim(x_n) \le \lim(y_n)$;

ii) *ha* $\lim(x_n) < \lim(y_n)$, *akkor* $x_n < y_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$, $\beta := \lim(y_n)$, és lássuk be először az i) állítást. Vegyük észre, hogy ez következik ii)-ből. Valóban, ha az i)-beli $x_n \le y_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$ feltétel mellett indirekt módon azt tesszük fel, hogy $\beta < \alpha$, akkor ii)-ből (az $x_n \leftrightarrow y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ szerepcseréjével) azt kapjuk, hogy $y_n < x_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$. Ez nyilván ellentmond az $x_n \le y_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$ feltételezésnek.

Ezzel (a ii)-t feltételezve) az i) állítást beláttuk. Megjegyezzük, hogy egyébként ii) meg következik i)-ből. Ui. indirekt módon feltéve ii)-ben, hogy egy (ν_n) indexsorozattal $y_{\nu_n} \le x_{\nu_n} \quad (n \in \mathbf{N})$, az i)-ből $\lim(y_n) = \lim(y_{\nu_n}) \le \lim(x_{\nu_n}) = \lim(x_n)$ adódik, szemben a ii)-beli feltétellel.

A ii) bizonyításához legyen
$$\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{2},$$
az $M, R \in \mathbf{N}$ küszöbindexeket pedig válasszuk úgy, hogy
$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M),$$
ill.
$$\beta - \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} < y_n < \beta + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$
Tehát az $S := \max\{M, R\}$ küszöbindexszel
$$x_n < \frac{\alpha + \beta}{2} < y_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S).$$
Más szóval $x_n < y_n \ (n \in \mathbf{N}, n > S)$, amint azt ii)-ben állítottuk. ∎

A konvergens sorozatokkal kapcsolatos vizsgálatokban az egyik legtöbbször idézett állítás a

3.7.7. Tétel (közrefogási elv). *Az* $(x_n), (y_n), (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatokról tegyük fel, hogy*
$$x_n \le y_n \le z_n \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}),$$
az $(x_n), (z_n)$ *sorozatok konvergensek és* $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. *Ekkor az* (y_n) *sorozat is konvergens, és* $\lim(y_n) = \lim(x_n)$.

Bizonyítás. Az $x_n \le y_n \le z_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) „közrefogási" feltétel miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$x_n \le y_n \le z_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ha

$$\alpha := \lim(x_n) = \lim(z_n)$$

és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor egy-egy $M, R \in \mathbf{N}$ küszöbindex mellett

$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M),$$

ill.

$$\alpha - \varepsilon < z_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Legyen $S := \max\{N, M, R\}$, ekkor

$$\alpha - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|y_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S),$$

azaz az (y_n) sorozat valóban konvergens és $\lim(y_n) = \alpha$. ■

A számsorozatokkal kapcsolatos vizsgálatok egyik központi kérdése annak az eldöntése, hogy a szóban forgó sorozat konvergens-e. Világos, hogy ezt kizárólag az illető sorozat ismeretében el kell tudnunk dönteni. Ehhez speciális tulajdonságú sorozatok esetében már vannak eszközeink. Ilyen pl. a monoton valós sorozatokat illetően a 3.5.3. Tétel. Ha ilyen „specialitások" nem állnak rendelkezésre, akkor „marad" a konvergencia definíciója. Ebben a definícióban viszont szerepel egy, a később határértéknek nevezett szám, aminek az ismerete nélkül a definíciója „használhatatlan". (Formálisan szólva azt kell meghatároznunk, hogy mi a sorozat határértéke, amit a definíció alapján csak akkor tudunk megtenni, ha ismerjük a határértéket!) Világos tehát, hogy szükség van olyan kritériumra, aminek az alapján kizárólag a sorozat ismeretében el tudjuk dönteni, hogy az konvergens-e vagy sem.

Könnyen jutunk egy szükséges feltételhez a konvergenciát illetően. Tegyük fel ui., hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens és legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m > N$ mellett

$$|x_n - x_m| = |x_n - \alpha + (\alpha - x_m)| \le |x_n - \alpha| + |x_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezt szem előtt tartva azt mondjuk, hogy az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat *Cauchy-sorozat,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$|y_n - y_m| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N). \tag{3.7.1}$$

A most megfogalmazott (3.7.1) tulajdonság az ún. *Cauchy-kritérium.* Ha tehát egy számsorozat konvergens, akkor szükségképpen Cauchy-sorozat is (más szóval eleget tesz a Cauchy-kritériumnak).

A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy a Cauchy-kritérium nem csupán szükséges, de elégséges feltétele is a konvergenciának.

3.7.8. Tétel. *Az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Az eddig mondottak miatt csupán az elégségességet kell már igazolnunk. Tegyük fel tehát, hogy az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat Cauchy-sorozat, azaz teljesül a (3.7.1) feltétel. Lássuk be először is, hogy ekkor (y_n) korlátos. Valóban, ha (pl.) a (3.7.1) kritériumot az $\varepsilon := 1$ választással alkalmazzuk, akkor (egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel)

$$|y_n - y_m| < 1 \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Innen

$$|y_n| = |(y_n - y_{N+1}) + y_{N+1}| \leq$$
$$|y_n - y_{N+1}| + |y_{N+1}| < 1 + |y_{N+1}| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N)$$

következik. Ha

$$q := \max\{|y_0|, ..., |y_N|\},$$

akkor

$$|y_n| \leq \max\{q, 1 + |y_{N+1}|\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a szóban forgó sorozat valóban korlátos. Alkalmazható tehát a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (ld. 3.5.6. Tétel), miszerint egy alkalmas (ν_n) indexsorozattal az (y_{ν_n}) résszorozat konvergens.

Legyen

$$\alpha := \lim(y_{\nu_n})$$

és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|y_{\nu_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

A (3.7.1) Cauchy-kritériumot most ε helyett $\varepsilon/2$-re alkalmazva azt mondhatjuk, hogy egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Legyen $R := \max\{N, M\}$. Emlékeztetünk arra (ld. 3.2.5. v) megjegyzés), hogy $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $n \in \mathbf{N}, n > R\,(\geq N)$ esetén egyúttal $\nu_n > R\,(\geq N, M)$ is teljesül. Ezért

$$|y_n - \alpha| = |(y_n - y_{\nu_n}) + (y_{\nu_n} - \alpha)| \leq |y_n - y_{\nu_n}| + |y_{\nu_n} - \alpha)| <$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Tehát az (y_n) sorozat konvergens (és $\lim(y_n) = \alpha$). ■

A konvergens sorozatokkal kapcsolatos vizsgálódásaink lezárásaként foglalkozzunk röviden a határérték fogalmának az alábbi kiterjesztésével. Ehhez először tekintsünk egy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ valós sorozatot. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozatnak $+\infty$ *a határértéke,* ha tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ valós számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$x_n > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Más szóval minden $p \in \mathbf{R}$ mellett $x_n > p \quad (\text{m.m.}\, n \in \mathbf{N})$. Világos, hogy ha kell, akkor nyugodtan feltehetjük itt azt is, hogy $p > 0$.

Hasonlóan azt mondjuk, hogy az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatnak $-\infty$ *a határértéke,* ha bármelyik $q \in \mathbf{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$y_n < q \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N)$$

(vagy másképp fogalmazva tetszőleges $q \in \mathbf{R}$ mellett $y_n < q \quad (\text{m.m.}\, n \in \mathbf{N})$). Ha kell, akkor itt is feltehetjük, hogy $q < 0$.

Azt mondjuk továbbá, hogy a $(z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatnak *van határértéke,* ha (z_n) konvergens, vagy létezik a $\lim(z_n) = +\infty$ (vagy $-\infty$) határérték. Világos, hogy ha $\lim(z_n) = +\infty$ (vagy $\lim(z_n) = -\infty$), akkor $\lim(|z_n|) = +\infty$.

Ha pl. az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat monoton növő és felülről nem korlátos (azaz $\sup \mathcal{R}_x = +\infty$), akkor tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel $x_N > p$. A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$x_n > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

A fenti definíció értelmében tehát $\lim(x_n) = +\infty$.

Analóg módon kapjuk monoton fogyó és alulról nem korlátos $y = (y_n)$ sorozatra (amikor is tehát $\inf \mathcal{R}_y = -\infty$), hogy $\lim(y_n) = -\infty$.

Figyelembe véve a 3.5.3. Tételt ezzel beláttuk a következő állítást:

3.7.9. Tétel. *Bármely monoton $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatnak van határértéke. Ha (x_n) monoton növő, akkor $\lim(x_n) = \sup \mathcal{R}_x$, ha monoton fogyó, akkor $\lim(x_n) = \inf \mathcal{R}_x$.*

Komplex $(z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sorozatok esetén akkor mondjuk, hogy *a (z_n) sorozatnak a határértéke* ∞, azaz $\lim(z_n) = \infty$, ha minden $p \in \mathbf{R}$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$|z_n| > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Tehát akkor, ha tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ esetén $|z_n| > p$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). Világos, hogy mindez a következővel ekvivalens: a $(|z_n|)$ sorozatnak van határértéke és $\lim(|z_n|) = +\infty$.

Az előbbiekben tehát *kibővített értelemben* definiáltuk azt a tényt, hogy valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatnak van határértéke. A terminológiát illetően *az (x_n) sorozat konvergens* kijelentés továbbra is azt fogja takarni, hogy (x_n)-nek van határérértéke és az *véges,* azaz $\lim(x_n) \in \mathbf{K}$.

A most mondottakkal összhangban „bővítsük ki" a valós, ill. a komplex számok halmazát az alábbiak szerint:

$$\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \ , \ \overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\},$$

és legyen

$$\overline{\mathbf{K}} := \begin{cases} \overline{\mathbf{R}} & (\mathbf{K} = \mathbf{R}) \\ \\ \overline{\mathbf{C}} & (\mathbf{K} = \mathbf{C}). \end{cases}$$

Értelmezzük továbbá a $-\infty, +\infty, \infty$ elemek *környezeteit* a következőképpen:

$$K(+\infty) := K_p(+\infty) := (p, +\infty) \qquad (p \in \mathbf{R}),$$

$$K(-\infty) := K_q(-\infty) := (-\infty, q) \qquad (q \in \mathbf{R}),$$

$$K(\infty) := K_s(\infty) := \{z \in \mathbf{C} : |z| > s\} \qquad (s > 0).$$

Ekkor egy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatnak a fenti kibővített értelemben akkor és csak akkor van határértéke, ha létezik olyan $\alpha \in \overline{\mathbf{K}}$, hogy bármely $K(\alpha)$ környezet esetén $x_n \in K(\alpha)$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$).

Állapodjunk meg abban, hogy az $\mathbf{R}$-beli műveleteket az alábbi „lista" szerint terjesztjük ki $\overline{\mathbf{R}}$-re:

1^o ha $u \in \mathbf{R}$, $v \in \{-\infty, +\infty\}$, akkor $u + v := v + u := v$,

2^o ha $0 < u \in \mathbf{R}$, $v \in \{-\infty, +\infty\}$, akkor $uv := vu := v$,

3^o ha $0 > s \in \mathbf{R}$, akkor $s(-\infty) := (-\infty)s := +\infty$, $s(+\infty) := (+\infty)s := -\infty$,

4^o $(+\infty) + (+\infty) := +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) := -\infty,$

5^o $(+\infty)(+\infty) := (-\infty)(-\infty) := +\infty,$

6^o $(+\infty)(-\infty) := (-\infty)(+\infty) := -\infty,$

7^o ha $u \in \mathbf{R},\ v \in \{-\infty, +\infty\},$ akkor $\frac{u}{v} := 0.$

Külön is felhívjuk a figyelmet arra, hogy a műveletek kapcsán nem értelmeztük azok eredményét bizonyos esetekben, azaz a

$$(+\infty) + (-\infty)\ ,\ (-\infty) + (+\infty)\ ,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ ,\ \frac{v}{0}\ \ (v \in \overline{\mathbf{R}})\ ,\ (\pm\infty)0\ ,\ 0(\pm\infty)$$

„kimeneteket".

Állapodjunk meg továbbá abban, hogy a $\leq$ rendezést a következőképpen értelmezzük $\overline{\mathbf{R}}$-ban: $a, b \in \mathbf{R}$ esetén az $\mathbf{R}$-beli értelemben legyen $a \leq b,$ ill.

$$-\infty < a < +\infty\ \ (a \in \mathbf{R})\ ,\ -\infty < +\infty.$$

Mindezek fényében bővítsük ki a konvergencia és az „alapműveletek" kapcsolatával foglalkozó 3.7.5. Tételt határértékkel rendelkező sorozatokra. Nevezetesen, igaz a

3.7.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatok mindegyikének van határértéke, legyen* $\alpha := \lim(x_n),\ \beta := \lim(y_n).$ *Ekkor:*

i) *ha az* $\alpha + \beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *összeg értelmezve van, akkor az* $(x_n + y_n)$ *összeg-sorozatnak is van határértéke, és* $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta;$

ii) *ha az* $\alpha\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *szorzat értelmezve van, akkor az* $(x_n y_n)$ *szorzat-sorozatnak is van határértéke, és* $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta;$

iii) *ha* $y_n \neq 0\ \ (n \in \mathbf{N})$ *és az* $\alpha/\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *hányados értelmezve van, akkor az* (x_n/y_n) *hányados-sorozatnak is van határértéke, és* $\lim(x_n/y_n) = \alpha/\beta.$

Bizonyítás. Nyilván feltehető már (ld. 3.7.5. Tétel), hogy α, β közül legalább az egyik nem valós szám. Lássuk be először i)-t. Legyen első esetként pl.

$$\alpha \in \mathbf{R}\ \ ,\ \ \beta = +\infty.$$

Ekkor i) szerint azt kell megmutatnunk, hogy $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta = +\infty.$ Legyen ehhez $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ekkor van olyan $N \in \mathbf{N},$ hogy

$$y_n > p - \alpha + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mivel $\alpha \in \mathbf{R}$, azaz (x_n) konvergens, ezért egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\alpha - 1 < x_n < \alpha + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Következésképpen

$$x_n + y_n > \alpha - 1 + p - \alpha + 1 = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta = +\infty$.

Analóg módon adódik az i) állítás akkor is, ha $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta = -\infty$. Ha viszont

$$\alpha = \beta = +\infty,$$

akkor az előbbi bizonyítást annyiban kell csupán módosítani, hogy az ott szereplő $p \in \mathbf{R}$ mellett egy-egy alkalmas $N, M \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$y_n > \frac{p}{2} \quad (n \in \mathbf{N}, n > N) \ , \ x_n > \frac{p}{2} \quad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ezért

$$x_n + y_n > \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta = +\infty$.

Világos, hogy a most mondottak egyszerű módosítával kapjuk i)-t abban az esetben is, amikor $\alpha = \beta = -\infty$.

Bizonyítsuk be most ii)-t akkor, ha $0 < \alpha \in \mathbf{R}$ és $\beta = +\infty$. Ekkor alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbbel

$$\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} < x_n < \alpha + \frac{\alpha}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

ill. tetszőleges $0 < p \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$y_n > \frac{2p}{\alpha} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$x_n y_n > \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2p}{\alpha} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta = +\infty$.

A fentiek értelemszerű módosításával „kezelhetjük" a ii) állítás bizonyításakor az

$$0 \neq \alpha \in \mathbf{R}, \ \beta = \pm\infty$$

esetekből a még „hiányzókat".

Most belátjuk ii)-t akkor, ha $\alpha = \beta = +\infty$. Itt annyi a különbség a fent részletezett $0 < \alpha \in \mathbf{R}$, $\beta = +\infty$ esethez képest, hogy az N, M küszöbindexekről az alábbiakat tételezhetjük fel:

$$x_n > \sqrt{p} \quad (n \in \mathbf{N}, n > N) \ , \ y_n > \sqrt{p} \quad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Következésképpen

$$x_n y_n > \sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta = +\infty$.

Analóg módon kapjuk a ii)-ből még „hiányzó" eseteket.

A iii) állításhoz tegyük fel, hogy $0 < \beta \in \mathbf{R}$ és $\alpha := \pm\infty$. Ekkor (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\lim\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{\beta},$$

és a iii) állítás következik a ii)-ből. Analóg módon kapjuk iii)-t a $0 > \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha = \pm\infty$ esetekben is. Ha viszont $\beta = \pm\infty$ és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor először lássuk be, hogy

$$\lim\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0.$$

Legyen ui. $\beta = +\infty$ és $\varepsilon > 0$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$y_n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Tehát $0 < 1/y_n < \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, azaz $\lim(1/y_n) = 0$.

Ha $\beta = -\infty$, akkor annyi a különbség a most mondottakhoz képest, hogy

$$y_n < -\frac{1}{\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz $-\varepsilon < 1/y_n < 0 \ (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Így $\lim(1/y_n) = 0$.

Alkalmazható ezért a 3.7.5. Tétel:

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = \alpha \cdot 0 = 0 = \frac{\alpha}{\pm\infty} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

■

3.8. Megjegyzések

i) Speciálisan (ld. 3.7.5. Tétel) konvergens $(x_n), (y_n)$ sorozatok esetén az

$$(x_n + y_n) \ \ , \ \ (x_n - y_n)$$

sorozatok is konvergensek és

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n) \ \ , \ \ \lim(x_n - y_n) = \lim(x_n) - \lim(y_n)$$

(ami a szóban forgó tétel i) állításából a $c := 1$, ill. $c := -1$ választással adódik).

ii) A 3.7.5. Tétel kapcsán felhívjuk a figyelmet arra, hogy pl. az (x_n+y_n) összeg-, vagy az $(x_n y_n)$ szorzat-, vagy az (x_n/y_n) hányados-sorozat lehet úgy is konvergens, hogy akár sem az (x_n), sem pedig az (y_n) sorozat nem konvergens (divergens). A legegyszerűbb példa ennek az illusztrálására az

$$x_n := (-1)^n \ \ , \ \ y_n := -x_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatok esete. Láttuk (ld. 3.6. vii) megjegyzés), hogy a $((-1)^n)$ sorozat divergens, azaz az (x_n) sorozat és (nyilvánvaló módon) az (y_n) sorozat is divergens. Ugyanakkor az előbb említett összeg-(szorzat, hányados) sorozatok konstanssorozatok (ld. 3.6. viii) megjegyzés), azaz konvergensek.

iii) Ha viszont $(x_n + y_n)$ konvergens, és azt tudjuk, hogy (pl.) az (x_n) sorozat is konvergens, akkor az (y_n) sorozat már szükségképpen konvergens. Ui. alkalmazható az előbbi i) megjegyzés, ti.

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Hasonló a helyzet, ha az (x_n/y_n) konvergenciája mellett pl. azt tudjuk, hogy az (y_n) sorozat is konvergens. Ekkor az (x_n) sorozat konvergens, ui.

$$x_n = y_n \cdot \frac{x_n}{y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és alkalmazható a 3.7.5. Tétel ii) állítása.

iv) A 3.7.5. Tétel iii) állításában szereplő $\lim(y_n) \neq 0$ feltétel nem csupán a hányados-sorozat határértékének a kiszámítása szempontjából lényeges. Legyen ui.

$$x_n := \frac{1}{n+1} \ \ , \ \ y_n := \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor könnyű meggyőződni arról, hogy a most definiált sorozatok nullasorozatok. Hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén bármely olyan $N \in \mathbf{N}$ „jó" küszöbindex, amelyre $N > 1/\varepsilon$:

$$|x_n| = |y_n| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ugyanakkor

$$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt az (x_n/y_n) sorozat divergens.

v) A 3.7.6. Tétel i) állításában nyert $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$ eredmény nem „élesíthető", azaz $\lim(x_n) < \lim(y_n)$ általában nem igaz. Még akkor sem, ha az i)-beli $x_n \leq y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) feltételt az „élesebb" $x_n < y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) feltételre módosítjuk. Tekintsük ui. az

$$x_n := \frac{1}{(n+1)^2} \ , \ y_n := \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatokat. Az előbb láttuk, hogy $(y_n) \in \mathcal{S}_0$. Innen a nyilvánvaló

$$0 < x_0 = y_0 \ , \ 0 < x_n < y_n \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

becslések, ill. a 3.7.1. Tétel miatt $(x_n) \in \mathcal{S}_0$ is teljesül, azaz

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0.$$

vi) A 3.7.5. Tétel i) állítása alapján (a lineáris algebra nyelvén fogalmazva) azt mondhatjuk, hogy a konvergens számsorozatok $\mathcal{S}$ halmaza (a $\mathbf{K}$ test felett) vektortér. Legyen $L : \mathcal{S} \to \mathbf{K}$ az a függvény, amelyre

$$L(x) := \lim x \qquad (x \in \mathcal{S}).$$

(A vektortereken értelmezett számértékű függvényeket (a „függvény" szóval szinonim számtalan kifejezés közül választva) többnyire *funkcionáloknak* nevezzük.) Ekkor (ld. az előbb idézett állítást)

$$L(x+y) = L(x) + L(y) \ , \ L(cx) = cL(x) \qquad (x, y \in \mathcal{S}, c \in \mathbf{K}),$$

azaz L *additív* és *homogén.* Röviden szólva L *lineáris funkcionál.*

vii) A hányados-sorozat határértékével kapcsolatos eredményeinket illetően (ld. 3.7.5., 3.7.10. Tételek iii) állításai) az alábbiakat jegyezzük meg. Ha az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens és $\beta := \lim(y_n) \neq 0$, akkor könnyen láthatóan

$$y_n \neq 0 \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, legyen $\varepsilon := |\beta|/2$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|y_n - \beta| < \varepsilon = \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$|y_n| = |(y_n - \beta) + \beta| \geq |\beta| - |y_n - \beta| >$$

$$|\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} > 0 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$. Ha tehát (ld. 3.2. ii) megjegyzés) az $(1/y_n)$ reciproksorozaton azt az $f \in \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ leképezést értjük, amelyre

$$f(n) := \frac{1}{y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

akkor a 3.7.5. Tétel iii) állításában az „$y_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$” feltétel el is hagyható. Ugyanez mondható a 3.7.10. Tétel iii) állításában is, ui. (az ottani jelölésekkel) az „α/β értelmezve van" feltételből $\beta \neq 0$ következik.

viii) A későbbiekben többször hivatkozunk az alábbi tényre: ha az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor az $(|x_n|)$ sorozat is konvergens, és $\lim(|x_n|) = |\alpha|$. Ui. mindez $\alpha = 0$ esetén a konvergencia definíciója alapján triviális, ha pedig $\alpha \neq 0$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség (ld. 1.4. xxi) megjegyzés) miatt

$$||x_n| - |\alpha|| \leq |x_n - \alpha| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 3.7.2. Tétel) $(|x_n - \alpha|)$ nullasorozat, ezért (ld. 3.7.1. Tétel) $(||x_n| - |\alpha||)$ is az. Így (ld. 3.7.2. Tétel) $(|x_n|)$ konvergens és $\lim(|x_n|) = |\alpha|$.

ix) A 3.7.6. Tételből speciális esetként kapjuk az alábbi következményeket: tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$. Ekkor

1^o ha a $c \in \mathbf{R}$ számmal $x_n \leq c$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), akkor $\alpha \leq c$;

2^o ha $c \in \mathbf{R}$ és $\alpha < c$, akkor $x_n < c$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$).

(Válasszuk ui. az $y_n := c$ $(n \in \mathbf{N})$ konstanssorozatot, amikor is $\lim(y_n) = c$.)

x) Tegyük fel, hogy adott egy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat, és legyen

$$y_n := \sup\{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$z_n := \inf\{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$\{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n+1\} \subset \{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$y_{n+1} \leq y_n \ , \ z_{n+1} \geq z_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ha az (x_n) sorozat felülről nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $y_n = +\infty$, ill. analóg módon, ha az (x_n) sorozat alulról nem korlátos, akkor pedig bármely $n \in \mathbf{N}$ mellett $z_n = -\infty$. Definiáljuk ezek után az (x_n) sorozat *limesz szuperiorját,* ill. *limesz inferiorját* a következőképpen:

$$\limsup(x_n) := \begin{cases} +\infty & (\text{ha } (x_n) \text{ felülről nem korlátos}) \\ \\ \lim(y_n) & (\text{ha } (x_n) \text{ felülről korlátos}), \end{cases}$$

$$\liminf(x_n) := \begin{cases} -\infty & (\text{ha } (x_n) \text{ alulról nem korlátos}) \\ \\ \lim(z_n) & (\text{ha } (x_n) \text{ alulról korlátos}). \end{cases}$$

Mivel $z_n \leq y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ nyilvánvalóan teljesül, ezért

$$\liminf(x_n) \leq \limsup(x_n).$$

A 3.7.9. Tételt is figyelembe véve, ha (x_n) felülről korlátos, akkor

$$\limsup(x_n) = \inf\left\{\sup\{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} : n \in \mathbf{N}\right\},$$

ill., ha (x_n) alulról korlátos, akkor

$$\liminf(x_n) = \sup\left\{\inf\{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} : n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Pl. $\limsup((-1)^n) = 1$, $\liminf((-1)^n) = -1$, míg $\limsup(1/n) = 0$, és hasonlóan $\liminf(1/n) = 0$.

xi) Megmutatható, hogy bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat esetén az alábbiak igazak:

1^o tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \limsup(x_n) < \beta$ esetén $\{n \in \mathbf{N} : x_n > \alpha\}$ végtelen halmaz, $\{n \in \mathbf{N} : x_n > \beta\}$ véges halmaz;

2^o tetszőleges $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $\gamma < \liminf(x_n) < \delta$ esetén $\{n \in \mathbf{N} : x_n < \delta\}$ végtelen halmaz, $\{n \in \mathbf{N} : x_n < \gamma\}$ véges halmaz;

3^o az (x_n) sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha $\liminf(x_n) = \limsup(x_n)$;

4^o ha $\liminf(x_n) = \limsup(x_n)$, akkor $\lim(x_n) = \liminf(x_n)$ $(= \limsup(x_n))$.

xii) A 3.7.10. Tétel a „kritikus esetekben" nem mond semmit, nevezetesen akkor, ha (az ottani jelölésekkel) $\alpha + \beta$, vagy $\alpha\beta$, vagy α/β nincs értelmezve. Különösen „emblematikus" a „0/0 eset", azaz, amikor $\alpha = \beta = 0$ és az (x_n/y_n) sorozatot kell vizsgálni a határérték szempontjából. Illusztrációképpen tekintsük az alábbi példákat:

1^o $x_n := y_n := 1/n$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\alpha = \lim(x_n) = \beta = \lim(y_n) = 0$, és triviális módon létezik a $\lim(x_n/y_n) = 1$ határérték;

2^o $x_n := 1/n^2$, $y_n := 1/n$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$, és hasonlóan létezik $\lim(x_n/y_n)$, de $\lim(x_n/y_n) = \lim(1/n) = 0$;

3^o $x_n := 1/n$, $y_n := 1/n^2$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$, és $\lim(x_n/y_n) = \lim(n) = +\infty$;

4^o $x_n := 1/n$, $y_n := (-1)^n/n$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$, de az $(x_n/y_n) = ((-1)^n)$ sorozat divergens;

5^o $x_n := n$, $y_n := n^2$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = +\infty$, és $\lim(x_n/y_n) = \lim(1/n) = 0$;

6^o $x_n := n^2$, ha n páros, és $x_n := n$, ha n páratlan, $y_n := n^2$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = +\infty$, de

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 1 & (n \text{ páros}) \\ \\ \frac{1}{n} & (n \text{ páratlan}) \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

miatt $\lim(x_{2n}/y_{2n}) = 1$, $\lim(x_{2n+1}/y_{2n+1}) = 0$, ezért (ld. 3.5.2. Tétel) az (x_n/y_n) sorozat divergens;

7^o $x_n := n^2$, $y_n := n$ $(n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = +\infty$, és könnyen láthatóan $\lim(x_n - y_n) = \lim(n(n-1)) = +\infty$;

8^o $x_n := \sqrt{n+2}$, $y_n := \sqrt{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = +\infty$, és

$$\lim(x_n - y_n) = \lim\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}\right) = 0;$$

9^o $x_n := n^2$, ha n páros és $x_n := n$, ha n páratlan, $y_n := n^2$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor $\lim(x_n) = \lim(y_n) = +\infty$, de

$$x_n - y_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ páros}) \\ \\ n - n^2 & (n \text{ páratlan}) \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

miatt $\lim(x_{2n} - y_{2n}) = 0$, $\lim(x_{2n+1} - y_{2n+1}) = -\infty$, ezért az $(x_n - y_n)$ sorozat divergens, stb.

3.9. Speciális sorozatok

A továbbiakban olyan speciális sorozatokat vizsgálunk, amelyekre a későbbiekben sokszor lesz szükségünk.

3.9.1. Tétel. *A pozitív természetes számok reciprokaiból álló* $(1/n)$ *sorozat nullasorozat, azaz konvergens és*

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz legyen (ld. 1.3.1. Tétel) $N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $N\varepsilon > 1$, azaz $1/N < \varepsilon$. Ekkor

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

ami az állításunk bizonyítását jelenti. ■

3.9.2. Tétel. *Legyen* $q \in \mathbf{K}$. *Ekkor*

1^o $|q| < 1$ *esetén a* (q^n) *sorozat nullasorozat, azaz konvergens és*

$$\lim\,(q^n) = 0;$$

2^o *sőt, ha* $|q| < 1$, *akkor tetszőleges* $1 \leq k \in \mathbf{N}$ *„kitevő" mellett az* $(n^k q^n)$ *sorozat is nullasorozat, azaz*

$$\lim\left(n^k q^n\right) = 0;$$

3^o *ha* $|q| > 1$, *akkor a* (q^n) *sorozat divergens, és* $\lim(|q^n|) = +\infty$, *ill.* $q \in \mathbf{R}$, $q > 1$ *esetén* $\lim(q^n) = +\infty$, *míg* $q \in \mathbf{R}$, $q < -1$ *esetén nincs határértéke a* (q^n) *sorozatnak;*

4^o *a* $|q| = 1$ *esetben a* (q^n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha* $q = 1$ (*és ekkor* $\lim(q^n) = \lim(1) = 1$).

Bizonyítás. Mivel $q = 0$ esetén $q^n = n^k q^n = 0$ $(0 < n, k \in \mathbf{N})$, ezért ebben az esetben a (q^n) és az $(n^k q^n)$ $(1 \leq k \in \mathbf{N})$ sorozatok triviálisan nullasorozatok.

Így feltehetjük, hogy $0 < |q| < 1$, azaz $1/|q| > 1$. Van tehát olyan $h > 0$ szám, amellyel

$$\frac{1}{|q|} = 1 + h.$$

Vizsgáljuk először a $k = 0$ esetet, amikor is a (q^n) sorozatról van szó. A Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) szerint

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$|q|^n < \frac{1}{nh} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.1. Tétel és a 3.7.4. Tétel miatt az $(1/(nh))$ sorozat nullasorozat, következésképpen a majoráns-kritérium (ld. 3.7.1. Tétel) alapján $\lim(q^n) = 0$.

Legyen most $k \geq 1$, és $n \in \mathbf{N}, n > k$ esetén alkalmazzuk a binomiális tételt:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j \geq \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n}{j} h^j \geq$$

$$\binom{n}{k+1} h^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!} h^{k+1} = \frac{h^{k+1} n^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Ha tehát

$$y_n := \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \qquad (k < n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\frac{1}{|q|^n} \geq \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y_n n^{k+1} \qquad (k < n \in \mathbf{N}).$$

Vegyük észre, hogy $y_n > 0$ $(k < n \in \mathbf{N})$, ill. minden $j = 0, ..., k$ esetén (ld. 3.9.1., 3.7.4. Tételek)

$$\lim \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1.$$

Így a 3.7.4. Tétel szerint

$$\lim(y_n) = \lim \left(\prod_{j=0}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right) = \prod_{j=0}^{k} \lim \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1,$$

ill. $\lim(1/y_n) = 1$.

A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\left| n^k q^n \right| \leq \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot \frac{1}{n} \qquad (k < n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$\lim \left(\frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \lim \left(\frac{1}{y_n}\right) \cdot \lim \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Az előbb már idézett majoráns-kritérium (ld. 3.7.1. Tétel) miatt tehát $\lim(n^k q^n) = 0$.

Most tegyük fel, hogy $|q| > 1$, azaz valamilyen $h > 0$ számmal $|q| = 1 + h$. Ekkor a Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) szerint

$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a (q^n) sorozat (nyilván) nem korlátos, így (ld. 3.5.4. Tétel) divergens. Ha $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor legyen $N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $N > p/h$. Világos, hogy ekkor

$$|q^n| > nh > Nh > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz

$$\lim\left(|q^n|\right) = +\infty.$$

Ha itt $1 < q \in \mathbf{R}$, akkor

$$\lim\left(|q^n|\right) = \lim(q^n) = +\infty.$$

Ha viszont $q \in \mathbf{R}$ és $q < -1$, akkor az előzőek (és $q^2 > 1$ miatt)

$$\lim\left(q^{2n}\right) = \lim\left(\left(q^2\right)^n\right) = +\infty,$$

de

$$\lim\left(q^{2n+1}\right) = q \cdot \lim\left(\left(q^2\right)^n\right) = q \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Ezért nem létezik a (q^n) sorozatnak határértéke.

Legyen végül $|q| = 1$, és $x_n := q^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Világos, hogy

$$x_{n+1} = q^{n+1} = qq^n = qx_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha az (x_n) sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor (ld. 3.6. vi) megjegyzés) egyúttal $\alpha = \lim(x_{n+1})$, azaz az előbbi rekurzív összefüggés alapján

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = q \lim(x_n) = q\alpha.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $(1-q)\alpha = 0$. Innen $q = 1$, vagy $\alpha = 0$ következik. Az utóbbi nem lehet, ui. (ld. 3.8. viii) megjegyzés)

$$|\alpha| = \lim(|x_n|) = \lim(1) = 1.$$

$\blacksquare$

3.9.3. Tétel. *Legyen*

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (x_n) *sorozat szigorúan monoton növő, és felülről korlátos.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a számtani-mértani középpel kapcsolatos tételünket (ld. 1.3.5. Tétel) az alábbi „szereposztással" (az idézett tételbeli jelöléseket használva):

$$a_0 := 1 \ , \ \ a_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k = 1, ..., n) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel a most definiált a_k-k nem mind egyenlők egymással, ezért

$$x_n = \prod_{k=0}^{n} a_k < \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{1+n+1}{n+1} \right)^{n+1} = x_{n+1} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát az (x_n) sorozat szigorúan monoton növő.

A korlátosság bizonyításához módosítsuk az előbbi a_k-kat úgy, hogy

$$a_0 := a_1 := \frac{1}{2} \ , \ \ a_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k = 2, ..., n+1) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Alkalmazva az 1.3.5. Tételt azt mondhatjuk, hogy

$$\frac{x_n}{4} = \prod_{k=0}^{n+1} a_k < \left(\frac{\sum_{k=0}^{n+1} a_k}{n+2} \right)^{n+2} = \left(\frac{1/2 + 1/2 + n + 1}{n+2} \right)^{n+2} = 1 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

következésképpen $x_n < 4$ $(n \in \mathbf{N})$. ■

3.9.4. Tétel. *Legyen* $2 \leq m \in \mathbf{N}$, $a > 0$, *és tekintsük azt az* (x_n) *számsorozatot, amelyre*

$$x_0 := a \ , \ x_n := \frac{1}{m} \left((m-1) x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} \right) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (x_n) *sorozat konvergens,* $\gamma := \lim(x_n) > 0$, *és* $\gamma^m = a$.

A bizonyítás előtt emlékeztetünk a 3.2. vii)-ix) megjegyzésekre (a rekurzió tételre), miszerint a tételben szereplő sorozat létezik.

Bizonyítás. Mutassuk meg először, hogy $x_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$(*) \qquad x_n \geq x_{n+1} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, a pozitivitáshoz alkalmazzunk teljes indukciót: $x_0 = a > 0$, ha pedig valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $x_{n-1} > 0$, akkor az (x_n) sorozatot meghatározó rekurzív összefüggés alapján $x_n > 0$ is triviálisan igaz.

A monotonitást jelentő $(*)$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$x_n \geq \frac{1}{m} \left((m-1) x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}} \right) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

azaz átrendezés után azzal, hogy

$$(**) \qquad x_n^m \geq a \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A $(**)$ becslés igazolásához alkalmazzuk a számtani-mértani közép-tételt (ld. 1.3.5. Tétel, az ottani jelölésekkel n helyett $(m-1)$-gyel) az

$$a_0 := ... =: a_{m-2} := x_{n-1}\ ,\ a_{m-1} := \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}}$$

„változatban":

$$\prod_{k=0}^{m-1} a_k = x_{n-1}^{m-1} \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} = a \leq \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k}{m} \right)^m = \left(\frac{(m-1)x_{n-1} + a/x_{n-1}^{m-1}}{m} \right)^m = x_n^m .$$

Az (x_n) sorozat tehát (ld. 3.5.3. Tétel) konvergens, legyen $\gamma := \lim(x_n)$. A 3.7.5., 3.7.6. Tételek miatt $\gamma \geq 0$, ill. az (x_n^m) sorozat is konvergens, és

$$\lim(x_n^m) = \gamma^m \geq a \ (> 0).$$

Következésképpen $\gamma > 0$. A 3.6. vi) megjegyzés miatt az (x_{n-1}) sorozat is konvergens, és $\lim(x_{n-1}) = \gamma$. Ezért az (x_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggés és a 3.7.5. Tétel alapján

$$\gamma = \lim(x_n) = \lim \left(\frac{1}{m} \left((m-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{m} \left((m-1)\lim(x_{n-1}) + \frac{a}{\lim(x_{n-1}^{m-1})} \right) = \frac{1}{m} \left((m-1)\gamma + \frac{a}{\gamma^{m-1}} \right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel kapjuk, hogy $\gamma^m = a$. ∎

A 3.9.4. Tétel szerint tehát bármely $2 \leq m \in \mathbf{N}$ és $0 < a \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $\gamma > 0$, amelyre $\gamma^m = a$. Gondoljuk meg, hogy ez a γ szám egyértelmű is. Ha ui. $\beta > 0$ is olyan, hogy $\beta^m = a$, akkor

$$0 = a - a = \gamma^m - \beta^m = (\gamma - \beta) \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k \beta^{m-1-k}.$$

Mivel itt minden $k = 0, ..., m-1$ mellett $\gamma^k \beta^{m-1-k} > 0$, ezért

$$\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k \beta^{m-1-k} > 0.$$

Következésképpen a fentiek szerint $\gamma - \beta = 0$, azaz valóban $\gamma = \beta$.

Az előbbi megjegyzést alkalmazva tehát a következőt mondhatjuk: bármely $0 < a \in \mathbf{R}$ és $2 \le m \in \mathbf{N}$ esetén egyértelműen van olyan $\gamma > 0$ szám, amelyre $\gamma^m = a$. Ezt a γ számot az a szám *m-edik gyökének* nevezzük, és az alábbi szimbólummal jelöljük:

$$\sqrt[m]{a} := \gamma.$$

Nyilvánvaló, hogy mindez kiterjeszthető $a = 0$-ra is: $\sqrt[m]{0} := 0$. Speciálisan az $m = 2$ esetben $\sqrt[2]{a}$ helyett egyszerűen $\sqrt{a}$-t írunk (*négyzetgyök* a) (ld. 1.3.6. Tétel, ill. 1.4. xiii) megjegyzés).

3.9.5. Tétel. *Tetszőleges* $0 < a \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $a > 1$. Ekkor bármely $2 \le n \in \mathbf{N}$ „kitevővel" $\sqrt[n]{a} > 1$, azaz valamilyen $0 < h_n \in \mathbf{R}$ számmal $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$. Következésképpen a Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) alapján

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1 + h_n)^n \ge 1 + nh_n \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$0 < h_n \le \frac{a-1}{n} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.1., 3.7.4. Tételek miatt $\lim((a-1)/n) = 0$, azaz a majoráns kritériumot (ld. 3.7.1. Tétel) alkalmazva $\lim(h_n) = 0$. A 3.7.2. Tétel miatt tehát $\lim(1 + h_n) = 1$. Mindez azt jelenti, hogy a $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat is konvergens, és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

Az $a = 1$ esetben az állításunk triviális, hiszen ekkor $\left(\sqrt[n]{a}\right) = (1)$ miatt az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konstanssorozat, és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

Ha $0 < a < 1$, akkor $1/a > 1$, és az első eset alapján

$$\lim\left(\sqrt[n]{1/a}\right) = 1.$$

Ugyanakkor (könnyen ellenőrizhetően)

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}),$$

azaz a műveleti „szabályok" (ld. 3.7.5. Tétel) miatt az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat is konvergens, és

$$\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{1/a}\right)} = 1.$$

■

3.9.6. Tétel. *Az* $(\sqrt[n]{n})$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$, ekkor $\sqrt[n]{n} > 1$, azaz $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ valamilyen $0 < h_n$ számmal. Így a binomiális tételt alkalmazva

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \geq \binom{n}{0} h_n^0 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 =$$

$$1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \geq 1 + \frac{n^2}{4} h_n^2.$$

Ezért

$$0 < h_n^2 \leq \frac{4(n-1)}{n^2} < \frac{4}{n}.$$

Az előző tétel bizonyításában is idézett tételeink alapján innen az következik, hogy $\lim(h_n^2) = 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számra $0 < h_n^2 < \varepsilon^2$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). Más szóval $0 < h_n < \varepsilon$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), azaz $\lim(h_n) = 0$. Következésképpen (ld. az előző tétel bizonyításában követett analóg gondolatmenet)

$$\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = \lim(1 + h_n) = 1.$$

■

3.9.7. Tétel. *Legyen valamilyen* $0 < N, M \in \mathbf{N}$ *esetén adott az* N*-ed fokú* P *polinom és az* M*-ed fokú* Q *polinom, ill. tekintsük az*

$$x_n := \frac{P(n)}{Q(n)} \qquad (n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q)$$

sorozatot, ahol $\mathbf{N}_Q$ *jelöli a* Q *polinom gyökeinek a halmazát. Ha (ld. 2.4. xiv) megjegyzés)*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \;\;, \;\; Q(x) = \sum_{j=0}^{M} b_j x^j \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

akkor

1^o $N = M$ *esetén az* (x_n) *sorozat konvergens és* $\lim(x_n) = \dfrac{a_N}{b_N}$;

2^o $N < M$ *esetén az* (x_n) *sorozat konvergens, és* $\lim(x_n) = 0$;

3^o $N > M$ *esetén az* $(|x_n|)$ *sorozatnak van határértéke, és* $\lim(|x_n|) = +\infty$;

4^o *ha* P *és* Q *valós együtthatós, azaz* $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, ..., N)$ *és* $b_j \in \mathbf{R}$ $(j = 0, ..., M)$, *akkor* $N > M$ *esetén az* (x_n) *sorozatnak van határértéke, és*

$$\lim(x_n) = \begin{cases} +\infty & (a_N b_M > 0) \\ \\ -\infty & (a_N b_M < 0). \end{cases}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $N = M$, ekkor

$$x_n = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k n^k}{\sum_{j=0}^{N} b_j n^j} = \frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_N + \sum_{j=0}^{N-1} b_j n^{j-N}} \qquad (0 < n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q).$$

Mivel az összes itt szereplő n, ill. $k = 0, ..., N-1$ és $j = 0, ..., N-1$ indexre

$$n^{k-N} \leq \frac{1}{n} \;\; , \;\; n^{j-N} \leq \frac{1}{n},$$

ezért $\lim(n^{k-N}) = \lim(n^{j-N}) = 0$. Így a „műveleti szabályok" (ld. 3.7.5. Tétel) alapján

$$\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right) = a_N \;\; , \;\; \lim\left(b_N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k n^{k-N}\right) = b_N,$$

ill. $b_N \neq 0$ miatt

$$\lim(x_n) = \frac{\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right)}{\lim\left(b_N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k n^{k-N}\right)} = \frac{a_N}{b_N}.$$

Ha $N < M$, akkor

$$x_n = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k n^k}{\sum_{j=0}^{M} b_j n^j} = \frac{1}{n^{M-N}} \cdot \frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}} \qquad (0 < n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q).$$

Most is elmondhatjuk, hogy

$$\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right) = a_N \;\; , \;\; \lim\left(b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}\right) = b_M,$$

azaz

$$\lim\left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}}\right) = \frac{\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right)}{\lim\left(b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}\right)} = \frac{a_N}{b_M}.$$

Továbbá $N < M$ miatt $M - N \geq 1$, azaz

$$1/n^{M-N} \leq 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

így $\lim\left(1/n^{M-N}\right)=0$ és

$$\lim(x_n)=\lim\left(\frac{1}{n^{M-N}}\right)\cdot\lim\left(\frac{a_N+\sum_{k=0}^{N-1}a_kn^{k-N}}{b_M+\sum_{j=0}^{M-1}b_jn^{j-M}}\right)=0\cdot\frac{a_N}{b_M}=0.$$

Az $N>M$ esetben az előbbiek szerint

$$x_n=\frac{\sum_{k=0}^{N}a_kn^k}{\sum_{j=0}^{M}b_jn^j}=n^{N-M}\cdot\frac{a_N+\sum_{k=0}^{N-1}a_kn^{k-N}}{b_M+\sum_{j=0}^{M-1}b_jn^{j-M}}\qquad(0<n\in\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_Q),$$

ahol (triviális módon) $N-M>0$ miatt

$$\lim\left(n^{N-M}\right)=+\infty,$$

és továbbra is

$$\lim\left(\frac{a_N+\sum_{k=0}^{N-1}a_kn^{k-N}}{b_M+\sum_{j=0}^{M-1}b_jn^{j-M}}\right)=\frac{a_N}{b_M}\neq 0.$$

Következésképpen (ld. 3.8. viii) megjegyzés)

$$\lim\left(\left|\frac{a_N+\sum_{k=0}^{N-1}a_kn^{k-N}}{b_M+\sum_{j=0}^{M-1}b_jn^{j-M}}\right|\right)=\left|\frac{a_N}{b_M}\right|>0.$$

A 3.7.10. Tétel szerint tehát az $(|x_n|)$ sorozatnak van határértéke, és

$$\lim(|x_n|)=(+\infty)\cdot\left|\frac{a_N}{b_M}\right|=+\infty.$$

Ha a P,Q polinomok valós együtthatósak, akkor ismét a 3.7.10. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n)=(+\infty)\cdot\frac{a_N}{b_M}=\begin{cases}+\infty & (a_N/b_M>0)\\[2ex] -\infty & (a_N/b_M<0).\end{cases}$$

■

A következő tétel azt mutatja, hogy a természetes számok faktoriálisaiból álló sorozat bármilyen (valós vagy komplex) szám hatványai által alkotott sorozatot „nagyságrendileg meghalad" a végtelenben. Megmutatjuk ui., hogy az említett hatványok és a (kitevők) által meghatározott faktoriálisok hányadosai (abszolút értékben) bármilyen, előre megadott hibakorlát „alá" szoríthatók egy alkalmas kitevőtől kezdve.

3.9.8. Tétel. *Tetszőleges* $a \in \mathbf{K}$ *mellett az* $(a^n/n!)$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $N \in \mathbf{N}$ olyan (ld. 1.4. iv) megjegyzés), hogy $|a| < N$. Ekkor bármilyen $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{1}{N!}\cdot\frac{|a|^n}{(N+1)\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{1}{N!}\cdot\frac{|a|^n}{N^{n-N}} = \frac{N^N}{N!}\cdot\left(\frac{|a|}{N}\right)^n = \frac{N^N}{N!}\cdot q^n,$$

ahol $q := |a|/N < 1$. A 3.9.2. Tétel miatt $\lim(q^n) = 0$, így a 3.7.4. Tétel alapján $\lim(N^N q^n/N!) = 0$. Ezért (ld. 3.7.1. Tétel) $\lim(a^n/n!) = 0$ is igaz. ■

A későbbiekben az $A \subset \mathbf{R}$ halmazt *zártnak* nevezzük, ha $A = \emptyset$, vagy $A \neq \emptyset$, és tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatra $\lim(x_n) \in A$. Könnyen ellenőrizhető, hogy pl. bármely $a, b \in \mathbf{R}, a \leq b$ esetén az $[a, b]$ intervallum zárt halmaz (ez magyarázza a „zárt" intervallum elnevezést), ugyanakkor pl. a $(0, 1)$ (nyílt) intervallum nem zárt halmaz. Hasonlóan zárt maga az $\mathbf{R}$ halmaz vagy pl. bármely $a \in \mathbf{R}$ mellett az

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\} \ \ , \ \ (-\infty, a] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}$$

„félegyenesek".

Valamely $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ halmaz esetén az $f : X \to X$ függvény *kontrakció,* ha egy alkalmas $0 \leq q < 1$ számmal (*kontrakciós együtthatóval*) fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$|f(u) - f(v)| \leq q|u - v| \qquad (u, v \in X).$$

Legyen pl.

$$X := [1, +\infty) \ \ , \ \ f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in X),$$

és mutassuk meg, hogy f kontrakció. Ehhez először is jegyezzük meg (ld. 3.2. ix) megjegyzés), hogy $\mathcal{R}_f \subset X$. Továbbá tetszőleges $u, v \in X$ helyeken

$$|f(u) - f(v)| = \left|\frac{u}{2} + \frac{1}{u} - \frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right| = |u - v|\cdot\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{uv}\right| < \frac{1}{2}|u - v|.$$

Más szóval tehát (pl.) $q := 1/2$ kontrakciós együttható.

A most bevezetett kontrakciók fontos szerepet játszanak pl. a közelítő számításokban is (ld. numerikus analízis). Az alábbi tétel (ugyan egyelőre csak speciálisan az egyváltozós valós függvények körében) mintegy alapját képezi az említett alkalmazásoknak.

3.9.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ *zárt halmaz és* $f : X \to X$ *kontrakció. Ekkor:*

1^o *egyértelműen van olyan* $\alpha \in X$ *elem, amelyre* $f(\alpha) = \alpha$;

2^o *bármely* $u \in X$ *esetén az*

$$x_0 := u \;\; , \;\; x_{n+1} := f(x_n) \qquad (x \in \mathbf{N})$$

rekurzióval definiált (x_n) *sorozat konvergens, és* $\lim(x_n) = \alpha$;

3^o *az előbbi* (x_n) *sorozat rendelkezik a következő tulajdonsággal:*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $0 \leq q < 1$ *egy kontrakciós együttható.*

Bizonyítás. Mutassuk meg, hogy a tételben definiált (x_n) sorozat Cauchy-sorozat. Ehhez először lássuk be, hogy (ha kell, akkor a pillanatnyi $0^0 := 1$ megállapodással)

$$(*) \qquad |x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mindez $n = 0$ esetén triviális. Ha viszont valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellet igaz, akkor

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq q|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot q^n |x_1 - x_0| = q^{n+1}|x_1 - x_0|,$$

azaz a kívánt egyenlőtlenség $(n+1)$-re is igaz. Ezért (ld. teljes indukció) $(*)$ valóban teljesül.

Legyen most $n, m \in \mathbf{N}$ és $n < m$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség (ld. 1.4. xxi) megjegyzés) többszörös alkalmazásával $(*)$ alapján

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + ... + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \leq$$

$$\sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k |x_1 - x_0| = q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Tudjuk (ld. 3.9.2. Tétel), hogy $\lim(q^n) = 0$, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $q^n < \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Mivel $|x_1 - x_0|/(1-q) \geq 0$, ezért az is nyilván feltehető N-ről, hogy

$$q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Az (x_n) sorozat tehát valóban Cauchy-sorozat, így (ld. 3.7.8. Tétel) konvergens is. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Az X halmaz feltételezett zártsága miatt $\alpha \in X$. Bizonyítsuk be, hogy $f(\alpha) = \alpha$. Ui. tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|f(\alpha) - \alpha| \leq |f(\alpha) - f(x_n)| + |f(x_n) - \alpha| =$$

$$|f(\alpha) - f(x_n)| + |x_{n+1} - \alpha| \leq q|x_n - \alpha| + |x_{n+1} - \alpha|.$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \qquad (k \in \mathbf{N}, k > N),$$

ezért az előbbiekből az $n > N$ választással

$$|f(\alpha) - \alpha| < q\varepsilon + \varepsilon = (q+1)\varepsilon$$

következik. Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges lehetett, ezért bármely $\delta > 0$ számra

$$0 \leq |f(\alpha) - \alpha| < \delta.$$

Ez nyilván csak úgy lehetséges, hogy $|f(\alpha) - \alpha| = 0$, azaz $f(\alpha) = \alpha$.

Ha a $\beta \in X$ elemre is igaz, hogy $f(\beta) = \beta$, akkor

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

más szóval $(1-q)|\alpha - \beta| \leq 0$. Itt $1 - q > 0$, ezért $(0 \leq)\ |\alpha - \beta| \leq 0$, azaz $|\alpha - \beta| = 0$. Tehát $\alpha = \beta$.

A 3.7.5. Tétel szerint bármely $n \in \mathbf{N}$ mellett $\lim_{m\to\infty}(x_m - x_n) = \alpha - x_n$. Innen a 3.8. viii) megjegyzés alapján

$$\lim_{m\to\infty}(|x_m - x_n|) = |\alpha - x_n|$$

következik. A fenti

$$|x_m - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n)$$

becslést is figyelembe véve tehát a 3.7.6. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

■

3.9.10. Tétel. *Az* $(n!/n^n)$ *sorozat nullasorozat, azaz*

$$\lim\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen ui. $2 < n \in \mathbf{N}$ esetén $m \in \mathbf{N}, 1 < m < n,$ ekkor nyilván

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}{n^m} \cdot \frac{(m+1)\cdot \ldots \cdot n}{n^{n-m}} \leq \left(\frac{m}{n}\right)^m.$$

Ha itt $m := \left[\frac{n}{2}\right]$ (ahol $[\alpha]$ jelöli az $\alpha \in \mathbf{R}$ valós szám egész részét), akkor

$$\frac{n}{2} - 1 < \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2}$$

miatt

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2-1} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \qquad (2 < n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.2. Tétel alapján

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

így a majoráns kritérium (ld. 3.7.1. Tétel) szerint $\lim(n!/n^n) = 0$ is igaz. ■

3.9.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$ *sorozat konvergens, legyen* $\alpha := \lim(x_n)$. *Ekkor bármely* $2 \leq k \in \mathbf{N}$ *esetén a* $(\sqrt[k]{x_n})$ *sorozat is konvergens, és*

$$\lim\left(\sqrt[k]{x_n}\right) = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Bizonyítás. Ha $\alpha = 0,$ azaz $\lim(x_n) = 0,$ akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$0 \leq x_n < \varepsilon^k \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért

$$0 \leq \sqrt[k]{x_n} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\lim\left(\sqrt[k]{x_n}\right) = 0 = \sqrt[k]{0}.$

Most tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0,$ ekkor (ld. 3.7.6. Tétel) $\alpha > 0.$ A $\lim(x_n) = \alpha$ konvergencia miatt van olyan $N \in \mathbf{N},$ hogy

$$\frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\alpha}{2} < x_n < \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}, n > N$ és $a := \sqrt[k]{x_n}$, $b := \sqrt[k]{\alpha}$. Ekkor elemi összefüggések alapján

$$|a^k - b^k| = |x_n - \alpha| = |a - b| \cdot \sum_{j=1}^{k} a^{k-j} b^{j-1} \geq$$

$$|a - b| \cdot \sum_{j=1}^{k} \left(\sqrt[k]{\alpha/2}\right)^{k-j} \cdot \left(\sqrt[k]{\alpha}\right)^{j-1} = M \cdot |\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{\alpha}|,$$

ahol $M := \sum_{j=1}^{k} \left(\sqrt[k]{\alpha/2}\right)^{k-j} \cdot \left(\sqrt[k]{\alpha}\right)^{j-1} > 0$. Tehát

$$|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{\alpha}| \leq \frac{|x_n - \alpha|}{M} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mivel $\lim(|x_n - \alpha|) = 0$, ezért (ld. 3.7.1., 3.7.2. Tételek) a $(\sqrt[k]{x_n})$ sorozat konvergens, és $\lim(\sqrt[k]{x_n}) = \sqrt[k]{\alpha}$. $\blacksquare$

3.10. Megjegyzések

i) A 3.9.3. Tétel alapján a 3.5.3. Tételre hivatkozva vezessük be a matematika egyik legfontosabb állandóját:

$$e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mutassuk meg, hogy az

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

hozzárendeléssel definiált (x_n) sorozat szigorúan monoton fogyó, és $\lim(x_n) = e$. Ti. az

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

azaz azzal, hogy

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) miatt viszont

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n^2+2n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor

$$1+\frac{n+1}{n^2+2n} > 1+\frac{1}{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

mert mindez meg azzal ekvivalens, hogy

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+2n \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ami nyilván igaz.

Tehát az (x_n) sorozat monoton fogyó (és $x_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt) alulról korlátos, így (ld. 3.5.3. Tétel) konvergens. Figyelembe véve a 3.7.5., 3.9.1. Tételeket azt mondhatjuk, hogy

$$\lim(x_n) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

miatt (pl.)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{6}\right)^{7} = \frac{823543}{279936} < 3 \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Vegyük észre (ld. 3.9.3. Tétel), hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

(ami „javítása" a 3.9.3. Tétel bizonyításában szereplő $(1+1/n)^n < 4$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$ becslésnek). Ha $e_n := (1+1/n)^n$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$, akkor

$$e_1 = 2\ ,\ e_2 = \frac{9}{4} = 2.25\ ,\ e_3 = \frac{64}{27} = 2.3703703...\ ,\ e_4 = \frac{625}{256} = 2.4414062...,$$

$$e_5 = \frac{7776}{3125} = 2.48832\ ,\ e_6 = \frac{117649}{46656} = 2.5216263...,$$

$$e_7 = \frac{2097152}{823543} = 2.5464996...,$$

ahol az e „pontos" értéke

$$e = 2.718281828459...$$

ii) Ha $m := a := 2$, akkor a 3.9.4. Tételben szereplő (x_n) sorozat a következő (ld. 3.2. ix) megjegyzés):

$$x_0 = 2\ ,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez a sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \sqrt{2}$. (Vegyük észre - amiről teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk -, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $x_n \in \mathbf{Q}$.) Egyszerűen megbecsülhető a $\sqrt{2} \approx x_n$ $(n \in \mathbf{N})$ közelítés $|x_n - \sqrt{2}|$ $(n \in \mathbf{N})$ hibája is:

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{2} + 2}{2x_n}\right| = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.4. Tétel bizonyításából kiderült (ld. $(**)$), hogy $x_n \geq \sqrt{2}$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát

$$\delta_n := \frac{|x_n - \sqrt{2}|}{2\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n^2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\delta_n \leq (\delta_0)^{2^n} = \left(\frac{|x_0 - \sqrt{2}|}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n} < \frac{1}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$|x_n - \sqrt{2}| < \frac{2\sqrt{2}}{2^{2^n}} < \frac{3}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Így pl.

$$x_0 = 2\ ,\ x_1 = \frac{3}{2}\ ,\ x_2 = \frac{17}{12}\ ,\ x_3 = \frac{577}{408}, ...$$

és

$$|x_3 - \sqrt{2}| = \frac{577}{408} - \sqrt{2} < \frac{3}{2^8} = \frac{3}{256} = 0,01171875...$$

iii) Igen tanulságos a 3.9.2. Tétel alábbi bizonyítása. Legyen ehhez (az említett tételben szereplő) $q \in \mathbf{K}$, $0 < |q| < 1$, ill. $k \in \mathbf{N}$ paraméterek esetén

$$x_n := n^k |q|^n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

és mutassuk meg, hogy egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$n^k|q|^n = x_n > x_{n+1} = (n+1)^k |q|^{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Valóban, ez utóbbi egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^k > |q| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mivel (ld. 3.9.7. Tétel)

$$\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 1,$$

ezért van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy az $\varepsilon := 1 - |q|$ választással

$$|q| = 1 - \varepsilon < \left(\frac{n}{n+1}\right)^k < 1 + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért az

$$y_n := x_{N+n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat szigorúan monoton fogyó, és alulról korlátos (ui. $y_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$). Alkalmazható ezért a 3.5.3. Tétel, miszerint (y_n) konvergens. Innen az is következik (ld. 3.6. vi) megjegyzés), hogy az (x_n) sorozat is konvergens. Legyen

$$\alpha := \lim(x_n).$$

Vegyük észre, hogy

$$(*) \qquad x_{n+1} = (n+1)^k |q|^{n+1} = |q| \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot x_n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Tudjuk (ld. 3.6. vi) megjegyzés), hogy $\alpha = \lim(x_{n+1})$, ill. az előzőekből

$$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1.$$

Ezért a $(*)$ rekurzív összefüggés és a 3.7.5. Tételben megfogalmazott „műveleti szabályok" alapján

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = |q| \cdot \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \lim(x_n) = |q| \cdot \alpha.$$

Tehát $(1-|q|)\alpha = 0$, amiből $1-|q| > 0$ miatt $\alpha = 0$ adódik.

iv) Az előző megjegyzésben követett gondolatmenet alkalmazható a 3.9.5. Tétel bizonyítására is. Legyen ti. $1 < a \in \mathbf{R}$ és

$$x_n := \sqrt[n]{a} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}).$$

Lássuk be, hogy

$$\sqrt[n]{a} = x_n > x_{n+1} = \sqrt[n+1]{a} \qquad (1 < n \in \mathbf{N}).$$

Ti. mindez azzal ekvivalens, hogy

$$a^{n+1} > a^n \qquad (1 < n \in \mathbf{N}),$$

azaz azzal, hogy $a > 1$. Ezért az (x_n) sorozat szigorúan monoton fogyó (és alulról korlátos: $x_n > 1 \quad (1 < n \in \mathbf{N})$). Így (ld. 3.5.3. Tétel) (x_n) konvergens, legyen

$$\alpha := \lim(x_n).$$

Most sem nehéz rekurzív összefüggést találni az (x_n) sorozat tagjai között. Ui.

$$x_{2n}^2 = \left(\sqrt[2n]{a}\right)^2 = \sqrt[n]{a} = x_n \qquad (1 < n \in \mathbf{N}).$$

Tudjuk (ld. 3.5.2. Tétel), hogy az (x_{2n}) részsorozat is konvergens, és

$$\alpha = \lim(x_{2n}).$$

Ezért (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\alpha^2 = \lim(x_{2n}^2) = \lim(x_n) = \alpha.$$

Az $x_n > 1 \ (1 < n \in \mathbf{N})$ becslés és a 3.7.6. Tétel miatt $\alpha \ge 1$, ezért az előbb kapott $\alpha^2 = \alpha$ egyenlőségből („egyenletből") $\alpha = 1$ következik.

Ha $0 < a < 1$, akkor $1/a > 1$, ezért az előzőekből

$$1 = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right),$$

azaz a 3.7.5. Tétel miatt

$$\lim(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)} = 1.$$

Mivel $a = 1$ esetén $(\sqrt[n]{a}) = (1)$, ezért ekkor $\lim(\sqrt[n]{a}) = 1$ triviálisan igaz.

v) Mutassuk meg, hogy a iii), iv) megjegyzésekbeli bizonyítási ötlet alkalmazható a 3.9.6. Tétel bizonyítására is. Valóban, legyen most

$$x_n := \sqrt[n]{n} \qquad (2 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az

$$\sqrt[n]{n} = x_n > x_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} \qquad (4 \leq n \in \mathbf{N})$$

monotonitási kritérium azzal ekvivalens, hogy

$$n^{n+1} > (n+1)^n \qquad (4 \leq n \in \mathbf{N}),$$

azaz azzal, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n \qquad (4 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.3. Tétel bizonyításában ugyanakkor láttuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

amiből a kívánt becslés nyilván következik. Tehát az (x_n) sorozat konvergens, legyen

$$\alpha := \lim(x_n).$$

Vegyük észre, hogy most

$$x_{2n}^2 = \left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2 = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{2} \cdot x_n \qquad (1 < n \in \mathbf{N}),$$

azaz (a fentiekhez hasonlóan) $\alpha = \lim(x_{2n})$, és (ld. 3.9.5., 3.9.6. Tételek)

$$\alpha^2 = \lim(x_{2n}^2) = \lim(\sqrt[n]{2} \cdot x_n) = \lim(\sqrt[n]{2}) \cdot \lim(x_n) = \alpha.$$

Mivel $x_n > 1$ $(1 < n \in \mathbf{N})$ ezért $\alpha \geq 1$, azaz az $\alpha^2 = \alpha$ „egyenletből" $\alpha = 1$ következik.

vi) Legyen valamilyen $a \in \mathbf{K}$ esetén

$$x_n := \frac{|a|^n}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|a|}{n+1} \cdot \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{n+1} \cdot x_n =: y_n x_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol tehát $y_n := |a|/(n+1)$ $(n \in \mathbf{N})$. Tudjuk (ld. 3.9.1., 3.7.4., 3.7.1. Tételek), hogy $\lim(y_n) = 0$. Ezért egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ mellett

$$0 \le y_n < 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M),$$

következésképpen

$$0 \le x_{n+1} \le x_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

A 3.5.3. Tétel miatt ezért az (x_n) sorozat konvergens, legyen $\gamma := \lim(x_n)$. Így $\lim(x_{n+1}) = \gamma$ is igaz, azaz (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\gamma = \lim(x_{n+1}) = \lim(y_n x_n) = \lim(y_n)\cdot \lim(x_n) = 0\cdot \gamma = 0$$

(ld. 3.9.8. Tétel).

vii) A fontosságára való tekintettel mutassuk be a 3.9.5. Tétel alábbi, a számtani-mértani közép tételét (ld. 1.3.5. Tétel) felhasználó bizonyítását is. Ehhez feltehetjük (ld. iv) megjegyzés), hogy $a > 1$. Legyen ekkor valamilyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ mellett

$$a_1 := a_2 := ... := a_{n-1} := 1 \ , \ \ a_n := a,$$

és alkalmazzuk az 1.3.5. Tételt:

$$1 < \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{n-1+a}{n} = 1 + \frac{a-1}{n} =: x_n.$$

Mivel $\lim((a-1)/n) = 0$, ezért $\lim(x_n) = 1$. A 3.7.7. Tétel alapján tehát azt kapjuk, hogy $\lim(\sqrt[n]{a}) = 1$.

viii) Az előző megjegyzés alapötlete alkalmazható a 3.9.6. Tétel bizonyítására is. Ti. bármely $2 < n \in \mathbf{N}$ esetén legyen most

$$a_1 := a_2 := ... := a_{n-2} := 1 \ , \ \ a_{n-1} := a_n := \sqrt{n}.$$

Ekkor az 1.3.5. Tétel szerint

$$1 < \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} =$$

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} =: y_n.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy $\lim(2/\sqrt{n}) = 0$, ezért az előző megjegyzéshez hasonlóan $\lim(y_n) = 1$, azaz (ld. 3.7.7. Tétel) valóban $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$.

ix) A 3.9.9. Tételben szereplő α-t (érthető okokból) a tételbeli f függvény *fixpontjának*, magát a 3.9.9. Tételt pedig *fixpont-tételnek* nevezzük. Az α fixpont tehát (formálisan szólva) az

$$f(x) = x \qquad (x \in X)$$

„egyenletnek" a megoldása. Éppen ezért a fixpont-tétel a közelítő számítások, módszerek (ld. *numerikus analízis*) egyik legfontosabb eszköze. Tekintsük pl. a 3.9.9. Tétel megfogalmazása előtti „felvezetésben" szereplő

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \geq 1)$$

kontrakciót. Ekkor az előbbi $f(x) = x$ „egyenlet" a következő alakú:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \qquad (x \geq 1).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ennek az „egyenletnek" egyetlen α „gyöke" van az $[1, +\infty)$ halmazban, nevezetesen $\alpha = \sqrt{2}$. Ha a fixpont-tételt az $u := 2$ „kezdő értékkel" alkalmazzuk, akkor a fenti ii) megjegyzésben már vizsgált

$$x_0 = 2\ ,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatot kapjuk. Ezért a 3.9.9. Tétel szerint (is) ez a sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \sqrt{2}$. Továbbá (a $q = 1/2$ kontrakciós együtthatóval)

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2}|x_0 - x_1| = \frac{|2 - 3/2|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Emlékeztetünk arra, hogy ii)-ben ennél „sokkal jobb" becslés adódott:

$$|x_n - \sqrt{2}| < \frac{3}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez nem meglepő, hiszen az „általános" 3.9.9. Tételbeli 3^o hibabecsléssel szemben egy adott feladatban szereplő f függvény speciális tulajdonságait kihasználva könnyen juthatunk esetleg „jobb" hibabecsléshez.

x) A fentiek alkalmazására tekintsük az alábbi feladatot. Adott egy egységsugarú K kör és a kerületén egy P pont. Mekkora legyen annak a P középpontú körnek a sugara, amely a K-t két egyenlő területű részre vágja? Jelöljük ehhez α-val a K középpontján és a P-n átmenő egyenes, valamint a P-n és a két kör kerületének egy közös pontján átmenő egyenes által bezárt szöget. Ekkor a keresett sugár $2\cos\alpha$, azaz elegendő α-t meghatározni. Ez egyszerű számolás után a következő egyenlet megoldását jelenti:

$$\alpha = 2\alpha\cos^2\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} + \frac{\pi}{4},$$

ami viszont meglehetősen reménytelen feladat. Ugyanakkor a gyakorlatban nem is a „pontos" megoldásra van szükségünk, hanem annak egy (bizonyos előre megadott hibakorlátnál jobb) közelítésére. Belátható, hogy pl. a 3.9.9. Tételbeli „fixpont-algoritmus" alapján definiált

$$x_0 := 1\ ,\ x_{n+1} := 2x_n \cos^2 x_n - \frac{\sin(2x_n)}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat konvergál az α-hoz. Bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van tehát olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy a $2\cos(x_N)$ sugarú kör által a K-ból kimetszett két rész területére (t_1-re és t_2-re) $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ igaz. Más szóval az $\alpha \approx x_N$ közelítés a feladatnak a gyakorlat számára való „megoldását" jelentheti.

xi) A későbbiekben messzemenően általánosítjuk a 3.9.9. Tételt, és kapjuk majd az absztrakt *Banach-Tyihonov-Cacciopoli-féle fixpont-tételt.*

xii) A 3.9.2. Tétel 4^o állítására hivatkozva legyen $1 \neq q \in \mathbf{C}$ és $|q| = 1$. Írjuk fel a q komplex számot trigonometrikus alakban (ld. 1.4. xxi) megjegyzés):

$$q = \cos\alpha + \imath \sin\alpha,$$

ahol $\alpha \in (0, 2\pi)$. Ekkor

$$q^n = \cos(n\alpha) + \imath \sin(n\alpha) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.5.5. Tétel miatt tehát azt mondhatjuk, hogy bármely $\alpha \in (0, 2\pi)$ esetén a $(\cos(n\alpha))$, $(\sin(n\alpha))$ sorozatok közül legalább az egyik divergens.

xiii) Az 1.4. x) megjegyzésben utaltunk arra, hogy ha $\delta > 0$, akkor egyetlen $k_0 \in \mathbf{N}$ esetén sem teljesülhet minden $k_0 < k \in \mathbf{N}$ természetes számra az

$$(1+\delta)^{2k+1} \leq 2k(2+\delta) + 1 + \delta$$

egyenlőtlenség. Valóban, ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy a $\sigma := (1+\delta)^2$ jelöléssel

$$(*) \qquad 1 \leq \frac{4+2\delta}{1+\delta} k \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^k + \left(\frac{1}{\sigma}\right)^k \qquad (k_0 < k \in \mathbf{N}).$$

Mivel $0 < 1/\sigma < 1$, ezért a 3.9.2. Tétel miatt

$$\frac{4+2\delta}{1+\delta} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^k + \left(\frac{1}{\sigma}\right)^k \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

ami nyilván ellentmond $(*)$-nak.

xiv) Legyen (ld. 3.9.10. Tétel)

$$x_n := \frac{n!}{n^n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az előző megjegyzésekben vázolt bizonyítási „technikát" alkalmazva először is mutassuk meg, hogy

$$x_{n+1} < x_n \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ui. ez azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} < \frac{n!}{n^n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

tehát azzal, hogy

$$(*) \qquad 1 < \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 3.9.3. Tétel) az

$$\mathbf{N} \ni n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat szigorúan monoton növő, ezért

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

amiből $(*)$ következik. Tehát a nyilvánvaló $x_n > 0$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ becslés miatt az (x_n) sorozat korlátos is, ezért (ld. 3.5.3. Tétel) konvergens, legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Ugyanakkor

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

A 3.7.5., 3.9.3. Tételek alkalmazásával

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = \lim(x_n) \cdot \frac{1}{\lim(1+1/n)^n} = \frac{\alpha}{e},$$

tehát $\alpha(1 - 1/e) = 0$. Innen már $e = 2.71...$ (ld. i)) miatt $\alpha = 0$ következik.

4. fejezet

Végtelen sorok

4.1. A végtelen sor fogalma, alaptulajdonságok

Ahogyan korábban már említettük, a sorozatok központi szerepet játszanak nem csupán az analízis, ill. a matematika, hanem szinte az összes tudományágban. Számos feladat kapcsán, gyakran igen természetes módon „jönnek elő" a sorozatok az illető feladathoz kapcsolódó matematikai modell részeként. Ennek során sűrűn előfordul az is, hogy valójában a modell kezelésekor nem magával a szóban forgó sorozattal, hanem az abból valamilyen standard „recept" alapján elkészített másik sorozattal kell dolgoznunk. A továbbiakban egy ilyen speciális „recept" szerint adódó sorozatokkal, az ún. végtelen sorokkal foglalkozunk.

Legyen tehát adott az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ számsorozat, és jelöljük $\sum x$-szel, vagy $\sum(x_n)$-nel azt az (S_n) sorozatot, amelyre

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$\sum x := \sum(x_n) := (S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right).$$

A $\sum(x_n)$ sorozatot (az (x_n) sorozat által meghatározott (generált)) *végtelen sornak* (időnként röviden *sornak*) nevezzük. A sorozatokra eddig megszokott, ill. használt terminológia mellett - kihangsúlyozandó a végtelen sor, mint sorozat speciális jellegét - az alábbi elnevezéseket fogjuk alkalmazni: S_n $(n \in \mathbf{N})$ a $\sum x$ végtelen sor *n-edik részletösszege,* x_n $(n \in \mathbf{N})$ a $\sum x$ végtelen sor *n-edik tagja.*

A 3.2. ii) megjegyzéssel összhangban, ha valamilyen $N \in \mathbf{Z}$ mellett a szóban forgó (x_n) sorozat értelmezési tartománya az

$$\{n \in \mathbf{Z} : n \geq N\}$$

halmaz, akkor az

$$S_n := \sum_{k=N}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{Z}, n \geq N)$$

megállapodással élünk. Így pl. az $x = (1/n)$ sorozat esetén $N = 1$, azaz

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbf{N}, n \geq 1).$$

Már az elemi matematikában is használatos pl. (valamilyen $q \in \mathbf{K}$ esetén) a (q-kvóciensű) *mértani sor* fogalma, ami nem más, mint a $\sum(q^n)$ végtelen sor. Ennek a sornak a generáló sorozata a (q^n) *mértani sorozat.* Emlékeztetünk arra, hogy az utóbbi esetben

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & (q = 1) \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\sum(1/n)$ végtelen sort *harmonikus sornak,* a $\sum(1/n^2)$ végtelen sort pedig *szuperharmonikus sornak* nevezzük. (Az utóbbi két esetben az S_n $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegeknek a mértani soréhoz hasonló „zárt" alakban való kiszámítása nem lehetséges.)

A fentiek szerint bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ számsorozat esetén az általa generált $\sum(x_n)$ végtelen sor is egy számsorozat. Van értelme ezért annak a kérdésnek, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens-e? Ha igen, akkor a $\lim \sum(x_n)$ határértékre a következő jelölést fogjuk használni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim \sum(x_n).$$

Ha tehát (továbbra is) S_n-nel $(n \in \mathbf{N})$ jelöljük a $\sum(x_n)$ sorozat n-edik részletösszegét: $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim(S_n)$$

a $\sum(x_n)$ végtelen sor *összege.* (Felhívjuk a figyelmet azonban arra, hogy az utóbbi elnevezésben (és jelölésben) az „összeg" szó puszta elnevezés, nem kíván semmilyen „összeadás" tartalommal bírni.)

Pl. a fenti $\sum(q^n)$ mértani sor esetén

$$\sum(q^n) = \begin{cases} (n+1) & (q = 1) \\ \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) & (q \neq 1). \end{cases}$$

Innen világos, hogy ez a végtelen sor divergens, ha $q = 1$, ill. $q \neq 1$ esetén a konvergenciája

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}q^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt könnyen láthatóan a (q^n) sorozat konvergenciájával ekvivalens. A 3.9.2. Tétel szerint tehát a $\sum(q^n)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és az utóbbi esetben

$$\lim \sum(q^n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}.$$

Az előbbi példából többek között az derült ki, hogy ha a $\sum(q^n)$ mértani sor konvergens, akkor $\lim(q^n) = 0$. A következő tétel azt mutatja, hogy ez nem „véletlen".

4.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens. Ekkor (x_n) nulla-sorozat, azaz konvergens és $\lim(x_n) = 0$.*

Bizonyítás. Jelöljük S_n-nel $(n \in \mathbf{N})$ a szóban forgó végtelen sor n-edik részletösszegét:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A feltételünk szerint tehát az (S_n) sorozat konvergens, következésképpen Cauchy-sorozat (ld. 3.7.8. Tétel). Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Speciálisan az $n \in \mathbf{N}, n > N+1, m := n-1$ választással

$$|S_n - S_{n-1}| = |x_n| < \varepsilon,$$

ami pontosan azt jelenti, amit állítottunk. ■

Az előbbi bizonyításban is idézett 3.7.8. Tétel alapján valamilyen $\sum(x_n)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha teljesül rá a Cauchy-kritérium: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Itt nyilván feltehető, hogy $m > n$, amikor is

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right|.$$

Igaz tehát a

4.1.2. Tétel. *A* $\sum(x_n)$ *végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $N \in \mathbf{N}$, *hogy*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

A most megfogalmazott tétel alapján egyszerűen „elintézhető" a harmonikus és a szuperharmonikus sor konvergenciája.

4.1.3. Tétel. *A* $\sum(1/n)$ *harmonikus sor divergens, a* $\sum(1/n^2)$ *szuperharmonikus sor konvergens.*

Bizonyítás. Mutassuk meg először, hogy a harmonikus sorra nem teljesül a 4.1.2. Tételbeli Cauchy-feltétel. Ha ui. $2 \le n \in \mathbf{N}$, akkor az $m := 2n$ választással

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ezért $0 < \varepsilon < 1/2$ esetén bármely $N \in \mathbf{N}$ mellett az $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ indexekre

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \varepsilon.$$

Tehát (ld. 4.1.2. Tétel) a harmonikus sor divergens.

A szuperharmonikus sorra ugyanakkor tetszőleges $1 \le N \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} =$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Következésképpen, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és az $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexre $N > 1/\varepsilon$ (ld. 1.4. iv) megjegyzés), azaz $1/N < \varepsilon$, akkor a szuperharmonikus sorra teljesül a Cauchy-kritérium:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Ezért a 4.1.2. Tétel szerint a $\sum(1/n^2)$ sor konvergens. ■

Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$, ekkor a $\sum(x_n)$ végtelen sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum(|x_n|)$ végtelen sor konvergens. Mivel ez utóbbi nyilván monoton növekedő:

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \le \sum_{k=0}^{n+1} |x_k| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens volta azzal ekvivalens (ld. ld. 3.5.3., 3.5.4. Tételek), hogy

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |x_k| : n \in \mathbf{N} \right\} < +\infty.$$

Ez utóbbi feltétel teljesülését röviden úgy írjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < +\infty.$$

Ha viszont a $\sum(x_n)$ végtelen sor nem abszolút konvergens, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| := \lim \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k| \right) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |x_k| : n \in \mathbf{N} \right\} = +\infty.$$

Lássuk be, hogy ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor konvergens is. Valóban, tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}$, $m > n$ indexekre

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| \le \sum_{k=n}^{m} |x_k|,$$

ahol bármely $\varepsilon > 0$ számra egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\sum_{k=n}^{m} |x_k| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Így

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N),$$

más szóval a $\sum(x_n)$ végtelen sor Cauchy-sor(ozat), azaz (ld. 3.7.8. Tétel) konvergens.

Világos, hogy az előbbi abszolút konvergens $\sum(x_n)$ végtelen sorra

$$\left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \le \sum_{k=0}^{n} |x_k| \le \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m} |x_k| : m \in \mathbf{N} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért (ld. 3.8. viii) megjegyzés)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right| = \lim \left(\left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \right) \le \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|.$$

4.1.4. Tétel (összehasonlító kritérium). *Tegyük fel, hogy az* (x_n), $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozatokra az alábbiak teljesülnek*:

$$|x_n| \leq |y_n| \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor:

i) *ha a* $\sum(y_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens, akkor a* $\sum(x_n)$ *sor is abszolút konvergens*;

ii) *ha a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor nem abszolút konvergens, akkor a* $\sum(y_n)$ *sor sem abszolút konvergens.*

Bizonyítás. A feltétel szerint egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x_n| \leq |y_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ha a $\sum(y_n)$ sor abszolút konvergens, akkor

$$K := \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |y_k| : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ezért a

$$q := \max\{|x_0|, ..., |x_N|\}$$

jelöléssel

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} q \leq (N+1)q & (n \leq N) \\ \sum_{k=0}^{N} |x_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |y_k| \leq (N+1)q + K & (n > N) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |x_k| : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor nem abszolút konvergens, akkor a $\sum(y_n)$ végtelen sor sem lehet abszolút konvergens. Ui. ha az lenne, akkor i) szerint $\sum(x_n)$ abszolút konvergens lenne. ■

Nyilvánvaló, hogy egy $(x_n) : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$ sorozat esetén a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergenciája ugyanazt jelenti, mint az abszolút konvergeciája. Ha tehát a 4.1.4. Tételben szereplő $(x_n), (y_n)$ sorozatok mindketten nem-negatív valós számokból álló sorozatok, akkor az összehasonlító kritérium a következőképpen szól: *ha* $x_n, y_n \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, $0 \leq x_n \leq y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), *és a* $\sum(y_n)$ *végtelen sor konvergens, akkor a* $\sum(x_n)$ *is az, ha viszont a* $\sum(x_n)$ *divergens, akkor a* $\sum(y_n)$ *is divergens.*

Ugyanakkor később látni fogjuk, hogy pl. a $\sum((-1)^n/n)$ végtelen sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

4.1.5. Tétel. *Mutassuk meg, hogy*

i) *a* $\sum(1/n!)$ *sor konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e;$$

ii) *bármely* $0 < n \in \mathbf{N}$ *esetén van olyan* $\theta_n \in (0,1)$ *szám, amellyel*

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n\cdot n!}\,;$$

iii) *az* e *szám irracionális, azaz* $e \notin \mathbf{Q}$.

Bizonyítás. Elöljáróban emlékeztetünk az e szám definíciójára (ld. 3.10. i) megjegyzés):

$$e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Legyen $n \in \mathbf{N}, n > 2,$ ekkor a binomiális tétel alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$2 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ha tehát $2 \leq m < n,$ akkor nyilván

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} > 2 + \sum_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!},$$

ahol (ld. 3.7.5., 3.9.1. Tételek) minden $k = 2, ..., m$ esetén

$$\lim \left(\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right) = 1,$$

ill.

$$\lim \left(2 + \sum_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

A fentiek szerint azt kaptuk tehát, hogy (ld. 3.7.6. Tétel)

$$\lim \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \qquad (m \in \mathbf{N}, m \geq 2).$$

Ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} : m \in \mathbf{N}\right\} \le e$$

is igaz, más szóval

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

következik.

Az eddigiek alapján azt mondhatjuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \prod_{j=n+2}^{k} \frac{1}{j}\right) \le$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \prod_{j=n+2}^{k} \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-(n+1)} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{k} = \frac{n+2}{(n+1)\cdot (n+1)!}.$$

Így

$$0 < \theta_n := n\cdot n! \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \le \frac{n\cdot (n+2)\cdot n!}{(n+1)\cdot (n+1)!} =$$

$$\frac{n\cdot (n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1.$$

Ezzel a tétel ii) állítását is beláttuk. A iii) bizonyításához tegyük fel indirekt módon, hogy $e \in \mathbf{Q}$. Megadhatók ekkor olyan $0 < m, n \in \mathbf{N}$ számok, amelyekkel $e = \frac{m}{n}$. Ezért ii) szerint egy alkalmas $0 < \theta_n < 1$ számmal

$$\frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

Innen

$$\theta_n = \frac{m\cdot n\cdot n!}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot n!}{k!} = m\cdot n! - n\cdot \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=k+1}^{n} j \in \mathbf{Z},$$

azaz $\theta_n \in \mathbf{Z}$ következik. Ez viszont nem lehetséges, hiszen ii) alapján $0 < \theta_n < 1$. ■

4.2. Megjegyzések

i) Jelöljük $\mathcal{A}$-val az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatok halmazát, és legyen $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ az alábbi leképezés:

$$\sigma(x) := \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{A}).$$

Világos, hogy $\sum(x_n) = \sigma(x)$ $(x = (x_n) \in \mathcal{A})$. Gondoljuk meg, hogy a fenti σ leképezés egy bijekció (ld. 2.4. v) megjegyzés). Valóban, ha

$$x = (x_n)\ ,\ y = (y_n) \in \mathcal{A},\ x \neq y,$$

akkor valamilyen $m \in \mathbf{N}$ indexre $x_m \neq y_m$. Legyen egyúttal m a legkisebb ilyen index, azaz $x_k = y_k$ $(k = 0, ..., m-1)$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{m} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} x_k + x_m = \sum_{k=0}^{m-1} y_k + x_m \neq \sum_{k=0}^{m-1} y_k + y_m = \sum_{k=0}^{m} y_k.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sigma(x) \neq \sigma(y)$, azaz, hogy σ injektív. A σ szürjektivitásához lássuk be, hogy tetszőleges $z = (z_n) \in \mathcal{A}$ sorozathoz van olyan $x = (x_n) \in \mathcal{A}$, amellyel $\sigma(x) = z$. Ti. legyen

$$x_0 := z_0\ \ ,\ \ x_k := z_k - z_{k-1} \quad (1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tehát $x_0 = z_0$, és bármely $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = z_0 + \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = z_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_{k-1} = z_n,$$

azaz $\sigma(x) = z$.

ii) Tegyük fel, hogy az $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatok tagjai „majdnem mindenütt megegyeznek":

$$x_n = y_n \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(x_n), \sum(y_n)$ végtelen sorok *ekvikonvergensek,* azaz a $\sum(x_n)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(y_n)$ végtelen sor konvergens. Valóban, egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$x_n = y_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért - feltételezve pl. a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens voltát - bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy (ld. 3.7.8. Tétel)

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > M).$$

Legyen itt $n, m \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $m > n > \max\{M, N\}$, ekkor

$$\left|\sum_{k=n}^{m} y_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon,$$

így a $\sum(y_n)$ végtelen sor is eleget tesz a Cauchy-kritériumnak, azaz konvergens.

iii) Tekintsük az $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatok által generált konvergens végtelen sorokat. Ekkor bármely $c \in \mathbf{K}$ esetén a $\sum(x_n + cy_n)$ sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + cy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + c\sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Legyen ui.

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \quad , \quad R_n := \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint az $(S_n), (R_n)$ sorozatok konvergensek, és

$$\lim(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad , \quad \lim(R_n) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Ezért (ld. 3.7.5. Tétel) az $(S_n + cR_n)$ sorozat is konvergens, és

$$\lim(S_n + cR_n) = \lim(S_n) + c\lim(R_n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + c\sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

Mivel

$$S_n + cR_n = \sum_{k=0}^{n}(x_k + cy_k) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért az $(S_n + cR_n)$ sorozat konvergenciája azt jelenti, hogy a $\sum(x_n + cy_n)$ végtelen sor konvergens. Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + cy_n) = \lim\left(\sum_{k=0}^{n}(x_k + cy_k)\right) = \lim(S_n + cR_n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + c\sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

iv) A harmonikus sor divergenciájához elég megmutatni azt (ld. 3.5.4. Tétel), hogy nem korlátos (sorozat). Ti. bármely $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{j} \ge \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{2^{j+1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{n}{2}.$$

Ezért a harmonikus sor divergens.

v) Legyen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy az $(S_n) = \sum(1/n^2)$ sorozat szigorúan monoton növő. Így (ld. 3.5.3. Tétel) a szuperharmonikus sor konvergenciájához elegendő az, hogy az (S_n) sorozat (felülről) korlátos. Ha viszont $2 \leq n \in \mathbf{N}$, akkor

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

vi) A harmonikus sorról szóló 4.1.3. Tétel azt mutatja, hogy általában egy $\sum(x_n)$ végtelen sor esetén a 4.1.1. Tételbeli $\lim(x_n) = 0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges a szóban forgó sor konvergenciájához.

vii) Lássuk be a 4.1.4. Tétel ii) állítását „direktben" is. A $\sum(|x_n|)$ végtelen sor feltételezett divergenciája miatt ui.

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |x_k| : m \in \mathbf{N}\right\} = +\infty.$$

Ezért (a 4.1.4. Tétel bizonyításában szereplő N-nel) bármely $L \in \mathbf{R}$ esetén van olyan $M \in \mathbf{N}, M > N$ hogy

$$\sum_{k=0}^{M} |x_k| > L + \sum_{k=0}^{N} |x_k| - \sum_{k=0}^{N} |y_k|.$$

A feltételeink szerint tehát

$$\sum_{k=0}^{M} |y_k| = \sum_{k=0}^{N} |y_k| + \sum_{k=N+1}^{M} |y_k| \geq \sum_{k=0}^{N} |y_k| + \sum_{k=N+1}^{M} |x_k| =$$

$$\sum_{k=0}^{N} |y_k| + \sum_{k=0}^{M} |x_k| - \sum_{k=0}^{N} |x_k| > L.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |y_k| : m \in \mathbf{N}\right\} = +\infty,$$

más szóval azt, hogy a $\sum(|y_n|)$ végtelen sor divergens.

viii) Valamely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ számsorozat és $N \in \mathbf{N}$ természetes szám esetén legyen

$$S_n^{(N)} := \sum_{k=N}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}, n \geq N),$$

és (ld. 3.2. ii) megjegyzés) tekintsük az $(S_n^{(N)})$ sorozatot. Állapodjunk meg abban, hogy ha az $(S_n^{(N)})$ sorozat konvergens, akkor legyen

$$\sum_{k=N}^{\infty} x_k := \lim (S_n^{(N)}).$$

Ekkor $\sum_{k=N}^{\infty} x_k$-t a $\sum(x_n)$ végtelen sor N*-edik maradékszeletének* nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy a $\sum(x_n)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $N \in \mathbf{N}$ esetén létezik az N-edik maradékszelete, és

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} x_k = 0.$$

Legyen ui.

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy

$$(*) \qquad S_n = S_{N-1} + S_n^{(N)} \qquad (n, N \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ha tehát a $\sum(x_n)$ sor konvergens, azaz az (S_n) sorozat konvergens, akkor

$$S_n^{(N)} = S_n - S_{N-1} \qquad (n, N \in \mathbf{N}, n > N)$$

miatt az $(S_n^{(N)})$ sorozat is konvergens, azaz létezik az N-edik maradékszelet. Fordítva, ha az utóbbi létezik, azaz az $(S_n^{(N)})$ sorozat konvergens, akkor $(*)$ alapján az (S_n) sorozat is konvergens. A $(*)$ egyenlőségből az is kiderül, hogy (ha a $\sum(x_n)$ sor konvergens)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim(S_n) = S_{N-1} + \lim (S_n^{(N)}) = S_{N-1} + \sum_{k=N}^{\infty} x_k.$$

Ugyanakkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{N\to\infty} S_{N-1}$$

miatt létezik a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k - \lim_{N\to\infty} S_{N-1} = 0$$

határérték.

ix) Ha $(x_n) : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$, akkor (kibővített értelemben (ld. 3.7.)) a $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$ részletösszeg-sorozatnak mindig létezik határértéke. Ha ez a részletösszeg-sorozat felülről nem korlátos, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) = +\infty.$$

Hasonló a helyzet akkor, ha $(y_n) : \mathbf{N} \to (-\infty, 0]$: a $\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)$ részletösszeg-sorozatnak van határértéke. Ha ez a részletösszeg-sorozat alulról nem korlátos, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim \left(\sum_{k=0}^{n} y_k \right) = -\infty.$$

x) Legyen most $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$, és „bontsuk fel" az (x_n) sorozatot a valós és a képzetes részére:

$$x_n = u_n + \imath v_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol tehát $u_n := \operatorname{Re} x_n$, $v_n := \operatorname{Im} x_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \imath \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\sum(x_n) = (S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) + \imath \left(\sum_{k=0}^{n} v_k \right) = \sum(u_n) + \imath \sum(v_n).$$

A 3.5.5. Tétel szerint ezért a következőt mondhatjuk: a $\sum(x_n)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ sorok konvergensek. Az utóbbi esetben továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \imath \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Az is rögtön adódik, hogy a $\sum(x_n)$ sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ sorok is abszolút konvergensek. Ha ui. a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, akkor

$$|u_n|,\ |v_n| \le |x_n| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt (pl.)

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |u_n| : n \in \mathbf{N} \right\} \le \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |x_n| : n \in \mathbf{N} \right\} < +\infty,$$

így a $\sum(u_n)$ sor (és ugyanígy a $\sum(v_n)$ sor is) abszolút konvergens. Fordítva, ha a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ sorok abszolút konvergensek, akkor

$$|x_n| \le |u_n| + |v_n| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

alapján

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|x_n| : n\in\mathbf{N}\right\}\leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n}(|u_n|+|v_n|) : n\in\mathbf{N}\right\}\leq$$

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|u_n| : n\in\mathbf{N}\right\}+\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|v_n| : n\in\mathbf{N}\right\}<+\infty.$$

Tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

4.3. Konvergenciakritériumok

Láttuk, hogy ha az $(x_n):\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ sorozatra $x_n\geq 0 \quad (n\in\mathbf{N})$ teljesül, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergenciája egyszerűen ellenőrizhető a részletösszegek korlátossága révén. Bonyolultabb a helyzet, ha az (x_n) sorozat nem rendelkezik az előbbi előjel-tulajdonsággal. Számos „konvergencia-kritérium" létezik, ezek közül tárgyalunk a továbbiakban néhányat.

4.3.1. Tétel (Cauchy-féle gyök-kritérium). *Tegyük fel, hogy az $(x_n):\mathbf{N}\to\mathbf{K}$ sorozatra létezik az alábbi határérték:*

$$\delta:=\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right).$$

Ekkor:

1^o *ha $\delta<1$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens;*

2^o *ha $\delta>1$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor divergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\delta<1$, és legyen $\delta<q<1$. Ekkor egy alkalmas $N\in\mathbf{N}$ indexszel

$$2\delta-q<\sqrt[n]{|x_n|}<q \qquad (n\in\mathbf{N}, n>N),$$

azaz

$$|x_n|<q^n \qquad (n\in\mathbf{N}, n>N).$$

Következésképpen minden $n\in\mathbf{N}, n>N$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k|\leq\sum_{k=0}^{N}|x_k|+\sum_{k=N+1}^{n}q^k<\sum_{k=0}^{N}|x_k|+\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\sum_{k=0}^{N}|x_k|+\frac{1}{1-q},$$

azaz a $(\sum_{k=0}^{n}|x_k|)$ sorozat korlátos, így (a tagjai nem-negatívok lévén) konvergens. Tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

Ha $\delta > 1,$ akkor legyen $1 < q < \delta.$ Van tehát olyan $M \in \mathbf{N},$ amellyel

$$2\delta - q > \sqrt[n]{|x_n|} > q > 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Világos innen, hogy $|x_n| \geq 1 \quad (n \in \mathbf{N},\, n > M),$ azaz az (x_n) sorozat nem nullasorozat. Ezért (ld. 4.1.1. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor divergens. ■

4.3.2. Tétel (D'Alembert-féle hányados-kritérium). *Tekintsük az* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} \setminus \{0\}$ *sorozatot, és tételezzük fel, hogy létezik az alábbi határérték:*

$$\gamma := \lim \left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \right).$$

Ekkor:

1º *ha* $\gamma < 1,$ *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens;*

2º *ha* $\gamma > 1,$ *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor divergens.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk először a $\gamma < 1$ esetet. Legyen $\gamma < q < 1,$ ekkor van olyan $N \in \mathbf{N},$ amellyel

$$2\gamma - q < \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz

$$|x_{n+1}| \leq q|x_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Innen (pl. teljes indukcióval) könnyen ellenőrizhető, hogy

$$|x_n| \leq |x_{N+1}| q^{n-N-1} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért tetszőleges $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |x_k| + |x_{N+1}| \sum_{k=N+1}^{n} q^{k-N-1} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k| + |x_{N+1}| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{N} |x_k| + \frac{|x_{N+1}|}{1-q},$$

azaz a $(\sum_{k=0}^{n} |x_k|)$ sorozat korlátos. Így (az előző tételbeli bizonyítással analóg módon) konvergens. Tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

Ha $\gamma > 1,$ akkor legyen $1 < q < \delta.$ Egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ mellett tehát

$$2\delta - q > \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > q > 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Más szóval

$$|x_{n+1}| > |x_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Innen nyilvánvaló már, hogy az (x_n) sorozat nem nullasorozat. Ezért (ld. 4.1.1. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor divergens. ■

Valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$ sorozat esetén a $\sum((-1)^n x_n)$ végtelen sort *váltakozó előjelű sornak* (vagy rövidebben *Leibniz-sornak*) nevezzük. Ezek konvergencia-kérdéseivel foglalkozunk a következő tételben.

4.3.3. Tétel. *Az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatról tegyük fel, hogy*

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum((-1)^n x_n)$ Leibniz-sor konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy az (x_n) sorozat nullasorozat legyen.

Bizonyítás. A $\lim(x_n) = 0$ feltétel szükségessége szinte nyilvánvaló. Ui., ha a szóban forgó Leibniz-sor konvergens, akkor (ld. 4.1.1. Tétel)

$$\lim((-1)^n x_n) = 0,$$

azaz (ld. 3.8. viii) megjegyzés) $\lim(|(-1)^n x_n|) = \lim(x_n) = 0$.

Tegyük most fel, hogy $\lim(x_n) = 0$, és legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mutassuk meg, hogy az (S_{2n}) részsorozat monoton fogyó, az (S_{2n+1}) részsorozat pedig monoton növő. Valóban,

$$S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k x_k = S_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} = S_{2n} + (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel itt $x_{2n+2} - x_{2n+1} \leq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Ugyanígy kapjuk az $S_{2n+3} \geq S_{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ becslést is.

Lássuk be, hogy az (S_{2n}), (S_{2n+1}) részsorozatok korlátosak. Legyen ui. $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k = (x_0 - x_1) + ... + (x_{2n-2} - x_{2n-1}) + x_{2n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k}-x_{2k+1})+x_{2n}\geq 0,$$

hiszen

$$x_{2k}-x_{2k+1}\geq 0 \qquad (k\in\mathbf{N}).$$

Hasonlóan, ha $n\in\mathbf{N}$, akkor

$$S_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k x_k = x_0-(x_1-x_2)-...-(x_{2n-1}-x_{2n})-x_{2n+1}=$$

$$x_0-\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k+1}-x_{2k+2})-x_{2n+1}\leq x_0-\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k+1}-x_{2k+2})\leq x_0,$$

ui.

$$x_{2k+1}-x_{2k+2}\geq 0 \qquad (k\in\mathbf{N}).$$

Léteznek tehát (ld. 3.5.3. Tétel) az

$$\alpha:=\lim(S_{2n}) \ , \ \ \beta:=\lim(S_{2n+1})$$

(véges) határértékek. Mivel (ld. 3.7.5. Tétel, ill. 3.8. viii) megjegyzés)

$$|\alpha-\beta|=\lim(|S_{2n}-S_{2n+1}|)=\lim(x_{2n+1})=0,$$

ezért $\alpha=\beta$. Mutassuk meg, hogy az (S_n) sorozat konvergens, és $\lim(S_n)=\alpha\ (=\beta)$. Ti. az $(S_{2n}),(S_{2n+1})$ sorozatok monotonitása miatt

$$S_{2n+1}\leq\alpha\leq S_{2n} \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

így

$$|S_{2n+1}-\alpha|,\ |S_{2n}-\alpha|\leq|S_{2n+1}-S_{2n}|=x_{2n+1}\leq x_{2n} \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$|S_n-\alpha|\leq x_n \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_n)=0$ miatt az (S_n) sorozat konvergál α-hoz. ■

Tekintsük az $(x_n):\mathbf{N}\to\mathbf{K}$ sorozatot, ill. az általa generált $\sum(x_n)$ végtelen sort. Legyen adott az $m=(m_n)$ indexsorozat, és tegyük fel, hogy $m_0=0$. Ekkor a

$$\sigma_n:=\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}x_k \qquad (n\in\mathbf{N})$$

összegekkel definiált $\sum(\sigma_n)$ végtelen sort a $\sum(x_n)$ sor (m által meghatározott) *zárójelezésének* nevezzük. Formálisan szólva tehát (bár továbbra is óvunk attól, hogy a végtelen sort mintegy azonosítsuk az összeadással)

$$x_0 + x_1 + ... + x_n + ... =$$

$$(x_0 + ... + x_{m_1-1}) + (x_{m_1} + ... + x_{m_2-1}) + ... + (x_{m_n} + ... + x_{m_{n+1}-1}) + ... \,.$$

Világos, hogy ha

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\Theta_n := \sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} x_k = S_{m_{n+1}-1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sor (Θ_n) részletösszeg-sorozata a kiindulási $\sum(x_n)$ sor (S_n) részletösszeg-sorozatának egy részsorozata. Ha tehát a $\sum(x_n)$ sor, azaz az (S_n) sorozat konvergens, akkor a (Θ_n) sorozat, azaz a $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sor is konvergens, és ugyanaz a határértéke (ld. 3.5.2. Tétel). Így igaz a

4.3.4. Tétel. *Ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens, akkor bármely $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sora is konvergens, és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} x_k .$$

Az alábbi meglehetősen egyszerű példa azt mutatja, hogy a 4.3.4. Tétel „megfordítása" általában nem teljesül. Legyen ui.

$$x_0 := 1 \;\;,\;\; x_1 := -1 \;\;,\;\; x_{2^n+k} := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & (k = 0, ..., 2^{n-1} - 1) \\[2ex] -\dfrac{1}{2^n} & (k = 2^{n-1}, ..., 2^n - 1) \end{cases} \qquad (1 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor (ugyan $\lim(x_n) = 0$, de)

$$\sum_{k=0}^{2^n+2^{n-1}-1} x_k - \sum_{k=0}^{2^n-1} x_k = \sum_{k=2^n}^{2^n+2^{n-1}-1} x_k = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen nyilvánvaló, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sorra nem teljesül a Cauchy-kritérium (ld. 4.1.2. Tétel), követezésképpen ez a sor divergens. Ha viszont

$$m_0 := 0 \;\;,\;\; m_n := 2^n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $\sigma_n = 0 \ (n \in \mathbf{N})$, azaz a $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sor triviálisan konvergens. (Ez a példa is azt mutatja, hogy a végtelen sorok nem tekinthetők az összeadás egyfajta kiterjesztésének, ui. minden további nélkül nem teljesül az asszociativitás („zárójelezhetőség") szabálya.)

Várható tehát, hogy a 4.3.4. Tétel megfordítása csak bizonyos „megszorító" feltételek mellett érvényes. Világos, hogy a „fordított" állításban természetes feltételezésként szerepel majd a zárójelezett sor konvergenciája. Mivel bármely végtelen (szám)sor konvergenciájának szükséges feltétele a generáló sorozat nullához tartása, ezért az sem lesz meglepő, hogy ez utóbbi is feltételként jelenik meg. A „plusz" feltétel pedig a zárójelek „hosszának" a korlátossága lesz. Erről szól a

4.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sorra és az (m_n) indexsorozatra teljesülnek a következő feltételek:*

1^o $\lim(x_n) = 0$;

2^o $m_0 = 0$ *és* $\sup\{m_{n+1} - m_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$;

3^o *a* $\sum(\sigma_n) = \sum\left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} x_k\right)$ *zárójelezett sor konvergens.*

Ekkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor is konvergens.

Bizonyítás. Legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \ , \quad \Theta_n := \sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} x_j \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\alpha := \lim(\Theta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n.$$

Bármely $n \in \mathbf{N}$ természetes számhoz egyértelműen van olyan $\nu_n \in \mathbf{N}$, hogy

$$m_{\nu_n} \le n < m_{\nu_n+1}.$$

Ekkor

$$|S_n - \Theta_{\nu_n}| = \left|S_n - S_{m_{\nu_n+1}-1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m_{\nu_n+1}-1} x_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m_{\nu_n+1}-1} |x_k| \le$$

$$(m_{\nu_n+1} - 1 - n)\cdot \max\{|x_k| : k = n+1, ..., m_{\nu_n+1} - 1\} \le$$

$$(m_{\nu_n+1} - m_{\nu_n})\cdot \max\{|x_k| : k = n+1, ..., m_{\nu_n+1} - 1\}.$$

Ha tehát

$$q := \sup\{m_{k+1} - m_k : k \in \mathbf{N}\} \ , \ y_n := \sup\{|x_k| : k \in \mathbf{N}, k \geq n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$|S_n - \Theta_{\nu_n}| \leq q y_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint $\lim(x_n) = 0$, azaz bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel $|x_n| < \delta \ \ (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Ezért $y_n \leq \delta \ \ (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Mivel $\alpha = \lim(\Theta_n)$, ezért az előbbi $\delta > 0$ számhoz létezik olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$|\Theta_k - \alpha| < \delta \qquad (k \in \mathbf{N}, k > M).$$

Innen a fentiek alapján azt kapjuk, hogy

$$|S_n - \alpha| = |(S_n - \Theta_{\nu_n}) + (\Theta_{\nu_n} - \alpha)| \leq |S_n - \Theta_{\nu_n}| + |\Theta_{\nu_n} - \alpha| \leq$$

$$(*) \qquad q y_{n+1} + |\Theta_{\nu_n} - \alpha| \leq q\delta + \delta \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N, \nu_n > M).$$

Jegyezzük meg, hogy a (ν_n) sorozat monoton növő és $\lim(\nu_n) = +\infty$. Ha ui. $n \in \mathbf{N}$ és

$$m_{\nu_n} \leq n < n+1 < m_{\nu_n+1},$$

akkor $\nu_{n+1} = \nu_n$. Ha viszont $n+1 \geq m_{\nu_n+1}$, akkor $\nu_{n+1} \geq \nu_n + 1$. Így $\lim(\nu_n) < +\infty$ esetén valamilyen $K \in \mathbf{N}$ természetes számmal $\nu_n < K \quad (n \in \mathbf{N})$ teljesülne. Ezért az (m_n) sorozat szigorúan monoton növekedése alapján

$$n < m_{\nu_n+1} \leq m_K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez viszont azt jelentené, hogy a természetes számok halmaza felülről korlátos, ami nem igaz (ld. 1.4. iv) megjegyzés).

Van tehát olyan $R \in \mathbf{N}$, hogy $\nu_n > M \ \ (n \in \mathbf{N}, n > R)$, így (ld. $(*)$)

$$|S_n - \alpha| \leq q\delta + \delta \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}).$$

Ugyanakkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz meg tudjuk választani a $\delta > 0$ számot úgy, hogy $q\delta + \delta < \varepsilon$. Ekkor

$$|S_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}),$$

amiből az (S_n) sorozat konvergenciája (és $\lim(S_n) = \alpha$) már következik (ld. 3.7.2. Tétel). ■

Az előbbiekben a végtelen sorokkal kapcsolatban az asszociativitás kérdését vizsgáltuk. Folytassuk most ezt a gondolatmenetet a kommutativitással. Legyen ehhez

$$p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

egy bijekció (más szóval p egy permutációja $\mathbf{N}$-nek (ld. 3.2. iv) megjegyzés)), $\sum(x_n)$ pedig egy tetszőleges végtelen (szám)sor. Ekkor a $\sum(x_{p(n)})$ végtelen sort a $\sum(x_n)$ sor (p-által meghatározott) *átrendezésének* nevezzük. Kezdjük egy egyszerű tétellel.

4.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ és a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens. Ekkor bármely $\sum(x_{p(n)})$ átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Bizonyítás. Legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \ , \ \ \Delta_n := \sum_{k=0}^{n} x_{p(k)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha most

$$\nu_n := \max\{p(k) : k = 0, ..., n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor nyilván

$$\{x_{p(0)}, ..., x_{p(n)}\} \subset \{x_0, ..., x_{\nu_n}\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{p(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\nu_n} |x_k| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\sum(x_n)$ sor feltételezett abszolút konvergenciája miatt a $\sum_{k=0}^{m} |x_k|$ $(m \in \mathbf{N})$ részletösszegek sorozata korlátos, azaz

$$q := \sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |x_k| : m \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Figyelembe véve a fentieket azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{p(k)}| \leq q \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből az átrendezett sor abszolút konvergenciája már következik (ld. 3.5.3. Tétel).

Az átrendezett sor tehát konvergens is (ld. 4.1.), jelöljük α-val a limeszét:

$$\alpha := \lim(\Delta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)}.$$

Mivel $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció, ezért tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ indexhez van olyan $\mu_n \in \mathbf{N}$, hogy

$$\{0, ..., n\} \subset \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\},$$

ti. legyen

$$\mu_n := \max\{p^{-1}(k) : k = 0, ..., n\}.$$

Ezért (az $\mathcal{N}_n := \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\} \setminus \{0, ..., n\}$ jelöléssel)

$$|S_n - \alpha| = |(S_n - \Delta_{\mu_n}) + (\Delta_{\mu_n} - \alpha)| \leq |S_n - \Delta_{\mu_n}| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| =$$

$$\left|\sum_{k \in \mathcal{N}_n} x_k\right| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 4.2. viii) megjegyzést és a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciáját figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

A $\lim(\Delta_n) = \alpha$ egyenlőség alapján pedig valamilyen $M \in \mathbf{N}$ mellett

$$|\Delta_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m \in \mathbf{N}, m > M).$$

Gondoljuk meg továbbá, hogy található olyan $R \in \mathbf{N}$ index is, hogy

$$\mu_n > M \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Ellenkező esetben ui. a $\mu_n \leq M$ becslés végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén fennállna, azaz a

$$\{0, ..., n\} \subset \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\} \subset \{p(j) : j = 0, ..., M\}$$

tartalmazások is. Így az

$$n \leq \max\{p(j) : j = 0, ..., M\}$$

becslés is végtelen sok $\mathbf{N} \ni n$-re teljesülne, ami (ld. 1.4. iv) megjegyzés) nem lehetséges.

Mindezt összefoglalva tehát

$$|S_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}).$$

Ez pontosan azt jelenti (ld. 3.7.2. Tétel), hogy az (S_n) sorozat (azaz a $\sum(x_n)$ sor) konvergens és

$$\lim(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha.$$

■

Ha egy sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor az előbbi állításhoz képest „drámaian" megváltozik a helyzet. Ezt fejezi ki az alábbi tétel.

4.3.7. Tétel (Riemann). *Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (valós) sorozat által generált $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens, de nem abszolút konvergens. Ekkor:*

1^o *van olyan $\sum(x_{p(n)})$ átrendezés, amelyiknek nincs határértéke;*

2^o *tetszőleges $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ esetén megadható olyan $\sum(x_{p(n)})$ átrendezés, amelynek van határértéke, és a $\sum(x_{p(n)})$ sor összege α-val egyenlő.*

Bizonyítás (vázlat). Mivel a $\sum(x_n)$ sor nem abszolút konvergens, ezért az

$$\mathbf{N}^+ := \{n \in \mathbf{N} : x_n \geq 0\} \ , \ \mathbf{N}^- := \{n \in \mathbf{N} : x_n < 0\}$$

halmazok mindegyike végtelen halmaz (és $\mathbf{N}^+ \cap \mathbf{N}^- = \emptyset$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}^+ \cup \mathbf{N}^-$). Valóban, ha pl. az $x_n \geq 0$ egyenlőtlenség legfeljebb véges sok $\mathbf{N} \ni n$-re teljesülne, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$x_n < 0 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N)$$

állna fenn. Ezért bármely $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| = \sum_{k=0}^{N} |x_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |x_k| = \sum_{k=0}^{N} |x_k| - \sum_{k=N+1}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{N} (|x_k| + x_k) - \sum_{k=0}^{n} x_k,$$

így

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq 2 \sum_{k=0}^{N} |x_k| + \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

A feltételek szerint a $\sum(x_n)$ sor konvergens, ezért (ld. 3.5.4. Tétel)

$$q := \sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| : n \in \mathbf{N} \right\} < +\infty.$$

Következésképpen az előbb mondottakat figyelembe véve

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|x_k| : n\in\mathbf{N}\right\} \le 2\sum_{k=0}^{N}|x_k| + q < +\infty,$$

azaz a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens lenne, ami nem igaz.

Van tehát egy-egy olyan indexsorozat: $\nu=(\nu_n)$ és $\mu=(\mu_n)$, hogy

$$\mathcal{R}_\nu = \mathbf{N}^+ \ , \ \mathcal{R}_\mu = \mathbf{N}^-.$$

A fentiekkel analóg gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\nu_n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x_{\mu_n}) = +\infty.$$

Ha ui. (pl.) $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\nu_n} < +\infty$, akkor bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k| = \sum_{j\in\mathbf{N},\nu_j\le n} x_{\nu_j} - \sum_{i\in\mathbf{N},\mu_i\le n} x_{\mu_i} =$$

$$2\cdot\sum_{j\in\mathbf{N},\nu_j\le n} x_{\nu_j} - \sum_{k=0}^{n} x_k \le 2\cdot\sum_{j=0}^{\infty} x_{\nu_j} - \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Ezért

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|x_k| : n\in\mathbf{N}\right\} \le 2\cdot\sum_{j=0}^{\infty} x_{\nu_j} + q < +\infty,$$

azaz a $\sum(x_n)$ sor megint csak abszolút konvergens lenne, ami nem igaz.

Mindezeket szem előtt tartva a 4.3.7. Tétel 1^o állításának a bizonyításához (azaz az abban jelzett $p:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ bijekció konstrukciójához) induljunk ki abból, hogy egy alkalmas $N_0^+\in\mathbf{N}$ indexszel

$$\sum_{k=0}^{N_0^+-1} x_{\nu_k} > 1,$$

és legyen $p(k) := \nu_k$ $(k=0,...,N_0^+-1)$. Van ugyanakkor olyan $N_0^-\in\mathbf{N}$ is, hogy

$$\sum_{k=0}^{N_0^+-1} x_{\nu_k} + \sum_{j=0}^{N_0^--1} x_{\mu_j} < -1.$$

Legyen

$$p(N_0^+ + j) := \mu_j \qquad (j=0,...,N_0^- - 1),$$

és válasszuk most az $N_1^+ \in \mathbf{N}$ indexet úgy, hogy

$$\sum_{k=0}^{N_0^+-1} x_{\nu_k} + \sum_{j=0}^{N_0^--1} x_{\mu_j} + \sum_{l=0}^{N_1^+-1} x_{\nu_{N_0^+ + l}} > 1$$

teljesüljön. Definiáljuk a keresett p bijekció „további" helyettesítési értékeit az alábbiak szerint:

$$p(N_0^+ + N_0^- + l) := \nu_{N_0^+ + l} \qquad (l = 0, ..., N_1^+ - 1).$$

Az eljárást folytatva most olyan $N_1^- \in \mathbf{N}$ indexet választunk, amellyel

$$\sum_{k=0}^{N_0^+-1} x_{\nu_k} + \sum_{j=0}^{N_0^--1} x_{\mu_j} + \sum_{l=0}^{N_1^+-1} x_{\nu_{N_0^+ + l}} + \sum_{s=0}^{N_1^--1} x_{\mu_{N_0^- + s}} < -1,$$

és ekkor legyen

$$p(N_0^+ + N_0^- + N_1^+ + s) := \mu_{N_0^- + s} \qquad (s = 0, ..., N_1^- - 1).$$

Ezen az úton (amelynek a „kezdő lépéseit" részleteztük az előbbiekben) rekurzíve eljutunk egy olyan $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióhoz, amely által generált $\sum(x_{p(n)})$ átrendezés Θ_n $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegeire végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén $\Theta_n > 1$, ill. végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén $\Theta_n < -1$ teljesül. Következésképpen a (Θ_n) sorozatnak (azaz a $\sum(x_{p(n)})$ átrendezett sornak) nincs határértéke.

Most mutassuk meg olyan $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció létezését, amellyel a $\sum(x_{p(n)})$ átrendezett sornak $+\infty$ az összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} = +\infty.$$

Induljunk ki abból, hogy a $\sum(x_n)$ sor feltételezett konvergenciájából $\lim(x_n) = 0$ következik (ld. 4.1.1. Tétel). Egy alkalmas $1 \leq N_0 \in \mathbf{N}$ indexszel tehát $|x_n| < 1/2$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq N_0)$. Legyen

$$p(k) := k \qquad (k = 0, ..., N_0 - 1),$$

és

$$q_0 := \sum_{j=0}^{N_0-1} x_j.$$

Ha m_0^+ a legkisebb olyan $j \in \mathbf{N}$ index, amelyre $\nu_j \notin \{0, ..., N_0 - 1\}$, akkor van olyan $1 \leq N_1^+ \in \mathbf{N}$, hogy

$$q_1 := q_0 + \sum_{k=m_0^+}^{m_0^+ + N_1^+ - 1} x_{\nu_k} > q_0 + 1.$$

Legyen $p(N_0+k) := \nu_{m_0^+ + k}$ $(k = 0, ..., N_1^+ - 1)$.

Hasonlóan, legyen m_0^- a legkisebb olyan $j \in \mathbf{N}$ index, amelyre $\mu_j \notin \{0, ..., N_0 - 1\}$. Válasszuk ezek után az $\mathbf{N} \ni N_1^-$-t úgy, hogy $N_1^- > 0$, valamint

$$q_2 := q_1 + \sum_{k=m_0^-}^{m_0^- + N_1^- - 1} x_{\mu_k} > q_0 + \frac{1}{2},$$

és „folytassuk" a p értelmezését a következőképpen:

$$p(N_0 + N_1^+ + k) := \mu_{m_0^- + k} \qquad (k = 0, ..., N_1^- - 1).$$

(Mivel $\mu_{m_0^-} > N_0$, így $|x_{\mu_k}| = -x_{\mu_k} < 1/2$ $(k \in \mathbf{N}, k \geq m_0^-)$. Ezért

$$q_1 + x_{\mu_{m_0^-}} > q_1 - 1/2 > q_0 + 1/2,$$

tehát valóban van ilyen $N_1^- \geq 1$ index.)

Ismételjük meg a fent mondottakat: legyen $N_2^+ \in \mathbf{N}$ olyan, hogy

$$q_3 := q_2 + \sum_{k=m_0^+ + N_1^+}^{m_0^+ + N_1^+ + N_2^+ - 1} x_{\nu_k} > q_0 + 2,$$

és

$$p(N_0 + N_1^+ + N_1^- + k) := \nu_{m_0^+ + N_1^+ + k} \qquad (k = 0, ..., N_2^+ - 1).$$

Válasszuk továbbá az $1 \leq N_2^- \in \mathbf{N}$ indexet úgy, hogy

$$q_4 := q_3 + \sum_{k=m_0^- + N_1^-}^{m_0^- + N_1^- + N_2^- - 1} x_{\mu_k} > q_0 + 1,$$

ill. legyen

$$p(N_0 + N_1^+ + N_1^- + N_2^+ + k) := \mu_{m_0^- + N_1^- + k} \qquad (k = 0, ..., N_2^- - 1),$$

és í.t.: a következő lépésben további megfelelő számú nem-negatív x_{ν_s}-eket véve és ezek összegét q_4-hez hozzáadva a kapott q_5 összegre $q_5 > q_0 + 4$ teljesül. A q_5-höz aztán valahány további negatív x_{μ_k}-t hozzáadva a kapott q_6 összegre $q_6 > 2$, stb. Az n-edik lépéspárban kapott $q_{2^{n-1}}$, q_{2^n}-re

$$q_{2^{n-1}} > q_0 + 2^{n-1} \ , \ \ q_{2^n} > q_0 + 2^{n-2} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy q_{2^n}-ek az átrendezett sor részletösszegei lesznek: alkalmas (γ_n) indexsorozattal

$$q_{2^n} = \sum_{k=0}^{\gamma_n} x_{p(k)} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ill. a „közbülső" $m = \gamma_{n-1}, ..., \gamma_n - 1 \ \ (1 \leq n \in \mathbf{N})$ indexek esetén

$$\sum_{k=0}^{m} x_{p(k)} \geq q_{2^n} > q_0 + 2^{n-2}.$$

Innen már nyilvánvaló, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} x_{p(k)} = +\infty.$

Analóg módon kapunk olyan $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekciót, amelyre $\sum_{k=0}^{\infty} x_{p(k)} = -\infty.$

Legyen most $\alpha \in \mathbf{R},$ és konstruáljunk olyan $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekciót, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{p(k)} = \alpha.$$

A fentiek szerint van olyan $m_0^+ \in \mathbf{N},$ amellyel

$$Q_0 := \sum_{k=0}^{m_0^+} x_{\nu_k} > \alpha.$$

Ha egyúttal m_0^+ a legkisebb ilyen index, akkor vagy $m_0^+ = 0,$ azaz $x_{\nu_0} > \alpha,$ vagy $m_0^+ > 0,$ és

$$\sum_{k=0}^{m_0^+ - 1} x_{\nu_k} \leq \alpha.$$

Ekkor

$$|Q_0 - \alpha| = Q_0 - \alpha < x_{\nu_{m_0^+}}.$$

Legyen

$$p(k) := \nu_k \qquad (k = 0, ..., m_0^+),$$

és válasszuk az $1 \leq m_0^- \in \mathbf{N}$ indexet úgy, hogy

$$Q_1 := Q_0 + \sum_{j=0}^{m_0^-} x_{\mu_j} < \alpha.$$

Tegyük fel, hogy m_0^- a legkisebb ilyen index, azaz

$$|Q_1 - \alpha| = \alpha - Q_1 < |x_{\mu_{m_0^-}}| = -x_{\mu_{m_0^-}}.$$

Legyen továbbá
$$p(m_0^+ + j) := \mu_{j-1} \qquad (j = 1, ..., m_0^-).$$
Most legyen $1 \le m_1^+ \in \mathbf{N}$ (egyúttal a lehető legkisebb) olyan index, hogy
$$Q_2 := Q_1 + \sum_{k=0}^{m_1^+} x_{\nu_{m_0^+ + k + 1}} > \alpha,$$
és
$$p(m_0^+ + m_0^- + k) := \nu_{m_0^+ + k} \qquad (k = 1, ..., m_1^+).$$
Ekkor tehát
$$|Q_2 - \alpha| = Q_2 - \alpha < x_{\nu_{m_0^+ + m_1^+ + 1}}.$$
Válasszuk most $\mathbf{N} \ni m_1^-$-t úgy (a lehető legkisebbként), hogy $m_1^- \ge 1$, és
$$Q_3 := Q_2 + \sum_{j=0}^{m_1^-} x_{\mu_{m_0^- + k + 1}} < \alpha,$$
ill. legyen
$$p(m_0^+ + m_0^- + m_1^+ + j) := \mu_{m_0^- + j} \qquad (j = 1, ..., m_1^-).$$
Világos, hogy
$$|Q_3 - \alpha| = \alpha - Q_3 < x_{\mu_{m_0^- + m_1^- + 1}}.$$

Ha ezt az eljárást analóg módon folytatjuk, és az így előálló $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióval
$$\Theta_n := \sum_{k=0}^{n} x_{p(k)} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
akkor
$$Q_0 = \Theta_{m_0^+} \ , \ Q_1 = \Theta_{m_0^+ + m_0^-} \ , \ Q_2 = \Theta_{m_0^+ + m_0^- + m_1^+} \ , \ Q_3 = \Theta_{m_0^+ + m_0^- + m_1^+ + m_1^-}, \dots .$$
Továbbá $n \in \mathbf{N}$, $m_0^+ \le n \le m_0^+ + m_0^-$ esetén
$$\Theta_{m_0^+ + m_0^-} \le \Theta_n \le \Theta_{m_0^+},$$
$s \in \mathbf{N}$, $m_0^+ + m_0^- \le s \le m_0^+ + m_0^- + m_1^+$ esetén
$$\Theta_{m_0^+ + m_0^-} \le \Theta_s \le \Theta_{m_0^+ + m_0^- + m_1^+},$$
és
$$|\Theta_n - \alpha| \le \max\{|\Theta_{m_0^+} - \alpha|, |\Theta_{m_0^+ + m_0^-} - \alpha|\} \le \max\{x_{\nu_{m_0^+}}, -x_{\mu_{m_0^-}}\}, ...$$

Mivel $\lim(x_n) = 0$, ezért $\lim(\Theta_n) = \alpha$. ■

A végtelen sorok – mint sorozatok – szorzása a 3.7.5., 3.7.10. Tételek alapján első hallásra nem jelent újdonságot. Legyenek ui. adottak az $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatok, ekkor az általuk generált $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ végtelen sorok - azaz az

$$X_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \ , \ Y_n := \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

utasítással definiált (X_n), (Y_n) sorozatok - $(X_n)(Y_n) = (X_n Y_n)$ szorzata a következő:

$$X_n Y_n = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_k y_j \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ha

$$z_0 := x_0 y_0 \ , \ z_n := x_n \sum_{j=0}^{n} y_j + y_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

és

$$Z_n := \sum_{s=0}^{n} z_s \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $X_n Y_n = Z_n$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz a fentiek alapján

$$\sum(x_n) \cdot \sum(y_n) = \sum(z_n).$$

Tehát a szóban forgó két végtelen sor szorzata is egy végtelen sor. Ha az $x_k y_j$ $(k, j \in \mathbf{N})$ szorzatokat egy „$\infty \times \infty$-es mátrix" elemeiként képzeljük el ($x_k y_j$-t mint a k-adik sor j-edik elemét), akkor Z_n $(n \in \mathbf{N})$ nem más, mint ezen mátrix első $n+1$ sora és oszlopa által meghározott „bal felső négyzetben" lévő elemeinek az összege. Ezért a $\sum(z_n)$ sort a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok *téglányszorzatának* nevezzük. A már említett 3.7.5. Tételt alkalmazva jutunk az alábbi állításhoz.

4.3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n), \sum(y_n)$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor a $\sum(z_n)$ téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Sőt, ha $\sum(x_n), \sum(y_n)$ abszolút konvergensek, akkor $\sum(z_n)$ is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Az előzményeket figyelembe véve már csak az abszolút konvergenciára vonatkozó állítást kell meggondolnunk. Tegyük fel tehát, hogy

$$q := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty \quad , \quad Q := \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| < +\infty.$$

Ekkor (ld. a tétel kimondása előtti jelöléseket)

$$|z_k| = \left| x_k \sum_{j=0}^{k} y_j + y_k \sum_{l=0}^{k-1} x_l \right| \leq |x_k| \sum_{j=0}^{k} |y_j| + |y_k| \sum_{l=0}^{k-1} |x_l| \leq$$

$$|x_k| \sum_{j=0}^{\infty} |y_j| + |y_k| \sum_{l=0}^{\infty} |x_l| = Q|x_k| + q|y_k| \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Ennélfogva azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} |z_k| \leq |z_0| + \sum_{k=1}^{n} (Q|x_k| + q|y_k|) \leq |z_0| + 2qQ \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a $(\sum_{k=0}^{n} |z_k|)$ sorozat korlátos, így a $\sum(|z_n|)$ sor konvergens. ∎

Formálisan szólva a $\sum(z_n)$ téglányszorzat részletösszegeinek a kiszámításakor a fenti tétel kimondás előtt említett „mátrix" bizonyos elemeit adjuk össze. Ha ez a „mátrix" egy „igazi" mátrix lenne, azaz véges sok sora (és ugyanannyi oszlopa) lenne, akkor az elemeit pl. a következőképpen is összeadhatnánk: először az egyes sorokban lévő elemeket adjuk össze, majd ezen összegeknek vesszük az összegét. De csinálhatnánk mindezt úgy is, hogy először az egyes oszlopokban lévő elemeket adjuk össze, majd ezen összegeknek vesszük az összegét (ld. asszociativitás). Ennek analógiájára (bár nem győzzük újfent hangsúlyozni, hogy ne keverjük össze a végtelen sorokat az összeadással) vezessük be a végtelen sorok alábbi „szorzását". Ehhez tételezzük fel, hogy a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok konvergensek, és legyen

$$t_n := x_n \sum_{k=0}^{\infty} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_n y_k \quad , \quad T_n := y_n \sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_n x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(t_n)$ végtelen sort a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok *oszlopszorzatának,* a $\sum(T_n)$ sort pedig a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ *sorszorzatának* nevezzük. Világos, hogy igaz a

4.3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n), \sum(y_n)$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor a $\sum(t_n)$, $\sum(T_n)$ oszlop-, ill. sorszorzatuk is konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Sőt, ha $\sum(x_n), \sum(y_n)$ abszolút konvergensek, akkor $\sum(t_n)$ és $\sum(T_n)$ is abszolút konvergens.

A fenti, már többször emlegetett $(x_k y_j)_{k,j=0}^{\infty}$ „mátrix" elemeit másképp is szemügyre vehetjük az „összeadás" során. Legyen ehhez

$$c_n := \sum_{j,k\in\mathbf{N},j+k=n} x_k y_j \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát (részletesebben kiírva)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(Geometriailag szólva c_n-et úgy kapjuk meg, hogy a fenti „mátrixban" az $(n+1)$-edik sor első elemét az $(n+1)$-edik oszlop első elemével összekötő egyenes mentén lévő szorzatokat összeadjuk.) Ekkor a $\sum(c_n)$ sort a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok *Cauchy-szorzatának* nevezzük. Legyen

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az előbbi Cauchy-szorzat n-edik részletösszege, azaz $\sum(c_n) = (C_n)$. A C_n $(n \in \mathbf{N})$ részletösszeg tehát a 4.3.8. Tétel kimondása előtt említett „bal felső négyzet" átlóval kettéosztott egyik felében lévő szorzatok összege.

4.3.10. Tétel (Mertens). *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok konvergensek, és legalább az egyikük abszolút konvergens. Ekkor a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzatuk is konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Ha $\sum(x_n)$ is és $\sum(y_n)$ is abszolút konvergens, akkor $\sum(c_n)$ is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens (is), és legyen

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ , \quad B := \sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

Tekintsük valamilyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ esetén a fenti C_n részletösszeg alábbi előállítását:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j = \sum_{k=0}^{m_n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j,$$

ahol $m_n := [n/2]$ (az $n/2$ szám egészrésze, azaz $m_n \in \mathbf{N}$, és $n/2 - 1 < m_n \le n/2$). Következésképpen

$$C_n - AB = \sum_{k=0}^{m_n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j - AB + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j =$$

$$\sum_{k=0}^{m_n} x_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} y_j - B \right) + B \left(\sum_{k=0}^{m_n} x_k - A \right) + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j,$$

és így

$$|C_n - AB| \leq \sum_{k=0}^{m_n} |x_k| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n-k} y_j - B \right| + |B| \cdot \left| \sum_{k=0}^{m_n} x_k - A \right| + \sum_{k=m_n+1}^{n} |x_k| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n-k} y_j \right|.$$

Mivel a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, a $\sum(y_n)$ sor pedig konvergens, ezért

$$Q := \sup \left\{ \sum_{l=0}^{s} |x_l| : s \in \mathbf{N} \right\} < +\infty \ , \quad q := \sup \left\{ \left| \sum_{l=0}^{s} y_l \right| : s \in \mathbf{N} \right\} < +\infty,$$

ill. tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ (mindkét sor esetén „jó") küszöbindex, amellyel

$$\left| \sum_{l=0}^{s} x_l - A \right| < \varepsilon \ , \quad \left| \sum_{l=0}^{s} y_l - B \right| < \varepsilon \qquad (s \in \mathbf{N}, s > N).$$

A $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciája és a Cauchy-kritérium (ld. 4.1.2. Tétel) miatt az előbbi N-ről az is feltehető, hogy

$$\sum_{k=r}^{p} |x_k| < \varepsilon \qquad (r, p \in \mathbf{N}, r > p > N).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n > 2(N+1)$, ekkor

$$n > \frac{n}{2} \geq m_n > \frac{n}{2} - 1 > N,$$

továbbá bármely $k = 0, ..., m_n$ esetén $n - k \geq n - m_n \geq n/2 > N$. Ezért

$$|C_n - AB| \leq Q\varepsilon + |B|\varepsilon + \varepsilon q = (Q + |B| + q)\varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a (C_n) sorozat (azaz a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzat) konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim(C_n) = AB = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Ha mind a két sor, $\sum(x_n), \sum(y_n)$ abszolút konvergens, akkor alkalmazzuk az eddig bebizonyítottakat a $\sum(|x_n|), \sum(|y_n|)$ sorokra. Legyen tehát

$$d_n := \sum_{j,k \in \mathbf{N}, j+k=n} |x_k| \cdot |y_j| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(d_n)$ sor az eddigiek alapján konvergens, azaz

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} d_k : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Mivel

$$|c_n| = \left|\sum_{j,k\in\mathbf{N},j+k=n} x_k y_j\right| \leq \sum_{j,k\in\mathbf{N},j+k=n} |x_k|\cdot|y_j| = d_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\sum_{k=0}^{n}|c_k| \leq \sum_{k=0}^{n} d_k \ \ (n \in \mathbf{N})$, így

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|c_k| : n \in \mathbf{N}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} d_k : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum(|c_n|)$ sor konvergens, más szóval a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzat abszolút konvergens. ■

A hétköznapi számolásban megszokott „tizedestörtek" mögött (azok egzakt matematikai értelmezésében) a végtelen sorok játszanak főszerepet. Mindezt általánosabban megfogalmazva legyen adott a $2 \leq p \in \mathbf{N}$ szám (a számrendszer „alapszáma", pl. $p := 10$), és tekintsünk egy olyan (x_n) számsorozatot, amelyre

$$x_n \in \{0,...,p-1\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesül. Ekkor a

$$\sum\left(\frac{x_n}{p^{n+1}}\right)$$

végtelen sor (abszolút) konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{p^{n+1}} \in [0,1].$$

Valóban, mindez következik a

$$0 \leq \frac{x_n}{p^{n+1}} \leq \frac{p-1}{p^{n+1}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

nyilvánvaló becslésből:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{p^{k+1}} \leq (p-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^{k+1}} = \frac{p-1}{p}\cdot\frac{1-(1/p)^{n+1}}{1-1/p} < \frac{p-1}{p}\cdot\frac{1}{1-1/p} = 1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen (ld. 3.7.6. Tétel)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{p^{k+1}} = \lim\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{p^{k+1}}\right) \leq 1.$$

4.3.11. Tétel. *Tetszőleges* $\alpha \in [0,1]$ *számhoz megadható olyan*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \{0, ..., p-1\}$$

sorozat, amellyel

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}}.$$

Bizonyítás. Ha $\alpha = 1$, akkor az $x_n := p-1 \ (n \in \mathbf{N})$ választás megfelelő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p-1}{p^{n+1}} = (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{1-1/p} = 1.$$

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $\alpha < 1$. Tekintsük a

$$\left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right) \qquad (k = 0, ..., p-1)$$

intervallumokat. Ekkor

$$I_0 := [0,1) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right)$$

egy páronként diszjunkt halmazokból álló felbontása a $[0,1)$ intervallumnak. Egyértelműen létezik ezért olyan $x_0 \in \{0, ..., p-1\}$, hogy

$$\alpha \in I_1 := \left[\frac{x_0}{p}, \frac{x_0+1}{p}\right).$$

Más szóval

$$\frac{x_0}{p} \leq \alpha < \frac{x_0+1}{p},$$

amiből rögtön következik az is, hogy

$$0 \leq \alpha - \frac{x_0}{p} < \frac{1}{p}.$$

Ha most az

$$I_1 = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{x_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{x_0}{p} + \frac{k+1}{p^2}\right)$$

szintén páronként diszjunkt halmazokból álló felbontását tekintjük az I_1 intervallumnak, akkor egyértelműen van olyan $x_1 \in \{0, ..., p-1\}$, hogy

$$\alpha \in I_2 := \left[\frac{x_0}{p} + \frac{x_1}{p^2}, \frac{x_0}{p} + \frac{x_1+1}{p^2}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy
$$\frac{x_0}{p}+\frac{x_1}{p^2}\le\alpha<\frac{x_0}{p}+\frac{x_1+1}{p^2},$$
tehát
$$0\le\alpha-\left(\frac{x_0}{p}+\frac{x_1}{p^2}\right)<\frac{1}{p^2}.$$
Tegyük fel, hogy valamilyen $n\in\mathbf{N}$ mellett már definiáltuk az $I_0,...,I_n$ intervallumokat, ill. ($n\ge 1$ esetén) az $x_0,...,x_{n-1}\in\{0,...,p-1\}$ számokat, és
$$\alpha\in I_n=\bigcup_{k=0}^{p-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{p^{j+1}}+\frac{k}{p^{n+1}},\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{p^{j+1}}+\frac{k+1}{p^{n+1}}\right).$$
Ekkor egyértelműen adható meg az az $x_n\in\{0,...,p-1\}$ szám, amellyel
$$\alpha\in I_{n+1}:=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{p^{j+1}}+\frac{x_n}{p^{n+1}},\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{p^{j+1}}+\frac{x_n+1}{p^{n+1}}\right).$$
Továbbá azt mondhatjuk, hogy
$$(*)\qquad 0\le\alpha-\sum_{j=0}^{n}\frac{x_j}{p^{j+1}}<\frac{1}{p^{n+1}}.$$
Tudjuk (ld. 3.9.2. Tétel), hogy $\lim(1/p^{n+1})=0$. Tehát az (x_n) sorozattal (ld. 3.2. viii) megjegyzés) $(*)$ alapján
$$\lim\left(\alpha-\sum_{j=0}^{n}\frac{x_j}{p^{j+1}}\right)=0,$$
azaz
$$\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{p^{j+1}}.$$
■

4.4. Megjegyzések

i) A 4.3.1. Tételben „hiányzik" a $\delta=\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)=1$ eset. Ez nem véletlen, ti. ekkor „nem működik" a Cauchy-féle gyök-kritérium: a szóban forgó sor lehet konvergens is, vagy divergens is, amint azt az alábbi két példa mutatja:
$$x_n:=\frac{1}{n}\quad,\quad y_n:=\frac{1}{n^2}\qquad(1\le n\in\mathbf{N}).$$

Ekkor (ld. 3.9.6., 3.7.5. Tételek)

$$\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)} = \lim\left(\sqrt[n]{|y_n|}\right) = \frac{1}{\left(\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)\right)^2} = 1,$$

ugyanakkor (ld. 4.1.3. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor divergens, a $\sum(y_n)$ sor pedig konvergens.

ii) Ugyanez mondható el a 4.3.2. Tétellel kapcsolatban is: ha

$$\gamma = \lim\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) = 1,$$

akkor „ettől" még lehet a $\sum(x_n)$ sor konvergens is, meg divergens is. Elég csupán az előző megjegyzésbeli (x_n), (y_n) sorozatokra gondolni:

$$\lim\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|}\right) = \lim\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) = 1$$

(ld. 3.9.7., 3.7.5. Tételek).

iii) A 3.8. x) megjegyzésre utalva a 4.3.1. Tétel (gyök-kritérium), ill. a 4.3.2. Tétel (hányados-kritérium) kiterjeszthető olyan esetekre is, amikor az említett tételekben szereplő gyök-, ill. hányados-sorozat nem konvergens. Igaz ui. az alábbi általános *gyök-,* ill. *hányados-kritérium*: valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatra

1^o legyen $\delta := \limsup\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$, ekkor $\delta < 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, ha viszont $\delta > 1$, akkor $\sum(x_n)$ divergens;

2^o ha még $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor legyen $\gamma := \limsup\left(|x_{n+1}|/|x_n|\right)$, ill. $\eta := \liminf\left(|x_{n+1}|/|x_n|\right)$, ekkor $\gamma < 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, míg az $\eta > 1$ esetben $\sum(x_n)$ divergens.

Az i), ii)-beli példák azt mutatják, hogy továbbra sem „működnek" a kritériumok a $\delta = 1$, ill. az $\eta \leq 1 \leq \gamma$ esetekben.

iv) A 4.3.3. Tétel alkalmazható a $\sum\left((-1)^n/n\right)$ sorra, mivel (ld. 3.9.1. Tétel) $\lim(1/n) = 0$, és az $(1/n)$ sorozat triviális módon (szigorúan) monoton fogyó. Ezért a $\sum\left((-1)^n/n\right)$ sor konvergens. Ugyanakkor nem abszolút konvergens, hiszen $\sum\left(|(-1)^n/n|\right) = \sum(1/n)$, és (ld. 4.1.3. Tétel) a $\sum(1/n)$ harmonikus sor divergens. A 4.3.3. Tétel bizonyítása során az is kiderült, hogy (a most vizsgált sorra alkalmazva)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right| \leq \frac{1}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

(Később ki is számoljuk az itt szereplő $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ sorösszeget.)

v) A 4.3.6. Tétel („átrendezési tétel") kiterjeszthető az alábbiak szerint. Tegyük fel, hogy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ és a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens. Valamely véges $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmaz esetén $\sum_{k\in\mathcal{N}} x_k$ azon x_k számok összegét jelenti, amelyekre $k \in \mathcal{N}$. Ha $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ nem véges, akkor legyen

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} x_k := \sum_{n=0}^{\infty} x_{\nu_n},$$

ahol a (ν_n) indexsorozattal $\mathcal{R}_{(\nu_n)} = \mathcal{N}$. (Mivel $\sum(x_n)$ abszolút konvergens, ezért könnyen meggondolhatóan ez az utóbbi sorösszeg létezik, és a 4.3.6. Tétel miatt bármely $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióval $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\nu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\nu_{p(n)}}$.) Ha már most

$$\mathbf{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$$

a természetes számok halmazának egy páronként diszjunkt $\emptyset \neq \mathcal{N}_n \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokból álló felbontása, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathcal{N}_n} x_j.$$

A 4.3.6. Tétel ennek az a speciális esete, amikor (az ottani jelöléseket használva) $\mathcal{N}_n = \{p(n)\} \quad (n \in \mathbf{N})$, és ekkor $\sum_{j\in\mathcal{N}_n} x_j = x_{p(n)} \quad (n \in \mathbf{N})$.

vi) Mutassuk be a 4.3.7. Tétel (Riemann-tétel) bizonyítását a $\sum((-1)^n/(n+1))$ sor kapcsán. Ekkor (ld. a 4.3.7. Tételbeli jelöléseket) $\nu_n = 2n,\ \mu_n = 2n+1 \quad (n \in \mathbf{N})$. Legyen pl. $\alpha := 3/2$, ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} = 3/2$ átrendezéshez első lépésként m_0^+ az a legkisebb index, amellyel

$$Q_0 = \sum_{k=0}^{m_0^+} x_{\nu_k} = \sum_{k=0}^{m_0^+} x_{2k} = \sum_{k=0}^{m_0^+} \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2m_0^+ + 1} > \frac{3}{2}.$$

Nyilván $m_0^+ = 2,$ mivel

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{8}{15} > 1 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2},$$

de $1 + 1/3 = 4/3 < 3/2$. Tehát

$$p(0) = \nu_0 = 0 \ , \ p(1) = \nu_1 = 2 \ , \ p(2) = \nu_2 = 4.$$

A folytatásban azt a (legkisebb) $1 \leq m_0^- \in \mathbf{N}$ indexet keressük, hogy

$$Q_1 = Q_0 + \sum_{j=0}^{m_0^-} x_{\mu_j} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \sum_{j=0}^{m_0^-} \frac{1}{2j+2} < \frac{3}{2},$$

azaz

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_0^-}\frac{1}{j+1} > \frac{8}{15} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30},$$

más szóval $\sum_{j=1}^{m_0^-+1} 1/j > 1/15$. Világos, hogy $m_0^- = 1$, így

$$p(m_0^+ + 1) = p(3) = \mu_0 = 1,$$

és í.t.

vii) A 4.3.6., 4.3.7. Tételeket figyelembe véve a következőket mondhatjuk: egy $\sum(x_n)$ (valós szám)sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha bármely $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció esetén a $\sum(x_{p(n)})$ átrendezett sor konvergens. Ezért szokták néha az abszolút konvergens sort *feltétlen konvergensnek,* a konvergens, de nem abszolút konvergens sort pedig *feltételesen konvergensnek* nevezni.

viii) A 4.3.7. Tétel fenti bizonyítás(vázlat)ában lényeges volt az, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $x_n \in \mathbf{R}$. Belátható, hogy ez a feltétel nem csupán a bizonyítás szempontjából lényeges. Legyen ui.

$$x_n = u_n + \imath v_n \in \mathbf{C} \qquad (u_n, v_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}),$$

és tekintsük a $\sum(x_n)$ (komplex) sort. Ekkor (ld. 3.5.5. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ sorok konvergensek, és az utóbbi esetben

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \imath \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

ill. $\sum(x_n)$ akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ sorok abszolút konvergensek. Legyen $\alpha \in \mathbf{C}$ és nevezzük α-t a $\sum(x_n)$ sor *limeszpontjának,* ha valamilyen $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióval a $\sum\left(x_{p(n)}\right)$ sor konvergens, és $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)}$. Ha $\sum(x_n)$ konvergens és

$$\mathbf{C}_0 := \{\alpha \in \mathbf{C} : \alpha \text{ limeszpontja a } \sum(x_n) \text{ sornak}\},$$

akkor a Steinitz-tétel azt mondja ki, hogy a $\mathbf{C}_0$ halmaz „szerkezetét" illetően az alábbi esetek lehetségesek:

1^o $\mathbf{C}_0$-nak egyetlen eleme van;

2^o $\mathbf{C}_0$ a komplex számsíkon egy egyenes, azaz alkalmas $\xi, \eta \in \mathbf{C}$ mellett

$$\mathbf{C}_0 = \{\xi + t\eta \in \mathbf{C} : t \in \mathbf{R}\};$$

3^o $\mathbf{C}_0$ megegyezik a $\mathbf{C}$ halmazzal.

ix) Az előző megjegyzésbeli Steinitz-tételt illusztrálandó, annak az 1^o esete áll elő nyilván minden abszolút konvergens $\sum(x_n)$ sor esetén. Ekkor ui. (ld. 4.3.6. Tétel)

$$\mathbf{C}_0 = \{\alpha\},$$

ahol $\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. A 2^o eset „megvalósításához" legyen ugyanakkor valamilyen $\xi,\ \eta \in \mathbf{C}$ számokra $\sum(z_n)$ olyan abszolút konvergens sor, amelynek az összege ξ-vel egyenlő:

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Ha most $\sum(y_n)$ egy valós számokból álló feltételesen konvergens sor, akkor

a) a $\sum(z_n + \eta y_n)$ sor konvergens (ld. 4.2. iii) megjegyzés);

b) bármely $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra $\sum_{n=0}^{\infty} z_{p(n)} = \xi$ (ld. 4.3.6. Tétel);

c) Tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén van olyan $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció (ld. 4.3.7. Tétel), hogy $\sum_{n=0}^{\infty} y_{p(n)} = t$. Ezért (ld. 4.2. iii) megjegyzés)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_{p(n)} + \eta y_{p(n)}) = \xi + t\eta.$$

Ha tehát $x_n := z_n + \eta y_n \ \ (n \in \mathbf{N})$, akkor

$$\mathbf{C}_0 = \{\xi + t\eta \in \mathbf{C} : t \in \mathbf{R}\}.$$

A 3^o eset illusztrálásához induljunk ki egy-egy feltételesen konvergens valós számsorból, legyenek ezek $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$, és definiáljuk a (z_n) sorozatot a következőképpen:

$$z_n := \begin{cases} x_k & (n = 2k) \\ \\ \imath y_k & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ha $u, v \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós számok, akkor (ld. 4.3.7. Tétel) megadhatók olyan $p, r : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekciók, hogy

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} \ \ , \ \ v = \sum_{n=0}^{\infty} y_{r(n)}.$$

Legyen ezek után

$$s(n) := \begin{cases} \nu_k & (n = 2k, \text{ ha } z_{\nu_k} = x_{p(k)}) \\ \\ \mu_k & (n = 2k+1, \text{ ha } z_{\mu_k} = y_{r(k)}) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció, és a $\sum(z_{s(n)})$ átrendezett sor valós része $\sum(x_{p(n)})$, a képzetes része $\sum(y_{r(n)})$. Ezért (ld. 4.2. x) megjegyzés) $\sum(z_{s(n)})$ konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_{s(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} y_{r(n)} = u + \imath v.$$

Itt $u, v \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, így az $u + \imath v$ limeszpontok „kitöltik" az egész komplex $\mathbf{C}$ halmazt.

x) Legyen $2 \le p \in \mathbf{N}$, és mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ számhoz egyértelműen létezik $m \in \mathbf{N}$ és $n_0, ..., n_m \in \{0, ..., p-1\}$, amelyekre $n > 0$ esetén $n_m \neq 0$, és

$$n = \sum_{k=0}^{m} n_k p^k.$$

Mindez ui. triviális, ha $n \in \{0, ..., p-1\}$, ti. ekkor az $m := 0$, $n_0 := n$ választás megfelelő. Ezért feltehetjük, hogy $n \ge p$. Világos, hogy az

$$\mathbf{N}_m := [p^m, p^{m+1}) \cap \mathbf{N} \qquad (m \in \mathbf{N})$$

halmazokkal

$$\mathbf{N} \setminus \{0, ..., p-1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{N}_m$$

egy páronként diszjunkt halmazokra való felbontása az $\mathbf{N} \setminus \{0, 1, ..., p-1\}$ halmaznak. Következésképpen egyértelműen van olyan $m \in \mathbf{N}$, amellyel $n \in \mathbf{N}_m$. Az is nyilvánvaló, hogy bármely $1 \le m \in \mathbf{N}$ mellett

$$\mathbf{N}_m = \bigcup_{k=1}^{p-1} ([kp^m, (k+1)p^m) \cap \mathbf{N}_m)$$

(és az itt szereplő $[kp^m, (k+1)p^m) \cap \mathbf{N}_m$ $(k = 1, ..., p-1)$ halmazok is páronként diszjunktak), tehát a fenti m-hez pontosan egy $\{1, ..., p-1\} \ni n_m$-mel

$$n \in [n_m p^m, (n_m + 1)p^m).$$

Más szóval $n - n_m p^m \in [0, p^m)$. Teljes indukcióval okoskodva tegyük fel, hogy valamilyen $1 \le m \in \mathbf{N}$ és tetszőleges $s \in [0, p^m) \cap \mathbf{N}$ esetén igaz az állításunk:

$$s = \sum_{k=0}^{m-1} s_k p^k$$

bizonyos $s_k \in \{0, ..., p-1\}$ $(k = 0, ..., m-1)$ együtthatókkal. Tehát alkalmas $n_0, ..., n_{m-1} \in \{0, ..., p-1\}$ számokkal

$$n - n_m p^m = \sum_{k=0}^{m-1} n_k p^k.$$

Azt kaptuk, hogy

$$n = \sum_{k=0}^{m} n_k p^k.$$

Ha $n = \sum_{k=0}^{m} q_k p^k$ is egy ilyen előállítása n-nek és $\{k = 0, ..., m : n_k \neq q_k\} \neq \emptyset$, akkor legyen

$$j := \max\{k = 0, ..., m : n_k \neq q_k\}.$$

Tegyük fel (pl.), hogy $q_j < n_j$, amikor is

$$0 = \sum_{k=0}^{m}(n_k - q_k)p^k = \sum_{k=0}^{j-1}(n_k - q_k)p^k + (n_j - q_j)p^j \geq$$

$$(n_j - q_j)p^j - \sum_{k=0}^{j-1}(p-1)p^k \geq p^j - \sum_{k=0}^{j-1}(p-1)p^k = p^j - p^j + 1 \geq 1,$$

ami nyilván nem lehet.

xi) Az előző megjegyzésre utalva legyen $n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., p^n - 1$ esetén

$$\alpha := \frac{k}{p^n} \in [0, 1).$$

Ekkor alkalmas $k_0, ..., k_{n-1} \in \{0, ..., p-1\}$ együtthatókkal

$$\alpha = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} k_j p^j}{p^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k_j}{p^{n-j}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{n-j}}{p^j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k_{n-j-1}}{p^{j+1}}.$$

Ha tehát (a 4.3.11. Tételbeli jelöléseket használva)

$$x_j = \begin{cases} k_{n-j-1} & (j = 0, ..., n-1) \\ 0 & (j \geq n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{p^{j+1}}$. Legyen itt $\alpha > 0$ esetén

$$r := \max\{j \in \mathbf{N} : x_j \neq 0\},$$

ekkor $r \leq n - 1$, $x_r = k_{n-r-1} \geq 1$, és

$$\alpha = \sum_{j=0}^{r} \frac{x_j}{p^{j+1}} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{x_r - 1}{p^{r+1}} + \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{j+1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$y_j = \begin{cases} x_j & (j=0,...,r-1) \\ \\ x_r - 1 & (j=r) \\ \\ p-1 & (j>r) \end{cases} \qquad\qquad (j \in \mathbf{N})$$

választással is

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{p^{j+1}}.$$

Világos ugyanakkor, hogy az (x_n) együttható-sorozat különbözik (y_n)-től, hiszen $y_r = x_r - 1 \neq x_r$. Mindez azt jelenti, hogy a 4.3.11. Tételben az (ottani) (x_n) sorozatok egyértelműsége általában nem igaz: a fenti alakú $\alpha = k/p^n \in (0,1)$ (ún. *p-adikusan racionális*) számokra két különöző „előállítás" is megadható. Nem nehéz belátni, hogy ha egy $\alpha \in (0,1)$ számra van „véges" előállítás, azaz valamilyen $N \in \mathbf{N}$ és $x_j \in \{0,...,p-1\}$ $(j=0,...,N)$ esetén

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N} \frac{x_j}{p^{j+1}}$$

(ahol $x_N \neq 0$), akkor α p-adikusan racionális. (Az előbbiek szerint a fenti „véges" előállítás azzal ekvivalens, hogy

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{x_N - 1}{p^{N+1}} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{j+1}}.)$$

Valóban, ekkor

$$\alpha \cdot p^{N+1} = \sum_{j=0}^{N} x_j p^{N-j} = \sum_{l=0}^{N} x_{N-l} p^l =: k.$$

Következésképpen

$$\alpha = \frac{k}{p^{N+1}}.$$

xii) Valamely $2 \leq p \in \mathbf{N}$ mellett jelöljük $\mathbf{Q}_p$-vel a $(0,1)$-beli p-adikusan racionális számok halmazát (ld. xi) megjegyzés), és mutassuk meg, hogy bármely

$$\alpha \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}_p$$

esetén az α-ra vonatkozó 4.3.11. Tételbeli

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{p^{k+1}}$$

előállítás egyértelmű (ahol tehát $x_k \in \{0, ..., p-1\}$ $(k \in \mathbf{N})$). Ha ui. az

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{p^{k+1}}$$

előállítás is ilyen $(y_k \in \{0, ..., p-1\}$ $(k \in \mathbf{N}))$, és valamilyen $k \in \mathbf{N}$ esetén $x_k \neq y_k$, akkor legyen

$$m := \min\{k \in \mathbf{N} : x_k \neq y_k\}.$$

Feltehetjük, hogy $y_m > x_m$, azaz $y_m \geq x_m + 1$. Tehát (ld. 4.2. iii) megjegyzés)

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}} = \frac{y_m - x_m}{p^{m+1}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}} \geq$$

$$\frac{1}{p^{m+1}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}}.$$

Vegyük észre, hogy valamilyen $j \in \mathbf{N}$, $j \geq m+1$ indexre $y_j - x_j \neq p-1$. Ti. $x_k, y_k \in \{0, ..., p-1\}$ $(k \in \mathbf{N})$ miatt $y_k - x_k = p-1$ csak úgy lehetséges, ha $y_k = p-1$ és $x_k = 0$. Ha ez minden $k \in \mathbf{N}$, $k \geq m+1$ esetén teljesülne, akkor (ld. xi) megjegyzés) $\alpha \in \mathbf{Q}_p$ lenne, ami nem igaz. Tehát

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}} < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}},$$

amiből a fentieket is figyelembe véve

$$0 \geq \frac{1}{p^{m+1}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{p^{k+1}} > \frac{1}{p^{m+1}} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}} = 0$$

következik, tehát $0 > 0$, ami nem igaz.

xiii) Legyen

$$\mathcal{S}_p := \{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : x_n \in \{0, ..., p-1\} \ (n \in \mathbf{N})\},$$

és jelöljük $\mathcal{S}_{0p}$-vel azoknak az $\mathcal{S}_p$-beli (x_n) sorozatoknak a halmazát, amelyekre egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel $x_n = 0$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq N)$, vagy egy $M \in \mathbf{N}$ indexszel $x_n = p-1$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq M)$. Legyen továbbá

$$\Phi : (0,1) \setminus \mathbf{Q}_p \to \mathcal{S}_p \setminus \mathcal{S}_{0p}$$

az a leképezés, amelyre $\Phi(\alpha)$ $(\alpha \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}_p)$ az az $\mathcal{S}_p$-beli (x_n) sorozat, amely eleget tesz a 4.3.11. Tételnek. Ekkor a fenti megjegyzéseink alapján azt mondhatjuk, hogy Φ bijekció. Mivel könnyen beláthatóan a $\mathbf{Q}_p$, $\mathcal{S}_{0p}$ halmazok megszámlálhatóak, a $[0,1]$ intervallum viszont kontinuum számosságú, ezért $\mathcal{S}_p$ is kontinuum számosságú. Speciálisan a $p = 2$ esetben $\mathcal{S}_2$ a „$0-1$ sorozatok" halmaza:

$$\mathcal{S}_2 = \{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : x_n \in \{0,1\} \ (n \in \mathbf{N})\}.$$

xiv) Állapodjunk meg abban, hogy ha $\alpha \in \mathbf{Q}_p$, akkor a 4.3.11. Tétel (és a xi), xii) megjegyzések) alapján adódó kétféle

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{p^{k+1}}$$

előállítás közül az $x_k \in \{0, ..., p-1\}$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat mindig azt fogja jelenteni, amelyre alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett $x_k = 0$ $(k \in \mathbf{N}, k > N)$. Ekkor bármely $\alpha \in [0,1]$ szám *p-adikus jegyein* a 4.3.11. Tétel szerinti x_k-kat értjük, magát a 4.3.11. Tételbeli előállítást pedig az α szám *p-adikus tört-alakjának* nevezzük. Ha $p = 10$, akkor *tizedes tört-alakról,* ha $p = 2$, akkor pedig *diadikus tört-alakról* beszélünk. Azt mondjuk, hogy α *szakaszos p-adikus tört,* ha vannak olyan $N \in \mathbf{N}$, $1 \leq M \in \mathbf{N}$ számok, hogy

$$x_{N+j} = x_{N+j+sM} \qquad (s \in \mathbf{N}, j = 0, ..., M-1).$$

Egyúttal nyilván az is igaz, hogy

$$x_{N+j+sM} = x_{N+j+(s+1)M} \qquad (s \in \mathbf{N}, j = 0, ..., M-1).$$

Minden ilyen esetben $\alpha \in \mathbf{Q}$, azaz α racionális szám. Ti. ekkor

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_k}{p^{k+1}} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{x_k}{p^{k+1}} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_k}{p^{k+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{N+j+sM+1}}.$$

Következésképpen

$$p^N \alpha = \sum_{k=0}^{N-1} x_k p^{N-k-1} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{N+j+sM+1}} p^N =:$$

$$R + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{j+sM+1}}.$$

Továbbá

$$(p^N \alpha - R) p^M = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{j+sM+1}} p^M =$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j}}{p^{j+1}} p^M + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{j+(s-1)M+1}} =$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j}}{p^{j+1}} p^M + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+(s-1)M}}{p^{j+(s-1)M+1}} =: S + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{x_{N+j+sM}}{p^{j+sM+1}}.$$

Tehát

$$(p^N\alpha - R)p^M - S = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M-1}\frac{x_{N+j+sM}}{p^{j+sM+1}} = p^N\alpha - R.$$

Innen az adódik, hogy

$$\alpha = \frac{S - R + Rp^M}{p^N(p^M - 1)}.$$

Világos, hogy $S, R \in \mathbf{N}$, ezért valóban igaz, hogy $\alpha \in \mathbf{Q}$.

xv) Valamilyen $x = (x_n)$, $y = (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatok esetén legyen

$$z_n := \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az $x * y := (z_n)$ sorozatot az x, y sorozatok *konvolúciójának* nevezzük. Így pl. az $y_0 := 1$, $y_n := 0$ $(n \in \mathbf{N})$ választással $x * y = x$. Világos, hogy $x * y = y * x$, hiszen

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} y_k x_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A fenti definíció alapján nyilvánvaló, hogy a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok Cauchy-szorzata (ld. 4.3.) nem más, mint $\sum((x_n) * (y_n))$.

xvi) A Mertens-tétel (ld. 4.3.10. Tétel) bizonyításában követett módszerrel kapjuk az alábbi állítást: ha $a_n, b_n \in \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\lim(a_n) = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty$ és

$$v_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $\lim(v_n) = 0$.

xvii) Az átrendezésekkel kapcsolatos 4.3.6. Tétel egy másik „kedvelt" bizonyítása pl. a következő. Tegyük fel először, hogy a szóban forgó abszolút konvergens $\sum(x_n)$ sor tagjai nem-negatív valós számok: $x_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor a szóban forgó tétel bizonyításában látottak szerint

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{p_n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_n.$$

Ha mindezt a $\sum(x_n)$ sor helyett a $\sum(x_{p_n})$ sorra és a $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció helyett a $p^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra alkalmazzuk, akkor a „fordított"

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_{p_n}$$

becslés adódik. Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{p_n}.$$

Legyen most $x_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ tetszőleges, és valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\alpha^+ := \begin{cases} \alpha & (\alpha \geq 0) \\ \\ 0 & (\alpha < 0) \end{cases} \quad , \quad \alpha^- := \begin{cases} -\alpha & (\alpha < 0) \\ \\ 0 & (\alpha \geq 0) \end{cases}$$

(az α *pozitív része,* ill. *negatív része*). Világos, hogy

$$\alpha^+, \alpha^- \geq 0 \quad , \quad \alpha = \alpha^+ - \alpha^- \quad , \quad |\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-.$$

Könnyű meggondolni, hogy ha $\sum(x_n)$ abszolút konvergens, akkor a $\sum(x_n^+)$, $\sum(x_n^-)$ nem-negatív tagú sorok konvergensek. Következésképpen az előbbiek alapján bármely $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^+ \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^-,$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^- = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^{\pm} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$$

miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{p_n}| = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^+ + \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}^- < +\infty.$$

Most tegyük fel, hogy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$, és legyen

$$x_n = u_n + \imath v_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ahol $u_n, v_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$). Ha $\sum(x_n)$ abszolút konvergens sor, akkor a $\sum(u_n)$, $\sum(v_n)$ valós sorok is abszolút konvergensek. Így az eddig belátottak alapján tetszőleges $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \imath \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{p_n} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} v_{p_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n},$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{p_n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_{p_n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |v_{p_n}| < +\infty.$$

4.5. Hatványsorok

A végtelen sorok egy fontos osztályát alkotják az ún. függvénysorok. Ezek értelmezéséhez nevezzünk egy (f_n) sorozatot *függvénysorozatnak,* ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén f_n függvény. Feltesszük, hogy valamilyen $\mathcal{D} \neq \emptyset$ halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. az $f_n(t) := t^n \quad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{K}, n \in \mathbf{N})$ függvények egy ilyen (f_n) függvénysorozatot határoznak meg.

Ha a szóban forgó (f_n) függvénysorozatra még az is igaz, hogy $\mathcal{R}_{f_n} \subset \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{K} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor van értelme az (f_n) függvénysorozat által meghatározott $\sum(f_n)$ *függvénysornak*:

$$\sum(f_n) := \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right).$$

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

részletösszeg-függvények által generált (F_n) függvénysorozat. Így pl. az előbbi

$$f_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} n+1 & (t = 1) \\ \\ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{K}).$$

Ha valamilyen $t \in \mathcal{D}$ esetén az $(F_n(t))$ sorozat konvergens (azaz a $\sum(f_n(t))$ végtelen sor konvergens), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor a t *helyen konvergens.* (Ha $\sum(|f_n(t)|)$ is konvergens, akkor a szóban forgó függvénysor a t helyen *abszolút konvergens.*) A

$$\mathcal{D}_0 := \{t \in \mathcal{D} : (F_n(t)) \text{ konvergens}\}$$

halmaz a $\sum(f_n)$ függvénysor *konvergencia-tartománya.* Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az

$$F(t) := \lim (F_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_0)$$

függvény a $\sum(f_n)$ függvénysor *összegfüggvénye.* Pl. az előbbi példában

$$\mathcal{D}_0 = \{\xi \in \mathbf{K} : |\xi| < 1\},$$

és

$$F(t) = \frac{1}{1-t} \qquad (t \in \{\xi \in \mathbf{K} : |\xi| < 1\}).$$

A továbbiakban speciális függvénysorokkal foglalkozunk. Legyen ezek értelmezéséhez adott az $a \in \mathbf{K}$ *középpont* és az $(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *együttható-sorozat,* és ezek segítségével tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f_n(t) := a_n(t-a)^n \qquad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{K},\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysort (a középpontú, (a_n) együtthatós) *hatványsornak* nevezzük. Ebben az esetben az F_n $(n \in \mathbf{N})$ részletösszeg-függvények a következők:

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t-a)^k \qquad (t \in \mathbf{K},\, n \in \mathbf{N}),$$

azaz (ld. 2.4. xiv) megjegyzés) F_n-ek polinomok. Nyilvánvaló, hogy a szóban forgó hatványsor a $t = a$ helyen konvergens, és (F-fel jelölve az összegfüggvényt) $F(a) = a_0$. (A hatványsorokkal kapcsolatban is a $0^0 := 1$ megállapodással élünk.)

Az előbbi hatványsor jelölésére alkalmanként használni fogjuk a $\sum(a_n(t-a)^n)$ szimbólumot is.

A következő tételben hatványsorok konvergencia-tartományával foglalkozunk.

4.5.1. Tétel. *Bármilyen $a, a_n \in \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén egyértelműen létezik olyan $0 \le r \in \overline{\mathbf{R}}$, hogy*

1^o *ha $r > 0$, akkor minden $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| < r$ helyen a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens;*

2^o *ha $r < +\infty$, akkor tetszőleges $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$ mellett a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen divergens.*

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy ha a szóban forgó hatványsor valamilyen $z \in \mathbf{K}$, $|z-a| > 0$ helyen konvergens, akkor minden $y \in \mathbf{K}$, $|y-a| < |z-a|$ esetén y-ban abszolút konvergens. Valóban, a

$$q := \frac{|y-a|}{|z-a|}$$

jelöléssel $0 \leq q < 1$ és

$$|a_k(y-a)^k| = |a_k(z-a)^k| \cdot q^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel a hatványsorunk z-ben konvergens, ezért (ld. 4.1.1. Tétel) $\lim (a_n(z-a)^n) = 0$, így (ld. 3.5.4. Tétel) van olyan $K \geq 0$, hogy

$$|a_n(z-a)^n| \leq K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$|a_k(y-a)^k| \leq Kq^k \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(y-a)^k| \leq K \sum_{k=0}^{\infty} q^k < +\infty.$$

Megjegyezzük, hogy ha ilyen $a \neq z \in \mathbf{K}$ nincs, akkor minden $a \neq z \in \mathbf{K}$ esetén a szóban forgó hatványsor divergens z-ben. Így világos, hogy az $r := 0$ eleget tesz 2^o-nek.

Legyen ezek után

$$r := \sup \{|z-a| : z \in \mathbf{K}, \sum (a_n(t-a)^n) \text{ konvergens } z\text{-ben}\}.$$

Tegyük fel először, hogy $r > 0$. Ha $x \in \mathbf{K}$ és $|x-a| < r$, akkor (a szuprémum definíciója miatt) van olyan $z \in \mathbf{K}$, amelyre $|x-a| < |z-a| < r$, és $\sum (a_n(t-a)^n)$ abszolút konvergens z-ben. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x-a|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z-a|^k < +\infty,$$

azaz a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens.

Ha $r < +\infty$ és lenne olyan $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$, hogy $\sum (a_n(t-a)^n)$ konvergens x-ben, akkor az előbbiek miatt bármely $z \in \mathbf{K}$, $r < |z-a| < |x-a|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens lenne z-ben. Az r definíciója alapján tehát $|z-a| \leq r$, szemben $r < |z-a|$-val.

Ha a fenti r mellett valamilyen $0 \leq R \in \overline{\mathbf{R}}$ esetén is igaz a tétel (formálisan r helyett R-et írva), és (indirekt módon gondolkozva) $r \neq R$ (pl. $r < R$), akkor legyen $x \in \mathbf{K}$, $r < |x-a| < R$. Az $r < |x-a|$ egyenlőtlenségből 2^o alapján az következik, hogy a $\sum (a_n(x-a)^n)$ sor divergens, az $|x-a| < R$-ből pedig 1^o szerint az, hogy a $\sum (a_n(x-a)^n)$ sor (abszolút) konvergens. Ez nyilván ellentmondás, ezért $r = R$. ■

A következő tételben (bizonyos (a_n) együttható-sorozatok esetén) ki is számítjuk ezt az r-et.

4.5.2. Tétel (Cauchy-Hadamard). *Tegyük fel, hogy az* $(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *olyan sorozat, amelyre létezik a* $\lim(\sqrt[n]{|a_n|})$ *határérték, és legyen*

$$r := \begin{cases} +\infty & \Big(\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0\Big) \\ \dfrac{1}{\lim(\sqrt[n]{|a_n|})} & \Big(\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) > 0\Big). \end{cases}$$

Ekkor bármely $a \in \mathbf{K}$ *mellett a* $\sum(a_n(t-a)^n)$ *hatványsorról a következőket mondhatjuk:*

1^o *ha* $r > 0$, *akkor minden* $x \in \mathbf{K}, |x-a| < r$ *esetén a* $\sum(a_n(t-a)^n)$ *hatványsor az* x *helyen abszolút konvergens;*

2^o *ha* $r < +\infty$, *akkor tetszőleges* $x \in \mathbf{K}, |x-a| > r$ *mellett a* $\sum(a_n(t-a)^n)$ *hatványsor az* x *helyen divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a \neq x \in \mathbf{K}$, ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-a| \qquad (n \in \mathbf{N}, n \geq 2),$$

így létezik

$$\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) = \lim(\sqrt[n]{|a_n|}) \cdot |x-a|.$$

Ha tehát $\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0$ (azaz $r = +\infty$), akkor $\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) = 0 < 1$, ha pedig

$$0 < \lim(\sqrt[n]{|a_n|}) < +\infty$$

(azaz $0 < r < +\infty$), akkor

$$\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) = \frac{|x-a|}{r}.$$

Ezért $0 < |x-a| < r$ esetén $\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) < 1$. A Cauchy-féle gyök-kritérium (ld. 4.3.1. Tétel) szerint így a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x-ben (tehát a $\sum(a_n(x-a)^n)$ sor) abszolút konvergens (a 0-ban pedig triviális módon az), amivel 1^o-et beláttuk.

A 2^o állítás analóg módon adódik. Ha ui. $\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = +\infty$ (azaz $r = 0$), akkor a fentiek szerint minden $x \in \mathbf{K}, |x-a| > 0 = r$ esetén

$$\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) = \lim(\sqrt[n]{|a_n|}) \cdot |x-a| = +\infty > 1.$$

Ezért ismét a Cauchy-féle gyök-kritérium (ld. 4.3.1. Tétel) miatt a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor divergens az x-ben. A $0 < \lim(\sqrt[n]{|a_n|}) < +\infty$ esetben (amikor is $0 < r < +\infty$) pedig tetszőleges $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$ helyen

$$\lim(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}) = \frac{|x-a|}{r} > 1$$

alapján újra csak a Cauchy-féle gyök-kritériumból (ld. 4.3.1. Tétel) következően a szóban forgó hatványsor divergál az x-ben. ∎

Tekintsük a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsort. Ekkor a 4.5.1. Tételbeli r-et az illető hatványsor *konvergencia-sugarának* nevezzük. Legyen $r < +\infty$ esetén

$$G_r(a) := \{x \in \mathbf{K} : |x-a| \le r\},$$

ill., ha $r > 0$, akkor (részben) emlékeztetünk a $K_r(a)$ környezetre:

$$K_r(a) := \{x \in \mathbf{K} : |x-a| < r\}.$$

Speciálisan $K_{+\infty}(a) = \mathbf{K}$. Jelölje $\mathcal{D}_0$ a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor konvergencia-tartományát, akkor a 4.5.1. Tétel szerint

1^o ha $r = +\infty$, akkor $\mathcal{D}_0 = \mathbf{K}$, és minden $x \in \mathbf{K}$ esetén a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens;

2^o ha $r = 0$, akkor $\mathcal{D}_0 = \{a\}$, és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-a)^n = a_0$;

3^o ha $0 < r < +\infty$, akkor $K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset G_r(a)$, és a $K_r(a)$ környezet minden x pontjára a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens;

4^o ha $r > 0$, akkor tetszőleges $0 \le \rho < r$ számhoz válasszuk az $x \in K_r(a)$ elemet úgy, hogy $|x-a| = \rho$. Ekkor (ld. 3^o)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-a|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n < +\infty.$$

Tegyük fel, hogy a szóban forgó $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergencia-sugara nem nulla. Ekkor értelmezhetjük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in K_r(a)),$$

ami nem más, mint a $\sum(a_n(t-a)^n)$ függvénysor

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathcal{D}_0)$$

összegfüggvényének a leszűkítése (ld. 2.4. xv) megjegyzés) a $K_r(a)$ környezetre:

$$f = F_{|_{K_r(a)}}.$$

(Ezzel együtt a későbbiekben az f-et is úgy emlegetjük, mint az illető hatványsor *összegfüggvénye.*) Az ilyen „szerkezetű" f függvényt *analitikus függvénynek* nevezzük.

Az alábbiakban felsorolunk néhány, a gyakorlat szempontjából is alapvető fontosságú analitikus függvényt. Ehhez először gondoljuk meg, hogy

$$\lim(\sqrt[n]{n!}) = +\infty.$$

Valóban, minden $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ esetén

$$n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2},$$

így

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(n/2)^{n/2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Innen az állításunk már nyilvánvaló. Ezért (rendre) az

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \\ \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} \\ \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

választással $\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0$, tehát (ld. 4.5.2. Tétel) a $\sum(a_n t^n)$ hatványsorok konvergencia-sugara $r = +\infty$. Legyen ezek után

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

$$\mathrm{sh} x := \mathrm{sh}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

$$\mathrm{ch} x := \mathrm{ch}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

az *exponenciális-*, a *szinusz-*, a *koszinusz-*, a *szinuszhiperbolikusz-*, és a *koszinuszhiperbolikusz-függvény.* Speciálisan a 4.5.1. Tétel szerint

$$\exp 1 = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ha $N \in \mathbf{N}$ és a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor együtthatóira $a_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, akkor nyilván $\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0$. Ezért a szóban forgó hatványsor r konvergencia-sugarára $r = +\infty$, és az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K})$$

összegfüggvény egy polinom (ld. 2.4. xiv) megjegyzés).

4.5.3. Tétel. *Tekintsük a* $\sum (a_n(t-a)^n)$ *hatványsort, legyen* r *a konvergencia-sugara, és tegyük fel, hogy* $r > 0$. *Ekkor bármely* $b \in K_r(a)$ *esetén léteznek a*

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(b-a)^{n-k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

sorösszegek, és tetszőleges $0 < \rho < r - |b-a|$ *mellett*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-b)^k \qquad (x \in K_\rho(b)).$$

Bizonyítás. Mutassuk meg először is, hogy minden $0 < \rho \le r - |b-a|$ esetén

$$K_\rho(b) \subset K_r(a).$$

Ha ui. $x \in K_\rho(b)$, azaz $|x-b| < \rho$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|x-a| = |(x-b)+(b-a)| \le |x-b| + |b-a| < \rho + |b-a| \le r,$$

azaz $|x-a| < r$, tehát $x \in K_r(a)$. Következésképpen a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens, és a binomiális tételt alkalmazva

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-b)+(b-a))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} \cdot (x-b)^k.$$

Legyen

$$c_{nk} := \begin{cases} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(x-b)^k & (k = 0, ..., n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}),$$

ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}.$$

Mivel

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |b-a|^{n-k} \cdot |x-b|^k = |a_n| \left(|b-a| + |x-b|\right)^n \leq$$

$$|a_n| \left(|b-a| + \rho\right)^n = |a_n|\sigma^n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\sigma := |b-a| + \rho < r$. Ha $y \in K_r(a)$ olyan, hogy $\sigma = |y-a|$, akkor (ld. 4.5.1. Tétel) a $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsor abszolút konvergens az y helyen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(y-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\sigma^n < +\infty.$$

Világos, hogy tetszőleges $N, K \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} |c_{nk}| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} |c_{nk}| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| < +\infty,$$

amiből (ld. 3.7.5. Tétel és 3.8. ix) megjegyzés)

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{nk}| = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} |c_{nk}| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| < +\infty,$$

ill. innen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{nk}| = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{nk}| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| < +\infty.$$

A $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}$ szerepcserével analóg módon kapjuk a „fordított" irányú

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{nk}|$$

egyenlőtlenséget. Következésképpen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{nk}|.$$

Vegyük észre, hogy a most kapott egyenlőség a c_{nk}-k helyett minden olyan $d_{nk} \in \mathbf{K}$ $(n, k \in \mathbf{N})$ számok esetén igaz, amelyekre

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| < +\infty.$$

Ha tehát még $0 \le d_{nk} \in \mathbf{R}$ $(n, k \in \mathbf{N})$ is igaz, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk}.$$

Ha $(*)$ mellett „csak annyi" teljesül, hogy $d_{nk} \in \mathbf{R}$ $(n, k \in \mathbf{N})$, akkor legyen

$$d_{nk}^{+} := \begin{cases} d_{nk} & (d_{nk} \ge 0) \\ 0 & (d_{nk} < 0) \end{cases}, \quad d_{nk}^{-} := \begin{cases} -d_{nk} & (d_{nk} < 0) \\ 0 & (d_{nk} \ge 0) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Nyilván

$$d_{nk}^{+},\ d_{nk}^{-} \ge 0 \ , \ |d_{nk}| = d_{nk}^{+} + d_{nk}^{-} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Így d_{nk}^{+}, $d_{nk}^{-} \le |d_{nk}|$ $(n, k \in \mathbf{N})$, ezért a $(*)$ feltétel a d_{nk}-k helyett d_{nk}^{+}-okra, d_{nk}^{-}-okra is igaz. Ebből kifolyólag

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{+} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk}^{+} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{-} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk}^{-}.$$

Az utóbbi egyenlőségekből $d_{nk} = d_{nk}^{+} - d_{nk}^{-}$ $(n, k \in \mathbf{N})$ (és a 4.2. iii) megjegyzés) alapján következik a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk}$$

egyenlőség. Ha most a $(*)$ feltételnek eleget tevő d_{nk} $(n, k \in \mathbf{N})$ számok (egyébként) tetszőleges komplex számok, akkor legyen

$$u_{nk} := \operatorname{Re} d_{nk} \ , \ v_{nk} := \operatorname{Im} d_{nk} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Mivel $|u_{nk}|, |v_{nk}| \le |d_{nk}|$ $(n, k \in \mathbf{N})$, ezért a $(*)$ feltétel a d_{nk}-k helyett az u_{nk}-kra és a v_{nk}-kra is teljesül. Innen a fenti „valós" esethez hasonlóan jutunk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk}$$

egyenlőséghez.

Mindezt most a $d_{nk} := c_{nk}$ $(n, k \in \mathbf{N})$ esetben alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk}.$$

Figyelembe véve a c_{nk}-k jelentését ezért azt írhatjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} \right) (x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k.$$

■

4.5.4. Tétel (egyértelműség). *Tegyük fel, hogy a* $\sum(a_n(t-a)^n)$, $\sum(b_n(t-a)^n)$ *hatványsorokra valamilyen* $0<R$ *esetén igaz a következő egyenlőség:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad (a \neq x \in K_R(a)).$$

Ekkor $a_n = b_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy $a_0 = b_0$. Legyen ehhez $0 < r_0 < R$, ekkor tetszőleges $0 < r \leq r_0$, $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| = r$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + (x-a)\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = b_0 + (x-a)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-a)^{n-1}.$$

Következésképpen

$$|a_0-b_0| = |x-a|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)(x-a)^{n-1}\right| \leq |x-a|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(|b_n|+|a_n|)\cdot|x-a|^{n-1} \leq$$

$$|x-a|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(|b_n|+|a_n|)\cdot r_0^{n-1} =: M|x-a| = Mr.$$

(Emlékeztetünk arra (ld. 4.5.1. Tétel), hogy ha $y \in K_R(a)$ olyan, hogy $|y-a| = r_0$, akkor a $\sum(a_n(t-a)^n)$, $\sum(b_n(t-a)^n)$ hatványsorok y-beli abszolút konvergenciájából

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}(|b_n|+|a_n|)\cdot r_0^{n-1} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}(|b_n|+|a_n|)\cdot r_0^{n} \leq$$

$$\frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}(|b_n|+|a_n|)\cdot r_0^{n} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}(|b_n(y-a)^n|+|a_n(y-a)^n|) < +\infty$$

következik.) Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett a fenti r nyilván megválasztható úgy is, hogy $Mr < \varepsilon$, ezért

$$|a_0-b_0| < \varepsilon.$$

Világos, hogy ez csak $|a_0-b_0| = 0$, azaz $a_0 = b_0$ esetén lehet igaz.

Tegyük fel, hogy valamilyen $N \in \mathbf{N}$ mellett már beláttuk: bármilyen $n = 0, ..., N$ indexre $a_n = b_n$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-a)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad (x \in K_R(a)),$$

ezért

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad (x \in K_R(a)).$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-a)^n = (x-a)^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N+1}(x-a)^n =: (x-a)^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

ill.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x-a)^n = (x-a)^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+N+1}(x-a)^n =: (x-a)^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n,$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \qquad (a \neq x \in K_R(a)).$$

A bizonyítás elején mondottak szerint innen

$$c_0 = a_{N+1} = d_0 = b_{N+1}$$

következik. Ezzel (a teljes indukcióra gondolva) az állításunkat beláttuk. ■

Megjegyezzük, hogy a későbbiekben az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in K_R(a))$$

összegfüggvény segítségével ki is számítjuk az $a_n \quad (n \in \mathbf{N})$ együtthatókat.

4.6. Megjegyzések

i) Vizsgáljuk az alábbi példákat:

$$a_{n1} := 1 \ , \ a_{n2} := \frac{1}{n+1} \ , \ a_{n3} := \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ill. legyen $a^{(i)} := 0 \quad (i = 1, 2, 3)$. Ekkor a $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$ egyenlőség (ld. 3.9.6. Tétel) miatt a $\sum (a_{ni}(x - a^{(i)})^n)$ hatványsorok $r_i \quad (i = 1, 2, 3)$ konvergencia-sugarára (ld. 4.5.2. Tétel) $r_i = 1 \quad (i = 1,2,3)$. Tehát ($\mathcal{D}_{0i}$-vel $\quad (i = 1,2,3)$ jelölve a $\sum (a_{ni}(x - a^{(i)})^n)$ hatványsor konvergencia-tartományát) i) szerint

$$\{x \in \mathbf{K} : |x| < 1\} \subset \mathcal{D}_{0i} \subset \{x \in \mathbf{K} : |x| \leq 1\}.$$

Ugyanakkor $x \in \mathbf{K}$, $|x| = 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

miatt (ld. 4.1.3. Tétel) a $\sum (x^n/(n+1)^2)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens. Viszont (ld. 4.1.3., 4.3.3. Tételek)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \in \mathbf{R}$$

szerint a $\sum (t^n/(n+1))$ hatványsor az 1-ben divergens, a (-1)-ben pedig konvergens (de nem abszolút konvergens). Világos, hogy a $\sum (t^n)$ hatványsor egyetlen $x \in \mathbf{K}$, $|x| = 1$ esetén sem konvergens az x helyen, hiszen

$$\lim(|x^n|) = \lim(1) = 1 \neq 0$$

(és ld. 4.1.1. Tétel). Ezek a példák azt is jól mutatják, hogy a fent már említett $K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset G_r(a)$ tartalmazásokban (bár előfordul) általában nem írható egyenlőség. Ha $0 < r < +\infty$, akkor

$$G_r(a) \setminus K_r(a) = \{x \in \mathbf{K} : |x - a| = r\}$$

(a $G_r(a)$ halmaz „pereme"), ami a valós esetben ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$)) az $\{a - r, a + r\}$ halmaz, ha pedig $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, akkor a komplex síkon az a középpontú, r sugarú körvonal. Másképp fogalmazva, a konvergencia szempontjából a $G_r(a) \setminus K_r(a)$ peremen „bármi" előfordulhat.

ii) Számítsuk ki valamilyen $x \in \mathbf{K}$ mellett a $\sum (a_n(x-a)^n)$, $\sum (b_n(x-a)^n)$ sorok $\sum(A_n)$ Cauchy-szorzatát:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - a)^k b_{n-k}(x - a)^{n-k} = (x - a)^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $(c_n) = (a_n) * (b_n)$ (az (a_n), (b_n) sorozatok konvolúciója (ld. 4.4. xv) megjegyzés)), akkor

$$A_n = c_n(x - a)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a $\sum (a_n(t - a)^n)$, $\sum (b_n(t - a)^n)$ hatványsorok „Cauchy-szorzata" is hatványsor, mégpedig a $\sum (c_n(t - a)^n)$ hatványsor.

iii) A 4.5.1., 4.3.10. Tételek alapján bármely $x, y \in \mathbf{K}$ esetén az

$$\exp x \cdot \exp y$$

szorzatot Cauchy-szorzással is kiszámíthatjuk a következőképpen:

$$\exp x \cdot \exp y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

(felhasználva a binomiális tételt is). Emeljük ki külön is az exponenciális függvényre most kapott *multiplikatív* tulajdonságot:

$$\exp(x+y) = (\exp x) \cdot (\exp y) \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

Speciálisan az $y := -x$ választással

$$\exp 0 = 1 = (\exp x) \cdot (\exp(-x)),$$

tehát $\exp x \neq 0$, és

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ezért $\exp(x-y) = \exp(x + (-y)) = (\exp x) \cdot (\exp(-y))$ miatt

$$\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y} \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

A multiplikativitási tulajdonság alapján könnyen adódik, hogy

$$\exp(nx) = (\exp x)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ti. $n = 0$-ra

$$\exp(0 \cdot x) = \exp 0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{0^j}{j!} = \frac{0^0}{0!} = 1 = (\exp x)^0 .$$

Ha viszont valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $\exp(nx) = (\exp x)^n$, akkor

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx) \cdot \exp x = (\exp x)^n \cdot \exp x = (\exp x)^{n+1}.$$

Speciálisan $x = 1$-re

$$\exp n = (\exp 1)^n = e^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

iv) Lássuk be az alábbi ún. *Euler-összefüggést*:

$$\exp(\imath x) = e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ehhez először gondoljuk meg, hogy ha a $\sum(z_n)$ (szám)sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(z_{2n})$, $\sum(z_{2n+1})$ sorok is abszolút konvergensek, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n+1}.$$

Ui.

$$\sum_{k=0}^{n} |z_{2k}| \le \sum_{k=0}^{2n} |z_k| \le \sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |z_k| : m \in \mathbf{N}\right\} < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_{2k}|\right)$ sorozat korlátos. Így (ld. 3.5.3. Tétel) $\sum(z_{2n})$ abszolút konvergens. Ugyanígy adódik, hogy a $\sum(z_{2n+1})$ sor is abszolút konvergens. Legyen

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} z_n \ , \ \beta := \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n} \ , \ \gamma := \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n+1},$$

ekkor

$$S_n := \sum_{k=0}^{2n+1} z_k = \sum_{k=0}^{n} z_{2k} + \sum_{j=0}^{n} z_{2j+1} =: R_n + T_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 3.5.2. Tétel)

$$\lim(S_n) = \alpha \ , \ \lim(R_n) = \beta \ , \ \lim(T_n) = \gamma,$$

ezért (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \alpha = \lim(S_n) = \lim(R_n + T_n) = \lim(R_n) + \lim(T_n) =$$

$$\beta + \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}.$$

Mindezt felhasználva

$$e^{\imath x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + \imath \sin x.$$

v) Mutassuk meg, hogy fennállnak az alábbi *összegzési tételek*:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad (x, y \in \mathbf{K}),$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

Speciálisan

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \ \ , \ \ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Valóban, az Euler-összefüggés (ld. iv)) alapján

$$e^{\imath x} + e^{-\imath x} = \cos x + \imath \sin x + \cos(-x) + \imath \sin(-x) =$$

$$\cos x + \imath \sin x + \cos x - \imath \sin x = 2 \cos x \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

ill.

$$e^{\imath x} - e^{-\imath x} = \cos x + \imath \sin x - \cos(-x) - \imath \sin(-x) =$$

$$\cos x + \imath \sin x - \cos x + \imath \sin x = 2\imath \sin x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Következésképpen

$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \ \ , \ \ \sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ezért a iii) megjegyzésre hivatkozva

$$\sin(x+y) = \frac{e^{\imath(x+y)} - e^{-\imath(x+y)}}{2\imath} = \frac{e^{\imath x}e^{\imath y} - e^{\imath(-x)}e^{\imath(-y)}}{2\imath} =$$

$$\frac{(\cos x + \imath \sin x)(\cos y + \imath \sin y) - (\cos(-x) + \imath \sin(-x))(\cos(-y) + \imath \sin(-y))}{2\imath} =$$

$$\frac{(\cos x + \imath \sin x)(\cos y + \imath \sin y) - (\cos x - \imath \sin x)(\cos y - \imath \sin y)}{2\imath} =$$

$$2\imath \cdot \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{2\imath} = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

A másik összegzési egyenlőséget analóg módon kapjuk.

vi) (*Pitagoraszi-összefüggés*): bármely $x \in \mathbf{K}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ui. ismét az Euler-összefüggésre hivatkozva (ld. iv)), ill. iii) alapján

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\imath x} + 2 + e^{-2\imath x}}{4}$$

és

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^2 = \frac{e^{2\imath x} - 2 + e^{-2\imath x}}{-4}.$$

Összeadva a most kapott két egyenlőséget kapjuk a Pitagoraszi-összefüggést. Ha itt $x \in \mathbf{R}$, akkor mindez geometriailag azt jelenti, hogy a $(\cos x, \sin x) \in \mathbf{R}^2$ pont rajta van (a koordinátageometriai értelemben vett euklideszi síkon) az origó középpontú, 1-sugarú körön, azaz az $u := \cos x$, $v := \sin x$ koordináták kielégítik az $u^2 + v^2 = 1$ egyenletet.

vii) Legyen $x \in \mathbf{K}$, ekkor

$$\sin(\imath x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\imath x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\imath \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\imath^2)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \imath \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \imath \cdot \operatorname{sh} x.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\cos(\imath x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\imath x)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x.$$

Következésképpen

$$\operatorname{sh} x = \imath \cdot \sin(\imath x) \quad , \quad \operatorname{ch} x = \cos(\imath x) \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Innen a iv) Euler-összefüggést felhasználva tetszőleges $\mathbf{K} \ni x$-re

$$e^{-x} = e^{\imath \cdot \imath x} = \cos(\imath x) + \imath \sin(\imath x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x,$$

$$e^{x} = e^{\imath \cdot (-\imath x)} = \cos(-\imath x) + \imath \sin(-\imath x) = \cos(\imath x) - \imath \sin(\imath x) = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

Összeadva, ill. kivonva egymásból az utóbbi két egyenlőséget az alábbi „explicit" kifejezésekhez jutunk:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

viii) A vi), ill. a vii) megjegyzés szerint tehát

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2(\imath x) + \sin^2(\imath x) = 1 \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Továbbá a vi) megjegyzésben mondottak analógiájára, ha itt $x \in \mathbf{R}$, akkor az $u := \operatorname{ch} x$, $v := \operatorname{sh} x$ koordináták kielégítik az $u^2 - v^2 = 1$ egyenletet, azaz a $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) \in \mathbf{R}^2$ pont rajta van az előbbi egyenletű hiperbolán. Megjegyezzük még, hogy a sin, cos és az sh, ch függvények közötti, a vii) megjegyzésben kapott összefüggések alapján könnyűszerrel fogalmazhatunk meg az v) megjegyzés mintájára „összegzési" tételeket az sh, ch függvényekre is.

ix) Bizonyítsuk be, hogy

$$(e^z)^n = \exp^n z = (\exp z)^n = \exp(nz) = e^{nz} \qquad (z \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}).$$

Ui. a teljes indukcióra hivatkozva először is jegyezzük meg, hogy $n = 0$ esetén az állítás triviális:

$$1 = (e^z)^0 = (\exp x)^0 = \exp 0 \qquad (z \in \mathbf{K}).$$

Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett igaz az egyenlőségünk, akkor a multiplikativitási tulajdonságra (ld. iii)) hivatkozva

$$(e^z)^{n+1} = (e^z)^n \cdot e^z = \exp(nz)\exp z = \exp(nz+z) = \exp\left((n+1)z\right) = e^{(n+1)z}.$$

x) A 4.5.3. Tétel arról szól, hogy egy hatványsor középpontja tetszőlegesen „eltolható" a $K_r(a)$ környezeten belül: megfelelő együtthatókkal az „új" középpont egy alkalmas környezetére leszűkítve a kiindulási hatványsor összegfüggvényét az „új" hatványsor összegfüggvényét kapjuk. Mivel bizonyos értelemben ez az eljárás is egyfajta átrendezése a kiindulási hatványsornak, ezért szokták a 4.5.3. Tételt is (hatványsorok) *átrendezési tételeként* emlegetni.

xi) Illusztráljuk a 4.5.3. Tétel állítását pl. az exp függvény esetében. Legyen ehhez $b := 1$, $a := 0$, ekkor a

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b-a)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-1)^k \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ugyanakkor (ld. iii))

$$\exp x = \exp(x-1+1) = \exp(x-1)\cdot \exp 1 = \sum_{k=0}^{\infty} e\frac{(x-1)^k}{k!} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Innen a 4.5.4. Tétel alapján az következik, hogy

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} = \frac{e}{k!} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mindez persze a 4.5.4. Tétel nélkül is nyilvánvaló már:

$$k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

xii) A 4.5.3. (átrendezési) Tétel és a 4.5.4. (egyértelműségi) Tétel alkalmazására mutassuk be az alábbi példát. Legyen a szóban forgó hatványsor a $\sum(t^n)$, amikor is $a = 0$, $a_n = 1$ $(n \in \mathbf{N})$ és $r = 1$. Ezért bármely $b \in K_1(0)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k \qquad (x \in K_1(0), |x-b| < 1-|b|),$$

ahol

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} b^{n-k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor (mint egy mértani sor összege)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-b-(x-b)} = \frac{1}{1-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x-b}{1-b}} =$$

$$\frac{1}{1-b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-b}{1-b}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-b)^k}{(1-b)^{k+1}} \qquad (x \in K_1(0), |x-b| < |1-b|).$$

Tehát

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} b^{n-k} = \frac{1}{(1-b)^{k+1}} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan a $b := 1/2$ választással

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = 2 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

xiii) Legyen valamilyen $a : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{K}$ függvény (*kettős sorozat*) esetén

$$a_{ik} := a(i,k) := a((i,k)) \qquad ((i,k) \in \mathbf{N}^2).$$

(Kettős sorozatok esetén is használatos (a sorozatok analógiájára) az (a_{ik}) szimbólum az a helyett.) Tegyük fel, hogy minden $j \in \mathbf{N}$ esetén konvergens az a $\sum(x_n)$ végtelen sor, ahol

$$x_n := a_{nj} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és legyen

$$t_j := \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nj}.$$

Ekkor a $\sum(t_j)$ sort az (a_{ik}) kettős sorozat által meghatározott (*oszlop-*)*kettős sornak* nevezzük. Hasonlóan, ha minden $m \in \mathbf{N}$ esetén konvergens az a $\sum(y_n)$ végtelen sor, ahol

$$y_n := a_{mn} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és

$$T_m := \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn},$$

akkor a $\sum(T_m)$ sort az (a_{ik}) kettős sorozat által meghatározott $($*sor-*$)$*kettős sornak* nevezzük. Ha viszont

$$c_n := \sum_{s=0}^{n} a_{sn-s} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a $\sum(c_n)$ sor az (a_{ik}) kettős sorozat által meghatározott *Cauchy-kettős sor.* A most értelmezett kettős sorokra igaz az alábbi tétel: ha

$$(*) \qquad \sup\left\{\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} |a_{nk}| : N, K \in \mathbf{N}\right\} < +\infty,$$

akkor az előbb értelmezett mindhárom kettős sor abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Tehát (ugyanezt részletesebben leírva)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{kn-k}.$$

Világos, hogy a 4.5.3. Tétel bizonyításában a (c_{nk}), ill. a (d_{nk}) kettős sorozatok által meghatározott kettős sorokat vizsgáltuk a $(*)$ feltétel mellett.

xiv) Vegyük észre, hogy a 4.5.1. Tétel bizonyításában csak annyit használtunk ki, hogy valamilyen $a \neq z \in \mathbf{K}$ esetén az $(a_n(z-a)^n)$ sorozat korlátos. Ebből tehát már következik, hogy a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor minden olyan $x \in \mathbf{K}$ helyen abszolút konvergens, amelyre $|x-a| < |z-a|$. Mindez másképp megfogalmazva azt jelenti, hogy ha a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergencia-sugara pozitív, akkor bármely $0 \leq \rho < r$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < +\infty$.

5. fejezet

Határérték, folytonosság

5.1. Pont- és halmaz-tulajdonságok

A címben jelzett fogalmakat $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvényekkel kapcsolatban fogjuk tárgyalni, ahol $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ (egymástól függetlenül) az $\mathbf{R}$ valós számok halmazát, vagy a $\mathbf{C}$ komplex számok halmazát jelöli. Tehát: $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (*valós függvény*), $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (*komplex függvény*), $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ (*valós-komplex függvény*), $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ (*komplex-valós függvény*). Mindehhez előzetesen szükségünk van $\mathbf{K}$-beli halmazok torlódási pontjának a fogalmára. Legyen ez utóbbihoz $A \subset \mathbf{K}$ és $\alpha \in \mathbf{K}$. Azt mondjuk, hogy az α *torlódási pontja* az A halmaznak, ha bármely $K(\alpha)$ környezetre

$$(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Más megfogalmazásban tehát ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $x \in A$, amelyre $0 < |x - \alpha| < \varepsilon$.

A $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (valós) esetben terjesszük ki a torlódási pont fogalmát az alábbiak szerint: azt fogjuk mondani, hogy a $+\infty$ *torlódási pontja* valamilyen $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak, ha bármely $p \in \mathbf{R}$ esetén

$$A \cap (p, +\infty) \neq \emptyset.$$

Következésképpen van olyan $a \in A$, hogy $a > p$. Mivel itt $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges volt, ezért az A halmaz felülről nem korlátos. A most mondottak „meg is fordíthatók", azaz ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk bármely felülről nem korlátos $A \subset \mathbf{R}$ halmaz esetén azt, hogy a $+\infty$ torlódási pontja az A-nak. Hasonlóan, a $-\infty$ *torlódási pontja* az $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak, ha bármely $q \in \mathbf{R}$ mellett

$$A \cap (-\infty, q) \neq \emptyset,$$

azaz van olyan $a \in A$, hogy $a < q$. Az előbb mondottakkal analóg módon következik, hogy a $-\infty$ akkor és csak akkor torlódási pontja valamilyen $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak, ha az A alulról nem korlátos.

Emlékeztetünk arra (ld. 3.7.), hogy az itt megjelent $(p,+\infty)$, $(-\infty,q)$ „félegyeneseket" a $+\infty$, ill. a $-\infty$ környezeteinek neveztük:

$$K_p(+\infty) := K(+\infty) := (p,+\infty) \ \ , \ \ K_q(-\infty) := K(-\infty) := (-\infty,q).$$

A $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ (komplex) esetben azt fogjuk mondani, hogy a ∞ *torlódási pontja* az $A\subset\mathbf{C}$ halmaznak, ha tetszőleges $r>0$ esetén

$$A\cap\{z\in\mathbf{C} : |z|>r\}\neq\emptyset.$$

Ekkor (ld. 3.7.) a ∞ környezeteit az alábbiak szerint értelmeztük:

$$K_r(\infty) := K(\infty) := \{z\in\mathbf{C} : |z|>r\} \qquad (r>0).$$

Tehát (ld. 3.7.) az

$$\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}\ ,\ \overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\cup\{\infty\}$$

jelölésekkel az $\alpha\in\overline{\mathbf{K}}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja az $A\subset\mathbf{K}$ halmaznak, ha bármely $K(\alpha)$ környezetre

$$(K(\alpha)\setminus\{\alpha\})\cap A\neq\emptyset.$$

(Ha itt $\alpha\in\{-\infty,+\infty,\infty\}$, akkor nyilván $K(\alpha)\setminus\{\alpha\}=K(\alpha)$.)

Legyen a fenti A halmaz esetén

$$A' := \{\alpha\in\overline{\mathbf{K}} : \alpha \text{ torlódási pontja } A\text{-nak}\}.$$

5.1.1. Tétel. *Bármely $\emptyset\neq A\subset\mathbf{K}$ halmaz és $\alpha\in\overline{\mathbf{K}}$ esetén fennáll a következő ekvivalencia: $\alpha\in A'$ akkor és csak akkor igaz, ha az α bármely $K(\alpha)$ környezetére az $A\cap K(\alpha)$ metszet végtelen halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás egyik „iránya" nyilvánvaló: ha az $A\cap K(\alpha)$ metszet minden $K(\alpha)$ környezetre végtelen halmaz, azaz $K(\alpha)$-ban végtelen sok A-beli elem van, akkor ezek között olyan is van, amelyik különbözik α-tól. Így $(K(\alpha)\setminus\{\alpha\})\cap A\neq\emptyset$, következésképpen $\alpha\in A'$.

Most tegyük fel azt, hogy $\alpha\in A'$, és indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamilyen $K(\alpha)$ esetén $A\cap K(\alpha)$ véges halmaz. Mivel $\alpha\in A'$, ezért $(K(\alpha)\setminus\{\alpha\})\cap A\neq\emptyset$ (és ez a halmaz is véges). Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\alpha\in\mathbf{K}$. Legyen

$$0<r<\min\{|x-\alpha| : \alpha\neq x\in A\cap K(\alpha)\}.$$

Világos, hogy $(K_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A = \emptyset$, szemben az $\alpha \in A'$ feltételezésünkkel.

Ha az előbbiekben $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ és $\alpha = +\infty$, ill. valamilyen $\mathbf{R} \ni p$-vel $K(\alpha) = (p, +\infty)$, akkor az indirekt feltétel szerint

$$A \cap K(\alpha) = \{a_0, ..., a_s\}$$

alkalmas $s \in \mathbf{N}$ és A-beli $p < a_0 < ... < a_s$ elemekkel. Tehát bármely $r \in \mathbf{R}, r > a_s$ mellett a

$$\widetilde{K}(\alpha) := (r, +\infty)$$

választással $A \cap \widetilde{K}(\alpha) = \emptyset$, ismét csak ellentétben (most) a $+\infty \in A'$ feltételezésünkkel.

Ugyanígy „intézhetjük el" az $\alpha = -\infty$ esetet is.

Legyen végül $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ és $\alpha = \infty$. Ha

$$r := \max\{|z| : z \in A \cap K(\alpha)\},$$

akkor bármely $s \in \mathbf{R}, s > r$ esetén a

$$\widetilde{K}(\alpha) := \{z \in \mathbf{C} : |z| > s\}$$

környezetre $A \cap \widetilde{K}(\alpha) = \emptyset$. Mindez ellentmond annak, hogy $\alpha = \infty \in A'$. ■

Jegyezzük meg, hogy az $\alpha \in A'$ tartalmazás egy *lokális tulajdonsága* az A halmaznak. Nevezetesen, bármely $K^*(\alpha)$ környezet esetén $\alpha \in A'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha \in (K^*(\alpha) \cap A)'$. Valóban, ha $\alpha \in (K^*(\alpha) \cap A)'$, akkor bármely $K(\alpha)$ környezetre az 5.1.1. Tétel szerint $K(\alpha) \cap (K^*(\alpha) \cap A)$ végtelen halmaz, amiből

$$K(\alpha) \cap (K^*(\alpha) \cap A) \subset K(\alpha) \cap A$$

miatt az is következik, hogy $K(\alpha) \cap A$ végtelen halmaz. Ezért (ld. 5.1.1. Tétel) $\alpha \in A'$.

Fordítva, ha $\alpha \in A'$ és lenne olyan $K^*(\alpha)$ környezet, hogy $\alpha \notin (K^*(\alpha) \cap A)'$, akkor (ld. 5.1.1. Tétel) egy alkalmas $K(\alpha)$ környezettel $K(\alpha) \cap (K^*(\alpha) \cap A)$ véges halmaz lenne. Viszont

$$K(\alpha) \cap (K^*(\alpha) \cap A) = (K(\alpha) \cap K^*(\alpha)) \cap A,$$

ahol $\widetilde{K}(\alpha) := K(\alpha) \cap K^*(\alpha)$ is egy környezete α-nak. Tehát $\widetilde{K}(\alpha) \cap A$ legfeljebb véges halmaz, ami $\alpha \in A'$ miatt (ld. 5.1.1. Tétel) nem lehet.

5.1.2. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ és $\alpha \in \overline{\mathbf{K}}$. Az α akkor és csak akkor torlódási pontja A-nak, ha van olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozat, amelynek létezik határértéke, és $\lim(x_n) = \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\alpha \in A'$ és α egy szám, azaz $\alpha \in \mathbf{K}$. Ekkor bármely $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy $x_n \in K_{1/n}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Következésképpen $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$, és

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti (ld. 3.7.1., 3.7.2., 3.9.1. Tételek), hogy $\lim(x_n) = \alpha$.

Ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\alpha = +\infty \in A'$, akkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ számhoz létezik olyan $x_n \in A$, amelyre $x_n > n$. Ha $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges és az $N \in \mathbf{N}$ indexre $N > p$, akkor minden $n \in \mathbf{N}, n > N$ mellett $x_n > n > N > p$, azaz $x_n > p$. Ezért $\lim(x_n) = +\infty$.

Analóg módon következik a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\alpha = -\infty \in A'$ esetben olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat létezése, amelyre $\lim(x_n) = -\infty$.

Legyen most $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $\alpha = \infty \in A'$. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy $|x_n| > n$. Innen (ld. az előbbi okfejtést) azt kapjuk, hogy $\lim(|x_n|) = +\infty$. Más szóval $\lim(x_n) = \infty$.

Induljunk ki most abból, hogy valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozatra $\lim(x_n) = \alpha$. Ekkor bármely $K(\alpha)$ környezetet is véve létezik olyan $k \in \mathbf{N}$ (sőt, egy küszöbindextől kezdve minden $k \in \mathbf{N}$ ilyen), amelyre $x_k \in K(\alpha)$. Mivel $\mathcal{R}_{(x_n)} \subset A \setminus \{\alpha\}$, így $x_k \neq \alpha$, ezért egyúttal

$$x_k \in (K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A$$

is igaz. Ez azt jelenti, hogy $\alpha \in A'$. ∎

Az $A \subset \mathbf{K}$ halmazt *zártnak* nevezzük, ha tartalmazza az összes „véges" torlódási pontját, azaz

$$A' \cap \mathbf{K} \subset A.$$

Mivel $\emptyset' = \emptyset$, ezért pl. $\emptyset$ zárt halmaz. Nyilván zárt maga a $\mathbf{K}$ halmaz is. Bármely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallum is zárt. (Ezért is nevezzük $[a, b]$-t *zárt* intervallumnak.) Az 5.1.1. Tétel szerint minden véges $A \subset \mathbf{K}$ halmazra $A' = \emptyset \subset A$, tehát A zárt. Mutassuk meg, hogy igaz az

5.1.3. Tétel. *Az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatra $\lim(x_n) \in A$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A zárt, azaz $A' \cap \mathbf{K} \subset A$, $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ pedig egy konvergens sorozat, $\alpha := \lim(x_n)$. Ha az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlet-halmaz véges, akkor alkalmas (ν_n) indexsorozattal az (x_{ν_n}) részsorozat konstanssorozat: valamilyen $a \in A$ elemmel $x_{\nu_n} = a \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel (ld. 3.5.2. Tétel) $\lim(x_n) = \lim(x_{\nu_n}) = a$, ezért $\alpha = a \in A$. Ha viszont $\mathcal{R}_{(x_n)}$ végtelen halmaz, akkor tetszőleges $N \in \mathbf{N}$ esetén az

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\}$$

halmaz is végtelen. Ugyanakkor bármely $K(\alpha)$ környezetre egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel $x_k \in K(\alpha) \quad (k \in \mathbf{N}, k > N)$. Következésképpen az

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\} \cap K(\alpha)$$

halmaz szintén végtelen. Továbbá

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\} \cap K(\alpha) \subset \mathcal{R}_{(x_n)} \cap K(\alpha) \subset A \cap K(\alpha),$$

ezért $A \cap K(\alpha)$ is végtelen halmaz. Az 5.1.1. Tétel miatt tehát $\alpha \in A' \cap \mathbf{K}$. Így az $A' \cap \mathbf{K} \subset A$ feltételből $\alpha \in A$ adódik.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A' \cap \mathbf{K}$, ekkor az 5.1.2. Tétel szerint egy alkalmas $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatra $\lim(x_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \cap \mathbf{K} \subset A$, így A zárt. ∎

Az $A \subset \mathbf{K}$ halmazt *kompaktnak* fogjuk nevezni, ha $A = \emptyset$, vagy az A korlátos és zárt. Pl. a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (valós) esetben bármely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az $[a, b]$ zárt intervallum kompakt.

5.1.4. Tétel. *Az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatnak van olyan (x_{ν_n}) részsorozata, amely konvergens és $\lim(x_{\nu_n}) \in A$.*

Bizonyítás. Ha az A halmaz kompakt, akkor speciálisan korlátos is, ezért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (ld. 3.5.6. Tétel) szerint bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ esetén egy megfelelő (ν_n) indexsorozattal az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens. Ugyanakkor az A halmaz zárt is, így (ld. 5.1.3. Tétel) $\lim(x_{\nu_n}) \in A$.

Tegyük fel most azt, hogy bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatnak van olyan (x_{ν_n}) részsorozata, amely konvergens és $\lim(x_{\nu_n}) \in A$. Mutassuk meg, hogy az A korlátos és zárt. Ha ui. itt speciálisan az (x_n) sorozat konvergens, akkor $\lim(x_n) = \lim(x_{\nu_n}) \in A$, amiből az 5.1.3. Tétel miatt az A zártsága máris következik. Tegyük fel továbbá indirekt módon, hogy az A halmaz nem korlátos. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ számhoz van olyan $x_n \in A$, hogy $|x_n| > n$. Világos, hogy az (x_n) sorozat - és vele együtt bármely részsorozata is - nem korlátos. Ezért (ld. 3.5.4. Tétel) az (x_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, ami ellentmond a jelenlegi feltételünknek. ∎

Nevezzük az $A \subset \mathbf{K}$ halmazt *nyíltnak,* ha $A = \emptyset$, vagy bármely $a \in A$ esetén egy alkalmas $K(\alpha)$ környezettel $K(\alpha) \subset A$. Tehát a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (valós) esetben valamilyen $r > 0$ számmal

$$(a - r, a + r) \subset A.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy tetszőleges $K(a) \subset \mathbf{K}$ környezet $(a \in \mathbf{K})$ nyílt halmaz. Valóban, ha $r > 0$ és $K(a) = K_r(a)$, akkor minden $b \in K_r(a)$ esetén

$$K_\rho(b) \subset K_r(a) \qquad (0 < \rho \leq r - |b - a|).$$

Ha ui. $x \in K_\rho(b)$, azaz $x \in \mathbf{K}$ és $|x - b| < \rho$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség (ld. 1.4. xxi) megjegyzés) miatt

$$|x - a| = |(x - b) + (b - a)| \leq |x - b| + |b - a| <$$

$$\rho + |b - a| \leq r - |b - a| + |b - a| = r,$$

így $|x - a| < r$, más szóval $x \in K_r(a)$. Speciálisan, ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, akkor bármely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ intervallum nyílt halmaz. (Ezért is nevezzük az (a, b)-t *nyílt* intervallumnak.)

5.1.5. Tétel. *Az $A \subset \mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha a $\mathbf{K} \setminus A$ (komplementer) halmaz nyílt.*

Bizonyítás. Tegyük fel ui., hogy A zárt. Ha $\mathbf{K} \setminus A$ nem lenne nyílt, akkor $\mathbf{K} \setminus A \neq \emptyset$, és lenne olyan $\alpha \in \mathbf{K} \setminus A$, hogy bármely $K(\alpha)$ mellett

$$K(\alpha) \not\subset \mathbf{K} \setminus A.$$

Ez azt jelenti, hogy $K(\alpha) \cap A \neq \emptyset$, ill. $\alpha \notin A$ miatt

$$A \cap (K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset.$$

Tehát $\alpha \in A' \cap \mathbf{K}$, és A zártsága alapján $A' \cap \mathbf{K} \subset A$, így $\alpha \in A$ is teljesülne. Ez nyilván ellentmond annak, hogy $\alpha \in \mathbf{K} \setminus A$.

Most lássuk be, hogy ha $\mathbf{K} \setminus A$ nyílt, akkor A zárt, azaz $A' \cap \mathbf{K} \subset A$. Legyen ehhez $\alpha \in A' \cap \mathbf{K}$. Ha $\alpha \notin A$ teljesülne, akkor $\alpha \in \mathbf{K} \setminus A$, és $\mathbf{K} \setminus A$ nyíltsága miatt egy alkalmas $K(\alpha)$ környezettel $K(\alpha) \subset \mathbf{K} \setminus A$. Világos, hogy $K(\alpha) \cap A = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $\alpha \in A'$. $\blacksquare$

5.2. Megjegyzések

i) Legyen $A \subset \mathbf{K}$, $\alpha \in \mathbf{K}$. Ekkor $\alpha \in A'$ azzal ekvivalens, hogy bármely $r > 0$ számhoz van olyan $x \in A$, amellyel

$$0 < |x - \alpha| < r.$$

Speciálisan, ha itt $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, akkor $x \neq \alpha$ és

$$\alpha - r < x < \alpha + r.$$

Világos, hogy pl. $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$, hiszen (ld. 1.4. v) megjegyzés) tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < r$ esetén $(\alpha - r, \alpha + r) \cap \mathbf{Q}$ végtelen halmaz.

ii) Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbf{K}$ végtelen halmaz. Ekkor $A' \neq \emptyset$. Ha ui. A korlátos is, akkor minden $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat is korlátos. Viszont megválasztható az (x_n) sorozat úgy is, hogy injektív legyen, azaz $x_n \neq x_m \quad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$. A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (ld. 3.5.6. Tétel) miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy (x_{ν_n}) konvergens. Legyen $\alpha := \lim(x_{\nu_n})$. Az injektivitás miatt feltehető, hogy $x_{\nu_n} \neq \alpha$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért az 5.1.2. Tétel szerint $\alpha \in A'$. Ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ és A nem korlátos (pl. felülről), akkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $x_n \in A$ elemre $x_n > n$. Könnyű meggondolni, hogy egyúttal $x_n < x_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$ is feltehető, így (x_n) eleget tesz az 5.1.2. Tételnek az $\alpha := +\infty$ választással (ld. 3.7.9. Tétel): $\lim(x_n) = +\infty$. Tehát $+\infty \in A'$. Analóg a bizonyítás a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, A alulról nem korlátos esetben (amikor $-\infty \in A'$), ill. a $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, A nem korlátos esetben, amikor $\infty \in A'$.

iii) A ii) megjegyzésben már érintett gondolatmenettel kapjuk az 5.1.2. Tétel alábbi „változatát": (a tételbeli jelölésekkel) $\alpha \in A'$ akkor és csak akkor igaz, ha van olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ injektív sorozat, amelyre $\lim(x_n) = \alpha$.

iv) Az 5.1.1. Tételből rögtön következik, hogy tetszőlegesen választott véges $A \subset \mathbf{K}$ halmazra $A' = \emptyset$. Ezért bármely ilyen A halmaz zárt. Mivel ekkor A nyilván korlátos is, ezért a $\mathbf{K}$-beli véges halmazok mindegyike kompakt is.

v) Azt mondjuk, hogy valamilyen $A, B \subset \mathbf{K}, A \subset B$ esetén az A halmaz *mindenütt sűrű B-ben,* ha $B \subset A'$. Ez tehát azt jelenti, hogy tetszőleges $b \in B$ és $r > 0$ választással van olyan $a \in A$, amellyel

$$0 < |b - a| < r.$$

Pl. a $\mathbf{K} = \mathbf{R}, u, v \in \mathbf{R}, u < v$ esetben az $(u, v) \cap \mathbf{Q}$ halmaz (az (u, v) intervallumbeli racionális számok halmaza) mindenütt sűrű (u, v)-ben (ld. 1.4. v) megjegyzés).

vi) Az 5.1.3. Tételből rögtön következik a zárt halmazok alábbi nevezetes tulajdonsága. Legyen ehhez $\Gamma \neq \emptyset$ („indexhalmaz") és $A_\gamma \subset \mathbf{K} \quad (\gamma \in \Gamma)$ zárt halmaz. Ekkor:

1^o $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ is zárt halmaz;

2^o ha Γ véges, akkor $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ is zárt halmaz.

Ha ui. $(x_n) : \mathbf{N} \to \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egy konvergens sorozat és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor bármely $\gamma \in \Gamma$ indexre egyúttal $(x_n) : \mathbf{N} \to A_\gamma$. Így az 5.1.3. Tétel szerint $\alpha \in A_\gamma$, tehát

$\alpha \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ismét az 5.1.3. Tételre hivatkozva azt kapjuk, hogy $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ zárt. Ha viszont $(x_n) : \mathbf{N} \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ (és Γ véges), $\alpha = \lim(x_n)$, akkor lennie kell olyan $\gamma_0 \in \Gamma$ elemnek, amelyre az

$$\{n \in \mathbf{N} : x_n \in A_{\gamma_0}\}$$

halmaz nem véges. Van ezért olyan (ν_n) indexsorozat, hogy $(x_{\nu_n}) : \mathbf{N} \to A_{\gamma_0}$. Mivel (ld. 3.5.2. Tétel) $\alpha = \lim(x_{\nu_n})$, így az 5.1.3. Tétel alapján egyrészt azt kapjuk, hogy $\alpha \in A_{\gamma_0}$, tehát $\alpha \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, másrészt az utóbbiból kifolyólag $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ zárt.

vii) Könnyű meggyőződni arról, hogy bármely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\}$$

zárt halmaz. Ugyanakkor a

$$(0, 1] = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

halmaz nem zárt, ti. (nyilván) $0 \in (0, 1]'$, de $0 \notin (0, 1]$. Ez azt jelenti, hogy az előbbi megjegyzésben a 2^o állítás nem véges Γ mellett általában nem igaz.

viii) Az $A \subset \mathbf{K}$ halmaz $a \in A$ elemét az A *belső pontjának* nevezzük, ha egy alkalmas $K(a)$ környezetre $K(a) \subset A$. Világos, hogy $A \neq \emptyset$ esetén az A halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden eleme belső pontja az A-nak. A jól ismert De Morgan-azonosságok és az 5.1.5. Tétel alapján kapjuk a vi) megjegyzésből a következő állítást: ha $\Gamma \neq \emptyset$ és $A_\gamma \subset \mathbf{K}$ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmaz, akkor:

1^o $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ is nyílt halmaz;

2^o ha Γ véges, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ is nyílt halmaz.

Speciálisan bármely $u, v \in \mathbf{R}, u < v$ mellett az

$$(u, v) = \{x \in \mathbf{R} : u < x < v\}$$

nyílt intervallum nyílt halmaz. Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ nyílt halmazhoz létezik legfeljebb megszámlálható sok páronként diszjunkt nyílt intervallum, amelyeknek az egyesítése megegyezik A-val. Az előzőek szerint ui. bármely $a \in A$ elemhez van olyan $\rho > 0$, hogy $(a - \rho, a + \rho) \subset A$. Legyen

$$R_a := \sup\{x \ge a : [a, x] \subset A\} \quad , \quad r_a := \inf\{z \le a : [z, a] \subset A\}$$

és $I_a := (r_a, R_a)$. Ha $t \in (r_a, R_a)$ és $a < t$, akkor $t < R_a$, így egy alkalmas $a < x$ számmal $a \le t < x$ és $[a, x] \subset A$. Mivel $t \in [a, x]$, ezért $t \in A$. Ugyanígy kapjuk, hogy $(r_a <) \, t \le a$ esetén is $t \in A$, tehát $I_a \subset A$. Világos továbbá, hogy tetszőleges $a \in A$ elemre $a \in I_a$, így $A = \bigcup_{a\in A} I_a$. Ha $a, b \in A$ és $a \neq b$ (pl. $a < b$), akkor két eset lehetséges: $I_a = I_b$, vagy $I_a \cap I_b = \emptyset$. Tegyük fel ui. először azt, hogy $[a,b] \subset A$. Ekkor

$$b \in \{x > a : [a,x] \subset A\},$$

következésképpen

$$R_a = \sup\{x \geq a : [a,x] \subset A\} = \sup\{x \geq b : [a,x] \subset A\} =$$

$$\sup\{x \geq b : [b,x] \subset A\} = R_b.$$

Analóg módon kapjuk, hogy $r_a = r_b$, azaz $I_a = I_b$. Ha viszont $[a,b] \not\subset A$, akkor valamilyen $a < c < b$ esetén $c \notin A$. Ezért c felső korlátja az

$$\{x \geq a : [a,x] \subset A\}$$

halmaznak, és alsó korlátja a

$$\{z \leq b : [z,b] \subset A\}$$

halmaznak. Tehát $R_a \leq c \leq r_b$, amiből $I_a \cap I_b = \emptyset$ következik.

Az $\mathcal{I} := \{I_a \subset A : a \in A\}$ intervallum-halmaz tehát páronként diszjunkt intervallumokból álló halmazrendszer. Valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ halmazzal legyen

$$\mathcal{I} = \{J_\gamma : \gamma \in \Gamma\},$$

ahol minden $\Gamma \ni \gamma$-ra $J_\gamma = I_a$ egy alkalmas $A \ni a$-val. Ha $J \in \mathcal{I}$ és $t_J \in J \cap \mathbf{Q}$ (ld. 1.4. v) megjegyzés), akkor $t_J \neq t_I \quad (J, I \in \mathcal{I}, J \neq I)$. Más szóval a

$$\mathcal{I} \ni J \mapsto t_J \in \mathbf{Q}$$

leképezés injektív. Mivel a $\mathbf{Q}$ számossága megszámlálható, ezért az $\mathcal{I}$ intervallum-halmaz legfeljebb megszámlálható.

ix) Mit jelent az, hogy az $\alpha \in \overline{\mathbf{K}}$ (szám vagy valamelyik végtelen) nem torlódási pontja az $A \subset \mathbf{K}$ halmaznak: $\alpha \notin A'$? A definíció alapján ekkor egy alkalmas $K(\alpha) \subset \mathbf{K}$ környezetre

$$(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A = \emptyset.$$

Ha itt $\alpha \in A \cap \mathbf{K}$ is igaz, akkor α egy ún. *izolált pontja* az A halmaznak.

x) Nem nehéz meggondolni, hogy valamilyen $A \subset \mathbf{R}$ halmaz esetén $+\infty \in A'$ (vagy $-\infty \in A'$) azzal ekvivalens, hogy az A halmaz nem korlátos. Ui. (pl.) $+\infty \in A'$ esetén bármely $p \in \mathbf{R}$ számra $A \cap (p, +\infty) \neq \emptyset$, következésképpen egy $a \in A$ elemre $a > p$. Tehát az A halmaz (felülről) nem korlátos. Fordítva, ha pl. A (felülről) nem korlátos, akkor minden $p \in \mathbf{R}$ mellett van olyan $a \in A$, amellyel $a > p$, azaz $a \in (p, +\infty) \cap A$. Tehát $K_p(+\infty) \cap A \neq \emptyset$, így $+\infty \in A'$. Ugyanez mondható el akkor is (analóg meggondolással), ha $A \subset \mathbf{C}$: az A halmaz akkor és csak akkor nem korlátos, ha $\infty \in A'$.

xi) Az előző megjegyzést figyelembe véve egy $A \subset \mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $A' \subset \mathbf{K}$. Ha tehát a szóban forgó halmazra $A' \subset A$ teljesül, akkor az A egyrészt zárt, másrészt korlátos is, azaz kompakt. Mindez nyilván meg is fordítható, így: az $A \subset \mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha $A' \subset A$.

5.3. Függvények határértéke

Az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvények határértékének az értelmezése előtt emlékeztetünk arra, hogy az f-et számsorozatnak neveztük, ha $\mathcal{D}_f = \mathbf{N}$. Ekkor azt mondtuk továbbá (ld. 3.7.), hogy az f sorozatnak van határértéke $(\lim f)$ és $\lim f = A \in \overline{\mathbf{K}}$, ha tetszőleges $K(A)$ környezet esetén $f_n = f(n) \in K(A) \quad (\text{m.m.}\, n \in \mathbf{N})$. Más szóval létezik az előbbi $K(A)$ környezethez olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel $f_n \in K(A) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Az utóbbi $n \in \mathbf{N}, n > N$ feltétel másképp írva azt jelenti (ld. 3.7.), hogy

$$n \in (N, +\infty) \cap \mathbf{N} = K_N(+\infty) \cap \mathbf{N} =: K(+\infty) \cap \mathbf{N}.$$

Az $f_n \in K(A) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$ tartalmazás tehát úgy is írható, hogy

$$f(n) \in K(A) \qquad (n \in K(+\infty) \cap \mathbf{N}),$$

vagy a képhalmaz (ld. 2.2.) nyelvén fogalmazva az $a := +\infty$ jelöléssel

$$f[K(a) \cap \mathcal{D}_f] = f[K(a) \cap \mathbf{N}] \subset K(A).$$

Világos, hogy itt $K(a)$ helyett $K(a) \setminus \{a\}$ is írható, azaz

$$f[(K(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(A).$$

Jegyezzük meg, hogy (könnyen beláthatóan) $a = +\infty \in \mathbf{N}' = \mathcal{D}_f'$, sőt, $\mathbf{N}' = \{+\infty\}$.

Minden „készen áll" ahhoz, hogy a számsorozatok (mint speciális $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvények) határértékének a fogalmát kiterjesszük most már tetszőleges

$$f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$$

függvényekre, ahol (egymástól függetlenül) $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}$, vagy $\mathbf{C}$.

Legyen tehát $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy *az f függvénynek az a helyen* (vagy *az a-ban*) *van határértéke,* ha létezik olyan $A \in \overline{\mathbf{K}}_2$, amelyre tetszőleges $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezetet is véve megadható az a-nak olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezete, amellyel

$$f[(k(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(A)$$

teljesül. Más szóval tehát

$$f(x) \in K(A) \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

A „felvezetésben" mondottak szerint az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha ennek az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvénynek a $+\infty$-ben van határértéke.

5.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen van határértéke. Ekkor egyértelműen létezik olyan $A \in \overline{\mathbf{K}}_2$, amely eleget tesz a fenti definíciónak, azaz bármely $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezethez van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy $f(x) \in K(A) \quad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $B \in \overline{\mathbf{K}}_2$ is eleget tesz a tételben idézett definíciónak: tetszőleges $K(B) \subset \mathbf{K}_2$ környezethez megválasztható a $k^*(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet úgy, hogy $f(x) \in K(B) \quad (a \neq x \in k^*(a) \cap \mathcal{D}_f)$. Ezért

$$(*) \qquad f(x) \in K(A) \cap K(B) \qquad (a \neq x \in (k(a) \cap k^*(a)) \cap \mathcal{D}_f)$$

(ahol egyébként a $k(a) \cap k^*(a)$ halmaz is nyilván egy környezete a-nak). Ha itt (indirekt feltételezéssel élve) $B \neq A$ állna fenn, akkor (a tételbeli) $K(A)$ és a most mondott $K(B)$ környezet nyilván megválasztható úgy, hogy $K(A) \cap K(B) = \emptyset$. Világos, hogy mindez ellentmond $(*)$-nak. ■

A most bebizonyított tételre hivatkozva vezessük be a függvényhatárérték fogalmát. Ehhez tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen létezik határértéke. Ekkor ez utóbbinak a definíciójában (az 5.3.1. Tétel szerint egyértelműen) szereplő $A \in \overline{\mathbf{K}}_2$ számot vagy „valamelyik végtelent" az f *függvény a helyen vett* (vagy *a-beli*) *határértékének* nevezzük. Erre az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$$\lim_a f := \lim_{x \to a} f(x) := A.$$

(Esetenként - ha a szóban forgó függvényt „bonyolultabb" szimbólum jelöli - a függvény jelét zárójelbe tesszük, pl. $\lim_a (f * g)$.) Időnként azt is írjuk, hogy $f(x) \to A \quad (x \to a)$, amit úgy olvasunk, hogy „$f(x)$ tart A-hoz, ha x tart a-hoz". Világos, hogy ha $f : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ egy sorozat, amelynek van határértéke a $+\infty$-ben és az $A \in \overline{\mathbf{K}}$, akkor

$$A = \lim f = \lim_{+\infty} f.$$

A definícióból eléggé nyilvánvaló, hogy ha $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ és valamilyen $a \in \overline{\mathbf{K}}_1$ esetén van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy

$$\emptyset \neq \mathcal{D} := (k(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f = (k(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_g,$$

és $f(x) = g(x)\ \ (x \in \mathcal{D})$, akkor - feltéve, hogy $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathcal{D}_g'$ - a következő mondható: az f függvénynek akkor és csak akkor van határértéke az a helyen, ha a g függvénynek a-ban van határértéke, és az utóbbi esetben $\lim_a f = \lim_a g$. Röviden azt mondjuk, hogy a $\lim_a f$ létezése vagy nem létezése az illető függvény *lokális tulajdonsága.* Speciálisan azt kapjuk, hogy a $\lim_a f$ létezése és „milyensége" szempontjából érdektelen az $a \in \mathcal{D}_f$, vagy $a \notin \mathcal{D}_f$ kérdés, ill. az $a \in \mathcal{D}_f$ esetben az $f(a)$ helyettesítési érték.

Fogalmazzuk meg az $A = \lim_a f$ egyenlőség jelentését attól függően, hogy $\mathbf{K}_i = \mathbf{R}$, vagy $\mathbf{K}_i = \mathbf{C}\ \ (i = 1, 2)$, ill. az $a \in \overline{\mathbf{K}}_1,\ A \in \overline{\mathbf{K}}_2$ elemek számok, vagy sem.

1^o *Végesben vett véges határérték,* azaz $a \in \mathbf{K}_1,\ A \in \mathbf{K}_2$. Ebben az esetben az

$$A = \lim_a f$$

egyenlőség azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta).$$

Speciálisan, ha itt még $\mathbf{K}_i = \mathbf{R}\ \ (i = 1, 2)$, akkor

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_f, a - \delta < x < a + \delta).$$

2^o *Végtelenben vett véges határérték,* azaz $A \in \mathbf{K}$, ill.

a) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ és $a = +\infty$. Ekkor

$$A = \lim_{+\infty} f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x > p).$$

b) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ és $a = -\infty$. Ekkor

$$A = \lim_{-\infty} f$$

jelentése a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x < p).$$

c) $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{K}$ és $a = \infty$. Ekkor

$$A = \lim_{\infty} f$$

azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $r > 0$ szám, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x| > r).$$

3^o *Végesben vett végtelen határérték,* azaz $a \in \mathbf{K}$, ill.

a) $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{R}$ és $A = +\infty$. Ekkor

$$+\infty = \lim_a f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$f(x) > p \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta).$$

b) $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{R}$ és $A = -\infty$. Ekkor

$$-\infty = \lim_a f$$

azt jelenti, hogy tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$f(x) < p \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta).$$

c) $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{C}$ és $A = \infty$. Ekkor

$$\infty = \lim_a f$$

jelentése az, hogy tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|f(x)| > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta).$$

4^o *Végtelenben vett végtelen határérték,* azaz

a) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $a = +\infty$, $A = +\infty$. Ekkor a

$$+\infty = \lim_{+\infty} f$$

egyenlőség jelentése az, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$f(x) > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x > p).$$

b) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $a = +\infty$, $A = -\infty$. Ekkor

$$-\infty = \lim_{+\infty} f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$f(x) < r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x > p).$$

c) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $a = -\infty$, $A = +\infty$. Ekkor

$$+\infty = \lim_{-\infty} f$$

azt jelenti, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$f(x) > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x < p).$$

d) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $a = -\infty$, $A = -\infty$. Ekkor

$$-\infty = \lim_{-\infty} f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$f(x) < r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x < p).$$

e) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $a = +\infty$, $A = \infty$. Ekkor

$$\infty = \lim_{+\infty} f$$

jelentése az, hogy tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$|f(x)| > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x > p).$$

f) $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $a = -\infty$, $A = \infty$. Ekkor

$$\infty = \lim_{-\infty} f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $p \in \mathbf{R}$ szám, hogy

$$|f(x)| > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, x < p).$$

g) $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $a = \infty$, $A = +\infty$. Ekkor

$$+\infty = \lim_{\infty} f$$

azt jelenti, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p > 0$ szám, hogy

$$f(x) > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x| > p).$$

h) $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $a = \infty$, $A = -\infty$. Ekkor a

$$-\infty = \lim_{\infty} f$$

egyenlőség jelentése az, hogy tetszőleges $r \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $p > 0$ szám, hogy

$$f(x) < r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x| > p).$$

i) $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $a = \infty$, $A = \infty$. Ekkor

$$\infty = \lim_{\infty} f$$

azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $p > 0$ szám, hogy

$$|f(x)| > r \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x| > p).$$

A következő tétel a sorozatok határértéke és a függvényhatárérték között teremt kapcsolatot.

5.3.2. Tétel (átviteli elv). *Bármely $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény és $a \in \mathcal{D}'_f$ esetén az f-nek az a helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha tetszőleges*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \;\;,\;\; \lim(x_n) = a$$

sorozatra az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke. Ha létezik az $A := \lim_a f$ határérték, akkor az előbbiekben említett minden (x_n) sorozatra

$$\lim (f(x_n)) = A.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim_a f$ határérték. Ekkor az A-nak bármilyen $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezetéhez van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy

$$f(x) \in K(A) \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap k(a)).$$

Ha (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, akkor az előbbi $k(a)$ környezethez megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$a \neq x_n \in k(a) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mindez azt jelenti, hogy az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke, és $\lim (f(x_n)) = A$.

Most tegyük fel azt, hogy bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ esetén az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke. Mutassuk meg először azt, hogy ekkor minden, a most említett (x_n) sorozatra $\lim (f(x_n))$ ugyanaz a $\overline{\mathbf{K}}_2$-beli elem. Valóban, ha $(\tilde{x}_n)$ is egy ilyen sorozat, akkor legyen

$$x_n^* := \begin{cases} x_{n/2} & (n = 2k) \\ \\ \tilde{x}_{(n-1)/2} & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $(x_n^*) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, és (könnyen láthatóan) létezik a $\lim(x_n^*) = a$ határérték. Következésképpen az $(f(x_n^*))$ sorozatnak is van határértéke. Viszont (ld. 3.5.2. Tétel)

$$\lim (f(x_n^*)) = \lim (f(x_{2n}^*)) = \lim (f(x_n)) = \lim (f(x_{2n+1}^*)) = \lim (f(\tilde{x}_n)),$$

így $\lim (f(\tilde{x}_n)) = \lim (f(x_n))$. Legyen tehát $A := \lim (f(x_n))$, ahol (x_n) valamilyen, a tételben szereplő sorozat. Lássuk be, hogy f-nek az a helyen van határértéke, és

$$\lim_a f = A.$$

Indirekt úton ui. tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor egy alkalmas $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezettel bármilyen $\mathbf{K}_1 \supset k(a)$-t is választunk, valamilyen $a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f$ elemmel azt kapjuk, hogy $f(x) \notin K(A)$. Ha itt $a \in \mathbf{K}_1$ („véges hely"), akkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a

$$k(a) := k_{1/n}(a)$$

választással egy olyan $a \neq x_n \in k_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f$ elem adódik, amelyre $f(x_n) \notin K(A)$. Mivel

$$0 < |x_n - a| < 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_n) = a$. Így a feltételek miatt $\lim (f(x_n)) = A$. Ez azt jelenti, hogy az előbbi $K(A)$ környezethez lennie kell olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexnek, amellyel $f(x_n) \in K(A)$ $(n \in \mathbf{N}, n > M)$. Ez nyilván ellentmond annak, hogy $f(x_n) \notin K(A) \quad (0 < n \in \mathbf{N})$.

Ha az előbbiekben $\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}$ és (pl.) $a = +\infty$, akkor a most mondottakat annyiban kell csak módosítani, hogy az ott szereplő x_n-ekre (a $k(a) := K_n(+\infty)$ választás után) $x_n > n$ teljesül. Ezért $\lim(x_n) = +\infty$, és innentől kezdve u. az a bizonyítás, mint az $a \in \mathbf{K}_1$ esetben. Analóg az okoskodás az $a = -\infty$, ill. a $\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}$, $a = \infty$ esetekben is. ■

A fenti átviteli elv, ill. a sorozatok és a műveletek kapcsolatát tárgyaló 3.7.10.Tétel alapján könnyen adódik az

5.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2, \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, valamint az $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ torlódási pontban léteznek az $A := \lim_a f$, $B := \lim_a g$ határértékek. Tegyük fel továbbá, hogy*

i) *létezik az $A + B \in \overline{\mathbf{K}}_2$ összeg, ekkor az $f + g$ összegfüggvénynek az a helyen van határértéke, és*
$$\lim_a (f + g) = A + B;$$

ii) *$c \in \mathbf{K}_2$ és létezik a $cA \in \overline{\mathbf{K}}_2$ szorzat, ekkor a cf függvénynek az a helyen van határértéke, és*
$$\lim_a (cf) = cA;$$

iii) *létezik az* $AB \in \overline{\mathbf{K}}_2$ *szorzat, ekkor az* fg *szorzatfüggvénynek az* a *helyen van határértéke, és*
$$\lim_a (fg) = AB;$$

iv) *létezik az* $A/B \in \overline{\mathbf{K}}_2$ *hányados, ekkor az* f/g *hányadosfüggvénynek az* a *helyen van határértéke, és*
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra (ld. 2.4. xii) megjegyzés), hogy
$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad , \quad \mathcal{D}_{cf} = \mathcal{D}_f,$$
ill.
$$\mathcal{D}_{f/g} = (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \setminus \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) = 0\}.$$
Az utóbbival kapcsolatban jegyezzük meg, hogy ha A/B létezik, akkor $B \neq 0$. Van tehát a B-nek olyan $K(B) \subset \mathbf{K}_2$ környezete, hogy $0 \notin K(B)$. Ezért $\lim_a g = B$ miatt létezik egy $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet úgy, hogy $g(x) \in K(B) \quad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_g)$. Tehát
$$g(x) \neq 0 \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_g),$$
amiből
$$(k(a) \setminus \{a\}) \cap (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_{f/g}$$
következik. Az $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ feltétel miatt ezért (ld. 5.1.) $a \in \mathcal{D}'_{f/g}$ is igaz.

Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \setminus \{a\}$, $(z_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = \lim(z_n) = a$ (a iv) esetben azt is feltételezve, hogy $g(x_n) \neq 0 \ (n \in \mathbf{N})$. Ekkor egyúttal $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$ is igaz, ezért (ld. 5.3.2. Tétel)
$$\lim(f(x_n)) = A \quad , \quad \lim(g(x_n)) = B.$$
Alkalmazható tehát a 3.7.10. Tétel, miszerint

i) $\lim((f+g)(x_n)) = \lim(f(x_n) + g(x_n)) = A + B;$

ii) $\lim((cf)(z_n)) = \lim(cf(z_n)) = cA;$

iii) $\lim((fg)(x_n)) = \lim(f(x_n)g(x_n)) = AB;$

iv) $\lim((f/g)(x_n)) = \lim(f(x_n)/g(x_n)) = A/B.$

Következésképpen az 5.2.2. Tétel alapján rendre azt kapjuk, hogy létezik a

i) $\lim_a(f+g) = A+B = \lim_a f + \lim_a g$;

ii) $\lim_a(cf) = cA = c\cdot \lim_a f$;

iii) $\lim_a(fg) = AB = (\lim_a f)\cdot(\lim_a g)$;

iv) $\lim_a(f/g) = A/B = (\lim_a f)/(\lim_a g)$

határérték. ■

Az alkalmazások szempontjából gyakran előforduló eset egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz és egy $\alpha \in \mathbf{R}$ szám viszonyát illetően, hogy $\alpha \in A'$, de egy $\delta > 0$ mellett $(\alpha-\delta,\alpha)\cap A$, vagy $(\alpha,\alpha+\delta)\cap A$ véges halmaz (esetleg $\emptyset$). Világos, hogy ekkor bármely $r > 0$ esetén $(\alpha,\alpha+r)\cap A$-nak vagy $(\alpha-r,\alpha)\cap A$-nak végtelen halmaznak kell lennie (ld. 5.1.1. Tétel). Ezt előrebocsátva vezessük be az egyoldali torlódási pont fogalmát. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in \mathbf{R}$ szám *jobb oldali torlódási pontja* az $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak, ha

$$\alpha \in (A \cap (\alpha,+\infty))'.$$

Ez azt jelenti (ld. 5.1.1. Tétel), hogy tetszőleges $r > 0$ esetén az

$$(A\cap(\alpha,+\infty))\cap(\alpha-r,\alpha+r) = A\cap(\alpha,\alpha+r)$$

halmaz végtelen, azaz az $(\alpha,\alpha+r)$ intervallum végtelen sok A-beli számot tartalmaz.

Hasonlóan, az $\alpha \in \mathbf{R}$ szám *bal oldali torlódási pontja* az $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak, ha

$$\alpha \in (A \cap (-\infty,\alpha))'.$$

Tehát (ld. 5.1.1. Tétel) bármely $r > 0$ számra az

$$(A\cap(-\infty,\alpha))\cap(\alpha-r,\alpha+r) = A\cap(\alpha-r,\alpha)$$

halmaz végtelen (az $(\alpha-r,\alpha)$ intervallum végtelen sok A-beli számot tartalmaz).

Nyilvánvaló, hogy ha $\alpha \in A'$, akkor az α vagy jobb oldali vagy bal oldali (esetleg mindkettő) torlódási pontja az A-nak. Ti. ha ez nem volna igaz, akkor lennének olyan $\delta_i > 0$ $(i = 1,2)$ számok, amelyekkel

$$A\cap(a,a+\delta_1) = \emptyset \ \ , \ \ A\cap(a-\delta_1,a) = \emptyset.$$

Ekkor viszont a $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$ választással

$$A\cap(a-\delta,a+\delta) = \emptyset,$$

ami ellentmond annak, hogy $a \in A'$.

Legyen most $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}, \alpha \in \mathbf{R}$, és α jobb oldali torlódási pontja a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománynak. Azt mondjuk ekkor, hogy *az f függvénynek az α helyen (vagy α-ban) van jobb oldali határértéke,* ha létezik olyan $A \in \overline{\mathbf{K}}$ elem, amelynek bármely $K(A)$ környezetét véve egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$f(x) \in K(A) \qquad (x \in (\alpha, \alpha + r) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ebben az esetben (az 5.3.1. Tétel bizonyításában látottakkal analóg módon) egyértelműen létezik ilyen A, amit *az f függvény α-beli jobb oldali határértékének* nevezünk. Erre a következő jelölések valamelyikét fogjuk használni:

$$\lim_{\alpha+0} f := \lim_{x \to \alpha+0} f(x) := A.$$

Időnként azt is írjuk, hogy $f(x) \to A$ $(x \to \alpha+0)$, és mindezt szóban az „$f(x)$ tart A-hoz, ha x jobbról tart α-hoz" módon idézzük.

Hasonlóan, ha $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}, \alpha \in \mathbf{R}$ és α bal oldali torlódási pontja a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománynak, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvénynek az α helyen (vagy α-ban) van bal oldali határértéke,* ha létezik olyan $A \in \overline{\mathbf{K}}$ elem, amelynek bármely $K(A)$ környezetével valamilyen $r > 0$ esetén

$$f(x) \in K(A) \qquad (x \in (\alpha - r, \alpha) \cap \mathcal{D}_f)$$

teljesül. Ekkor is elmondhatjuk, hogy egyértelműen létezik ilyen A, amit *az f függvény α-beli bal oldali határértékének* nevezünk, és a következő szimbólumok valamelyikével jelölünk:

$$\lim_{\alpha-0} f := \lim_{x \to \alpha-0} f(x) := A$$

(vagy $f(x) \to A$ $(x \to \alpha - 0)$, és mindez szóban: „$f(x)$ tart A-hoz, ha x balról tart α-hoz").

5.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ és $\alpha \in \mathbf{R}$.*

1^o *Ha az α jobb oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor az f függvény α-beli jobb oldali határértékének a létezése azzal ekvivalens, hogy bármely*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \cap (\alpha, +\infty) \ , \ \lim(x_n) = \alpha$$

sorozatra az $(f(x_n))$ sorozatnak van hatérértéke. Ebben az esetben a $\lim (f(x_n))$ határérték független az (x_n) sorozattól, és

$$\lim (f(x_n)) = \lim_{\alpha+0} f.$$

2^o *Ha az* α *bal oldali torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$*-nek, akkor az* f *függvény* α*-beli bal oldali határértékének a létezése azzal ekvivalens, hogy bármely*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \cap (-\infty, \alpha) \ \ , \ \ \lim(x_n) = \alpha$$

sorozatra az $(f(x_n))$ *sorozatnak van határértéke. Ebben az esetben a* $\lim (f(x_n))$ *határérték független az* (x_n) *sorozattól, és*

$$\lim (f(x_n)) = \lim_{\alpha-0} f.$$

3^o *Ha* $\alpha \in \mathcal{D}'_f$, *létezik a* $\lim_\alpha f$ *határérték és az* α *jobb oldali* (*bal oldali*) *torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$*-nek, akkor a* $\lim_{\alpha+0} f$ *jobb oldali határérték* ($\lim_{\alpha-0} f$ *bal oldali határérték*) *létezik, és*

$$\lim_{\alpha+0} f = \lim_{\alpha} f \quad (\lim_{\alpha-0} f = \lim_{\alpha} f).$$

4^o *Ha* α *egyszerre jobb oldali és bal oldali torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$*-nek, akkor a* $\lim_\alpha f$ *határérték létezése azzal ekvivalens, hogy léteznek a* $\lim_{\alpha+0} f$, $\lim_{\alpha-0} f$ *egyoldali határértékek, és*

$$\lim_{\alpha+0} f = \lim_{\alpha-0} f.$$

Bizonyítás. Az $1^o, 2^o$ állítások bizonyítása az 5.2.2. Tétel (átviteli elv) bizonyításában látottakkal analóg módon történhet.

A 3^o bizonyításához tegyük fel, hogy pl. α jobb oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek. Ekkor $\alpha \in \mathbf{R}$, és az $A := \lim_\alpha f$ határérték feltételezett létezése miatt bármely $K(A)$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \in K(A) \quad (x \in \mathcal{D}_f,\, 0 < |x - \alpha| < \delta)$. Speciálisan mindez teljesül az $x \in \mathcal{D}_f$, $a < x < a + \delta$ helyeken, ami azt jelenti, hogy létezik a $\lim_\alpha f$ jobb oldali határérték és $\lim_\alpha f = A$. (Analóg a bizonyítás akkor is, ha α bal oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek.)

A 3^o állításra tekintettel a 4^o igazolásához azt kell már csak belátnunk, hogy ha $A := \lim_{\alpha+0} f = \lim_{\alpha-0} f$, akkor létezik a $\lim_\alpha f$ határérték. Valóban, tetszőleges $K(A)$ környezethez megadhatók olyan $\delta_i > 0 \ \ (i = 1, 2)$ számok, hogy

$$f(x) \in K(A) \qquad (x \in \mathcal{D}_f, \alpha < x < \alpha + \delta_1),$$

$$f(t) \in K(A) \qquad (t \in \mathcal{D}_f, \alpha - \delta_2 < t < \alpha).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ekkor

$$f(x) \in K(A) \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - \alpha| < \delta),$$

azaz létezik a $\lim_\alpha f$ határérték (és $\lim_\alpha f = A$). ■

A következő tételben monoton függvények jobb (vagy bal) oldali határértékének a létezésével, ill. a kiszámításával foglalkozunk. A speciális esetben (ld. monoton sorozatok) már ismert állítások kiterjesztéseit fogalmazzuk meg valós függvényekre.

5.3.5. Tétel. *Legyen az* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvény monoton növő.*

1^o *Ha az* $\alpha \in \mathbf{R}$ *jobb oldali torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$*-nek, akkor* f*-nek az* α*-ban létezik a jobb oldali határértéke, és*

$$\lim_{\alpha+0} f = \inf\{f(x) \in \mathcal{R}_f : x \in \mathcal{D}_f, x > \alpha\}.$$

2^o *Ha az* $\alpha \in \mathbf{R}$ *bal oldali torlódási pontja* $\mathcal{D}_f$*-nek, akkor* f*-nek az* α*-ban létezik a bal oldali határértéke, és*

$$\lim_{\alpha-0} f = \sup\{f(x) \in \mathcal{R}_f : x \in \mathcal{D}_f, x < \alpha\}.$$

3^o *Ha* $+\infty \in \mathcal{D}_f'$*, akkor létezik a* $\lim_{+\infty} f$ *határérték, és*

$$\lim_{+\infty} f = \sup \mathcal{R}_f.$$

4^o *Ha* $-\infty \in \mathcal{D}_f'$*, akkor létezik a* $\lim_{-\infty} f$ *határérték, és*

$$\lim_{-\infty} f = \inf \mathcal{R}_f.$$

5^o *Analóg kijelentések teljesülnek monoton fogyó függvényekre azzal, hogy ekkor a fentiekben az* inf*-et és a* sup*-ot felcseréljük.*

Bizonyítás. Legyen az $\alpha \in \mathbf{R}$ jobb oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, és

$$A := \inf\{f(x) \in \mathcal{R}_f : x \in \mathcal{D}_f, x > \alpha\}.$$

Mivel $A \neq +\infty$, ezért bármely $K(A)$ környezet esetén van olyan $y \in K(A)$, hogy $A < y$. Így (az infimum definíciója (ld. 1.2. x) megjegyzés) alapján) valamilyen $x_0 \in \mathcal{D}_f$ $x_0 > \alpha$ helyen $f(x_0) < y$. Ha $x \in \mathcal{D}_f$, $\alpha < x < x_0$, akkor

$$A \leq f(x) \leq f(x_0) < y,$$

amiből $f(x) \in K(A)$ következik. Ez azt jelenti, hogy létezik a $\lim_{\alpha+0} f$ jobb oldali határérték, és $\lim_{\alpha+0} f = A$.

A $\lim_{\alpha-0} f$-re vonatkozó bizonyítás (értelemszerű módosítással) u.így történhet.

Ha $+\infty \in \mathcal{D}_f'$ és $B := \sup \mathcal{R}_f$, akkor $B \neq -\infty$, és tetszőleges $K(B)$ környezet esetén van olyan $z \in K(B)$, hogy $z < B$. A szuprémum definíciója (ld. 1.2. ix) megjegyzés) miatt létezik olyan $x_0 \in \mathcal{D}_f$, amellyel $z < f(x_0) \leq B$. Ezért tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$, $x_0 < x$ mellett

$$z < f(x_0) \leq f(x) \leq B,$$

más szóval $f(x) \in K(B)$. Következésképpen létezik a $\lim_{+\infty} f = B$ határérték. A tétel többi kijelentésének a bizonyítása hasonlóan végezhető el. ■

5.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum (a_n(t-a)^n)$ *hatványsor* r *konvergencia-sugara nem nulla, és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in K_r(a)).$$

Ekkor bármely $b \in K_r(a)$ *esetén létezik a* $\lim_b f$ *határérték, és*

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-a)^n.$$

Bizonyítás. A 4.5.3. Tétel szerint alkalmas $b_n \in \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ együtthatók és $\rho > 0$ „sugár" mellett

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n \qquad (x \in K_\rho(b)),$$

ahol

$$b_0 = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-a)^n.$$

Ezért (ld. 4.5.) $x \in K_{\rho/2}(b)$ esetén

$$|f(x) - f(b)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-b)^n\right| = |x-b|\cdot \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-b)^{n-1}\right| =$$

$$|x-b|\cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(x-b)^n\right| \le |x-b|\cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}(x-b)^n| \le$$

$$|x-b|\cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}|\cdot (\rho/2)^n =: M\cdot |x-b|.$$

Ha tehát $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $0 < \delta < \rho/2$ olyan, hogy $M\delta < \varepsilon$, akkor

$$|f(x) - f(b)| \le M\delta < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{K}, 0 < |x-b| < \delta).$$

Ez azt jelenti, hogy létezik a $\lim_b f = f(b)$ határérték. ∎

Speciálisan bármely P polinom (ld. 2.4. xiv) megjegyzés) esetén tetszőleges $a \in \mathbf{K}$ helyen létezik a $\lim_a P = P(a)$ határérték.

A továbbiakban racionális törtfüggvények (ld. 2.4. xv) megjegyés) határértékével foglalkozunk. Legyen tehát P és Q egy-egy polinom, és tegyük fel, hogy Q legalább elsőfokú. A P/Q racionális törtfüggvényt vizsgáljuk a határérték szempontjából valamilyen $a \in \mathbf{K}$

(„véges") helyen. Tekintsük ehhez a P, Q polinomok gyöktényezős felbontását (ld. 2.4. xiv) megjegyzés):

$$P(x) = c_N \cdot \prod_{k=0}^{N} (x - \lambda_k)^{s_k} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

$$Q(x) = d_M \cdot \prod_{j=0}^{M} (x - \mu_j)^{r_j} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Az alábbi eseteket fogjuk megkülönböztetni.

1^o eset: $Q(a) \neq 0$. Ekkor az előbbi $\lim_a P = P(a)$, $\lim_a Q = Q(a) \neq 0$ következmények, ill. az 5.3.3. Tétel miatt létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \frac{\lim_a P}{\lim_a Q} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

határérték.

2^o eset: $Q(a) = 0$ és $P(a) \neq 0$. Ekkor valamilyen $j_0 \in \{0, ..., M\}$ indexszel $a = \mu_{j_0}$, így a $0 < \nu := r_{j_0} \in \mathbf{N}$ jelöléssel

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{(x-a)^\nu} \qquad (x \in \mathbf{K} \setminus \{\mu_0, ..., \mu_M\}),$$

ahol

$$g(t) := \frac{P(t)}{d_M \cdot \prod_{j_0 \neq j=0}^{M} (t - \mu_j)^{r_j}} \qquad (t \in \mathbf{K} \setminus \{\mu_0, ..., \mu_{j_0-1}, \mu_{j_0+1}, ..., \mu_M\}).$$

Világos, hogy $a \in \mathcal{D}_g$ és $g(a) \neq 0$. Megmutatjuk, hogy a $P/Q \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénynek az a-ban létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \infty$$

határértéke. Valóban, az 1^o eset miatt $\lim_a g = g(a) \neq 0$, ezért megválasztható a $k(a) \subset \mathbf{C}$ környezet úgy, hogy

$$|g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|}{2} \qquad (x \in k(a)).$$

Így

$$|g(x)| = |(g(x) - g(a)) + g(a)| \geq$$

$$|g(a)| - |g(x) - g(a)| > \frac{|g(a)|}{2} \; (> 0) \qquad (x \in k(a)).$$

Legyen ugyanakkor $0 < p \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ekkor $0 < \delta < \sqrt[\nu]{|g(a)|/2p}$ mellett

$$|x-a|^\nu < \frac{|g(a)|}{2p} \qquad (x \in \mathbf{C},\ 0 < |x-a| < \delta),$$

azaz

$$\frac{1}{|x-a|^\nu} > \frac{2p}{|g(a)|} \qquad (x \in \mathbf{C},\ 0 < |x-a| < \delta).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| = |g(x)| \cdot \frac{1}{|x-a|^\nu} > \frac{|g(a)|}{2} \cdot \frac{2p}{|g(a)|} = p \qquad (a \neq x \in k(a) \cap k_\delta(a)).$$

Következésképpen létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \infty$$

határérték.

Megjegyezzük, hogy ha itt P, Q valós együtthatós polinomok és $a \in \mathbf{R}$, akkor az $f := P/Q$ függvényt (leszűkítve a $\mathcal{D}_f \cap \mathbf{R}$ halmazra) mint $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (egyváltozós valós) függvényt tekintve a fenti g függvény (szintén leszűkítve a $\mathcal{D}_g \cap \mathbf{R}$ halmazra) is tekinthető $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényként. Ekkor az előbbi $\lim_a P/Q = \infty$ eredményt „finomítva" az alábbiakat mondhatjuk:

$$\lim_{a+0} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (g(a) > 0) \\ -\infty & (g(a) < 0) \end{cases}, \quad \lim_{a-0} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (g(a) > 0 \text{ és } \nu \text{ páros}) \\ -\infty & (g(a) < 0 \text{ és } \nu \text{ páros}) \\ -\infty & (g(a) > 0 \text{ és } \nu \text{ páratlan}) \\ +\infty & (g(a) < 0 \text{ és } \nu \text{ páratlan}). \end{cases}$$

Speciálisan, ha ν páros, akkor létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (g(a) > 0) \\ -\infty & (g(a) < 0) \end{cases}$$

határérték.

3^o eset: $Q(a) = P(a) = 0$. Tehát (a 2^o esetbeli jelölésekkel) $a = \mu_{j_0}$, és valamilyen $k_0 \in \{0, ..., N\}$ indexszel egyúttal $a = \lambda_{k_0}$. Ezért, ha

$$\sigma := s_{k_0} - r_{j_0},$$

akkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x)(x-a)^\sigma \qquad (x \in \mathbf{K} \setminus \{\mu_0, ..., \mu_M\}),$$

ahol

$$h(t) := \frac{c_N}{d_M} \cdot \frac{\prod_{k_0 \neq k=0}^{N} (t-\lambda_k)^{s_k}}{\prod_{j_0 \neq j=0}^{M} (t-\mu_j)^{r_j}} \qquad (t \in \mathbf{K} \setminus \{\mu_0, ..., \mu_{j_0-1}, \mu_{j_0+1}, ..., \mu_M\}).$$

Nyilván $a \in \mathcal{D}_h$ és $h(a) \neq 0$. Gondoljuk meg, hogy a $P/Q \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvénynek az a-ban létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \begin{cases} 0 & (\sigma > 0) \\ \\ h(a) & (\sigma = 0) \\ \\ \infty & (\sigma < 0) \end{cases}$$

határértéke. Ui. a 2^o esethez hasonlóan most is azt mondhatjuk, hogy egy alkalmas $k(a)$ környezettel

$$|h(x)| > \frac{|h(a)|}{2} \qquad (x \in k(a)),$$

és (a 2^o-ben követett gondolatmenettel) $\sigma < 0$ esetén

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \infty.$$

Ha $\sigma = 0$, akkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) \qquad (x \in \mathbf{K} \setminus \{\mu_0, ..., \mu_M\}),$$

és az 1^o eset szerint

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \lim_a h = h(a).$$

Ha viszont $\sigma > 0$, akkor az előbbi $k(a)$ környezettel (ld. 2^o eset)

$$|h(x)| < 2|h(a)| \qquad (x \in (k(a)).$$

Továbbá bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|(x-a)^\sigma| = |x-a|^\sigma < \frac{\varepsilon}{2|h(a)|} \qquad (x \in \mathbf{C}, |x-a| < \delta).$$

Így

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| = |h(x)|\cdot|x-a|^{\sigma} < 2|h(a)|\cdot\frac{\varepsilon}{2|h(a)|} = \varepsilon \qquad (a \neq x \in k(a) \cap k_{\delta}(a)),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = 0$$

határérték.

Ha a P, Q polinomok valós együtthatósak és $a \in \mathbf{R}$, akkor $\sigma < 0$ esetén a 2^o-ben mondottakkal analóg módon kapjuk, hogy

$$\lim_{a+0} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (h(a) > 0) \\ -\infty & (h(a) < 0) \end{cases}, \quad \lim_{a-0} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (h(a) > 0 \text{ és } \nu \text{ páros}) \\ -\infty & (h(a) < 0 \text{ és } \nu \text{ páros}) \\ -\infty & (h(a) > 0 \text{ és } \nu \text{ páratlan}) \\ +\infty & (h(a) < 0 \text{ és } \nu \text{ páratlan}). \end{cases}$$

Speciálisan, ha ν páros, akkor létezik a

$$\lim_a \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (h(a) > 0) \\ -\infty & (h(a) < 0) \end{cases}$$

határérték.

Vizsgáljuk most a fenti

$$f := \frac{P}{Q} \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$$

racionális törtfüggvény $\lim_a f$ határértékét (ha létezik) a „végtelenben". Legyen

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \quad , \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{M} b_i x^i \qquad (x \in \mathbf{K}_1)$$

(alkalmas $a_0, ..., a_N \in \mathbf{K}_1$, $a_N \neq 0$, ill. $b_0, ..., b_M \in \mathbf{K}_1, b_M \neq 0$ együtthatókkal valamilyen $N, M \in \mathbf{N}$ mellett).

a) eset: $\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}$ (azaz $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}_2$) és $a = +\infty$. Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$. Feltehetjük, hogy $x_n > 0$ és $Q(x_n) \neq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ekkor

$$(*) \qquad f(x_n) = \frac{P(x_n)}{Q(x_n)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k x_n^k}{\sum_{i=0}^{M} b_i x_n^i} = x_n^{N-M} \cdot \frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_n^{-(N-k)}}{b_M + \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_n^{-(M-i)}}$$

(ahol (ha $N = 0$ vagy $M = 0$, akkor) $\sum_{k=0}^{-1} \ldots := \sum_{i=0}^{-1} \ldots := 0$). Gondoljuk meg először is, hogy bármilyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$ esetén

$$\lim(x_n^{-s}) = 0.$$

Ha ui. $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor $\lim(x_n) = +\infty$ miatt van olyan $R \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$x_n > \sqrt[s]{1/\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Következésképpen

$$x_n^{-s} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R),$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\lim(x_n^{-s}) = 0$. A $(*)$-ban szereplő akármelyik

$$k = 0, \ldots, N-1, \ \text{ ill. } \ i = 0, \ldots, M-1$$

esetén $1 \leq N - k \in \mathbf{N}$, ill. $1 \leq M - i \in \mathbf{N}$, ezért minden $k = 0, \ldots, N-1$, ill. $i = 0, \ldots M-1$ indexre

$$\lim\left(x_n^{-(N-k)}\right) = \lim\left(x_n^{-(M-i)}\right) = 0.$$

A 3.7.5. Tétel alapján tehát azt mondhatjuk, hogy

$$\lim\left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_n^{-(N-k)}}{b_M + \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_n^{-(M-i)}}\right) = \frac{a_N}{b_M}.$$

Ha $N = M$, akkor $(*)$-ból $\lim\left(f(x_n)\right) = a_N/b_N$, és így az átviteli elv (ld. 5.3.2. Tétel) alapján

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{P}{Q} = \frac{a_N}{b_N}.$$

Ha $N < M$, akkor $1 \leq M - N \in \mathbf{N}$ miatt $\lim\left(x_n^{N-M}\right) = \lim\left(x_n^{-(M-N)}\right) = 0$, és a 3.7.5. Tétel szerint

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{P}{Q} = 0 \cdot \frac{a_N}{b_M} = 0.$$

Ha $N > M$, akkor könnyen láthatóan $\lim\left(x_n^{N-M}\right) = +\infty$. Ezért - feltéve, hogy P, Q valós együtthatósak, azaz $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - azt kapjuk (ld. 3.7.10. Tétel), hogy

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (a_N/b_M > 0) \\ \\ -\infty & (a_N/b_M < 0). \end{cases}$$

Ha viszont P, Q nem valós együtthatósak, azaz $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, akkor

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{P}{Q} = \infty.$$

b) eset: $\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}$ (azaz $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}_2$) és $a = -\infty$. Legyen most $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = -\infty$. Ekkor az a) esetben látottakkal analóg módon kapjuk, hogy

$$\lim \left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_n^{-(N-k)}}{b_M + \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_n^{-(M-i)}} \right) = \frac{a_N}{b_M},$$

és $N = M$ esetén továbbra is

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{P}{Q} = \frac{a_N}{b_N},$$

$N < M$ esetén

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{P}{Q} = 0,$$

míg valós együtthatós P, Q polinomok és $N > M$ esetén páros $N - M$ mellett $\lim (x_n^{N-M}) = +\infty$ miatt

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{P}{Q} = \begin{cases} +\infty & (a_N/b_M > 0) \\ \\ -\infty & (a_N/b_M < 0), \end{cases}$$

páratlan $N - M$ mellett pedig $\lim (x_n^{N-M}) = -\infty$ miatt

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{P}{Q} = \begin{cases} -\infty & (a_N/b_M > 0) \\ \\ +\infty & (a_N/b_M < 0), \end{cases}$$

ill. nem valós együtthatós P, Q és $N > M$ esetén $\lim (|x_n^{N-M}|) = +\infty$ miatt

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{P}{Q} = \infty.$$

c) eset: $\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}$ (azaz $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{K}_2$) és $a = \infty$. Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ most olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = \infty$. Ekkor az a), b) esetekben látottakhoz hasonlóan

$$\lim \left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_n^{-(N-k)}}{b_M + \sum_{i=0}^{M-1} b_i x_n^{-(M-i)}} \right) = \frac{a_N}{b_M},$$

és

$$\lim_{\infty} f = \lim_{\infty} \frac{P}{Q} = \begin{cases} \frac{a_N}{b_N} & (N = M) \\ \\ 0 & (N < M) \\ \\ \infty & (N > M). \end{cases}$$

5.4. Megjegyzések

i) A $\lim_a f = A$ határérték definíciója alapján világos, hogy ha itt A „nem véges", azaz $A \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$, akkor az $|f| : \mathcal{D}_f \to [0, +\infty)$,

$$|f|(x) := |f(x)| \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvénynek van határértéke a-ban, és $\lim_a |f| = +\infty$.

ii) Mit jelent az, hogy egy $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvénynek valamilyen $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen nincs határértéke? Az utóbbi definíciója alapján azt, hogy bármilyen $A \in \overline{\mathbf{K}}_2$ esetén egy alkalmas $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezettel akármilyen $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ mellett

$$f[(k(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f] \not\subset K(A).$$

Van tehát olyan $a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap k(a)$, hogy $f(x) \notin K(A)$. Speciálisan, ha itt $a \in \mathbf{K}_1$, $A \in \mathbf{K}_2$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ esetén egy alkalmas $x \in \mathcal{D}_f$, $0 < |x-a| < \delta$ helyen $|f(x)-A| \geq \varepsilon$. Ezt az információt igen gyakran úgy „használjuk ki", hogy δ helyébe $1/n$-et írva $(n \in \mathbf{N})$ egy $x_n \in \mathcal{D}_f$, $0 < |x_n - a| < 1/n$ elemmel $0 < |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. (Világos, hogy ekkor $\lim(x_n) = a$, de az A nem határértéke az $(f(x_n))$ sorozatnak (aminek lehet, hogy nincs is határértéke).)

iii) A racionális törtfüggvények vizsgálatakor már alkalmazott gondolatmenetet kiemelve legyen $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $a \in \overline{\mathbf{K}}_1$, $A \in \overline{\mathbf{K}}_2$, $A = \lim_a f$ és $A \neq 0$. Ekkor van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet és olyan $r > 0$ szám, hogy

$$|f(x)| > r \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ha ui. $A \in \mathbf{K}_2$, akkor egy alkalmas $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezettel

$$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ezért

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \geq |A| - |f(x) - A| >$$
$$|A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f),$$

más szóval az $r := |A|/2$ választás megfelelő. Minden egyéb esetben (ld. i))

$$\lim_a |f| = +\infty,$$

azaz van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, amellyel pl.

$$|f(x)| > 1 =: r \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

iv) A $\lim_{a+0} f$, ill. a $\lim_{a-0} f$ jobb-bal oldali határérték értelmezéséből rögtön adódik, hogy

$$\lim_{a+0} f = \lim_a g \ , \ \lim_{a-0} f = \lim_a h,$$

ahol $g := f_{|(a,+\infty)\cap\mathcal{D}_f}$ és $h := f_{|(-\infty,a)\cap\mathcal{D}_f}$.

v) Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény monoton növő, és $a \in \mathbf{R}$ egyszerre jobb és bal oldali torlódási pontja a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománynak. Ekkor az 5.3.5. Tétel alapján nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{a-0} f \le \lim_{a+0} f.$$

Sőt, ha még $a \in \mathcal{D}_f$ is igaz, akkor

$$\lim_{a-0} f \le f(a) \le \lim_{a+0} f.$$

Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy az f-nek *ugrása van a-ban,* ha

$$q_a := \lim_{a-0} f < \lim_{a+0} f =: Q_a.$$

Jelöljük az f ugráshelyeinek a halmazát $\mathcal{U}_f$-fel. Ismét csak az 5.3.5. Tételből egyszerűen következik, hogy (a most bevezetett jelölésekkel)

$$Q_a \le q_b \qquad (a, b \in \mathcal{U}_f, a < b).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(q_a, Q_a) \cap (q_b, Q_b) = \emptyset \qquad (a, b \in \mathcal{U}_f, a \ne b).$$

Ha $a \in \mathcal{U}_f$ és $r_a \in (q_a, Q_a) \cap \mathbf{Q}$, $r_b \in (q_b, Q_b) \cap \mathbf{Q}$, akkor a fentiek szerint

$$r_a \ne r_b \qquad (a, b \in \mathcal{U}_f,\ a \ne b).$$

Következésképpen (ld. 5.2. viii) megjegyzés) az $\mathcal{U}_f$ halmaz legfeljebb megszámlálható. (Analóg állítások igazak monoton fogyó függvényekre.)

vi) A racionális törtfüggvények határértékével kapcsolatban megfogalmazott állításaink illusztrálására tekintsük a

$$P(x) := x^2 - x - 2 \ , \ Q(x) := x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \qquad (x \in \mathbf{K})$$

polinomokat, ill. az $f := P/Q$ racionális törtfüggvényt. Ekkor (könnyen ellenőrizhetően)

$$P(x) = (x+1)(x-2) \ , \ Q(x) = (x-1)(x-2)^2 \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ezért

$$\lim_a f = f(a) = \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{a+1}{(a-1)(a-2)} \qquad (a \in \mathbf{K} \setminus \{1,2\}).$$

Továbbá

$$\lim_{1-0} f = +\infty \ , \ \lim_{1+0} f = -\infty \ , \ \lim_{2-0} f = -\infty \ , \ \lim_{2+0} f = +\infty.$$

vii) Könnyű példát mondani olyan $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvényekre, hogy létezik a $b := \lim_a g$ és a $\lim_b f$ határérték, továbbá létezik az $f \circ g$ összetett függvény, $a \in \mathcal{D}'_{f\circ g}$, de nem igaz a

$$\lim_a (f \circ g) = \lim_b f$$

egyenlőség. Sőt, még az sem biztos, hogy létezik a $\lim_a (f \circ g)$ határérték. (Formálisan szólva az összetett függvényre általában „nem öröklődik" a külső függvény határértéke, azaz előfordulhat, hogy $\lim_a (f \circ g) \neq \lim_{\lim_a g} f$.) Legyen pl.

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 1 & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases} \ , \ f(x) := \begin{cases} 2 & (x = 1) \\ \\ 0 & (1 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Világos, hogy $\lim_0 g = 1$, $\lim_1 f = 0$, de

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 2 & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

miatt $\lim_0 (f \circ g) = 2$. Ha

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ \\ x+1 & (x < 0), \end{cases}$$

akkor $\lim_0 h = 1$, ill.

$$f \circ h(x) = f(h(x)) = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Innen nyilvánvaló, hogy az $f \circ h$ függvénynek a 0-ban nem létezik határérértéke. Ugyanakkor könnyen belátható az alábbi állítás: ha az $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvényekre a $b := \lim_a g$, $A := \lim_b f$ határértékek léteznek, továbbá létezik az $f \circ g$ összetett függvény, $a \in \mathcal{D}'_{f\circ g}$, és $b \notin \mathcal{D}_f$, vagy $b \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{R}_g$, vagy $b \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}_g$ és $f(b) = A$, akkor létezik a $\lim_a (f \circ g)$ határérték, és $\lim_a (f \circ g) = A$. Ui. legyen

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f\circ g} \setminus \{a\},$$

és $\lim(x_n) = a$. Ekkor egyúttal $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$, ezért az átviteli elv miatt (ld. 5.3.2. Tétel a g-re alkalmazva) $\lim (g(x_n)) = b$. A feltételeink szerint $g(x_n) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, ezért $b \notin \mathcal{D}_f$, vagy $b \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{R}_g$ esetén $g(x_n) \neq b$ $(n \in \mathbf{N})$. Így ismét csak az előbb idézett átviteli elv alapján (azt most az f-re alkalmazva)

$$\lim (f \circ g(x_n)) = \lim (f(g(x_n))) = A.$$

Világos, hogy ez utóbbi érvényben marad akkor is, ha $b \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}_g$ és $f(b) = A$, ill. bizonyos $n \in \mathbf{N}$ indexekre $g(x_n) = b$. Mindez megint csak az átviteli elv szerint (azt ezúttal az $f \circ g$-re alkalmazva) pontosan azt jelenti, amit állítottunk.

5.5. Folytonos függvények

Az 5.3.6. Tétel hatványsorok összegfüggvényének a határértékéről fogalmaz meg egy állítást: $\lim_b f = f(b)$ $(b \in \mathcal{D}_f)$. A „végesben vett véges" határértékkel kapcsolatban mondottak szerint (ld. 5.3.) ez azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - b| < \delta).$$

Világos, hogy itt a „$0 <$" feltétel elhagyható:

$$(*) \qquad |f(x) - f(b)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x - b| < \delta),$$

mert az $x = b$ választással az

$$|f(b) - f(b)| = 0 < \varepsilon$$

egyenlőtlenség nyilván teljesül. Az is világos, hogy általában a $(*)$ egyenlőtlenség akkor is teljesülhet valamilyen $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény és $b \in \mathcal{D}_f$ esetén, ha b „csak" eleme, de nem torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek. Sőt, az utóbbi esetben (amikor is b izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek (ld. 5.2. ix) megjegyzés)) a $(*)$ kikötés automatikusan teljesül. Ekkor ui. van olyan $r > 0$, hogy

$$K_r(b) \cap \mathcal{D}_f = \{b\},$$

ezért $(*)$-ban (tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett) bármely $0 < \delta \leq r$ megfelelő.

A most mondottak motiválják a következő definíciót: azt mondjuk, hogy valamilyen $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *folytonos,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, szám, amellyel

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta).$$

Speciálisan a $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}$, azaz az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ esetben ez azt jelenti, hogy

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ a - \delta < x < a + \delta).$$

Jelöljük az $a \in \mathbf{K}_1$ pontban folytonos $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvények halmazát a következőképpen: $\mathcal{C}\{a\}$. Ekkor a környezetek nyelvén megfogalmazva $f \in \mathcal{C}\{a\}$ azzal ekvivalens, hogy $a \in \mathcal{D}_f$, és az $f(a)$ helyettesítési érték bármely $K(f(a)) \subset \mathbf{K}_2$ környezetéhez létezik az a-nak olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezete, amellyel

$$f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)).$$

A „felvezetésben" mondottakra hivatkozva az alábbi kijelentések nyilvánvalóan igazak:

i) ha $a \in \mathcal{D}_f$ izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$;

ii) ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$, azzal ekvivalens, hogy f-nek az a-ban létezik a határértéke és $\lim_a f = f(a)$.

Állapodjunk meg abban, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvényt *folytonosnak* nevezzük, ha bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathcal{C}\{a\}$. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel a folytonos $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvények által alkotott halmazt. A „legegyszerűbb" folytonos függvények a konstansfüggvények: ha $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$, $c \in \mathbf{K}$ és $f(x) = c \quad (x \in A)$, akkor triviális módon igaz, hogy f folytonos: $f \in \mathcal{C}$. Az 5.3.6. Tétel szerint minden analitikus függvény (ld. 4.5.) folytonos. Speciálisan az exp, sin cos, sh, ch függvények, ill. minden polinom, sőt, minden racionális törtfüggvény is folytonos függvény (ld. 2.4. xiv), xv) megjegyzések, ill. 4.5.).

A folytonosság és a műveletek kapcsolatát tárgyalja az alábbi tétel.

5.5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathcal{C}\{a\}$. *Ekkor:*

1^o $f + g, fg \in \mathcal{C}\{a\}$;

2^o *ha* $g(a) \neq 0$, *akkor* $f/g \in \mathcal{C}\{a\}$.

Bizonyítás címén elég annyit megjegyezni, hogy ha F jelenti a tételben szereplő $f + g$, $fg, f/g$ függvények valamelyikét, és $a \in \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_F'$, akkor az állításaink az 5.3.3. Tétel egyszerű következményei. Ha pedig $a \in \mathcal{D}_F \setminus \mathcal{D}_F'$, akkor (mint a $\mathcal{D}_F$ izolált pontjában) az F „automatikusan" folytonos.

Az 5.5.1. Tétel alapján világos továbbá, hogy ha $f, g \in \mathcal{C}$ és $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, akkor $f + g$, $fg \in \mathcal{C}$. Ha itt még

$$(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \setminus \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) = 0\} \neq \emptyset,$$

akkor $f/g \in \mathcal{C}$.

5.5.2. Tétel (átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in \mathcal{C}\{a\}$ *azzal ekvivalens, hogy bármely* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ *sorozatra*

$$\lim(f(x_n)) = f(a).$$

Bizonyítás. Az 5.3.2. Tételre hivatkozva ui. a most mondott átviteli elv teljesül akkor, ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, mert ebben az esetben $f \in \mathcal{C}\{a\}$ akkor és csak akkor igaz (ld. fent), ha létezik a $\lim_a f = f(a)$ határérték. Ha viszont $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$ (izolált pont), akkor valamilyen $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezettel $k(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$. A $\lim(x_n) = a$ feltételezés miatt viszont egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel $x_n \in k(a) \cap \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, azaz $x_n = a$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$. Ezért $f(x_n) = f(a) \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, amiből $\lim(f(x_n)) = f(a)$ már nyilván következik. ■

Az 5.3.2. Tételt felhasználva már egyszerűen „elintézhető" az összetett függvények folytonossága. Nevezetesen, igaz az

5.5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $g \in \mathcal{C}\{a\}$ *és* $f \in \mathcal{C}\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$.

Bizonyítás. Mivel a feltételezés szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ (ld. 2.3.). Ha

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g},$$

és $\lim(x_n) = a$, akkor $\mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ miatt egyúttal

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g.$$

Ezért az 5.5.2. Tételt a g-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim(g(x_n)) = g(a).$$

Ugyanakkor $(g(x_n)) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, ezért újra csak az 5.5.2. Tételt (most az f-re) alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\lim(f(g(x_n)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Mivel ez utóbbi bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim(x_n) = a$ esetén igaz, ezért az 5.5.2. Tételből már következik, hogy $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$. ■

A folytonos függvények egyik „emblematikus" tulajdonságát fogalmazza meg a következő tétel, amely a gyakorlati alkalmazások szempontjából is nehezen túlbecsülhető jelentőséggel bír.

5.5.4. Tétel (Bolzano). *Tegyük fel, hogy valamilyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *esetén az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény folytonos, és*

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, *ami gyöke az* f *függvénynek, azaz* $f(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Legyen

$$a_0 := a \quad , \quad b_0 := b \quad , \quad c_0 := \frac{a+b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

i) $f(c_0) = 0$, ekkor $\xi := c_0$ gyöke az f-nek;

ii) $f(c_0) > 0$, ekkor legyen $a_1 := a$, $b_1 := c_0$;

iii) $f(c_0) < 0$, ekkor legyen $a_1 := c_0$, $b_1 := b$.

Világos, hogy a ii), iii) esetekben $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén már ismertek az $a \le a_i < b_i \le b$ pontok, és

$$f(a_i) < 0 < f(b_i) \qquad (i = 0, ..., n).$$

Legyen ekkor

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ismételjük meg az „első lépést":

i) ha $f(c_n) = 0$, akkor $\xi := c_n$ gyöke az f-nek;

ii) ha $f(c_n) > 0$, akkor legyen $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$;

iii) ha $f(c_n) < 0$, ekkor legyen $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$,

és

$$c_{n+1} := \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

Nyilvánvaló, hogy minket csak a ii), iii) esetek „érdekelnek" már a továbbiakban, más szóval feltehetjük, hogy ezzel az eljárással kaptunk egy-egy $(a_n), (b_n) : \mathbf{N} \to [a, b]$ sorozatot, $a \le a_n < b_n \le b$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(A fenti sorozatok létezésével kapcsolatban ld. 3.2. vii), viii) megjegyzések.) Teljes indukcióval rögtön adódik, hogy

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, ha $n = 0$, akkor $a_0 = a, b_0 = b$, $2^0 = 1$ miatt a dolog triviális. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll a bizonyítandó egyenlőség, akkor

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} c_n - a_n \\ \text{vagy} \\ b_n - c_n, \end{cases}$$

így

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Az (a_n), (b_n) sorozatok konstrukciójából és a nyilvánvaló

$$a_n < c_n < b_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

becslésből rögtön következik, hogy $(a_n) : \mathbf{N} \to [a, b]$ monoton növekedő, $(b_n) : \mathbf{N} \to [a, b]$ monoton fogyó. Mivel az $[a, b]$ intervallum korlátos, ezért (ld. 3.5.3. Tétel) az (a_n), (b_n) sorozatok konvergensek és az $[a, b]$ zártsága miatt (ld. 5.1.3. Tétel)

$$\xi := \lim(a_n) \in [a, b] \ , \ \eta := \lim(b_n) \in [a, b].$$

A konvergens sorozatokkal kapcsolatos eredményeink (ld. 3.) alapján

$$|\xi - \eta| = \lim(|a_n - b_n|) \leq \lim\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0,$$

ezért $\xi = \eta$. Az átviteli elv (ld. 5.5.2 Tétel) és $f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ alapján tehát

$$0 \leq \lim(f(b_n)) = f(\xi) = \lim(f(a_n)) \leq 0,$$

következésképpen $f(\xi) = 0$. Világos, hogy $f(a) < 0 < f(b)$ miatt $\xi \in (a, b)$. ■

Nyilván analóg állítás mondható akkor is, ha az előző tételben $f(a) > 0 > f(b)$ teljesül, azaz általában akkor, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Tegyük most fel, hogy az előbbi $[a, b]$ zárt intervallum esetén a $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és legyen $g(a) \neq g(b)$, pl. $g(a) < g(b)$. Ha $y \in \mathbf{R}$ és

$$g(a) < y < g(b),$$

akkor az $f := g - y$ függvényre triviális módon teljesülnek az előző Bolzano-tétel feltételei. Ezért van olyan $\xi \in (a, b)$, amellyel $f(\xi) = g(\xi) - y = 0$, azaz $g(\xi) = y$. Ezzel beláttuk az 5.5.4. Tétel alábbi kiterjesztését.

5.5.5. Tétel. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$, *az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény folytonos, és* $f(a) \neq f(b)$. *Ekkor* $f(a) < f(b)$ *esetén tetszőleges*

$$f(a) < y < f(b)$$

számhoz, ill. $f(a) > f(b)$ *esetén tetszőleges*

$$f(a) > y > f(b)$$

számhoz van olyan $\xi \in (a, b)$, *amellyel* $f(\xi) = y$.

Az 5.5.5. Tételből $f(a) \cdot f(b) < 0$ esetén az $y := 0$ választással nyilván az 5.5.4. Tételt kapjuk, azaz a szóban forgó két tétel valójában ugyanazt az állítást fogalmazza meg.

Legyen most $I \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges intervallum, $h : I \to \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy a h függvény *Darboux-tulajdonságú,* ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$, $h(a) \neq h(b)$ esetén a $h(a), h(b)$ végpontú intervallum minden y eleméhez van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $h(\xi) = y$. Az előbbi két tétel alapján tehát a következőt mondhatjuk.

5.5.6. Tétel. *Bármilyen* $I \subset \mathbf{R}$ *intervallumon értelmezett* $h : I \to \mathbf{R}$ *folytonos függvény Darboux-tulajdonságú.*

(Annyit kell csupán megjegyeznünk, hogy az $f(x) := h(x) \quad (x \in [a, b])$ függvény nyilván folytonos minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén.)

A folytonos függvények egyik fontos jellemzője, hogy halmazok bizonyos tulajdonságait „megtartják": ha $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ folytonos, $A \subset \mathbf{K}_1$, $B \subset \mathbf{K}_2$, akkor gyakran az $f[A]$ képhalmazra, ill. az $f^{-1}[B]$ ősképre (ld. 2.2.) is igazak maradnak az A-ra, ill. B-re érvényes egyes halmaztulajdonságok.

5.5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *folytonos függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor az értékkészlete vagy egy-elemű, vagy intervallum.*

Bizonyítás. Legyen

$$m := \inf \mathcal{R}_f \quad , \quad M := \sup \mathcal{R}_f .$$

Ha $m = M$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \{m\}$. Különben legyen $m < y < M$. Ekkor a szuprémum, ill. az infimum tulajdonságai (ld. 1.2. ix), x) megjegyések) alapján alkalmas $a, b \in \mathcal{D}_f$ helyeken

$$f(a) < y < f(b).$$

Nyilván $a \neq b$. Az 5.5.6. Tétel szerint van olyan x az a, b által meghatározott intervallumban, amellyel $y = f(x)$. Tehát $y \in \mathcal{R}_f$, azaz $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$. Innen már következik az állításunk, mivel csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$\mathcal{R}_f = \begin{cases} (m, M) \\ \\ [m, M] \\ \\ (m, M] \\ \\ [m, M). \end{cases}$$

■

Folytassuk magának a folytonosságnak az alábbi jellemzésével.

5.5.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény értelmezési tartománya nyílt halmaz. Ekkor az alábbi ekvivalencia igaz: az f függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden $B \subset \mathbf{K}_2$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}[B]$ őskép is nyílt.*

Bizonyítás. Legyen elsőként $f \in \mathcal{C}$, $B \subset \mathbf{K}_2$ nyílt. Ha $B \cap \mathcal{R}_f = \emptyset$, akkor

$$f^{-1}[B] = f^{-1}[B \cap \mathcal{R}_f] = \emptyset,$$

ami nyílt. Feltehetjük tehát, hogy $B \cap \mathcal{R}_f \neq \emptyset$, legyen $a \in f^{-1}[B]$. Ez azt jelenti, hogy $f(a) \in B$. Mivel B nyílt, ezért egy alkalmas $K(f(a)) \subset \mathbf{K}_2$ környezettel

$$K(f(a))) \subset B.$$

Az $f \in \mathcal{C}\{a\}$ feltételezés alapján viszont van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, amelyre

$$f[k(a)] = f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)).$$

A $\mathcal{D}_f$ nyíltsága alapján viszont feltehető, hogy egyúttal $k(a) \subset \mathcal{D}_f$ is igaz. Következésképpen bármely $x \in k(a)$ helyen $f(x) \in B$. Így $k(a) \subset f^{-1}[B]$, azaz $f^{-1}[B]$ nyílt.

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy bármely $B \subset \mathbf{K}_2$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}[B]$ őskép nyílt, és legyen $a \in \mathcal{D}_f$. Ha $K(f(a))$ egy tetszőleges környezete $f(a)$-nak, akkor $K(f(a))$ nyílt halmaz. Legyen

$$B := K(f(a)),$$

ekkor $f^{-1}[B]$ nyílt és (nyilván) $a \in f^{-1}[B]$. Van ezért olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy $k(a) \subset f^{-1}[B]$. Emlékeztetünk arra, hogy $f^{-1}[B] \subset \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{D}_f$ nyílt. Ezért feltehető, hogy

$k(a) \subset \mathcal{D}_f$. Így azt mondhatjuk, hogy minden $x \in k(a)$ helyen $f(x) \in B = K(f(a))$. Röviden

$$f[k(a)] \subset K(f(a)),$$

tehát $f \in \mathcal{C}\{a\}$. ■

A matematika (és így az analízis) alkalmazásai gyakran vezetnek szélsőérték-feladatokra, amikor is egy (valós) függvény legnagyobb, ill. legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatos a következő két tétel.

5.5.9. Tétel. *Ha az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény folytonos, és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya kompakt, akkor az $\mathcal{R}_f$ értékészlete is kompakt.*

Bizonyítás. Az 5.1.4. Tétel szerint azt kell megmutatnunk, hogy véve tetszőleges $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozatot, ehhez létezik olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (y_{ν_n}) részsorozat konvergens és $\lim (y_{\nu_n}) \in \mathcal{R}_f$. Az $y_n \in \mathcal{R}_f$ $(n \in \mathbf{N})$ feltételezés miatt alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$y_n = f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\mathcal{D}_f$ kompakt, ezért (ld. 5.1.4. Tétel) van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és $a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$. Ugyanakkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így (ld. 5.5.2. Tétel) létezik a

$$\lim (y_{\nu_n}) = \lim (f(x_{\nu_n})) = f(a) \in \mathcal{R}_f$$

határérték. ■

5.5.10. Tétel (Weierstrass). *Legyen az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény értelmezési tartománya kompakt. Ekkor az értékkészletének létezik legkisebb és legnagyobb eleme.*

Bizonyítás. Az 5.5.9. Tétel alapján az $\mathcal{R}_f$ halmaz kompakt, azaz korlátos és zárt. Ha

$$m := \inf \mathcal{R}_f \quad , \quad M := \sup \mathcal{R}_f,$$

akkor $\mathcal{R}_f$ korlátossága miatt $m, M \in \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy $m, M \in \mathcal{R}_f$. Valóban, a szuprémum tulajdonságait (ld. 1.2. ix) megjegyzés) felhasználva van olyan $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozat, amelyre

$$M - \frac{1}{n} < y_n \le M \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen $\lim(y_n) = M$. Mivel $y_n \in \mathcal{R}_f$, ezért egy alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$y_n = f(x_n) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt viszont megadható olyan (ν_n) indexsorozat (ld. 5.1.4. Tétel), hogy létezik az

$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$$

határérték. Továbbá $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) és a 3.5.2. Tétel szerint

$$M = \lim(y_n) = \lim(y_{\nu_n}) = \lim\left(f(x_{\nu_n})\right) = f(a) \in \mathcal{R}_f.$$

Az $m \in \mathcal{R}_f$ állítás u.így adódik. ∎

Tekintsünk most egy folytonos $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvényt. Tehát bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathcal{C}\{a\}$, következésképpen minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta_a^{(\varepsilon)} > 0$ szám, hogy

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta_a^{(\varepsilon)}).$$

Legyen pl.

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor bármely $a > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\delta_a^{(\varepsilon)} > 0$ mellett (könnyen ellenőrizhetően)

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x - a|}{xa} < \varepsilon \qquad (x > 0, |x - a| < \delta_a^{(\varepsilon)}).$$

Speciálisan az $x := a + \delta_a^{(\varepsilon)}/2$ választással

$$\frac{\delta_a^{(\varepsilon)}}{2xa} < \varepsilon \implies 0 < \delta_a^{(\varepsilon)} < 2xa\varepsilon \to 0 \qquad (a \to 0).$$

Innen világos, hogy a jelen példában (adott $\varepsilon > 0$ mellett) nincs olyan $\delta > 0$, amellyel minden $a \in \mathcal{D}_f$ és $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Különösen fontosak azok a folytonos függvények, amelyekre minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan „egyenletes" (csak ε-tól függő) $\delta > 0$, hogy bármely $\mathcal{D}_f \ni a$-ra

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta).$$

Ezzel kapcsolatos a következő definíció: az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény *egyenletesen folytonos,* ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f,\ |x - t| < \delta).$$

Világos, hogy ekkor az f folytonos is, de az előző példa azt mutatja, hogy mindez „megfordítva" nem igaz. Ugyanakkor fennáll az alábbi tétel.

5.5.11. Tétel (Heine). *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ *függvény folytonos, és a* $\mathcal{D}_f$ *halmaz kompakt. Ekkor az* f *egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett bármilyen $\delta > 0$ esetén vannak olyan $x, t \in \mathcal{D}_f$ elemek, amelyekre ugyan $|x - t| < \delta$ igaz, de

$$|f(x) - f(t)| \geq \varepsilon.$$

Speciálisan tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ indexhez megadhatók olyan $x_n, t_n \in \mathcal{D}_f$ elemek, hogy $|x_n - t_n| < 1/n$ és

$$|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon.$$

Kaptunk tehát egy-egy

$$(x_n),\ (t_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$$

sorozatot. A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és

$$a := \lim (x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f.$$

Vegyük észre, hogy a (t_{ν_n}) részsorozat is konvergens, és

$$\lim (t_{\nu_n}) = a.$$

Valóban,

$$|t_{\nu_n} - a| \leq |t_{\nu_n} - x_{\nu_n}| + |x_{\nu_n} - a| < \frac{1}{\nu_n} + |x_{\nu_n} - a|$$

$$\leq \frac{1}{n} + |x_{\nu_n} - a| \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim (x_{\nu_n} - a) = \lim(1/n) = 0$ alapján $\lim (t_{\nu_n} - a) = 0$. Így az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) szerint

$$f(a) = \lim (f(x_{\nu_n})) = \lim (f(t_{\nu_n})),$$

amiből

$$\lim (f(x_{\nu_n}) - (f(t_{\nu_n})) = 0$$

következik. Ez nyilván ellentmond az indirekt feltevésbeli $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N})$ feltételezésnek. ■

A következő példa azt mutatja, hogy általában egy függvény folytonossága nem „öröklődik" az (esetleg létező) inverzére. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ \\ 3 - x & (1 < x \leq 2). \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez a függvény invertálható, $f \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{D}_f = [0,2] \setminus \{1\} = \mathcal{R}_{f^{-1}} \ , \ \ \mathcal{R}_f = [0,2) = \mathcal{D}_{f^{-1}},$$

és

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ \\ 3-x & (1 \le x < 2). \end{cases}$$

Továbbá $\lim_{1-0} f^{-1} = 1 \ne \lim_{1+0} f^{-1} = 2$, ezért $f^{-1} \notin \mathcal{C}\{1\}$. Igaz viszont az

5.5.12. Tétel. *Legyen az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény folytonos, invertálható, és az értelmezési tartománya kompakt. Ekkor az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ esetén

$$f^{-1} \in \mathcal{C}\{y\}.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy ez nem igaz, azaz van olyan $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, amelyre $f^{-1} \notin \mathcal{C}\{y\}$. Ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármilyen $\delta > 0$ esetén egy alkalmas $z \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $|z-y| < \delta$ mellett

$$|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| \ge \varepsilon.$$

Speciálisan minden $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén valamilyen $z_n \in \mathcal{D}_{f^{-1}}, |z_n - y| < 1/n$ helyen

$$|f^{-1}(z_n) - f^{-1}(y)| \ge \varepsilon \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Jegyezzük meg, hogy $\lim(z_n) = y$. Legyen $x_n := f^{-1}(z_n) \in \mathcal{D}_f \quad (1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor a $\mathcal{D}_f$ kompaktsága alapján egy (ν_n) indexsorozattal létezik a $\xi := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$ határérték. Továbbá az 5.5.2. Tétel miatt

$$f(\xi) = \lim\left(f(x_{\nu_n})\right) = \lim(z_{\nu_n}) = \lim(z_n) = y,$$

amiből az f invertálhatóságát figyelembe véve $f^{-1}(y) = \xi$ következik. Mindezt összegezve azt kaptuk, hogy

$$\varepsilon \le |f^{-1}(z_{\nu_n}) - f^{-1}(y)| = |x_{\nu_n} - \xi| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ami nyilván nem lehetséges. ■

Az előző tételek felhasználásával látható be a következő állítás.

5.5.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy az invertálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és az értelmezési tartománya intervallum. Ekkor az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy az f függvény szigorúan monoton. Ti. legyen $a, b \in \mathcal{D}_f$ és (pl.) $a < b$. Ekkor a feltételezett invertálhatóság miatt $f(a) \neq f(b)$, (pl.) $f(a) < f(b)$. (Az egyéb esetek analóg módon tárgyalhatók.) Megmutatjuk, hogy ekkor az f szigorúan monoton növő. Ha ui. nem lenne az, akkor alkalmas $c, d \in \mathcal{D}_f$, $c < d$ helyeken $f(c) > f(d)$ lenne. Tegyük fel pl., hogy $d < a$ és $f(c) < f(a)$. (Az a, b, c, d helyek, ill. az $f(a), f(b), f(c), f(d)$ helyettesítési értékek egymáshoz való viszonyát illetően a többi eset is u. így vizsgálható.) Ekkor az 5.5.6. Tétel alapján $f(d) < f(c) < f(a)$ miatt kapnánk egy olyan $\xi \in (d, a)$ pontot, amelyre $f(\xi) = f(c)$. Ez nyilván ellentmondana annak, hogy az f függvény invertálható.

Feltehető tehát, hogy az f függvény szigorúan monoton növő. Legyen $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, és $x \in \mathcal{D}_f$ (az f invertálhatósága miatt az az egyetlen) hely, amelyre $f(x) = y$. Tegyük fel először, hogy egy-egy alkalmas $u, v \in \mathbf{R}$ esetén $[u, v] \subset \mathcal{D}_f$, és $u < x < v$. Ekkor

$$f(u) < y = f(x) < f(v).$$

A $g := f_{|_{[u,v]}}$ függvény is nyilván invertálható és folytonos, ezért a $\mathcal{D}_g = [u, v]$ intervallum kompaktsága és az 5.5.12. Tétel szerint $g^{-1} \in \mathcal{C}$. Az 5.5.7. Tétel miatt továbbá az $\mathcal{R}_g$ értékkészlet intervallum. Mivel nyilván g is szigorúan monoton növő, ezért $\mathcal{R}_g = [f(u), f(v)]$. Tehát

$$\mathcal{R}_g = [f(u), f(v)] \subset \mathcal{R}_f,$$

és $f^{-1}(z) = g^{-1}(z)$ $(z \in \mathcal{R}_g)$. Ha $\varepsilon > 0$, akkor $g^{-1} \in \mathcal{C}$ alapján egy alkalmas $\delta > 0$ esetén

$$|g^{-1}(z) - g^{-1}(y)| = |f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| < \varepsilon \qquad (z \in (y - \delta, y + \delta) \cap \mathcal{R}_g).$$

Feltehető, hogy $(y - \delta, y + \delta) \subset (f(u), f(v))$, így

$$|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| < \varepsilon \qquad (z \in \mathcal{R}_f, |z - y| < \delta)$$

is írható. Ez azt jelenti, hogy $f^{-1} \in \mathcal{C}\{y\}$.

Ha a fent említett $[u, v] \subset \mathcal{D}_f$ intervallum nem választható meg úgy, hogy $u < x < v$, akkor $x = \min \mathcal{D}_f$, vagy $x = \max \mathcal{D}_f$. Az első esetben tehát $[u, v]$ helyett $[x, v]$ írható, és a fenti bizonyítás könnyűszerrel átvihető erre az esetre is. (Ha $x = \max \mathcal{D}_f$, akkor analóg az okfejtés.) ■

5.6. Megjegyzések

i) Legyen $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \notin \mathcal{C}\{a\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a-ban) *szakadása van.* Ha itt még létezik a $\lim_a f \in \mathbf{K}_2$ határérték is, akkor $f(a) \neq \lim_a f$, és f-nek az a-ban ún. *megszüntethető szakadása* van. Az elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a \neq x \in \mathcal{D}_f) \\ \\ \lim_a f & (x = a) \end{cases}$$

függvény „már" folytonos a-ban, hiszen $\tilde{f}(a) = \lim_a f = \lim_a \tilde{f}$.

ii) Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvénynek valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ helyen *elsőfajú szakadása van,* ha $f \notin \mathcal{C}\{a\}$, léteznek a $\lim_{a\pm 0} f \in \mathbf{K}$ egy oldali (véges) határértékek, de

$$\lim_{a-0} f \neq \lim_{a+0} f.$$

Speciálisan, ha $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton, pl. monoton növekedő, akkor -feltéve, hogy $a \in \mathcal{D}_f$ bal- és jobb oldali torlódási pontja a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománynak - léteznek a $\lim_{a\pm 0} f$ egy oldali határértékek (ld. 5.3.5. Tétel), és

$$\lim_{a-0} f \leq f(a) \leq \lim_{a+0} f.$$

Ha tehát az a pont elsőfajú szakadási helye a monoton növő f függvénynek, akkor $\lim_{a+0} f > \lim_{a-0} f$. Azt is mondjuk ekkor (ld. 5.4. v) megjegyzés), hogy az f függvénynek az a-ban *ugrása* van. A $\mathcal{D}_f$-nek az ilyen a-k által alkotott részhalmaza legfeljebb megszámlálható számosságú (ld. 5.4. v) megjegyzés).

iii) Tekintsük az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvényt, és legyen $a \in \mathcal{D}_f$. Az f függvény *jobbról folytonos az a-ban,* ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, a \leq x < a + \delta).$$

Világos, hogy ha itt az a hely jobb oldali torlódási pontja is a $\mathcal{D}_f$-nek, akkor az f függvény a-beli jobbról való folytonossága a következőkkel ekvivalens: létezik a $\lim_{a+0} f$ jobb oldali határérték, és $\lim_{a+0} f = f(a)$.

iv) Az előbbi megjegyzéssel analóg módon az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvényt az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen *balról folytonosnak* nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f, a - \delta < x \leq a).$$

Most is igaz, hogy ha az a hely bal oldali torlódási pontja is a $\mathcal{D}_f$-nek, akkor az f függvény a-beli balról való folytonossága az alábbiakkal ekvivalens: létezik a $\lim_{a-0} f$ bal oldali határérték, és $\lim_{a-0} f = f(a)$.

v) Az egy oldali folytonosság iménti értelmezéséből rögtön adódik az alábbi ekvivalencia: egy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvényre $f \in \mathcal{C}\{a\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha az f függvény az a-ban balról is és jobbról is folytonos.

vi) Legyen az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény esetén az $\omega_f : (0, +\infty) \to \overline{\mathbf{R}}$ ún. *folytonossági modulus* a következőképpen definiálva:

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in \mathcal{D}_f,\ |x - t| < \delta\} \qquad (\delta > 0).$$

Könnyű meggondolni, hogy az f függvény akkor és csak akkor egyenletesen folytonos, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta_0 > 0$, amellyel

$$\omega_f(\delta) < \varepsilon \qquad (0 < \delta < \delta_0).$$

Ha ui. ez utóbbi feltétel teljesül, akkor a nyilvánvaló

$$|f(x) - f(t)| \leq \omega_f(\delta) \qquad (\delta > 0,\ x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| < \delta)$$

becslés miatt bármely $0 < \delta < \delta_0$ mellett

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| < \delta).$$

Ez pedig nem más, mint az f egyenletes folytonosságának a definíciója. Fordítva, ha az f egyenletesen folytonos, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz választható olyan $\delta_0 > 0$, hogy

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| < \delta_0).$$

Ezért egyúttal minden $0 < \delta < \delta_0$ esetén is világos, hogy

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| < \delta),$$

amiből

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in \mathcal{D}_f,\ |x - t| < \delta\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (0 < \delta < \delta_0)$$

következik.

Ha pl. a fenti f függvény korlátos, akkor nyilván $\omega_f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, ezért az előbbi ekvivalens feltétel így is írható:

$$\lim_0 \omega_f = 0.$$

vii) A gyakorlati alkalmazások szempontjából is az egyik legfontosabb függvényosztály (valamilyen $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ esetén) a következő:

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbf{R} :\ f \text{ folytonos}\}.$$

viii) A Bolzano-tétel (ld. 5.5.4. Tétel), ill. a bizonyításában követett gondolatmenet az alapja a numerikus analízisben használatos ún. *intervallumfelezéses eljárásnak.* Az 5.5.4. Tétel bizonyításában használt jelölésekkel tehát $f \in C[a,b]$, $f(\xi) = 0$, és

$$\lim(a_n) = \xi = \lim(b_n) \in [a,b],$$

ahol $[a_0, b_0] = [a,b]$, és az $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ intervallum az $[a_n, b_n]$ intervallumnak az egyik „fele", azt szem előtt tartva, hogy $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel $\xi \in (a_n, b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért (pl.)

$$|\xi - a_n| \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Illusztrációul tekintsük pl. a

$$P(x) := x^3 - 3x + 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényt (harmadfokú (valós) polinomot). Ekkor $P(0) = 1$, $P(1) = -1$. Mivel (a P-vel együtt) az

$$f(x) := P(x) \qquad (0 \le x \le 1)$$

függvény is folytonos, azaz $f = P_{|[0,1]} \in C[0,1]$, és $f(0) \cdot f(1) < 0$, ezért létezik olyan $\xi \in (0,1)$, ami gyöke az f-nek (és így persze a P polinomnak is). Ennek a ξ gyöknek a „megkeresésére" alkalmazható az 5.5.4. Tétel bizonyításában alkalmazott módszer. Tehát

$$[a_0, b_0] = [0,1],$$

és „első lépésként" az $f(1/2) = P(1/2)$ helyettesítési érték előjelét kell megvizsgálni. Mivel

$$P(1/2) = -3/8 < 0,$$

ezért

$$[a_1, b_1] = [0, 1/2],$$

és így $\xi \in (0, 1/2)$. A második lépésben az $f(1/4) = P(1/4)$ előjele a „döntő": $P(1/4) = 17/64 > 0$, tehát

$$[a_2, b_2] = [1/4, 1/2],$$

következésképpen $\xi \in [1/4, 1/2]$, és í.t.

ix) Az 5.5.4. Tétel egyik egyszerű (de annál fontosabb) következménye az, hogy tetszőleges valós együtthatós, páratlan fokszámú P polinomnak van valós gyöke. Legyen ui.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} a_k x^k \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $N \in \mathbf{N}, a_0, ..., a_{2N+1} \in \mathbf{R}$, és $a_{2N+1} \neq 0$, pl. $a_{2N+1} > 0$. Ekkor

$$P(n) = n^{2N+1} \cdot \left(a_{2N+1} + \sum_{k=0}^{2N} a_k n^{k-2N-1}\right) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ahol minden $k = 0, ..., 2N$ esetén

$$n^{k-2N-1} \leq \frac{1}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

miatt $\lim (n^{k-2N-1}) = 0$. Ezért

$$\lim \left(a_{2N+1} + \sum_{k=0}^{2N} a_k n^{k-2N-1}\right) = a_{2N+1} > 0,$$

következésképpen $\lim(n^{2N+1}) = +\infty$ alapján

$$\lim(P(n)) = +\infty.$$

Ez azt jelenti többek között, hogy egy alkalmas $0 < b \in \mathbf{N}$ helyen $P(b) > 0$. Ha a most mondottakban n helyett $-n$-et írunk, akkor

$$\lim \left(a_{2N+1} + \sum_{k=0}^{2N} a_k (-n)^{k-2N-1}\right) = a_{2N+1} > 0$$

továbbra is igaz marad, míg $\lim((-n)^{2N+1}) = -\lim(n^{2N+1}) = -\infty$. Ezért

$$\lim(P(-n)) = -\infty,$$

tehát egy alkalmas $\mathbf{Z} \ni a < 0$ helyen $P(a) < 0$. Ezért az $f := P_{|_{[a,b]}} \in C[a, b]$ függvényre alkalmazható a Bolzano-féle 5.5.4. Tétel: van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre

$$f(\xi) = P(\xi) = 0.$$

x) A Darboux-tulajdonság egyik gyakran felhasznált következménye az alábbi állítás: ha az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya intervallum és $f \in \mathcal{C}$, akkor bármely $n \in \mathbf{N}$, $x_0, ..., x_n \in \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $\xi \in \mathcal{D}_f$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

Ha ui. valamilyen $j, l = 0, ..., n$ mellett

$$f(x_j) := \min\{f(x_0), ..., f(x_n)\} \ , \ \ f(x_l) := \max\{f(x_0), ..., f(x_n)\},$$

akkor nyilván

$$f(x_j) \leq A := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \leq f(x_l).$$

Ezért az 5.5.6. Tétel miatt (valahol x_j és x_l között) van olyan $\xi \in \mathcal{D}_f$ hely, amelyre $f(\xi) = A$.

xi) Az 5.5.6. Tétel szerint egy $I \subset \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvény folytonossága elegendő ahhoz, hogy az f Darboux-tulajdonságú legyen. Később belátjuk majd (ld. 7.6. xiv) megjegyzés), hogy ebből a szempontból a folytonosság csak elégséges, de nem szükséges feltétel: az

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x) & (0 < x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

függvény Darboux-tulajdonságú, de $f \notin \mathcal{C}\{0\}$.

6. fejezet

Speciális függvények

6.1. Gyökfüggvény

Emlékeztetünk a „gyökvonás" fogalmára (ld. 3.9.4. Tétel): bármely $2 \leq m \in \mathbf{N}$ és $x > 0$ esetén $\alpha := \sqrt[m]{x}$ az az (egyértelműen létező) $\alpha \in (0, +\infty)$ szám, amelyre fennáll az $\alpha^m = x$ egyenlőség. Ennek alapján vezessük be az *m-edik gyökfüggvény* fogalmát:

$$\sqrt[m]{} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

legyen az a függvény, amelyre

$$\sqrt[m]{}(x) := \sqrt[m]{x} \qquad (x > 0).$$

Ha $h_m(t) := t^m \ \ (t > 0)$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$h_m : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

függvény szigorúan monoton növő. Mivel polinom, ezért folytonos is. Egyszerűen meggondolható, hogy $\sqrt[m]{} = h_m^{-1}$. Következésképpen $\sqrt[m]{}$ szigorúan monoton növő, és az 5.5.13. Tétel alapján folytonos is, így (ld. 5.5.7. Tétel) $\mathcal{R}_{\sqrt[m]{}}$ intervallum. Továbbá $\lim_0 \sqrt[m]{} = 0$, és $\lim_{+\infty} \sqrt[m]{} = +\infty$. Valóban, ha $\varepsilon > 0$ és $0 < \delta < \varepsilon^m$, akkor

$$0 < \sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{\delta} < \varepsilon \qquad (0 < x < \delta),$$

ill. tetszőleges $p > 0$ esetén legyen $r > p^m$, amikor is

$$\sqrt[m]{x} > \sqrt[m]{r} > p \qquad (x > r).$$

Mindezek a meggondolások azt jelentik, hogy a $\lim_0 \sqrt[m]{} = 0$, $\lim_{+\infty} \sqrt[m]{} = +\infty$ egyenlőségek igazak. Ezért $\mathcal{R}_{\sqrt[m]{}} = (0, +\infty)$.

Foglaljuk össze mindezt egyetlen állításban.

6.1.1. Tétel. *Bármely* $2 \leq m \in \mathbf{N}$ *esetén az* $\sqrt[m]{\ } : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *m-edik gyökfüggvény egy szigorúan monoton növő folytonos bijekció, amelyre*

$$\lim_{0} \sqrt[m]{\ } = 0 \ , \ \lim_{+\infty} \sqrt[m]{\ } = +\infty.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $3 \leq m \in \mathbf{N}$ páratlan szám, akkor a

$$H_m(x) := x^m \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény (azaz a h_m kiterjesztése $\mathbf{R}$-re) is szigorúan monoton növő, folytonos bijekció $\mathbf{R}$-ről $\mathbf{R}$-re. Ezért ekkor az

$$\sqrt[m]{\ } := H_m^{-1}$$

értelmezéssel az m-edik gyökfüggvény is kiterjeszthető $\mathbf{R}$-re, amikor is

$$\sqrt[m]{\ } : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

egy szigorúan monoton növő folytonos bijekció, amelyre

$$\lim_{-\infty} \sqrt[m]{\ } = -\infty \ , \ \lim_{+\infty} \sqrt[m]{\ } = +\infty.$$

6.2. Exponenciális függvény

Tekintsük most az exp exponenciális függvényt (ld. 4.5.) a „valós számegyenesen", azaz (az egyszerűség kedvéért továbbra is az exp szimbólummal jelölve) legyen

$$\exp := \exp_{|\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

ahol

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tudjuk (ld. 5.3.6. Tétel), hogy $\exp \in \mathcal{C}$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{R}_{\exp} \subset (0,+\infty).$$

Ennek „egy része" nyilvánvaló, hiszen

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} = 1 + x \geq 1 > 0 \qquad (0 \leq x \in \mathbf{R}).$$

Ugyanakkor az exp multiplikatív tulajdonsága (ld. 4.6. iii) megjegyzés) miatt

$$e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amiből $e^x = 1/e^{-x} > 0$ $(x \in \mathbf{R}, x < 0)$ is következik. Így $\mathcal{R}_{\exp} \subset (0 + \infty)$ valóban igaz.

Most lássuk be, hogy az exp függvény szigorúan monoton növő:

$$e^x < e^y \qquad (x, y \in \mathbf{R}, x < y).$$

Ti. mindez azzal ekvivalens (az előző fejtegetéseket is szem előtt tartva), hogy

$$1 < \frac{e^y}{e^x} = e^y \cdot e^{-x} = e^{y-x}.$$

Mivel $y - x > 0$, ezért (ld. fent)

$$e^{y-x} \geq 1 + y - x > 1.$$

Nem nehéz megmutatni ezek után, hogy

$$\lim_{+\infty} \exp = +\infty \ , \ \lim_{-\infty} \exp = 0.$$

Ui. a szigorú monotonitás miatt elég azt meggondolni, hogy

$$\lim(\exp n) = +\infty.$$

Ehhez ismét felidézve a 4.6. iii) megjegyzést azt mondhatjuk, hogy (ld. 3.9.2. Tétel)

$$\exp n = e^n > 2^n \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Innen (ld. 3.7.10. Tétel)

$$\lim \left(\exp(-n) \right) = \lim \left(\frac{1}{\exp n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

A fenti $\mathcal{R}_{\exp} \subset (0, +\infty)$ tartalmazás miatt mindebből $\inf \mathcal{R}_{\exp} = 0$ és $\sup \mathcal{R}_{\exp} = +\infty$ következik. Mivel (ld. 5.5.7. Tétel) $\mathcal{R}_{\exp}$ intervallum, ezért

$$\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty).$$

Igaz tehát a

6.2.1. Tétel. *Az* $\exp = \exp_{|\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ *(valós)exponenciális függvény egy szigorúan monoton növő, folytonos bijekció, amelyre*

$$\lim_{-\infty} \exp = 0 \ , \ \lim_{+\infty} \exp = +\infty.$$

6.3. Logaritmusfüggvény

A 6.2.1. Tétel miatt létezik az alábbi inverzfüggvény:

$$\ln := \exp^{-1} = \exp^{-1}_{|\mathbf{R}},$$

amit *logaritmusfüggvénynek* nevezünk. Mint általában egy inverzfüggvény esetén

$$\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty) \ , \ \ \mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbf{R},$$

és

$$\exp(\ln(x)) = \exp(\ln x) = x \quad (x > 0) \ , \ \ \ln(\exp t) = t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel az $\exp$ függvény szigorúan monoton növő, ezért a logaritmusfüggvény is szigorúan monoton növő. Az $\exp$ folytonossága és az 5.5.13. Tétel miatt az $\ln$ függvény is folytonos. Nem nehéz belátni, hogy $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$ és $\lim_0 \ln = -\infty$. Ha ui. $q \in \mathbf{R}$ olyan lenne, amelyre $\ln x_n \le q \ \ (n \in \mathbf{N}, x_n > 0)$ teljesülne egy $\lim(x_n) = +\infty$ sorozatra, akkor

$$x_n = \exp(\ln x_n) \le \exp q \qquad (n \in \mathbf{N})$$

is teljesülne, ami persze nem áll fenn.

Hasonlóan, ha valamilyen $r \in \mathbf{R}$ mellett bármilyen $\delta > 0$ esetén egy alkalmasan választott $0 < x < \delta$ helyen $\ln x \ge r$ teljesülne, akkor erre az x-re

$$x = \exp(\ln x) \ge \exp r$$

is igaz lenne. Speciálisan $\delta := 1/n \ \ (1 \le n \in \mathbf{N})$ esetén is egy $0 < x_n < 1/n$ helyen

$$1/n > x_n \ge \exp r \ (> 0) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

állna fenn, ami $\lim(1/n) = 0$ miatt nem lehetséges.

Összefoglalva a fentieket a következő tételt kapjuk.

6.3.1. Tétel. *Az* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *logaritmusfüggvény egy szigorúan monoton növő, folytonos bijekció, amelyre*

$$\lim_{0} \ln = -\infty \ , \ \ \lim_{+\infty} \ln = +\infty.$$

Jegyezzük meg, hogy az exponenciális függvény tulajdonságaiból (ld. 4.6. iii) megjegyzés) rögtön adódnak az alábbi „ismert" összefüggések:

$$\ln 1 = 0 \ , \ \ \ln e = 1 \ , \ \ \ln x > 0 \quad (x > 1) \ , \ \ \ln x < 0 \quad (0 < x < 1),$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \ , \ \ \ln(x/y) = \ln x - \ln y,$$

$$\ln(x^n) = n \ln x \qquad (x, y > 0, n \in \mathbf{N}).$$

Ui. az $\ln = \exp^{-1}_{|\mathbf{R}}$ értelmezés szerint mindezen egyenlőségek azzal ekvivalensek, hogy

$$1 = \exp(\ln 1) = \exp 0 = 1 \ , \ \ e = \exp(\ln e) = \exp 1 = e,$$

$$x = \exp(\ln x) > \exp 0 = 1 \ \ (x > 1) \ , \ \ x = \exp(\ln x) < \exp 0 = 1 \ \ (0 < x < 1),$$

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = xy,$$

$$\frac{x}{y} = e^{\ln(x/y)} = e^{\ln x - \ln y} = \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln y}} = \frac{x}{y},$$

$$x^n = e^{\ln(x^n)} = e^{n \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n.$$

6.4. Tetszőleges alapú exponenciális függvény

Legyen most $0 < a \in \mathbf{R}$, és valamilyen $x \in \mathbf{R}$ „kitevő" esetén definiáljuk az $a^x \in \mathbf{R}$ számot (az a szám *x-edik hatványát* (vagy az a szám, mint *alap x kitevős hatványát*) a következőképpen:

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

A 4.6. iii) megjegyzés szerint $1 \leq x = n \in \mathbf{N}$ kitevőre

$$a^n = \exp(n \ln a) = (\exp(\ln a))^n = a^n,$$

ahol a jobb oldalon szereplő a^n kifejezés az „elemi" hatványt jelenti: azt az n-tényezős szorzatot, amelynek minden tényezője a-val egyenlő. (Ez magyarázza az a^x-re bevezetett x-edik *hatvány* elnevezést.)

Az exp és az ln tulajdonságai alapján kapjuk az alábbi öszefüggéseket:

$$a^0 = 1 \ , \ \ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \ , \ \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \ , \ \ (a^x)^y = a^{xy},$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \ , \ \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad (x, y \in \mathbf{R}, a, b > 0).$$

Speciálisan, ha $a = 1$, akkor

$$a^x = 1^x = \exp(x \ln 1) = \exp(x \cdot 0) = \exp 0 = 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tegyük fel, hogy $0 < a \neq 1$. Ekkor az $\exp_a : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ függvényt (az *a-alapú exponenciális függvényt*) a következőképpen definiáljuk:

$$\exp_a(x) := \exp_a x := a^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $\exp_e = \exp$. Az exp, ill. az ln függvény előbbi tulajdonságait is figyelembe véve adódik a következő tétel.

6.4.1. Tétel. *Legyen $0 < a \neq 1$. Ekkor az $\exp_a : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció. Ha $a > 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton növő, és*

$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0 \ , \ \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty,$$

ha $0 < a < 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = +\infty \ , \ \lim_{+\infty} \exp_a = 0.$$

6.5. Tetszőleges alapú logaritmusfüggvény

Az előző pontban mondottak alapján jutunk valamilyen $0 < a \neq 1$ esetén a

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

ún. *a-alapú logaritmusfüggvényhez.* Nevezetesen, a 6.4.1. Tételre hivatkozva legyen

$$\log_a := \exp_a^{-1}.$$

Világos (ld. 6.3.), hogy $\log_e = \ln$ (ezért szokták ln-et *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* is nevezni, amit időnként a log szimbólummal is jelölnek). Továbbá az

$$y = \log_a x := \log_a(x) \qquad (x > 0, y \in \mathbf{R})$$

egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\exp_a y = a^y = x.$$

Itt y az x szám *a-alapú logaritmusa.* Az $a = 10$ esetben az $\lg := \log_{10}$ jelölés honosodott meg: ez az ún. 10-*es alapú logaritmusfüggvény,* ill. $\lg x$ az x szám 10-*es alapú logaritmusa.* Az $a = e$ esetben $\ln x$ (esetenként $\log x$) az x szám *természetes alapú logaritmusa.*

A 6.4.1. Tételt figyelembe véve adódik a 6.3.1. Tétel alábbi megfelelője (kiterjesztése).

6.5.1. Tétel. *Legyen* $0 < a \neq 1$. *Ekkor a* $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *függvény egy folytonos bijekció. Ha* $a > 1$, *akkor* $\log_a$ *szigorúan monoton növő, és*

$$\lim_0 \log_a = -\infty \ , \ \lim_{+\infty} \log_a = +\infty,$$

ha $0 < a < 1$, *akkor* $\log_a$ *szigorúan monoton fogyó, és*

$$\lim_0 \log_a = +\infty \ , \ \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

A $\log_a$ értelmezéséből és az ln függvényre az előbb megfogalmazott tulajdonságokból azonnal adódnak a következő összefüggések:

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ \log_a x > 0 \quad (a, x > 1) \ , \ \log_a x < 0 \quad (a > 1,\, 0 < x < 1),$$

$$\log_a x < 0 \quad (a < 1,\, x > 1) \ , \ \log_a x > 0 \quad (a < 1,\, 0 < x < 1),$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \ , \ \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x \qquad (x, y > 0, n \in \mathbf{N}).$$

6.6. Hatványfüggvény

Legyen $\mu \in \mathbf{R}$, és $h_\mu : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ (a μ*-alapú hatványfüggvény*) a következő:

$$h_\mu(x) := x^\mu \qquad (x > 0).$$

Tehát

$$h_\mu(x) = \exp(\mu \ln x) = e^{\mu \ln x} \qquad (x > 0).$$

Világos, hogy

$$h_0(x) = \exp(0 \cdot \ln x) = \exp 0 = 1 \qquad (x > 0).$$

Az eddigiek alapján kapjuk az alábbi állítást.

6.6.1. Tétel. *Legyen* $0 \neq \mu \in \mathbf{R}$, *ekkor a* $h_\mu : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *függvény egy folytonos bijekció, amely* $\mu > 0$ *esetén szigorúan monoton növő, és*

$$\lim_0 h_\mu = 0 \ , \ \lim_{+\infty} h_\mu = +\infty,$$

$\mu < 0$ *esetén pedig szigorúan monoton fogyó, és*

$$\lim_0 h_\mu = +\infty \ , \ \lim_{+\infty} h_\mu = 0.$$

Speciálisan

$$h_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbf{N}, x > 0) \quad , \quad h_{-1}(x) = 1/x \quad (x > 0).$$

Mutassuk meg, hogy $2 \le m \in \mathbf{N}$ esetén

$$h_{1/m} = \sqrt[m]{\ }.$$

Valóban, ha $x > 0$, akkor (ld. 4.6. iii) megjegyzés)

$$\Big(h_{1/m}(x)\Big)^m = \Big(\exp\left(m^{-1} \cdot \ln x\right)\Big)^m =$$

$$\exp\left(m \cdot m^{-1} \cdot \ln x\right) = \exp(\ln x) = x.$$

Mivel $h_{1/m}(x) > 0$, és $\sqrt[m]{x}$ az egyetlen olyan pozitív szám, amelyre $(\sqrt[m]{x})^m = x$, ezért

$$x^{1/m} = h_{1/m}(x) = \sqrt[m]{x}.$$

Innen (és a fentiekből) az is rögtön következik, hogy bármely $p, q \in \mathbf{N}$, $p \ge 1$, $q \ge 2$ paraméterekkel

$$x^{p/q} = \Big(x^{1/q}\Big)^p = \Big(\sqrt[q]{x}\Big)^p \qquad (x > 0).$$

6.7. Valós trigonometrikus függvények

Tekintsük most a valós koszinusz-, ill. szinuszfüggvényt, amelyeket továbbra is a $\cos$, ill. a $\sin$ szimbólummal fogunk jelölni (ld. 4.5.):

$$\cos x := \cos_{|\mathbf{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\sin x := \sin_{|\mathbf{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$\cos_{|\mathbf{R}}, \sin_{|\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Tudjuk, hogy a $\cos, \sin$ függvények (mint analitikus függvények) folytonosak. Világos továbbá, hogy pl. $\cos 0 = 1 > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\cos 2 < 0.$$

Ui. (ld. 4.3.4. Tétel)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$\cos 2 = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!}\left(1 - \frac{4}{(4n+3)(4n+4)}\right) =$$

$$-\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(4n+2)!}\left(1 - \frac{1}{(4n+3)(n+1)}\right),$$

ahol

$$\frac{1}{(4n+3)(n+1)} < \frac{1}{n} < 1 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen $\cos 2 < -1/3$.

Az 5.5.4. Tétel miatt tehát van olyan $\xi \in (0,2)$, hogy $\cos\xi = 0$. Sőt, $\cos 0 > 0$ miatt a $\cos$ folytonossága alapján egy alkalmas $\delta > 0$ mellett

$$\cos x > 0 \qquad (0 < x < \delta).$$

Ezért

$$0 < \alpha := \inf\{\xi > 0 : \cos\xi = 0\} < 2.$$

Gondoljuk meg, hogy $\cos\alpha = 0$. Valóban, bármely $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén (az infimum tulajdonságait figyelembe véve) van olyan $\xi_n \in [\alpha, \alpha + 1/n)$, amelyre $\cos\xi_n = 0$. Mivel $\lim(\xi_n) = \alpha$ és $\cos \in \mathcal{C}\{\alpha\}$, ezért (ld. 5.5.2. Tétel)

$$\cos\alpha = \lim(\cos\xi_n) = \lim(0) = 0.$$

(Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az α-t definiáló egyenlőségben „inf" helyett „min" is írható.)

Vezessük be a matematika egy másik fontos állandóját:

$$\pi := 2\alpha.$$

Ekkor a fentiek szerint $0 < \pi < 4$, $\cos(\pi/2) = 0$, és $\cos x > 0 \quad (0 < x < \pi/2)$. (Az utóbbihoz annyit kell csak megjegyezni, hogy különben a fentiekkel analóg gondolatmenettel kapnánk olyan $\xi \in (0, \pi/2)$ számot, amelyre $\cos\xi = 0$. Ez nyilván ellentmondana az α „infimum voltának".)

Mutassuk meg, hogy $\sin x > 0$ $(0 < x < 2)$. Valóban,

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}\left(1-\frac{x^2}{(4n-2)(4n-1)}\right) \qquad (0<x<2),$$

ahol

$$\frac{x^2}{(4n-2)(4n-1)} \leq \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}, 0<x<2).$$

Ezért az előbbi végtelen sor minden tagja pozitív.

Tudjuk (ld. 4.6. vi) megjegyzés), hogy

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

speciálisan

$$\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = \sin^2(\pi/2) = 1.$$

Innen $0<\pi/2<2$ és a $\sin$ függvény előbbi pozitivitási tulajdonsága miatt

$$\sin(\pi/2) = 1.$$

Belátjuk, hogy

$$\sin(n\pi) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mindez ui. $n=0$ esetén $\sin 0 = 0$ miatt triviális. Ha $n=1$, akkor (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$\sin\pi = \sin(2\pi/2) = 2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) = 2\sin(\pi/2)\cdot 0 = 0.$$

Ha valamilyen $1<n\in\mathbf{N}$ mellett már $\sin(n\pi)=0$, akkor (ld. 4.5.)

$$\sin\left((n+1)\pi\right) = \sin(n\pi+\pi) = \sin(n\pi)\cos\pi + \cos(n\pi)\sin\pi =$$

$$0\cdot\cos\pi + \cos(n\pi)\cdot 0 = 0.$$

Ezért a teljes indukcióra hivatkozva valóban igaz a bizonyítandó állításunk.

Most lássuk be, hogy

$$\cos\pi = -1 \ , \ \cos(2\pi) = 1.$$

Ui. az előbbi gondolatmenettel

$$\cos\pi = \cos(2\pi/2) = \left(\cos(\pi/2)\right)^2 - \left(\sin(\pi/2)\right)^2 = 0-1 = -1,$$

ill.

$$\cos(2\pi) = \left(\cos\pi\right)^2 - \left(\sin\pi\right)^2 = (-1)^2 - 0 = 1.$$

Minden készen áll ahhoz, hogy bebizonyíthassuk a következő tételt (ld. 2.4. xviii) megjegyzés).

6.7.1. Tétel. *A* cos, sin *függvények* 2π*-szerint periodikusak.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbf{R} = \mathcal{D}_{\cos} = \mathcal{D}_{\sin}$ esetén nyilván $x \pm 2\pi \in \mathcal{D}_{\cos} = \mathcal{D}_{\sin}$, ill. (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos(2\pi) - \sin x \sin(2\pi) = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x,$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \cos x \sin(2\pi) = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x.$$

■

Szükségünk lesz az (önmagában is érdekes) alábbi lemmára.

6.7.2. Lemma. *A* $p > 0$ *szám akkor és csak akkor periódusa a* cos *függvénynek, ha periódusa a* sin *függvénynek is.*

Bizonyítás. Tegyük fel ui., hogy a szóban forgó $p > 0$ szám periódusa a sin függvénynek (ld. 2.4. xviii) megjegyzés). Ekkor

$$\sin(x + \pi/2) = \sin x \cos(\pi/2) + \cos x \sin(\pi/2) = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

miatt (a periódus definícióját figyelembe véve)

$$\cos(x + p) = \sin((x + p) + \pi/2) = \sin((x + \pi/2) + p) =$$

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a p periódusa a cos függvénynek is.

Fordítva, ha a $p > 0$ szám periódusa a cos függvénynek, akkor a

$$\cos(x - \pi/2) = \cos x \cos(\pi/2) + \sin x \sin(\pi/2) = \sin x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség alapján a fentiekkel analóg módon adódik, hogy

$$\sin(x + p) = \sin x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

■

A következő tétel azt mutatja, hogy a 2π egyúttal a legkisebb periódusa a cos, sin függvényeknek.

6.7.3. Tétel. *Legyen* $0 < p < 2\pi$. *Ekkor* p *nem periódusa a* $\cos, \sin$ *függvényeknek.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $0 < p < 2\pi$ periódusa a $\cos, \sin$ függvényeknek. Ekkor (ld. 4.5.)

$$0 = \sin 0 = \sin(0 + p) = \sin p = \sin(2p/2) = 2\sin(p/2)\cos(p/2) =$$

$$2\sin(2p/4)\cos(p/2) = 4\sin(p/4)\cos(p/4)\cos(p/2),$$

ahol

$$1 = \cos 0 = \cos(0 + p) = \cos p = \cos(2p/2) = 2\cos^2(p/2) - 1.$$

Tehát $\cos^2(p/2) = 1 \neq 0$, amiből a fentiek szerint

$$\sin(p/4)\cos(p/4) = 0$$

következik. Mivel $0 < p < 2\pi$, ezért $0 < p/4 < \pi/2 < 2$, így a korábbi észrevételeink miatt $\sin(p/4) > 0$. Az „maradt" tehát, hogy

$$\cos(p/4) = 0.$$

Ez sem lehet azonban, ti. (ld. fent)

$$0 < p/4 < \pi/2 = \alpha = \inf\{\xi > 0 : \cos\xi = 0\}$$

miatt $\cos(p/4) \neq 0$. ■

A 2π tehát a $\cos, \sin$ függvényeknek alapperiódusa (ld. 2.4. xviii) megjegyés), ezért $\mathcal{P}$-vel jelölve a $\cos, \sin$ függvények periódusainak a halmazát azt mondhatjuk, hogy

$$\mathcal{P} = \{2n\pi : 1 \leq n \in \mathbf{N}\}.$$

6.8. Megjegyzések

i) Az $\sqrt[m]{\ }$ $(2 \leq m \in \mathbf{N})$ gyökfüggvény értelmezéséből könnyen levezethetők a „megszokott" tulajdonságok, mint pl. a tetszőleges $x, y > 0$ és $2 \leq p, n \in \mathbf{N}$ választással fennálló

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[pn]{x} \quad , \quad \sqrt[p]{xy} = \sqrt[p]{x} \cdot \sqrt[p]{y} \quad , \quad \sqrt[p]{x^n} = (\sqrt[p]{x})^n$$

egyenlőségek.

ii) Az $\sqrt[m]{0} := 0$ megállapodással kapjuk a kiterjesztett

$$\sqrt[m]{} : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \qquad (2 \le m \in \mathbf{N})$$

gyökfüggvényt (bijekciót), amely könnyen láthatóan továbbra is folytonos marad. Az $m = 2$ speciális esetben a „megszokott" $\sqrt{} := \sqrt[2]{}$ jelölést használjuk.

iii) A h_μ $(\mu \in \mathbf{R})$ hatványfüggvény értelmezését a $\mu > 0$ esetben szintén (folytonosan) kiterjeszthetjük a $[0, +\infty)$ „zárt" félegyenesre a

$$h_\mu(0) := 0$$

megállapodással. Ui. bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to (0, +\infty)$, $\lim(x_n) = 0$ sorozatra (ld. 6.3.1. Tétel és 5.3.2. Tétel)

$$\mu \cdot \lim(\ln x_n) = \mu \cdot (-\infty) = -\infty,$$

ezért a 6.2.1. Tétel és az 5.3.2. Tétel alapján

$$\lim\left(h_\mu(x_n)\right) = \lim\left(\exp(\mu \lim(\ln x_n))\right) = 0.$$

Sőt, ha $1 \le \mu := n \in \mathbf{N}$, akkor $h_n(x)$ értelmezhető tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén a „megszokott" olyan n-tényezős szorzatként, amelynek minden tényezője x-szel egyenlő:

$$h_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Hasonlóan, ha $\mu := m \in \mathbf{Z}$ és $m < 0$, akkor legyen

$$h_m : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$$

az a függvény, amelyre

$$h_m(x) := \frac{1}{x^{-m}} \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}).$$

Könnyen látható, hogy az előbb értelmezett h_n, h_m függvények folytonosak. Továbbá páros $\mathbf{Z} \ni m < 0$ esetén

$$\lim_0 h_m = +\infty,$$

ill. páratlan $\mathbf{Z} \ni m < 0$ kitevőre

$$\lim_{0+0} h_m = +\infty \ , \ \lim_{0-0} h_m = -\infty.$$

iv) A későbbiekben be fogjuk látni, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

v) Megmutatható, hogy e, π irracionális számok: $e, \pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Sőt, nem is algebrai számok, ahol *algebrai számon* olyan valós számot értünk, amelyik gyöke valamilyen (nem azonosan nulla) egész szám együtthatós polinomnak. Könnyen látható, hogy pl. minden $x := p/q$ racionális szám algebrai szám is (ahol $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$). Ti. ez az x nyilván gyöke a

$$P(t) := qt - p \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(elsőfokú) polinomnak. Ugyanakkor a $\sqrt{2}$ irracionális szám is algebrai szám, hiszen gyöke a

$$Q(t) := t^2 - 2 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

polinomnak.

vi) Az $\exp_a : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ függvény $(0 < a \neq 1)$

$$\exp_a(x + y) = \exp_a x \cdot \exp_a y \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

multiplikativitási tulajdonsága, mint az az alábbiakból kiderül, meglehetősen „egyedi". Tegyük fel ui., hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény multiplikatív az előbbi értelemben:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

és $f \in \mathcal{C}\{0\}$. Ekkor $f \equiv 0$, vagy $f \equiv 1$, vagy az $a := f(1)$ jelöléssel

$$f = \exp_a,$$

azaz $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbf{R})$. (Az $f \equiv 0$ (azaz $f(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R})$) és az $f \equiv 1$ (azaz $f(x) = 1$ $(x \in \mathbf{R})$) függvények nyilván multiplikatívak.) Teljes indukcióval egyszerűen következik először is az, hogy

$$f(n) = a^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, $n = 0$-ra a feltételek miatt a dolog triviális. Ha pedig valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $f(n) = a^n$, akkor

$$f(n + 1) = f(n) \cdot f(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}.$$

Ugyanígy kapjuk általában is, hogy

$$f(nx) = (f(x))^n \qquad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Vegyük észre továbbá, hogy az

$$(*) \qquad f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$$

egyenlőségből két eset következik:

1^o $f(0)=0.$ Ekkor

$$f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0)=0 \qquad (x\in\mathbf{R})$$

miatt $f\equiv 0.$

2^o $f(0)\neq 0,$ amikor is $(*)$-ból $f(0)=1$ adódik. Továbbá az

$$1=f(0)=f(x-x)=f(x)\cdot f(-x) \qquad (x\in\mathbf{R})$$

egyenlőségből $0\notin\mathcal{R}_f,$ és

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)} \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Sőt,

$$f(x)=f(x/2+x/2)=f(x/2)\cdot f(x/2)=\left(f(x/2)\right)^2 \qquad (x\in\mathbf{R})$$

alapján $\mathcal{R}_f\subset(0,+\infty),$ speciálisan $a=f(1)>0.$ Ha $2\leq q\in\mathbf{N},$ akkor

$$a=f(1)=f(q\cdot 1/q)=(f(1/q))^q,$$

tehát

$$f(1/q)=\sqrt[q]{a}=a^{1/q}.$$

Innen (és a fentiek alapján)

$$f(p/q)=(f(1/q))^p=a^{p/q} \qquad (p,q\in\mathbf{N},q\geq 2),$$

és

$$f(-p/q)=\frac{1}{f(p/q)}=\frac{1}{a^{p/q}}=a^{-p/q} \qquad (p,q\in\mathbf{N},q\geq 2)$$

következik. Ezzel minden $r\in\mathbf{Q}$ racionális számra beláttuk, hogy

$$f(r)=a^r.$$

Legyen most $x\in\mathbf{R}$ tetszőleges, és vegyük észre, hogy az $f\in\mathcal{C}\{0\}$ feltételből $f\in\mathcal{C}\{x\},$ azaz az f függvény folytonossága következik. Ui.

$$f(x+h)-f(x)=f(x)\cdot f(h)-f(x)=f(x)\cdot(f(h)-1)=$$

$$f(x)\cdot(f(h)-f(0)) \qquad (h\in\mathbf{R}).$$

Ha $\varepsilon>0$ tetszőleges, akkor $f\in\mathcal{C}\{0\}$ miatt egy alkalmas $\delta>0$ mellett

$$|f(h)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{|f(x)|} \qquad (h\in\mathbf{R},|h|<\delta).$$

Következésképpen

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon \qquad (h\in\mathbf{R}, |h|<\delta)$$

vagy mindez másképp írva

$$|f(z)-f(x)|<\varepsilon \qquad (z\in\mathbf{R}, |z-x|<\delta).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $f\in\mathcal{C}\{x\}$.

Legyen most $(r_n):\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$ olyan sorozat, amelyre $\lim(r_n)=x$ teljesül. Ekkor $f,\exp_a\in\mathcal{C}$ és az átviteli elv alapján (ld. 5.5.2. Tétel) azt mondhatjuk, hogy

$$f(x)=\lim\left(f(r_n)\right)=\lim\left(a^{r_n}\right)=$$

$$\begin{cases}\lim(1)=1=a^x & (a=1)\\ \\ \lim\left(\exp_a(r_n)\right)=\exp_a x=a^x & (a\neq 1).\end{cases}$$

vii) Az előző megjegyzésben követett gondolatmenettel „találhatók meg" a 0-ban folytonos additív $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények. Ehhez nevezzük az előbbi f-et *additívnak,* ha

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (x,y\in\mathbf{R}).$$

Ha $a\in\mathbf{R}$ és

$$f_a(x):=ax \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

akkor az f_a nyilván additív. Lássuk be, hogy bármely $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f\in\mathcal{C}\{0\}$ additív függvényhez létezik olyan $a\in\mathbf{R}$, amellyel $f=f_a$. Legyen ui. $a:=f(1)$. Ekkor teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$f(nx)=nf(x) \qquad (x\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}).$$

Speciálisan (az $x:=1$, ill. az $1\le n:=s$ és $x:=1/s$ választással)

$$f(n)=na \quad (n\in\mathbf{N}) \ , \ f(1/s)=\frac{f(1)}{s}=\frac{a}{s} \quad (0<s\in\mathbf{N}).$$

Mivel

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0),$$

ezért $f(0)=0$. Ugyanakkor

$$0=f(x-x)=f(x)+f(-x) \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

amiből

$$f(-x)=-f(x) \qquad (x\in\mathbf{R})$$

következik. Ezért

$$f(m) = -f(-m) = -(-m)a = ma \qquad (m \in \mathbf{Z}, m < 0).$$

Továbbá a fentiekből

$$f(p/q) = pf(1/q) = p\cdot \frac{a}{q} = a\cdot \frac{p}{q} \qquad (p, q \in \mathbf{N}, q > 0),$$

és

$$f(-p/q) = -f(p/q) = -a\cdot \frac{p}{q} = a\cdot \left(-\frac{p}{q}\right) \qquad (p, q \in \mathbf{N}, q > 0).$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$f(r) = ar \qquad (r \in \mathbf{Q}).$$

Mutassuk meg, hogy $f \in \mathcal{C}$. Legyen ehhez $x \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ekkor

$$f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) = f(h) - f(0) \qquad (h \in \mathbf{R}),$$

amiből a vi) megjegyzésben mondottakkal analóg módon kapjuk egyrészt azt, hogy $f \in \mathcal{C}\{x\}$, másrészt pedig azt, hogy

$$f(x) = ax = f_a(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

viii) Legyen $x, y \in \mathbf{R}$, ekkor az $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ multiplikativitása, ill. az Euler-és a Pitagorasz-összefüggés (ld. 4.6. iii), iv), vi) megjegyzések) alapján

$$e^{x+\imath y} = e^x\cdot e^{\imath y} = e^x\cdot(\cos y + \imath \sin y) = e^x \cos y + \imath e^x \sin y,$$

ahol $e^x, \cos y, \sin y$ valós számok, és $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. Ezért

$$|e^{x+\imath y}| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x\cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Speciálisan az $x = 0$ esetben

$$|e^{\imath y}| = 1 \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

ix) Gyakran van szükség a logaritmusok közötti alábbi összefüggésre:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (a, b, x \in (0, +\infty), a \neq 1, b \neq 1).$$

Valóban, a fenti egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\log_b x = (\log_b a)\cdot(\log_a x).$$

Ugyanakkor (ld. 6.5.) $a^{\log_a x} = x$ miatt

$$(\log_b a)\cdot(\log_a x) = \log_b \left(a^{\log_a x}\right) = \log_b x.$$

Speciálisan tehát tetszőleges $a, b, c, x \in (0, +\infty), a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ esetén

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\lg x}{\lg a} = \log_a x.$$

x) A π-vel kapcsolatban fentebb mondottak alapján további „nevezetes szögek" szinusza, koszinusza is könnyen megkapható. Így pl. az

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

egyenlőségekből (figyelembe véve, hogy $\sin(\pi/4) > 0, \cos(\pi/4) > 0$) az következik, hogy

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Továbbá

$$0 = \sin\pi = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Innen összeadás után az adódik, hogy

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Mivel $\sin(\pi/3), \cos(\pi/3) > 0$, ezért

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \ , \ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Végül

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

ill. $\cos(\pi/6) > 0$ miatt

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. fejezet

Differenciálhatóság

7.1. A derivált fogalma

Korábban már láttuk, hogy egy függvény helyettesítési értékeinek a megváltozása és a megfelelő argumentumok megváltozása közötti kapcsolat ismerete esetenként különleges jelentőséggel bírhat. Ez vezetett el pl. a kontrakció fogalmának a bevezetéséhez (ld. fixpont-tétel (3.9.9. Tétel)). Ugyanez a helyzet pl. akkor is, ha mondjuk az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény egy (egyenes mentén) mozgó tömegpont út-idő függvénye. Ekkor tehát $x, y \in \mathcal{D}_f$, $y > x$ esetén a helyettesítési értékek $f(y) - f(x)$ különbsége az illető tömegpont által $y - x$ *idő* alatt megtett *utat* jelenti. A mozgás vizsgálata szempontjából az egyik lényeges adat az $(f(y) - f(x))/(y - x)$ *átlagsebesség.*

Speciális esetekben előfordulhat, hogy ez a kapcsolat közvetlenül a függvényértékek kiszámítása révén felderíthető. Így pl. az

$$f(x) := ax + b \qquad (x \in \mathbf{R})$$

alakú egyváltozós valós függvényeknél, bármilyen $a, b \in \mathbf{R}$ együtthatók esetén:

$$(*) \qquad f(y) - f(x) = a(y - x) \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Azt kaptuk, hogy ekkor a függvény megváltozása egyenesen arányos az argumentum-megváltozással. Speciálisan, ha itt $|a| < 1$, akkor f kontrakció. Világos, hogy pl. az utóbbi következtetéshez nincs szükség olyan „szoros" kapcsolatra $f(x) - f(y)$ és $x - y$ között, mint $(*)$-ban. „Engedjünk meg" pl. a $(*)$ jobb oldalán egy

$$(**) \qquad f(y) - f(x) = (\alpha + \Theta(x, y))(y - x) \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

alakú „perturbációt" is (ahol $\Theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ adott kétváltozós valós függvény). Ha valamilyen $-1 < \alpha < 1$ mellett

$$\sup\{|\Theta(x, y)| : (x, y) \in \mathbf{R}^2\} < 1 - |\alpha|,$$

akkor a $q := |\alpha| + \sup\{|\Theta(x,y)| : (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$ (< 1) jelöléssel

$$|f(y) - f(x)| \leq q|y-x| \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

tehát az f pl. kontrakció „marad".

Mindez persze túlságosan leszűkítené a szóba jöhető függvények osztályát. Enyhítendő a feltételeken, vizsgáljuk a $(**)$-ot először „lokálisan". Tegyük fel ehhez, hogy valamilyen $x \in \mathcal{D}_f$ esetén az x belső pontja a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománynak (ld. 5.2. viii) megjegyzés). Tehát van olyan $r > 0$, hogy $(x-r, x+r) \subset \mathcal{D}_f$. Ezt az x-et rögzítve, szorítkozzunk $(**)$-ban az $y \in (x-r, x+r)$ helyekre:

$$f(y) - f(x) = \alpha(y-x) + \Theta(x,y)(y-x) \qquad (y \in (x-r, x+r)).$$

Legyen itt $\eta(y) := \Theta(x,y)$ $(y \in (x-r, x+r))$, ekkor

$$f(y) - f(x) = \alpha(y-x) + \eta(y)(y-x) \qquad (y \in (x-r, x+r)).$$

Amennyiben $\lim_x \eta = 0$, akkor az f függvény x körüli (x-re vonatkozó) megváltozásában az $\alpha(y-x)$ „dominál". Ez utóbbin azt értve, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|y-x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq (|\alpha| + \varepsilon)|y-x|.$$

A fentiek motiválják az egyváltozós valós függvények körében az alábbi definíciót. Jelöljük ehhez általában egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ halmaz belső pontjainak a halmazát a következőképpen: $\operatorname{int} A$. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban *differenciálható* (vagy más szóval *deriválható*), ha van olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ szám, hogy egy alkalmas $\eta \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénnyel a következők teljesülnek:

$$(7.1.1) \qquad \begin{cases} 1^o \quad f(y) - f(x) = \alpha(y-x) + \eta(y)(y-x) \qquad (y \in \mathcal{D}_f), \\[2ex] 2^o \quad \lim_x \eta = 0. \end{cases}$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni:

$$f \in D\{x\}.$$

Az 1^o egyenlőségben $y = x$-re mindkét oldalon nulla áll, függetlenül $\eta(x)$ értékétől. Ezért nyugodtan feltehető (más szempontból ez a praktikus), hogy $\eta(x) = 0$. (Más szóval feltehető akár, hogy az η függvény folytonos az x-ben: $\eta \in \mathcal{C}\{x\}$.) Sőt, 1^o-hez még csak nem is szükséges, hogy az ott szereplő η függvény az x-ben értelmezve legyen (amikor is az 1^o egyenlőséget csak az $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ elemekre követeljük meg).

Nem nehéz megmutatni, hogy ha $f \in D\{x\}$, akkor a (7.1.1) definícióban szereplő α egyértelműen létezik. Más szóval igaz a

7.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in D\{x\}$. *Ekkor egyértelműen adható meg a differenciálhatóság* (7.1.1.) *definíciójában szereplő* $\alpha \in \mathbf{R}$ *szám.*

Bizonyítás. Valóban, ha a (7.1.1) definíció α, ill. η helyett valamilyen $\tilde{\alpha} \in \mathbf{R}$, ill. $\tilde{\eta} \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\lim_x \tilde{\eta} = 0$ esetén is igaz, akkor az 1^o-beli egyenlőséget az $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\eta}$ szereplőkkel is felírva egy kivonás után oda jutunk, hogy

$$(\alpha - \tilde{\alpha})(y - x) = (\tilde{\eta}(y) - \eta(y))(y - x) \qquad (y \in \mathcal{D}_f),$$

tehát

$$\alpha - \tilde{\alpha} = \tilde{\eta}(y) - \eta(y) \qquad (x \neq y \in \mathcal{D}_f)$$

következik. Mivel $\lim_x \tilde{\eta} = \lim_x \eta = 0$, ezért (ld. 5.3.3. Tétel)

$$0 = \lim_{y \to x} \tilde{\eta}(y) - \lim_{y \to x} \eta(y) = \lim_{y \to x} (\tilde{\eta}(y) - \eta(y)) = \alpha - \tilde{\alpha},$$

amiből $\alpha = \tilde{\alpha}$ már következik. ■

A fenti tétel alapján vezessük be valamilyen $f \in D\{x\}$ függvény esetén a derivált fogalmát. Nevezetesen, ha $f \in D\{x\}$, akkor a (7.1.1) definícióban szereplő (és a 7.1.1. Tétel szerint egyértelműen létező) α-t az f függvény x-beli *deriváltjának* (vagy *differenciálhányadosának*) nevezzük, és az

$$f'(x)$$

szimbólummal jelöljük.

A most bevezetett jelölés arra utal, hogy ha

$$\{z \in \mathcal{D}_f : f \in D\{z\}\} \neq \emptyset,$$

akkor $f'(x)$ nem más, mint a

$$\{z \in \mathcal{D}_f : f \in D\{z\}\} \ni z \mapsto f'(z)$$

függvény x-beli helyettesítési értéke. A most értelmezett függvényt az f *deriváltfüggvényének* (vagy *differenciálhányados-függvényének*) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.

Állapodjunk meg abban, hogy ha bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, akkor f-et *differenciálhatónak* (vagy *deriválhatónak*) nevezzük, és ezt írásban röviden az $f \in D$ módon juttatjuk kifejezésre.

A differenciálható függvényekkel kapcsolatos különböző számításokban gyakran hasznos a differenciálhatóság feltételének az alábbi átfogalmazása. Legyen ehhez ugyanis valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén $x \in \mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_f \setminus \{x\} \neq \emptyset$, és

$$\Delta_x f(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (t \in \mathcal{D}_f \setminus \{x\}).$$

Az így definiált $\Delta_x f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt az f függvény x-hez tartozó *differenciahányados-függvényének* (vagy *különbségihányados-függvényének*) nevezzük. Mindezek után lássuk be az alábbi állítást:

7.1.2. Tétel. *Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor deriválható az értelmezési tartományának valamilyen x belső pontjában, ha az x-hez tartózó $\Delta_x f$ differenciahányados-függvényének létezik x-ben határértéke, és $\lim_x \Delta_x f \in \mathbf{R}$. Az utóbbi esetben $f'(x) = \lim_x \Delta_x f$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f \in D\{x\}$. Ekkor (7.1.1) (és az $f'(x)$ derivált értelmezése) alapján

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \eta(y)(y-x) \qquad (y \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim_x \eta = 0$. Ezért

$$\Delta_x f(y) - f'(x) = \eta(y) \qquad (x \neq y \in \mathcal{D}_f),$$

amiből $\lim_x \eta = 0$ miatt $\lim_x (\Delta_x f - f'(x)) = 0$, így $\lim_x \Delta_x f = f'(x)$ következik.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy létezik az

$$\alpha := \lim_x \Delta_x f \in \mathbf{R}$$

határérték, és legyen $\eta(t) := \Delta_x f(t) - \alpha \quad (x \neq t \in \mathcal{D}_f)$. Tehát

$$\lim_x \eta = \lim_x (\Delta_x f - \alpha) = 0,$$

és

$$f(y) - f(x) = (y-x)\Delta_x f(y) = \alpha(y-x) + \eta(y)(y-x) \qquad (x \neq y \in \mathcal{D}_f).$$

Ez nem más, mint a (7.1.1) definícióban szereplő 1^o egyenlőség. Figyelembe véve a 7.1.1. Tételt és az $f'(x)$ derivált jelentését azt kapjuk, hogy $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \alpha = \lim_x \Delta_x f \in \mathbf{R}.$$

■

A (7.1.1) definíció mintegy egyszerű következménye a

7.1.3. Tétel. *Ha az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre a $\mathcal{D}_f$ egy x belső pontjában teljesül, hogy $f \in D\{x\}$, akkor $f \in \mathcal{C}\{x\}$ is igaz, azaz f folytonos x-ben.*

Bizonyítás. Valóban, (7.1.1) szerint

$$f(y) = f(x) + \alpha(y-x) + \eta(y)(y-x) \qquad (y \in \mathcal{D}_f),$$

ezért $\lim_{y\to x} \eta(y) = 0$, $\lim_{y\to x}(y-x) = 0$ miatt létezik a

$$\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} \left(f(x) + \alpha(y-x) + \eta(y)(y-x)\right) =$$

$$f(x) + \alpha\cdot \lim_{y\to x}(y-x) + \lim_{y\to x}(y-x)\cdot \lim_{y\to x} \eta(y) = f(x)$$

határérték. Mivel $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$-nek, ezért egyúttal (ld. 5.1.1. Tétel) $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, így $\lim_x f = f(x)$ azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{C}\{x\}$. ∎

7.2. Megjegyzések

i) Írjunk a (7.1.1) definícióban (az ottani szereplőkkel) $y - x =: h$-t, valamint legyen $\omega(h) := \eta(y) = \eta(x+h)$. Ekkor (7.1.1) a következő alakot ölti:

$$\begin{cases} 1^o & f(x+h) - f(x) = \alpha h + h\omega(h) \qquad (h \in (-r, r)), \\ & \\ 2^o & \lim_0 \omega = 0 \end{cases}$$

(ahol az $r > 0$ szám olyan, hogy $(x-r, x+r) \subset \mathcal{D}_f$).

ii) Legyen pl. (ld. 3.2. ix) megjegyzés)

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t > 0).$$

Ekkor bármely $\mathbf{R} \ni x > 0$ mellett:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{2} + \frac{1}{x+h} - \frac{x}{2} - \frac{1}{x} =$$

$$\frac{h}{2} - \frac{h}{x(x+h)} = h\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+h)}\right) =$$

$$\frac{h}{2} - \frac{h}{x^2} + \frac{h}{x^2} - \frac{h}{x(x+h)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right)\cdot h + \frac{h}{x^2(x+h)}\cdot h \qquad (h > -x).$$

Az

$$\alpha := \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\ , \ \ \omega(h) := \frac{h}{x^2(x+h)} \qquad (h > -x)$$

választással nyilván teljesülnek az $f \in D\{x\}$ differenciálhatóságot jelentő (1.7.1) feltételek (az előbbi i)-beli módosítással), és

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}.$$

Tehát a szóban forgó f függvényre $f \in D$ (azaz f differenciálható), továbbá az $f' : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ deriváltfüggvény a következő:

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}.$$

iii) A pontbeli differenciálhatóság „lokális" tulajdonság, nevezetesen: ha $f \in D\{x\}$, akkor ebből nem következik olyan $r > 0$ létezése, hogy $(x-r, x+r) \subset \mathcal{D}_f$ és az $(x-r, x+r)$ intervallum pontjaiban az f differenciálható. Sőt, könnyű megadni olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely egyetlen pontban deriválható. Ilyen pl. az

$$f(t) := \begin{cases} t^2 & (t \in \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

függvény, amelyre $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 0$, de bármelyik $0 \neq x \in \mathbf{R}$ esetén $f \notin D\{x\}$. Az első kijelentés igazolásához legyen ui.

$$\omega(t) := \begin{cases} t & (t \in \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}), \end{cases}$$

ekkor $\lim_0 \omega = 0$ és $f(h) - f(0) = \omega(h)h \quad (h \in \mathbf{R})$. Így (7.1.1) (ld. még i)) az $\alpha := 0$ esetben teljesül. Ha viszont $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és pl. $x \in \mathbf{Q}$, akkor

$$f(x+h) - f(x) = \begin{cases} 2hx + h^2 & (h \in \mathbf{Q}) \\ \\ -x^2 & (h \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}). \end{cases}$$

Innen (az i)-ben módosított) (7.1.1) fennállása esetén

$$\alpha = \begin{cases} 2x + h - \omega(h) & (0 \neq h \in \mathbf{Q}) \\ \\ -\dfrac{x^2}{h} - \omega(h) & (0 \neq h \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

következne. Mivel $h - \omega(h) \to 0 \quad (h \to 0)$, ezért $\alpha = 2x$ lenne, amiből viszont a

$$2x = -\frac{x^2}{h} - \omega(h) \qquad (0 \neq h \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$$

egyenlőség adódna. Ez utóbbit átrendezve azt kapnánk, hogy

$$x^2 = -2xh - h\omega(h) \to 0 \qquad (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \ni h \to 0),$$

tehát, hogy $x = 0$. A nyilvánvaló ellentmondás miatt így az f valóban nem differenciálható x-ben. (Hasonló meggondolással „intézhető el" az $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ eset is. Egyébként könnyen láthatóan $f \notin \mathcal{C}\{x\}$ is igaz, hacsak $0 \neq x \in \mathbf{R}$. Ui. legyenek $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, ill. $(t_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ olyan sorozatok, amelyekre $\lim(x_n) = \lim(t_n) = x$ teljesül. Ekkor $\lim(f(x_n)) = \lim(x_n^2) = x^2 \neq 0$, ugyanakkor $\lim(f(t_n)) = \lim(0) = 0$. Ha $f \in \mathcal{C}\{x\}$ igaz lenne, akkor az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) miatt a $\lim(f(x_n)) = \lim(f(t_n)) \,(= f(x))$ egyenlőségnek kellene teljesülnie. Következésképpen $f \notin D\{x\}$ a 7.1.3. Tételből is adódik.)

iv) Legyen $f \in D\{x\}$ és terjesszük ki a $\Delta_x f$ különbségihányados-függvény értelmezését a következőképpen:

$$\delta_x f(t) := \begin{cases} \Delta_x f(t) & (x \neq t \in \mathcal{D}_f) \\ \\ f'(x) & (t = x). \end{cases}$$

Ekkor a $\delta_x f$ függvényre létezik a

$$\lim_x \delta_x f = \lim_x \Delta_x f = f'(x) = \delta_x f(x)$$

határérték. Következésképpen a $\delta_x f$ függvény folytonos x-ben. (Más szóval a δ_x függvény a $\Delta_x f$ folytonos *kiterjesztése.*) Ugyanakkor világos, hogy

$$f(t) - f(x) = \delta_x f(t) \cdot (t - x) \qquad (t \in \mathcal{D}_f).$$

A most mondottak „fordítva" is igazak: ha x belső pontja $\mathcal{D}_f$-nek, és egy alkalmas, az x-ben folytonos $\delta_x \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$f(t) - f(x) = \delta_x(t) \cdot (t - x) \qquad (t \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = \delta_x(x)$. Ekkor ti.

$$\lim_x \Delta_x f = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \delta_x(t) = \delta_x(x),$$

azaz $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = \lim_x \Delta_x f = \delta_x(x)$.

v) Az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy a differenciálhatóság „erősebb" feltétel a folytonosságnál. Legyen ui. $f(t) := |t| \;\; (t \in \mathbf{R})$. Ekkor $f \in \mathcal{C}\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$. Ui.

$$\Delta_0 f(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \\ -1 & (t < 0), \end{cases}$$

amiből nyilvánvaló, hogy a $\Delta_0 f$ függvénynek a 0-ban nincs határértéke. A részletek mellőzésével jegyezzük meg, hogy az előbbi példánál lényegesen „erősebb" ellenpéldák is adódnak az előbb mondottak illusztrálására. Ti. létezik olyan folytonos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyik egyetlen $x \in \mathbf{R}$ helyen sem differenciálható. Az egyik legismertebb ilyen függvény az ún. *Van der Waerden-féle függvény*:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $\langle \alpha \rangle := \min\{|\alpha - k| : k \in \mathbf{Z}\}$. Egy másik gyakran idézett példa az előbbi tulajdonságú függvényre a *Weierstrass-féle függvény* (egy speciális esete):

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(15^n \pi x)}{2^n} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

vi) Jelentse most az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény a 7.1. pont bevezetőjében említett út-idő függvényt, és tegyük fel, hogy $f \in D$. Ekkor a $\Delta_x f \quad (x \in \mathcal{D}_f)$ különbségihányados-függvény az x időpillanatra vonatkoztatott átlagsebesség-függvény:

$$\Delta_x f(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad (x \neq y \in \mathcal{D}_f).$$

Világos, hogy a $\Delta_x f(y)$ helyettesítési érték annál jobban „jellemzi" a mozgást az x pillanatban, ha y minél „közelebb" van x-hez. Az utóbbi szemléletes (de matematikai értelemben nem „szigorú") megfogalmazás hátterében az az egzakt matematikai fogalom húzodik meg, hogy a mozgás x pillanatbeli jellemzésére a $\lim_x \Delta_x f$ határérték tűnik megfelelőnek. Éppen ezért a szóban forgó mozgás matematikai modelljében az f' deriváltfüggvény a mozgás *sebesség-idő* függvénye, az $f'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$ derivált az x-beli *pillanatnyi sebesség.*

vii) Legyen valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \in \mathcal{D}_f$, $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén

$$\ell_\alpha(t) := f(x) + \alpha(t - x) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ekkor $\ell_\alpha(x) = f(x)$, és a

$$\left\{(t, \ell_\alpha(t)) \in \mathbf{R}^2 : t \in \mathbf{R}\right\}$$

halmaz az $\mathbf{R}^2$ euklideszi síkon (geometriai szóhasználattal élve) egy, az $(x, f(x))$ ponton átmenő egyenes (ezért magát az ℓ_α függvényt is *egyenesként* fogjuk emlegetni). Világos, hogy $\ell_\alpha \in \mathcal{C}\{x\}$, és így $\lim_x \ell_\alpha = \ell_\alpha(x) = f(x)$. Ha tehát $f \in \mathcal{C}\{x\}$ is igaz, azaz $\lim_x f = f(x)$, akkor

$$\lim_x (f - \ell_\alpha) = \lim_x f - \lim_x \ell_\alpha = f(x) - \ell_\alpha(x) = 0.$$

Ugyanakkor $f \in D\{x\}$ esetén könnyen beláthatóan egyértelműen létezik olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ szám – nevezetesen $\alpha = f'(x)$ –, hogy az ℓ_α egyenes és az f függvény eltérésére a fenti $\lim_x (f - \ell_\alpha) = 0$ egyenlőségen túl még a következő is teljesül:

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - \ell_\alpha(t)}{t - x} = 0.$$

Ti.

$$\frac{f(t) - \ell_\alpha(t)}{t - x} = \Delta_x f(t) - \alpha \qquad (x \neq t \in \mathcal{D}_f),$$

ezért az előbb említett (véges) határérték akkor és csak akkor létezik, ha a

$$\lim_x (\Delta_x f - \alpha)$$

határérték létezik és véges. Ez utóbbi viszont nyilván azzal ekvivalens, hogy létezik a $\lim_x \Delta_x f$ határérték és

$$\lim_x \Delta_x f = \alpha.$$

Más szóval $f \in D\{x\}$ és $\alpha = f'(x)$. Mindez „többet kíván" az f függvénytől, mint azt, hogy $\lim_{t \to x} (f(t) - \ell_\alpha(t)) = 0$ (tehát, hogy $\lim_x f = f(x)$, ami az f folytonosságát jelenti x-ben): az $f(t) - \ell_\alpha(t)$ eltérés 0-hoz tartásának a nagyságrendjére vonatkozóan szab feltételt. Nevezetesen, az $(f(t) - \ell_\alpha(t))$-nek $t \to x$ esetén „úgy kell 0-hoz tartania", hogy még (a szintén 0-hoz tartó $t - x$ különbséggel elosztva, az így kapott hányados is 0-hoz tartson. Idegen szóval azt mondjuk, hogy az $f - \ell_\alpha$ különbség a $(t - x)$-ben *kis ordó* függvény, jelölésben

$$f(t) - \ell_\alpha(t) = o(t - x) \qquad (t \to x).$$

Pl. $(t - x)^2 = o(t - x)$ $(t \to x)$, mert $(t - x)^2/(t - x) = t - x \to 0$ $(t \to x)$, de $t - x \neq o(t - x)$, hiszen a $(t - x)/(t - x) = 1$ hányados $t \to x$ esetén nem tart 0-hoz. Tehát az egyes α számokhoz tartozó egyenesek között akkor és csak akkor van az $f(t) - \ell_\alpha(t) = o(t - x)$ $(t \in \mathcal{D}_f)$ feltételnek eleget tevő, ha $f \in D\{x\}$. Ez utóbbi esetben az

$$e_x(t) := \ell_{f'(x)}(t) = f(x) + f'(x)(t - x) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyenest az f függvény x-beli *érintőjének* nevezzük.

viii) Az előbbi megjegyzésben szereplő e_x érintő egy legfeljebb elsőfokú polinom (ld. 2.4. xiv) megjegyzés). Következésképpen, ha $f \in D\{x\}$, akkor van olyan, legfeljebb elsőfokú P polinom, amellyel $f(t) - P(t) = o(t - x)$ $(t \to x)$, azaz

$$(*) \qquad \lim_{t \to x} \frac{f(t) - P(t)}{t - x} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy mindez lényegében „fordítva" is igaz: ha az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in \mathcal{C}\{x\}$, és valamilyen P legfeljebb elsőfokú polinommal $(*)$ igaz, akkor $f \in D\{x\}$, és $P = e_x$. Valóban, a nyilvánvaló $\lim_{t \to x}(t-x) = 0$ egyenlőség (és $(*)$) miatt szükségszerűen léteznie kell a $\lim_{t \to x}(f(t) - P(t)) = 0$ határértéknek is, amiből $f, P \in \mathcal{C}\{x\}$ alapján

$$0 = \lim_{t \to x}(f(t) - P(t)) = \lim_{t \to x} f(t) - \lim_{t \to x} P(t) = f(x) - P(x).$$

Tehát $f(x) = P(x)$, ezért $(*)$ szerint

$$0 = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - P(t)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x) - (P(t) - P(x))}{t - x} =$$

$$\lim_{t \to x} \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - \frac{P(t) - P(x)}{t - x} \right).$$

Viszont $P \in D$, így létezik a

$$\lim_{t \to x} \frac{P(t) - P(x)}{t - x} = P'(x)$$

(véges) határérték. Mindezt egybevetve, és az 5.3.3. Tételre hivatkozva azt mondhatjuk, hogy létezik a

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

véges határérték is, azaz $f \in D\{x\}$.

ix) Magyarázzuk meg a fentiekben használt *differenciálhányados* elnevezést! Tekintsük ehhez az $f \in D\{x\}$ függvényt, és vezessük be a következő jelölést:

$$d_x f(t) := f'(x)(t - x) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az így értelmezett $d_x f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezést az f függvény x-hez tartozó *differenciáljának* nevezzük. Ha pl. $e(t) := t \quad (t \in \mathbf{R})$, akkor bármely $x \in \mathbf{R}$ helyen $e \in D\{x\}$ és (könnyen ellenőrizhetően) $e'(x) = 1$, ezért $d_x e(t) = t - x \quad (t \in \mathbf{R})$. Következésképpen az előbbi f függvényre

$$\frac{d_x f}{d_x e}(t) = f'(x) \qquad (t \in \mathbf{R} \setminus \{x\}).$$

Az $f'(x)$ derivált tehát „lényegében" nem más, mint a $d_x f$, $d_x e$ differenciálok hányadosa. Ide vezethető vissza tehát a „differenciálhányados" elnevezés, ill. az $f'(x)$ helyett gyakran használatos $\dfrac{df}{dx}$ szimbólum is.

x) Tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre valamilyen $a \in \mathbf{R}$ és $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ és $f(x) = g(x) \quad (|x-a| < r)$. Ekkor a differenciálhatóság definíciója alapján eléggé nyilvánvaló, hogy

$$f \in D\{a\} \iff g \in D\{a\}, \text{ ill. } f \in D\{a\} \Longrightarrow f'(a) = g'(a).$$

(Ez a megjegyzés mintegy „pozitív" oldalról támasztja alá a fenti iii) megjegyzést, miszerint a pontbeli differenciálhatóság „lokális" tulajdonság.)

xi) Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényről tegyük fel, hogy *additív* (ld. 6.8. vii) megjegyzés), azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$f \in D \iff f \in D\{0\}, \text{ ill. } f \in D \Longrightarrow f'(x) = f'(0) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Valóban, bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0),$$

ezért $f(0) = 0$. Következésképpen tetszőleges $x, h \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$ választással

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \Delta_0 f(h).$$

Ha tehát $f \in D\{x\}$, akkor létezik (és véges) az

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

határérték. Így létezik a $\lim_0 \Delta_0 f$ véges határérték is, azaz $f \in D\{0\}$, és $f'(0) = f'(x)$. Mindezt „fordított" sorrendben elmondva kapjuk az

$$f \in D\{0\} \Longrightarrow f \in D\{x\}$$

következtetést.

xii) Az előbbi megjegyzéshez hasonlóan azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *multiplikatív* (ld. 6.8. vi) megjegyzés), ha $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad (x, y \in \mathbf{R})$. Mutassuk meg, hogy

$$f \in D \iff f \in D\{0\}, \text{ ill. } f \in D \Longrightarrow f' = f'(0) \cdot f.$$

Ha ui. $f \equiv 0$, akkor a dolog nyilvánvaló. Különben valamilyen $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) \neq 0$, ill. $f(a) = f(a+0) = f(a)f(0)$ miatt $f(0) = 1$. Továbbá bármely $z \in \mathbf{R}$ pontban

$$f(0) = 1 = f(z + (-z)) = f(z) \cdot f(-z),$$

így $f(z) \neq 0$. Legyen ezek után $x, h \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$, ekkor

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x) \cdot \Delta_0 f(h).$$

Ezért $f \in D\{x\}$ esetén létezik (és véges) az

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

határérték. Tehát a

$$\lim_0 \Delta_0 f = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

véges határérték is létezik, azaz $f \in D\{0\}$ és $f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$. A „fordított"

$$f \in D\{0\} \implies f \in D\{x\}$$

következtetés most is analóg módon igazolható.

xiii) Jegyezzük meg, hogy a differenciálhatóság fenti definíciója minden további nélkül kiterjeszthető $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényekre. Nevezetesen, ha a (7.1.1) definícióban az α (valós) szám helyett $\alpha \in \mathbf{C}$ (komplex) számot, az $\eta \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (valós) függvény helyett $\eta \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (komplex) függvényt tekintünk, akkor az így módosított (7.1.1) előírás a szóban forgó $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvénynek az $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban való differenciálhatóságát jelenti. Hasonlóan érvényben marad az itt szereplő α egyértelműségét megfogalmazó 7.1.1. Tétel, aminek alapján az $f'(x) := \alpha$ értelmezés (az f függvény x-beli deriváltja) is változatlan formában elmondható. Ekkor az ($A := \{z \in \mathcal{D}_f : f \in D\{z\}\} \neq \emptyset$ feltétel mellett) az

$$A \ni z \mapsto f'(z)$$

deriváltfüggvény is létezik, mint $f' \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvény. Hasonlóan elmondható, hogy a 7.1.2., 7.1.3. Tételek igazak differenciálható komplex függvényekre is.

xiv) Bár az előző megjegyzés szerint nincs „különbség" valós, ill. komplex függvények differenciálhatóságának a definíciója között, ennek ellenére a differenciálhatóság feltétele egy komplex függvény esetében lényegesen „szigorúbb" következményeket von maga után, mint valós függvényeket illetően. (A differenciálható komplex függvényekkel a matematika egy rendkívül fontos, önálló fejezete, a *Komplex függvénytan* foglalkozik.) Itt csupán egy nagyon egyszerű példával illusztráljuk a most mondottakat. Tegyük fel ui., hogy az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény értékkészletére $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$ teljesül, továbbá valamilyen $x \in \mathcal{D}_f$ esetén egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$K_r(x) = \{z \in \mathbf{C} : |z - x| < r\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Megmutatjuk, hogy ha $f \in D\{x\}$, akkor $f'(x) = 0$. Ui.

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

miatt a határértékre vonatkozó átviteli elv (ld. 5.3.2. Tétel) alapján bármely

$$(z_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{x\}, \lim(z_n) = x$$

sorozatra egyúttal

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x}.$$

Legyen itt speciálisan $z_n := x + r/n$ $(1 < n \in \mathbf{N})$, ekkor

$$|z_n - x| = r/n < r \qquad (1 < n \in \mathbf{N}),$$

tehát $z_n \in K_r(x)$. Így $x \neq z_n \in \mathcal{D}_f$ $(1 < n \in \mathbf{N})$, és felhasználva az $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$ feltételt

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + r/n) - f(x)}{r/n} \in \mathbf{R}.$$

Ugyanakkor legyen most $z_n := x + \imath r/n$ $(1 < n \in \mathbf{N})$, ekkor az előbbiekkel analóg módon $x \neq z_n \in \mathcal{D}_f$ $(1 < n \in \mathbf{N})$ és

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \imath r/n) - f(x)}{\imath r/n} = -\imath \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \imath r/n) - f(x)}{r/n} =: -\imath q,$$

ahol (ismét csak az $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$ feltételre hivatkozva) $q \in \mathbf{R}$. Ha itt $f'(x) \neq 0$ lenne, akkor $q \neq 0$, így $\imath = -f'(x)/q \in \mathbf{R}$ is teljesülne, ami nem igaz. Következésképpen $f'(x) = 0$.

7.3. Műveletek differenciálható függvényekkel

A (7.1.1) definíció (vagy akár a 7.1.2. Tétel) alapján annak az eldöntése, hogy egy adott függvény differenciálható-e valamilyen pontban, esetenként szinte „reménytelen" feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt „megkönnyítik". Pl. azáltal, hogy a szóban forgó függvényt „függvényműveletek" (lineáris kombináció, szorzás, osztás, kompozíció, invertálás) révén egyszerűbb függvényekből állítjuk elő, és az előbb említett állításokban megfogalmazott „deriválási szabályok" alkalmazásával már ki tudjuk számítani a keresett deriváltat. (Itt „egyszerűnek" nevezve azt a (differenciálható) függvényt, amelynek a deriváltját már ismerjük.)

A továbbiakban ezeket a deriválási szabályokat (tehát az előbbi függvényműveletek és a differenciálás kapcsolatát tisztázó) tételeket tárgyaljuk.

7.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak az* $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvények és valamilyen* $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ *esetén* $f, g \in D\{x\}$. *Ekkor:*

a) $f + g \in D\{x\}$, *és* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

b) *bármely* $c \in \mathbf{R}$ *esetén* $cf \in D\{x\}$, *és* $(cf)'(x) = cf'(x)$;

c) $f \cdot g \in D\{x\}$, *és* $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

d) *ha* $g(x) \neq 0$, *akkor* $f/g \in D\{x\}$, *és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy

$$x \in \mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, \text{ valamint } x \in \mathcal{D}_{cf} = \mathcal{D}_f.$$

Sőt, a feltételek miatt az x hely belső pontja a $\mathcal{D}_f$-nek is és a $\mathcal{D}_g$-nek is, ezért alkalmas $r, \rho > 0$ számokkal

$$(x - r, x + r) \subset \mathcal{D}_f \quad , \quad (x - \rho, x + \rho) \subset \mathcal{D}_g.$$

Így a $0 < \sigma < \min\{r, \rho\}$ választással nyilván teljesül, hogy $(x - \sigma, x + \sigma) \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, tehát egyúttal az x belső pontja a $\mathcal{D}_{f+g}$, $\mathcal{D}_{fg}$, $\mathcal{D}_{cf}$ halmazoknak is.

Hasonlóan, ha $g(x) \neq 0$, akkor (ld. 7.1.3. Tétel) a g függvény x-beli folytonossága alapján van olyan $0 < \delta < \sigma$, amellyel

$$|g(t) - g(x)| < |g(x)|/2 \qquad (|t - x| < \delta),$$

amiből

$$|g(t)| = |(g(t) - g(x)) + g(x)| \geq |g(x)| - |g(t) - g(x)| >$$
$$|g(x)| - |g(x)|/2 = |g(x)|/2 > 0 \qquad (|t - x| < \delta)$$

következik. Tehát $g(t) \neq 0 \quad (|t - x| < \delta)$, ezért

$$(x - \delta, x + \delta) \subset \mathcal{D}_f \cap \{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \neq 0\} = \mathcal{D}_{f/g}.$$

Ez azt jelenti, hogy a tétel d) állításában tett feltétel biztosítja azt, hogy az x belső pontja legyen az f/g hányados-függvény értelmezési tartományának.

A most mondottak szerint tehát a tételben szereplő $f + g, cf, f \cdot g, f/g$ függvények differenciálhatósága vizsgálható az x helyen. Kezdjük az $f + g$ összegfüggvénnyel. Legyen $x \neq t \in \mathcal{D}_{f+g}$, ekkor

$$\Delta_x(f + g)(t) = \frac{(f + g)(t) - (f + g)(x)}{t - x} = \frac{f(t) + g(t) - (f(x) + g(x))}{t - x} =$$
$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \Delta_x f(t) + \Delta_x g(t).$$

Azt kaptuk, hogy $\Delta_x(f + g) = \Delta_x f + \Delta_x g$. Mivel $f, g \in D\{x\}$, ezért (ld. 7.1.2. Tétel)

$$f'(x) = \lim_x \Delta_x f \quad , \quad g'(x) = \lim_x \Delta_x g.$$

Következésképpen a határértékek és a műveletek kapcsolatára vonatkozó 5.3.3. Tétel alapján létezik a $\lim_x \Delta_x(f + g)$ határérték is és

$$\lim_x \Delta_x(f + g) = \lim_x \Delta_x f + \lim_x \Delta_x g = f'(x) + g'(x).$$

A 7.1.2. Tétel ismételt alkalmazásával ezzel azt kaptuk, hogy $f + g \in D\{x\}$, és

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Az előzőekkel analóg módon kapjuk, hogy

$$\Delta_x(cf)(t) = \frac{(cf)(t) - (cf)(x)}{t - x} = c \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = c \cdot \Delta_x f(t) \qquad (x \neq t \in \mathcal{D}_f),$$

azaz $\Delta_x(cf) = c \cdot \Delta_x f$, és

$$\lim_x \Delta_x(cf) = c \cdot \lim_x \Delta_x f = cf'(x).$$

Ezért $cf \in D\{x\}$, és $(cf)'(x) = cf'(x)$.

Lássuk be most a c) állítást. Ha $x \neq t \in \mathcal{D}_{fg}$, akkor

$$\Delta_x(fg)(t) = \frac{(fg)(t)-(fg)(x)}{t-x} = \frac{f(t)g(t)-f(x)g(x)}{t-x} =$$

$$\frac{(f(t)-f(x))g(t)+f(x)(g(t)-g(x))}{t-x} = g(t)\cdot \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + f(x)\cdot \frac{g(t)-g(x)}{t-x} =$$

$$g(t)\Delta_x f(t) + f(x)\Delta_x g(t).$$

Tehát $\Delta_x(fg) = g\cdot \Delta_x f + f(x)\cdot \Delta_x g$. Mivel (ld. 7.1.3. Tétel) $g \in \mathcal{C}\{x\}$ és $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}_g$ miatt $\lim_x g = g(x)$, ill. $\lim_x \Delta_x f = f'(x)$, $\lim_x \Delta_x g = g'(x)$. Így (ld. 5.3.3. Tétel) létezik

$$\lim_x \Delta_x(fg) = \lim_x g\cdot \lim_x \Delta_x f + f(x)\cdot \lim_x \Delta_x g = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

Innen és a 7.1.2. Tételből már következik, hogy $fg \in D\{x\}$, és

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Végül bizonyítsuk be a d) állítást. Legyen ehhez ismét $x \neq t \in \mathcal{D}_{f/g}$, ekkor

$$\Delta_x(f/g)(t) = \frac{(f/g)(t)-(f/g)(x)}{t-x} = \frac{f(t)/g(t)-f(x)/g(x)}{t-x} =$$

$$\frac{1}{g(t)g(x)}\cdot \frac{f(t)g(x)-f(x)g(t)}{t-x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\cdot \frac{(f(t)-f(x))g(x)-f(x)(g(t)-g(x))}{t-x} =$$

$$\frac{1}{g(t)g(x)}\cdot \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot g(x) - \frac{g(t)-g(x)}{t-x}\cdot f(x)\right) =$$

$$\frac{1}{g(t)g(x)}(g(x)\cdot \Delta_x f(t) - f(x)\cdot \Delta_x g(t)).$$

Más szóval

$$\Delta_x(f/g) = \frac{g(x)\cdot \Delta_x f - f(x)\cdot \Delta_x g}{g(x)\cdot g}.$$

Innen (a már az előbb is felhasznált $\lim_x g = g(x)$ $(\neq 0)$ egyenlőség, ill. az 5.3.3. Tétel miatt) létezik

$$\lim_x \Delta_x(f/g) = \frac{g(x)\cdot \lim_x \Delta_x f - f(x)\cdot \lim_x \Delta_x g}{g(x)\cdot \lim_x g} = \frac{g(x)\cdot \lim_x \Delta_x f - f(x)\cdot \lim_x \Delta_x g}{g^2(x)} =$$

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ezért $f/g \in D\{x\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

■

A következő tételben az összetett függvény differenciálhatóságával foglalkozunk.

7.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak az $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények, és valamilyen $x \in \mathcal{D}_g$ esetén $g \in D\{x\}$ és $f \in D\{g(x)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{x\}$, és*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Bizonyítás. Gondoljuk meg először, hogy $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f\circ g}$. Ti. $f \in D\{g(x)\}$, ezért $g(x) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Van tehát olyan $r > 0$, hogy

$$(g(x) - r, g(x) + r) \subset \mathcal{D}_f.$$

A 7.1.3. Tétel miatt viszont $g \in \mathcal{C}\{x\}$, így egy alkalmas $\delta > 0$ mellett

$$g(t) \in (g(x) - r, g(x) + r) \qquad (t \in \mathcal{D}_g,\ |t - x| < \delta).$$

A $g \in D\{x\}$ feltétel alapján viszont $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$. Tehát egy alkalmas $\rho > 0$ számmal

$$(x - \rho, x + \rho) \subset \mathcal{D}_g$$

is igaz. Egybevetve mindezt az előbbiekkel azt kapjuk, hogy $0 < \sigma < \min\{\delta, \rho\}$ mellett

$$g(t) \in (g(x) - r, g(x) + r) \subset \mathcal{D}_f \qquad (t \in (x - \sigma, x + \sigma)).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(x - \sigma, x + \sigma) \subset \{t \in \mathcal{D}_g : g(t) \in \mathcal{D}_f\} = \mathcal{D}_{f\circ g}.$$

Mivel $f \in D\{g(x)\}$, ezért a (7.1.1) definíció szerint egy alkalmas $\eta \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$f(g(t)) - f(g(x)) = f'(g(x))(g(t) - g(x)) + \eta(g(t))(g(t) - g(x)) \qquad (t \in \mathcal{D}_{f\circ g})$$

és $\lim_{g(x)} \eta = 0$.

A (7.1.1) definíció után mondottak szerint az is feltehető, hogy $\eta(g(x)) = 0$, más szóval $\eta \in \mathcal{C}\{g(x)\}$.

Hasonlóan, mivel $g \in D\{x\}$, ezért

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \omega(t)(t-x) \qquad (t \in \mathcal{D}_g),$$

ahol az $\omega \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre $\lim_x \omega = 0$. Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ helyen

$$(f \circ g)(t) - (f \circ g)(x) = f(g(t)) - f(g(x)) =$$
$$f'(g(x))\Big(g'(x)(t-x) + \omega(t)(t-x)\Big) + \eta(g(t))\Big(g'(x)(t-x) + \omega(t)(t-x)\Big) =$$
$$f'(g(x))g'(x)(t-x) + \Big(f'(g(x))\omega(t) + \eta(g(t))\Big(g'(x) + \omega(t)\Big)\Big)(t-x).$$

Legyen

$$\theta(t) := f'(g(x))\omega(t) + \eta(g(t))\Big(g'(x) + \omega(t)\Big) \qquad (t \in \mathcal{D}_{f \circ g}),$$

ekkor

$$(f \circ g)(t) - (f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x)(t-x) + \theta(t)(t-x) \qquad (t \in \mathcal{D}_{f \circ g}).$$

A (7.1.1) definíció szerint az $f \circ g \in D\{x\}$ differenciálhatósághoz azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\lim_x \theta = 0$.

Ehhez vegyük figyelembe, hogy $\lim_x \omega = \lim_{g(x)} \eta = 0$ és $\eta \in \mathcal{C}\{g(x)\}$. Mivel a 7.1.3. Tétel szerint $g \in \mathcal{C}\{x\}$ is igaz, ezért (ld. 5.5.3. Tétel) $\eta \circ g \in \mathcal{C}\{x\}$, így

$$\lim_{t \to x} \eta(g(t)) = \eta(g(x)) = 0.$$

Azt mondhatjuk most már (ld. 5.3.3. Tétel), hogy

$$\lim_{t \to x} \theta(t) = f'(g(x)) \lim_{t \to x} \omega(t) + \lim_{t \to x} \eta(g(t))\Big(g'(x) + \lim_{t \to x} \omega(t)\Big) = 0.$$

■

Az inverzfüggvény differenciálhatósága az eddigiekhez képest „kényesebb" feladat abban az értelemben, hogy csak több feltétel együttes teljesülése esetén fogjuk tudni garantálni az inverzfüggvény differenciálhatóságát. Ez nem meglepő, hiszen már a folytonossággal kapcsolatban is láttuk, hogy pusztán a szóban forgó függvény folytonossága (és invertálhatósága) önmagában még nem elegendő ahhoz, hogy az inverzfüggvény is folytonos legyen.

7.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény invertálható, valamilyen $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, $f'(x) \neq 0$, az f^{-1} inverzfüggvény folytonos $f(x)$-ben, és $f(x) \in \operatorname{int} \mathcal{R}_f$. Ekkor $f^{-1} \in D\{f(x)\}$ és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Bizonyítás. Az $f^{-1} \in \mathcal{C}\{f(x)\}$ folytonossági feltétel és a folytonosságra vonatkozó átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) szerint bármely

$$(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f \setminus \{f(x)\} \ , \ \lim(y_n) = f(x)$$

sorozatra az $x_n := f^{-1}(y_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ jelöléssel

$$\lim(x_n) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Az f invertálhatóságát figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy $x_n \neq x \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért az $f \in D\{x\}$, $f'(x) \neq 0$ feltételek miatt (ld. 3.7.5. Tétel és 5.3.2. Tétel))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(f(x_n) - f(x))/(x_n - x)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \Delta_x f(x_n)} = \frac{1}{\lim_x \Delta_x f} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ugyanakkor bármely $\mathbf{N} \ni n$-re

$$\Delta_{f(x)} f^{-1}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x))}{y_n - f(x)} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{(f(x_n) - f(x))/(x_n - x)},$$

így létezik

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{f(x)} f^{-1}(y_n) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \Delta_x f(x_n)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv (ld. 5.3.2. Tétel) szerint tehát létezik a

$$\lim_{f(x)} \Delta_{f(x)} f^{-1} = \frac{1}{f'(x)}$$

határérték is. Más szóval $f^{-1} \in D\{f(x)\}$ és $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = 1/f'(x)$. ■

A fentebb már említett „egyszerű" függvények (azaz olyan függvények, amelyeket differenciálhatósági szempontból - beleértve a deriváltjukat is - ismerünk) között fontos helyet foglalnak el a hatványsorok összegfüggvényei. A következő állításban megmutatjuk, hogy az utóbbi függvények valamennyien differenciálható függvények, és ki is számítjuk a deriváltjukat.

7.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergencia-sugara nullától különböző, és legyen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K},\, |x-a| < r).$$

Ekkor $f \in D$, és

$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{K},\, |x-a| < r).$$

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy $f \in D\{a\}$ és

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1.$$

Valóban,

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_1(x-a) + (x-a)\sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-a)^{n-1} =$$

$$a_1(x-a) + \eta(x)(x-a) \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r),$$

ahol a

$$c_n := \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \\ a_{n+1} & (n \geq 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$\eta(x) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r).$$

Az 5.3.6. Tétel szerint létezik a

$$\lim_a \eta = \eta(a) = c_0 = 0$$

határérték, amiből az előbbiek és a (7.1.1) definíció alapján $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = a_1$ már következik.

Legyen most $b \in \mathbf{K}$, $|b-a| < r$. A 4.5.3. Tétel miatt léteznek a

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b-a)^{n-k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

sorösszegek, és tetszőleges $0 < \rho < r - |b-a|$ mellett

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k \qquad (x \in K_\rho(b)).$$

Ha tehát

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k \qquad (x \in K_\rho(b)),$$

akkor a bizonyítás első része alapján $g \in D\{b\}$, és

$$g'(b) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} a_n (b-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}.$$

Ugyanakkor $f(x) = g(x) \quad (x \in K_\rho(b))$, ezért a 7.2. x) megjegyzés szerint $f \in D\{b\}$, és $f'(b) = g'(b)$. $\blacksquare$

Speciális esetként kapjuk azt, hogy bármelyik polinom deriválható. Nevezetesen, ha $N \in \mathbf{N}$, $c_0, ..., c_N \in \mathbf{K}$, $c_N \neq 0$, és

$$P(x) := \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

akkor az $a := 0$,

$$a_n := \begin{cases} c_n & (n = 0, ..., N) \\ \\ 0 & (n > N) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal $r = +\infty$ (ld. 4.5.2. Tétel), és

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ezért a 7.3.4. Tétel alapján $P \in D$, és

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} n c_n x^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

A „legegyszerűbb" polinomok a $h_n \quad (n \in \mathbf{N})$ hatványfüggvények:

$$h_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ha itt $n = 0$, akkor $h_0 \equiv 1$, és mint minden konstansfüggvény h_0 is triviálisan deriválható és $h_0' \equiv 0$. Az $n \geq 1$ esetben a fentiek szerint

$$h_n'(x) = n x^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

amiről közvetlenül a (7.1.1) definíció alapján is meggyőződhetünk:

$$(x^n)' := h_n'(x) = \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k x^{n-k-1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{t \to x} (t^k x^{n-k-1}) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-k-1} = n x^{n-1}.$$

Ugyanígy kapjuk bármely $a \in \mathbf{K}$ „középponttal" és $a_n \in \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$ „együtthatóval" a

$$\tilde{h}_n(x) := a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K})$$

függvényre, hogy $\tilde{h}_n \in D$, és

$$\tilde{h}_n'(x) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \\ na_n(x-a)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Egybevetve mindezt a 7.3.4. Tétellel azt mondhatjuk, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n(x) \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r)$$

összegfüggvény deriváltja a következő:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n'(x) \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r).$$

Formálisan szólva tehát azt kaptuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n$ (hatványsor)összegfüggvényt „szabad tagonként deriválni". Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy most speciális függvénysorok (ld. 4.5.) összegfüggvényét deriválhattuk „tagonként", és szó sincs arról, hogy ez minden további nélkül igaz lenne tetszőleges (differenciálható f_n $(n \in \mathbf{N})$ függvények által meghatározott) $\sum(f_n)$ függvénysor összegfüggvényére.

A 7.3.4. Tétel közvetlen folyománya a 6. fejezetben bevezetett exp, sin, cos függvények differenciálhatósága. Nevezetesen, igaz a

7.3.5. Tétel. *Az* exp, sin, cos, sh, ch *függvények differenciálhatók, és*

$$\exp' = \exp \ , \ \sin' = \cos \ , \ \cos' = -\sin \ , \ \mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \ , \ \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}.$$

Bizonyítás. A szóban forgó függvények mindannyian hatványsorok összegfüggvényei, ezért a 7.3.4. Tétel szerint valóban differenciálhatók.

Ugyancsak a 7.3.4. Tétel („formulája") alapján az

$$a := 0 \ , \ a_n := \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Hasonlóan, ha most

$$a := 0 \ , \ a_n := \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és

$$\sin'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Legyen

$$a := 0 \ , \ a_n := \begin{cases} 0 & (n = 2k+1) \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

amikor is

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2k) \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ha viszont

$$a := 0 \ , \ a_n := \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ \dfrac{1}{(2k+1)!} & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és

$$\mathrm{sh}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{ch}\, x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Végül, legyen

$$a := 0 \ , \ \ a_n := \begin{cases} 0 & (n = 2k+1) \\ \frac{1}{(2k)!} & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

amikor is

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és

$$\mathrm{ch}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{sh}\, x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

■

A 6. fejezetben az $\exp := \exp_{|\mathbf{R}}$ leszűkítés segítségével értelmeztük a (különböző alapú) logaritmus- és exponenciális függvényeket, ill. a hatványfüggvényeket. Emlékeztetőül álljon itt ezek definíciója (ld. 6. fejezet): legyen $\mu \in \mathbf{R}$, $1 \neq a \in (0, +\infty)$ és

$$\ln := \exp^{-1} \ , \ \ \exp_a(x) := \exp(x \ln a) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\log_a := \exp_a^{-1} \ , \ \ h_\mu(x) := \exp(\mu \cdot \ln x) \quad (x > 0).$$

A továbbiakban ezek differenciálhatóságát vizsgáljuk.

7.3.6. Tétel. *Az* $\ln, \exp_a, \log_a \quad (1 \neq a \in (0, +\infty)), h_\mu \quad (\mu \in \mathbf{R})$ *függvények differenciálhatók, és*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \ , \ \ \exp_a'(x) = (\ln a) \cdot \exp_a x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x > 0) \ , \ \ h_\mu'(x) = \mu \cdot h_{\mu-1}(x) \quad (x > 0).$$

Bizonyítás. A 6.2.1. Tétel, az 5.5.13. Tétel és a 7.3.5. Tétel szerint az exp függvény a 7.3.3. Tétel valamennyi feltételét teljesíti. Ezért $\ln \in D$ és

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

A 7.3.2. Tételt az $f := \exp$, $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbf{R})$ szereposztással alkalmazva

$$\exp_a = f \circ g.$$

Mivel a fentiek szerint $f = \exp \in D$, ill. (triviálisan) $g \in D$ és $g'(x) = \ln a \quad (x \in \mathbf{R})$, ezért a 7.3.2. Tétel miatt $\exp_a = f \circ g \in D$ és

$$\exp_a'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = (\ln a)\cdot \exp(x \ln a) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 6.2.1. Tétel helyett a 6.4.1. Tételt figyelembe véve $\exp_a$-ról ugyanaz elmondható, mint az előbb exp-ről. Így $\log_a \in D$ és

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \frac{1}{(\ln a)\cdot \exp_a(\log_a x)} = \frac{1}{x \ln a} \qquad (x > 0).$$

A 7.3.2. Tételt most az $f := \exp$, $g := \mu\cdot \ln$ szereposztással alkalmazva

$$h_\mu = f \circ g.$$

Ezért az előbbiekre tekintettel $h_\mu = f \circ g \in D$ és

$$h_\mu'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{\mu}{x}\cdot \exp(\mu\cdot \ln x) \qquad (x > 0).$$

Lássuk be, hogy

$$\frac{\exp(\mu\cdot \ln x)}{x} = \exp\left((\mu - 1)\cdot \ln x\right) \qquad (x > 0).$$

Valóban, az exp függvény multiplikativitási tulajdonsága (ld. 4.6. iii) megjegyzés) alapján

$$\exp\left((\mu - 1)\cdot \ln x\right) = \exp(\mu\cdot \ln x - \ln x) = \frac{\exp(\mu\cdot \ln x)}{\exp(\ln x)} = \frac{\exp(\mu\cdot \ln x)}{x}.$$

Tehát

$$h_\mu'(x) = \mu\cdot \exp\left((\mu - 1)\cdot \ln x\right) = \mu\cdot h_{\mu-1}(x) \qquad (x > 0).$$

■

7.4. Megjegyzések

i) Amennyiben a 7.3.1. Tételben szereplő $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre $f, g \in D$ teljesül és $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, akkor egyúttal bármely $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ esetén $f, g \in D\{x\}$. Következésképpen $f+g,\, cf,\, fg \in D$ $(c \in \mathbf{R})$, és

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (cf)' = cf' \quad , \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Ha még $g(x) \neq 0$ $(x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ is igaz, akkor $f/g \in D$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

ii) Ha a 7.3.2. Tételben szereplő g függvényre $g(t) \neq g(x)$ $(x \neq t \in \mathcal{D}_g)$ fennáll, akkor az

$$f \circ g \in D\{x\},\ (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

állításokat a következőképpen is beláthatjuk. Legyen ui. $(t_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \setminus \{x\}$ olyan sorozat, amely konvergens és $\lim(t_n) = x$. Ekkor a g-re tett feltétel miatt $g(t_n) \neq g(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ és

$$\Delta_x(f \circ g)(t_n) = \frac{f(g(t_n)) - f(g(x))}{t_n - x} =$$

$$\frac{f(g(t_n)) - f(g(x))}{g(t_n) - g(x)} \cdot \frac{g(t_n) - g(x)}{t_n - x} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 7.1.3. Tétel szerint $g \in \mathcal{C}\{x\}$, ezért az 5.5.2. Tétel (a folytonosságra vonatkozó átviteli elv) alapján $\lim (g(t_n)) = g(x)$. Így az $f \in D\{g(x)\}$ differenciálhatósági feltétel és a határértékre vonatkozó átviteli elv (ld. 5.3.2. Tétel) szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(t_n)) - f(g(x))}{g(t_n) - g(x)} = \lim_{g(x)} \Delta_{g(x)} f = f'(g(x)).$$

Ugyanilyen megfontolással kapjuk azt is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(t_n) - g(x)}{t_n - x} = \lim_{x} \Delta_x g = g'(x).$$

Ezért (ld. 3.7.5. Tétel) létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_x(f \circ g)(t_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(t_n)) - f(g(x))}{g(t_n) - g(x)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{g(t_n) - g(x)}{t_n - x} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

határérték is. Innen ismét az 5.3.2. Tételre hivatkozva kapjuk, hogy létezik a

$$\lim_x \Delta_x(f\circ g) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

határérték, ami a bizonyítandó állítást jelenti. A fentiekben az is kiderült, hogy a g-re tett feltétel mellett

$$\Delta_x(f\circ g) = \Delta_x g\cdot(\Delta_{g(x)}f)\circ g.$$

iii) Az i) megjegyzéshez hasonlóan tegyük fel, hogy a 7.3.2. Tételben $f,g\in D$, valamint $\mathcal{R}_g\cap\mathcal{D}_f\neq\emptyset$. Ekkor $f\circ g\in D$, és

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'.$$

iv) A 7.3.2. Tétel alapján a 7.3.3. Tételben szereplő

$$(*)\qquad \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

formula már nem „meglepő". Legyen ui. valamilyen $\emptyset\neq A\subset\mathbf{R}$ halmaz esetén

$$e_A(t) := t \qquad (t\in A).$$

Ekkor könnyen láthatóan minden $t\in \mathrm{int}A$ esetén $e_A\in D\{t\}$, és $e'_A(t)=1$. Mivel

$$f\circ f^{-1} = e_{\mathcal{R}_f},$$

ezért a 7.3.3. Tétel feltételei mellett a 7.3.2. Tételből

$$1 = e'_{\mathcal{R}_f}(f(x)) = (f\circ f^{-1})'(f(x)) = f'(f^{-1}(f(x)))\cdot(f^{-1})'(f(x)) =$$

$$f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x)).$$

Innen a $(*)$ egyenlőség már nyilván következik.

v) Az előbbi megjegyzésben szereplő $(*)$ egyenlőséget az $y := f(x)$ jelöléssel írjuk át a következő alakba:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Ha tehát a 7.3.3. Tétel feltételei minden $x\in\mathcal{D}_f$ esetén teljesülnek, akkor az f^{-1} függvény differenciálható, és

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

Ez a helyzet pl. akkor (ld. később), ha $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum, $f\in D$, és $f'(x)\neq 0$ $(x\in\mathcal{D}_f)$. Megjegyezzük, hogy a 7.3.3. Tétel bizonyításából az is kiolvasható, hogy

$$\Delta_{f(x)}f^{-1} = \frac{1}{(\Delta_x f)\circ f^{-1}}.$$

vi) A 7.3.6. Tételben szereplő $\exp_a$, h_μ függvényekkel kapcsolatban emlékeztetünk a hatvány fogalmára (ld. 6.4.):

$$a^x := \exp(x \ln a) \qquad (x \in \mathbf{R},\ a > 0).$$

Ha itt $a = 1$, akkor $\ln 1 = 0, \exp 0 = 1$ miatt $a^x = 1^x = 1$. Ha $a \neq 1$, akkor pedig $a^x = \exp_a x \quad (x \in \mathbf{R})$. A 7.3.6. Tétel szerint tehát (kissé „pongyola", de szemléletes jelöléssel)

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Hasonlóan, ha $\mu \in \mathbf{R}$, akkor

$$x^\mu = h_\mu(x) \qquad (x > 0),$$

azaz

$$(x^\mu)' = \mu \cdot h_{\mu-1}(x) = \mu \cdot x^{\mu-1} \qquad (x > 0).$$

vii) A 6.6. pontban láttuk, hogy

$$h_{1/m} = \sqrt[m]{} \qquad (2 \leq m \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen az itt szereplő $\sqrt[m]{}$ gyökfüggvény differenciálható, és

$$(\sqrt[m]{})'(x) = (h_{1/m})'(x) = \frac{1}{m} \cdot h_{(1/m)-1}(x) \qquad (x > 0).$$

A fenti „lazább" jelölésekkel tehát

$$(\sqrt[m]{x})' = \frac{1}{m} \cdot x^{(1/m)-1} = \frac{1}{m} \cdot x^{(1-m)/m} = \frac{1}{m} \cdot (\sqrt[m]{x})^{1-m} \qquad (x > 0).$$

Speciálisan, ha $m = 2$, akkor

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

viii) Az inverzfüggvény deriválhatóságával kapcsolatos 7.3.3. Tételbeli $f'(x) \neq 0$ feltétel nem csupán az inverzfüggvény deriváltjának a kiszámítása miatt lényeges. Legyen ui.

$$f(x) := x^3 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy f invertálható, $f \in D$ és

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

de $f^{-1} \notin D\{0\}$. Valóban, $f^{-1} \in D\{0\}$ esetén léteznie kellene a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \in \mathbf{R}$$

(véges) határértéknek, viszont

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

ix) Az előbbi megjegyzéshez kapcsolódva a 7.3.3. Tételbeli $f(x) \in \operatorname{int} \mathcal{R}_f$ feltétel sem teljesül „automatikusan". Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in (-1/2, 1/2) \setminus \mathbf{Q}) \\ \\ x + x^2 & (x \in (-1/2, 1/2) \cap \mathbf{Q}). \end{cases}$$

Ekkor f invertálható, $f \in D\{0\}$, $f'(0) = 1 \neq 0$, de nincs olyan $r > 0$ szám, amellyel $(f(0) - r, f(0) + r) = (-r, r) \subset \mathcal{R}_f$ igaz lenne, azaz $f(0) = 0 \notin \operatorname{int} \mathcal{R}_f$. Ui. az f függvény invertálható, mert $x, t \in (-1/2, 1/2) \setminus \mathbf{Q}$, $x \neq t$ esetén

$$f(x) = x \neq t = f(t)$$

triviális. Ha itt $x \in \mathbf{Q}$ és $t \notin \mathbf{Q}$, akkor

$$f(t) = t \notin \mathbf{Q} \;\;,\;\; f(x) = x + x^2 \in \mathbf{Q},$$

így $f(x) \neq f(t)$. Ha viszont $x, t \in (-1/2, 1/2) \cap \mathbf{Q}$ és $x \neq t$, akkor

$$f(x) = x + x^2 = t + t^2 = f(t) \iff t = -x - 1,$$

ami $-x - 1 \notin (-1/2, 1/2)$ miatt nem lehetséges. Így $f(x) \neq f(t)$.

Továbbá $f \in D\{0\}$, ui.

$$\Delta_0 f(t) = \frac{f(t)}{t} = \begin{cases} 1 & (t \notin \mathbf{Q}) \\ \\ 1 + t & (t \in \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (t \in (-1/2, 1/2)).$$

Mivel $\lim_{t \to 0}(1 + t) = 1$ nyilvánvaló, ezért létezik a $\lim_{t \to 0} \Delta f(t) = 1$ határérték. Tehát $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 1$.

Legyen végül $r > 0$ és $y \in (-r, r) \cap \mathbf{Q}$. Ha $y \in \mathcal{R}_f$ is igaz, akkor valamilyen

$$x \in (-1/2, 1/2) \cap \mathbf{Q}$$

esetén az

$$x + x^2 = y$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Könnyű meggyőződni arról, hogy innen

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}$$

következik. Ezért $\sqrt{1+4y} \in \mathbf{Q}$ is fenn kell, hogy álljon. Ugyanakkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbf{Q}$, ezért az $y_n := 1/(4n^2)$ választással

$$\sqrt{1+4y_n} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \notin \mathbf{Q}.$$

Viszont bármely $r > 0$ mellett $\lim_{n\to\infty}(1/(4n^2)) = 0$ miatt egy alkalmas pozitív $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal az előbbi y_n-re $y_n \in ((-r, r) \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathcal{R}_f$.

x) Ha a 7.3.1. Tétel d) állításában $f \equiv 1$ (amikor is $f \in D$ és $f' \equiv 0$), akkor az f/g függvény nem más, mint a g függvény $1/g$ reciproka. Ekkor a szóban forgó tétel d) állítása a következőképpen hangzik: ha $g \in D\{x\}$ és $g(x) \neq 0$, akkor $1/g \in D\{x\}$ és

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ebben az esetben az említett d) állítás bizonyítását megismételve a következőt mondhatjuk:

$$\Delta_x(1/g)(t) = \frac{1/g(t) - 1/g(x)}{t - x} = -\frac{1}{g(t)g(x)} \cdot \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \qquad (x \neq t \in \mathcal{D}_g).$$

Tehát

$$\lim_x \Delta_x(1/g)(t) = -\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{\lim_{t\to x} g(t)} \cdot \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Innen a d) állítás (tetszőleges ott szereplő f függvényre) már következik c)-ből:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \in D\{x\}$$

és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

$$f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

xi) A polinomok differenciálhatósága alapján a 7.3.1. Tételből rögtön következik, hogy bármelyik racionális törtfüggvény (azaz két polinom hányadosa) is differenciálható.

xii) Teljes indukcióval azt kapjuk a 7.3.1. Tételből, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$, $f_i \in D\{x\}$ $(i = 0, ..., n)$ esetén akármilyen $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, ..., n)$ együtthatókkal

$$f := \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \in D\{x\},$$

és

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i'(x).$$

xiii) A 7.1.2. Tételre gondolva nem meglepő, hogy a valamilyen pontbeli differenciálhatóság definíciója szerepet kaphat egyes függvények határértékének a kiszámításában. Mutassuk meg pl., hogy bármely $c \in \mathbf{R}$ esetén

$$(*) \qquad \lim_{x \to +\infty} (1 + c/x)^x = \lim_{x \to -\infty} (1 + c/x)^x = e^c.$$

Mivel $c = 0$-ra mindez triviális, ezért feltehetjük, hogy $c \neq 0$. Ekkor $x \in \mathbf{R}$, $|x| > |c|$ mellett $1+c/x > 0$, így minden $x \in (-\infty, -|c|) \cup (|c|, +\infty)$ számra létezik az $(1+c/x)^x$ hatvány. Legyen tehát $x \in \mathbf{R}$ ilyen, ekkor a $t := 1 + c/x \neq 1$ jelöléssel

$$\ln\left((1 + c/x)^x\right) = x \cdot \ln(1 + c/x) = c \cdot \frac{\ln t - \ln 1}{t - 1} = c \cdot \Delta_1 \ln(t).$$

Ha $(x_n) : \mathbf{N} \to (|c|, +\infty)$ és $\lim(x_n) = +\infty$ (vagy $(x_n) : \mathbf{N} \to (-\infty, -|c|)$ és $\lim(x_n) = -\infty$), akkor

$$\lim(t_n) := \lim(1 + c/x_n) = 1.$$

A 7.3.6. Tétel szerint $\ln \in D$, és (ld. 5.3.2. Tétel)

$$\ln'(1) = 1 = \lim_1 (\Delta_1 \ln) = \lim(\Delta_1 \ln(t_n)).$$

Következésképpen (ld. 5.3.2. Tétel) létezik a

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left((1 + c/x_n)^{x_n}\right) = c$$

(vagy a

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left((1 + c/x_n)^{x_n}\right) = c)$$

határérték. Mivel az exp függvény folytonos (ld. 6.2.1. Tétel), így az

$$y_n := \ln\left((1 + c/x_n)^{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel (ld. 5.5.2. Tétel) létezik az

$$e^c = \exp c = \exp\left(\lim(y_n)\right) = \lim\left(\exp(y_n)\right) = \lim\left((1 + c/x_n)^{x_n}\right)$$

határérték is. Innen az átviteli elv (ld. 5.3.2. Tétel) alapján $(*)$ már következik.

7.5. Differenciálható függvények vizsgálata

7.5.1. Differenciálható függvények szerkezete

A matematikai modellezés egyik legfontosabb fejezete függvények szélsőértékeinek a felderítésével kapcsolatos. Az idevágó fogalmak bevezetéséhez tekintsünk egy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, legyen $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *lokális maximuma* van (más szóval az a pont *lokális maximumhely*), ha egy alkalmas $r > 0$ mellett fennáll a következő becslés:

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < r).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f *lokális maximumának* nevezzük.

Ha a fenti $a \in \mathcal{D}_f$ helyen az előbbinel „erősebb"

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

egyenlőtlenség igaz, akkor az f függvénynek a-ban *abszolút maximuma* van (vagy másképp fogalmazva az a pont *abszolút maximumhelye* f-nek). Ekkor maga az $f(a)$ függvényérték az f *abszolút maximuma.* Világos, hogy az utóbbi esetben $f(a)$ egyúttal az f lokális maximuma is, ill. ekkor az a pont lokális maximumhely is.

Az előbbi definíciókban az egyenlőtlenségek „megfordításával" jutunk a minimumhelyek, ill. minimumok fogalmához. Nevezetesen, ha $a \in \mathcal{D}_f$ és egy $r > 0$ szám esetén igaz az

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < r)$$

becslés, akkor az $f(a)$ függvényértéket az f *lokális minimumának,* az a-t pedig az f *lokális minimumhelyének* nevezzük. (Más szóval ekkor f-nek a-ban *lokális minimuma van.*)

Hasonlóan, ha

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor az f függvénynek az a-ban *abszolút minimuma* van (az a pont *abszolút minimumhelye* az f-nek), ill. az $f(a)$ függvényérték az f *abszolút minimuma.* Ilyenkor az $f(a)$ nyilván az f lokális minimuma is.

Esetenként azt mondjuk röviden, hogy az f függvénynek az a-ban *lokális szélsőértéke* van (az a pont *lokális szélsőértékhelye* az f-nek), ha az f függvénynek az a-ban lokális maximuma vagy lokális minimuma van. Továbbá az a pont *abszolút szélsőértékhelye* az f-nek (az $f(a)$ függvényérték *abszolút szélsőértéke* az f-nek), ha az a-ban abszolút maximuma vagy abszolút mimimuma van az f-nek.

A differenciálszámítás egyik legismertebb állítása az alábbi tétel, az ún. *elsőrendű szükséges feltétel lokális szélsőértékre*:

7.5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvénynek valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen lokális szélsőértéke van és* $f \in D\{a\}$. *Ekkor* $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen pl. az a hely lokális maximumhely (minimumhely esetén analóg a bizonyítás). Van tehát olyan $r > 0$, hogy

$$f(x) \le f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < r).$$

Ugyanakkor $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, így egy alkalmas $\rho > 0$ számmal $(a-\rho, a+\rho) \subset \mathcal{D}_f$ is igaz. Ha tehát

$$0 < \sigma < \min\{r, \rho\},$$

akkor $(a-\sigma, a+\sigma) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(x) \le f(a) \qquad (x \in (a-\sigma, a+\sigma)).$$

Legyen most $a < x < a+\sigma$, ekkor $f(x) \le f(a)$ miatt $f(x) - f(a) \le 0$, ezért $x - a > 0$ alapján

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Következésképpen

$$f'(a) = \lim_a \Delta_a f = \lim_{a+0} \Delta_a f \le 0.$$

Ugyanígy kapjuk bármely $a - \sigma < x < a$ esetén, hogy $\Delta_a f(x) \ge 0$. Innen viszont az következik, hogy

$$f'(a) = \lim_a \Delta_a f = \lim_{a-0} \Delta_a f \ge 0.$$

Így $0 \le f'(a) \le 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$. ■

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előző tételben szereplő $f'(a) = 0$ következmény csak *szükséges,* de nem elégséges feltétele annak, hogy az f-nek az a-ban lokális szélsőértéke legyen. Tekintsük ui. az

$$f(x) := x^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényt. Ekkor az f-nek az $a := 0$-ban (könnyen beláthatóan) nincs lokális szélsőértéke, de $f'(x) = 3x^2$ $(x \in \mathbf{R})$ miatt $f'(0) = 0$.

Az előbbi tétel segítségével már nem nehéz belátni a differenciálható függvények vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú ún. *középérték-tételeket.* Ezek közül az első a

7.5.2. Tétel (Rolle). *Legyen valamilyen* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *esetén az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény folytonos, minden* $a < x < b$ *esetén differenciálható az* x *helyen, továbbá* $f(a) = f(b)$. *Ekkor van olyan* $\xi \in (a, b)$, *hogy* $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Emlékeztetünk a Weierstrass-tételre (ld. 5.5.10. Tétel), miszerint léteznek olyan $u, v \in [a, b]$ helyek, amelyekre

$$f(u) = \max \mathcal{R}_f \quad , \quad f(v) = \min \mathcal{R}_f .$$

Ha $m := f(u) = f(v)$, akkor az f függvény konstansfüggvény $(f \equiv m)$, így tetszőleges $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.

Feltehetjük tehát, hogy $f(u) \neq f(v)$. Mivel $f(a) = f(b)$, ezért az u és a v közül legalább az egyik az (a, b)-be esik, legyen ez mondjuk az u. Ekkor

$$\xi := u \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = (a, b),$$

és az f-nek a ξ-ben lokális maximuma van. A feltételeink szerint $f \in D\{\xi\}$, ezért a 7.5.1. Tétel miatt $f'(\xi) = 0$. ■

7.5.3. Tétel (Lagrange). *Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és minden $a < x < b$ esetén differenciálható az x helyen. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ függényt:

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x \qquad (x \in [a, b]).$$

Világos, hogy a φ függvény folytonos, és $\varphi \in D\{x\}$ $(x \in (a, b))$. Továbbá

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$

ill.

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Tehát $\varphi(a) = \varphi(b)$, ezért a 7.5.2. Tétel alapján van olyan $\xi \in (a, b)$, amellyel

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

7.5.4. Tétel (Cauchy). *Legyen* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *az* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak, és minden* $a < x < b$ *esetén differenciálhatók az* x *helyen. Ekkor van olyan* $\xi \in (a, b)$, *hogy*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Bizonyítás. Definiáljuk most a $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ függényt a következőképpen:

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x) \qquad (x \in [a, b]).$$

Az f, g függvényekről tett feltételek miatt a φ függvény folytonos, továbbá $\varphi \in D\{x\}$ $(x \in (a, b))$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$\varphi(a) = (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) =$$

$$(f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) \cdot f(b) = \varphi(b).$$

Ezért ismét a Rolle-tétel (ld. 7.5.2. Tétel) szerint egy alkalmas $\xi \in (a, b)$ helyen

$$\varphi'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi) = 0,$$

amiből a Cauchy-tétel állítása már következik. ∎

Jegyezzük meg, hogy ha az előbbi tételben még azt is feltesszük, hogy tetszőleges $x \in (a, b)$ helyen $g'(x) \neq 0$, akkor a 7.5.2. Tételt figyelembe véve egyúttal $g(b) \neq g(a)$, azaz $g(b) - g(a) \neq 0$ is teljesül. Ezért

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Világos továbbá, hogy pl. a $g(x) := x \quad (x \in [a, b])$ speciális esetben a most mondott pótlólagos feltétel $g' \equiv 1$ miatt teljesül, ezért a Cauchy-tétel előbbi alakjából

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

következik. Ez pedig nem más, mint a 7.5.3. (Lagrange-)Tétel.

Hasonlóan, ha a 7.5.3. Tételben az is igaz, hogy $f(a) = f(b)$, akkor $f(b) - f(a) = 0$, így

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Más szóval a Lagrange-tételből (7.5.3. Tétel) a Rolle-tétel (7.5.2. Tétel) speciális esetként adódik.

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény monoton növő, azaz

$$f(x) \le f(t) \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f,\, x \le t).$$

Ha itt $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor könnyen láthatóan $\Delta_x f \ge 0$. Ui. $t \in \mathcal{D}_f$, $t > x$ esetén $t - x > 0$, és $f(t) - f(x) \ge 0$ miatt

$$\Delta_x f(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ge 0,$$

ill., ha $t < x$, akkor $t - x < 0$ és $f(t) - f(x) \le 0$ miatt jutunk ugyanerre az erdeményre. Következésképpen az $f \in D\{x\}$ differenciálhatósági feltétel mellett

$$f'(x) = \lim_x \Delta_x f \ge 0.$$

A következő tételben megmutatjuk, hogy a most kapott eredmény bizonyos értelemben meg is „fordítható".

7.5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a differenciálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya nyílt intervallum. Ekkor:*

a) f *monoton növő* $\iff$ $f' \ge 0$;

b) f *monoton fogyó* $\iff$ $f' \le 0$.

Bizonyítás. Az a) állítás igazolásához a tétel „felvezetésére" tekintettel már csak azt kell megmutatni, hogy $f'(x) \ge 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f)$ esetén az f függvény monoton növő. Legyen ehhez $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$, ekkor nyilván $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, és a $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$,

$$\varphi(x) := f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

függvény teljesíti a 7.5.3. Tétel feltételeit. Van tehát olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre

$$\varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) = \varphi'(\xi)(b - a) = f'(\xi)(b - a),$$

ahol $f'(\xi) \ge 0$, $b - a > 0$ miatt $f'(\xi)(b - a) \ge 0$. Így $f(b) - f(a) \ge 0$, azaz $f(b) \ge f(a)$.

A b) állítás bizonyítása analóg módon történhet. ■

Az előbbi bizonyításban $f'(\xi) > 0$ esetén $f'(\xi)(b - a) > 0$, így $f(b) > f(a)$. Ha tehát a 7.5.5. Tételben $f' > 0$, akkor az f függvény szigorúan monoton növő (míg az $f' < 0$ esetben pedig szigorúan monoton fogyó). Ugyanakkor a most kapott állítások „nem megfordíthatók," amint azt pl. az

$$f(x) := x^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény mutatja: az f szigorúan monoton növő, de $f'(0) = 0$.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha az előbbiekben $f'(\xi) = 0$, akkor $f'(\xi)(b-a) = 0$, így $f(b) - f(a) = 0$, azaz $f(b) = f(a)$. Ezért, ha $f' \equiv 0$ (azaz $f'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f)$, ahol ne felejtsük el: $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum), akkor bármely $a, b \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a) = f(b)$. Más szóval az f konstansfüggvény. Sőt, igaz a

7.5.6. Tétel. *Ha a differenciálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya nyílt intervallum, akkor fennáll az alábbi ekvivalencia:*

$$f \text{ konstansfüggvény} \iff f' \equiv 0.$$

Bizonyításként elég már csak annyit megjegyezni, hogy ha f konstansfüggvény, akkor $\Delta_x f(t) = 0 \ (x \neq t \in \mathcal{D}_f)$ bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén, így $f'(x) = \lim_x \Delta_x f = 0$.

A most megfogalmazott tételt felhasználva már „erősíthetjük" a 7.5.5. Tételt szigorúan monoton függvényekre.

7.5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in D$ és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány nyílt intervallum. Ekkor:*

a) *f szigorúan monoton növő $\iff$ $f'(x) \geq 0 \ (x \in \mathcal{D}_f)$, és bármely $I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt intervallumnak van olyan $t \in I$ pontja, amelyre $f'(t) > 0$;*

b) *f szigorúan monoton fogyó $\iff$ $f'(x) \leq 0 \ (x \in \mathcal{D}_f)$, és bármely $I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt intervallumnak van olyan $t \in I$ pontja, amelyre $f'(t) < 0$.*

Bizonyítás. Ha f szigorúan monoton növő, akkor egyúttal monoton növő is, ezért a 7.5.5. Tétel szerint

$$f'(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy egy $I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt intervallumra $f'(x) = 0 \quad (x \in I)$. Ekkor a

$$\varphi(x) := f(x) \qquad (x \in I)$$

függvényre alkalmazható a 7.5.6. Tétel, miszerint a φ függvény konstansfüggvény. Így bármilyen $x, t \in I$, $x \neq t$ helyeken $\varphi(x) = f(x) = \varphi(t) = f(t)$, ami ellentmond az f szigorú monotonitásának. Ezzel beláttuk a)-ban az $\Longrightarrow$ következtetést.

A fordított irányú következtetéshez szintén indirekt módon tegyük fel, hogy az f nem szigorúan monoton növő. Mivel most a feltétel szerint $f' \geq 0$, ezért (ld. 7.5.5. Tétel) az f monoton növő. Mindebből az következik, hogy valamilyen $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ esetén $f(a) = f(b)$, és bármely $a < t < b$ helyen $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ miatt

$$f(a) = f(t) = f(b).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\varphi(x) := f(x) \qquad (x \in (a, b))$$

függvény konstansfüggvény. Ezért (ld. 7.5.6. Tétel)

$$\varphi'(x) = f'(x) = 0 \qquad (x \in (a, b)),$$

ami ellentmond annak, hogy bármely $I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt intervallumnak egy $t \in I$ pontjában $f'(t) > 0$.

A b) állítás hasonlóan „intézhető" el. ■

A fenti 7.5.5., 7.5.6., 7.5.7. Tételek némi kiegészítéssel igazak maradnak akkor is, ha a szóban forgó f függvény értelmezési tartománya zárt (vagy félig zárt) intervallum, azaz valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ mellett $\mathcal{D}_f = [a, b]$ (vagy $\mathcal{D}_f = [a, b)$, vagy $\mathcal{D}_f = (a, b]$). Ekkor ui. pl. azt tegyük fel, hogy $f \in D\{x\}$, $f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a, b))$ és $f \in \mathcal{C}\{a\}$ (csak a $\mathcal{D}_f = [a, b)$ esetre megfogalmazva mindent, az egyéb eseteket értelemszerű módosítással kapjuk). Innen már arra következtethetünk, hogy az $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ függvény monton növő. Ti. (ld. 7.5.7. Tétel) $f(x) \leq f(t) \quad (x, t \in (a, b),\, x < t)$ és az f monoton növekedése egyszerűen következik az alábbi állításból:

7.5.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathcal{C}\{a\}$, és bármely $x, t \in (a, b)$, $x < t$ esetén $f(x) \leq f(t)$. Ekkor az f függvény monoton növő.*

Bizonyítás. Nyilván azt kell csak belátnunk, hogy tetszőleges $x \in (a, b)$ mellett igaz az $f(a) \leq f(x)$ becslés. Legyen ehhez $(x_n) : \mathbf{N} \to (a, x)$ olyan sorozat, amely konvergens és $\lim(x_n) = a$. Ekkor (ld. 5.5.2. Tétel)

$$\lim (f(x_n)) = f(a).$$

Mivel $a < x_n < x \ (n \in \mathbf{N})$, ezért $f(x_n) \leq f(x) \ (n \in \mathbf{N})$. Következésképpen

$$f(a) = \lim (f(x_n)) \leq f(x).$$

■

Az eddig mondottak alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételt arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen. Az egyszerű megfogalmazás kedvéért vezessük be ehhez a *jelváltás* fogalmát az alábbiak szerint. Azt mondjuk, hogy az

$f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban *jelet vált,* ha $f(a) = 0$, továbbá egy alkalmas $r > 0$ számmal $(a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$1^o \;\; f(x) \le 0 \le f(t) \qquad (a - r < x < a < t < a + r),$$

vagy

$$2^o \;\; f(x) \ge 0 \ge f(t) \qquad (a - r < x < a < t < a + r).$$

Az 1^o esetben azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a-ban $(-, +)$-jelváltása van, a 2^o esetben pedig azt, hogy az a-ban $(+, -)$-jelváltása van az f-nek.

A most bevezetett jelváltás fogalmával a szélsőértékekkel kapcsolatos ún. *elsőrendű elégséges feltétel* a következőképpen szól.

7.5.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és egy* $r > 0$ *szám mellett* $f \in D\{x\}$ $\;(x \in (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f)$. *Ekkor:*

a) *ha az* f' *deriváltfüggvénynek az* a*-ban* $(+, -)$*-jelváltása van, akkor az* f*-nek az* a*-ban lokális maximuma van*;

b) *ha az* f' *deriváltfüggvénynek az* a*-ban* $(-, +)$*-jelváltása van, akkor az* f*-nek az* a*-ban lokális minimuma van.*

Bizonyítás. Legyen pl. az f'-nek az a-ban $(+, -)$-jelváltása (a b) eset analóg módon vizsgálható). Ekkor egy alkalmas $0 < \rho \le r$ számmal

$$f'(x) \ge 0 \ge f'(t) \qquad (a - \rho < x < a < t < a + \rho).$$

Ha

$$\varphi(z) := f(z) \qquad (a - \rho < z \le a),$$

akkor a φ függvény folytonos, $\varphi \in D\{z\}$, és $\varphi'(z) = f'(z) \ge 0 \quad (a - \rho < z < a)$. Ezért (ld. 7.5.5. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma)

$$f(z) = \varphi(z) \le \varphi(a) = f(a) \qquad (a - \rho < z \le a).$$

Hasonló meggondolással kapjuk, hogy

$$f(a) \ge f(t) \qquad (a \le t < a + \rho).$$

Tehát $f(x) \le f(a) \quad (x \in (a - \rho, a + \rho))$, más szóval az f-nek az a helyen lokális maximuma van. ■

A lokális szélsőértékekkel kapcsolatos elsőrendű szükséges feltételt (ld. 7.5.1. Tétel) felhasználva jutunk a deriváltfüggvények egy karakterisztikus tulajdonságához. Nevezetesen igaz a

7.5.10. Tétel. *Legyen az* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvény differenciálható,* $\mathcal{D}_f$ *nyílt intervallum. Ekkor az* f' *deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Elöljáróban emlékeztetünk a Darboux-tulajdonság fogalmára (ld. 5.5.): azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ és bármely, $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső y esetén van olyan $v \in [a, b]$, hogy $f'(v) = y$. Nyilván feltehető, hogy $f'(a) \neq f'(b)$ és $f'(a) < y < f'(b)$. Tekintsük a

$$\varphi(x) := f(x) - yx \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in D$, így (ld. 7.1.3. Tétel) a φ folytonos is, ezért a Weierstrass-tétel (ld. 5.5.10. Tétel) szerint létezik olyan $v \in [a, b]$, amellyel

$$\varphi(v) = \min\{\varphi(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Mivel $\varphi'(x) = f'(x) - y \quad (x \in \mathcal{D}_f)$, ezért

$$\varphi'(a) = f'(a) - y < 0.$$

Tehát

$$\varphi'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,$$

így egy alkalmas $r > 0$ számmal

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0 \qquad (a < x < a + r < b).$$

Az itt szereplő $x \in (a, a + r)$ helyeken $x - a > 0$, következésképpen $\varphi(x) - \varphi(a) < 0$, azaz

$$\varphi(x) < \varphi(a) \qquad (a < x < a + r).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) = f'(b) - y > 0$$

miatt valamilyen $\rho > 0$ mellett $\varphi(x) - \varphi(b) < 0$, azaz

$$\varphi(x) < \varphi(b) \qquad (a < b - \rho < x < b).$$

Mindezeket egybevetve azt mondhatjuk, hogy $a < v < b$. Ezért egy alkalmas $\sigma > 0$ számmal $(v - \sigma, v + \sigma) \subset (a, b)$ és (a v jelentését figyelembe véve)

$$\varphi(v) \leq \varphi(x) \qquad (x \in (v - \sigma, v + \sigma)).$$

Más szóval a φ függvénynek a v-ben lokális minimuma van. Tehát a 7.5.1. Tétel értelmében

$$\varphi'(v) = f'(v) - y = 0,$$

azaz $y = f'(v)$. ■

A továbbiakban egyváltozós valós függvények „alaki viszonyait" fogjuk vizsgálni. Tekintsünk ehhez egy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, és tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány intervallum. (A későbbiekben intervallumon „igazi" intervallumot fogunk érteni, tehát olyat, amelyik nem egyetlen pontot tartalmaz csupán.) Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény *konvex,* ha tetszőleges $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Speciálisan (a $\lambda := 1/2$ választással)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in \mathcal{D}_f).$$

Az f függvényt *konkávnak* fogjuk nevezni, ha minden $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ mellett

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Az előbbiekhez hasonlóan $\lambda := 1/2$ esetén

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in \mathcal{D}_f).$$

A következő tétel alapvető fontosságú a későbbiek szempontjából.

7.5.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor:*

a) *az f konvex volta azzal ekvivalens, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén a $\Delta_a f$ különbségihányados-függvény monoton növekedő;*

b) *az f konkáv volta azzal ekvivalens, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén a $\Delta_a f$ különbségihányados-függvény monoton fogyó.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az f konvex. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $x, t \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $x < t$, akkor három eset lehetséges:

1^o $a < x < t$, ekkor a

$$\lambda := \frac{t-x}{t-a} \in (0, 1)$$

számmal $x = \lambda a + (1-\lambda)t$, következésképpen az f feltételezett konvexitása miatt

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(t) - f(a)}{\lambda a + (1-\lambda)t - a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \Delta_a f(t),$$

így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$;

2^o $x < t < a$, ekkor a

$$\lambda := \frac{a-t}{a-x} \in (0,1)$$

számmal $t = \lambda x + (1-\lambda)a$, ezért az f konvexitása alapján most $t - a < 0$ miatt

$$\Delta_a f(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(a) - f(a)}{\lambda x + (1-\lambda)a - a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \Delta_a f(x),$$

így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$;

3^o $x < a < t$, amikor is vegyük észre, hogy

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \Delta_x f(a).$$

Innen az 1^o esetet figyelembe véve (az $x \longleftrightarrow a$ szerepcserével)

$$\Delta_x f(a) \leq \Delta_x f(t) = \Delta_t f(x),$$

amiből meg 2^o szerint (a $t \longleftrightarrow a$ szerepcserével)

$$\Delta_t f(x) \leq \Delta_t f(a) = \Delta_a f(t)$$

következik. Mindent egybevetve tehát ismét csak azt kapjuk, hogy $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$.

Ezzel beláttuk azt, hogy az f konvexitásából az a) állításban jelzett monotonitás következik. Most mutassuk meg ezt „fordítva", amihez tegyük fel, hogy minden $a \in \mathcal{D}_f$ mellett a $\Delta_a f$ függvény monoton növekedő. Legyen $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u < v$ és $0 \leq \lambda \leq 1$. Mivel az

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$

egyenlőtlenség $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$ esetén triviális, ezért feltehető, hogy $0 < \lambda < 1$. A $c := \lambda u + (1-\lambda)v$ jelöléssel tehát $u < c < v$, így a $\Delta_c f$ függvény monoton növekedése alapján

$$\Delta_c f(u) = \frac{f(u)-f(c)}{u-c} = \frac{f(u)-f(c)}{(1-\lambda)(u-v)} \leq \Delta_c f(v) = \frac{f(v)-f(c)}{v-c} = \frac{f(v)-f(c)}{\lambda(v-u)}.$$

Innen

$$\lambda(f(c)-f(u)) \leq (1-\lambda)(f(v)-f(c)),$$

tehát

$$f(c) = f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az f függvény konvex, amivel az a) állítást bebizonyítottuk.

A b) állítás analóg módon igazolható. ∎

Differenciálható függvények konvexitásáról-konkávitásáról a következőt tudjuk mondani.

7.5.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy a differenciálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya nyílt intervallum. Ekkor:*

a) *az f konvex volta azzal ekvivalens, hogy az f' deriváltfüggvény monoton növekedő;*

b) *az f konkáv volta azzal ekvivalens, hogy az f' deriváltfüggvény monoton fogyó.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az f konvex. Ekkor a 7.5.11. Tétel szerint bármelyik $a \in \mathcal{D}_f$ esetén a $\Delta_a f$ függvény monoton növekedő. Ha tehát $x \in \mathcal{D}_f$, akkor (ld. 5.3.5. Tétel)

$$f'(x) = \lim_{x} \Delta_x f = \lim_{x+0} \Delta_x f = \inf\{\Delta_x f(t) : x < t \in \mathcal{D}_f\}.$$

Innen világos, hogy bármely $z \in \mathcal{D}_f$, $x < z$ mellett

$$f'(x) \leq \Delta_x f(z) = \Delta_z f(x) \leq \sup\{\Delta_z f(t) : z > t \in \mathcal{D}_f\},$$

ahol (ld. 5.3.5. Tétel)

$$\sup\{\Delta_z f(t) : z > t \in \mathcal{D}_f\} = \lim_{z-0} \Delta_z f = \lim_{z} \Delta_z f = f'(z).$$

Következésképpen $f'(x) \leq f'(z)$, más szóval az f' deriváltfüggvény monoton növekedő.

Induljunk ki most abból, hogy az f' deriváltfüggvény monoton növekedő, és lássuk be, hogy az f konvex. Legyen ehhez $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$, ekkor a 7.5.3. Tétel miatt egy alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Tekintsük a

$$\varphi(x) := f(a) + f'(\xi)(x - a) - f(x) \qquad (x \in (a, b))$$

függvényt. Ha $\lambda \in [0, 1]$, akkor a $c := \lambda a + (1-\lambda)b$ jelöléssel

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \varphi(c).$$

Az f konvexitásához tehát elég azt belátni, hogy $\varphi(x) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$. Világos, hogy $\varphi \in D\{x\}$ és

$$\varphi'(x) = f'(\xi) - f'(x) \qquad (x \in (a,b)),$$

ezért az f' monoton növekedése miatt

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad (a < x < \xi) \ , \ \varphi'(x) \leq 0 \quad (\xi < x < b).$$

Ezért (ld. 7.5.5. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) a $\varphi_{|_{[a,\xi]}}$ függvény monoton növekedő, a $\varphi_{|_{[\xi,b]}}$ pedig monoton fogyó. Innen a nyilvánvaló $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ egyenlőségek alapján már nyilván következik, hogy $\varphi(x) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$.

Ezzel a tétel a) részét beláttuk, a b) állítás hasonlóan bizonyítható be. ■

Emlékeztetünk a differenciálható függvényekkel kapcsolatban bevezetett érintő fogalmára (ld. 7.2. vii) megjegyzés). Nevezetesen, legyen valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény („egyenes") az f függvény a-beli *érintője.*

7.5.13. Tétel. *Legyen a differenciálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya nyílt intervallum. Ekkor:*

a) *az f konvexitása azzal ekvivalens, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén*

$$f(x) \geq e_a(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f);$$

b) *az f konkávitása azzal ekvivalens, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén*

$$f(x) \leq e_a(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Bizonyítás. Ha az f konvex, akkor a 7.5.12. Tétel értelmében az f' deriváltfüggvény monoton növekedő. Legyen $a \in \mathcal{D}_f$ és

$$\varphi(x) := f(x) - e_a(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor $\varphi \in D$ és $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \ \ (x \in \mathcal{D}_f)$. Világos, hogy $\varphi'(a) = 0$ és az f' monoton növekedése miatt

$$\varphi'(x) \leq 0 \leq \varphi'(t) \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f,\ x \leq a \leq t).$$

A 7.5.5. Tétel szerint (ld. még 7.5.8. Lemma) tehát a φ függvény a $(-\infty, a] \cap \mathcal{D}_f$ intervallumon monoton fogyó, az $[a, +\infty) \cap \mathcal{D}_f$ intervallumon pedig monoton növő. Mivel $\varphi(a) = 0$, ezért $\varphi(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f)$. Más szóval $f(x) \geq e_a(x) \ \ (x \in \mathcal{D}_f)$.

Ha az utóbbi (minden $\mathcal{D}_f \ni a$-ra feltételezett) egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor könnyen adódik az f' deriváltfüggvény monoton növekedése (és így a 7.5.12. Tétel alapján az f konvexitása). Legyen ui. $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a < b$. Ekkor

$$f(b) \geq e_a(b) = f(a) + f'(a)(b - a)$$

és

$$f(a) \geq e_b(a) = f(b) + f'(b)(a - b).$$

A két utóbbi egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy

$$f(b) + f(a) \geq f(a) + f(b) + (f'(a) - f'(b))(b - a).$$

Innen egyszerűsítés után $0 \geq f'(a) - f'(b)$, azaz $f'(a) \leq f'(b)$ következik.

A tétel b) része ugyanígy igazolható. ■

A 7.5.12. Tétel, ill. a 7.5.13. Tétel könnyen kiterjeszthető olyan függvényekre is, amelyeknek az értelmezési tartománya ugyan intervallum, de nem feltétlenül nyílt intervallum. Tegyük fel pl., hogy $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ és az $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ függvényre az alábbiak teljesülnek: az (a, b) nyílt intervallumra leszűkített $f_{|(a,b)}$ függvény konvex és $f \in \mathcal{C}\{a\}$. Ekkor maga az f függvény is konvex. Ui. a 7.5.11. Tétel szerint ehhez azt kell megmutatni, hogy bármely $u \in [a, b)$ esetén a $\Delta_u f$ függvény monoton növő. Az $f_{|(a,b)}$ konvexitása miatt ez teljesül akkor, ha $u \in (a, b)$. Ezért elég azt meggondolni, hogy a $\Delta_a f$ függvény is monoton növő, azaz

$$\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t) \qquad (x, t \in (a, b),\ x < t).$$

Legyen itt $(a_n) : \mathbf{N} \to (a, x)$ olyan sorozat, amely konvergens és $\lim(a_n) = a$. Ekkor az $f \in \mathcal{C}\{a\}$ feltétel és az 5.5.2. Tétel alapján $f(a) = \lim\left(f(a_n)\right)$. Így

$$\Delta_{a_n} f(x) \leq \Delta_{a_n} f(t) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_{a_n} f(x) \leq \lim_{n \to \infty} \Delta_{a_n} f(t) = \Delta_a f(t).$$

Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek az előbbiekben vizsgált „globális alaki" jellemzői (konvexitás-konkávitás) mellett egy fontos „lokális" tulajdonsága lehet az inflexió. Ez utóbbi értelmezéséhez tegyük fel, hogy valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen $f \in D\{a\}$. Ha az f függvény és az a-beli e_a érintőjének a különbsége, azaz az $f - e_a$ függvény jelet vált az a-ban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *inflexiója* van (vagy másképp fogalmazva az a pont *inflexiós helye* az f-nek). Erre vonatkozóan fogalmaz meg elégséges feltételt a következő állítás.

7.5.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont valamilyen környezetében differenciálható, és az f' deriváltfüggvénynek az a-ban lokális szélsőértéke van. Ekkor az f-nek az a-ban inflexiója van.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\varphi(x) := f(x) - e_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényt. Ha $r > 0$ olyan, hogy $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$ és minden $x \in (a-r, a+r)$ esetén $f \in D\{x\}$, akkor $\varphi \in D\{x\}$ $(x \in (a-r, a+r))$ is igaz és

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \qquad (x \in (a-r, a+r)).$$

Ha pl. az a lokális maximumhelye az f'-nek (amennyiben lokális minimumhelye, úgy az alábbi gondolatmenet értelemszerűen módosítható), akkor egy alkalmas $0 < \rho \leq r$ mellett

$$f'(x) \leq f'(a) \qquad (x \in (a-\rho, a+\rho)).$$

Következésképpen

$$f'(x) - f'(a) \leq 0 \qquad (x \in (a-\rho, a+\rho)),$$

ami a 7.5.5. Tétel alapján azt jelenti, hogy a $\varphi_{|_{(a-\rho,a+\rho)}}$ leszűkített függvény monoton fogyó. Mivel $\varphi(a) = 0$, ezért

$$\varphi(x) \geq 0 \geq \varphi(t) \qquad (a-\rho < x \leq a \leq t < a+\rho).$$

Tehát φ az a-ban jelet vált, így f-nek az a-ban inflexiója van. ∎

Folytassuk a lokális tulajdonságok vizsgálatát a lokális monotonitással. Legyen ehhez valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy egy alkalmas $r > 0$ mellett az alábbiak teljesülnek: $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$ és

$$f(x) \leq f(a) \leq f(t) \qquad (a-r < x \leq a \leq t < a+r).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény az a-ban *lokálisan növő.* Értelemszerűen az f függvény az a-ban *lokálisan fogyó,* ha (az előbbi jelölésekkel)

$$f(x) \geq f(a) \geq f(t) \qquad (a-r < x \leq a \leq t < a+r).$$

Összefoglalva azt mondjuk, hogy az f függvény az a-ban *lokálisan monoton,* ha az a-ban lokálisan növő, vagy lokálisan fogyó. Világos, hogy ha az f függvény egy I nyílt intervallumon („globális értelemben") monoton, akkor az I minden pontjában lokálisan is monoton. Könnyű példát adni ugyanakkor arra, hogy egy függvény egy pontban lokálisan monoton, de az illető pont bármely környezetére leszűkítve a függvényt ez a leszűkítés nem monoton. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 1 & (0 < x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \\ -1 & (0 > x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}). \end{cases}$$

Ekkor az f függvény a 0-ban (triviálisan) lokálisan növő, de az is nyilvánvaló, hogy a szóban forgó függvény nem monoton.

Differenciálható függvények lokális monotonitását illetően az alábbiakat mondhatjuk.

7.5.15. Tétel. *Legyen* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$, *és* $f \in D\{a\}$. *Ekkor:*

a) $f'(a) > 0$ *esetén az* f *függvény az* a*-ban lokálisan növő;*

b) *ha az* f *függvény az* a*-ban lokálisan növő, akkor* $f'(a) \geq 0$;

c) $f'(a) < 0$ *esetén az* f *függvény az* a*-ban lokálisan fogyó;*

d) *ha az* f *függvény az* a*-ban lokálisan fogyó, akkor* $f'(a) \leq 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Ekkor van olyan $r > 0$, amellyel $(a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \qquad (a \neq x \in (a - r, a + r)).$$

Ha itt $x > a$, akkor $x - a > 0$ miatt $f(x) - f(a) > 0$ is igaz, így $f(x) > f(a)$. Ha viszont $x < a$, akkor $x - a < 0$ és ezért $f(x) - f(a) < 0$, tehát $f(x) < f(a)$. Következésképpen az f függvény az a-ban lokálisan monoton növő.

Ezzel az a) állítást beláttuk. Ha most azt tesszük fel, hogy az f az a-ban lokálisan monoton növő, akkor egy alkalmas $r > 0$ esetén $(a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(x) \leq f(a) \leq f(t) \qquad (a - r < x \leq a \leq t < a + r).$$

Következésképpen

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \quad (a-r<x<a) \ , \quad \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq 0 \quad (a<t<a+r).$$

Más szóval

$$\Delta_a f(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \geq 0 \qquad (a \neq z \in (a-r, a+r)).$$

Ezért $f'(a) = \lim_{z\to a} \Delta_a f(z) \geq 0$.

A c), d) állítások hasonlóan láthatók be. ■

A konvexitás (konkávitás) 7.5.13. Tételbeli jellemzése apropóján vezessük be a lokális konvexitás (konkávitás) fogalmát. Legyen ehhez $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a-ban *lokálisan konvex,* ha van olyan $r > 0$, amellyel $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(x) \geq e_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \in (a-r, a+r)).$$

Ha az előbbiekben

$$f(x) \leq e_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \in (a-r, a+r))$$

teljesül, akkor az f függvény az a-ban *lokálisan konkáv.* A 7.5.13. Tétel alapján nyilvánvaló, hogy egy I nyílt intervallumon értelmezett differenciálható („globálisan") konvex (konkáv) függvény az I minden pontjában lokálisan konvex (konkáv). Az alábbi példa azt mutatja, hogy (a lokális monotonitás és a globális monotonitás viszonyához hasonlóan) a valamilyen pontbeli lokális konvexitásból (konkávitásból) nem következik az illető pont egy alkalmas környezetén a függvény konvexitása (konkávitása). Tekintsük ui. az

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \\ x^2 \cdot \sin^2(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

függvényt. Ekkor az ún. „műveleti szabályok" (ld. 7.3.1., 7.3.2.. 7.3.5. Tételek) alapján $f \in D\{x\} \quad (0 \neq x \in \mathbf{R})$, és

$$f'(x) = 2x \cdot \sin^2(1/x) + x^2 \cdot 2\sin(1/x) \cdot \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = 2x \cdot \sin^2(1/x) - \sin(2/x).$$

Ugyanakkor könnyen láthatóan $f \in D\{0\}$ is igaz, és $f'(0) = 0$. Ugyanis $\lim_{x\to 0} x = 0$ és $0 \leq \sin^2(1/x) \leq 1 \quad (0 \neq x \in \mathbf{R})$ miatt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} (x \cdot \sin^2(1/x)) = 0.$$

Ezért az

$$f(x) - e_0(x) = f(x) - (f(0) + f'(0)\cdot x) = f(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőtlenség triviálisan teljesül, következésképpen az f függvény a 0-ban lokálisan konvex. Viszont a

$$\Delta_0 f(x) = x\cdot \sin^2(1/x) \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R})$$

differenciahányados-függvény tetszőleges $r > 0$ mellett nem monoton növő a $(-r, r)$ intervallumon. Valóban (ld. 6.7.), az

$$x_n := \frac{1}{n\pi} > z_n := \frac{2}{(4n+1)\pi} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

helyeken $\Delta_0 f(x_n) = 0$, $\Delta_0 f(z_n) = 1$. Világos, hogy $\lim(x_n) = \lim(z_n) = 0$, ezért alkalmas $N \in \mathbf{N}$ esetén $x_n, z_n \in (-r, r)$ $\;(N < n \in \mathbf{N})$.

7.5.16. Tétel. *Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényről tegyük fel, hogy valamilyen $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$, $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és $f \in D\{x\}$ $\;(x \in (a-r, a+r))$. Ekkor az alábbiak teljesülnek:*

a) *ha az f' deriváltfüggvény az a-ban lokálisan növő, akkor az f függvény az a-ban lokálisan konvex;*

b) *ha az f' deriváltfüggvény az a-ban lokálisan fogyó, akkor az f függvény az a-ban lokálisan konkáv.*

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyítását részletezzük, a b) állításé hasonlóan végezhető el. Tegyük fel tehát, hogy az f' deriváltfüggvény az a-ban lokálisan növő. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $0 < \rho \leq r$ esetén

$$f'(x) \leq f'(a) \leq f'(t) \qquad (a - \rho < x \leq a \leq t < a + \rho).$$

Ezért $f'(x) - f'(a) \leq 0$ $(a - \rho < x \leq a)$, és $f'(t) - f'(a) \geq 0$ $(a \leq t < a + \rho)$. Mindebből azt kapjuk, hogy a differenciálható

$$\varphi(x) := f(x) - e_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \qquad (x \in (a - \rho, a + \rho))$$

függvényre

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \leq 0 \qquad (a - \rho < x \leq a)$$

és

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(a) \geq 0 \qquad (a \leq t < a + \rho).$$

Innen (ld. 7.5.5. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) az következik, hogy a $\varphi_{|_{(a-\rho,a]}}$ leszűkített függvény monoton fogyó, a $\varphi_{|_{[a,a+\rho)}}$ leszűkített függvény pedig monoton növő. Mivel $\varphi(a)=0$, ezért $\varphi(x)\geq 0$, azaz $f(x)\geq e_a(x) \quad (x\in(a-\rho,a+\rho))$. Tehát az f függvény az a-ban lokálisan konvex. ■

A differenciálható függvényekkel kapcsolatos vizsgálatok egyik hatékony eszköze az alábbi, a témakör „populárisan" is egyik legismertebb állítása.

7.5.17. Tétel (L'Hospital). *Tegyük fel, hogy $a,b\in\overline{\mathbf{R}}$, $a<b$, és a differenciálható $f,g:(a,b)\to\mathbf{R}$ függvényekre a következők teljesülnek:*

1^o $g'(x)\neq 0 \ \ (a<x<b)$;

2^o $\lim_a f=\lim_a g=0$, vagy $\lim_a f=\pm\infty$ és $\lim_a g=\pm\infty$;

3^o *létezik az* $A:=\lim_a(f'/g')$ *határérték.*

Ekkor létezik a $\lim_a(f/g)$ *határérték is, és* $\lim_a(f/g)=A$. *Mindez igaz marad akkor is, ha a* 2^o, 3^o *feltételekben az* a*-t* b*-re cseréljük: ekkor létezik a* $\lim_b(f/g)$ *határérték és* $\lim_b(f/g)=\lim_b(f'/g')$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk első esetként azt, amikor $a\in\mathbf{R}$, és $\lim_a f=\lim_a g=0$. Ha $A\in\mathbf{R}$, akkor bármely $\varepsilon>0$ számhoz megadható a $d\in(a,b)$ úgy, hogy

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon \qquad (a<x<d).$$

Legyen $a<x<d$, és $F,G:[a,x]\to\mathbf{R}$ a következő függvény:

$$F(t):=\begin{cases}0 & (t=a)\\ f(t) & (a<t\leq x)\end{cases}\quad,\quad G(t):=\begin{cases}0 & (t=a)\\ g(t) & (a<t\leq x).\end{cases}$$

Ekkor

$$\lim_a F=\lim_a f=0=F(a)\ \ ,\ \ \lim_a G=\lim_a g=0=G(a)$$

miatt $F,G\in\mathcal{C}\{a\}$, ill. hasonlóan $F,G\in\mathcal{C}\{x\}$. Továbbá bármely $t\in(a,x)$ esetén $F,G\in D\{t\}$, és $F'(t)=f'(t)$, ill. $G'(t)=g'(t)\neq 0$. A Cauchy-féle középérték-tétel (ld. 7.5.4. Tétel) szerint tehát egy alkalmas $\xi_x\in(a,x)$ helyen

$$(*)\qquad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi_x)}{G'(\xi_x)}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Következésképpen a nyilvánvaló $a < \xi_x < d$ egyenlőtlenség miatt

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| < \varepsilon \qquad (a < x < d).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy létezik a $\lim_a(f/g) = A$ határérték.

Ha az előbbiekben $A \notin \mathbf{R}$, pl. $A = +\infty$ (az $A = -\infty$ eset hasonlóan vizsgálható), akkor tetszőleges $0 < p \in \mathbf{R}$ esetén a fenti $a < d < b$ megválasztható úgy, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > p \qquad (a < x < d).$$

Ezért $(*)$ szerint egyúttal

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} > p \qquad (a < x < d)$$

is teljesül. Tehát létezik a $\lim_a(f/g) = A = +\infty$ határérték.

Most azt tegyük fel, hogy $a \in \mathbf{R}$ mellett $\lim_a f = \lim_a g = +\infty$. (Az egyéb esetek – pl. $\lim_a f = +\infty$, $\lim_a g = -\infty$, stb. – értelemszerű módosítással kezelhetők). Ekkor létezik olyan $a < d_0 < b$, amellyel

$$f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \qquad (a < x < d_0).$$

Így bármely $a < d_1 < d_0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(d_1)}{g(x) - g(d_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - f(d_1)/f(x)}{1 - g(d_1)/g(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)} \cdot T(x) \qquad (a < x < d_1).$$

Mivel $\lim_a f = \lim_a g = +\infty$, ezért (ld. 5.3.3. Tétel)

$$\lim_{x\to a}(f(d_1)/f(x)) = \lim_{x\to a}(g(d_1)/g(x)) = 0,$$

amiből (ld. 5.3.3. Tétel)

$$\lim_{x\to a}\frac{1 - f(d_1)/f(x)}{1 - g(d_1)/g(x)} = \lim_{x\to a} T(x) = 1$$

következik. Innen az is adódik (ld. 5.3.3. Tétel), hogy egyúttal $\lim_{x\to a}(1/T(x)) = 1$ is igaz. Ezért egy alkalmas $d \in (a, d_1)$ mellett bármely $a < x < d$ helyen $T(x) \neq 0$. Azt mondhatjuk most már, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{T(x)} \cdot \frac{f(x) - f(d_1)}{g(x) - g(d_1)} \qquad (a < x < d),$$

ahol a 7.5.4. Tétel szerint valamilyen $\xi_x \in (x, d_1)$ választással

$$\frac{f(x) - f(d_1)}{g(x) - g(d_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Ha $A \in \mathbf{R}$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz a fenti d_1 megadható úgy is, hogy

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - A\right| < \varepsilon \qquad (a < t < d_1).$$

Továbbá létezik az $a < d < d_1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő olyan d, amellyel

$$\frac{1}{|T(x)|} < 2 \ , \ \left|\frac{1}{T(x)} - 1\right| < \varepsilon \qquad (a < x < d).$$

Ezért a fentiek szerint

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{1}{T(x)} \cdot \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| = \left|\frac{1}{T(x)} \cdot \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \frac{1}{T(x)} \cdot A + \frac{1}{T(x)} \cdot A - A\right| \leq$$

$$\left|\frac{1}{T(x)}\right| \cdot \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| + |A| \cdot \left|\frac{1}{T(x)} - 1\right| < (2 + |A|) \cdot \varepsilon \qquad (a < x < d).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy létezik a $\lim_a (f/g) = A$ határérték.

Ha az előbbiekben (pl.) $A = +\infty$, akkor tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ számhoz válasszuk a fenti d_1-et úgy, hogy

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} > p \qquad (a < t < d_1),$$

az $a < d < d_1$ számot pedig úgy, hogy $1/T(x) > 1/2$ $(a < x < d)$. Ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{T(x)} \cdot \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} > \frac{p}{2} \qquad (a < x < d).$$

Tehát létezik a $\lim_a (f/g) = A = +\infty$ határérték.

A $\lim_b (f/g)$ határértékre vonatkozó állítás bizonyítása (véges b esetén) analóg módon végezhető el.

Vizsgáljuk a továbbiakban a még „hiányzó" $a = -\infty$, $b = +\infty$ eseteket (a $-\infty = a$-ra részletezve a bizonyítást). Legyen ekkor

$$-\infty < c < \min\{0, b\},$$

és

$$F(x) := f(1/x) \ , \ G(x) := g(1/x) \qquad (x \in (1/c, 0)).$$

Ha $(x_n) : \mathbf{N} \to (1/c, 0)$ és $\lim(x_n) = 0$, akkor könnyen láthatóan $\lim(1/x_n) = -\infty$. Ezért (ld. 5.3.2. Tétel) léteznek a

$$\lim\,(F(x_n)) = \lim\,(f(1/x_n)) = \lim_{-\infty} f,$$

$$\lim\,(G(x_n)) = \lim\,(g(1/x_n)) = \lim_{-\infty} g$$

határértékek. Innen az 5.3.2. Tétel alapján azt kapjuk, hogy a

$$\lim_0 F = \lim_{-\infty} f \quad , \quad \lim_0 G = \lim_{-\infty} g$$

határértékek is léteznek. Továbbá a 7.3.2. Tétel szerint $F, G \in D$, és

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot f'(1/x) \quad , \quad G'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot g'(1/x) \qquad (1/c < x < 0).$$

Innen világos, hogy $G'(x) \neq 0 \quad (1/c < x < 0)$. A fenti (x_n) sorozattal (ld. 5.3.2. Tétel)

$$\lim\left(\frac{F'(x_n)}{G'(x_n)}\right) = \lim\left(\frac{f'(1/x_n)}{g'(1/x_n)}\right) = \lim_{-\infty}(f'/g').$$

Tehát ismét csak az 5.3.2. Tétel alapján létezik a

$$\lim_0(F'/G') = \lim_{-\infty}(f'/g')$$

határérték. Következésképpen a bizonyítás első része (véges b eset) szerint (a $b := 0$ választással) létezik a

$$\lim_0(F/G) = \lim_0(F'/G') = \lim_{-\infty}(f'/g')$$

határtérték. Viszont a fentiekben már alkalmazott gondolatmenettel azt kapjuk, hogy létezik a

$$\lim_{-\infty}(f/g) = \lim_0(F/G)$$

határérték is, és

$$\lim_{-\infty}(f/g) = \lim_{-\infty}(f'/g').$$

■

Az előző tételben formálisan intervallumon értelmezett függvények hányadosának az intervallum végpontjaiban vett határértékéről van szó. Könnyűszerrel átfogalmazható azonban az említett állítás úgy, hogy az a hely, ahol a szóban forgó határértékeket vizsgáljuk, ne feltétlenül egy intervallum végpontja legyen. Világos ui. (a jobb és bal oldali határérték, ill. a határérték viszonyára gondolva (ld. 5.3.4. Tétel)), hogy a 7.5.17. Tétel ekvivalens a következővel:

7.5.18. Tétel (L'Hospital). *Tegyük fel, hogy* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < c < b$, *és a differenciálható* $f, g : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ *függvényekre a következők teljesülnek:*

1^o $g'(x) \neq 0$ $(c \neq x \in (a, b))$;

2^o $\lim_c f = \lim_c g = 0$, vagy $\lim_c f = \pm\infty$ és $\lim_c g = \pm\infty$;

3^o *létezik az* $A := \lim_c(f'/g')$ *határérték.*

Ekkor létezik a $\lim_c(f/g)$ *határérték is, és* $\lim_c(f/g) = A$.

A fenti „L'Hospital-szabállyal" kapcsolatban jegyezzük meg az alábbiakat. Tegyük fel, hogy valamilyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ esetén adottak az $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$ függvények, $g(x) \neq 0$ $(a < x < b)$, és léteznek a

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0 \ , \ \ \alpha := \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R}$$

határértékek. Ekkor létezik a

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

határérték is. Ellenkező esetben ui. lenne olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy tetszőleges $a < c < b$ mellett egy $x_c \in (a, c)$ helyen $|f(x_c)| > \varepsilon$. Ugyanakkor $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ miatt bármilyen $\sigma > 0$ számhoz van olyan $a < d < b$, hogy $0 < |g(x)| < \sigma$ $(a < x < d)$. Az α definíciója miatt létezik olyan $a < e < b$, amellyel

$$(*) \qquad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \qquad (a < x < e).$$

Válasszuk az előbbi σ-t úgy, hogy $\varepsilon/\sigma > 1 + |\alpha|$ teljesüljön. Ekkor a fenti d-ről nyilván feltehető, hogy $d < e$, ezért (a $c := d$ szereposztással)

$$\left|\frac{f(x_d)}{g(x_d)}\right| > \frac{\varepsilon}{\sigma} > 1 + |\alpha|.$$

Ez nyilván ellentmond $(*)$-nak.

Legyen $a \in \mathbf{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén) az

$$\ell(x) := \alpha x + \beta \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenes az f függvény *aszimptotája* a $+\infty$-ben, ha $\lim_{+\infty}(f - \ell) = 0$. Az utóbbi esetben tehát

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0,$$

amiből (ld. 5.3.3. Tétel)

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x).$$

Mivel az $x > \max\{0, a\}$ helyeken

$$\frac{f(x) - \ell(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x},$$

és $\lim_{+\infty}(f - \ell) = 0$ esetén $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ miatt (ld. 5.3.3. Tétel)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - \ell(x)}{x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x}\right) = 0.$$

Világos, hogy itt $\lim_{x\to+\infty}(\beta/x) = 0$, ezért (ld. 5.3.3. Tétel) létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha\right) = 0$$

határérték is, és így

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Könnyű meggondolni, hogy a most mondottak „fordítva" is elmondhatók, más szóval igaz a következő állítás: az $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája a $+\infty$-ben, ha léteznek az

$$\alpha := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbf{R} \ , \ \ \beta := \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) \in \mathbf{R}$$

(véges) határértékek. Ekkor az

$$\ell(x) := \alpha x + \beta \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája a $+\infty$-ben.

Analóg módon értelmezzük a $-\infty$-beli aszimptotát. Ha $f : (-\infty, a) \to \mathbf{R}$ (valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén), és az előbbi ℓ-re $\lim_{-\infty}(f - \ell) = 0$, akkor az ℓ egyenes az f függvény $-\infty$-beli *aszimptotája.* Mindez akkor és csak akkor teljesül, ha léteznek az

$$\alpha := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbf{R} \ , \ \ \beta := \lim_{x\to-\infty} (f(x) - \alpha x) \in \mathbf{R}$$

(véges) határérték. Ekkor az

$$\ell(x) := \alpha x + \beta \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája a $-\infty$-ben.

Ha az $f:(a,+\infty)\to\mathbf{R}$ (vagy $f:(-\infty,a)\to\mathbf{R}$) függvény differenciálható, és létezik a $\lim_{+\infty} f'$ (vagy $\lim_{-\infty} f'$) véges határérték, akkor a

$$g(x):=x \quad (x\in(a,+\infty)) \text{ (vagy } g(x):=x \quad (x\in(-\infty,a)))$$

szereposztással alkalmazható a 7.5.17. Tétel. Következésképpen a fentiekben szereplő α-ról azt mondhatjuk, hogy

$$\alpha=\lim_{+\infty}\frac{f}{g}=\lim_{+\infty} f' \ \Big(\text{vagy } \ \alpha=\lim_{-\infty}\frac{f}{g}=\lim_{-\infty} f'\Big).$$

7.5.2. Speciális függvények

Emlékeztetünk a (valós) sin, cos függvények definíciójára:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Tudjuk (ld. 7.3.5. Tétel), hogy $\sin,\cos\in D$, és $\sin'=\cos$, $\cos'=-\sin$. Továbbá (ld. 6.7.) a sin, cos függvények 2π-szerint periodikusak, ahol

$$\pi:=2\cdot\inf\{\xi>0:\cos\xi=0\}\in(0,4),$$

és

$$\cos(\pi/2)=\sin\pi=0,\ \sin(\pi/2)=1,$$

$$\cos x>0 \quad (-\pi/2<x<\pi/2)\ ,\ \sin x>0 \qquad (0<x<2).$$

Speciálisan $\sin x>0 \quad (0<x\le\pi/2)$, amiből $\sin x>0 \quad (\pi/2<x<\pi)$ is adódik. Ha ui. $\pi/2<x<\pi$, akkor $x-\pi/2\in(0,\pi/2)$, következésképpen (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$0<\sin(x-\pi/2)=\sin x\cdot\cos(\pi/2)-\cos x\cdot\sin(\pi/2)=-\cos x.$$

Ezért $\sin'(x)=\cos x<0$, így (ld. 7.5.7. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) a $\sin_{|[\pi/2,\pi]}$ leszűkített függvény szigorúan monoton fogyó. Mivel $\sin(\pi/2)=1$, $\sin(\pi)=0$, tehát valóban igaz, hogy $\sin x>0 \quad (\pi/2<x<\pi)$.

Innen - lévén a sin páratlan függvény: $\sin(-x)=-\sin x \quad (x\in\mathbf{R})$ - az is rögtön következik, hogy a $[0,2\pi)$ intervallumban pontosan két gyöke van a sin függvénynek, ezek a 0 és a π. Figyelembe véve a 2π-szerinti periodicitást azt mondhatjuk, hogy

$$\{x\in\mathbf{R}:\sin x=0\}=\{k\pi:k\in\mathbf{Z}\}.$$

Ugyanakkor (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$\sin(x - \pi/2) = \sin x \cdot \cos(\pi/2) - \cos x \cdot \sin(\pi/2) = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

amiből a $\cos$ függvény gyökhelyeit is megkapjuk:

$$\{x \in \mathbf{R} : \cos x = 0\} = \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{R}_{\sin} = \mathcal{R}_{\cos} = [-1, 1]$, sőt,

$$\mathcal{R}_{\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}} = \mathcal{R}_{\cos_{|[0,\pi]}} = [-1, 1].$$

Ti. (pl.) a $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ függvény folytonos, intervallumon értelmezett, így (ld. 5.5.7. Tétel) $\mathcal{R}_{\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}}$ is intervallum. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbf{R})$ Pitagoraszi-összefüggés (ld. 4.6. vi) megjegyzés) alapján $|\sin x| \leq 1 \quad (x \in \mathbf{R})$, tehát $\mathcal{R}_{\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}} \subset [-1, 1]$. Figyelembe véve, hogy $\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin(\pi/2) = 1$, már világos, hogy az előbbi $\subset$ szimbólum helyett egyenlőség írható. (A $\cos$-ra vonatkozó állítást analóg módon láthatjuk be.)

Tehát

$$\sin'(x) = \cos x > 0 \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2),$$

így (ld. 7.5.7. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) a $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ leszűkített függvény szigorúan monoton növő, tehát invertálható. Legyen az *arkuszszinuszfüggvény* (jelölésben $\arcsin$) az utóbbi leszűkítés inverze:

$$\arcsin := \sin^{-1}_{|[-\pi/2,\pi/2]}.$$

Ekkor $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, és

$$\arcsin(-1) = -\pi/2 \;, \;\; \arcsin(0) = 0 \;, \;\; \arcsin(1) = \pi/2.$$

Továbbá (ld. 5.5.13. Tétel) az $\arcsin$ függvény folytonos, és (ld. 7.3.3. Tétel) minden $x \in (-1, 1)$ helyen $\arcsin \in D\{x\}$, ahol

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Mivel itt $\arcsin(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, ezért $\cos(\arcsin(x)) > 0$. Következésképpen a Pitagoraszi-összefüggés (ld. 4.6. vi) megjegyzés) szerint

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2},$$

ezért

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Az előbbiekhez hasonlóan azt mondhatjuk, hogy

$$\cos'(x) = -\sin x < 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

más szóval (ld. 7.5.7. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) a $\cos_{|[0,\pi]}$ leszűkített függvény szigorúan monoton fogyó. Legyen az *arkuszkoszinuszfüggvény* (jelölésben arccos) ennek a leszűkítésnek az inverze:

$$\arccos := \cos^{-1}_{|[0,\pi]}\,.$$

Világos, hogy $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, és

$$\arccos(-1) = \pi \ \ , \ \ \arccos(0) = \pi/2 \ \ , \ \ \arccos(1) = 0.$$

Az 5.5.13. Tétel alapján az arccos függvény szintén folytonos, ill. a 7.3.3. Tétel szerint $\arccos \in D\{x\} \quad (x \in (-1,1))$, ahol

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Az előbbi x-ekre $\arccos(x) \in (0,\pi)$, ezért $\sin(\arccos(x)) > 0$. Következésképpen a Pitagoraszi-összefüggést (ld. 4.6. vi) megjegyzés) alkalmazva

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2},$$

és

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1)).$$

A tg *tangensfüggvényt* a következőképpen értelmezzük:

$$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos}.$$

A fentebb mondottak szerint

$$\mathcal{D}_{\mathrm{tg}} = \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\},$$

ill.

$$\mathrm{tg}\, x := \mathrm{tg}\,(x) > 0 \quad (0 < x < \pi/2) \ \ , \ \ \mathrm{tg}\, t < 0 \quad (-\pi/2 < t < 0).$$

Ezért

$$\lim_{\pi/2-0} \sin = \lim_{\pi/2} \sin = \sin(\pi/2) = 1 \ \ , \ \ \lim_{-\pi/2+0} \sin = \lim_{-\pi/2} \sin = \sin(-\pi/2) = -1,$$

$$\lim_{\pi/2-0} \cos = \lim_{\pi/2} \cos = \cos(\pi/2) = 0 \ \ , \ \ \lim_{-\pi/2+0} \cos = \lim_{-\pi/2} \cos = \cos(-\pi/2) = 0$$

miatt léteznek a

$$\lim_{\pi/2-0} \mathrm{tg} = +\infty \quad , \quad \lim_{-\pi/2+0} \mathrm{tg} = -\infty$$

(bal-, ill. jobb oldali) határértékek. Mivel (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\left((x+\pi)-\pi\right)}{\cos\left((x+\pi)-\pi\right)} =$$

$$\frac{\sin(x+\pi)\cdot\cos\pi - \cos(x+\pi)\cdot\sin\pi}{\cos(x+\pi)\cdot\cos\pi + \sin(x+\pi)\cdot\sin\pi} = \frac{-\sin(x+\pi)}{-\cos(x+\pi)} = \mathrm{tg}\,(x+\pi),$$

ezért a tangensfüggvény π-szerint periodikus. Jegyezzük meg, hogy - lévén a $\sin$ páratlan, a $\cos$ páros függvény - a tg páratlan függvény, a $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ egyenlőségek miatt pedig $\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$. Továbbá $\sin, \cos \in D$, így (ld. 7.3.1. Tétel) $\mathrm{tg} \in D$ és (ld. 4.6. vi) megjegyzés)

$$\mathrm{tg}' = \frac{\sin'\cdot\cos - \cos'\cdot\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

A 7.5.7. Tétel (és a fentiek) alapján azt mondhatjuk, hogy a $\mathrm{tg}_{|(-\pi/2,\pi/2)}$ leszűkítés szigorúan monoton növő, és $\mathcal{R}_{\mathrm{tg}_{|(-\pi/2,\pi/2)}} = \mathbf{R}$. Legyen az előbbi leszűkítés inverze, azaz az

$$\mathrm{arctg} := \mathrm{tg}^{-1}_{|(-\pi/2,\pi/2)}$$

függvény az *arkusztangensfüggvény.* Tehát

$$\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \quad , \quad \mathrm{arctg}(0) = 0 \quad , \quad \mathrm{arctg}(1) = \pi/4,$$

ill. az arkusztangensfüggvény is szigorúan monoton növő,

$$\lim_{+\infty} \mathrm{arctg} = \pi/2 \quad , \quad \lim_{-\infty} \mathrm{arctg} = -\pi/2.$$

A korábban már idézett tételek miatt $\mathrm{arctg} \in D$, és

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}(x))} = \cos^2\left(\mathrm{arctg}(x)\right).$$

Ha $-\pi/2 < z < \pi/2$, akkor (ld. 4.6. vi) megjegyzés)

$$\mathrm{tg}^2 z = \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} - 1,$$

vagy mindezt másképp mondva

$$\cos^2 z = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 z}.$$

Azt kaptuk ezzel, hogy

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az előbbiek mintájára definiáljuk a ctg *kotangensfüggvényt* az alábbiak szerint:

$$\operatorname{ctg} := \frac{\cos}{\sin}.$$

Ekkor (ld. a fentieket)

$$\mathcal{D}_{\operatorname{ctg}} = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\},$$

ill.

$$\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) > 0 \quad (0 < x < \pi/2) \ , \ \operatorname{ctg} t < 0 \quad (\pi/2 < t < \pi).$$

Ezért

$$\lim_{0+0} \sin = \lim_{0} \sin = 0 \ , \ \lim_{\pi-0} \sin = \lim_{\pi} \sin = 0,$$

$$\lim_{0+0} \cos = \lim_{0} \cos = 1 \ , \ \lim_{\pi-0} \cos = \lim_{\pi} \cos = -1$$

miatt léteznek a

$$\lim_{0+0} \operatorname{ctg} = +\infty \ , \ \lim_{\pi-0} \operatorname{ctg} = -\infty$$

(jobb-, ill. bal oldali) határértékek. Mivel (ld. 4.6. v) megjegyzés)

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos((x+\pi)-\pi)}{\sin((x+\pi)-\pi)} =$$

$$\frac{\cos(x+\pi)\cdot\cos\pi + \sin(x+\pi)\cdot\sin\pi}{\sin(x+\pi)\cdot\cos\pi - \cos(x+\pi)\cdot\sin\pi} = \frac{-\cos(x+\pi)}{-\sin(x+\pi)} = \operatorname{ctg}(x+\pi),$$

ezért a kotangensfüggvény is π-szerint periodikus, páratlan függvény, és $\operatorname{ctg}(\pi/4) = 1$. Világos, hogy

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \qquad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}} \cap \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}),$$

ill.

$$\operatorname{tg}(x+\pi/2) = \frac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2)} = \frac{\sin x\cdot\cos(\pi/2) + \cos x\cdot\sin(\pi/2)}{\cos x\cdot\cos(\pi/2) - \sin x\cdot\sin(\pi/2)} =$$

$$-\frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{ctg} x \qquad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}},\ x+\pi/2 \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}).$$

Továbbá $\sin, \cos \in D$, amiből (ld. 7.3.1. Tétel) $\operatorname{ctg} \in D$ és (ld. 4.6. vi) megjegyzés)

$$\operatorname{ctg}' = \frac{\cos'\cdot\sin - \sin'\cdot\cos}{\sin^2} = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2}$$

következik. A 7.5.7. Tétel (és a fentiek) alapján azt mondhatjuk, hogy a $\mathrm{ctg}_{|(0,\pi)}$ leszűkítés szigorúan monoton fogyó, és $\mathcal{R}_{\mathrm{ctg}_{|(0,\pi)}} = \mathbf{R}$. Legyen az előbbi leszűkítés

$$\mathrm{arcctg} := \mathrm{ctg}^{-1}_{|(0,\pi)}$$

inverze az *arkuszkotangensfüggvény.* Tehát

$$\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to (0,\pi) \;\;,\;\; \mathrm{arcctg}(0) = \pi/2 \;\;,\;\; \mathrm{arcctg}(1) = \pi/4,$$

ill. az arkuszkotangensfüggvény is szigorúan monoton fogyó,

$$\lim_{+\infty} \mathrm{arcctg} = 0 \;\;,\;\; \lim_{-\infty} \mathrm{arcctg} = \pi.$$

Az előbbiekben már többször idézett tételek alapján $\mathrm{arcctg} \in D$, és

$$\mathrm{arcctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ctg}'(\mathrm{arcctg}(x))} = -\sin^2(\mathrm{arcctg}(x)).$$

Ha $0 < z < \pi$, akkor

$$\mathrm{ctg}^2 z = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z} = \frac{1}{\sin^2 z} - 1,$$

így

$$\sin^2 z = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 z},$$

amiből

$$\mathrm{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2(\mathrm{arcctg}(x))} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik.

A „valós" szinusz-, koszinuszfüggvényekhez hasonlóan tekintsük most a „valós" szinuszhiperbolikusz-, koszinuszhiperbolikusz-függvényeket (ld. 4.5.):

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\;,\;\; \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 4.6. vii) megjegyzés szerint

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \;\;,\;\; \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Innen világos, hogy $\mathrm{ch}\, x > 0$, sőt, az elemi $y + 1/y \geq 2 \quad (0 < y \in \mathbf{R})$ egyenlőtlenség miatt (az $y := e^x \quad (x \in \mathbf{R})$ helyettesítéssel) $\mathrm{ch}\, x \geq 1 \;\; (x \in \mathbf{R})$. Az is nyilvánvaló, hogy a ch páros függvény: $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x) \quad (x \in \mathbf{R})$, az sh pedig páratlan függvény: $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ $(x \in \mathbf{R})$. Mivel

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

ezért $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = \lim_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$. Ugyanakkor (ld. 5.5.) a ch függvény folytonos, ezért (ld. 5.5.7 Tétel) az $\mathcal{R}_{\mathrm{ch}}$ értékkészlet intervallum. Az előbbi $(*)$ egyenlőségek, ill. a triviális $\mathrm{ch}\,0 = 1$ egyenlőség alapján tehát nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}_{\mathrm{ch}} = [1, +\infty)$, a ch függvény páros volta miatt egyúttal

$$\mathcal{R}_{\mathrm{ch}_{|[0,+\infty)}} = [1, +\infty)$$

is igaz.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathrm{sh}\,x > 0 \quad (x > 0) \ , \ \ \mathrm{sh}\,0 = 0 \ , \ \ \mathrm{sh}\,t < 0 \quad (t < 0),$$

ill. $\lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$, és $\mathcal{R}_{\mathrm{sh}} = \mathbf{R}$.

A 7.3.5. Tétel értelmében $\mathrm{sh}, \mathrm{ch} \in D$ és $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. Következésképpen $\mathrm{sh}'(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R})$, ezért (ld. 7.5.7. Tétel) az sh függvény szigorúan monoton növő. Legyen az

$$\mathrm{arsh} := \mathrm{sh}^{-1}$$

inverzfüggvény az *areaszinuszhiperbolikusz-függvény.* A fentiek szerint $\mathrm{arsh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, és az arkuszfüggvények kapcsán már többször idézett tételek („deriválási szabályok") alapján $\mathrm{arsh} \in D$, továbbá

$$\mathrm{arsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{arsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{arsh}(x))} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 4.6. viii) megjegyzés szerint $\mathrm{ch}\,t = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)} \quad (t \in \mathbf{R})$, így

$$\mathrm{ch}(\mathrm{arsh}(x)) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{arsh}(x))} = \sqrt{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$\mathrm{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Egyszerűen kaphatunk „explicit" kifejezést az arsh függvényre. Legyen ui. valamilyen $x \in \mathbf{R}$ esetén $y := \mathrm{arsh}(x)$. Ekkor

$$x = \mathrm{sh}\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y},$$

amiből egy egyszerű átrendezés révén jutunk az alábbi (e^y-ra nézve) másodfokú egyenlethez:

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek ($e^y > 0$ miatt) nyilván csak a pozitív gyöke „jöhet szóba", ezért $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tekintsük most a ch függvényt: $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x > 0 \quad (x > 0)$. Ezért a fentiekhez hasonlóan azt mondhatjuk, hogy a $\operatorname{ch}_{|[0,+\infty)}$ leszűkítés szigorúan monoton növő. Legyen

$$\operatorname{arch} := \operatorname{ch}^{-1}_{|[0,+\infty)}$$

az *areakoszinuszhiperbolikusz-függvény,* ahol

$$\operatorname{arch} : [1,+\infty) \to [0,+\infty) \ , \ \operatorname{arch} \in D\{x\} \quad (x > 1),$$

és

$$\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{arch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch}(x))} \qquad (x > 1).$$

Legyen itt $z := \operatorname{arch}(x)$, ekkor $z > 0$, és (ld. 4.6. viii) megjegyzés)

$$\operatorname{sh} z = \sqrt{\operatorname{ch}^2(z) - 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy

$$\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1).$$

Az arsh függvényhez hasonlóan kaphatunk „explicit" kifejezést az arch függvényre is. Legyen ehhez most $x \geq 1$ esetén $y := \operatorname{arch}(x) \geq 0$. Ekkor

$$x = \operatorname{ch}(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y}+1}{2e^y},$$

amiből az alábbi (e^y-ra nézve) másodfokú egyenlet adódik:

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek ($e^y \geq 1$ miatt) nyilván csak az $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$ gyöke „jöhet szóba." Ezért

$$\operatorname{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \geq 1).$$

A (valós) *tangenshiperbolikusz-függvényt* (amit a th szimbólummal jelölünk a továbbiakban) a következőképpen értelmezzük:

$$\text{th} := \frac{\text{sh}}{\text{ch}}.$$

Az sh, ch függvényekre vonatkozó „explicit" formulák alapján

$$\text{th}\, x := \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ill. $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ miatt

$$\lim_{+\infty} \text{th} = 1 \ , \ \lim_{-\infty} \text{th} = -1.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| < 1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

más szóval $|\text{th}\, x| < 1 \quad (x \in \mathbf{R})$. Az sh, ch függvények folytonossága alapján $\text{th} \in \mathcal{C}$, ezért (ld. 5.5.7. Tétel) az $\mathcal{R}_{\text{th}}$ értékkészlet intervallum, és az előbbiek szerint

$$\mathcal{R}_{\text{th}} = (-1, 1).$$

Mivel $\text{sh}, \text{ch} \in D$, így $\text{th} \in D$ is igaz, és a már többször alkalmazott deriválási szabályok (ld. 7.3.1. Tétel), ill. a 4.6. viii) megjegyzés figyelembevételével

$$\text{th}' = \frac{\text{sh}'\cdot \text{ch} - \text{sh}\cdot \text{ch}'}{\text{ch}^2} = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

Tehát $\text{th}' > 0$, amiből következően (ld. 7.5.7. Tétel) a th függvény szigorúan monoton növő. Létezik ezért a (szintén szigorúan monoton növő)

$$\text{arth} := \text{th}^{-1} : (-1, 1) \to \mathbf{R}$$

inverzfüggvény, az *areatangenshiperbolikusz-függvény.* Az 5.5.13. Tétel, ill. a fentiek miatt alkalmazható továbbá a 7.3.3. Tétel, miszerint $\text{arth} \in D$, és

$$\text{arth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{arth}(x))} = \text{ch}^2(\text{arth}(x)) \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Legyen $z \in \mathbf{R}$, ekkor (ld. 4.6. viii) megjegyzés)

$$\mathrm{th}^2(z) = \frac{\mathrm{sh}^2(z)}{\mathrm{ch}^2(z)} = \frac{\mathrm{ch}^2(z) - 1}{\mathrm{ch}^2(z)} = 1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(z)},$$

így

$$\mathrm{ch}^2(z) = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2(z)}.$$

Mindezt behelyettesítve az előbb az $\mathrm{arth}'(x)$-re kapott formulába:

$$\mathrm{arth}'(x) = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{arth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

A korábban már alkalmazott „technikával" jutunk az arth függvény „explicit" alakjához. Legyen ui. $x \in (-1, 1)$ esetén $y := \mathrm{arth}(x)$, ekkor

$$x = \mathrm{th}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1},$$

más szóval $xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$. Innen már nyilvánvaló, hogy

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x},$$

azaz

$$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Definiájuk a cth szimbólummal jelöl *kotangenshiperbolikusz-függvényt* az alábbiak szerint:

$$\mathrm{cth} := \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}.$$

Az sh, ch függvények „explicit" alakjára gondolva

$$\mathrm{cth}\, x := \mathrm{cth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

ahol a fentiekkel analóg módon

$$\lim_{+\infty} \mathrm{cth} = 1 \ , \ \lim_{-\infty} \mathrm{cth} = -1.$$

Továbbá egyszerűen belátható, hogy $\mathrm{cth}\, x > 1$ $(x > 0)$ és $\mathrm{cth}\, t < -1$ $(t < 0)$, amiből az alábbi jobb-, ill. oldali határértékek létezése $e^{2x} > 1$ $(x > 0)$, $e^{2t} < 1$ $(t < 0)$, és $\lim_{x \to 0} e^{2x} = 1$ miatt már következik:

$$\lim_{x \to +0} \mathrm{cth}\, x = \lim_{x \to +0} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{cth} x = \lim_{x\to -0} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -\infty.$$

A th függvényhez hasonlóan a cth is folytonos, ezért (ld. 5.5.7. Tétel) a $\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}$, ill. a $\operatorname{cth}_{|(-\infty,0)}$ leszűkítés értékkészlete is intervallum. Az eddig mondottak alapján már világos, hogy

$$\mathcal{R}_{\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}} = (1,+\infty) \ \ , \ \ \mathcal{R}_{\operatorname{cth}_{|(-\infty,0)}} = (-\infty,-1).$$

A 7.3.1. Tétel figyelembevételével $\operatorname{cth} \in D$, és (ld. 4.6. viii) megjegyzés)

$$\operatorname{cth}' = \frac{\operatorname{ch}'\cdot \operatorname{sh} - \operatorname{ch}\cdot \operatorname{sh}'}{\operatorname{sh}^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 - \operatorname{ch}^2}{\operatorname{sh}^2} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2} < 0.$$

A 7.5.7. Tétel szerint ezért a $\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}$, $\operatorname{cth}_{|(-\infty,0)}$ leszűkítések szigorúan monoton fogyó függvények. Ugyanakkor a fentiek szerint

$$\mathcal{R}_{\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}} \cap \mathcal{R}_{\operatorname{cth}_{|(-\infty,0)}} = \emptyset,$$

így $\operatorname{cth} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ bijekció. Legyen az

$$\operatorname{arcth} := \operatorname{cth}^{-1} : (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

inverz az *areakotangenshiperbolikusz-függvény.* Az areatangenshiperbolikusz-függvényhez hasonlóan $\operatorname{arcth} \in D$, és

$$\operatorname{arcth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{cth}'(\operatorname{arcth}(x))} = -\operatorname{sh}^2(\operatorname{arcth}(x)) \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x| > 1).$$

Ha $0 \neq z \in \mathbf{R}$, ekkor (ld. 4.6. viii) megjegyzés)

$$\operatorname{cth}^2(z) = \frac{\operatorname{ch}^2(z)}{\operatorname{sh}^2(z)} = \frac{\operatorname{sh}^2(z)+1}{\operatorname{sh}^2(z)} = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2(z)},$$

így

$$\operatorname{sh}^2(z) = \frac{1}{\operatorname{cth}^2(z)-1}.$$

Ezt az $\operatorname{arcth}'(x)$-re előbb nyert formulába beírva:

$$\operatorname{arcth}'(x) = -\frac{1}{\operatorname{cth}^2(\operatorname{arcth}(x))-1} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x| > 1).$$

Az arth függvénnyel kapcsolatban látottakkal analóg módon jutunk az arcth függvény „explicit" alakjához. Legyen ehhez $x \in \mathbf{R}$, $|x| > 1$ és $y := \operatorname{arcth}(x)$. Ekkor

$$x = \operatorname{cth} y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1},$$

azaz $xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$. Ebből az egyenlőségből pedig

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1},$$

ezért

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x| > 1).$$

7.6. Megjegyzések

i) A Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel) geometriai jelentését illetően a következőt mondhatjuk. Az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényt, azaz (ld. 2.1., 2.2.) az

$$\{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbf{R}^2$$

halmazt („függvénygrafikont") koordinátageometriai értelemben ábrázolva az euklideszi-síkon az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő ℓ egyenes („húr") egyenlete a következő:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A 7.5.3. Tétel feltételei mellett egy alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

A $(\xi, f(\xi))$ ponton átmenő, $f'(\xi)$ meredekségű egyenes egyenlete

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi),$$

ami nem más (ld. 7.2. vii) megjegyzés), mint e_ξ, az f függvény ξ-beli érintője. A Lagrange-féle középérték-tétel geometriai jelentése tehát az, hogy az ℓ húr és (alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén) az e_ξ érintő egymással párhuzamos. Fizikai analógiával élve (ld. 7.2. vi) megjegyzés) ugyanakkor a Lagrange-tétel azt jelenti, hogy a két időpont közötti időközre számított átlagsebesség megegyezik a két időpont közötti valamelyik pillanatnyi sebességgel.

ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az $f : [a,b] \to [a,b]$ függvény folytonos. Ekkor könnyen láthatóan van olyan $\xi \in [a,b]$, ami fixpontja az f-nek, azaz $f(\xi) = \xi$. Ha ui. $f(a) = a$, vagy $f(b) = b$, akkor a dolog világos. Különben $\mathcal{R}_f \subset [a,b]$ miatt $a < f(a)$ és $f(b) < b$. Legyen ekkor

$$\varphi(x) := f(x) - x \qquad (x \in [a,b]).$$

A $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, $\varphi(a) > 0$, $\varphi(b) < 0$. A Bolzano-tétel (ld. 5.5.4. Tétel) alapján tehát létezik (a,b)-beli gyöke a φ-nek, más szóval olyan $\xi \in (a,b)$, amelyre $\varphi(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$. Így $f(\xi) = \xi$.

Ha az előbbi f függvényre $f \in D\{x\} \quad (x \in (a,b))$, és

$$q := \sup\{|f'(x)| : x \in (a,b)\} < 1$$

is igaz, akkor az f kontrakció (ld. 3.9.9. Tétel). Ui. a 7.5.3. Tétel alapján tetszőleges $x, y \in [a,b]$, $x < y$ esetén valamilyen $\xi \in (x,y)$ mellett

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)(y-x)| \le q \cdot |y-x|.$$

A 3.9.9. Tétel szerint ezért egyértelműen létezik olyan $\eta \in [a,b]$ (az f fixpontja), amelyre

$$f(\eta) = \eta,$$

és tetszőleges $x_0 \in [a,b]$ esetén az

$$x_{n+1} := f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rekurzív összefüggésnek eleget tevő (x_n) sorozat konvergens, $\lim(x_n) = \eta$, továbbá

$$|x_n - \eta| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

iii) Legyen $h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott függvény, ekkor a h által meghatározott

$$h(x) = 0$$

egyenlet megoldásán az

$$\{x \in \mathcal{D}_h : h(x) = 0\}$$

halmaz meghatározását értjük. Világos, hogy ez a feladat többféleképpen is átalakítható ekvivalens módon úgy, hogy a $h(x) = 0$ egyenlet megoldása egy alkalmas f függvény fixpontjainak a kiszámítását jelentse. Ilyen f függvény pl. az

$$f(x) := h(x) + x \qquad (x \in \mathcal{D}_h),$$

vagy - ennek mintegy általánosításaként - az

$$f(x) := h(x)g(x) + x \qquad (x \in \mathcal{D}_h),$$

ahol a $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény legalább a $\mathcal{D}_h$ halmazon értelmezve van, és annak egyetlen pontjában sem vesz fel nullát. Ha itt $\mathcal{D}_h = [a,b]$ (valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén), $g, h \in \mathcal{C}$, és $g, h \in D\{x\} \quad (x \in (a,b))$, akkor $f \in D\{x\}$ és (ld. 7.3.1. Tétel)

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) + 1 \qquad (x \in (a,b)).$$

Következésképpen (ld. ii) megjegyzés): ha $f:[a,b]\to[a,b]$, és

$$q:=\sup\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}=$$
$$\sup\{|h'(x)g(x)+h(x)g'(x)+1|:x\in(a,b)\}<1,$$

akkor az f kontrakció. Így egyértelműen létezik olyan $\eta\in[a,b]$, ami gyöke a h-nak (azaz $h(\eta)=0$). Továbbá bármely $x_0\in[a,b]$ mellett az

$$x_{n+1}:=x_n+h(x_n)\cdot g(x_n)\qquad(n\in\mathbf{N})$$

egyenlőségnek eleget tevő (x_n) sorozatra $\lim(x_n)=\eta$, és

$$|x_n-\eta|\le\frac{q^n}{1-q}\cdot|h(x_0)\cdot g(x_0)|\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

iv) A 7.5.5. Tétellel kapcsolatban külön is felhívjuk a figyelmet arra, hogy a szóban forgó tételben szereplő függvény (nyílt) intervallumon van értelmezve. Ti. az

$$f(x):=\frac{1}{x}\qquad(0\ne x\in\mathbf{R})$$

függvény differenciálható, $f'(x)=-1/x^2\quad(0\ne x\in\mathbf{R})$. Tehát az f' deriváltfüggvény csak negatív értékeket vesz fel, de az f függvény nem monoton. Ui.

$$1=f(1)>f(2)=1/2,$$

így az f nem monoton növő, ill.

$$-1=f(-1)<f(1)=1,$$

ezért nem is monoton fogyó.

v) Az előbbi megjegyzéshez hasonlóan a 7.5.6. Tételben is lényeges, hogy az ottani függvény (nyílt) intervallumon van definiálva. Tekintsük ui. az

$$f(x):=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\[2ex] 2 & (1<x<2)\end{cases}$$

függvényt. Ekkor $f\in D$, $f'(x)=0\quad(1\ne x\in(0,2))$, de az f nem konstansfüggvény.

vi) A lokális szélsőérték létezésével kapcsolatos 7.5.9 Tételben a deriváltfüggvény jelváltása csak elégséges, de nem szükséges feltétele a lokális szélsőérték létezésének. Ezt illusztrálandó vizsgáljuk ui. az alábbi függvényt:

$$f(x):=\begin{cases}0 & (x=0)\\[2ex] x^2\cdot\sin^2(1/x) & (0\ne x\in\mathbf{R}).\end{cases}$$

Világos, hogy az f -nek a 0-ban lokális (sőt abszolút) minimuma van. Továbbá (ld. a 7.5.16. Tétel előtt említett példa)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 2x \cdot \sin^2(1/x) - \sin(2/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Ha

$$x_n := \frac{4}{(4n+1)\pi} \quad , \quad t_n := \frac{4}{(4n+3)\pi} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $\lim(x_n) = \lim(t_n) = 0$, és

$$f'(x_n) = 2x_n \cdot \sin^2(1/x_n) - 1 \to -1 \qquad (n \to \infty),$$

$$f'(t_n) = 2t_n \cdot \sin^2(1/t_n) + 1 \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért bármely $r > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $f'(x_n) < 0$, $f'(t_n) > 0$, és $x_n, t_n \in (0, r)$. Ez azt jelenti, hogy az f' függvény nem vált jelet a 0-ban.

vii) A konvexitás (konkávitás) geometriai megvilágításához az i) megjegyzéshez hasonlóan járhatunk el. Legyen ui. valamilyen $I \subset \mathbf{R}$ („igazi") intervallumon értelmezett az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény. Ha $a, b \in I$, $a < b$, akkor könnyen ellenőrizhetően

$$(*) \qquad \{\lambda a + (1-\lambda)b : 0 \leq \lambda \leq 1\} = [a, b].$$

Az i) megjegyésben említett, az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ha $0 \leq \lambda \leq 1$, akkor az

$$x_\lambda := \lambda a + (1-\lambda)b \quad , \quad y_\lambda := \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

koordinátákkal definiált (x_λ, y_λ) pont rajta van ezen a húron:

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\lambda a + (1-\lambda)b - a)$$

(ami egyszerű „átszorzással" igazolható). Ha tehát az f függvény konvex, azaz

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) = f(x_\lambda) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = y_\lambda,$$

akkor az $(x_\lambda, f(x_\lambda))$ (grafikon)pont az említett húr alatt (esetleg rajta) van, és $(*)$ szerint mindez az $[a, b]$ intervallum bármely pontjára igaz. (Konkáv függvényre pedig $(x, f(x))$ a húr felett (esetleg rajta) van az $[a, b]$ intervallum bármely x pontjára.)

viii) Tegyük fel, hogy valamilyen $I \subset \mathbf{R}$ (nem egy pontból álló) intervallum esetén az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény konvex. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ természetes szám, és

$$x_0, ..., x_n \in I \quad , \quad p_0 > 0, ..., p_n > 0$$

számok esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség (az ún. *Jensen-egyenlőtlenség*):

$$f\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} p_i}.$$

Valóban, $n = 0$-ra mindkét oldalon $f(x_0)$ áll. Ha $n = 1$, akkor a

$$p := p_0 + p_1 \quad , \quad \lambda := p_0/p \in [0, 1]$$

jelölésekkel $p_1/p = 1 - \lambda \in [0, 1]$, és a Jensen-egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$f\left(\frac{p_0}{p}x_0 + \frac{p_1}{p}x_1\right) = f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \leq$$

$$\frac{p_0}{p}f(x_0) + \frac{p_1}{p}f(x_1) = \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1).$$

Ez nem más, mint a konvexitás definíciója. Teljes indukcióval gondolkozva tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett már beláttuk a Jensen-egyenlőtlenséget, és legyenek adottak az $x_0, ..., x_{n+1} \in I$, $p_0 > 0, ..., p_{n+1} > 0$ számok. Ha

$$q_i := \frac{p_i}{\sum_{k=0}^{n+1} p_k} \in (0, 1) \qquad (i = 0, ..., n+1),$$

akkor

$$\sum_{i=0}^{n+1} q_i x_i = q_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n+1} q_i x_i = q_0 x_0 + (1 - q_0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i}{1 - q_0} x_i.$$

Legyen

$$y := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i}{1 - q_0} x_i,$$

ekkor az f konvexitása, ill. az indukciós feltétel szerint

$$f\left(\frac{\sum_{i=0}^{n+1} p_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i}\right) =$$

$$f\left(\sum_{i=0}^{n+1} q_i x_i\right) = f(q_0 x_0 + (1 - q_0)y) \leq q_0 f(x_0) + (1 - q_0)f(y) \leq$$

$$q_0 f(x_0) + (1 - q_0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i}{1 - q_0} f(x_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} p_i f(x_i)}{\sum_{i=0}^{n+1} p_i}.$$

ix) Belátható, hogy ha $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény pedig konvex, akkor az f folytonos. Sőt, az is igaz, hogy ha $f : I \to \mathbf{R}$, akkor az f konvexitása a következővel ekvivalens: $f \in \mathcal{C}$ és

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in I).$$

x) A 7.5.14. Tételben az inflexióval kapcsolatban megfogalmazott feltétel (hogy ti. a szóban forgó pontban a deriváltfüggvénynek lokális szélsőértéke legyen) is csak elégséges, de nem szükséges feltétel. Ezt igazolandó legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ x^3 \cdot \sin^2(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Ekkor (ld. a vi) megjegyzésben mondottak) $f \in D$,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 3x^2 \cdot \sin^2(1/x) - x \cdot \sin(2/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}), \end{cases}$$

és az f-nek a 0-ban inflexiója van. A vi)-beli

$$x_n := \frac{4}{(4n+1)\pi} \quad , \quad t_n := \frac{4}{(4n+3)\pi} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

választással

$$f'(x_n) = \frac{3x_n^2}{2} - x_n = x_n\left(\frac{3x_n}{2} - 1\right) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$f'(t_n) = \frac{3t_n^2}{2} + t_n = t_n\left(\frac{3t_n}{2} + 1\right) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\lim(x_n) = \lim(t_n) = 0$, ezért bármely $r > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel $x_n, t_n \in (0, r)$, és $f'(x_n) < 0 < f'(t_n)$. Innen $f'(0) = 0$ alapján világos, hogy az f' deriváltfüggvénynek a 0-ban nincs lokális szélsőértéke.

xi) Az eddigiekhez hasonlóan mutassuk meg egy példa segítségével, hogy a lokális konvexitásra (konkávitásra) vonatkozó 7.5.16. Tételben a deriváltfüggvény lokális monotonitása is csak elégséges, de nem szükséges feltétel. Ehhez elég felidézni a vi) megjegyzésben mondott függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ x^2 \cdot \sin^2(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Tudjuk, hogy $f \in D,\ f'(0) = f(0) = 0,$ ezért az f függvénynek a 0-beli e_0 érintője:

$$e_0(x) = f(0) + f'(0)x = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen $e_0 \equiv 0,$ így $f - e_0 = f \geq 0.$ Ez azt jelenti, hogy az f függvény a 0-ban lokálisan konvex. Ugyanakkor $f'(0) = 0$ miatt a deriváltfüggvény 0-beli lokális monotonitása ekvivalens az f' függvény 0-beli jelváltásával. Ez utóbbiról viszont már láttuk vi)-ban, hogy nem teljesül.

xii) A *L'Hospital-szabály* néven közismert 7.5.17. Tétel (vagy a 7.5.18. Tétel) a határérték-számítás szempontjából „kényes" $0/0$, vagy $\pm\infty/\pm\infty$ esetek (tehát az 5.3.3. Tétel iv) állításában az $A := \lim_a f,\ B := \lim_a g$ jelölésekkel a $\lim_a(f/g)$ hányados-határértéket illetően „kimaradó" $A = B = 0,$ ill. $A = \pm\infty,\ B = \pm\infty$ esetek) kezelésére ad eszközt bizonyos feltételek mellett. Ugyanakkor az előbb említett 5.3.3. Tétel iii) állítása szempontjából is vannak „kényes" (kimaradó) esetek, amikor is (az előbbi jelölésekkel) $A = 0,\ B = \pm\infty$ (vagy fordítva), és a $\lim_a(fg)$ szorzat-határérték vizsgálata a feladat. Tegyük fel pl., hogy $a, b \in \overline{\mathbf{R}},\ a < c < b,$ és a differenciálható

$$f, g : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$

függvényekre

$$g'(x) \neq 0 \ \ (c \neq x \in (a, b)) \ \ , \ \ \lim_c f = 0 \ \ , \ \ \lim_c g = +\infty.$$

A $\lim_c g = +\infty$ feltétel miatt nyilván van olyan $\delta > 0,$ amivel

$$g(x) > 0 \qquad (c \neq x \in (c - \delta, c + \delta)).$$

Ezért (ld. 5.3.3. Tétel) $\lim_c(1/g) = 0.$ Ha tehát $h := 1/g,$ akkor

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \qquad (c \neq x \in (c - \delta, c + \delta)),$$

ahol (ld. 7.3.1. Tétel) $h \in D,$ és

$$h'(x) = -g'(x)/g^2(x) \qquad (c \neq x \in (c - \delta, c + \delta)).$$

Innen világos, hogy az (a, b) intervallum helyett a $(c - \delta, c + \delta)$ intervallummal, a g függvény helyett a h-val, az f helyett pedig az $f_{|(c-\delta,c+\delta)}$ leszűkítéssel teljesülnek a 7.5.18. Tétel feltételei. Ha tehát létezik az

$$A := \lim_c (f'/h') = -\lim_c (f' \cdot g^2/g')$$

határérték, akkor létezik a $\lim_c(fg) = A$ határérték is.

xiii) A 7.5.17. Tétel 1^o feltétele kapcsán érdemes megjegyezni az alábbiakat. Az említett feltétel azt mondja ki, hogy a valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az (a, b) intervallumon értelmezett $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényre $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$. A 7.5.10. Tétel szerint viszont a g' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú. Ezt is figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a g függvényt illetően csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$g'(x) > 0 \quad (x \in (a, b)), \text{ vagy } g'(x) < 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Ui. különben (a $0 \notin \mathcal{R}_{g'}$ feltételre is tekintettel) lennének olyan $u, v \in (a, b)$ helyek, hogy $g'(u) < 0 < g'(v)$. Innen az említett Darboux-tulajdonság miatt azonban egy alkalmas, u és v közötti ξ-vel $g'(\xi) = 0$ teljesülne, ami $0 \notin \mathcal{R}_{g'}$ alapján nem lehet. A 7.5.7. Tétel szerint tehát a g függvény szigorúan monoton.

xiv) Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ x^2 \cdot \sin(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Ekkor $|\sin(1/x)| \leq 1 \quad (0 \neq x \in \mathbf{R})$ miatt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \cdot \sin(1/x) \to 0 \qquad (x \to 0).$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in D\{0\}$, és $f'(0) = 0$. Ha $0 \neq x \in \mathbf{R}$, akkor (ld. 7.3.1., 7.3.2. Tételek) $f \in D\{x\}$, és

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Így az f függvény differenciálható, ezért (ld. 7.5.10. Tétel) az f' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú. Ugyanakkor f' nem folytonos, ui. $f' \notin \mathcal{C}\{0\}$. Valóban, $\lim_{x \to 0} (2x \cdot \sin(1/x)) = 0$ alapján bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\lim(x_n) = 0$ sorozat esetén $\lim (2x_n \cdot \sin(1/x_n)) = 0$. Viszont az

$$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi} \ , \ y_n := \frac{1}{(2n+1)\pi} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatokra $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$, de

$$\lim (\cos(1/x_n)) = \lim (\cos(\pi/2 + 2n\pi)) = \lim (\cos(\pi/2)) = \lim(0) = 0,$$

$$\lim (\cos(1/y_n)) = \lim (\cos(\pi + 2n\pi)) = \lim(\cos \pi) = \lim(-1) = -1.$$

Tehát (ld. 5.3.2. Tétel) az

$$\mathbf{R} \setminus \ni x \mapsto \cos(1/x)$$

függvénynek a 0-ban nincs határértéke. Ezért $\lim_0 f'$ sem létezik, különben (ld. 5.3.3. Tétel) létezne a

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(1/x)\right) = \lim_{x\to 0} (2x\cdot \sin(1/x)) - \lim_{0} f'$$

határérték. (A fenti példa tehát azt mutatja, hogy az 5.5.6. Tételben a folytonosság csak elégséges, de nem szükséges feltétel a Darboux-tulajdonsághoz.)

xv) Lássuk be, hogy ha az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény nyílt intervallumon van értelmezve, és az f bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén lokálisan növő az x-ben, akkor az f függvény („globálisan") monoton növő. Ui. indirekt módon tegyük fel, hogy az utóbbi nem igaz: alkalmas $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ helyeken

$$f(a) > f(b).$$

Az a-beli lokális növekedés miatt van olyan $c \in \mathcal{D}_f$, hogy

$$f(a) \le f(x) \qquad (a \le x < c).$$

Ugyanígy létezik olyan $d \in \mathcal{D}_f$ is, amellyel

$$f(x) \le f(b) \qquad (d < x \le b).$$

Világos, hogy $c \le d$. Ha tehát $A\,(\subset \mathcal{D}_f)$ jelenti az előbbi tulajdonságú $c \in \mathcal{D}_f$ helyek halmazát, akkor a d felső korlátja az A-nak. Legyen

$$c_0 := \sup A,$$

ekkor $a < c_0 < b$. Gondoljuk meg, hogy

$$f(c_0) \ge f(a)$$

nem lehetséges. Ekkor ui. az f függvény c_0-beli lokális növekedése miatt valamilyen $d_0 > c_0$ esetén

$$f(x) \ge f(c_0) \ge f(a) \qquad (c_0 \le x < d_0)$$

teljesülne. Ez ellentmond annak, hogy c_0 az A halmaz szuprémuma. Tehát

$$f(c_0) < f(a).$$

Viszont ez sem lehetséges, ui. az f függvény c_0-ban is lokális növekedő, így valamilyen $a < d_0 < c_0$ mellett

$$f(x) \le f(c_0) < f(a) \qquad (d_0 < x \le c_0).$$

A $c_0 = \sup A$ definíció alapján ugyanakkor van olyan $c_2 \in A$, amelyre

$$d_0 < c_2 \le c_0.$$

Így $f(x) \geq f(a) \quad (a \leq x < c_2)$, speciálisan

$$f(a) > f(c_0) \geq f(x) \geq f(a) \qquad (d_0 < x < c_2),$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. (Analóg módon kapjuk: ha a fenti f függvény a $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum minden pontjában lokálisan fogyó, akkor az f (globálisan) monoton fogyó.)

xvi) Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban *szigorúan lokálisan növő,* ha valamilyen $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(x) < f(a) < f(t) \qquad (a-r < x < a < t < a+r).$$

Hasonlóan, az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *szigorúan lokálisan fogyó* az előbbi a-ban, ha egy alkalmas $r > 0$ számmal $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(x) > f(a) > f(t) \qquad (a-r < x < a < t < a+r).$$

A 7.5.15. Tétel bizonyításából az derül ki, hogy az $f \in D\{a\}$, $f'(a) > 0$ (vagy $f'(a) < 0$) feltételek mellett az f függvény az a-ban lokálisan szigorúan növő (vagy fogyó).

xvii) Az előbbi megjegyzés mintájára az $f \in D\{a\}$ függvény az a-ban *szigorúan lokálisan konvex* (*konkáv*), ha egy alkalmas $r > 0$ mellett $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és

$$f(a) > e_a(x) \quad (f(a) < e_a(x)) \qquad (a \neq x \in (a-r, a+r)).$$

A 7.5.16. Tétel bizonyítását átgondolva ebből a szempontból világos a következő állítás: ha $r > 0$, $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D\{x\}$ $(x \in (a-r, a+r))$, és az f' deriváltfüggvény az a-ban szigorúan lokálisan növő (fogyó), akkor az f függvény az a-ban szigorúan lokálisan konvex (konkáv).

xviii) A „szigorú" lokális tulajdonságok sorát bővíthetjük a szigorú jelváltással. Nevezetesen az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban *szigorú értelemben jelet vált,* ha $f(a) = 0$, továbbá valamilyen $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, és

1^o $f(x) < 0 < f(t) \quad (a-r < x < a < t < a+r)$,

vagy

2^o $f(x) > 0 > f(t) \quad (a-r < x < a < t < a+r)$.

Ha a 7.5.9. Tételben az f' deriváltfüggvénynek az a-ban szigorú értelemben $(-,+)$-jelváltása van (ld. 1^o), akkor az f-nek az a-ban *szigorú lokális minimuma* van: valamilyen $K(a)$ környezetre

$$f(x) > f(a) \qquad (a \neq x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ugyanígy, ha az f'-nek az a-ban szigorú értelemben $(+,-)$-jelváltása van (ld. 2^o), akkor az f-nek az a-ban *szigorú lokális maximuma* van: valamilyen $K(a)$ környezetre

$$f(x) < f(a) \qquad (a \neq x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

xix) A „globális" konvexitás (konkávitás) „szigorú" változatát is könnyen megfogalmazhatjuk. Tegyük fel ehhez, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartománya „igazi" intervallum. Ekkor az f *szigorúan konvex,* ha bármely $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ mellett

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Ha itt

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

akkor az f *szigorúan konkáv.* Ennek megfelelően a 7.5.11. Tételbeli feltétel a szigorú konvexitáshoz (konkávitáshoz) úgy módosul, hogy bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén a $\Delta_a f$ különbségihányados-függvény szigorúan monoton növő (fogyó). Hasonlóan, a 7.5.12. Tételbeli feltétel a szigorú konvexitás (konkávitás) esetén úgy változik, hogy az f' deriváltfüggvény legyen szigorúan monoton növő (fogyó). Végül, a 7.5.13. Tételben a szigorú konvexitásra (vagy konkávitásra) vonatkozó feltétel az, hogy $f(x) > e_a(x)$ (vagy $f(x) < e_a(x)$) $(a \neq x \in \mathcal{D}_f)$.

xx) Az előbbi megjegyzésben értelmezett *szigorú globális konvexitás (konkávitás)* geometriai hátterét világítja meg a következő észrevétel. Tegyük fel ui., hogy egy „igazi" intervallumon értelmezett $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény konvex (konkáv), de nem szigorúan konvex (konkáv). Ekkor van olyan $I \subset \mathcal{D}_f$ intervallum, hogy alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$f(x) = \alpha x + \beta \qquad (x \in I).$$

Valóban, pl. a konvexitásra fogalmazva (a konkávitás mellett analóg a bizonyítás), a feltételek miatt (ld. 7.6. vii) megjegyzés) alkalmas $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ helyekkel a

$$\varphi(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (x \in [a, b])$$

függvényre az alábbiak teljesülnek:

1^o $f(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in [a, b])$, és

2^o valamilyen $c \in (a,b)$ esetén $f(c) = \varphi(c)$.

Lássuk be, hogy az

$$I := [a,b] \ , \ \ \alpha := \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \ , \ \ \beta := f(a) - a \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

paraméterekkel teljesül az állításunk, azaz

$$f(x) = \alpha x + \beta = \varphi(x) \qquad (x \in I).$$

Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy ez nem igaz. Ekkor egy $d \in I$ helyen $f(d) < \varphi(d)$. Világos, hogy $d \neq c$, pl. $d < c$. (A $d > c$ eset hasonlóan „intézhető el".) Az f feltételezett konvexitását kihasználva ekkor

$$(*) \qquad f(x) \leq f(d) + \frac{f(b)-f(d)}{b-d}(x-d) =: \psi(x) \qquad (x \in [d,b]),$$

ahol a

$$\gamma := \frac{f(b)-f(d)}{b-d} \ \ , \ \ \delta := f(d) - d \cdot \frac{f(b)-f(d)}{b-d}$$

jelölésekkel

$$\psi(x) = \gamma x + \delta \qquad (x \in [d,b]).$$

Vegyük észre, hogy $\varphi(b) = \alpha b + \beta = \psi(b) = \gamma b + \delta$, így $\beta - \delta = (\gamma - \alpha)b$. Ugyanakkor

$$f(d) = \psi(d) = \gamma d + \delta < \varphi(d) = \alpha d + \beta$$

miatt $\beta - \delta > (\gamma - \alpha)d$. Következésképpen $(\gamma - \alpha)b > (\gamma - \alpha)d$, tehát

$$(\gamma - \alpha)(d - b) < 0.$$

Itt $d - b < 0$, ezért $\gamma - \alpha > 0$. Belátjuk (ami majd nyilván ellentmond $(*)$-nak), hogy

$$f(c) = \varphi(c) = \alpha c + \beta > \psi(c) = \gamma c + \delta,$$

azaz $\beta - \delta > (\gamma - \alpha)c$. Ti. az előbbiek szerint $\gamma - \alpha > 0$ és $b > c$, amiből

$$\beta - \delta = (\gamma - \alpha)b > (\gamma - \alpha)c$$

már adódik.

xxi) A *szigorú inflexió* fogalmát úgy kapjuk, hogy az inflexió definíciójában (ld. 7.5.) az $f - e_a$ különbség szigorú jelváltását követeljük meg az a-ban. Ekkor a 7.5.14. Tételben a szigorú inflexióhoz elégséges feltétel úgy szól, hogy az f' deriváltfüggvénynek az a-ban szigorú lokális szélsőértéke legyen.

7.7. Többször differenciálható függvények

Elöljáróban emlékeztetünk a hatványsor összegfüggvényével kapcsolatos 7.3.4. Tételre: ha a $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergencia-sugara nullától különböző, és

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r)$$

a szóban forgó hatványsor *összegfüggvénye*, akkor $f \in D$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r).$$

Vegyük észre, hogy a $b_n := (n+1)a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r).$$

Más szóval az f' deriváltfüggvény a $\sum(b_n(t-a)^n)$ hatványsor összegfüggvénye, következésképpen az előbb idézett 7.3.4. Tétel alapján $f' \in D$, és

$$f''(x) := (f')'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-a)^{n-1} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \qquad (x \in \mathbf{K},\ |x-a| < r).$$

„Logikusnak" tűnik azt mondani, hogy az f függvény *kétszer deriválható,* $f''(x)$ pedig az f függvény x-beli *második deriváltja.*

Elképzelhető persze, hogy az előbbi „kétszer való differenciálhatóság" egy f függvényre akkor is teljesülhet, ha az f nem egy hatványsor összegfüggvénye. Ez motiválja az alábbi definíciót. Legyen ehhez valamilyen $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt fogjuk mondani, hogy az f függvény az a-ban *kétszer differenciálható* (vagy más szóval az f *kétszer deriválható* az a helyen), ha egy alkalmas $r > 0$ mellett $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D\{x\}$ $(x \in (a-r, a+r))$, és $f' \in D\{a\}$. Mindezt röviden a következőképpen fogjuk jelölni: $f \in D^2\{a\}$. Legyen ekkor

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az f függvény a-beli *második deriváltja* (vagy *második differenciálhányadosa*).

Pusztán az $f \in D\{a\}$ feltételezésből még nem következik az, hogy $f \in D^2\{a\}$. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (x \geq 0). \end{cases}$$

Ekkor $f \in D\{x\}$ $(x \in \mathbf{R})$, ami $x \neq 0$ esetén az $\mathbf{R} \ni x \mapsto 0$, ill. az $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^2$ függvények deriválhatóságából triviálisan következik:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \\ 2x & (x > 0). \end{cases}$$

Az $f \in D\{0\}$, $f'(0) = 0$ állítások pedig az alábbiak szerint adódnak (ld. 7.1.2. Tétel):

$$\lim_{+0} \Delta_0 f = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +0} x = 0 =$$

$$\lim_{-0} \Delta_0 f = \lim_{x \to -0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{0}{x} = 0,$$

így létezik a

$$\lim_{0} \Delta_0 f = \lim_{+0} \Delta_0 f = \lim_{-0} \Delta_0 f = 0$$

határérték. Az

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \\ 2x & (x > 0) \end{cases}$$

függvény viszont nem differenciálható a 0-ban, ui.

$$\Delta_0 f'(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \\ 2 & (x > 0). \end{cases}$$

Következésképpen

$$\lim_{-0} \Delta_0 f' = 0 \neq 2 = \lim_{+0} \Delta_0 f',$$

ezért (ld. 5.3.4. Tétel) nem létezik a $\lim_0 \Delta_0 f'$ határérték, így (ld. 7.1.2. Tétel) f' nem differenciálható a 0-ban.

Ha $\mathcal{D} := \{a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : f \in D^2\{a\}\} \neq \emptyset$, akkor a

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto f''(x)$$

függvény - röviden az f'' függvény - az f *második deriváltfüggvénye.* (Esetenként f'' helyett $f^{(2)}$-t írunk, ill. ennek megfelelően f' helyett $f^{(1)}$-et.) Ha itt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f$, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* (vagy *kétszer deriválható*), és ennek a ténynek a kifejezésére az $f \in D^2$ szimbólumot használjuk. Így pl. a fenti hatványsor összegfüggvénye kétszer deriválható függvény.

Világos, hogy ha f a $(*)$-ban szereplő összegfüggvény, akkor f''-re mindaz elmondható, ami f'-re. Ebben az esetben $f'' \in D$. Ezt a gondolatmenetet folytatva jutunk el a

„magasabb rendben" (vagy többször) deriválható függvény fogalmához. Tekintsünk ehhez egy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, és valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén tegyük fel, hogy az f függvénynek az $f \in D^n\{x\}$ szimbólummal jelölt x pontbeli n-szer való differenciálhatóságát, továbbá az $f^{(n)}(x)$ szimbólummal jelölt x-beli n-edik deriváltját, ill. az $f^{(n)}$-nel jelölt n-edik deriváltfüggvényét már értelmeztük. Ekkor azt mondjuk, hogy az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban az f függvény $(n+1)$*-szer deriválható,* ha egy alkalmas $r > 0$ számmal $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D^n\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$, és $f^{(n)} \in D\{a\}$. Mindezt a következőképpen fogjuk jelölni: $f \in D^{n+1}\{a\}$, ill. legyen ekkor

$$f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$$

az f függvény a-beli $(n+1)$*-edik deriváltja* (vagy $(n+1)$*-edik differenciálhányadosa*).

Ha most $\mathcal{D} := \{a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f : f \in D^{n+1}\{a\}\} \neq \emptyset$, akkor a

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto f^{(n+1)}(x)$$

függvény - röviden $f^{(n+1)}$ - az f függvény $(n+1)$*-edik deriváltfüggvénye.* A $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f$ esetben azt írjuk, hogy $f \in D^{n+1}$, és egyszerűen azt mondjuk, hogy a szóban forgó f függvény $(n+1)$*-szer deriválható* (vagy $(n+1)$*-szer differenciálható*).

Nyilvánvaló (ld. teljes indukció), hogy a fentiekben bármely $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett értelmeztük a valamilyen a pontbeli n-szer való differenciálhatóságot ($f \in D^n\{a\}$), ill. az $f^{(n)}(a)$-val jelölt a-beli n-edik deriváltat, és az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölt n-edik deriváltfüggvényt. Ha egy $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre valamilyen $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban minden $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor erre az $f \in D^\infty\{a\}$ jelölést fogjuk használni. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban ∞*-sokszor deriválható* (vagy ∞*-sokszor differenciálható*). Ha ez utóbbi minden $a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz, akkor az f függvény ∞*-sokszor deriválható* (vagy ∞*-sokszor differenciálható*), amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

A magasabb rendű differenciálhatóság fenti értelmezéséből nyilvánvaló, hogy ha valamilyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén $f \in D^n\{a\}$, akkor egyúttal $f \in D^m\{a\} \quad (m = 1, ..., n-1)$, ill. $f^{(m)} \in D^j\{a\}$, és $(f^{(m)})^{(j)}(a) = f^{(m+j)}(a) \quad (j = 1, ..., n-m)$. Pl. az $f(x) := x^N$ $(x \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N})$ függvényre bármely $1 \leq n \in \mathbf{N}$ „kitevővel" $f \in D^n$, és

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (n > N) \\ \\ \prod_{j=1}^{n}(N-j+1)x^{N-n} & (n \leq N) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 7.3.1. Tételből (teljes indukcióval) az is rögtön következik, hogy a magasabb rendű deriválásra is igaz a *linearitás*: ha $N \in \mathbf{N}$ és $f_i \in D^n\{a\} \quad (i = 0, ..., N)$, akkor tetszőleges $\alpha_i \in \mathbf{R} \quad (i = 0, ..., N)$ együtthatókkal $f := \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f_i \in D^n\{a\}$, és

$$f^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f_i^{(n)}(a).$$

Nem nehéz belátni azt sem, hogy a 7.3.1. Tételnek a differenciálható függvények szorzatára vonatkozó része is (az alábbi formában) igaz marad magasabb rendű deriváltakra. Nevezetesen, tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett $f, g \in D^n\{a\}$. Ekkor $fg \in D^n\{a\}$, és (az $f^{(0)} := f$, $g^{(0)} := g$ megállapodással) igaz az alábbi, ún. *Leibniz-szabály*:

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Speciálisan,

$$(fg)''(a) = f''(a)g(a) + 2f'(a)g'(a) + g''(a)f(a),$$

amiről egyébként „direkt" számolással a 7.3.1. Tétel alapján is meggyőződhetünk:

$$(fg)''(a) = \left((fg)'\right)'(a) = (f'g + fg')'(a) = (f'g)'(a) + (fg')'(a) =$$

$$f''(a)g(a) + f'(a)g'(a) + f'(a)g'(a) + g''(a)f(a) =$$

$$f''(a)g(a) + 2f'(a)g'(a) + g''(a)f(a).$$

Az „általános" formula bizonyításához alkalmazzuk a teljes indukciót: $n = 1$ esetén elegendő a 7.3.1. Tételre hivatkozni. Ha valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett igaz az állításunk, valamint $f, g \in D^{n+1}\{a\}$, akkor a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ összegben szereplő összes $f^{(k)}g^{(n-k)}$ függvényre $f^{(k)}g^{(n-k)} \in D\{a\}$ $(k = 0, ..., n)$ teljesül, ezért a 7.3.1. Tételbeli „linearitási szabály" miatt $(fg)^{(n)} \in D\{a\}$, azaz $fg \in D^{n+1}\{a\}$, és (a 7.3.1. Tétel „szorzási szabályára" is tekintettel)

$$(fg)^{(n+1)}(a) = \left((fg)^{(n)}\right)'(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'(a) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((f^{(k)})'(a) g^{(n-k)}(a) + (g^{(n-k)})'(a) f^{(k)}(a)\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + g^{(n-k+1)}(a) f^{(k)}(a)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n+1-k)}(a) f^{(k)}(a) =$$

$$f^{(n+1)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) + f(a)g^{(n+1)}(a) =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a).$$

7.7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum(a_n(t-a)^n)$ *hatványsor* r *konvergencia-sugara nullától különböző, és legyen*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \qquad (x\in\mathbf{K},\ |x-a|<r).$$

Ekkor $f\in D^{\infty}$, *és bármely* $1\le k\in\mathbf{N}$ *esetén*

$$(*)\qquad f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)a_n(x-a)^{n-k} \qquad (x\in\mathbf{K},\ |x-a|<r).$$

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazva $k=1$-re a 7.3.4. Tételben láttuk be az állítást. Ha valamilyen $1\le k\in\mathbf{N}$ esetén a tételünk igaz, akkor

$$f^{(k)}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}(n+k-j)a_{n+k}(x-a)^n \qquad (x\in\mathbf{K},\ |x-a|<r)$$

miatt az $f^{(k)}$ egy hatványsor összegfüggvénye. Ezért (ld. 7.3.4. Tétel) $f^{(k)}\in D$ (más szóval $f\in D^{k+1}$), és

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)})'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(n+k-j)a_{n+k}(x-a)^{n-1}=$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)a_n(x-a)^{n-k-1}=$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k}(n-j)a_n(x-a)^{n-(k+1)} \qquad (x\in\mathbf{K},\ |x-a|<r),$$

ami nem más, mint a tételbeli $(*)$ formula k helyett $(k+1)$-re ■

Írjunk az előző tétel $(*)$ egyenlőségében x helyébe a-t, amikor a következőt kapjuk:

$$f^{(k)}(a)=\sum_{n=k}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)a_n(a-a)^{n-k}=\prod_{j=0}^{k-1}(k-j)a_k=a_k k!,$$

tehát (továbbra is az $f^{(0)}:=f$ megállapodással)

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k\in\mathbf{N}).$$

Ezzel beláttuk azt a már korábban említett tényt, miszerint egy hatványsor együtthatóit a hatványsor összegfüggvénye meghatározza. Mindez motiválja az alábbi „fordított" utat.

Ti. induljunk ki most egy olyan $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényből, amelyre az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ helyen $g \in D^\infty\{a\}$ teljesül, és legyen

$$c_k := \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az így definiált c_k $(k \in \mathbf{N})$ számokat a g függvény a-beli *Taylor-együtthatóinak,* a

$$\sum (c_n(t-a)^n) = \sum \left(\frac{g^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \right)$$

hatványsort pedig a g függvény a-beli *Taylor-sorának* nevezzük. (Az $a = 0$ speciális esetben használatos a *Maclaurin-sor* elnevezés is.) A kérdés most már az, hogy ezen túlmenően a $\sum (c_n(t-a)^n)$ Taylor-sornak „mi köze van" a g függvényhez? Igaz-e pl. az, hogy (legalább az a egy alkalmas $K(a)$ környezetében) bármely $x \in K(a)$ helyen a szóban forgó Taylor-sor konvergens, és

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad (x \in K(a))?$$

Minden további feltétel nélkül mindkét kérdésre nemleges a válasz. Pl. tekintsük a

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ e^{-1/x^2} & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

függvényt. Belátható (ld. 7.8. i) megjegyzés), hogy $g \in D^\infty$, és $g^{(k)}(0) = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$. Következésképpen $c_k = 0$ $(k \in \mathbf{N})$, és így

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

de $0 \neq x \in \mathbf{R}$ esetén $g(x) \neq 0$.

Nyilvánvaló, hogy ha $g \in D^\infty\{a\}$, akkor a $\sum (c_n(t-a)^n)$ Taylor-sorának a konvergencia-vizsgálatához a g függvény és a

$$T_{a,n}g(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

definícióval értelmezett - a g függvény a-beli n*-edik Taylor-polinomjának* - a

$$g(x) - T_{a,n}g(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_g)$$

eltérését kell vizsgálni. Világos, hogy $T_{a,n}g(a) = g(a)$, sőt,

$$\left(T_{a,n}g\right)^{(m)}(a) = g^{(m)}(a) \quad (m = 0, ..., n) \;\; , \;\; \left(T_{a,n}g\right)^{(n+1)} \equiv 0.$$

Ezért az előbbi eltérés csak $a \neq x \in \mathcal{D}_g$ mellett kérdéses. Ezzel kapcsolatos az alábbi tétel.

7.7.2. Tétel. *Legyen valamilyen* $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvény,* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ *belső pont és* $r > 0$ *szám esetén* $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_g$. *Tegyük fel továbbá, hogy* $n \in \mathbf{N}$ *és* $g \in D^{(n+1)}\{x\}$ $(x \in (a-r, a+r))$. *Ekkor bármely* $a \neq z \in (a-r, a+r)$ *esetén van olyan* $\xi \in (a,z)$ *(ha* $z > a$*), vagy* $\xi \in (z,a)$ *(ha* $z < a$*), amellyel*

$$g(z) - T_{a,n}g(z) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelölést:

$$\delta := \frac{g(z) - T_{a,n}g(z)}{(z-a)^{n+1}},$$

és legyen

$$F(x) := g(x) - T_{a,n}g(x) - \delta(x-a)^{n+1} \qquad (x \in (a-r, a+r)).$$

Ekkor (könnyen láthatóan) $F \in D^{n+1}\{x\}$, és bármely $m = 1, ..., n+1$, ill. $x \in (a-r, a+r)$ esetén

$$F^{(m)}(x) = g^{(m)}(x) - (T_{a,n}g)^{(m)}(x) - \delta \cdot \prod_{j=0}^{m-1}(n-j+1)(x-a)^{n+1-m}.$$

Innen világos, hogy $F(z) = F^{(m)}(a) = 0$ $(m = 0, ..., n)$, ill.

$$F^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x) - \delta \cdot (n+1)! \qquad (x \in (a-r, a+r)).$$

Tehát $F(z) = F(a) = 0$, amiből a Rolle-tétel alapján (ld. 7.5.2. Tétel) kapunk olyan ξ_1-et (a z, a helyek között), hogy

$$F'(\xi_1) = 0.$$

Mivel $F'(a) = 0$, ezért ismét a Rolle-tétel szerint létezik olyan ξ_2 (a ξ_1, a helyek között), amellyel

$$F''(\xi_2) = 0.$$

Ezt az eljárást folytatva olyan $\xi_1, ..., \xi_{n+1}$ pontokat kapunk (ahol ξ_{k+1} $(k = 1, ..., n)$ az a, ξ_k helyek közé esik), hogy

$$F^{(m)}(\xi_m) = 0 \qquad (m = 1, ..., n+1).$$

Legyen $\xi := \xi_{n+1}$, ekkor

$$F^{(n+1)}(\xi) = g^{(n+1)}(\xi) - \delta \cdot (n+1)! = 0$$

miatt

$$\delta = \frac{g(z) - T_{a,n}g(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

ami nyilván a bizonyítandó állítással ekvivalens. ■

Ha az előző tételben még az is teljesül (valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén), hogy

$$M_n := \sup\{|g^{(n+1)}(t)| : t \in (a-r, a+r)\} < +\infty,$$

akkor

$$\frac{|g(z) - T_{a,n}g(z)|}{|z-a|^n} \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |z-a| \to 0 \qquad (z \to a)$$

miatt

$$\lim_{z \to a} \frac{g(z) - T_{a,n}g(z)}{(z-a)^n} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy ez utóbbi szempontból már a $g \in D^n\{a\}$ feltételezés is elegendő.

7.7.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n \in \mathbf{N}$ *és* $g \in D^n\{a\}$. *Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{a,n}g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Bizonyítás. Ha $n = 0$, azaz $g \in D^0\{a\} := \mathcal{C}\{a\}$, akkor $T_{a,0}g(x) = g(a) \quad (x \in \mathbf{R})$. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, ezért $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Ez azt jelenti, hogy az állításunk $n = 0$ mellett igaz. Ha $n = 1$, akkor

$$T_{a,1}g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

így

$$g(x) - T_{a,1}g(x) = g(x) - g(a) - g'(a)(x-a) =$$
$$(x-a) \cdot \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} - g'(a) \right) \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g).$$

Más szóval

$$\frac{g(x) - T_{a,1}g(x)}{x-a} = \frac{g(x) - g(a)}{x-a} - g'(a) \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g),$$

ahol (ld. 7.1.2. Tétel)

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

miatt

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{a,1}g(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} - g'(a) \right) = 0.$$

Ezért a 7.7.3. Tétel az $n = 1$ esetben lényegében nem más, mint a $g \in D\{a\}$ differenciálhatóság definíciója.

Teljes indukciót alkalmazva tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül a tételbeli állítás, és legyen $g \in D^{n+1}\{a\}$. Ekkor $g' \in D^n\{a\}$, amikor is (az indukciós feltevést g'-re alkalmazva)

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x) - T_{a,n}g'(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$(T_{a,n+1}g)'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kg^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k-1)!} \cdot (x-a)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k+1)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(g')^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = T_{a,n}g'(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{a,n+1}g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

A $g \in D^{(n+1)}\{a\}$, $n \geq 1$ feltételezés miatt $g \in D^2\{a\}$, így egy alkalmas $r > 0$ számmal $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_g$, és $g \in D\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$. Az

$$F(x) := g(x) - T_{a,n+1}g(x) \ , \ G(x) = (x-a)^{n+1} \qquad (x \in (a-r, a+r))$$

jelölésekkel a következők teljesülnek:

$$F, G \in D\{x\} \ , \ G'(x) = (n+1)(x-a)^n \neq 0 \qquad (a \neq x \in (a-r, a+r)),$$

és $\lim_a F = \lim_a G = 0$. Alkalmazható tehát a L'Hospital-szabály (ld. 7.5.17. Tétel), miszerint

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{a,n+1}g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} =$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g'(x) - (T_{a,n+1}g)'(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g'(x) - T_{a,n}g'(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

■

A magasabb rendű deriváltak segítségével mintegy „kontrollálhatjuk" a 7.5. pont egyes tételeiben szereplő, az ún. *függvényvizsgálattal* kapcsolatos feltételeket. Kezdjük pl. a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó elégséges feltétellel (ld. 7.5.9. Tétel): ha pl. az f' derivált-függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen $(+,-)$-jelváltása van, akkor az a lokális maximumhelye az f-nek. Ha viszont $f \in D^2\{a\}$, és $f''(a) = (f')'(a) < 0$, akkor (ld. 7.6. xvi) megjegyzés) az f' függvény az a-ban lokálisan szigorúan fogyó. A jelváltás miatt $f'(a) = 0$ is igaz, így világos, hogy f'-nek az a-ban szigorú $(+,-)$-jelváltása van. Következésképpen (ld. xviii) megjegyzés) az f-nek az a-ban szigorú lokális maximuma van.

Hasonló meggondolással kapunk elégséges feltételt arra nézve, hogy az f-nek az a-ban szigorú lokális minimuma legyen. Ezzel beláttuk az alábbi tételt (ez az ún. *másodrendű elégséges feltétel* a lokális szélsőérték létezésére):

7.7.4. Tétel. *Ha az* $f \in D^2\{a\}$ *függvényre* $f'(a) = 0$, *és* $f''(a) \neq 0$, *akkor az* f*-nek az* a*-ban szigorú lokális szélsőértéke van. Ez utóbbi az* $f''(a) < 0$ *esetben szigorú lokális maximum, az* $f''(a) > 0$ *esetben pedig szigorú lokális minimum.*

Ha a differenciálható $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor (ld. 7.5.12. Tétel) (pl.) az f konvexitása azzal ekvivalens, hogy az f' deriváltfüggvény monoton növő. Ha itt $f \in D^2$ is igaz, akkor a 7.5.5. Tétel szerint viszont az f' monoton növekedése azzal ekvivalens, hogy $(f')' = f'' \geq 0$. Hasonlóan jutunk a konkávitás jellemzéséhez, tehát a következő tételhez:

7.7.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvény nyílt intervallumon van értelmezve, és* $f \in D^2$. *Ekkor az alábbiak teljesülnek:*

a) *az* f *konvex volta azzal ekvivalens, hogy* $f'' \geq 0$;

b) *az* f *konkáv volta azzal ekvivalens, hogy* $f'' \leq 0$;

c) *ha* $f'' > 0$, *akkor az* f *szigorúan konvex;*

d) *ha* $f'' < 0$, *akkor az* f *szigorúan konkáv.*

Induljunk ki most egy $f \in D^3\{a\}$ függvényből, és tegyük fel, hogy

$$(f')'(a) = f''(a) = 0 \ , \ (f')''(a) = f'''(a) \neq 0.$$

Ekkor alkalmazható az előbbi 7.7.4. Tétel az $f' \in D^2\{a\}$ függvényre, miszerint az f' deriváltfüggvénynek az a-ban szigorú lokális szélsőértéke van. Ez viszont a 7.5.14. Tétel alapján azt jelenti, hogy az f-nek az a-ban szigorú inflexiója van (ld. 7.6. xxi) megjegyzés). Ezért igaz a

7.7.6. Tétel. *Ha* $f \in D^3\{a\}$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, *akkor az* f *függvénynek az* a*-ban szigorú értelemben inflexiója van.*

Analóg megfontolásokkal jutunk az alábbi tételhez is. Tegyük fel ui., hogy adott az $f \in D^2\{a\}$ függvény, és $f''(a) = (f')'(a) > 0$ (< 0). Ekkor (ld. 7.5.15. Tétel, ill. 7.6. xvi) megjegyés) az f' deriváltfüggvény az a-ban szigorúan lokálisan növő (fogyó). Ez a 7.6. xvii) megjegyzés alapján azt eredményezi, hogy az f függvény az a-ban szogorúan lokálisan konvex (konkáv). Fennáll tehát a

7.7.7. Tétel. *Legyen* $f \in D^2\{a\}$, *és tegyük fel, hogy* $f''(a) \neq 0$. *Ekkor:*

a) *ha* $f''(a) > 0$, *akkor az* f *függvény az* a*-ban szigorúan lokálisan konvex;*

b) *ha* $f''(a) < 0$, *akkor az* f *függvény az* a*-ban szigorúan lokálisan konkáv.*

Ha az $f \in D^2\{a\}$ függvényről azt tudjuk, hogy az a-ban lokálisan konvex, akkor könnyen beláthatóan $f''(a) \geq 0$. Ti. $f''(a) < 0$ esetén a 7.7.7. Tétel szerint az f az a-ban szigorúan lokálisan konkáv lenne, ami nyilván ellentmond a feltételezett lokális konvexitásnak.

Ehhez hasonlóan adódik az alábbi következmény is: ha $f \in D^2\{a\}$, és az f-nek az a-ban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$. Ui. (pl.) $f''(a) > 0$ esetén a 7.7.7. Tétel értelmében az f függvény az a-ban szigorúan lokálisan konvex lenne, ami ellentmond annak, hogy az f-nek az a-ban inflexiója van.

7.7.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen* $2 \leq n \in \mathbf{N}$ *mellett* $f \in D^n\{a\}$, *és*

$$f^{(k)}(a) = 0 \;\; (k = 1, ..., n-1) \;\; , \;\; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ekkor:

a) *páros* n *esetén az* f *függvénynek az* a*-ban szigorú lokális szélsőértéke van, mégpedig szigorú lokális minimuma, ha* $f^{(n)}(a) > 0$, *és szigorú lokális maximuma, ha* $f^{(n)}(a) < 0$;

b) *páratlan* n *esetén az* f *függvénynek az* a*-ban szigorú értelemben vett inflexiója van.*

Bizonyítás. Tegyük fel pl., hogy $(f^{(n-1)})'(a) = f^{(n)}(a) > 0$. Ekkor (ld. 7.6. xvi) megjegyzés) az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény az a-ban szigorúan lokálisan növekedő. Mivel $f^{(n-1)}(a) = 0$, ezért egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben

$$f^{(n-1)}(x) < 0 < f^{(n-1)}(t) \qquad (x, t \in K(a), x < a < t).$$

Ez egyúttal azt jelenti, hogy $f^{(n-1)} = (f^{(n-2)})'$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$-jelváltása van. Így a 7.6. xviii) megjegyzés szerint $f^{(n-2)}$-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van. A feltételeink miatt ugyanakkor $f^{(n-2)}(a) = 0$, következésképpen egy $\widetilde{K}(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben

$$(f^{(n-3)})'(x) = f^{(n-2)}(x) > 0 \qquad (a \neq x \in \widetilde{K}(a)).$$

A 7.5.7. Tétel alapján tehát a $\widetilde{K}(a)$ környezeten az $f^{(n-3)}$ függvény szigorúan monoton növő, speciálisan szigorúan lokálisan monoton növő is (feltéve, hogy $n \geq 3$).

Ezt az eljárást rekurzíve „folytatva" oda jutunk, hogy (pl.) $f^{(n)}(a) > 0$ esetén $f^{(n-2j-1)}$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$-jelváltása, $f^{(n-2k)}$-nak pedig az a-ban szigorú lokális minimuma van (hacsak a $j \in \mathbf{N}$, $1 \le k \in \mathbf{N}$ számokra $n - 2j - 1 \ge 0$, ill. $n - 2k \ge 0$ teljesül). Ha tehát $n = 2N$ alakú (valamilyen $1 \le N \in \mathbf{N}$ mellett), akkor a $k = N$ választással azt kapjuk, hogy az $f^{(n-2N)} = f^{(0)} = f$ függvénynek az a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha viszont $n = 2M + 1$ (valamilyen $1 \le M \in \mathbf{N}$ mellett), akkor a $j = M - 1$ választással $f^{(n-2M+1)} = f''$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$-jelváltása, azaz (ld. 7.6. xviii) megjegyzés) f'-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van. Ez azt jelenti (ld. 7.6. xxi) megjegyzés), hogy az f-nek az a-ban szigorú inflexiója van.

Hasonló a gondolatmenet akkor is, ha az $f^{(n)}(a) < 0$ feltételezésből indulunk ki. ■

Tegyük fel, hogy valamilyen $u, v \in \mathbf{R}$, $u < v$ esetén az $f : [u, v] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és minden $x \in (u, v)$ helyen differenciálható. A Weierstrass-féle 5.5.10. Tétel értelmében léteznek az

$$m := \min \mathcal{R}_f \quad , \quad M := \max \mathcal{R}_f$$

abszolút szélsőértékei az f-nek. Ha $a, b \in [u, v]$ egy-egy abszolút minimum, ill. abszolút maximum hely, azaz

$$m = f(a) \quad , \quad M = f(b),$$

akkor a-ban, b-ben az f-nek egyúttal nyilván lokális minimuma, ill. lokális maximuma van. Ha tehát (pl.) $a \in (u, v)$ (az intervallum belső pontja), akkor az elsőrendű szükséges feltétel (ld. 7.5.1. Tétel) szerint

$$f'(a) = 0.$$

Így az abszolút szélsőértékek meghatározásához első lépésként az f' deriváltfüggvény zérushelyeit (az ún. *stacionárius pontokat*) kell megkeresni. Legyen ezek halmaza $\mathcal{S}$, amikor is

$$a, b \in \mathcal{S} \cup \{u, v\}.$$

Ha esetleg $\mathcal{S} = \emptyset$, akkor $\{a, b\} = \{u, v\}$, más szóval az abszolút szélsőérték-helyek az $[u, v]$ intervallum végpontjai: $\{m, M\} = \{f(u), f(v)\}$. Ha viszont $\mathcal{S} \ne \emptyset$, akkor az alábbi esetek lehetségesek:

1^o $\max\{f(u), f(v)\} \ge f(\xi)$ $(\xi \in \mathcal{S})$, ekkor $M = f(u)$, vagy $M = f(v)$;

2^o $\min\{f(u), f(v)\} \le f(\xi)$ $(\xi \in \mathcal{S})$, ekkor $m = f(u)$, vagy $m = f(v)$;

3^o ha 1^o nem igaz, akkor $M = \max\{f(\xi) : \xi \in \mathcal{S}\}$;

4^o ha 2^o nem igaz, akkor $m = \min\{f(\xi) : \xi \in \mathcal{S}\}$.

A 7.7.8. Tétel b) állítása alapján esetleg „szűkíthetjük" az $\mathcal{S}$ halmazt az alábbi értelemben: ha valamilyen $\xi \in \mathcal{S}$ helyen egy $2 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett $f \in D^n\{\xi\}$, és

$$f^{(k)}(\xi) = 0 \ \ (k = 1, ..., n-1) \ \ , \ \ f^{(n)}(\xi) \neq 0,$$

akkor páratlan n esetén az f függvénynek a ξ-ben szigorú értelemben vett inflexiója van. Mivel ekkor $f'(\xi) = 0$ is igaz, ezért (a ξ-beli e_ξ érintőre) $e_\xi \equiv f(\xi)$, és egy alkalmas $\delta > 0$ mellett minden $\xi - \delta < x < \xi < y < \xi + \delta$ helyen

$$f(x) - e_\xi(x) = f(x) - f(\xi) < 0 < f(y) - e_\xi(y) = f(y) - f(\xi),$$

azaz

$$f(x) < f(\xi) < f(y),$$

vagy

$$f(x) - e_\xi(x) = f(x) - f(\xi) > 0 > f(y) - e_\xi(y) = f(y) - f(\xi),$$

tehát

$$f(x) > f(\xi) > f(y).$$

Következésképpen ξ-ben nincs lokális szélsőértéke f-nek, ezért itt abszolút szélsőértéke sincs. Ha $\mathcal{S}_0$ az ilyen tulajdonságú pontok halmaza, akkor a fentiekben szereplő $\mathcal{S}$-et kicserélhetjük $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$-ra. Tekintsük pl. az

$$f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (-3 \leq x \leq 2)$$

függvényt. Ekkor

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \qquad (-3 \leq x \leq 2),$$

így az $\mathcal{S}$ halmaz elemei az $x^2 + x - 2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei:

$$\mathcal{S} = \{-2, 1\}.$$

Számítsuk ki tehát az $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$ helyettesítési értékeket:

$$f(-3) = 10 \ \ , \ \ f(-2) = 21 \ \ , \ \ f(1) = -6 \ \ , \ \ f(2) = 5.$$

Világos, hogy most a fenti 3^o és 4^o eset valósul meg, ezért

$$\max \mathcal{R}_f = \max\{21, -6\} = 21 \ \ , \ \ \min \mathcal{R}_f = \min\{21, -6\} = -6.$$

Ugyanakkor a

$$g(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (-4 \leq x \leq 2)$$

függvényre az $\mathcal{S}$ halmaz nyilván ugyanaz, mint az előbb, de $f(-4) = -31 < 5 = f(2)$ miatt a 2^o és 3^o eset áll elő. Következésképpen most

$$\min \mathcal{R}_g = g(-4) = -31 \ \ , \ \ \max \mathcal{R}_g = \max\{21, -6\} = 21.$$

7.8. Megjegyzések

i) Tekintsük a

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ e^{-1/x^2} & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy $g \in D^{\infty}$, és $g^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ehhez teljes indukcióval először azt látjuk be, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén $g \in D^n\{x\}$, és

$$g^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{P(x)}{x^m} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R})$$

alkalmas (n-től függő) $m \in \mathbf{N}$ kitevő és P polinom mellett. Valóban, a $g^{(0)} = g$ megállapodás alapján mindez $n = 0$-ra triviális. Legyen $n = 1$, ekkor (ld. 7.3.1., 7.3.2. Tételek) $g \in D\{x\}$, és

$$g'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

ezért a $P \equiv 2$, $m := 3$ választás megfelelő. Ha valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett $g \in D^n\{x\} \quad (0 \neq x \in \mathbf{R})$, és $g^{(n)}(x)$ az indukciós feltételünk szerinti, akkor (ld. 7.3.1., 7.3.2. Tételek) $g^{(n)} \in D\{x\}$ $(0 \neq x \in \mathbf{R})$. Továbbá

$$g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)})'(x) =$$

$$e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \frac{P(x)}{x^m} + e^{-1/x^2} \cdot \frac{x^m P'(x) - m x^{m-1} P(x)}{x^{2m}} =$$

$$e^{-1/x^2} \cdot \frac{2P(x)}{x^{m+3}} + e^{-1/x^2} \cdot \frac{xP'(x) - mP(x)}{x^{m+1}} =$$

$$e^{-1/x^2} \cdot \frac{2P(x) + x^3 P'(x) - m x^2 P(x)}{x^{m+3}} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Így a

$$Q(t) := 2P(t) + t^3 P'(t) - m t^2 P(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

polinommal

$$g^{(n+1)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{Q(x)}{x^{m+3}} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Most mutassuk meg, hogy $g \in D^n\{0\}$, és $g^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel $g^{(0)}(0) = g(0) = 0$, ezért (ld. teljes indukció) tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett már létezik a $g^{(n)}(0) = 0$ derivált. Ekkor $g \in D^{n+1}\{0\}$, $g^{(n+1)}(0) = 0$ azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{x \to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(e^{-1/x^2} \cdot \frac{P(x)}{x^{m+1}} \right) = 0$$

határérték. Itt a $P(x)/x^{m+1} \quad (0 \neq x \in \mathbf{R})$ hányados alkalmas $x^k \quad (k \in \mathbf{Z})$ alakú hatványok lineáris kombinációja, ezért elég azt belátni (ld. 5.3.3. Tétel), hogy

$$(*) \qquad \lim_{x \to 0} (x^k \cdot e^{-1/x^2}) = 0 \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Legyen $0 \neq x \in \mathbf{R}$, ekkor

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} > \frac{z^N}{N!} \qquad (0 < z \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N})$$

miatt tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x^k \cdot e^{-1/x^2}| = \frac{|x|^k}{e^{1/x^2}} < |x|^{2n+k} \cdot n! \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Válasszuk az előbbi $\mathbf{N} \ni n$-et úgy, hogy $2n + k > 0$, ekkor $\lim_{x \to 0} |x|^{2n+k} = 0$, amiből $(*)$ már következik.

ii) A 7.7.2. Tételben szereplő

$$\ell_n(z) := \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} \qquad (a \neq z \in (a-r, a+r))$$

függvényt *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük, ahol tehát

$$g(z) = T_{a,n}g(z) + \ell_n(z) \qquad (a \neq z \in (a-r, a+r)).$$

Ha itt $n = 0$, azaz $g \in D\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$, akkor

$$\ell_0(z) = g'(\xi)(z-a) \qquad (a \neq z \in (a-r, a+r)),$$

és

$$g(z) - T_{a,0}g(z) = g(z) - g(a) = g'(\xi)(z-a) \qquad (a \neq z \in (a-r, a+r)).$$

Az utóbbi egyenlőség valójában nem más, mint a Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel).

iii) Legyen a 7.7.3. Tételben

$$\Delta_n(x) := g(x) - T_{a,n}g(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_g),$$

ekkor

$$\lim_{x \to a} \delta_n(x) := \lim_{x \to a} \frac{\Delta_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

és

$$g(x) = T_{a,n}g(x) + \delta_n(x) \cdot (x-a)^n \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g).$$

A $\mathcal{D}_g \setminus \{a\} \ni x \mapsto \delta_n(x) \cdot (x-a)^n$ függvény az ún. *Peano-féle maradéktag.*

iv) Ha most $n=2$ és $g \in D^2\{a\}$, akkor

$$T_{a,2}g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) + \frac{g''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen (ld. 7.7.3. Tétel)

$$\lim_{x\to a} \delta_2(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_{a,2}g(x)}{(x-a)^2} =$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{g(x) - g(a) - g'(a)\cdot(x-a)}{(x-a)^2} - \frac{g''(a)}{2} \right) = 0$$

azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a) - g'(a)\cdot(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{g''(a)}{2}$$

határérték. Ez utóbbi egyenlőség felfogható a $g''(a)$ második derivált egyfajta jellemzéseként is.

v) Tekintsük az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in D^2$ függvényt, és tegyük fel, hogy

$$M_k := \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbf{R}\} < +\infty \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Belátjuk, hogy

$$M_1^2 \le 2M_0M_2.$$

Alkalmazzuk ehhez a 7.7.2. Tételt az $a \in \mathbf{R}$, $n = 2$ választással:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_x)}{2}\cdot(x-a)^2 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $\xi_a := a$, ill. $x \ne a$ esetén $\xi_x \in \mathbf{R}$ az a, x helyek közé eső alkalmas szám. Ha itt $y := x - a$, akkor az $f(a) \le 0$ esetben a következőt mondhatjuk:

$$0 = f(a) - f(x) + f'(a)y + \frac{f''(\xi_x)}{2}\cdot y^2 \le$$

$$-f(x) + f'(a)y + \frac{f''(\xi_x)}{2}\cdot y^2 \le M_0 + f'(a)y + \frac{M_2}{2}\cdot y^2 \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Elemi megfontolásokkal innen azt kapjuk, hogy az $M_2 \ne 0$ feltételezés mellett az

$$\mathbf{R} \ni y \mapsto M_0 + f'(a)y + \frac{M_2}{2}\cdot y^2$$

másodfokú polinom *diszkriminánsára*

$$(f'(a))^2 - 4\cdot M_0\cdot \frac{M_2}{2} = (f'(a))^2 - 2M_0M_2 \le 0.$$

Ha $(M_2 \neq 0$ és$)$ $f(a) \ge 0$, akkor az előbb mondottakat a $g := -f$ függvényre alkalmazva: $g \in D^2$, $g^{(k)} = -f^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2)$, $g(a) \le 0$, ezért

$$0 \le -g(x) + g'(a)y + \frac{g''(\xi_x)}{2}\cdot y^2 = f(x) - f'(a)y - \frac{f''(\xi_x)}{2}\cdot y^2 \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$0 \le M_0 - f'(a)y + \frac{M_2}{2}\cdot y^2 \qquad (y \in \mathbf{R}),$$

amiből az előbbiekkel analóg módon

$$(-f'(a))^2 - 2M_0M_2 = (f'(a))^2 - 2M_0M_2 \le 0$$

adódik. Más szóval bármelyik $a \in \mathbf{R}$ helyen

$$(f'(a))^2 \le 2M_0M_2,$$

tehát (a-ban „szuprémumot véve") $M_1^2 \le 2M_0M_2$.

Ezzel az $M_2 \neq 0$ esetet „elintéztük". Ha $M_2 = 0$, akkor

$$(f')'(x) = f''(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ezért (ld. 7.5.6. Tétel) valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$f'(x) = c \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Legyen $h(x) := f(x) - cx \ (x \in \mathbf{R})$, ekkor $h \in D$, és

$$h'(x) = f'(x) - c = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

így (ld. 7.5.6. Tétel) létezik olyan $d \in \mathbf{R}$, hogy $h(x) = d \quad (x \in \mathbf{R})$. Figyelembe véve a h definícióját innen

$$f(x) = cx + d \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik. Könnyen belátható, hogy az $M_0 < +\infty$ feltételezésből adódóan $c = 0$. Különben ui.

$$|f(x)| \ge |cx| - |d| \ge \left(|c| - \frac{|d|}{|x|}\right)\cdot |x| \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

és $|c| - |d|/|x| \to |c| > 0 \quad (|x| \to +\infty)$ miatt $|f(x)| \to +\infty \quad (|x| \to +\infty)$, ami nyilván ellentmond az $M_0 < +\infty$ feltételnek. Tehát $c = 0$, így $f' \equiv 0$, $M_1 = 0$, és a bizonyítandó $M_1^2 = 0 \le 2M_0M_2$ becslés már triviális.

vi) A 7.7.1. Tétel értelmében exp, sin, cos, sh, ch $\in D^\infty$, és (ld. 7.3.5. Tétel)

$$\exp^{(n)} = \exp \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\sin^{(4k+j)} = \begin{cases} \cos & (j=1) \\ -\sin & (j=2) \\ -\cos & (j=3) \\ \sin & (j=4) \end{cases}, \quad \cos^{(4k+j)} = \begin{cases} -\sin & (j=1) \\ -\cos & (j=2) \\ \sin & (j=3) \\ \cos & (j=4) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

$$\mathrm{sh}^{(2k+j)} = \begin{cases} \mathrm{ch} & (j=1) \\ \mathrm{sh} & (j=2) \end{cases}, \quad \mathrm{ch}^{(2k+j)} = \begin{cases} \mathrm{sh} & (j=1) \\ \mathrm{ch} & (j=2) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

vii) Tegyük fel, hogy a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergencia-sugara nem nulla, és legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x-a| < r)$$

a szóban forgó hatványsor összegfüggvénye. Ekkor a $\sum (a_n(t-a)^n)$ hatványsor nem más, mint az f analitikus függvény a-beli Taylor-sora, amikor is

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x-a| < r)$$

(az f függvényt „előállítja" a Taylor-sora). A 4.5.3. Tétel értelmében bármilyen $b \in \mathbf{R}$, $|b-a| < r$ esetén léteznek a

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(b-a)^{n-k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

sorösszegek, és tetszőleges $0 < \rho < r - |b-a|$ mellett

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-b)^k \qquad (x \in K_\rho(b)).$$

Következésképpen

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b-a)^{n-k} = \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

(ami egyébként a 7.7.1. Tétel alapján is adódik). Minden

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \qquad (k \in \mathbf{R})$$

polinom analitikus függvény (ahol $N \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_N \in \mathbf{R}$, $a_N \neq 0$). Mivel a $k > N$, $k \in \mathbf{N}$ „kitevőkre" $P^{(k)} \equiv 0$, ezért az $a := 0$, $a_j := 0 \quad (N < j \in \mathbf{N}), b \in \mathbf{R}$ szereposztással most

$$\frac{P^{(k)}(b)}{k!} = b_k = \begin{cases} 0 & (k > N) \\ \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n b^{n-k} & (k \leq N) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

és

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k (x-b)^k \qquad (k \in \mathbf{R}).$$

Írjuk fel pl. a

$$P(x) := 1 + 3x + 5x^2 + 2x^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

harmadfokú polinomot alkalmas b_0, b_1, b_2, b_3 valós számokkal a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{3} b_k (x+1)^k \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

alakban. Legyen ehhez $N := 3, b := -1$, ekkor

$$P'(x) = 3 + 10x + 6x^2 \quad , \quad P''(x) = 10 + 12x \quad , \quad P'''(x) = 12 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

és

$$b_0 = P(-1) = 1 \quad , \quad b_1 = P'(-1) = -1,$$
$$b_2 = P''(-1)/2 = -1 \quad , \quad b_3 = P'''(-1)/6 = 2.$$

Ezért

$$P(x) = 2(x+1)^3 - (x+1)^2 - (x+1) + 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

viii) Tegyük fel, hogy a 7.7.2. Tételben szereplő g függvényre (az ottani jelölésekkel) $g \in D^{\infty}\{x\}$ $(x \in (a-r, a+r))$, és

$$(*) \qquad M := \sup \{|g^{(k)}(x)| : x \in (a-r, a+r),\ k \in \mathbf{N}\} < +\infty$$

teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|g(z) - T_{a,n}g(z)| \leq M \cdot \frac{|z-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (z \in (a-r, a+r)),$$

ahol $\lim(q^n/n!) = 0$ $(q \in \mathbf{K})$ miatt $\lim_{n\to\infty}(|z-a|^{n+1}/(n+1)!) = 0$. Ezért a $(*)$ feltétel teljesülése esetén

$$\lim_{n\to\infty}(g(z) - T_{a,n}g(z)) = 0 \qquad (z \in (a-r, a+r)).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \cdot (z-a)^k \qquad (z \in (a-r, a+r))$$

(a g függvényt az $(a-r, a+r)$ intervallumon előállítja a Taylor-sora). Legyen pl. $g := \sin$, ekkor $r = +\infty$, és (ld. vi) megjegyzés) $M = 1$. Azt mondhatjuk tehát, hogy

$$|\sin(z) - T_{0,n}\sin(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (z \in \mathbf{R}).$$

Speciálisan, ha $n = 1$, akkor

$$T_{0,1}\sin(z) = \sin 0 + \sin'(0)z = \cos'(0)z = z \qquad (z \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$|\sin z - z| \leq \frac{z^2}{2} \qquad (z \in \mathbf{R}).$$

ix) Vizsgáljuk a

$$g(x) := x^4 \quad (x \in \mathbf{R}) \ , \ h(x) := x^5 \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvényeket. Ekkor $g'(0) = g''(0) = 0$, de világos, hogy a g-nek a 0-ban szigorú lokális (sőt, abszolút) minimuma van. Ez azt jelenti, hogy a 7.7.4. Tételben szereplő „$f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$” feltétel csak elégséges, de nem szükséges ahhoz, hogy az f-nek az a-ban lokális szélsőértéke legyen. A g függvény a 0-ban szigorúan lokálisan konvex (sőt, a g globálisan is szigorúan konvex), de $g''(0) = 0$. Más szóval a 7.7.7. Tételbeli „$f''(a) > 0$” feltétel szintén csak elégséges, de nem szükséges a lokális konvexitáshoz. Hasonlóan, $h''(0) = h'''(0) = 0$, és a h-nak a 0-ban szigorú inflexiója van. Tehát a 7.7.6. Tétel „$f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$” feltétele is csak elégséges, de nem szükséges ahhoz, hogy az f-nek az a-ban inflexiója legyen.

x) (*Newton-módszer.*) Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbf{R}$, $f \in D^2$, és $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ $\quad (x \in I)$. A deriváltfüggvények Darboux-tulajdonsága (ld. 7.5.10. Tétel) miatt ezért azt mondhatjuk, hogy az f', f'' függvények állandó előjelűek. Feltehetjük tehát pl. azt, hogy $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0 \quad (x \in I)$. (Az alábbiak értelemszerű módosításával tárgyalhatók az egyéb esetek:

$$f'(x) > 0 \ , \ f''(x) < 0 \qquad (x \in I),$$

ill.

$$f'(x) < 0 \ , \ f''(x) > 0 \qquad (x \in I),$$

vagy

$$f'(x) < 0 \ , \ f''(x) < 0 \qquad (x \in I).)$$

Ekkor (ld. 7.5.7., 7.7.5. Tételek) az f szigorúan monoton növő, és szigorúan konvex. Tegyük fel továbbá, hogy az f-nek van gyöke, azaz létezik olyan $\xi \in I$, amelyre $f(\xi) = 0$. (Ehhez a Bolzano-tétel (ld. 5.5.4. Tétel) alapján elegendő olyan $u, v \in I$, $u < v$ helyeket „találni", hogy $f(u) \cdot f(v) < 0$, amikor is van ilyen ξ gyök az (u, v)-ben.) Az f szigorú monotonitása miatt ekkor a ξ egyértelműen létezik. Legyen $\xi < a \in I$, és

$$e_a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(az a-beli érintő). Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$b := a - \frac{f(a)}{f'(a)} \in (\xi, a),$$

és $e_a(b) = 0$. Ti. $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ alapján $f(a)/f'(a) > 0$, így $b < a$ triviálisan igaz. Továbbá (ld. 7.6. xix) megjegyzés) az f szigorú konvexitása szerint $f(x) > e_a(x)$ $(a \neq x \in I)$, ill. $e_a(b) = 0$ miatt $f(b) > 0$. Mivel az f szigorúan monoton növő, ezért $f(x) < 0 = f(\xi) \quad (I \ni x < \xi)$. Így valóban igaz, hogy $b > \xi$. Mindezek alapján tekintsük azt az $(x_n) : \mathbf{N} \to I$ sorozatot, amelyre

$$\xi < x_0 \in I \ , \ x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in I).$$

(A $\xi < x_0 \in I$ feltétel másként mondva azt jelenti, hogy $x_0 \in I$, és $f(x_0) > 0$.) Ekkor az (x_n) sorozat szigorúan monoton fogyó, és $x_n \in (\xi, x_0] \quad (n \in \mathbf{N})$. A 3.5.3. Tétel értelmében az (x_n) konvergens is, legyen $\eta := \lim(x_n)$. Az f, f' függvények folytonossága (ld. 7.1.3. Tétel), az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel), ill. az 5.5.1. Tétel alapján

$$\eta = \lim(x_{n+1}) = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}.$$

Innen $f(\eta) = 0$, így $\eta = \xi$ következik, tehát

$$\xi = \lim(x_n).$$

Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor (ld. 7.7.2. Tétel)

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)(x_n - \xi) - f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$\frac{f(\xi) - (f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n))}{f'(x_n)} = \frac{f(\xi) - T_{x_n,1}f(\xi)}{f'(x_n)} = \frac{f''(\eta_n)}{2f'(x_n)} \cdot (x_n - \xi)^2$$

(alkalmas $\eta_n \in (\xi, x_n)$ helyen). Tegyük fel, hogy

$$(0 <)\ C_I := \sup\left\{\frac{f''(t)}{2f'(z)} : t, z \in I\right\} < +\infty,$$

ekkor

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C_I(x_n - \xi)^2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha pl.

$$M := \sup\{f''(x) : x \in I\} < +\infty,$$
$$0 < m := \inf\{f'(x) : x \in I\},$$

akkor nyilván

$$C_I \leq \frac{M}{2m}.$$

Innen a $d_n := C_I|x_n - \xi|$ $(n \in \mathbf{N})$ jelöléssel

$$d_{n+1} \leq d_n^2 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

következik, ebből meg (teljes indukcióval)

$$d_n \leq (d_0)^{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mindezt egybevetve azt mondhatjuk, hogy

$$(*) \qquad |x_n - \xi| \leq \frac{1}{C_I} \cdot (C_I|x_0 - \xi|)^{2^n} \leq \frac{1}{C_I} \cdot (C_I \cdot |I|)^{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ahol $|I|$ az I intervallum hossza (nyilván feltehető, hogy $|I| < +\infty$)). Ha itt $C_I \cdot |I| < 1$, akkor az előző $(*)$ egyenlőtlenség egy „hatékony" hibabecslés a ξ gyök és a közelítéséül szolgáló x_n $(n \in \mathbf{N})$ eltérésére, ui. (ld. 3.9.2. Tétel) $(C_I \cdot |I|)^{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. A $C_I \cdot |I| \geq 1$ esetben ugyanakkor pl. az intervallumfelezéses eljárással (ld. 5.6. viii) megjegyzés) „véges sok lépésben" kaphatunk olyan $\xi \in J \subset I$ intervallumot, amelyre már

$$C_J \cdot |J| \leq C_I \cdot |J| < 1,$$

és ezután már tetszőleges $\xi < x_0 \in J$ pontból „indítható" a Newton-módszer. (Emlékeztetünk arra, hogy az I intervallumból kiinduló intervallumfelezéses módszer n-edik

$(n \in \mathbf{N})$ lépésében kapott, a ξ-t tartalmazó $J = J_n$ intervallum hossza $|I|/2^n$. Ezért a J egy z elemét használva a ξ gyök közelítéséül csak annyit mondhatunk a $\xi \approx z$ közelítés hibájáról, hogy $|z - \xi| < |I|/2^n$. A gyakorlatban sokszor kerül sor az ilyen „hibrid" módszerek alkalmazására, ezek vizsgálata a numerikus analízis feladata.)

xi) Az előző megjegyzés illusztrálására tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := x^2 - 2 \qquad (1 < x < 2).$$

Világos, hogy $\xi = \sqrt{2}$, ill.

$$f'(x) = 2x \;,\; f''(x) = 2 \qquad (1 < x < 2),$$

és

$$C := \sup\left\{\frac{f''(t)}{2f'(z)} : 1 < t, z < 2\right\} = \sup\left\{\frac{2}{4z} : 1 < t, z < 2\right\} = \frac{1}{2}.$$

Továbbá az $x_0 := 3/2$ választással

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért $\lim(x_n) = \sqrt{2}$, és

$$|x_n - \sqrt{2}| \le 2\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ld. még 3.10. ii), ix) megjegyzések).

xii) A 7.6. iii) megjegyzésben a $h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény által meghatározott

$$h(x) = 0$$

egyenlet megoldásával, azaz az

$$\{x \in \mathcal{D}_h : h(x) = 0\}$$

halmaz meghatározásával foglalkoztunk. Pl. ekvivalens átalakítással egy f függvény fixpontjainak a kiszámítására vezettük vissza a szóban forgó feladatot, ahol

$$f(x) := h(x)g(x) + x \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Itt a $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény legalább a $\mathcal{D}_h$ halmazon értelmezve van, és annak egyetlen pontjában sem vesz fel nullát. Tegyük fel, hogy $g, h \in D$. Ekkor (ld. 7.3.1. Tétel) $f \in D$, és

$$f'(x) = 1 + g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Ha $h \in D^2$ és $h'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_h)$, akkor a $g := -1/h'$ választással (ld. 7.3.1. Tétel)

$$f(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} \quad , \quad f'(x) = \frac{h(x)h''(x)}{(h'(x))^2} \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $[a,b] \quad (a,b \in \mathbf{R}, a < b)$ intervallummal $[a,b] \subset \mathcal{D}_h$ és $f(x) \in [a,b] \quad (x \in [a,b])$, továbbá

$$q := \sup\left\{\frac{|h(x)h''(x)|}{(h'(x))^2} : x \in [a,b]\right\} < 1.$$

Ekkor alkalmazható a fixpont-tétel (ld. 3.9.9. Tétel), hogy ti. egyértelműen létezik olyan $\xi \in [a,b]$, amelyre $f(\xi) = \xi$, azaz $h(\xi) = 0$, és tetszőleges $x_0 \in [a,b]$ mellett az

$$x_{n+1} := f(x_n) = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat ξ-hez konvergál. Az így kapott algoritmus tehát ugyanaz, mint a Newton-módszer algoritmusa (ld. x)).

xiii) A függvényvizsgálati tételeinknek az egyenletek megoldása során történő alkalmazhatóságát mutatja be az alábbi feladat is: lássuk be, hogy egyértelműen létezik olyan pozitív ξ szám, amelyre

$$1 + 2\ln\xi = \xi^2.$$

Tekintsük ehhez ui. az

$$f(x) := x^2 - 2\ln x - 1 \qquad (x > 0)$$

függvényt. Ekkor (ld. 7.3.6. Tétel) $f \in D$, és

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} \qquad (x > 0).$$

A $\xi := 1$ választással nyilván $f(\xi) = 0$, azaz az 1 megoldása a szóban forgó egyenletnek. Az is világos, hogy

$$f'(x) < 0 < f'(t) \qquad (0 < x < 1 < t).$$

Így (ld. 7.5.7. Tétel, ill. 7.5.8. Lemma) az $f_{|(0,1]}$ leszűkítés szigorúan monoton fogyó, az $f_{|[1,+\infty)}$ pedig szigorúan monoton növő. Ez azt jelenti, hogy az f-nek az 1-ben szigorú értelemben vett abszolút minimuma van:

$$f(x) > f(1) = 0 \qquad (1 \neq x \in (0,+\infty)).$$

xiv) Az előző megjegyzéshez hasonlóan „kezelhető" az alábbi feladat is: mutassuk meg, hogy bármely $0 < x \in \mathbf{R}$ esetén

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x.$$

Legyen ui.

$$f(x) := \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \quad , \quad g(x) := x - \ln(x+1) \qquad (x \geq 0).$$

Az így definiált f, g függvényekre (ld. 7.3.6. Tétel) $f, g \in D\{x\}$, és

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{x^2}{x+1} \quad , \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \qquad (x > 0).$$

Világos, hogy $f'(x) > 0,\ g'(x) > 0\ \ (x > 0)$, következésképpen a 7.5.7. Tétel és a 7.5.8. Lemma miatt az f is és a g is szigorúan monoton növekedő. Ugyanakkor

$$f(0) = g(0) = 0,$$

amiből $f(x) > 0,\ g(x) > 0\ \ (x > 0)$, azaz a kívánt egyenlőtlenségek már következnek.

xv) A közelítő módszerek és az analízis fentebb bizonyos vonatkozásokban már érintett kapcsolatát illusztrálja az alábbi feladat is: adjunk hibabecslést a

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

közelítésre. Legyen ehhez

$$f(x) := \sqrt{1+x} \qquad (x > -1),$$

ekkor könnyen láthatóan $f \in D^\infty$, és a

$$c_n := \begin{cases} 1 & (n = 1, 2) \\ \\ \prod_{k=1}^{n-2}(2k+1) & (2 < n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

jelöléssel

$$(*) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{c_n}{2^n} \cdot (1+x)^{-(2n-1)/2} \qquad (x > -1).$$

Valóban, $f(x) = (1+x)^{1/2}\ \ (x > -1)$ alapján a 7.3.6. Tételt figyelembe véve nyilván $f \in D\{x\}$, és

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2} \qquad (x > -1),$$

ami a $(*)$ formula $n = 1$-re. Analóg okfejtéssel kapjuk, hogy $f' \in D\{x\}$, azaz $f \in D^2\{x\}$, és

$$f''(x) = (f')'(x) = -\frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-3/2} \qquad (x > -1),$$

ez pedig a $(*)$ egyenlőség $n = 2$-re. Hasonlóan, $f'' \in D\{x\}$, így $f \in D^3\{x\}$, és

$$f'''(x) = (f'')'(x) = \frac{3}{8} \cdot (1+x)^{-5/2} \qquad (x > -1),$$

tehát $n = 3$-ra is igaz a $(*)$ alatti képlet. A továbbiakban teljes indukciót alkalmazva tegyük fel, hogy valamilyen $3 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett $f \in D^n\{x\} \quad (x > -1)$, és fennáll a $(*)$ egyenlőség. A 7.3.6. Tétel miatt innen $f^{(n)} \in D\{x\}$, más szóval $f \in D^{n+1}\{x\}$, és

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n+1} \frac{c_n}{2^n} \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \cdot (1+x)^{-(2n-1)/2-1} =$$

$$(-1)^{n+2} \frac{c_n \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \cdot (1+x)^{-(2n+1)/2} =$$

$$(-1)^{n+2} \frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} \cdot (1+x)^{-(2n+1)/2} \qquad (x > -1)$$

adódik. Ez utóbbi a $(*)$ formula n helyett $(n+1)$-re. Tehát

$$f(0) = 1 \ , \ f'(0) = \frac{1}{2} \ , \ f''(0) = -\frac{1}{4},$$

amiből

$$T_{0,2}f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik. Így a 7.7.2. Tétel alapján

$$\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) =$$

$$\sqrt{1+x} - T_{0,2}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot x^3 \qquad (0 < x \leq 1),$$

ahol $\xi \in (0, x)$ egy alkalmas (x-től függő) hely. Mivel a fenti $(*)$ képlet szerint

$$|f'''(\xi)| = \frac{c_3}{8} \cdot (1+\xi)^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^5}} < \frac{3}{8},$$

ezért

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\right| < \frac{3}{48} \cdot x^3 \leq \frac{1}{16} \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Pl., ha $x = 1/2$, akkor

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \approx T_{0,2}f(1/2) = \frac{39}{32} \quad , \quad \left|\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{39}{32}\right| < \frac{1}{128} = 0,0078125.$$

xvi) Mutassuk meg, hogy

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \qquad (-1 < x \leq 1).$$

Speciálisan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Megjegyezzük, hogy $0 < x \leq 1$ esetén a $\sum((-1)^{k+1}x^k/k)$ végtelen sor a 4.3.3. Tétel szerint egy konvergens Leibniz-sor. Legyen

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad (x > -1),$$

ekkor $f \in D^\infty$, és

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\ x > -1).$$

Teljes indukcóval gondolkozva legyen először $n = 1$, ekkor (ld. 7.3.2., 7.3.6. Tételek) $f \in D$, és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad (x > -1).$$

Ha valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén $f \in D^n$, továbbá

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} =$$

$$(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \qquad (x > -1),$$

akkor (ld. 7.3.6. Tétel) $f^{(n)} \in D$, azaz $f \in D^{n+1}$, és

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot (1+x)^{-n-1} =$$

$$(-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad (x > -1).$$

Ezért

$$f(0) = 0 \quad , \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}),$$

így

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és (ld. 7.7.2. Tétel)

$$\Delta_n(x) := \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \right| =$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|^{n+1}} \qquad (0 \neq x \in (-1,1)),$$

alkalmas, a 0 és az x közötti ξ-vel. Világos, hogy $0 < x \leq 1$ esetén $0 < \xi < 1$, ezért

$$\frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|^{n+1}} \leq x^{n+1} \leq 1.$$

Továbbá a $-1/2 \leq x < 0$ helyeken $x < \xi < 0$, amiből

$$|1+\xi| \geq 1 - |\xi| > 1 - |x| \ , \ \frac{|x|}{1-|x|} \leq 1$$

alapján

$$\frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|^{n+1}} < \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1} \leq 1$$

következik. Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\Delta_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \qquad (0 \neq x \in [-1/2, 1]),$$

tehát $\Delta_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ez azt jelenti, hogy a megjegyzésbeli

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k$$

egyenlőség ($x = 0$-ra triviális lévén) minden $x \in [-1/2, 1]$ mellett igaz. A $(-1, -1/2)$ intervallumon (sőt, amint kiderül, a $(-1, 1)$ nyílt intervallumon) a következőképpen láthatjuk be az előbbi egyenlőséget. A Cauchy-Hadamard-tétel (ld. 4.5.2. Tétel) szerint a $\sum((-1)^{k+1}x^k/k)$ hatványsor konvergencia-sugara 1, ezért a

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

összegfüggvény a 7.3.4. Tétel értelmében differenciálható, és

$$g'(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1+x} = f'(x) \qquad (-1 < x < 1).$$

Következésképpen (ld. 7.3.1. Tétel) $f - g \in D\{x\}$, és

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \qquad (-1 < x < 1).$$

Ezért (ld. 7.5.6. Tétel) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$f(x) - g(x) = c \qquad (-1 < x < 1).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$, ami az előbbiek szerint az

$$f(x) = \ln(1+x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot x^k$$

egyenlőség az $x \in (-1, 1)$ helyeken.

xvii) Azt mondjuk, hogy a valós együtthatós P polinomnak az $\alpha \in \mathbf{R}$ szám *ν-szörös gyöke* (ahol $1 \le \nu \in \mathbf{N}$), ha

$$P^{(k)}(\alpha) = 0 \qquad (k = 0, ..., \nu - 1),$$

és $P^{(\nu)}(\alpha) \neq 0$. (A ν számot az α gyök *multiplicitásának* nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan Q (valós együtthatós) polinom, amelyre $Q(\alpha) \neq 0$, és

$$P(x) = (x-\alpha)^{\nu}\cdot Q(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

(ahol $\nu \ge 2$ esetén az α szám a P' (derivált)polinomnak $(\nu - 1)$-szeres gyöke). Valóban, legyen a P polinom fokszáma $1 \le N \in \mathbf{N}$, ekkor a vii) megjegyzés szerint (a $b := \alpha$ szereposztással) a

$$b_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \qquad (k = 0, ..., N)$$

együtthatókkal

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k(x-\alpha)^k \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $P^{(k)} \equiv 0 \quad (N < k \in \mathbf{N})$, ezért az α-ra tett feltétel alapján $\nu \le N$, és $b_k = 0 \ (k = 0, ..., \nu - 1)$. Így

$$P(x) = \sum_{k=\nu}^{N} b_k(x-\alpha)^k =$$

$$(x-\alpha)^{\nu}\cdot\sum_{k=\nu}^{N} b_k(x-\alpha)^{k-\nu}=(x-\alpha)^{\nu}\cdot Q(x) \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ahol tehát

$$Q(x):=\sum_{k=\nu}^{N} b_k(x-\alpha)^{k-\nu} \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Itt

$$Q(\alpha)=b_\nu=\frac{P^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}\neq 0.$$

Fordítva, ha az $R(x):=(x-\alpha)^{\nu}$ $(x\in\mathbf{R})$ polinommal $P=R\cdot Q$, és $Q(\alpha)\neq 0$, akkor a Leibniz-szabály (ld. 7.7.) alapján

$$P^{(m)}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}R^{(j)}\cdot Q^{(m-j)} \qquad (m\in\mathbf{N}).$$

Mivel $R^{(j)}\equiv 0$ $(\nu<j\in\mathbf{N})$, ezért az $m\wedge\nu:=\min\{m,\nu\}$ jelöléssel

$$P^{(m)}=\sum_{j=0}^{m\wedge\nu}\binom{m}{j}R^{(j)}\cdot Q^{(m-j)} \qquad (m\in\mathbf{N}).$$

Ha itt $m=0,...,\nu-1$, akkor $m\wedge\nu=m$, és $R^{(j)}(\alpha)=0$ $(j=0,...,m)$ miatt $P^{(m)}(\alpha)=0$. Ha viszont $m=\nu$, akkor $m\wedge\nu=\nu$, és

$$P^{(\nu)}(\alpha)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}R^{(j)}(\alpha)\cdot Q^{(\nu-j)}(\alpha)=R^{(\nu)}(\alpha)\cdot Q(\alpha)=\nu!\cdot Q(\alpha)\neq 0.$$

Mindez azt jelenti, hogy az α a P-nek ν-szörös gyöke. Ha a P-nek van α-tól különböző valós gyöke is (mondjuk $\beta\in\mathbf{R}$), akkor nyilván $Q(\beta)=0$. Az előbb mondottakat most P helyett Q-ra alkalmazva, ill. mindezt rekurzíve folytatva kapjuk a 2.4. xiv) megjegyzésben idézett *gyöktényezős előállítást* P-re, ha P-nek csak valós gyökei vannak.

xviii) Tegyük fel, hogy a valós együtthatós, nem konstans P polinomnak minden gyöke valós szám, legyenek ezek a gyökök $\alpha_1<...<\alpha_s$ (valamilyen $1\leq s\in\mathbf{N}$ mellett). Az algebra alaptétele szerint (ld. még xvii) megjegyzés) tehát egy alkalmas $0\neq c\in\mathbf{R}$ együtthatóval

$$P(x)=c\cdot\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{\nu_i} \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ahol (ld. 2.4. xiv) megjegyzés) ν_i az α_i $(i=1,...,s)$ gyök multiplicitása, ill. $n:=\sum_{i=1}^{s}\nu_i$ pedig a P fokszáma. Mutassuk meg, hogy a P' (derivált)polinomnak legfeljebb valós gyökei vannak. Ui. $s=1$ esetén a P alakja

$$P(x)=c(x-\alpha_1)^n \qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ezért
$$P'(x) = cn(x-\alpha_1)^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha itt $n = 1$, akkor $P' \equiv c \neq 0$, más szóval P'-nek nincs gyöke (így nem valós gyöke sincs). Ha viszont $n \geq 2$, akkor P'-nek egyetlen $(n-1)$-szeres gyöke van, az α_1 valós szám. Tegyük fel ezek után, hogy $s \geq 2$, amikor is a Rolle-tétel (ld. 7.5.2. Tétel) szerint minden $i = 1, ..., s-1$ esetén $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$ miatt egy alkalmas $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ helyen $P'(\xi_i) = 0$. A xvii) megjegyzés alapján ugyanakkor azt mondhatjuk, hogy ha valamilyen $i = 1, ..., s$ indexre $\nu_i \geq 2$, akkor az α_i a P' deriváltpolinomnak $(\nu_i - 1)$-szeres gyöke. Mivel a ξ_i-k nyilván páronként különbözőek, ezért a ξ_i-k $(i = 1, ..., s-1)$ és az α_j-k $(j = 1, ..., s;\ \nu_j \geq 2)$, mint a P' gyökeinek a multiplicitása összesen legalább
$$s - 1 + \sum_{i=1}^{s} (\nu_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} \nu_i - 1 = n - 1.$$

A P' polinom $(n-1)$-ed fokú, ezért (mutiplicitással számolva) $n-1$ darab gyöke van, ezek az előbbiek szerint nem mások, mint a $\xi_i \quad (i = 1, ..., s-1)$ és az α_j $(j = 1, ..., s;\ \nu_j \geq 2)$ valós számok.

xix) Legyen $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, $n \in \mathbf{N}$, $g \in D^n\{a\}$, és P egy valós együtthatós, legfeljebb n-edfokú polinom. Tegyük fel, hogy
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy $P = T_{a,n} g$, azaz a P polinom a g függvény a-beli n-edik Taylor-polinomja. Ui. az $n = 0$ esetben valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal $P \equiv c$, ill. $g \in \mathcal{C}\{a\}$, ezért létezik $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. A feltétel ezért most
$$\lim_{x \to a} (g(x) - c) = g(a) - c = 0$$

alakú, más szóval $c = g(a) = T_{a,0} g$. Feltehetjük tehát, hogy a továbbiakban már $n \geq 1$. Ekkor a
$$h(x) := \frac{g(x) - P(x)}{(x-a)^n} \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g)$$

függvénnyel $\lim_{x \to a} h(x) = 0$, és
$$P(x) = g(x) - h(x) \cdot (x-a)^n \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g),$$

így
$$P(a) = \lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} (h(x) \cdot (x-a)^n) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Ha $n = 1$, akkor

$$P(x) - P(a) = g(x) - g(a) - h(x)(x-a) \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g),$$

azaz

$$\frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \frac{P(x) - P(a)}{x-a} + h(x) \qquad (a \neq x \in \mathcal{D}_g).$$

Mivel $P \in D$, ezért létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - P(a)}{x-a} = P'(a)$$

(véges) határérték. Tehát $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ alapján

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a) = P'(a),$$

következésképpen (ld. vii))

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) = g(a) + g'(a)(x-a) = T_{a,1}g(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha viszont $n > 1$, akkor a $g \in D^n\{a\}$ feltétel miatt egy alkalmas $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_g$, és $g \in D^{n-1}\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$. Ezért a

$$\lim_{x \to a} (g(x) - P(x)) = g(a) - P(a) = 0 = \lim_{x \to a} (x-a)^n$$

egyenlőségekre tekintettel alkalmazható a L'Hospital-szabály (ld. 7.5.17. Tétel), és az adódik, hogy

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x) - P'(x)}{n(x-a)^{n-1}},$$

azaz

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x) - P'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Megismételve az „ide vezető utat" $g - P$ helyett a $g' - P'$ függvénnyel, n helyett $(n-1)$-gyel, ill. ezt rekurzíve folytatva azt kapjuk, hogy

$$P^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

A vii) megjegyzés szerint ugyanakkor alkalmas $b_0, ..., b_n \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-a)^j \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $P^{(j)}(a) = j! \cdot b_j \quad (j = 0, ..., n),$ azaz

$$b_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

Más szóval

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$T_{a,n}g(x) + \frac{P^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a kiinduló feltétel, ill. vii) szerint

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - P(x)}{(x-a)^n} =$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - T_{a,n}g(x)}{(x-a)^n} + \frac{g^{(n)}(a) - P^{(n)}(a)}{n!} \right) = \frac{g^{(n)}(a) - P^{(n)}(a)}{n!},$$

amiből $P^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$. Ezért $P = T_{a,n}g$.

xx) A Taylor-formulában (ld. 7.7.2. Tétel az ottani jelölésekkel) szereplő x és a közötti ξ-t írjuk fel a következő alakban:

$$\xi = a + \theta_n(x)(x-a),$$

ahol a $\theta_n(x)$ számra $0 < \theta_n(x) < 1$ teljesül. Ha tehát $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $n \in \mathbf{N}$, és az $r > 0$ „sugárral" $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, továbbá

$$f \in D^{n+1}\{x\} \qquad (x \in (a-r, a+r)),$$

akkor

$$R_n(x) := f(x) - T_{a,n}f(x) =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(a + \theta_n(x)(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad (a \neq x \in (a-r, a+r)).$$

Legyen $\theta_n(a) := 0$, ekkor az így definiált

$$\theta_n : (a-r, a+r) \to [0, 1)$$

függvény az alábbi érdekes tulajdonsággal rendelkezik: ha az f függvényre még az is igaz, hogy $f \in D^{n+2}\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$ és $f^{(n+2)} \in \mathcal{C}\{a\}$, $f^{(n+2)}(a) \neq 0$, akkor létezik a

$$\lim_{x \to a} \theta_n(x) = \frac{1}{n+2}$$

határérték. Valóban, $\lim_{x\to a}(a+\theta_n(x)(x-a))=a$ miatt

$$f^{(n+2)}(a)=\lim_a \Delta_a f^{(n+1)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_n(x)(x-a))-f^{(n+1)}(a)}{\theta_n(x)(x-a)}=$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\theta_n(x)(x-a)}\cdot\left(\frac{(n+1)!\cdot R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}-f^{(n+1)}(a)\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{(n+1)!}{\theta_n(x)(x-a)^{n+2}}\left(R_n(x)-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(n+1)!\cdot R_{n+1}(x)}{\theta_n(x)(x-a)^{n+2}}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))}{(n+2)\cdot\theta_n(x)}.$$

Mivel $f^{(n+2)}\in\mathcal{C}\{a\}$, ezért $\lim_{x\to a}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))=a$ alapján

$$0\neq f^{(n+2)}(a)=\lim_a f^{(n+2)}=\lim_{x\to a}f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a)),$$

így egy alkalmas $0<\rho\leq r$ mellett $f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))\neq 0$, és

$$\theta_n(x)=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))}{\dfrac{f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))}{(n+2)\cdot\theta_n(x)}}\qquad(a\neq x\in(a-\rho,a+\rho)).$$

A határértékek hányadosára vonatkozó „műveleti szabályok" (ld. 5.3.3. Tétel) szerint ebből következően valóban létezik a

$$\lim_{x\to a}\theta_n(x)=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{\lim_{x\to a}f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))}{\lim_{x\to a}\dfrac{f^{(n+2)}(a+\theta_{n+1}(x)(x-a))}{(n+2)\cdot\theta_n(x)}}=$$

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{f^{(n+2)}(a)}{f^{(n+2)}(a)}=\frac{1}{n+2}$$

határérték.

xxi) Illusztráljuk egy példával az előző megjegyzésben mondottakat. Legyen ehhez

$$f(x):=\frac{1}{1+x}\qquad(-1\neq x\in\mathbf{R}).$$

Ekkor (könnyen ellenőrizhetően) $f\in D^\infty$, és

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\qquad(-1\neq x\in\mathbf{R}).$$

Ezért

$$T_{0,1}f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = 1 - x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így ($n := 1$-re és $a = 0$-ra)

$$R_1(x) = f(x) - T_{0,1}f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} = \frac{f''(\theta_1(x)\cdot x)}{2}\cdot x^2 =$$

$$\frac{x^2}{(1+\theta_1(x)\cdot x)^3} \qquad (0 \neq x \in (-1,1)),$$

tehát innen

$$\theta_1(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} \qquad (0 \neq x \in (-1,1)).$$

Pl. a L'Hospital-szabály (ld. 7.5.17. Tétel) alkalmazásával

$$\lim_{x\to 0}\theta_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to 0}(1+x)^{-2/3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{n+2}.$$

xxii) A 7.7.2. Tételben megfogalmazott Lagrange-féle maradéktag (ld. 7.8. ii) megjegyzés) speciális esete egy sokkal általánosabb formulának. Ennek a megfogalmazásához induljunk ki az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényből, legyen $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$, és valamilyen $r > 0$ mellett $(a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$. Tegyük fel továbbá, hogy egy adott $n \in \mathbf{N}$ „kitevő" esetén

$$f \in D^{n+1}\{t\} \qquad (t \in (a-r, a+r)).$$

Legyen $a \neq x \in (a-r, a+r)$, ill.

$$\varphi : [a, x] \to \mathbf{R} \quad (\text{ha } a < x),$$

vagy

$$\varphi : [x, a] \to \mathbf{R} \quad (\text{ha } x < a)$$

olyan folytonos függvény, amelyik minden $t \in \operatorname{int}\mathcal{D}_\varphi$ helyen differenciálható, és $\varphi'(t) \neq 0$. Ekkor van olyan $\xi \in \operatorname{int}\mathcal{D}_\varphi$, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}\cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot (x-\xi)^n.$$

Tekintsük ui. az

$$F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot (x-t)^k \qquad (t \in (a-r, a+r))$$

függvényt. Világos, hogy $F(x) = f(x)$ és $F(a) = T_{a,n}f(x)$, továbbá $F \in D$, és (ld. 7.3.1. Tétel)

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \right) =$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n \qquad (t \in (a-r, a+r)).$$

A $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_\varphi)$ feltétel és a Rolle-tétel (ld. 7.5.2. Tétel) miatt világos, hogy $\varphi(x) \neq \varphi(a)$. Legyen

$$c := \frac{f(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)},$$

és

$$g(t) := F(t) + c \cdot (\varphi(x) - \varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az így definiált g függvény folytonos, minden $t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_\varphi$ helyen differenciálható, és

$$g(x) = F(x) = f(x) = g(a).$$

Ezért az előbb már idézett Rolle-tétel (ld. 7.5.2. Tétel) alapján egy alkalmas, a és x közötti ξ-vel

$$0 = g'(\xi) = F'(\xi) - c \cdot \varphi'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n - c \cdot \varphi'(\xi),$$

amiből

$$c = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n.$$

Következésképpen

$$f(x) - F(a) = f(x) - T_{a,n}f(x) = c \cdot (\varphi(x) - \varphi(a)) =$$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n.$$

xxiii) Legyen $1 \leq p \in \mathbf{N}$, és írjuk az előző megjegyzésben (az ottani jelölések megtartásával) a φ helyébe az alábbi függvényt:

$$\varphi(t) := (x-t)^p \qquad (t \in [a, x] \text{ vagy } t \in [x, a]).$$

Ekkor $\varphi(x)-\varphi(a)=-(x-a)^p$ és $\varphi'(\xi)=-p(x-\xi)^{p-1}$, tehát a xxii) megjegyzésben kapott formula a következő:

$$f(x)-T_{a,n}f(x)=\frac{(x-a)^p}{p}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Az előbbi egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés az ún. *Schlömilch-féle maradéktag.* Ez speciálisan $p=n+1$ esetén az

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

Lagrange-féle maradéktag, míg $p=1$-re az

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-a)\cdot(x-\xi)^n$$

ún. *Cauchy-féle maradéktag.* (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előbbiekben szereplő, x és a közötti ξ „közbülső" hely (x mellett) φ-től is függ, így speciálisan p-től is.)

xxiv) A xx) megjegyzésben (az eddigi vizsgálódásainkban először) kapott szerepet egy deriváltfüggvény folytonossága. Ezzel kapcsolatos az alábbi értelmezés. Nevezetesen, az $f\in\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény egy $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban (valamilyen $n\in\mathbf{N}$ mellett) *n-szer folytonosan differenciálható,* ha van olyan $r>0$, amellyel

$$f\in D^n\{x\}\qquad (x\in(a-r,a+r)),$$

és $f^{(n)}\in\mathcal{C}\{a\}$. Mindezt a következőképpen fogjuk jelölni: $f\in\mathcal{C}^n\{a\}$. Speciálisan $f\in\mathcal{C}^0\{a\}$ jelentse azt, hogy $f\in\mathcal{C}\{a\}$. Ha a szóban forgó f függvény minden $a\in\mathcal{D}_f$ esetén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor az f-et *n-szer folytonosan differenciálhatónak* nevezzük, és erre a tényre az $f\in\mathcal{C}^n$ jelölést használjuk. A 7.7.1. Tétel alapján nyilvánvaló, hogy tetszőleges f analitikus függvényre (azaz hatványsor összegfüggvényére) $f\in\mathcal{C}^n$ igaz minden $n\in\mathbf{N}$ „kitevőre". Ugyanakkor pl. az

$$f(x):=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \\ x^2\sin(1/x) & (0\neq x\in\mathbf{R})\end{cases}$$

függvényre (ld. 7.6. xiv) megjegyzés) $f\in D$,

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \\ 2x\sin(1/x)-\cos(1/x) & (0\neq x\in\mathbf{R})\end{cases},$$

és $f'\notin\mathcal{C}\{0\}$. Ez azt jelenti, hogy $f\in D\{0\}\setminus\mathcal{C}^1\{0\}$.

8. fejezet

Határozatlan integrál

8.1. A primitív függvény fogalma

Képzeljük el, hogy egy m (> 0) tömegű rakétát v_0 (> 0) kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő, és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő. Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

A feladat matematikai modelljének a felállításához legyen α (> 0) a nehézségi gyorsulás, a pillanatnyi sebességgel kapcsolatban feltételezett arányossági tényező pedig legyen $\beta\,(> 0)$. Ha $v \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltéve, hogy $0 \in \mathcal{D}_v$ nyílt intervallum, és $v \in D$ – a fizika Newton-féle mozgástörvényei alapján a következőt mondhatjuk:

$$(*)\qquad mv' = -m\alpha - \beta v^2 \ , \ \ v(0) = v_0.$$

Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ „pillanatot" kell meghatározni, amelyre $v(T) = 0$.

Feltételezve, hogy van ilyen v függvény, annak a meghatározásához vegyük észre, hogy a

$$\gamma := \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}$$

jelöléssel

$$\frac{v'(x)}{1 + (\gamma\cdot v(x))^2} = -\alpha \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Tegyük fel, hogy a differenciálható $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény olyan, hogy

$$h'(x) := \frac{1}{1 + (\gamma\cdot x)^2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ekkor (ld. 7.3.2. Tétel) $h \circ v \in D$, és

$$(h \circ v)'(x) = h'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{v'(x)}{1 + (\gamma \cdot v(x))^2} = -\alpha \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Ha tehát $g(x) := -\alpha \cdot x \ \ (x \in \mathbf{R})$, akkor

$$(h \circ v)'(x) = g'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_v),$$

vagy ami ugyanaz:

$$(h \circ v - g)'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Ezért a 7.5.6. Tétel miatt van olyan $c \in \mathbf{R}$ konstans, amellyel

$$h(v(x)) - g(x) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Azt kaptuk, hogy

$$h(v(x)) = -\alpha \cdot x + c \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Mivel $v(0) = v_0$, így $c = h(v_0)$, más szóval a feladat matematikai modellje a következő:

$$h(v(x)) = -\alpha \cdot x + h(v_0) \qquad (x \in \mathcal{D}_v).$$

Ha $T\ (> 0)$ ideig emelkedik a rakéta, akkor ez nyilván azt jelenti, hogy $v(T) = 0$, amiből

$$h(v(T)) = h(0) = -\alpha \cdot T + h(v_0)$$

következik. Tehát

$$T = \frac{h(v_0) - h(0)}{\alpha}.$$

Világos, hogy a fenti megoldás „kulcsa" a h függvény meghatározása (ha egyáltalán létezik ilyen függvény). Most tehát nem deriválni kell egy (ismert) függvényt, hanem mintegy „fordítva", egy adott függvényhez kell(ene) olyan differenciálható függvényt találni, hogy ez utóbbinak a deriváltfüggvénye a kiindulási függvény legyen. A most vizsgált feladatban nem nehéz ilyet találni. Emlékeztetünk ui. (ld. 7.5.2.) az arkusztangensfüggvényre: $\operatorname{arctg} \in D$, és

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Innen már könnyen „kitalálható" (ld. 7.3.2. Tétel), hogy a

$$h(x) := \frac{1}{\gamma} \cdot \operatorname{arctg}(\gamma x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény differenciálható, és

$$h'(x) := \frac{1}{1 + (\gamma \cdot x)^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel ekkor $h(0)=0$, ezért

$$T=\frac{h(v_0)}{\alpha}=\frac{1}{\gamma\alpha}\cdot\operatorname{arctg}(\gamma v_0)=\sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}v_0\right).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti $h(v(x))=-\alpha x+h(v_0)$ $(x\in\mathcal{D}_v)$ egyenlőség a következő alakú:

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\operatorname{arctg}(\gamma v(x))=-\alpha x+\frac{1}{\gamma}\cdot\operatorname{arctg}(\gamma v_0)\qquad(x\in\mathcal{D}_v).$$

Ebből (ld. 7.5.2.)

$$v(x)=\frac{1}{\gamma}\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\gamma v_0)-\alpha\gamma x)\qquad(x\in\mathcal{D}_v)$$

következik a

$$\mathcal{D}_v:=\left(\frac{1}{\alpha\gamma}(\operatorname{arctg}(\gamma v_0)-\pi/2),\frac{1}{\alpha\gamma}(\operatorname{arctg}(\gamma v_0)+\pi/2)\right)$$

nyílt intervallummal. Nem nehéz most már „visszafelé" meggyőződni arról, hogy ez a v függvény eleget tesz a $(*)$ egyenlőségnek.

Az előző feladattal analóg a következő probléma is. Tegyük fel, hogy valamilyen (pl. radioaktív) anyag bomlik, a bomlás „sebessége" (a megfigyelések szerint) egyenesen arányos a még el nem bomlott anyag mennyiségével. Határozzuk meg az ún. *felezési időt,* azaz azt a pillanatot, amikor a meglévő anyag (a megfigyelés kezdetétől számított) anyagnak éppen a fele. A matematikai modell konstrukciójához legyen $m\in\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ a tömeg-idő függvény: $m(t)$ jelenti a $t\in\mathcal{D}_m$ időpillanatban meglévő anyag mennyiségét, ahol $0\in\mathcal{D}_m$, és $m_0:=m(0)$ a „kezdeti pillanatban" az anyag mennyisége. Feltesszük, hogy $\mathcal{D}_m$ nyílt intervallum, $m\in D$. Ha $t,\tau\in\mathcal{D}_m$, $t<\tau$, akkor $m(t)-m(\tau)$ a $\tau-t$ idő alatt elbomlott anyag mennyisége, az

$$\frac{m(t)-m(\tau)}{\tau-t}=-\Delta_t m(\tau)$$

hányados pedig a $[t,\tau]$ időintervallumra számított „átlagos bomlási sebesség". Ez utóbbi „annál jobban jellemzi" a t pillanatbeli helyzetet, minél „kisebb" a $\tau-t$ időváltozás. Egzakt matematikai megfogalmazásban tehát „logikusnak" tűnik a *bomlás sebességeként* a

$$\lim_{\tau\to t}\frac{m(t)-m(\tau)}{\tau-t}=\lim_{\tau\to t}(-\Delta_t m(\tau))=-m'(t)\qquad(t\in\mathcal{D}_m)$$

határértéket tekinteni. A feltételezés szerint van olyan $\alpha>0$ konstans, hogy

$$m'=-\alpha m,$$

ahol $m(0)=m_0$. Mivel $m>0$, ezért az $m'=-\alpha m$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{m'}{m}\equiv-\alpha.$$

Ha az $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ differenciálható függvényre

$$f'(x)=\frac{1}{x}\qquad (x>0),$$

akkor (ld. 7.3.2. Tétel) $f\circ m\in D$, és

$$(f\circ m)'=\frac{m'}{m}.$$

A $g(x):=-\alpha x$ $(x\in\mathbf{R})$ függvény differenciálható, és $g'\equiv-\alpha$, ezért

$$(f\circ m)'(x)=g'(x)\qquad (x\in\mathcal{D}_m),$$

vagy másképp fogalmazva (ld. 7.3.1. Tétel)

$$(f\circ m-g)'(x)=0\qquad (x\in\mathcal{D}_m).$$

Így (ld. 7.5.6. Tétel) van olyan $c\in\mathbf{R}$ konstans, amellyel

$$f(m(x))-g(x)=c\qquad (x\in\mathcal{D}_m).$$

Az $m(0)=m_0$ „kezdeti feltételt" is figyelembe véve innen $c=f(m_0)$ adódik, más szóval

$$f(m(x))=g(x)+f(m_0)\qquad (x\in\mathcal{D}_m).$$

Ha T a fenti felezési idő, akkor $m(T)=m_0/2$, ezért

$$f(m_0/2)=-\alpha T+f(m_0),$$

tehát

$$T=\frac{f(m_0)-f(m_0/2)}{\alpha}.$$

Emlékeztetünk arra (ld. 7.3.6. Tétel), hogy az $f:=\ln$ függvény eleget tesz a fentieknek, következésképpen

$$\ln\left(m(x)\right)=-\alpha x+\ln(m_0)\qquad (x\in\mathcal{D}_m).$$

Innen

$$m(x)=e^{\ln\left(m(x)\right)}=e^{-\alpha x}\cdot e^{\ln(m_0)}=m_0\cdot e^{-\alpha x}\qquad (x\in\mathcal{D}_m),$$

és

$$T=\frac{\ln(m_0)-\ln(m_0/2)}{\alpha}=\frac{\ln 2}{\alpha}.$$

(Könnyű ellenőrizni most is, hogy az előbbi m függvény kielégíti az $m'=-\alpha m, m(0)=m_0$ modellt.) A megoldás egyik alapvető lépése ebben a feladatban is a következő volt: egy ismert függvényhez kellett olyan differenciálható függvényt keresni, hogy ez utóbbinak a deriváltja a kiindulási függvény legyen.

A fenti példák alapján nem erőltetett az alábbi kérdésfelvetés. Legyen adott az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $F : I \to \mathbf{R}$ függvény *primitív függvénye* az f-nek, ha F differenciálható, és $F' = f$. Legyen

$$\int f := \int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbf{R} : F \in D,\ F' = f\}$$

(azaz az f primitív függvényeinek a halmazaz) az f *határozatlan integrálja.* (Esetenként magára az $\int f$ halmaz elemeire is használni fogjuk (a „primitív függvény" helyett) a határozatlan integrál elnevezést.) Ha $F \in \int f$, akkor az $F' = f$ egyenlőség és a 7.5.10. Tétel miatt az f Darboux-tulajdonságú. Más szóval az f Darboux-tulajdonsága szükséges ahhoz, hogy az f-nek legyen primitív függvénye, vagy ami ugyanaz, az $\int f$ halmaz különbözzön az üreshalmaztól. Így pl., ha

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \\ \\ -1 & (x < 0), \end{cases}$$

akkor $\int f = \emptyset$, hiszen az f nyilván nem Darboux-tulajdonságú. Világos ugyanakkor, hogy pl. $\int \cos \neq \emptyset$, mivel (ld. 7.3.5. Tétel) $\sin' = \cos$, azaz $\sin \in \int \cos$.

Az utóbbi példa kapcsán vegyük észre, hogy tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén $\sin + c \in \int \cos$ is igaz, hiszen (ld. 7.3.1., 7.5.6. Tételek) $\sin + c \in D$, és $(\sin + c)' = \sin' = \cos$. Joggal merül fel a kérdés: a $\sin + c \quad (c \in \mathbf{R})$ függvényeken kívül van-e más primitív függvénye a cos-nak? Erre válaszol (nem csupán a koszinuszfüggvény esetében) az alábbi tétel.

8.1.1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $f, F : I \to \mathbf{R}$, és $F \in \int f$. Ekkor*

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Bizonyítás. Ha $c \in \mathbf{R}$, akkor a tétel megfogalmazása előtti példa kapcsán idézett tételek miatt $F + c \in D$, és

$$(F + c)' = F' = f,$$

ezért $\{F + c : c \in \mathbf{R}\} \subset \int f$. A 7.5.6. Tételt figyelembe véve az előbbi $\subset$ tartalmazás „fordítottja" is könnyen adódik. Legyen ui. $G \in \int f$, ekkor $G \in D$, és $G' = f$. Így (ld. 7.3.1. Tétel) $G - F \in D$, és

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

A 7.5.6. Tétel szerint viszont ez utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal $G - F \equiv c$, tehát $G = F + c$. ■

A most bebizonyított tétel szerint pl.

$$\int \cos = \{\sin + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti állításban szereplő $\int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}$ egyenlőséget többnyire az alábbi formában „rövidítjük":

$$\int f = F + c \qquad (c \in \mathbf{R}).$$

Így pl. (ld. a bevezetőben vizsgált „rakétás" feladat megoldását)

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} + c \qquad (c \in \mathbf{R}).$$

Soroljunk fel ezen túlmenően néhány további „elemi integrált", amelyek az illető függvények differenciálhatóságára, ill. deriváltjára vonatkozó megfelelő tételek alapján nyilvánvalóak (az alábbi formulákban $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges):

$$\int \sin = -\cos + c \ \ , \ \ \int h_\mu = \int x^\mu\,dx = \frac{h_{\mu+1}}{\mu+1} + c \quad (-1 \neq \mu \in \mathbf{R}),$$

$$\int h_{-1} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln + c \ \ , \ \ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin + c \ \ ,$$

$$\int \operatorname{ch} = \operatorname{sh} + c \ \ , \ \ \int \operatorname{sh} = \operatorname{ch} + c \ \ , \ \ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsh} + c,$$

$$\int \exp = \exp + c \ \ , \ \ \int \exp_a = \frac{\exp_a}{\ln a} + c \quad (1 \neq a \in (0, +\infty)).$$

A „határozzuk meg az $\int f$-et" feladatokban természetesen elengedhetetlen az f függvény, és így (többek között) az $I = \mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány ismerete. Ez utóbbi időnként „elsikkad" a feladat kitűzésekor, mondván, hogy az „magától értedődő". Ez gyakran vezethet félreértésekre, ezért lehetőleg kerülni kell ezt a pongyolaságot. Tekintsük pl. az $\int \frac{1}{x}\,dx$ meghatározását. Itt gondolhatunk (mint fent) az $\int h_{-1}$ határozatlan integrál kiszámítására, ahol tehát $I = (0, +\infty)$, és $f(x) := 1/x \quad (x > 0)$. De jelenthette volna ez a feladat a következőt is: legyen

$$I := (-\infty, 0) \ \ , \ \ f(x) := \frac{1}{x} \qquad (x < 0),$$

és határozzuk meg az $\int f$-et. Világos (ld. 7.3.2., 7.3.6. Tételek), hogy ha

$$F(x) := \ln(-x) \qquad (x < 0),$$

akkor $F \in D$, és $F' = f$. Ha tehát $g(x) := -x$ $(x < 0)$, akkor $F = \ln \circ g$, és

$$\int f = \ln \circ g + c \qquad (c \in \mathbf{R})$$

(szemben a fenti $\int h_{-1} = \ln + c$ $(c \in \mathbf{R})$ „eredménnyel").

A fentieket szem előtt tartva azért időnként az alábbi (kétségkívül némileg kifogásolható, de tömör) szimbolikát is fogjuk használni: ha $F \in \int f$, akkor

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \quad (x \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

Illusztratív példaként tekintsük az alábbi „alapintegrálokat":

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{arth} x + c \quad (|x| < 1,\, c \in \mathbf{R}) \ , \ \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{arcth} x + c \quad (x > 1,\, c \in \mathbf{R}),$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{arcth} x + c \quad (x < -1,\, c \in \mathbf{R}) \ , \ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arch} x + c \quad (x > 1,\, c \in \mathbf{R}).$$

8.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, és az $f, g : I \to \mathbf{R}$ függvényekre $\int f \neq \emptyset$, $\int g \neq \emptyset$. Ekkor tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ konstanssal $\int (f + \alpha \cdot g) \neq \emptyset$ is igaz, és bármely $F \in \int f$, $G \in \int g$ esetén*

$$\int (f + \alpha \cdot g) = \{F + \alpha \cdot G + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Bizonyítás. A 7.3.1. Tétel alapján az állításunk szinte nyilvánvaló. Ha ui. $F \in \int f$, $G \in \int g$, akkor $F' = f$, $G' = g$. Ezért $F + \alpha \cdot G \in D$, és

$$(F + \alpha \cdot G)' = F' + \alpha \cdot G' = f + \alpha \cdot g.$$

Ezért $F + \alpha \cdot G \in \int (f + \alpha \cdot g)$, amiből a 8.1.1. Tétel alapján a bizonyítandó egyenlőség is következik. ∎

Az

$$\int f + \alpha \cdot \int g := \left\{ F + \alpha \cdot G : F \in \int f,\ G \in \int g \right\}$$

megállapodással azt is írhatjuk, hogy

$$\int (f + \alpha \cdot g) = \int f + \alpha \cdot \int g.$$

8.1.3. Tétel (parciális integrálás). *Tekintsük az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett és differenciálható $f, g : I \to \mathbf{R}$ függvényeket. Tegyük fel, hogy az $f'g$ szorzatfüggvénynek van primitív függvénye, azaz $\int f'g \neq \emptyset$. Ekkor $\int fg' \neq \emptyset$, és tetszőleges $F \in \int f'g$ függvénnyel*

$$\int fg' = \{fg - F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Bizonyítás. Legyen ui. $F \in \int f'g$, ekkor $F \in D$, és $F' = f'g$. Mivel (ld. 7.3.1. Tétel) $fg \in D$ és

$$(fg)' = f'g + fg',$$

ezért $fg - F \in D$, továbbá

$$(fg - F)' = f'g + fg' - F' = fg'.$$

Így $fg - F \in \int fg'$, következésképpen (ld. 8.1.1. Tétel)

$$\int fg' = \{fg - F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

■

Ha

$$fg - \int f'g := \left\{fg - F : F \in \int f'g\right\},$$

akkor azt írhatjuk, hogy

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Így pl. az $f(x) := x$, $g(x) := e^x$ $(x \in \mathbf{R})$ szereposztással (a jelöléseket illető korábbi megállapodásunkkal összhangban)

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c \qquad (x, c \in \mathbf{R}).$$

Esetenként a fenti tételt többször egymás után alkalmazva „jutunk célhoz", mint pl. az alábbi feladatban:

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x\,dx\right) =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c \qquad (x, c \in \mathbf{R}).$$

Előfordulhat, hogy a parciális integrálás révén egy „egyenletet" kapunk a keresett integrálra vonatkozóan:

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right) =$$

$$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx,$$

ahonnan

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c \qquad (x, c \in \mathbf{R}).$$

8.1.4. Tétel (integrálás helyettesítéssel). *Legyenek adottak a $J, I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok és a $g : J \to I$, $f : I \to \mathbf{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D$. Ekkor az alábbi állítások igazak:*

1^o *ha $\int f \neq \emptyset$, akkor $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, és bármelyik $F \in \int f$ primitív függvénnyel*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \{F \circ g + c : c \in \mathbf{R}\};$$

2^o *ha $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$, $\mathcal{R}_g = I$, és $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, akkor $\int f \neq \emptyset$, és tetszőleges $H \in \int (f \circ g) \cdot g'$ függvénnyel*

$$\int f = \{H \circ g^{-1} + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Bizonyítás. Az 1^o állítás bizonyításához legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D$, és $F' = f$. Következésképpen (ld. 7.3.2. Tétel) $F \circ g \in D$, és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g',$$

azaz $F \circ g \in \int (f \circ g) \cdot g'$. Ezért (ld. 8.1.1. Tétel)

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \{F \circ g + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

A 2^o állítás igazolásához emlékeztetünk arra, hogy a g' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága (ld. 7.5.10. Tétel) és a $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$ feltétel miatt (ld. 7.6. xiii) megjegyzés) $g'(x) > 0$ $(x \in J)$, vagy $g'(x) < 0$ $(x \in J)$. Az első esetben (ld. 7.5.7. Tétel) a g függvény szigorúan monoton növő, a második esetben szigorúan monoton fogyó. Következésképpen létezik a g^{-1} inverzfüggvény, és (ld. 5.5.13. Tétel) $g^{-1} \in \mathcal{C}$. Ezért alkalmazható a g-re a 7.3.3. Tétel, miszerint $g^{-1} \in D$, és

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}.$$

Ha $H \in \int (f \circ g) \cdot g'$, akkor $H \in D$, és $H' = (f \circ g) \cdot g'$. Így (ld. 7.3.2. Tétel) $H \circ g^{-1} \in D$, valamint

$$(H \circ g^{-1})' = (H' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})' = \Big(((f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1} \Big) \cdot (g^{-1})' =$$

$$f\cdot (g'\circ g^{-1})\cdot (g^{-1})' = f\cdot (g'\circ g^{-1})\cdot \frac{1}{g'\circ g^{-1}} = f.$$

Tehát $H\circ g^{-1}\in \int f$, így (ld. 8.1.1. Tétel)

$$\int f = \{H\circ g^{-1}+c : c\in \mathbf{R}\}.$$

■

Legyen $(\int f)\circ g := \{F\circ g : F\in \int f\}$, akkor 1^o szerint azt írhatjuk, hogy

$$\int (f\circ g)\cdot g' = \left(\int f\right)\circ g.$$

Más szóval az $\int f$ ismeretében a g „helyettesítéssel" megkapjuk az $\int (f\circ g)\cdot g'$ határozatlan integrált, azaz az $(f\circ g)\cdot g'$ függvény primitív függvényeit. Pl. a bevezetőben említett „rakétás" feladat kapcsán valójában az

$$\int \frac{1}{1+(\gamma x)^2}\,dx$$

határozatlan integrált kellett kiszámítani (ahol $\gamma > 0$ adott paraméter). Legyen ehhez

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad g(x) := \gamma x \qquad (x\in \mathbf{R}),$$

ekkor $g'\equiv \gamma$ miatt

$$\int \frac{1}{1+(\gamma x)^2}\,dx = \frac{1}{\gamma}\cdot \int (f\circ g)\cdot g' = \frac{1}{\gamma}\cdot \left(\int f\right)\circ g = \frac{\operatorname{arctg}\circ g}{\gamma} + c \quad (c\in \mathbf{R}).$$

Hasonlóan, a 8.1.4. Tétel 2^o állítása az előbbi formában a következő:

$$\int f = \left(\int (f\circ g)\cdot g'\right)\circ g^{-1}.$$

Ha pl. $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$, akkor legyen

$$g(x) := \sin x \qquad (x\in (-\pi/2, \pi/2)).$$

Ekkor

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int f = \left(\int (f\circ g)\cdot g'\right)\circ g^{-1},$$

ahol

$$(f\circ g)\cdot g'(x) = f(\sin x)\cdot \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \cos x =$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2).$$

Ezért

$$\int (f \circ g)\cdot g' = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin x\cdot \cos x}{2} + c =$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin x\cdot \sqrt{1-\sin^2 x}}{2} + c \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2,\ c \in \mathbf{R}).$$

Mivel $g^{-1} = \arcsin$, így

$$\int f = \left(\int (f \circ \sin)\cdot \cos\right) \circ \arcsin =$$

$$\frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\cdot \sqrt{1-x^2}}{2} + c \qquad (-1 < x < 1,\ c \in \mathbf{R}).$$

A következő tételben függvények egy széles osztályára „intézzük el" a határozatlan integrál kérdését. Megmutatjuk ui., hogy tetszőleges analitikus függvénynek van primitív függvénye, és az is analitikus függvény. (Speciális esetekben már fentebb megadtuk néhány ilyen függvény primitív függvényeit, ld. $\exp, \sin, \ldots$ stb.)

8.1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum (a_n(t-a)^n)$ *hatványsor* r *konvergencia-sugara nem nulla, és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x-a| < r).$$

Ekkor $\int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}$, *ahol*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\cdot (x-a)^{n+1} \qquad (x \in \mathbf{R},\ |x-a| < r).$$

Bizonyítás. Először is gondoljuk meg, hogy $x \in \mathbf{R}$, $|x-a| < r$ esetén az $F(x)$-et meghatározó végtelen sor abszolút konvergens. Valóban, a 4.5.1. Tétel szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot |x-a|^n < +\infty.$$

Ezért a nyilvánvaló

$$\frac{|a_n|}{n+1}\cdot |x-a|^{n+1} = |x-a|\cdot \frac{|a_n|}{n+1}\cdot |x-a|^n \le |x-a|\cdot |a_n|\cdot |x-a|^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

becslés miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \cdot |x-a|^{n+1} \leq |x-a| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-a|^n < +\infty.$$

A F analitikus függvényre így alkalmazható a 7.3.4. Tétel, miszerint $F \in D$, és

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-a)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = f(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, |x-a| < r).$$

Tehát $F \in \int f$, következésképpen (ld. 8.1.1. Tétel) $\int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}$. ∎

Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f_n(x) := a_n (x-a)^n \ , \ F_n(x) := \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R},\, |x-a| < r).$$

Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvényre, mint egy speciális hatványsor összegfüggvényére alkalmazható az előző tétel:

$$\int f_n = \{F_n + c : c \in \mathbf{R}\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor a 8.1.5. Tételben szereplő f, F függvényekre

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \ , \ F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Ennek alapján azt is mondhatjuk, hogy a szóban forgó hatványsort „szabad tagonként integrálni". Ezért egyúttal bármely

$$P(x) := \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \qquad (x \in \mathbf{R})$$

polinom esetén (ahol $N \in \mathbf{N},\, a_0, ..., a_N \in \mathbf{R},\, a_N \neq 0)$ az

$$R(x) := \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1} \cdot x^{k+1} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

polinommal $R \in \int P$, és $\int P = \{R + c : c \in \mathbf{R}\}$.

8.2. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvényre $\int f \neq \emptyset$. Ekkor tetszőleges $a \in I$ helyet megadva egyértelműen létezik olyan $F_a \in \int f$, amelyikre az $F_a(a) = 0$ egyenlőség is teljesül. (F_a az ún. *a-ban eltűnő primitív függvénye* az f-nek.) Valóban, a 8.1.1. Tétel alapján tetszőleges $F \in \int f$ függvénnyel

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Ez azt jelenti, hogy a keresett F_a függvény egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ segítségével $F_a = F+c$ alakú kell, hogy legyen. A kívánt $F_a(a) = 0$ egyenlőség miatt $F(a) + c = 0$, amiből szükségszerűen $F_a = F - F(a)$ következik. Világos, hogy ekkor $F_a \in \int f$, és $F_a(a) = 0$.

ii) Jelöljük az i) megjegyzésbeli F_a függvényt a továbbiakban az $\int_a f$ szimbólummal. Legyen pl. $f := \exp^2$, $a := 0$. Ekkor

$$\int f = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

Mivel $e^{2x}/2 + c_{|x=0} = 1/2 + c = 0$ pontosan akkor igaz, ha $c = -1/2$, ezért

$$\int_0 f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

iii) A 8.1.2. Tételből az adódik, hogy ha $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, és az $f, g : I \to \mathbf{R}$ függvényekre $\int f \neq \emptyset$, $\int g \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ és $a \in I$ esetén

$$\int_a (f + \alpha \cdot g) = \int_a f + \alpha \cdot \int_a g.$$

iv) Hasonlóan, a 8.1.3. Tételből az fg' szorzatnak a valamilyen pontban eltűnő primitív függvényéről a parciális integrálás „szabálya" szerint a következőt mondhatjuk: ha az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f, g : I \to \mathbf{R}$ függvényekre $f, g \in D$ és $\int f'g \neq \emptyset$, akkor bármely $a \in I$ esetén

$$\int_a fg' = fg - f(a) \cdot g(a) - \int_a f'g.$$

v) A 8.1.4. Tételnek (helyettesítéssel való integrálásnak) a fenti „lokalizált" változata a következő. Legyenek adottak a $J, I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok és a $g : J \to I$, $f : I \to \mathbf{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D$.

1^o Ha $\int f \neq \emptyset$, akkor minden $b \in J$ helyen

$$\int_b (f \circ g) \cdot g' = \left(\int_{g(b)} f \right) \circ g.$$

2^o Ha $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$, $\mathcal{R}_g = J$, és $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, akkor bármely $a \in I$ mellett

$$\int_a f = \left(\int_{g^{-1}(a)} (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1}.$$

8.3. Speciális függvények határozatlan integrálja

8.3.1. Racionális törtfüggvények

Legyen P és Q egy-egy valós együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy a Q legalább elsőfokú, a gyöktényezős felbontása pedig (ld. 2.4. xiv) megjegyzés) a következő:

$$Q(x) = A \cdot \prod_{j=1}^{s} (x - \lambda_j)^{\nu_j} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $0 \neq A \in \mathbf{R}$, $1 \leq s \in \mathbf{N}$, a $\lambda_j \in \mathbf{K}$ (valós vagy komplex számok) a Q páronként különböző gyökei, az $1 \leq \nu_j \in \mathbf{N}$ szám pedig a λ_j multiplicitása $(j = 1, ..., s)$. Ha valamilyen $j \in \{1, ..., s\}$ esetén

$$\lambda_j = u_j + \imath v_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \qquad (u_j, v_j \in \mathbf{R},\ v_j \neq 0),$$

akkor a $\overline{\lambda_j} = u_j - \imath v_j$ komplex konjugált is ν_j-szeres gyöke a Q-nak. A fenti gyöktényezős felbontásban ezért az

$$a_j := -2u_j \in \mathbf{R} \ , \ b_j := u_j^2 + v_j^2 \in \mathbf{R}$$

jelölésekkel a következő szorzat szerepel:

$$\left((x - \lambda_j) \cdot (x - \overline{\lambda_j}) \right)^{\nu_j} = \left(x^2 - (\lambda_j + \overline{\lambda_j}) x + \lambda_j \overline{\lambda_j} \right)^{\nu_j} = \left(x^2 + a_j x + b_j \right)^{\nu_j}.$$

Ha tehát $p \in \mathbf{N}$ és $\lambda_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, ..., p)$ (a Q valós gyökei, ahol a $p = 0$ eset azt jelenti, hogy Q-nak nincs valós gyöke), $\omega_k, \overline{\omega}_k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ $(k = 1, ..., v)$ (a Q nem valós gyökei, ahol $v \in \mathbf{N}$, és a $v = 0$ eset azt jelenti, hogy a Q-nak minden gyöke valós), akkor a fenti gyöktényezős alakból (μ_k-val jelölve a fenti ω_k multiplicitását)

$$Q(x) = A \cdot \prod_{j=1}^{p} (x - \lambda_j)^{\nu_j} \cdot \prod_{k=1}^{v} \left(x^2 + a_k x + b_k \right)^{\mu_k} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

következik. Az algebrából jól ismert tétel (az ún. *parciális törtekre bontás tétele*) szerint alkalmas R valós együtthatós polinommal, és

$$\alpha_{jm} \in \mathbf{R} \quad (j = 1, ..., p, \ \text{ ill. } \ m = 1, ..., \nu_j),$$

valamint

$$\beta_{kr}, \gamma_{kr} \in \mathbf{R} \quad (k = 1, ..., v, \ \text{ ill. } \ r = 1, ..., \mu_k)$$

számokkal

$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$

$$R(x) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{\nu_j} \frac{\alpha_{jm}}{(x-\lambda_j)^m} + \sum_{k=1}^{v} \sum_{r=1}^{\mu_k} \frac{\beta_{kr}x + \gamma_{kr}}{(x^2 + a_k x + b_k)^r} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}).$$

(Nyilván csak az az eset „érdekes" a továbbiakban, amikor (polinomiálisan) a Q nem osztója a P-nek, tehát a P/Q hányados egy „valódi" racionális törtfüggvény, azaz nem polinom.)

Legyen $I \subset \mathbf{R}$ egy olyan nyílt intervallum, amely nem tartalmazza a Q egyetlen (lehetséges) valós gyökét sem: $\lambda_j \notin I \quad (j = 1, ..., p)$. Ha

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in I),$$

akkor a 8.1.2. Tételt és a fentieket figyelembe véve az $\int f$ határozatlan integrál kérdését visszavezethetjük az (I intervallumon értelmezett)

$$\int R(x)\, dx \ , \ \int \frac{\alpha_{jm}}{(x-\lambda_j)^m}\, dx \ , \ \int \frac{\beta_{kr}x + \gamma_{kr}}{(x^2 + a_k x + b_k)^r}\, dx$$

határozatlan integrálok kiszámítására (a parciális törtekre bontásban szereplő paraméterekkel).

Ezek közül az $\int R(x)\, dx$ meghatározását már az előbb „elintéztük". Legyen most

$$\lambda \in \mathbf{R} \setminus I \ , \ 1 \leq m \in \mathbf{N} \ , \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Ha $m = 1$, akkor könnyen beláthatóan

$$\int \frac{\alpha}{x-\lambda}\, dx = \alpha \cdot \int \frac{1}{x-\lambda}\, dx = \alpha \cdot \ln(|x-\lambda|) + c \qquad (x \in I, \, c \in \mathbf{R}).$$

Ha pedig $m > 1$, akkor

$$\int \frac{\alpha}{(x-\lambda)^m}\, dx = \frac{\alpha}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-\lambda)^{m-1}} + c \qquad (x \in I, \, c \in \mathbf{R}).$$

Legyen most $\beta, \gamma, a, b \in \mathbf{R}$, $1 \leq r \in \mathbf{N}$, és tegyük fel, hogy az

$$S(x) := x^2 + ax + b \qquad (x \in \mathbf{R})$$

másodfokú polinomnak nincs valós gyöke. Ez azt jelenti, hogy (a diszkriminánsa)

$$a^2 - 4b < 0,$$

és $S(x) > 0$ $(x \in \mathbf{R})$. Vegyük észre, hogy $\beta \neq 0$ esetén

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx = \beta \cdot \int \frac{x + \gamma/\beta}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx = \frac{\beta}{2} \cdot \int \frac{2x + a + (2\gamma/\beta - a)}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx =$$

$$\frac{\beta}{2} \cdot \int \frac{2x + a}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx + \frac{\beta \cdot \delta}{2} \cdot \int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx,$$

ahol $\delta := 2\gamma/\beta - a$. Mivel

$$\int \frac{2x + a}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx =$$

$$\int S'(x) \cdot S^{-r}(x)\, dx = \begin{cases} \ln\left(S(x)\right) + c & (r = 1) \\ \\ \dfrac{1}{1 - r} \cdot \dfrac{1}{\left(S(x)\right)^{r-1}} + c & (r > 1) \end{cases} \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$\int \frac{2x + a}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx = \begin{cases} \ln(x^2 + ax + b) + c & (r = 1) \\ \\ \dfrac{1}{1 - r} \cdot \dfrac{1}{(x^2 + ax + b)^{r-1}} + c & (r > 1) \end{cases} \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy elegendő már csak az

$$\int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^r}\, dx$$

meghatározásával foglalkozni. Az itt szereplő $x^2 + ax + b$ kifejezést alakítsuk teljes négyzetté:

$$x^2 + ax + b = (x + a/2)^2 + b - a^2/4 = (x + d)^2 + q \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $d := a/2$ és $q := b - a^2/4 > 0$. A feladatunk ezért az

$$I_r := \int \frac{1}{\left((x + d)^2 + q\right)^r}\, dx$$

kiszámítása. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{((x+d)^2+q)^r} \quad , \quad g(x) := x - d \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ekkor a helyettesítéssel való integrálás (ld. 8.1.4. Tétel) alapján

$$(I_r) \circ g = \left(\int f\right) \circ g = \int (f \circ g) \cdot g' = \int f(x-d)\, dx = \int \frac{1}{(x^2+q)^r}\, dx.$$

Világos, hogy innen

$$I_r = \int f(x)\, dx = \left(\int \frac{1}{(x^2+q)^r}\, dx\right) \circ g^{-1},$$

ahol $g^{-1}(x) = x + d$ $(x \in \mathbf{R})$. Tehát a

$$J_r := \int \frac{1}{(x^2+q)^r}\, dx \qquad (1 \le r \in \mathbf{N})$$

határozatlan integrálokat kell kiszámítanunk. Az $r = 1$ esetben a következőt mondhatjuk:

$$J_1 := \int \frac{1}{x^2+q}\, dx = \frac{1}{q} \cdot \int \frac{1}{(x/\sqrt{q})^2+1}\, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \operatorname{arctg}(x/\sqrt{q}) + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

Az $r \ge 2$ esetben egy, a J_r-ekre vonatkozó rekurzív összefüggés alapján számolhatunk. Nevezetesen, az

$$s(x) := x \quad , \quad h(x) := x^2 + q \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényekkel a parciális integrálás tétele (ld. 8.1.3. Tétel) alapján

$$J_{r-1} = \int s' \cdot h^{1-r} = s \cdot h^{1-r} - \int s \cdot (h^{1-r})' = s \cdot h^{1-r} - (1-r) \cdot \int s \cdot h^{-r} \cdot h' =$$

$$\frac{x}{(x^2+q)^{r-1}} - (1-r) \cdot \int \frac{x}{(x^2+q)^r} \cdot 2x\, dx = \frac{x}{(x^2+q)^{r-1}} - 2(1-r) \cdot \int \frac{x^2+q-q}{(x^2+q)^r}\, dx =$$

$$\frac{x}{(x^2+q)^{r-1}} - 2(1-r) \cdot J_{r-1} + 2q(1-r) J_r.$$

Következésképpen

$$J_r = \frac{2r-3}{2q(r-1)} \cdot J_{r-1} + \frac{1}{2q(r-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+q)^{r-1}} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így pl.

$$J_2 = \int \frac{1}{(x^2+q)^2}\,dx = \frac{1}{2q}\cdot J_1 + \frac{1}{2q}\cdot \frac{x}{x^2+q} =$$

$$\frac{1}{2q\sqrt{q}}\cdot \operatorname{arctg}(x/\sqrt{q}) + \frac{1}{2q}\cdot \frac{x}{x^2+q} + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

Illusztrációként tekintsük pl. az

$$\int \frac{x-1}{x^3-4x}\,dx$$

határozatlan integrált. A feladat egzakt kitűzéséhez hozzátartozik az I nyílt intervallum megadása is. Mivel

$$x^3 - 4x = x\cdot (x-2)\cdot (x+2) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért legyen pl. $I := (2, +\infty)$. Ekkor a parciális törtekre bontás szerint alkalmas A, B, C valós együtthatókkal

$$\frac{x-1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2, 2\}).$$

Tehát

$$\frac{x-1}{x^3-4x} = \frac{A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)}{x^3-4x} =$$

$$\frac{(A+B+C)x^2 + (2B-2C)x - 4A}{x^3-4x} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2, 2\}),$$

amiből (a számlálóbeli) együttható-összehasonlítással

$$A + B + C = 0 \ \ , \ \ 2B - 2C = 1 \ \ , \ \ -4A = -1$$

következik. Így

$$A = \frac{1}{4} \ \ , \ \ B = \frac{1}{8} \ \ , \ \ C = -\frac{3}{8}.$$

Következésképpen

$$\int \frac{x-1}{x^3-4x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{8}\cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{3}{8}\cdot \int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\cdot \ln x + \frac{1}{8}\cdot \ln(x-2) - \frac{3}{8}\cdot \ln(x+2) + c \qquad (x > 2,\, c \in \mathbf{R}).$$

Hasonlóan, könnyen ellenőrizhető, hogy pl.

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\cdot \int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\cdot \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{8}\cdot \ln(x^2+4) + c \qquad (x > 0,\, c \in \mathbf{R}).$$

8.3.2. Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényei

Adott $N, M \in \mathbf{N}$, $a_{ik} \in \mathbf{R}$ $(i = 0, ..., N,$ ill. $k = 0, ..., M)$ esetén legyen

$$\Theta(x, y) := \sum_{i=0}^{N} \sum_{k=0}^{M} a_{ik} x^i y^k \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

(*kétváltozós polinom*), és számítsuk ki az

$$\int \Theta(\sin x, \cos x)\, dx \qquad (-\pi < x < \pi)$$

határozatlan integrált. Ehhez először is vegyük észre, hogy az

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \Theta\Big(\sin(2\cdot \operatorname{arctg}(t)), \cos(2\cdot \operatorname{arctg}(t))\Big)$$

függvény egy racionális törtfüggvény. Valóban, egyrészt az $\alpha := \operatorname{arctg}(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ jelöléssel $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, ezért $\cos\alpha \neq 0$. Így

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\mathrm{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha,$$

ahol

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

miatt

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Következésképpen

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Másrészt

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} - 1 = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Figyelembe véve az α jelentését azt kapjuk, hogy

$$\sin(2\cdot \operatorname{arctg}(t)) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos(2\cdot \operatorname{arctg}(t)) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

A fentiek alapján tehát

$$\Phi(t) := \Theta\Big(\sin(2\cdot \operatorname{arctg}(t)), \cos(2\cdot \operatorname{arctg}(t))\Big) = \Theta((2t)/(1 + t^2), (1 - t^2)/(1 + t^2)) =$$

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{k=0}^{M} a_{ik} \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^i \cdot \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^k \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

amiből nyilvánvaló, hogy $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ racionális törtfüggvény. Alkalmazzuk a helyettesítéssel való integrálást (ld. 8.1.4. Tétel) a

$$g(t) := 2\cdot \operatorname{arctg}(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

helyettesítéssel, miszerint

$$g'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

és

$$\left(\int \Theta(\sin x, \cos x)\, dx\right) \circ g = \int \Phi(t)\cdot g'(t)\, dt = \int \frac{2\Phi(t)}{1+t^2}\, dt.$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \frac{2\Phi(t)}{1+t^2}$$

függvény (is) racionális törtfüggvény, amit a 8.3.1. pont szerint „már tudunk integrálni". Mivel a

$$g : \mathbf{R} \to (-\pi, \pi)$$

fügvény bijekció, és

$$g^{-1}(x) = \operatorname{tg}(x/2) \qquad (-\pi < x < \pi),$$

ezért

$$\int \Theta(\sin x, \cos x)\, dx = \left(\int \frac{2\Phi(t)}{1+t^2}\, dt\right) \circ g^{-1}.$$

Tehát $F \in \int \Theta(\sin x, \cos x)\, dx$ akkor és csak akkor igaz, ha egy $G \in \int \frac{2\Phi(t)}{1+t^2} dt$ primitív függvénnyel

$$F(x) = G(\operatorname{tg}(x/2)) \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Legyen most a fenti Θ mellett Ω is egy kétváltozós (nem az azonosan nulla) polinom:

$$\Omega(x, y) := \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} b_{jl} x^j y^l \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

(adott $n, m \in \mathbf{N}$, $b_{jl} \in \mathbf{R}$ $(j = 0, ..., n,$ ill. $l = 0, ..., m)$ paraméterekkel). Ekkor az előbbiek szerint

$$\Omega(\sin(2\cdot \operatorname{arctg}(t)), \cos(2\cdot \operatorname{arctg}(t))) = \Omega((2t)/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} b_{jl} \frac{(2t)^j \cdot (1-t^2)^l}{(1+t^2)^{j+l}} =$$

$$\frac{1}{(1+t^2)^{n+m}} \cdot \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} b_{jl} (2t)^j \cdot (1-t^2)^l \cdot (1+t^2)^{n+m-j-l} = \frac{P(t)}{(1+t^2)^{n+m}} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a

$$P(t) := \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} b_{jl}(2t)^j\cdot(1-t^2)^l\cdot(1+t^2)^{n+m-j-l} \qquad (t\in\mathbf{R})$$

függvény egy valós együtthatós polinom. Hasonlóan, az előbbi Θ kétváltozós polinom is felírható (az $x=\sin(2\cdot\operatorname{arctg}(t))$, $y=\cos(2\cdot\operatorname{arctg}(t))$ helyeken) a

$$\Theta\Big(\sin(2\cdot\operatorname{arctg}(t)),\cos(2\cdot\operatorname{arctg}(t))\Big) = \frac{Q(t)}{(1+t^2)^{N+M}} \qquad (t\in\mathbf{R})$$

alakban egy alkalmas, valós együtthatós Q polinommal. Mivel feltettük, hogy az Ω nem az azonosan nulla függvény, ezért a P polinom sem az. Így létezik az

$$R(t) := \frac{\Theta\Big(\sin(2\cdot\operatorname{arctg}(t)),\cos(2\cdot\operatorname{arctg}(t))\Big)}{\Omega\Big(\sin(2\cdot\operatorname{arctg}(t)),\cos(2\cdot\operatorname{arctg}(t))\Big)} =$$

$$(1+t^2)^{n+m-N-M}\cdot\frac{Q(t)}{P(t)} \qquad (t\in\mathbf{R}\setminus\mathcal{N})$$

racionális törtfüggvény, ahol

$$\mathcal{N} := \{\lambda\in\mathbf{R} : P(\lambda)=0\}.$$

Ha $J\subset\mathbf{R}$ olyan nyílt intervallum, hogy $P(t)\neq 0\quad(t\in J)$, akkor a fenti $g(t):=2\cdot\operatorname{arctg}(t)$ $(t\in\mathbf{R})$ függvénnyel az $I:=g[J]$ képhalmaz egy olyan nyílt intervallum, amellyel

$$\Omega(\sin x,\cos x)\neq 0 \qquad (x\in I).$$

Ezért van értelme az

$$\int\frac{\Theta(\sin x,\cos x)}{\Omega(\sin x,\cos x)}\,dx \qquad (x\in I)$$

határozatlan integrálnak. Ez utóbbit az

$$\left(\int\frac{\Theta(\sin x,\cos x)}{\Omega(\sin x,\cos x)}\,dx\right)\circ g = \int R(t)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (t\in J)$$

helyettesítéssel már a fentiekhez hasonlóan a 8.3.1 pont alapján tudjuk kiszámolni.

Példaként tekintsük az

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+1}\,dx$$

integrált. Ekkor az előbbi g függvénnyel

$$\left(\int\frac{\sin x}{\sin x+1}\,dx\right)\circ g = \int\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+(2t)/(1+t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$4\cdot\left(\int\frac{t}{(1+t^2)\cdot(t+1)^2}\,dt\right)=2\cdot\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$2\cdot\operatorname{arctg}(t)+\frac{2}{t+1}\qquad(t>-1),$$

ahol tehát (pl.) $J:=(-1,+\infty)$. Ezért $I=g[J]=(-\pi/2,\pi)$, és

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+1}\,dx=x+\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2)+1}+c\qquad(x\in(-\pi/2,\pi),\ c\in\mathbf{R}).$$

8.3.3. Az exponenciális függvény racionális törtfüggvényei

Tegyük fel, hogy P, Q egy-egy valós együtthatós polinom, ahol a Q nem az azonosan nulla függvény, és tekintsük az $R:=P/Q$ racionális törtfüggvényt. Tűzzük ki feladatul az

$$\int R\circ\exp$$

határozatlan integrál kiszámítását. Ehhez először is tisztázzuk, hogy milyen nyílt I intervallumon keressük a megoldást. Legyen (mint korábban) $J\subset(0,+\infty)$ egy olyan nyílt intervallum, amelyre $Q(x)\neq 0\quad(x\in J)$, ill. legyen $I:=\ln[J]$. Ekkor $Q(e^x)\neq 0\quad(x\in I)$, így van értelme az

$$\int R\circ\exp=\int R(e^x)\,dx\qquad(x\in I)$$

határozatlan integrálnak. A helyettesítéssel való integrálásra (ld. 8.1.4. Tétel) hivatkozva a $g(t):=\ln t\quad(t\in J)$ függvénnyel

$$\left(\int R\circ\exp\right)\circ g=\int R(e^{\ln t})\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{R(t)}{t}\,dt\qquad(t\in J).$$

Itt a $J\ni t\mapsto R(t)/t$ függvény nyilván egy racionális törtfüggvény (leszűkítése a J intervallumra), ezért az utóbbi integrál meghatározása már történhet a 8.3.1. pont alapján. Mivel a szóban forgó $g:J\to I$ függvény bijekció és $g^{-1}(x)=e^x\quad(x\in I)$, így az

$$\int R(e^x)\,dx\qquad(x\in I)$$

határozatlan integrál elemei pontosan azok az F függvények, amelyekre valamilyen

$$G\in\int\frac{R(t)}{t}\,dt\qquad(t\in J)$$

primitív függvénnyel $F(x)=G(e^x)\quad(x\in I)$.

Tekintsük példaként az

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx$$

határozatlan integrált. Ekkor $P \equiv 4$, ill.

$$Q(x) := x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy ha $J := (2, +\infty)$, akkor $Q(x) \neq 0 \ \ (x \in J)$. Továbbá

$$I := \ln[J] = (\ln 2, +\infty),$$

ill. a $g(t) := \ln t \quad (t \in J)$ függvénnyel

$$\left(\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx\right) \circ g = \int \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$-\ln t + \frac{1}{2}\cdot\ln(t-2) + \frac{1}{2}\cdot\ln(t+2) + c \qquad (t > 2,\ c \in \mathbf{R}).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx = -x + \frac{1}{2}\cdot\ln(e^x-2) + \frac{1}{2}\cdot\ln(e^x+2) + c \qquad (x > \ln 2,\ c \in \mathbf{R}).$$

Ha viszont $J := (0, 2)$, akkor továbbra is $Q(x) \neq 0 \ \ (x \in J)$, de most

$$I := \ln[J] = (-\infty, \ln 2).$$

Ebben az esetben

$$\int \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$-\ln t + \frac{1}{2}\cdot\ln(2-t) + \frac{1}{2}\cdot\ln(t+2) + c \qquad (0 < t < 2,\ c \in \mathbf{R}),$$

és

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx = -x + \frac{1}{2}\cdot\ln(2-e^x) + \frac{1}{2}\cdot\ln(e^x+2) + c \qquad (-\infty < x < \ln 2,\ c \in \mathbf{R}).$$

8.4. Megjegyzések

i) Jelöljük valamely $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum esetén $\mathcal{F}(I)$-vel az I-n értelmezett, valós értékű függvények halmazát:

$$\mathcal{F}(I) := \{f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \mathcal{D}_f = I\}.$$

Legyen továbbá

$$D(I) := \{f \in \mathcal{F}(I) : f \in D\},$$

és értelmezzük a $\mathbf{D} : D(I) \to \mathcal{F}(I)$ *differenciáloperátort* a következőképpen:

$$\mathbf{D}(f) := f' \qquad (f \in D(I)).$$

Ekkor bármely $f \in \mathcal{F}(I)$ esetén $\int f$ nem más, mint az $\{f\}$ halmaznak a $\mathbf{D}$ által létesített ősképe:

$$\int f = \mathbf{D}^{-1}[\{f\}].$$

ii) Világos, hogy ha $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény pedig differenciálható, akkor $f \in \int f'$.

iii) Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbf{R}$, és $\int f \neq \emptyset$. Ekkor tetszőleges $J \subset I$ nyílt intervallum esetén $\int f_{|_J} = \{F_{|_J} : F \in \int f\}$.

iv) Az alábbi példa azt mutatja, hogy egy nyílt intervallumon értelmezett f valós függvény esetén az f Darboux-tulajdonsága csak szükséges, de nem elégséges feltétel ahhoz, hogy $\int f \neq \emptyset$ legyen. Tekintsük ui. a

$$g(x) := \begin{cases} 1/2 & (x = 0) \\ \\ \sin(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ \sin(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

függvényeket. Könnyen ellenőrizhető, hogy a g, h függvények egyaránt Darboux-tulajdonságúak. Ha $\int g \neq \emptyset$ és $\int h \neq \emptyset$ egyaránt igaz lenne, akkor (ld. 8.1.2. Tétel) $\int (g - h) \neq \emptyset$ is fennállna. Ez utóbbi viszont nem lehet, ti.

$$(g - h)(x) = g(x) - h(x) = \begin{cases} 1/2 & (x = 0) \\ \\ 0 & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

miatt a $g - h$ függvény nyilván nem Darboux-tulajdonságú. Tehát $\int g = \emptyset$, vagy $\int h = \emptyset$. Belátható, hogy $\int h \neq \emptyset$. Ui. legyen

$$F(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ x^2 \cdot \cos(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}), \end{cases}$$

ekkor $F \in D$, és

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 2x \cdot \cos(1/x) + \sin(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Ha tehát

$$G(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 2x \cdot \cos(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}), \end{cases}$$

akkor $F' = G + h$. Az itt szereplő $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, amiből (ld. 9. fejezet) $\int G \neq \emptyset$ következik. Ha $H \in \int G$, akkor

$$h = F' - G = F' - H' = (F - H)',$$

azaz $F - H \in \int h$.

v) A 8.1.2. Tételben az $\int f \neq \emptyset$, $\int g \neq \emptyset$ feltételek nem hagyhatók el. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \\ \\ -1 & (x < 0). \end{cases}$$

Ekkor $\int f = \int(-f) = \emptyset$, de $f + (-f) \equiv 0$, ezért $\int(f + (-f)) \neq \emptyset$.

vi) A parciális integrálásról szóló 8.1.3. Tétel jelentősége többek között abban áll, hogy az

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

egyenlőség alapján az esetleg „nehezen kezelhető" $\int fg'$ határozatlan integrál helyett esetleg „könnyebben" tudjuk meghatározni az $\int f'g$-t. Az alkalmazásokat illetően gyakran vezet eredményre a g' derivált „szándékos megjelenítése" egy $\int f$ határozatlan integrállal kapcsolatban, amint azt az alábbi példa szemlélteti: számítsuk ki az $\int \ln x \, dx$ $(x > 0)$ határozatlan integrált. Legyen ehhez $g(x) := x \quad (x > 0)$, ekkor $g'(x) = 1$ $(x > 0)$, és

$$\int \ln x \, dx = \int g'(x) \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \ln' x \, dx =$$

$$x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c \qquad (x > 0,\ c \in \mathbf{R}).$$

Ugyanez a „trükk" alkalmazható az alábbi esetben is (az előző g függvénnyel):

$$\int \operatorname{arctg}(x) \, dx = \int g'(x) \cdot \operatorname{arctg}(x) \, dx = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \int x \cdot \operatorname{arctg}'(x) \, dx =$$

$$x\cdot \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\cdot \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$
$$x\cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+1) + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

vii) Már korábban is alkalmaztuk (pl. az előbbi megjegyzésben is) az alábbi észrevételt („integrálási szabályt"). Legyen ui. $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to (0,+\infty)$, és tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható. Ekkor bármelyik $\mu \in \mathbf{R}$ kitevővel

$$\int f'\cdot f^{\mu} = \begin{cases} \ln\left(f(x)\right) + c & (\mu = -1) \\ \\ \dfrac{1}{\mu+1}\cdot \left(f(x)\right)^{\mu+1} + c & (\mu \neq -1) \end{cases} \qquad (x \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy ha itt $\mu := n \in \mathbf{N}$, akkor tetszőleges differenciálható $f : I \to \mathbf{R}$ függvényre (az $f^0 \equiv 1$ megállapodással)

$$\int f'\cdot f^{n} = \frac{1}{n+1}\cdot \left(f(x)\right)^{n+1} + c \qquad (x \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

(Minderről egy egyszerű deriválással (a megfelelő „deriválási szabályok" alkalmazásával) meggyőződhetünk.)

viii) Az $\int f$ határozatlan integrál értelmezésekor feltettük, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya nyílt intervallum. Ez többek között a 8.1.1. Tétel szempontjából is egy lényeges feltétel: az

$$F \in \int f \implies \int f = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}$$

következtetés nem igaz, ha $\mathcal{D}_f$ nem (nyílt) intervallum. Elég csak az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ \\ 2 & (1 < x < 2) \end{cases}$$

függvényre gondolni. Ha olyan $F \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt keresünk, amelyre $F \in D$, és $F' = f$, akkor ezek az F-ek pontosan az alábbiak:

$$F(x) := F_{uv}(x) := \begin{cases} x + u & (0 < x < 1) \\ \\ 2x + v & (1 < x < 2), \end{cases}$$

ahol $u, v \in \mathbf{R}$ tetszőleges (egymástól független) konstans. Világos, hogy nincs olyan, fenti tulajdonságú F, amellyel $F \in D$, $F' = f$, és

$$\{F_{uv} : u, v \in \mathbf{R}\} = \{F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Ha tehát erőltetnénk az $\int f$ értelmezését akkor is, ha a $\mathcal{D}_f$ nem (nyílt) intervallum, akkor a 8.1.2. Tétel máris érvényét vesztené. Ezért hibásak az olyan (sajnos, sok helyen olvasható) „eredmények", mint pl. az

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcth} x + c \qquad (|x|>1,\ c\in\mathbf{R}).$$

Ui. - ha már ragaszkodnánk az $\int$ szimbólumhoz, akkor - helyesen a következőt kellene írnunk:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arcth} x + c & (x>1) \\ \\ \operatorname{arcth} x + d & (x<-1) \end{cases} \qquad (c,d\in\mathbf{R}).$$

ix) A helyettesítéssel való integrálással (ld. 8.1.4. Tétel) kapcsolatban eléggé elterjedt az alábbi „technikai" formalizmus:

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t),dx=g'(t)\,dt} = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

x) A 8.3.2. pontban közölt általános módszer (ami időnként meglehetősen fáradságos számolásokat igényel) speciális esetekben „kihagyható". Ilyen feladat pl. az

$$\int \sin^n\cdot\cos^m \qquad (n,m\in\mathbf{N})$$

határozatlan integrál kiszámítása. Az alábbi esetek lehetségesek.

1^o Valamilyen $k\in\mathbf{N}$ mellett $n=2k+1$, ekkor (ld. vii)) a binomiális tétel szerint

$$\int \sin^{2k+1}\cdot\cos^m = \int \sin\cdot(\sin^2)^k\cdot\cos^m = \int \sin\cdot(1-\cos^2)^k\cdot\cos^m =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\int \sin\cdot\cos^{2j+m} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}\int \cos'\cdot\cos^{2j+m} =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{2j+m+1}\cdot\cos^{2j+m+1}+c \qquad (c\in\mathbf{R}).$$

2^o Analóg módon járhatunk el akkor is, ha $m=2k+1$ $(k\in\mathbf{N})$:

$$\int \cos^{2k+1}\cdot\sin^n = \int \cos\cdot(\cos^2)^k\cdot\sin^n = \int \cos\cdot(1-\sin^2)^k\cdot\sin^n =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\int \cos\cdot\sin^{2j+n} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\int \sin'\cdot\sin^{2j+n} =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^{j}}{2j+n+1}\cdot\sin^{2j+n+1}+c \qquad (c\in\mathbf{R}).$$

3^o Ha $k, s \in \mathbf{N}$ és $n = 2k$, $m = 2s$, akkor

$$\int \sin^{2k} \cdot \cos^{2s} = \int (\sin^2)^k \cdot (\cos^2)^s =$$

$$\int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^s dx$$

$$\frac{1}{2^{k+s}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{r=0}^{s} (-1)^j \binom{k}{j} \cdot \binom{s}{r} \cdot \int \cos^{j+r}(2x) dx.$$

A helyettesítéssel való integrálás (ld. 8.1.4. Tétel) alapján

$$\int \cos^v (2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \cos^v t\, dt \qquad (v = 0, ..., k+s).$$

Az itt megjelent integrálokat páratlan v-k esetén 2^o szerint már ki tudjuk számolni. Ha a $v = 0, ..., k+s$ kitevő páros, akkor az előbbiek alapján

$$\int \cos^v t\, dt = \frac{1}{2^{v/2}} \sum_{l=0}^{v/2} \binom{v/2}{l} \cdot \int \cos^l (2t)\, dt.$$

Az $\int \cos^l (2t)\, dt$ $(l = 0, ..., v/2)$ integrálokra rekurzíve megismételve az előbbieket, végül az alábbi „marad":

$$\int \cos^2 = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

Így pl.

$$\int \sin^4 = \frac{1}{4} \cdot \int (1-\cos(2x))^2 dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\int 1\, dx - 2\int \cos(2x)\, dx + \int \cos^2(2x)\, dx\right) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(x - \sin(2x) + \int \frac{1+\cos(4x)}{2}\, dx\right) =$$

$$\frac{3x}{8} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c \qquad (x,\, c \in \mathbf{R}).$$

xi) Az előbbi megjegyzéshez hasonlóan a 8.3.2. pontbeli általános érvényű $2\cdot$ arctg helyettesítéshez képest esetenként egyszerűbb számolást tesz lehetővé a „fele", azaz a $g :=$ arctg helyettesítés. Pl. legyen $I := (-\pi/4, \pi/2)$, és számoljuk ki az

$$\int \frac{2}{1+\mathrm{tg}}$$

határozatlan integrált az I intervallumon:

$$\left(\int \frac{2}{1+\mathrm{tg}}\right) \circ \mathrm{arctg} = \int \frac{2}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{1+t^2}\right) dt =$$

$$\int \frac{1}{1+t}\, dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt =$$

$$\ln(1+t) + \mathrm{arctg}(t) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+t^2) + c \qquad (t > -1,\, c \in \mathbf{R}).$$

Ezért

$$\int \frac{2}{1+\mathrm{tg}} = \ln\left(1 + \mathrm{tg}(x)\right) + x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \mathrm{tg}^2(x)\right) + c \qquad (x \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

xii) Ügyes helyettesítéssel elsőre nagyon bonyolultnak tűnő határozatlan integrálokat is ki tudunk számolni. Legyen pl.

$$a, b \in \mathbf{R},\ a > 0,\ 2 \leq n \in \mathbf{N},$$

és $R, T \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy-egy racionális törtfüggvény. A feladatunk az

$$\int T(x) \cdot R(\sqrt[n]{ax+b})\, dx \qquad (x \in I)$$

kiszámítása (egy alkalmas $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon). Legyen

$$f(x) := \sqrt[n]{ax+b} \qquad (c := -b/a < x \in \mathbf{R}),$$

ekkor könnyen láthatóan az $f : (c, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvény egy szigorúan monoton növő, differenciálható bijekció. Mivel

$$f'(x) = \frac{a}{n} \cdot (ax+b)^{1/n-1} > 0 \qquad (x > c),$$

ezért (ld. 7.3.3. Tétel) az $f^{-1} : (0, +\infty) \to (c, +\infty)$ inverzfüggvény is differenciálható,

$$f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a} \qquad (x > 0),$$

és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{n}{a} \cdot x^{n-1} \qquad (x > 0).$$

Ha

$$J \subset (0, +\infty) \cap \mathcal{D}_R \cap \mathcal{D}_{T \circ f^{-1}}$$

nyílt intervallum, akkor legyen $I := f^{-1}[J]$, és alkalmazzuk a helyettesítéses integrálást (ld. 8.1.4. Tétel) a

$$g(t) := f^{-1}(t) \qquad (t \in J)$$

szereposztással:

$$\left(\int T(x)\cdot R\Big(\sqrt[n]{ax+b}\Big)\,dx\right)\circ g = \int T(g(t))\cdot R\Big(\sqrt[n]{a\cdot g(t)+b}\Big)\cdot g'(t)\,dt =$$

$$\int T(f^{-1}(t))\cdot R\Big(f(f^{-1}(t))\Big)\cdot (f^{-1})'(t)\,dt =$$

$$\frac{n}{a}\cdot\int T((t^n-b)/a)\cdot R(t)\cdot t^{n-1}dt \qquad (t\in J).$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$J \ni t \mapsto T((t^n-b)/a)\cdot R(t)\cdot t^{n-1}$$

függvény egy racionális törtfüggvény (leszűkítése a J-re), így a fenti utolsó határozatlan integrált (ld. 8.3.1.) már ki tudjuk számolni. A feladatban keresett $F \in \int T(x)\cdot R\Big(\sqrt[n]{ax+b}\Big)\,dx$ $(x \in I)$ primitív függvények pedig a következők:

$$F(x) := G\Big(\sqrt[n]{ax+b}\Big)+c \qquad (x\in I,\, c\in \mathbf{R}),$$

ahol a $G : J \to \mathbf{R}$ egy tetszőleges eleme az

$$\frac{n}{a}\cdot\int T((t^n-b)/a)\cdot R(t)\cdot t^{n-1}dt \qquad (t\in J)$$

határozatlan integrálnak. (Analóg módon járhatunk el akkor is, ha a fenti paraméterek közül $a < 0$.) Legyen pl.

$$n := 2,\ a := 2,\ b := 1,\ T \equiv 1,\ R(x) := \frac{x}{x^3+1} \quad (x > -1),$$

azaz számítsuk ki (valamilyen I nyílt intervallumon) az

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x+1})^3+1}\,dx \qquad (x\in I)$$

határozatlan integrált. Ekkor (pl.) a $J := (0,+\infty)$ választással $I = (-1/2,+\infty)$, ill.

$$\frac{n}{a}\cdot\int R(t)\cdot t^{n-1}dt = \int\frac{t^2}{t^3+1}\,dt = \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\ln(t+1)+\frac{1}{3}\cdot\ln(t^2-t+1)+c=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{t+1}{t^2-t+1}\right)+c \qquad (t>0).$$

Innen

$$\int\frac{\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x+1})^3+1}\,dx=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}+1}{2x-\sqrt{2x+1}+2}\right)+c \qquad (x\in(-1/2,+\infty),\ c\in\mathbf{R}).$$

xiii) Az előző megjegyzés mintájára kezelhetjük a „kissé" bonyolultabbnak tűnő

$$\int T(x)\cdot R(S(x))\,dx \qquad (x\in I)$$

feladatot is, ahol $T,R\in\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ racionális törtfüggvények, $I\subset\mathbf{R}$ nyílt intervallum, az $S\in\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény pedig a következő:

$$S(x)=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \qquad (x\in I).$$

Az itt szereplő $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ paraméterekről feltesszük, hogy

$$ac\neq 0\ \ ,\ \ ad-cb\neq 0,$$

az $I\subset\mathcal{D}_T$ pedig egy olyan (könnyen beláthatóan létező) nyílt intervallum, amelyre

$$0<\frac{ax+b}{cx+d}\in\mathcal{D}_R \qquad (x\in I).$$

Világos, hogy $S\in D$, és

$$S'(x)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n-1}\cdot\frac{ad-cb}{(cx+d)^2}\neq 0 \qquad (x\in I).$$

Következésképpen az S szigorúan monoton (növő vagy fogyó) függvény, továbbá $S^{-1}\in D$, $J:=\mathcal{R}_S$ nyílt intervallum,

$$S^{-1}(x)=\frac{dx^n-b}{a-cx^n} \qquad (x\in J),$$

és

$$(S^{-1})'(x)=\frac{n(ad-cb)x^{n-1}}{(a-cx^n)^2} \qquad (x\in J).$$

Ezért

$$\left(\int T(x)\cdot R(S(x))\,dx\right)\circ S^{-1}=\int T(S^{-1}(t))\cdot R(t)\cdot(S^{-1})'(t)\,dt=$$

$$n(ad-cb)\cdot\int T\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)\cdot R(t)\cdot\frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt \qquad (t\in J).$$

A

$$J\ni t\mapsto T\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)\cdot R(t)\cdot\frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$$

függvény nyilván megint csak racionális törtfüggvény (leszűkítése a J-re), aminek a határozatlan integrálját (ld. 8.3.1.) már „ismerjük". Ha

$$G\in\int T\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)\cdot R(t)\cdot\frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt \qquad (t\in J)$$

tetszőleges, akkor a jelen feladatban keresett összes primitív függvény az I intervallumon a következő:

$$F(x):=n(ad-cb)\cdot G\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)+\alpha \qquad (x\in I,\,\alpha\in\mathbf{R}).$$

Legyen pl. a feladat a következő:

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \qquad (x\in I).$$

Ekkor tehát

$$R(x):=x \quad (x\in\mathbf{R}),\ \ T\equiv 1,\ \ n=2,\ \ a:=c:=d:=1,\ \ ,b:=-1,$$

ill. (pl.) $I:=(-\infty,-1)$ esetén $J=(1,+\infty)$. A fenti G meghatározásához ezért az

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt \qquad (t>1)$$

határozatlan integrált kell kiszámítanunk. Parciális törtekre bontással alkalmas $A,B,C,D\in\mathbf{R}$ együtthatókkal

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}.$$

Innen $A=B=D=1/4$, $C=-1/4$ következik, így

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\ln(t-1)+\frac{1}{1-t}-\ln(t+1)-\frac{1}{t+1}\right)+\alpha=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\frac{2t}{1-t^2}\right)+\alpha \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ t>1).$$

Végül az

$$U(x):=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad (x\in\mathbf{R}\setminus[-1,1])$$

jelöléssel

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\ln\left(\frac{U(x)-1}{U(x)+1}\right)+(x+1)\cdot U(x)+\alpha \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ x<-1).$$

Ha az $I:=(1,+\infty)$ intervallumot választjuk, akkor $J=(0,1)$, így az

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt \qquad (0<t<1)$$

határozatlan integrált kell kiszámolni. Az eddigieket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}-\ln(t+1)-\frac{1}{t+1}\right)+\alpha=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)+\frac{2t}{1-t^2}\right)+\alpha \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ 0<t<1).$$

Következésképpen

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\ln\left(\frac{1-U(x)}{1+U(x)}\right)+(x+1)\cdot U(x)+\alpha \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ x>1).$$

9. fejezet

Riemann-integrál

9.1. A határozott integrál fogalma

Tekintsük az

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in [0,1])$$

függvényt, és jelöljük $\mathcal{S}$-sel a „függvény alatti síkidomot":

$$\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathcal{D}_f,\, 0 \leq y \leq f(x)\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0,1],\, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Legyen $\tau \subset [0,1]$ egy „felosztása" a $[0,1]$ intervallumnak, azaz legyen τ olyan véges halmaz, amelyre $0,1 \in \tau$ igaz. Ekkor valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\},$$

ahol $x_0 := 0 < x_1 < ... < x_n := 1$. Ha

$$I_j := [x_j, x_{j+1}] \qquad (j = 0, ..., n-1)$$

a j-edik „osztásintervallum", akkor jelöljük t_j-vel, ill. T_j-vel az alábbi téglalapokat:

$$t_j := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I_j,\, 0 \leq y \leq x_j^2\},$$

$$T_j := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I_j,\, 0 \leq y \leq x_{j+1}^2\}.$$

Világos, hogy az

$$\mathcal{U}_\tau := \bigcup_{j=0}^{n-1} t_j \;\; , \;\; \mathcal{V}_\tau := \bigcup_{j=0}^{n-1} T_j$$

síkidomokra

$$\mathcal{U}_\tau \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{V}_\tau.$$

Sőt, $\mathcal{U}_\tau$, ill. $\mathcal{V}_\tau$ maximális, ill. minimális az alábbi értelemben: ha

$$c_j,\ C_j \geq 0 \qquad (j = 0, ..., n-1),$$

és a

$$\widetilde{t}_j := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I_j,\, 0 \leq y \leq c_j\},$$
$$\widetilde{T}_j := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in I_j,\, 0 \leq y \leq C_j\}$$

téglalapokkal

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\tau := \bigcup_{j=0}^{n-1} \widetilde{t}_j \ , \ \widetilde{\mathcal{V}}_\tau := \bigcup_{j=0}^{n-1} \widetilde{T}_j,$$

akkor az

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\tau \subset \mathcal{S} \subset \widetilde{\mathcal{V}}_\tau$$

tartalmazás szükséges és elégséges feltétele az, hogy

$$c_j \leq x_j^2 = \inf\{f(x) : x \in I_j\} \qquad (j = 0, ..., n-1),$$

$$C_j \geq x_{j+1}^2 = \sup\{f(x) : x \in I_j\} \qquad (j = 0, ..., n-1),$$

és az utóbbi esetben

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\tau \subset \mathcal{U}_\tau \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{V}_\tau \subset \widetilde{\mathcal{V}}_\tau.$$

Ezért azt is szokás mondani, hogy $\mathcal{U}_\tau$ az $\mathcal{S}$-be *beírt,* $\mathcal{V}_\tau$ pedig az $\mathcal{S}$ *köré írt* (téglalapokból álló) halmaz.

Emlékeztetünk az (egymásra merőleges) $u, v > 0$ oldalhosszúságú téglalap területére: uv, miszerint a t_j, T_j téglalapok $|t_j|, |T_j|$ területei a következők:

$$|t_j| = x_j^2 \cdot (x_{j+1} - x_j) \ , \ |T_j| = x_{j+1}^2 \cdot (x_{j+1} - x_j) \qquad (j = 0, ..., n-1).$$

Az elemi területfogalom alapján az $\mathcal{U}_\tau$, $\mathcal{V}_\tau$ síkidomoknak is „van területük", nevezetesen

$$|\mathcal{U}_\tau| := \sum_{j=0}^{n-1} |t_j| \ , \ |\mathcal{V}_\tau| := \sum_{j=0}^{n-1} |T_j|.$$

Ha az $\mathcal{S}$ síkidomot is szeretnénk „megmérni", azaz $\mathcal{S}$-nek $|\mathcal{S}|$ területet tulajdonítani, akkor a téglalapok területével kapcsolatban „megszokott" monotonitási tulajdonságot biztosítandó elvárjuk, hogy

$$|\mathcal{U}_\tau| \leq |\mathcal{S}| \leq |\mathcal{V}_\tau|.$$

Legyen speciálisan a fenti $\tau_n := \tau$ felosztás a következő:

$$x_k := \frac{k}{n} \qquad (k = 0, ..., n).$$

Ekkor

$$t_j = \frac{j^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \quad , \quad T_j = \frac{(j+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \qquad (j = 0, ..., n-1),$$

amiből

$$|\mathcal{U}_{\tau_n}| = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot (2n-1)}{6n^3},$$

$$|\mathcal{V}_{\tau_n}| = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = \frac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{6n^3}$$

következik. Ha tehát az $\mathcal{S}$-nek „van területe", akkor

$$\frac{(n-1)\cdot n\cdot (2n-1)}{6n^3} \le |\mathcal{S}| \le \frac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{6n^3} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$\lim\left(\frac{(n-1)\cdot n\cdot (2n-1)}{6n^3}\right) = \lim\left(\frac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{6n^3}\right) = \frac{1}{3},$$

ezért csak

$$|\mathcal{S}| = \frac{1}{3}$$

lehetséges.

A fentieket mintegy általánosítva induljunk ki most egy $[a,b]$ korlátos és zárt intervallumon $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ értelmezett

$$f : [a,b] \to \mathbf{R}$$

korlátos függvényből. A $\tau \subset [a,b]$ véges halmazt az $[a,b]$ intervallum *felosztásának* nevezzük, ha $a, b \in \tau$. Van tehát olyan $1 \le n \in \mathbf{N}$ természetes szám, amellyel

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\}$$

alkalmas $x_0, ..., x_n \in [a,b]$ számokkal, ahol (a későbbiekben ezt mindig feltételezzük a jelölésben)

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b.$$

Legyen ekkor

$$I_j := [x_j, x_{j+1}] \qquad (j = 0, ..., n-1)$$

a τ felosztás által meghatározott j*-edik osztásintervallum,* ill.

$$\mathcal{F}(\tau) := \{I_j : j = 0, ..., n-1\}.$$

Ha valamilyen $I := [u,v]$ $(u,\ v \in \mathbf{R},\ u < v)$ intervallum esetén $|I| := v - u$ az I *hossza,* akkor a

$$\delta_\tau := \max\{|I| : I \in \mathcal{F}(\tau)\}$$

számot a τ felosztás *finomságának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} |I| = b-a.$$

Definiáljuk az $m_j,\ M_j \in \mathbf{R}\quad (j=0,...,n-1)$ számokat a következőképpen:

$$m_j := m_{I_j} := \inf\{f(x) : x\in I_j\}\ \ ,\ \ M_j := M_{I_j} := \sup\{f(x) : x\in I_j\}.$$

Ekkor

$$s(f,\tau) := \sum_{j=0}^{n-1} m_j\cdot |I_j|$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *alsó összege,*

$$S(f,\tau) := \sum_{j=0}^{n-1} M_j\cdot |I_j|$$

pedig az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *felső összege.* Világos, hogy bármely $\tau\subset[a,b]$ felosztás esetén

$$s(f,\tau)\le S(f,\tau).$$

Azt mondjuk, hogy a $\tau\subset[a,b]$ felosztás *finomabb* a $\mu\subset[a,b]$ felosztásnál (más szóval a τ *finomítása* a μ-nek), ha $\mu\subset\tau$. Ekkor bármely $J\in\mathcal{F}(\mu)$ osztásintervallumhoz megadható véges sok olyan $I_j(J)\in\mathcal{F}(\tau)$ (ahol alkalmas, J-től függő $k,l\in\mathbf{N}$, $k\le l$ esetén $j=k,...,l$), hogy

$$J=\bigcup_{j=k}^{l} I_j(J)\ \ ,\ \ |J|=\sum_{j=k}^{l}|I_j(J)|.$$

Az infimum, ill. a szuprémum tulajdonságai alapján azt mondhatjuk, hogy

$$m_J\le m_{I_j(J)}\ \ ,\ \ M_J\ge M_{I_j(J)}\qquad (j=k,...,l).$$

Ezért

$$m_J\cdot|J| = \sum_{j=k}^{l} m_J\cdot|I_j(J)| \le \sum_{j=k}^{l} m_{I_j(J)}\cdot|I_j(J)|,$$

$$M_J\cdot|J| = \sum_{j=k}^{l} M_J\cdot|I_j(J)| \ge \sum_{j=k}^{l} M_{I_j(J)}\cdot|I_j(J)|,$$

amiből

$$s(f,\mu)=\sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} m_J\cdot|J| \le \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)}\sum_{j=k}^{l} m_{I_j(J)}\cdot|I_j(J)| = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} m_I\cdot|I| = s(f,\tau),$$

$$S(f,\mu) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} M_J\cdot |J| \geq \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} \sum_{j=k}^{l} M_{I_j(J)}\cdot |I_j(J)| = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} M_I\cdot |I| = S(f,\tau).$$

Legyenek most $\tau, \mu \subset [a,b]$ tetszőleges felosztások, ill.

$$\gamma := \tau \cup \mu.$$

Világos, hogy a γ halmaz is felosztása az $[a,b]$-nek, és mind a τ-nak, mind pedig a μ-nek finomítása: $\tau \subset \gamma$, ill. $\mu \subset \gamma$. Így az előzőek szerint

$$s(f,\tau) \leq s(f,\gamma) \leq S(f,\gamma) \leq S(f,\mu).$$

Mindezeket összegezve az alábbi tételt bizonyítottuk be:

9.1.1. Tétel. *Legyen adott a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor tetszőleges τ, $\mu \subset [a,b]$ felosztások esetén*

1^o $s(f,\tau) \leq S(f,\mu)$;

2^o *ha a τ finomabb a μ-nél, akkor $s(f,\mu) \leq s(f,\tau)$ és $S(f,\mu) \geq S(f,\tau)$.*

Jelöljük az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}_a^b$-vel. Az előbbi tétel alapján tehát (az abban szereplő f függvényre) az

$$\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\}$$

halmaz felülről korlátos, és minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az utóbbi halmaznak az $S(f,\mu)$ felső összeg egy felső korlátja. Ezért

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \leq S(f,\mu) < +\infty.$$

Hasonlóan, az

$$\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\}$$

halmaz alulról korlátos, aminek minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az $s(f,\mu)$ alsó összeg egy alsó korlátja. Így

$$I^*(f) := \inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \geq s(f,\mu) > -\infty.$$

Következésképpen $I_*(f)$, $I^*(f) \in \mathbf{R}$, és

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

A most definiált $I_*(f)$ számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának,* $I^*(f)$-et pedig az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük. A fentiek szerint tehát tetszőleges $\tau, \mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásokra

$$s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\mu).$$

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó f függvény *Riemann-integrálható,* ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f)$$

számot az f függvény *Riemann-integráljának* (vagy más szóval *határozott integráljának*) nevezzük.

Az előbbiekben értelmezett Riemann-integrálható függvények halmazát az $R[a,b]$ szimbólummal fogjuk jelölni. Esetenként használni fogjuk az

$$\int_{[a,b]} f := \int_I f := \int_a^b f$$

jelöléseket is (ahol $I := [a,b]$). A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha pl. valamilyen $\tau_n \in \mathcal{F}_a^b$ $(n \in \mathbf{N})$ felosztás-sorozatra

$$\lim\,(s(f,\tau_n)) = \lim\,(S(f,\tau_n)),$$

akkor $f \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b f = \lim\,(s(f,\tau_n)) = \lim\,(S(f,\tau_n)).$$

Így pl. a bevezetőben vizsgált $f(x) := x^2$ $(x \in [0,1])$ függvényre $f \in R[0,1]$, és

$$\int_0^1 f = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Ugyanakkor a

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

Dirichlet-függvényre könnyen belátható, hogy $g \notin R[0,1]$. Valóban, bármelyik $\tau \in \mathcal{F}_0^1$ felosztásra és $I \in \mathcal{F}_\tau$ osztásintervallumra

$$I \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset \;\;,\;\; I \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \neq \emptyset,$$

ezért $m_I = 0$, $M_I = 1$. Tehát

$$s(g,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} m_I \cdot |I| = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} 0 \cdot |I| = 0,$$

$$S(g,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} M_I\cdot |I| = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} 1\cdot |I| = 1,$$

következésképpen $I_*(g) = 0 \neq 1 = I^*(g)$.

Legyen az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos, $\tau \in \mathcal{F}_a^b$. Az

$$\omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

számot az f függvény τ által meghatározott *oszcillációs összegének* nevezzük. Az alsó-, felső összegek definíciója szerint

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} (M_I - m_I)\cdot |I|,$$

ahol az I intervallumon vett $M_I - m_I$ *oszcillációról* a következőt mondhatjuk:

$$M_I - m_I = \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\} = \sup\{f(x) - f(t) : x,t \in I\}.$$

Valóban,

$$M_I = \sup\{f(u) : u \in I\} \ \ , \ \ m_I = \inf\{f(v) : v \in I\}$$

miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy alkalmas $u, v \in I$ helyen

$$f(u) > M_I - \varepsilon \ \ , \ \ f(v) < m_I + \varepsilon,$$

így $f(u) - f(v) > M_I - m_I - 2\varepsilon$. Ha tehát

$$\alpha := \sup\{f(x) - f(t) : x,t \in I\},$$

akkor $\alpha > M_I - m_I - 2\varepsilon$. Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $\alpha \geq M_I - m_I$. Ugyanakkor

$$f(x) \leq M_I \ \ , \ \ f(t) \geq m_I \qquad (x,t \in I),$$

amiből $f(x) - f(t) \leq M_I - m_I$ következik. Innen világos, hogy $\alpha \leq M_I - m_I$ is igaz, más szóval $\alpha = M_I - m_I$. Azt kell már csak megjegyeznünk, hogy a

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\} = \sup\{f(x) - f(t) : x,t \in I\}$$

egyenlőség triviálisan teljesül, hiszen tetszőleges $x,t \in I$ helyeken vagy az $|f(x) - f(t)| = f(x) - f(t)$, vagy pedig az $|f(x) - f(t)| = f(t) - f(x)$ egyenlőség áll fenn.

9.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor a következő ekvivalencia igaz: $f \in R[a,b]$ akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel $\omega(f,\tau) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $I_*(f) = I^*(f)$. Figyelembe véve a Darboux-féle alsó, ill. felső integrál definícióját azt mondhatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy alkalmas $\nu, \mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással

$$s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2 \ , \ S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \nu \cup \mu$, ekkor (ld. 9.1.1. Tétel)

$$s(f,\tau) \geq s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2 \ , \ S(f,\tau) \leq S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Innen az következik, hogy

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < I^*(f) - I_*(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

hiszen azt tettük fel, hogy $f \in R[a,b]$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$.

Most induljunk ki abból, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel

$$I^*(f) - I_*(f) \leq \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Mivel $I^*(f) - I_*(f) \geq 0$, ezért csak $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$ lehetséges. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. ■

A következő állítás megfogalmazásához induljunk ki ismét egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényből, és tekintsük (valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett) a $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztást. Ekkor tetszőleges $y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau)$ $(j = 0, ..., n-1)$ választással legyen

$$y := (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

és

$$\sigma(f,\tau,y) := \sum_{j=0}^{n-1} f(y_j) \cdot |I_j|.$$

Ez utóbbi $\sigma(f,\tau,y)$ összeget az f függvény (integrál) *közelítő összegének* nevezzük. Legyen továbbá

$$\hat{\tau} := \{y = (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n : y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau) \ \ (j = 0, ..., n-1)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $\tau \subset [a,b]$ felosztásra

$$s(f,\tau) \leq \sigma(f,\tau,y) \leq S(f,\tau) \qquad (y \in \hat{\tau}).$$

Azt sem nehéz belátni, hogy

$$s(f,\tau) = \inf\{\sigma(f,\tau,y) : y \in \hat{\tau}\} \ , \ S(f,\tau) = \sup\{\sigma(f,\tau,y) : y \in \hat{\tau}\}.$$

Ti. legyen $\tau = \{x_0, ..., x_n\}$, ekkor bármilyen $\delta > 0$ számra és $j = 0, ..., n-1$ indexre egy alkalmasan vett $z_j \in I_j$ helyen $f(z_j) < m_j + \delta$. Így a $z := (z_0, ..., z_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ vektorral

$$\sigma(f, \tau, z) = \sum_{j=0}^{n-1} f(z_j) \cdot |I_j| < \sum_{j=0}^{n-1} m_j \cdot |I_j| + \delta \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |I_j| = s(f, \tau) + \delta \cdot (b-a).$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor a $0 < \delta < \varepsilon/(b-a)$ választással

$$\sigma(f, \tau, z) < s(f, \tau) + \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$s(f, \tau) = \inf\{\sigma(f, \tau, y) : y \in \hat{\tau}\}.$$

Analóg módon kapjuk az $S(f, \tau)$-ra vonatkozó állításunkat.

Ezért minden $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u \in \hat{\tau}$, hogy

$$\sigma(f, \tau, u) < s(f, \tau) + \varepsilon,$$

ill. van olyan $z \in \hat{\tau}$, amellyel

$$\sigma(f, \tau, z) > S(f, \tau) - \varepsilon.$$

A most bevezetett közelítő összegekről megmutatjuk, hogy „jogos" a *közelítő* jelző, ti. kiderül, hogy egyfajta határérték-értelemben ezeknek az összegeknek a „határértéke" az integrál. Sőt, belátjuk, hogy az alsó-felső összegek is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

9.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor:*

a) *tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$|s(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon \ , \ |S(f, \tau) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta);$$

b) *ha $q \in \mathbf{R}$, akkor az $f \in R[a, b]$, $\int_a^b f = q$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, amellyel*

$$|\sigma(f, \tau, y) - q| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta,\ y \in \hat{\tau}).$$

Bizonyítás. Legyen $C > 0$ olyan szám, hogy

$$|f(x)| \le C \qquad (x \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy $\mu = \{z_0, ..., z_N\}$, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \leq N,\ n \in \mathbf{N})$ egy-egy felosztása az $[a, b]$-nek, és

$$\{y_0, ..., y_s\} := \tau \cup \mu \in \mathcal{F}_a^b \qquad (1 \leq s \in \mathbf{N}).$$

Bontsuk fel az $s(f, \tau)$-t definiáló összeget az alábbi módon:

$$s(f, \tau) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j \in A} m_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{j \in B} m_j(x_{j+1} - x_j),$$

ahol A azoknak a $j = 0, ..., n-1$ indexeknek a halmaza, amelyekre $(x_j, x_{j+1}) \cap \mu = \emptyset$ (azaz $z_p \notin (x_j, x_{j+1}) \quad (p = 0, ..., N)$), ill. $B := \{0, ..., n\} \setminus A$. Tehát $[x_j, x_{j+1}] \in \mathcal{F}(\tau \cup \mu)$ $(j \in A)$, ill. a

$$B_i := \{k = 0, ..., s-1 : [y_k, y_{k+1}] \subset [x_i, x_{i+1}]\} \qquad (i \in B)$$

halmazokkal $[y_k, y_{k+1}] \in \mathcal{F}(\tau \cup \mu)$ $(k \in B_i)$ és

$$\bigcup_{k \in B_i} [y_k, y_{k+1}] = [x_i, x_{i+1}] \qquad (i \in B).$$

Következésképpen az

$$\tilde{m}_p := \inf\{f(x) : y_p \leq x \leq y_{p+1}\} \qquad (p = 0, ..., s-1)$$

jelöléssel

$$|s(f, \tau) - s(f, \tau \cup \mu)| = s(f, \tau \cup \mu) - s(f, \tau) =$$

$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} \tilde{m}_k(y_{k+1} - y_k) - \sum_{i \in B} m_i(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} \tilde{m}_k(y_{k+1} - y_k) - \sum_{i \in B} m_i \cdot \sum_{k \in B_i} (y_{k+1} - y_k) =$$

$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} (\tilde{m}_k - m_i)(y_{k+1} - y_k) \leq 2C \cdot \sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} (y_{k+1} - y_k) =$$

$$2C \cdot \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \leq 2C\delta_\tau N,$$

hiszen a B számossága nyilván nem lehet N-nél nagyobb.

Tehát

$$s(f, \tau) \geq s(f, \tau \cup \mu) - 2CN\delta_\tau.$$

Analóg módon kapjuk (a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával), hogy

$$S(f, \tau) \leq S(f, \tau \cup \mu) + 2CN\delta_\tau.$$

Mivel

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_a^b\} \quad , \quad I^*(f) = \inf\{S(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_a^b\},$$

ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén a fenti $\mu = \{z_0, ..., z_N\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás megválasztható úgy, hogy

$$I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mu) \leq s(f,\tau \cup \mu) \leq S(f,\tau \cup \mu) \leq S(f,\mu) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen ezzel a μ-vel $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ olyan felosztás, amelyre még az is igaz, hogy $2CN\delta_\tau < \varepsilon/2$, azaz

$$\delta_\tau < \delta := \frac{\varepsilon}{4CN}.$$

Ekkor

$$I_*(f) \geq s(f,\tau) > s(f,\tau \cup \mu) - \frac{\varepsilon}{2} > I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I_*(f) - \varepsilon.$$

Így

$$I_*(f) \geq s(f,\tau) > I_*(f) - \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ugyanezzel a meggondolással kapjuk az

$$I^*(f) \leq S(f,\tau) < I^*(f) + \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta)$$

egyenlőtlenségeket, amivel a tétel a)-beli állítását beláttuk.

Ha most $f \in R[a,b]$ és $q := \int_a^b f$, akkor $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$, ill. a tétel a) része alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$\left|s(f,\tau) - \int_a^b f\right| = |s(f,\tau) - I_*(f)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|S(f,\tau) - \int_a^b f\right| = |S(f,\tau) - I^*(f)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ugyanakkor

$$s(f,\nu) \leq \sigma(f,\nu,y) \leq S(f,\nu) \qquad (\nu \in \mathcal{F}_a^b,\ y \in \hat{\nu})$$

és

$$s(f,\nu) \leq \int_a^b f \leq S(f,\nu) \qquad (\nu \in \mathcal{F}_a^b),$$

ezért

$$|\sigma(f,\tau,y) - q| = \left|\sigma(f,\tau,y) - \int_a^b f\right| \leq S(f,\tau) - s(f,\tau) \leq$$

$$\left|S(f,\tau) - \int_a^b f\right| + \left|s(f,\tau) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta,\ y \in \hat{\tau}).$$

„Fordítva", most azt tegyük fel b)-ben, hogy a korlátos $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényről a következőt tudjuk: van olyan $q \in \mathbf{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $\delta > 0$ számmal tetszőleges $\tau \subset [a,b]$, $\delta_\tau < \delta$ felosztásra és $y \in \hat{\tau}$ vektorra $|\sigma(f,\tau,y) - q| < \varepsilon$, azaz

$$q + \varepsilon > \sigma(f,\tau,y) > q - \varepsilon.$$

Speciálisan (a 9.1.3. Tétel megfogalmazása előtt mondottakat is figyelembe véve) az is igaz, hogy

$$q + \varepsilon > s(f,\tau) \geq q - \varepsilon \ \ , \ \ q - \varepsilon < S(f,\tau) \leq q + \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta),$$

így

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) \leq 2\varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ez azt jelenti (ld. 9.1.2. Tétel), hogy $f \in R[a,b]$. Ezért (pl.) $\int_a^b f = I_*(f)$ miatt az előbbi $\varepsilon > 0$ számhoz a tétel a) állítása alapján alkalmas $\tilde{\delta} > 0$ mellett

$$\left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \tilde{\delta}).$$

Ha tehát $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, $\delta_\tau < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$, akkor

$$\left| q - \int_a^b f \right| \leq |q - s(f,\tau)| + \left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| < 2\varepsilon.$$

Az itt szereplő $\varepsilon > 0$ tetszőleges lévén, az következik, hogy $q - \int_a^b f = 0$, azaz $q = \int_a^b f$. ■

A következő tételben a Riemann-integrál *intervallum szerinti additivitását* mutatjuk meg. Legyen ehhez valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon adott az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény. Tetszőleges $c \in (a,b)$ esetén definiáljuk az

$$f_c : [a,c] \to \mathbf{R} \ \ , \ \ f^c : [c,b] \to \mathbf{R}$$

függvényeket az alábbiak szerint:

$$f_c := f_{|_{[a,c]}} \ \ , \ \ f^c := f_{|_{[c,b]}}.$$

Tehát a helyettesítési értékek segítségével

$$f_c(x) = f(x) \quad (x \in [a,c]) \ \ , \ \ f^c(x) = f(x) \quad (x \in [c,b]).$$

9.1.4. Tétel. *Bármely korlátos* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *függvény esetén*

a) $f \in R[a,b]$ *akkor és csak akkor igaz, ha* $f_c \in R[a,c]$ *és* $f^c \in R[c,b]$;

b) *ha* $f \in R[a,b]$, *akkor*

$$\int_a^b f = \int_a^c f_c + \int_c^b f^c.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f_c \in R[a,c]$ és $f^c \in R[c,b]$. Ekkor (ld. 9.1.2. Tétel) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $\mu \in \mathcal{F}_a^c$, $\nu \in \mathcal{F}_c^b$ felosztások, hogy

$$\omega(f_c,\mu) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \omega(f^c,\nu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Világos, hogy $\tau := \mu \cup \nu \in \mathcal{F}_a^b$, továbbá

$$\omega(f,\tau) = \omega(f_c,\mu) + \omega(f^c,\nu) < \varepsilon.$$

A 9.1.2. Tételt figyelembe véve ez azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$.

Ha most abból indulunk ki, hogy $f \in R[a,b]$, akkor ismét csak a 9.1.2. Tétel alapján bármely $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Feltehetjük, hogy $c \in \tau$, különben a τ-t kicserélve $\tau \cup \{c\}$-re azt kapjuk, hogy

$$\omega(f,\tau \cup \{c\}) \le \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Legyen

$$\mu := \tau \cap [a,c] \quad , \quad \nu := \tau \cap [c,b].$$

Ekkor

$$\omega(f_c,\mu) + \omega(f^c,\nu) = \omega(f,\tau) < \varepsilon$$

miatt

$$\omega(f_c,\mu),\ \omega(f^c,\nu) \le \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

A 9.1.2. Tételből ezért az következik, hogy $f_c \in R[a,c]$, $f^c \in R[c,b]$.

Ezzel az a) állítást beláttuk. A b) bizonyításához tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor a) miatt $f_c \in R[a,c]$, $f^c \in R[c,b]$. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy $\mu \in \mathcal{F}_a^c$, $\nu \in \mathcal{F}_c^b$ felosztással

$$s(f_c,\mu) > \int_a^c f_c - \varepsilon \quad , \quad s(f^c,\nu) > \int_c^b f^c - \varepsilon.$$

Ha tehát $\tau := \mu \cup \nu$, akkor

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c - 2\varepsilon < s(f_c,\mu) + s(f^c,\nu) = s(f,\tau) \le \int_a^b f.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c \leq \int_a^b f.$$

Ugyanakkor alkalmas $\gamma \in \mathcal{F}_a^c,\ \eta \in \mathcal{F}_c^b$ felosztásokkal

$$S(f_c, \gamma) < \int_a^c f_c + \varepsilon \ \ , \ \ S(f^c, \eta) < \int_c^b f^c + \varepsilon$$

is igaz. Következésképpen a $\theta := \gamma \cup \eta \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c + 2\varepsilon > S(f_c, \gamma) + S(f^c, \eta) = S(f, \theta) \geq \int_a^b f.$$

Más szóval (mint az előbb)

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c \geq \int_a^b f,$$

ami az előbbiekkel együtt a kívánt $\int_a^c f_c + \int_c^b f^c = \int_a^b f$ egyenlőséget adja. ∎

Állapodjunk meg abban, hogy ezentúl röviden a következőt írjuk:

$$\int_a^c f := \int_a^c f_c \ \ , \ \ \int_c^b f := \int_c^b f^c.$$

Jegyezzük meg, hogy ha (pl.)

$$a < c < d < b \ \ , \ \ f \in R[a,b] \ \ , \ \ g := f_{|_{[c,d]}},$$

akkor $g \in R[c,d]$. Valóban, a 9.1.4. Tétel szerint $h := f_d \in R[a,d]$, így ismét a 9.1.4. Tételt alkalmazva $h^c = g \in R[c,d]$. Az előbbi jelölésbeli megállapodást bővítsük ki a következővel:

$$\int_c^d f := \int_c^d g.$$

Világos, hogy ekkor az $f \in R[a,b]$ függvényre

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f,$$

ill. (ld. teljes indukció) bármely $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra

$$\int_a^b f = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \int_I f.$$

Mutassuk meg, hogy a Riemann-integrál rendelkezik egyfajta monotonitási tulajdonsággal. Ezt fejezi ki a következő tétel.

9.1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in R[a,b]$. *Ekkor:*

a) $|f| \in R[a,b]$, *és* $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$;

b) *ha* $g \in R[a,b]$ *és* $f(x) \le g(x) \quad (x \in [a,b])$, *akkor* $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Bizonyítás. A 9.1.2. Tétel miatt bármely $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, amelyre $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Mivel tetszőleges $I \in \mathcal{F}(\tau)$ esetén

$$\sup\{||f(x)| - |f(t)|| : x,t \in I\} \le \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\},$$

ezért

$$\omega(|f|,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \sup\{||f(x)| - |f(t)|| : x,t \in I\}\cdot |I| \le$$

$$\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\}\cdot |I| = \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Tehát (ld. 9.1.2. Tétel) $|f| \in R[a,b]$. Továbbá $-f \in R[a,b]$, hiszen nyilvánvalóan

$$\omega(-f,\tau) = \omega(f,\tau) < \varepsilon,$$

így $(-f)$-re is alkalmazható a 9.1.2. Tétel. Gondoljuk meg, hogy

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f.$$

Valóban, bármely $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra

$$s(-f,\mu) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \inf\{-f(x) : x \in I\}\cdot |I| = -\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \sup\{f(x) : x \in I\}\cdot |I| = -S(f,\tau),$$

következésképpen

$$\int_a^b (-f) = \sup\{s(-f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} = \sup\{-S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} =$$

$$-\inf\{S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} = -\int_a^b f.$$

Ugyanakkor

$$-f,\ f \le |f|,$$

amiből az előbbiek és b) alapján

$$\pm \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

azaz $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Elegendő már csak a b) állítást belátni. Legyen ehhez $\mu \in \mathcal{F}_a^b$, ekkor

$$s(f,\mu) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{f(x) : x \in I\} \cdot |I| \le$$

$$\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{g(x) : x \in I\} \cdot |I| = s(g,\mu) \le I_*(g) = \int_a^b g.$$

Következésképpen

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} \le \int_a^b g.$$

■

Az előbbi tétel egyik gyakran használt következménye az alábbi becslés:

$$\left|\int_a^b f\right| \le C \cdot (b-a) \qquad (f \in R[a,b]),$$

ahol a $C \ge 0$ szám az f egy korlátja, azaz

$$|f(x)| \le C \qquad (x \in [a,b]).$$

Ui. a

$$g(x) := C \qquad (x \in [a,b])$$

függvénnyel nyilván $|f| \le g$. Az is világos, hogy $g \in R[a,b]$ és $\int_a^b g = C \cdot (b-a)$, mert

$$s(g,\tau) = S(g,\tau) = C \cdot (b-a) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Ezért értelemszerűen alkalmazható a 9.1.5. Tétel a) és b) állítása.

Világos továbbá, hogy ha a 9.1.5. Tételben $f \equiv 0$, akkor $\int_a^b f = 0$, más szóval a Riemann-integrál „előjeltartó": ha $g \in R[a,b]$ és $g \ge 0$, akkor $\int_a^b g \ge 0$.

A továbbiakban a határozott integrál egy karakterisztikus tulajdonságát mutatjuk ki. Nevezetesen belátjuk, hogy a Riemann-integrálhatóság, ill. maga a Riemann-integrál „érzéketlen" arra, hogy a szóban forgó függvény egy véges halmazon „mit csinál". Kiderül ui., hogy ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új" függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé. Más megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy amennyiben egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett két (valós értékű) függvény legfeljebb véges sok helyen különbözik egymástól, akkor vagy mindkettő integrálható (és ekkor az integráljuk megegyezik), vagy egyikük sem integrálható.

9.1.6. Tétel. *Tekintsük a korlátos és zárt* $[a, b]$ *intervallumon az* $f,\ g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *korlátos függvényeket. Tegyük fel, hogy az* $A := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ *halmaz véges. Ekkor:*

a) $f \in R[a, b] \iff g \in R[a, b]$;

b) *ha* $f \in R[a, b]$, *akkor* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Bizonyítás. Lássuk be az állításainkat először abban az esetben, amikor az A halmaz 1-elemű: valamilyen $c \in [a, b]$ elemmel $A = \{c\}$. Induljunk ki abból, hogy $f \in R[a, b]$. Ekkor (ld. 9.1.2. Tétel) bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, amellyel

$$\omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Feltehető, hogy $c \in \tau$, különben τ-t cseréljük fel $\tau \cup \{c\}$-vel, amikor is (ld. 9.1.1. Tétel) $\omega(f, \tau \cup \{c\}) \leq \omega(f, \tau) < \varepsilon$. Legyen

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\}$$

(alkalmas pozitív $\mathbf{N} \ni n$-nel). Ekkor egyértelműen létezik olyan $j \in \{0, ..., n\}$, amelyre $c = x_j$. Mindezt figyelembe véve az

$$o_k(g) := \sup\{|g(x) - g(t)| : x, t \in [x_k, x_{k+1}]\},$$

$$o_k(f) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in [x_k, x_{k+1}]\} \qquad (k = 0, ..., n-1)$$

jelölésekkel a következőket mondhatjuk:

$$\omega(g, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} o_k(g) \cdot (x_{k+1} - x_k) =$$

$$\sum_{j-1, j \neq k=0}^{n-1} o_k(g) \cdot (x_{k+1} - x_k) + o_{j-1}(g) \cdot (x_j - x_{j-1}) + o_j(g) \cdot (x_{j+1} - x_j) =$$

$$\sum_{j-1, j \neq k=0}^{n-1} o_k(f) \cdot (x_{k+1} - x_k) + o_{j-1}(g) \cdot (x_j - x_{j-1}) + o_j(g) \cdot (x_{j+1} - x_j) =$$

$$\omega(f, \tau) + (o_{j-1}(g) - o_{j-1}(f)) \cdot (x_j - x_{j-1}) + (o_j(g) - o_j(f)) \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

(ahol $o_{-1}(g) := o_{-1}(f) := 0$). A feltételeink szerint az f, g függvények korlátosak, ezért egy alkalmas $C > 0$ számmal

$$|f(x)|,\ |g(x)| < C \qquad (x \in [a, b]).$$

Világos, hogy $o_k(g),\ o_k(f) \leq 2C\ \ (k = 0, ..., n-1)$, így

$$\omega(g, \tau) \leq \omega(f, \tau) + 4C(x_{j+1} - x_{j-1}) < \varepsilon + 8C\delta_\tau.$$

A τ felosztásról azt is feltehetjük, hogy $8C\delta_\tau < \varepsilon$, azaz $\delta_\tau < \varepsilon/(8C)$, ui. különben „tovább finomítva" a τ-t (tehát alkalmasan választott véges sok $[a, b]$-beli ponttal bővítve) ezt elérhetjük, miközben az $\omega(f, \tau)$ oszcillációs összeg legfeljebb csökken. Így végül oda jutunk, hogy $\omega(g, \tau) < 2\varepsilon$, ami a 9.1.2. Tétel szerint a g függvény Riemann-integrálhatóságát jelenti. Mivel az f és a g felcserélésével az $\Longleftrightarrow$ ekvivalencia fordított irányát kapjuk, ezért az a) állítást (1-elemű A esetén) beláttuk.

Legyen továbbra is a fenti A halmaz 1-elemű halmaz, és lássuk be b)-t. Ha a szóban forgó c-re $a < c < b$, akkor (egyelőre) tetszőleges

$$a < d < c < e < b$$

helyeket véve (ld. 9.1.4. Tétel)

$$\int_a^b g = \int_a^d g + \int_d^e g + \int_e^b g = \int_a^d f + \int_d^e g + \int_e^b f = \int_a^b f + \int_d^e g - \int_d^e f.$$

Ezért (ld. 9.1.5. Tétel)

$$\left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| \leq \left| \int_d^e g \right| + \left| \int_d^e f \right| \leq 2C \cdot (e - d).$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor válasszuk a d, e számokat úgy, hogy $2C \cdot (e - d) < \varepsilon$, amikor is

$$\left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

következik. Más szóval $\left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| = 0$, azaz $\int_a^b g = \int_a^b f$.

A $c = a$, vagy a $c = b$ esetben az előbbiek értelemszerű módosításával kapjuk ugyanezt.

Ezzel „elintéztük" az 1-elemű A halmazokat. Általában legyen az A elemeinek a száma $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és alkalmazzuk a teljes indukciót. Az $n = 1$ esetben az előbb láttuk be a tételt. Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén már igaz az állításunk minden olyan A halmazra, amelyik legfeljebb n-elemű. Ha most a tételbeli A elemszáma $n + 1$, akkor legyen valamilyen $c \in A$ segítségével

$$\tilde{A} := A \setminus \{c\}.$$

Ekkor $\tilde{A}$ elemszáma n, így a

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in I \setminus \tilde{A}) \\ \\ g(x) & (x \in \tilde{A}) \end{cases}$$

függvényre $h \in R[a,b]$ és $\int_a^b h = \int_a^b f$. Világos, hogy

$$\{x \in [a,b] : g(x) \neq h(x)\} = \{c\},$$

ami 1-elemű halmaz. Ezért az indukciós feltétel alapján $g \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b g = \int_a^b h = \int_a^b f.$$

■

A következő tételben már ismert függvényosztályok viszonyát vizsgáljuk a Riemann-integrálható függvények halmazával.

9.1.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallumon értelmezett $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R[a,b]$. Ugyanez a következtetés igaz akkor is, ha az f-ről a folytonosság helyett monotonitást tételezünk fel.*

Bizonyítás. Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor (ld. 5.5.11. Tétel) egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (x, t \in [a,b],\ |x-t| < \delta).$$

Ha tehát a $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra $\delta_\tau < \delta$ teljesül, akkor bármelyik $I \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra $|I| < \delta$, így

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Következésképpen

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \cdot |I| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} |I| = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Ezért a 9.1.2. Tétel miatt $f \in R[a,b]$.

Ha pl. az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény monoton növő (monoton fogyó függvényre az alábbi bizonyítás analóg módon végezhető), akkor a valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett az

$$x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (k = 0, ..., n)$$

osztópontokkal definiált $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ egyenletes felosztásra

$$\omega(f,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup\{|f(x) - f(t)| : x_k \leq x, t \leq x_{k+1}\} \cdot (x_{k+1} - x_k) =$$

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))}{n}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor legyen a fenti $1 \leq n \in \mathbf{N}$ olyan, hogy

$$\frac{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon,$$

amikor is $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Így ismét csak a 9.1.2. Tétel szerint $f \in R[a,b]$. ■

9.2. Megjegyzések

i) A 9.1. pont bevezetésében tárgyalt példára hivatkozva valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum és egy $0 \leq f : [a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén az $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ $(\tau \in \mathcal{F}_a^b)$ alsó-, felső összegek a *függvény alatti*

$$\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b],\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidomba beírt, ill. *körülírt* ún. *téglányösszegek*. Az f nem-negatívitását elvetve az $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ összegeket *előjeles téglányösszegekként* szokás emlegetni.

ii) Amennyiben az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor minden

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$$

felosztás és $j = 0, ..., n-1$ esetén az 5.5.10. Tétel értelmében vannak olyan

$$\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$$

helyek, hogy

$$m_j = f(\xi_j) \quad , \quad M_j = f(\eta_j).$$

Tehát, ha $\xi := (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$, $\eta := (\eta_0, ..., \eta_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$, akkor

$$s(f,\tau) = \sigma(f,\tau,\xi) \quad , \quad S(f,\tau) = \sigma(f,\tau,\eta).$$

iii) Adott $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén vezessük be az alábbi parciális rendezést az $\mathcal{F}_a^b$ halmazban:

$$\tau \preceq \mu \iff \tau \subset \mu \qquad (\tau,\, \mu \in \mathcal{F}_a^b).$$

Ekkor a 9.1.1. Tétel szerint ebben az értelemben bármely $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén az

$$\mathcal{F}_a^b \ni \tau \mapsto s(f, \tau)$$

leképezés monoton növő:

$$\tau \preceq \mu \implies s(f, \tau) \leq s(f, \mu) \qquad (\tau,\, \mu \in \mathcal{F}_a^b).$$

Hasonlóan, az

$$\mathcal{F}_a^b \ni \tau \mapsto S(f, \tau)$$

leképezés monoton fogyó:

$$\tau \preceq \mu \implies S(f, \tau) \geq S(f, \mu) \qquad (\tau,\, \mu \in \mathcal{F}_a^b).$$

Mindebből rögtön következik, hogy az

$$\mathcal{F}_a^b \ni \tau \mapsto \omega(f, \tau)$$

leképezés is monoton fogyó:

$$\tau \preceq \mu \implies \omega(f, \tau) \geq \omega(f, \mu) \qquad (\tau,\, \mu \in \mathcal{F}_a^b).$$

iv) Legyen adott a $\Phi : \mathcal{F}_a^b \to \mathbf{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a Φ-nek *van határértéke,* ha létezik olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $0 < \delta$-val

$$|\Phi(\tau) - \alpha| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\, \delta_\tau < \delta).$$

Nem nehéz belátni, hogy ekkor egyetlen ilyen α van, amit a Φ *határértékének* (vagy *limeszének*) nevezünk, és a $\lim \Phi$ (vagy a $\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau)$) szimbólummal jelölünk.

v) Ha például $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ egy korlátos függvény, akkor

$$\Phi_1(\tau) := s(f, \tau) \;\;,\;\; \Phi_2(\tau) := S(f, \tau) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b),$$

$$\Phi_3(\tau) := \sigma(f, \tau, y) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\, y \in \hat{\tau})$$

az előző megjegyzésben említett (speciális) függvények. A 9.1.3. Tétel szerint bármilyen korlátos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény esetén léteznek a $\lim \Phi_i \quad (i = 1, 2)$ határértékek, és

$$\lim \Phi_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f, \tau) = I_*(f) \;\;,\;\; \lim \Phi_2 = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f, \tau) = I^*(f).$$

Ha $f \in R[a,b]$, akkor létezik a $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,y)$ határérték is, és

$$\lim \Phi_3 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,y) = \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f,\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f,\tau) = \int_a^b f.$$

Sőt, a $\lim \Phi_3 = \int_a^b f$ egyenlőség a 9.1.3. Tétel szerint y-ban „egyenletesen" teljesül, azaz a iv) megjegyzésben mondott határérték-definícióban szereplő δ csak (az ottani) ε-tól függ, y-tól nem. Pl. legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, ..., n) \;\;,\;\; \tau_n := \{x_0, ..., x_n\}$$

(az $[a,b]$ intervallum *egyenletes felosztása*), és

$$s_n(f) := s(f,\tau_n) \;\;,\;\; S_n(f) := S(f,\tau_n),$$

ill.

$$\sigma_n(f) := \sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) \qquad (\xi^{(n)} \in \hat{\tau}_n).$$

Ekkor nyilván

$$\delta_{\tau_n} = \frac{b-a}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen a 9.1.3. Tételben szereplő $\delta > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $\delta_{\tau_n} < \delta \quad (N < n \in \mathbf{N})$. Ezért

$$|s_n(f) - I_*(f)| < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}),$$

ill.

$$|S_n(f) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\lim(s_n(f)) = I_*(f) \;\;,\;\; \lim(S_n(f)) = I^*(f)$$

(ahol az utóbbi $\lim ...$ határértékek az illető sorozatok („közönséges" értelemben vett) határértékei). Ha még $f \in R[a,b]$ is igaz, akkor

$$\lim (s_n(f)) = \lim (S_n(f)) = \lim (\sigma_n(f)) = \int_a^b f.$$

vi) A fentiek tükrében a 9.1.2. Tétel egy átfogalmazása a következő. Legyen (a korlátos és zárt) $[a,b]$ intervallumon adott az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$f \in R[a,b] \iff \lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f,\tau) = 0.$$

Ui. $\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f,\tau) = 0$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, amellyel $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Ez a 9.1.2. Tétel értelmében azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. Ha az utóbbiból indulunk ki, akkor az v) megjegyzés szerint

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s(f,\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f,\tau) = \int_a^b f.$$

Világos, hogy ekkor

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f,\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S(f,\tau) - s(f,\tau)) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f,\tau) - \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f,\tau) = 0$$

is igaz.

vii) Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos, és egy $\tau_n \in \mathcal{F}_a^b \quad (n \in \mathbf{N})$ felosztás-sorozatra léteznek a (közös)

$$q := \lim (s(f,\tau_n)) = \lim (S(f,\tau_n)) \in \mathbf{R}$$

határértékek. Ekkor (amint azt már korábban is említettük) $f \in R[a,b]$, továbbá $\int_a^b f = q$. Ui.

$$s(f,\tau_n) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\tau_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből a feltételezésünk miatt szükségszerűen

$$I_*(f) = I^*(f) = q$$

következik. Sőt, az ilyen $(\tau_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{F}_a^b$ sorozat létezése szükséges is ahhoz, hogy a szóban forgó f függvény Riemann-integrálható legyen. Valóban, ha $f \in R[a,b]$, akkor

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} = I^*(f) = \inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\}$$

alapján minden $n \in \mathbf{N}$ esetén léteznek olyan $\mu_n, \nu_n \in \mathcal{F}_a^b$ felosztások, amelyekkel

$$\int_a^b f - \frac{1}{n+1} < s(f,\mu_n) \le \int_a^b f \le S(f,\nu_n) < \int_a^b f + \frac{1}{n+1}.$$

Legyen $\tau_n := \mu_n \cup \nu_n \ (n \in \mathbf{N})$. Ekkor (ld. 9.1.1. Tétel)

$$\int_a^b f - \frac{1}{n+1} < s(f,\mu_n) \le s(f,\tau_n) \le$$

$$S(f,\tau_n) \le S(f,\nu_n) < \int_a^b f + \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből a $\lim (s(f,\tau_n))$, $\lim (S(f,\tau_n))$ határértékek létezése, ill. az

$$\int_a^b f = \lim (s(f,\tau_n)) = \lim (S(f,\tau_n))$$

egyenlőség már nyilvánvaló. Speciálisan ilyen az előző megjegyzésben említett, az egyenletes felosztások révén kapott felosztás-sorozat.

viii) A 9.1.7. Tételben a szóban forgó függvény folytonossága, ill. monotonitása csak elégséges, de nem szükséges feltétele az illető függvény Riemann-integrálhatóságának. Példaként elég a következő függvényre gondolni:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (1 \neq x \in [0,2]) \\ \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

Ez a függvény nem folytonos, ui. $f \notin \mathcal{C}\{1\}$, és

$$f(0) = 0 < 1 = f(1) > f(2) = 0$$

miatt nem is monoton. Ugyanakkor a

$$g(x) := 0 \qquad (x \in [0,2])$$

függvény triviálisan integrálható: $g \in R[0,2]$, hiszen tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}_0^2$ esetén $s(g,\tau) = S(g,\tau) = 0$, így $I_*(g) = I^*(g) = 0$. Mivel az

$$\{x \in [0,2] : f(x) \neq g(x)\} = \{1\}$$

halmaz véges, ezért a 9.1.6. Tétel szerint $f \in R[0,2]$ is igaz.

ix) A 9.1.6. Tétel alapján bizonyos esetekben olyan $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények Riemann-integrálhatóságát, ill. határozott integrálját is értelmezni tudjuk, amelyekre a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány nem egy korlátos és zárt intervallum. Legyen ui. az $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ „végpontok" és egy véges $A \subset [a,b]$ halmaz esetén adott a korlátos

$$f : [a,b] \setminus A \to \mathbf{R}$$

függvény. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó f *Riemann-integrálható,* ha léteznek olyan $y_c \in \mathbf{R} \quad (c \in A)$ valós számok, hogy az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [a,b] \setminus A) \\ \\ y_c & (c \in A) \end{cases}$$

függvényre $\tilde{f} \in R[a,b]$. Ekkor (is) azt írjuk, hogy $f \in R[a,b]$. Az utóbbi esetben a 9.1.6. Tétel szerint tetszőleges $y_c \in \mathbf{R} \quad (c \in A)$ választással $\tilde{f} \in R[a,b]$, és az f függvény

$$\int_a^b f := \int_a^b \tilde{f}$$

Riemann-integrálja sem függ az y_c-től. A most mondott értelmezésből és a 9.1.6. Tételből nyilvánvaló, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ és $f \in R[a,b]$, akkor bármely véges $Y \subset [a,b]$ halmazzal az

$$f_Y(x) := f(x) \qquad (x \in [a,b] \setminus Y)$$

függvényre a fenti értelemben $f_Y \in R[a,b]$ és $\int_a^b f_Y = \int_a^b f$. A leggyakrabban az

$$Y = \{a,b\} \ , \ Y = \{a\} \ , \ Y = \{b\}$$

esetek szoktak előfordulni, ilyen pl. a

$$h(x) := \sin(1/x) \qquad (0 < x \leq 1)$$

függvény. Könnyű meggondolni, hogy az előbbi értelemben $h \in R[0,1]$. Legyen ui. $y \in \mathbf{R}$ és $0 < u < 1$ tetszőleges, ill.

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \in (0,1]) \\ \\ y & (x = 0) \end{cases}$$

és

$$g_u(x) := h(x) \qquad (x \in [u,1]).$$

Ekkor g_u folytonos függvény, következésképpen (ld. 9.1.7. Tétel) $g_u \in R[u,1]$. Ezért (ld. 9.1.2. Tétel) bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\nu \in \mathcal{F}_u^1$ felosztás, hogy $\omega(g_u, \nu) < \varepsilon$. Ha tehát $\tau := \nu \cup \{0\}$, akkor $\tau \in \mathcal{F}_0^1$, és

$$\omega(\tilde{h}, \tau) = \omega(g_u, \nu) + u \cdot \sup\{|\tilde{h}(x) - \tilde{h}(t)| : 0 \leq x, t \leq u\} < \varepsilon + Mu,$$

ahol $M := 1 + |y|$. Ha itt $0 < u < 1$ olyan, hogy $Mu < \varepsilon$, akkor $\omega(\tilde{h}, \tau) < 2\varepsilon$. Ez a 9.1.2. Tétel miatt azt jelenti, hogy $\tilde{h} \in R[0,1]$.

x) Az előbbi megjegyzésben az ott szereplő h függvénnyel kapcsolatban mondottak a következőképpen általánosíthatók. Tegyük fel, hogy valamely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén az $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ függvény folytonos és korlátos. Ekkor (az előbbi ix) megjegyzés szellemében) $f \in R[a,b]$. Ha ui. $a < u < v < b$ és

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in [u,v]),$$

akkor a g folytonos, így (ld. 9.1.7. Tétel) $g \in R[u,v]$. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\mu \in \mathcal{F}_u^v$, amellyel $\omega(g, \mu) < \varepsilon$. Tehát a

$$\tau := \mu \cup \{a,b\} \in \mathcal{F}_a^b$$

felosztással tetszőleges $y, z \in \mathbf{R}$ mellett az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a < x < b) \\ \\ y & (x = a) \\ \\ z & (x = b) \end{cases}$$

függvényre a

$$q := \sup\{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(t)| : a \le x, t \le u\},$$
$$Q := \sup\{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(t)| : v \le x, t \le b\}$$

jelölésekkel

$$\omega(\tilde{f}, \tau) = \omega(g, \mu) + q(u-a) + Q(b-v) < \varepsilon + 2C(u-a+b-v)$$

(ahol C az $\tilde{f}$ függvénynek egy korlátja: $|\tilde{f}(x)| \le C \quad (x \in [a,b])$). Ha itt (ami nyilván feltehető az u, v helyek alkalmas megválasztásával)

$$C(u-a+b-v) < \varepsilon,$$

akkor $\omega(\tilde{f}, \tau) < 2\varepsilon$. Ez a 9.1.2. Tétel alapján (szükséges és) elégséges ahhoz, amit állítottunk. Világos, hogy a fentiekben csak annyit használtunk ki, hogy az

$$f : (a,b) \to \mathbf{R}$$

függvény korlátos, és bármely $a < u < v < b$ esetén létezik az $\int_u^v f$ integrál.

xi) Ha pl. $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, az $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és léteznek a

$$\lim_a f \ , \ \lim_b f \in \mathbf{R}$$

(véges) határértékek, akkor f-re teljesülnek a x) megjegyzésben mondott feltételek. Tehát $f \in R[a,b]$. Ekkor ti. (ld. 5.5.) az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a < x < b) \\ \\ \lim_a f & (x = a) \\ \\ \lim_b f & (x = b) \end{cases}$$

függvény folytonos a korlátos és zárt (azaz kompakt) $[a,b]$ intervallumon, így (ld. 5.5.10. Tétel) $\tilde{f}$ (és ezért f is) korlátos.

xii) Az előbbi megjegyzésre utalva vezessük be a szakaszonként folytonos függvény fogalmát. Azt mondjuk ti., hogy a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon értelmezett $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény *szakaszonként folytonos,* ha létezik olyan $\tau = \{x_0, ..., x_n\}$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, amellyel az alábbiak teljesülnek: tetszőleges $i = 0, ..., n-1$ mellett

$$f \in \mathcal{C}\{x\} \qquad (x_i < x < x_{i+1}),$$

és léteznek a véges

$$\lim_{x \to x_i + 0} f \quad , \quad \lim_{x \to x_{i+1} - 0} f$$

(jobb-, ill. bal oldali) határértékek. A xi) megjegyzés szerint ekkor

$$f_{|_{[x_i, x_{i+1}]}} \in R[x_i, x_{i+1}] \qquad (i = 0, ..., n-1),$$

amiből meg a 9.1.4. Tétel alapján $f \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$$

következik.

xiii) Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Az f függvény *lépcsősfüggvény,* ha létezik olyan $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$ felosztás, hogy alkalmasan választott $c_i \in \mathbf{R}$ számokkal

$$f(x) = c_i \qquad (x_i < x < x_{i+1},\ i = 0, ..., n-1).$$

A 9.1.4., 9.1.6. Tételek felhasználásával azt kapjuk, hogy ekkor $f \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i).$$

xiv) Nem nehéz belátni, hogy ha $0 \leq f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = 0$, akkor $f(c) = 0$ minden olyan $c \in [a,b]$ pontban, ahol az f folytonos. Ha ui. egy ilyen c esetén $f(c) \neq 0$, azaz $f(c) > 0$ lenne, akkor a folytonosság definíciója alapján a következő is igaz lenne: egy alkalmas $\delta > 0$ esetén

$$f(x) > \frac{f(c)}{2} \qquad (x \in [a,b],\ |x - c| \leq \delta).$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$[u, v] := [a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]$$

jelöléssel a 9.1.4., 9.1.5. Tételek szerint

$$0 = \int_a^b f \geq \int_u^v f \geq \int_u^v (f(c)/2) = \frac{f(c)}{2} \cdot (v - u) > 0,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás.

xv) A felosztások „ügyes" megválasztásával esetenként könnyen ki tudunk számítani integrálokat. Legyen pl. a feladat az

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

integrál kiszámítása. Tekintsük ehhez azt a $\tau_n = \{x_{n0}, ..., x_{nn}\} \in \mathcal{F}_1^2$ felosztássorozatot $(2 \leq n \in \mathbf{N})$, amelyre

$$x_{nk} := (\sqrt[n]{2})^k =: q_n^k \qquad (k = 0, ..., n).$$

Ekkor

$$s(f,\tau_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_n^{k+1} - q_n^k}{q_n^{2k+2}} = \frac{q_n - 1}{q_n^2}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q_n^k} =$$

$$\frac{q_n - 1}{q_n^2}\cdot \frac{1 - 1/q_n^n}{1 - 1/q_n} = \frac{1}{2q_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$S(f,\tau_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_n^{k+1} - q_n^k}{q_n^{2k}} = (q_n - 1)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q_n^k} =$$

$$(q_n - 1)\cdot \frac{1 - 1/q_n^n}{1 - 1/q_n} = \frac{q_n}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 3.9.5. Tétel) $\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2q_n} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{2} = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n).$$

Így (ld. vii) megjegyzés) létezik az

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n) = \frac{1}{2}$$

integrál.

xvi) Több szempontból is érdekes az alábbi példa. Ehhez vezessük be először az $x \in \mathbf{Q}$ racionális szám q_x *nevezőjének* a fogalmát. Legyen ui. $q_0 := 1$. Ha $x \neq 0$, akkor alkalmas $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$ relatív prímekkel az x egyértelműen írható fel $x = p/q$ alakban, amikor is legyen $q_x := q$. Definiáljuk ezek után az $\mathcal{R} : [0,1] \to \mathbf{R}$ *Riemann-függvényt* a következőképpen:

$$\mathcal{R}(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}) \\ \\ 1/q_x & (x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}). \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{R} \in R[0,1]$, és $\int_0^1 \mathcal{R} = 0$. Ui. bármely $\tau \in \mathcal{F}_0^1$ felosztás és $I \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallum esetén (ld. 1.4. xiv) megjegyzés) $I \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \neq \emptyset$, ezért

$$m_I = \inf\{\mathcal{R}(x) : x \in I\} = 0.$$

Következésképpen

$$s(\mathcal{R}, \tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} m_I \cdot |I| = 0,$$

amiből $I_*(\mathcal{R}) = 0$ is azonnal adódik. Belátjuk továbbá, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\tau \in \mathcal{F}_0^1$, amelyre

$$S(\mathcal{R}, \tau) < \varepsilon.$$

Tekintsük ui. egy $\delta > 0$ szám mellett az összes olyan $[0,1]$-beli racionális x számot, amelyre $q_x < 1/\delta$. Az ilyen x-ek nyilván egy (nem üres) véges A_δ halmazt alkotnak. Válasszuk a páronként diszjunkt $[a_x, b_x] \subset [0,1] \quad (x \in A_\delta)$ intervallumokat úgy, hogy $x \in [a_x, b_x] \quad (x \in A_\delta)$ és

$$\sum_{x \in A_\delta} (b_x - a_x) < \delta.$$

Ha $0, 1 \neq x \in A_\delta$, akkor nyilván feltehető az is, hogy $x \in (a_x, b_x)$. Legyen ezek után $\tau \in \mathcal{F}_0^1$ olyan felosztás, amelyre $A_\delta \subset \tau$, és $I_x := [a_x, b_x] \in \mathcal{F}(\tau) \quad (x \in A_\delta)$. Világos, hogy ha $I \in \mathcal{F}(\tau)$, $I \neq I_x \quad (x \in A_\delta)$, akkor $I \cap A_\delta = \emptyset$, és így

$$M_I = \sup\{\mathcal{R}(t) : t \in I\} = \sup\{1/q_t : t \in I\} \leq \delta.$$

Egyébként pedig nyilván minden $I \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra $M_I \leq 1$. Mindezt összegezve azt mondhatjuk, hogy

$$S(\mathcal{R}, \tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} M_I \cdot |I| = \sum_{x \in A_\delta} M_{I_x} \cdot |I_x| + \sum_{\mathcal{F}(\tau) \ni I \neq I_x \ (x \in A_\delta)} M_I \cdot |I| \leq$$

$$\sum_{x \in A_\delta} |I_x| + \delta \cdot \sum_{\mathcal{F}(\tau) \ni I \neq I_x \ (x \in A_\delta)} |I| < \delta \cdot (1 + b - a).$$

Ha itt a $\delta > 0$ számot úgy választjuk, hogy $\delta \cdot (1 + b - a) < \varepsilon$, akkor $S(\mathcal{R}, \tau) < \varepsilon$. Mivel $S(\mathcal{R}, \mu) \geq 0 \quad (\mu \in \mathcal{F}_0^1)$, ezért

$$I^*(\mathcal{R}) = 0.$$

Tehát $I_*(\mathcal{R}) = I^*(\mathcal{R}) = 0$, azaz valóban $\mathcal{R} \in R[0,1]$, és $\int_0^1 \mathcal{R} = 0$.

xvii) Nem nehéz meggondolni, hogy az előbbi megjegyzésben definiált $\mathcal{R}$ Riemann-függvény minden $a \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$ (irracionális) helyen folytonos. Ha ui. $\delta > 0$, akkor a xvi) megjegyzésbeli A_δ halmazból vegyük az a-hoz legközelebbi $u, v \in A_\delta$ elemeket az alábbi értelemben:

$$u < a < v.$$

Így $(u, v) \cap A_\delta = \emptyset$, következésképpen

$$1/q_x \leq \delta \qquad (x \in (u, v) \cap \mathbf{Q}).$$

Ezért egyúttal

$$|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(a)| = \mathcal{R}(x) \leq \delta \qquad (x \in (u, v))$$

is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{R} \in \mathcal{C}(a)$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{R} \notin \mathcal{C}(b) \qquad (b \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}).$$

Ti. $\varepsilon := \mathcal{R}(b) > 0$, de tetszőleges $K(b)$ környezet (nyílt intervallum) esetén (ld. 1.4. xiv) megjegyzés) $K(b) \cap [0, 1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \neq \emptyset$ miatt van olyan $x \in K(b) \cap [0, 1]$, hogy

$$|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(b)| = \mathcal{R}(b) = \varepsilon,$$

szemben a b-beli folytonosság definíciójával.

xviii) A Riemann-integrálhatóság és a folytonosság kapcsolatát illetően a 9.1.7. Tételben azt láttuk be, hogy $C[a, b] \subset R[a, b]$. Azt is megjegyeztük (ld. viii) megjegyzés), hogy $C[a, b] \neq R[a, b]$. A xiv), xv) megjegyzések azt mutatják, hogy megfelelően választott $f \in R[a, b]$ függvényre az f szakadási helyeinek az

$$\mathcal{A}_f := \{x \in [a, b] : f \notin \mathcal{C}\{x\}\}$$

halmaza akár végtelen számosságú is lehet. Ezzel kapcsolatban (bizonyítás nélkül) jegyezzük meg a Riemann-integrálhatóság ún. *Lebesgue-féle kritériumát*: *a korlátos* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számhoz megadható intervallumoknak egy olyan* I_n $(n \in \mathbf{N})$ *sorozata, hogy*

$$\mathcal{A}_f \subset \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz *nulla mértékű.* Könnyű meggondolni, hogy az $[a, b]$ intervallum nem nulla mértékű, ugyanakkor minden, legfeljebb megszámlálható halmaz nulla mértékű. Éppen ezért (ld. xvi), xvii) megjegyzések) nem „véletlen", hogy a Riemann-függvény $R[0, 1]$-beli, ui. az $\mathcal{A}_\mathcal{R} = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$ halmaz megszámlálható. A Lebesgue-kritériumban szereplő korlátossági feltétel az f-re nézve lényeges, hiszen az

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ 1/x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

függvény nem korlátos, ezért $f \notin R[0, 1]$, de az $\mathcal{A}_f = \{0\}$ halmaz nulla mértékű.

xix) Az előbbi megjegyzés alapján könnyen adódik a következő becslés: tetszőleges $0 < f \in R[a,b]$ esetén $\int_a^b f > 0$. Ui. a 9.1.5. Tétel szerint $\int_a^b f \geq 0$. Ha $\int_a^b f = 0$ lenne, akkor a xiv) megjegyzésből $f(d) = 0 \quad (d \in [a,b],\ f \in \mathcal{C}\{d\})$. A xviii) megjegyzésben idézett Lebesgue-kritérium miatt a szakadási helyek $\mathcal{A}_f$ halmaza nulla mértékű, ezért $\mathcal{A}_f \neq [a,b]$. Tehát létezik az előbbi tulajdonságú d pont, azaz ahol $f(d) = 0$. Ez nyilván ellentmond az $f > 0$ feltételnek.

xx) A xviii)-beli Lebesgue-kritériumból azonnal következik, hogy ha $g \in R[\alpha,\beta]$, valamint $f \in C[a,b]$, és $\mathcal{R}_g \subset [a,b]$, akkor $f \circ g \in R[\alpha,\beta]$. Ui. (ld. 5.5.10. Tétel) az f korlátos, ezért az $f \circ g$ is korlátos. Továbbá (ld. 5.5.3. Tétel) $f \circ g \in \mathcal{C}\{x\}$ minden olyan $x \in [\alpha,\beta]$ helyen, ahol $g \in \mathcal{C}\{x\}$. Mivel (ld. xviii)) $\mathcal{A}_g$ nulla mértékű, ezért $\mathcal{A}_{f\circ g}$ is nulla mértékű.

xxi) Lássuk be a xx)-beli állítást a Lebesgue-kritérium alkalmazása nélkül is. Legyen ehhez $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, ekkor a Heine-tétel (ld. 5.5.11. Tétel) szerint van olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \qquad (u,v \in [a,b],\ |u-v| < \delta).$$

Ha most $\tau \in \mathcal{F}_\alpha^\beta$ és $I \in \mathcal{F}(\tau)$ esetén

$$o_I(g) := \sup\{|g(x) - g(t)| : x,t \in I\},$$

akkor

$$\omega(g,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} o_I(g) \cdot |I| = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) < \delta} o_I(g) \cdot |I| + \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) \geq \delta} o_I(g) \cdot |I| \geq$$

$$\delta \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) \geq \delta} |I|.$$

Következésképpen

$$\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) \geq \delta} |I| \leq \frac{\omega(g,\tau)}{\delta}.$$

Világos, hogy $I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) < \delta$ esetén

$$o_I(f \circ g) := \sup\{|f(g(x)) - f(g(t))| : x,t \in I\} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\omega(f \circ g,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} o_I(f \circ g) \cdot |I| =$$

$$\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) < \delta} o_I(f \circ g) \cdot |I| + \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau), o_I(g) \geq \delta} o_I(f \circ g) \cdot |I| \leq$$

$$\varepsilon\cdot \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau),o_I(g)<\delta} |I| + 2M\cdot \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau),o_I(g)\geq\delta} |I| \leq \varepsilon\cdot(\beta-\alpha) + 2M\cdot\frac{\omega(g,\tau)}{\delta},$$

ahol M az f függvény egy korlátját jelöli: $|f(t)| \leq M \quad (t\in[a,b])$. Feltettük, hogy $g\in R[a,b]$, ezért (ld. 9.1.2. Tétel) az előbbi τ úgy is megválasztható, hogy $2M\omega(g,\tau)/\delta < \varepsilon$, amikor is

$$\omega(f\circ g,\tau) \leq \varepsilon\cdot(\beta-\alpha+1).$$

Így ismét a 9.1.2. Tételre hivatkozva kapjuk, hogy $f\circ g\in R[\alpha,\beta]$.

xxii) Egy $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény Riemann-integrálhatóságának az értelmezéséhez eleve feltételeztük, hogy az f korlátos függvény. Ha ui. az f nem korlátos, pl. alulról nem korlátos, akkor minden $\tau\in\mathcal{F}_a^b$ felosztás esetén van olyan $J\in\mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallum, amelyre

$$m_J = \inf\{f(x) : x\in J\} = -\infty.$$

Ezért $m_j\cdot|J| = -\infty$, és így $s(f,\tau)=-\infty$. Ez azt jelenti, hogy egyúttal $I_*(f)=-\infty$. Ha tehát $I_*(f)=I^*(f)$, akkor ez a közös érték is $-\infty$ lenne. Hasonlóan kapjuk, hogy felülről nem korlátos $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény esetén $I^*(f)=+\infty$, így legfeljebb $I_*(f)=I^*(f)=+\infty$ lehetne. „Integrálható" függvény „integráljaként" viszont valós számot szeretnénk deklarálni.

xxiii) Lássuk be, hogy ha $f\in R[a,b]$ és

$$h(x) := f(-x) \qquad (-b\leq x\leq -a),$$

akkor $h\in R[-b,-a]$, és

$$\int_{-b}^{-a} h = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_a^b f.$$

Legyen ui. $\mu=\{z_0,...,z_n\}\in\mathcal{F}_a^b$ $(1\leq n\in\mathbf{N})$. Ekkor bármely $i\in\{0,...,n-1\}$ esetén

$$m_i(f) := \inf\{f(x) : z_i\leq x\leq z_{i+1}\} = \inf\{h(t) : -z_{i+1}\leq t\leq -z_i\}.$$

Világos, hogy az

$$x_i := -z_{n-i} \qquad (i=0,...,n)$$

osztópontokkal meghatározott $\tau := \{x_0,...,x_n\}$ halmaz egy felosztása a $[-b,-a]$ intervallumnak: $\tau\in\mathcal{F}_{-b}^{-a}$, és

$$m_i(f) = \inf\{h(t) : x_{n-i-1}\leq t\leq x_{n-i}\} =: m_{n-i-1}(h).$$

Ezért

$$s(f,\mu) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(f)\cdot(z_{i+1}-z_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_{n-i-1}(h)\cdot(x_{n-i}-x_{n-i-1}) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(h)\cdot (x_{i+1} - x_i) = s(h, \tau),$$

és ugyanígy $S(f, \mu) = S(h, \tau)$. Következésképpen

$$\int_a^b f = \sup\{s(f, \mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} \leq \sup\{s(h, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_{-b}^{-a}\} = I_*(h) \leq I^*(h) =$$

$$\inf\{S(h, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_{-b}^{-a}\} \leq \inf\{f(h, \mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} = \int_a^b f.$$

Tehát

$$I_*(h) = I^*(h) = \int_a^b f,$$

azaz $h \in R[-b, -a]$, és $\int_{-b}^{-a} h = \int_a^b f$.

9.3. Az integrál kiszámítása

Elöljáróban tisztázzuk az integrálás és bizonyos függvényműveletek kapcsolatát. Ebben a sorban először Riemann-integrálható függvények lineáris kombinációjának az integrálhatóságát igazoljuk, ill. kiszámítjuk az említett lineáris kombinációnak a Riemann-integrálját. Világos, hogy ebből a szempontból elegendő az alábbi tételt belátni.

9.3.1. Tétel. *Tetszőleges* f, $g \in R[a, b]$ *függvények és* $\lambda \in \mathbf{R}$ *szám esetén*

$$f + \lambda\cdot g \in R[a, b],$$

továbbá

$$\int_a^b (f + \lambda\cdot g) = \int_a^b f + \lambda\cdot \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Adott korlátos és zárt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum, ill. $h : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_I(h) := \inf\{h(x) : x \in I\} \quad , \quad M_I(h) := \sup\{h(x) : x \in I\}.$$

Ha $H : [a, b] \to \mathbf{R}$ is egy korlátos függvény, akkor

$$m_I(h) + m_I(H) \leq h(x) + H(x) = (h + H)(x) \leq M_I(h) + M_I(H) \qquad (x \in I)$$

miatt nyilván

$$m_I(h) + m_I(H) \leq m_I(h + H) \quad , \quad M_I(h) + M_I(H) \geq M_I(h + H).$$

Mindezt előrebocsátva bármely $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással azt mondhatjuk, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} m_I(f)\cdot |I| + \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} m_I(g)\cdot |I| =$$

$$\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} (m_I(f) + m_I(g))\cdot |I| \le \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} m_I(f+g)\cdot |I| = s(f+g,\tau).$$

Innen tetszőleges $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás mellett azt kapjuk (ld. 9.1.1. Tétel), hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\mu) \le s(f,\tau\cup\mu) + s(g,\tau\cup\mu) \le s(f+g,\tau\cup\mu) \le I_*(f+g).$$

Tehát bármely τ, $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásokat is véve

$$s(f,\tau) \le I_*(f+g) - s(g,\mu),$$

következésképpen

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le I_*(f+g) - s(g,\mu).$$

Más szóval

$$s(g,\mu) \le I_*(f+g) - \int_a^b f,$$

amiből meg

$$\int_a^b g = I_*(g) = \sup\{s(g,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} \le I_*(f+g) - \int_a^b f$$

következik. Összefoglalva mindezt oda jutunk, hogy

$$\int_a^b f + \int_a^b g \le I_*(f+g).$$

Analóg módon kapjuk az

$$\int_a^b f + \int_a^b g \ge I^*(f+g)$$

becslést is, így

$$\int_a^b f + \int_a^b g \le I_*(f+g) \le I^*(f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Világos tehát, hogy $I_*(f+g) = I^*(f+g)$, azaz $f+g \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b f + \int_a^b g = I_*(f+g) = I^*(f+g) = \int_a^b (f+g).$$

Most mutassuk meg, hogy $\lambda g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (\lambda g) = \lambda\cdot \int_a^b g$. Legyen ehhez $I \subset \mathbf{R}$ korlátos és zárt intervallum, valamint $h : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$\inf\{(\lambda h)(x) = \lambda h(x) : x \in I\} = \begin{cases} \lambda\cdot \inf\{h(x) : x \in I\} & (\lambda \ge 0) \\ \\ \lambda\cdot \sup\{h(x) : x \in I\} & (\lambda < 0), \end{cases}$$

ill.

$$\sup\{(\lambda h)(x)=\lambda h(x):x\in I\}=\begin{cases}\lambda\cdot\sup\{h(x):x\in I\} & (\lambda\geq 0)\\ \\ \lambda\cdot\inf\{h(x):x\in I\} & (\lambda<0).\end{cases}$$

Ezért bármely $\tau\in\mathcal{F}_a^b$ felosztás esetén

$$s(\lambda g,\tau)=\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\inf\{(\lambda g)(x):x\in I\}\cdot|I|=$$

$$\begin{cases}\lambda\cdot\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\inf\{g(x):x\in I\}\cdot|I|=\lambda\cdot s(g,\tau) & (\lambda\geq 0)\\ \\ \lambda\cdot\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\sup\{g(x):x\in I\}\cdot|I|=\lambda\cdot S(g,\tau) & (\lambda<0),\end{cases}$$

ill.

$$S(\lambda g,\tau)=\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\sup\{(\lambda g)(x):x\in I\}\cdot|I|=$$

$$\begin{cases}\lambda\cdot\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\sup\{g(x):x\in I\}\cdot|I|=\lambda\cdot S(g,\tau) & (\lambda\geq 0)\\ \\ \lambda\cdot\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)}\inf\{g(x):x\in I\}\cdot|I|=\lambda\cdot s(g,\tau) & (\lambda<0).\end{cases}$$

Következésképpen

$$I_*(\lambda g)=\sup\{s(\lambda g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=$$

$$\begin{cases}\lambda\cdot\sup\{s(g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=\lambda\cdot I_*(g) & (\lambda\geq 0)\\ \\ \lambda\cdot\inf\{S(g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=\lambda\cdot I^*(g) & (\lambda<0),\end{cases}$$

ill.

$$I^*(\lambda g)=\inf\{S(\lambda g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=$$

$$\begin{cases}\lambda\cdot\inf\{S(g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=\lambda\cdot I^*(g) & (\lambda\geq 0)\\ \\ \lambda\cdot\sup\{s(g,\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}=\lambda\cdot I_*(g) & (\lambda<0).\end{cases}$$

Mivel $I_*(g)=I^*(g)=\int_a^b g$, így az előbbi egyenlőségekből

$$I_*(\lambda g)=I^*(\lambda g)=\lambda\cdot\int_a^b g$$

adódik. Tehát $\lambda g\in R[a,b]$, és

$$\int_a^b(\lambda g)=I_*(\lambda g)=I^*(\lambda g)=\lambda\cdot\int_a^b g.$$

Összegezve a fentieket azt mondhatjuk, hogy $f+\lambda g\in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (f+\lambda g)=\int_a^b f+\int_a^b (\lambda g)=\int_a^b f+\lambda\cdot\int_a^b g.$$

■

Riemann-integrálható függvények szorzatáról a következő mondható:

9.3.2. Tétel. *Ha* $f,\, g\in R[a,b]$, *akkor* $fg\in R[a,b]$.

Bizonyítás. Legyen $I\subset[a,b]$ korlátos és zárt intervallum. Ekkor tetszőleges $x,t\in I$ helyeken

$$|(fg)(x)-(fg)(t)|=$$

$$|f(x)g(x)-f(t)g(t)|=|f(x)(g(x)-g(t))-(f(t)-f(x))g(t)|\le$$

$$|f(x)|\cdot|g(x)-g(t)|+|f(t)-f(x)|\cdot|g(t)|\le C\cdot(|g(x)-g(t)|+|f(t)-f(x)|)$$

(ahol $C>0$ közös korlátja az $f,\, g$ függvényeknek, azaz $|f(z)|,\, |g(z)|\le C \quad (z\in[a,b])$). Ezért

$$o_I(fg):=\sup\{|(fg)(x)-(fg)(t)|: x,t\in I\}\le$$

$$C\cdot(\sup\{|f(x)-f(t)|: x,t\in I\}+\sup\{|g(x)-g(t)|: x,t\in I\})=: C\cdot(o_I(f)+o_I(g)).$$

Ennek alapján tetszőleges $\tau\in\mathcal{F}_a^b$ felosztásra

$$\omega(fg,\tau)=\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(fg)\cdot|I|\le$$

$$C\cdot\left(\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(f)\cdot|I|+\sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(g)\cdot|I|\right)=C\cdot(\omega(f,\tau)+\omega(g,\tau)).$$

A feltételeink szerint $f,\, g\in R[a,b]$, ezért (ld. 9.1.2. Tétel) bármely $\varepsilon>0$ számhoz megadhatók olyan $\mu,\, \nu\in\mathcal{F}_a^b$ felosztások, amelyekkel

$$\omega(f,\mu)<\frac{\varepsilon}{2C}\ ,\ \ \omega(g,\nu)<\frac{\varepsilon}{2C}.$$

Legyen $\tau:=\mu\cup\nu$, ekkor (ld. 9.1.1. Tétel) a fentiek szerint

$$\omega(fg,\tau)\le C\cdot(\omega(f,\tau)+\omega(g,\tau))\le C\cdot(\omega(f,\mu)+\omega(g,\nu))\le C\cdot\frac{2\varepsilon}{2C}=\varepsilon.$$

Ez a 9.1.2. Tétel alapján (szükséges és) elégséges ahhoz, hogy $fg\in R[a,b]$. ■

9.3.3. Tétel. *Ha* $f,\, g \in R[a,b]$, *és valamilyen* $r > 0$ *konstanssal*

$$|g(x)| \geq r \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor $f/g \in R[a,b]$.

Bizonyítás. Lássuk be, hogy $1/g \in R[a,b]$, amiből a 9.3.2. Tétel és az

$$\frac{f}{g} = f\cdot \frac{1}{g}$$

egyenlőség alapján $f/g \in R[a,b]$ már következni fog. Legyen $I \subset [a,b]$ korlátos és zárt intervallum. Ekkor bármely $x,t \in I$ esetén

$$\left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(t)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(t)}\right| = \frac{|g(t)-g(x)|}{|g(x)g(t)|} \leq \frac{1}{r^2}\cdot |g(t)-g(x)|,$$

így

$$o_I(1/g) := \sup\{|(1/g)(x) - (1/g)(t)| : x,t \in I\} \leq$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot \sup\{|g(x)-g(t)| : x,t \in I\} =: \frac{1}{r^2}\cdot o_I(g).$$

Innen tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ mellett

$$\omega(1/g,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(1/g)\cdot |I| \leq \frac{1}{r^2}\cdot \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(g)\cdot |I| = \frac{\omega(g,\tau)}{r^2}.$$

A feltétel szerint $g \in R[a,b]$, ezért (ld. 9.1.2. Tétel) minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel $\omega(g,\tau) < r^2\cdot \varepsilon$. Tehát az előbbieket figyelembe véve

$$\omega(1/g,\tau) < \frac{r^2\cdot \varepsilon}{r^2} = \varepsilon,$$

ami a 9.1.2. Tétel alapján azt jelenti, hogy $1/g \in R[a,b]$. ■

Az integrál „monotonitása" (ld. 9.1.5. Tétel) és a szorzatfüggvény integrálhatósága (ld. 9.3.2. Tétel) alapján jutunk az alábbi, ún. *első középérték-tételhez.*

9.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $h : [a,b] \to [a,b]$, *és a korlátos* $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *függvényekre* $g,\ (f \circ h)\cdot g \in R[a,b]$, $g \geq 0$. *Ekkor:*

a) *az alábbi*

$$m := \inf \mathcal{R}_f \quad , \quad M := \sup \mathcal{R}_f$$

jelölésekkel

$$m\cdot \int_a^b g \leq \int_a^b (f \circ h)\cdot g \leq M\cdot \int_a^b g;$$

b) *ha az* f *függvény folytonos, akkor létezik olyan* $\xi \in [a,b]$, *amellyel*

$$\int_a^b (f \circ h)\cdot g = f(\xi)\cdot \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in [a,b]$ helyen nyilván

$$mg(x) \leq f(h(x))g(x) \leq Mg(x),$$

azaz $mg \leq (f \circ h)\cdot g \leq Mg$. A 9.3.1. Tétel szerint $mg,\ Mg \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b mg = m\cdot \int_a^b g \quad , \quad \int_a^b Mg = M\cdot \int_a^b g.$$

A 9.1.5. Tételt alkalmazva ezért azt kapjuk, hogy

$$m\cdot \int_a^b g = \int_a^b mg \leq \int_a^b (f \circ h)\cdot g \leq \int_a^b Mg = M\cdot \int_a^b g.$$

Ha $\int_a^b g = 0$, akkor a) alapján $\int_a^b (f \circ h)\cdot g = 0$, így ekkor bármely $\xi \in [a,b]$ választással

$$0 = \int_a^b (f \circ h)\cdot g = f(\xi)\cdot \int_a^b g = 0.$$

Feltehető tehát, hogy $\int_a^b g \neq 0$, amikor is a 9.1.5. Tétel után mondott „előjeltartásból" következő $\int_a^b g \geq 0$ egyenlőtlenséget is szem előtt tartva $\int_a^b g > 0$. Ezért az a)-beli egyenlőtlenségeket így is írhatjuk:

$$m \leq \lambda := \frac{\int_a^b (f \circ h)\cdot g}{\int_a^b g} \leq M.$$

Ha az f függvény folytonos, akkor (ld. 5.5.7., 5.5.10. Tételek) $\mathcal{R}_f = [m, M]$, ezért $\lambda \in \mathcal{R}_f$. Van tehát olyan $\xi \in [a,b]$, hogy $\lambda = f(\xi)$. Ez a b) állítás. ∎

A következő tétel a differenciál- és integrálszámítás egyik legismertebb, az alkalmazásokban (is) a leggyakrabban szereplő állítása. Látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben az illető függvény Riemann-integrálja nem más, mint (bármely) primitív függvényének a megváltozása a szóban forgó intervallumon.

Elöljáróban idézzük fel a primitív függvény fogalmát (ld. 8.1.): ha $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $f,\, F : I \to \mathbf{R}$, $F \in D$ és $F' = f$, akkor az F az f függvény primitív függvénye. Terjesszük ki ezt a fogalmat olyan esetekre is, amikor a szóban forgó f függvény értelmezési tartománya korlátos és zárt intervallum. Legyen tehát $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, és tekintsük az

$$f,\, F : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvényeket. Azt mondjuk a továbbiakban, hogy az F *primitív függvénye az* f*-nek az* $[a, b]$ *intervallumon,* ha az F folytonos függvény, minden $a < x < b$ esetén $F \in D\{x\}$, és $F'(x) = f(x)$. Könnyű meggondolni, hogy pl. a 8.1.1., 8.1.2. Tételek megfelelői érvényben maradnak a most mondott értelemben is.

9.3.5. Tétel (Newton-Leibniz). *Tegyük fel, hogy az* $[a, b]$ *korlátos és zárt intervallumon értelmezett* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvényre a következők teljesülnek:* $f \in R[a, b]$, *és az* f*-nek az* $[a, b]$ *intervallumon van primitív függvénye. Ekkor tetszőleges ilyen* F *primitív függvénnyel*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Bármilyen $a \le u < v \le b$ esetén a Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel) szerint egy $\xi \in (u, v)$ helyen

$$F(v) - F(u) = F'(\xi) \cdot (v - u) = f(\xi) \cdot (v - u).$$

Ezért minden $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra (valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$ mellett) azt mondhatjuk, hogy alkalmas $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ $(j = 0, ..., n-1)$ pontokkal

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{n-1} (F(x_{j+1}) - F(x_j)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \sigma(f, \tau, y) \qquad (y := (\xi_0, ..., \xi_{n-1}) \in \hat{\tau}).$$

Követezésképpen

$$s(f, \tau) \le F(b) - F(a) \le S(f, \tau).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le F(b) - F(a) \le$$

$$\inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} = I^*(f) = \int_a^b f.$$

Innen már világos, hogy $\int_a^b f = I_*(f) = F(b) - F(a)$. ■

A következő állítások megfogalmazása előtt emlékeztetünk a 9.2. ix) megjegzésre, hogy ti. (bizonyos megszorítások mellett) olyan esetekben is értelmeztük valós függvények Riemann-integrálhatóságát, ill. határozott integrálját, amikor a szóban forgó függvény értelmezési tartománya nem egy korlátos és zárt intervallum.

9.3.6. Tétel (parciális integrálás). *Tegyük fel, hogy adott* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *esetén az* $f,\ g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvények folytonosak, az* (a, b) *nyílt intervallum minden pontjában differenciálhatók, továbbá* $f'g,\ g'f \in R[a, b]$. *Ekkor igaz a következő egyenlőség:*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f.$$

Bizonyítás. Az 5.5.1., 7.3.1. Tételek (és a feltételek) miatt az fg szorzatfüggvény folytonos, $fg \in D\{x\}$ és

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (a < x < b).$$

Legyen (tetszőleges $u, v, z, w \in \mathbf{R}$ esetén)

$$F(x) := \begin{cases} f'(x) & (a < x < b) \\ u & (x = a) \\ v & (x = b) \end{cases}, \quad G(x) := \begin{cases} g'(x) & (a < x < b) \\ z & (x = a) \\ w & (x = b), \end{cases}$$

ekkor

$$F(x)g(x) + G(x)f(x) = (fg)'(x) \qquad (a < x < b).$$

A feltételek szerint (ld. 9.2. ix) megjegyzés) $Fg,\ Gf \in R[a, b]$, amiből a 9.3.1. Tétel alapján $Fg + Gf \in R[a, b]$, tehát (ld. 9.2. ix) megjegyzés) $(fg)' \in R[a, b]$, és

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (Fg + Gf) = \int_a^b Fg + \int_a^b Gf = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f$$

következik. Világos továbbá, hogy az fg szorzatfüggvény primitív függvénye az $(fg)'$ deriváltfüggvénynek az $[a, b]$ intervallumon (ld. a 9.3.5. Tétel előtt mondottakat). Ezért a 9.3.5. Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f = (fg)(b) - (fg)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

ami nyilván ekvivalens a bizonyítandó egyenlőséggel. ■

9.3.7. Tétel (integrálás helyettesítéssel). *Tegyük fel, hogy valamilyen korlátos és zárt* $[a,b]$ *intervallum esetén az* $f \in R[a,b]$ *függvénynek az* $[a,b]$ *intervallumon van primitív függvénye. Legyen továbbá az* $[\alpha,\beta]$ *korlátos és zárt intervallumon értelmezett* $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *függvény folytonos, az* (α,β) *nyílt intervallum minden pontjában differenciálható,* $(f \circ g)\cdot g' \in R[\alpha,\beta]$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, *és bármely* $\alpha < x < \beta$ *helyen* $a < g(x) < b$. *Ekkor*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)\cdot g' = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Legyen ui. az $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény primitív függvénye az f-nek az $[a,b]$ intervallumon. Következésképpen az F folytonos, $F \in D\{x\}$ és $F'(x) = f(x)$ $(a < x < b)$, továbbá a Newton-Leibniz-tétel (ld. 9.3.5. Tétel) szerint

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Az 5.5.3., 7.3.2. Tételekből következően az $F \circ g$ függvény folytonos, $F \circ g \in D\{x\}$ és

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) \qquad (\alpha < x < \beta).$$

Mindez azt jelenti, hogy az $F \circ g$ függvény primitív függvénye az $(f \circ g)\cdot g'$-nek az $[\alpha,\beta]$ intervallumon. Így ismét a 9.3.5. Tételt alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)\cdot g' = F \circ g(\beta) - F \circ g(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_a^b f.$$

■

A továbbiakból kiderül, hogy egy (valódi) intervallumon értelmezett folytonos valós függvénynek mindig van primitív függvénye ezen az intervallumon. Ehhez vezessük be az integrálfüggvény fogalmát az alábbiak szerint. Legyen $f \in R[a,b]$, ekkor (ld. 9.1.4. Tétel) bármely $x \in (a,b)$ esetén létezik az $\int_a^x f$ határozott integrál. Az $\int_a^a f := 0$ megállapodással tekintsük ezek után az

$$F(x) := \int_a^x f \qquad (x \in [a,b])$$

függvényt, az f ún. *integrálfüggvényét.*

9.3.8. Tétel. *Legyen* $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ *az* $f \in R[a,b]$ *függvény integrálfüggvénye. Ekkor:*

a) *az* F *függvény folytonos;*

b) *ha* $c \in (a,b)$, *és az* f *függvény folytonos a* c*-ben, akkor* $F \in D\{c\}$, *és*

$$F'(c) = f(c).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $u, v \in [a,b]$, $u < v$ esetén a 9.1.4., 9.1.5. Tételek szerint

$$|F(v) - F(u)| = \left|\int_a^v f - \int_a^u f\right| = \left|\int_u^v f\right| \leq \int_u^v |f| \leq M|v-u|,$$

ahol M az f függvény valamelyik korlátja: $|f(x)| \leq M \quad (x \in [a,b])$. Ha tehát $\varepsilon > 0$, és a $\delta > 0$ számot úgy választjuk, hogy $M\delta < \varepsilon$, akkor tetszőleges $u, v \in [a,b]$, $|u-v| < \delta$ esetén

$$|F(v) - F(u)| < \varepsilon.$$

Másként fogalmazva (ld. 5.5.) az F függvény egyenletesen folytonos, így folytonos is.

Most tegyük fel, hogy $a < c < b$ és $f \in \mathcal{C}\{c\}$. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amellyel $a < c - \delta < c + \delta < b$, és

$$|f(t) - f(c)| < \varepsilon \qquad (c - \delta < t < c + \delta).$$

Írjuk fel az F függvény c-hez tartozó $\Delta_c F$ különbségihányados-függvényének (ld. 7.1.2. Tétel) és az $f(c)$-nek az eltérését (ld. 9.1.4. Tétel):

$$\Delta_c F(x) - f(c) = \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \frac{1}{c - x} \cdot \left(\int_a^c f - \int_a^x f\right) - f(c) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c-x} \cdot \displaystyle\int_x^c f - f(c) = \dfrac{1}{c-x} \cdot \displaystyle\int_x^c (f(t) - f(c))\, dt & (c - \delta < x < c) \\[2ex] \dfrac{1}{x-c} \cdot \displaystyle\int_c^x f - f(c) = \dfrac{1}{x-c} \cdot \displaystyle\int_c^x (f(t) - f(c))\, dt & (c < x < c + \delta). \end{cases}$$

Innen a 9.1.5. Tétel alapján világos, hogy

$$|\Delta_c F(x) - f(c)| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{|c-x|} \cdot \displaystyle\int_x^c |f(t) - f(c)|\, dt \leq \varepsilon & (c - \delta < x < c) \\[2ex] \dfrac{1}{|x-c|} \cdot \displaystyle\int_c^x |f(t) - f(c)|\, dt \leq \varepsilon & (c < x < c + \delta). \end{cases}$$

Más szóval azt láttuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\Delta_c F(x) - f(c)| \leq \varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ |x - c| < \delta).$$

Ez azt jelenti, hogy létezik a (véges) $\lim_{x \to c} \Delta_c F(x) = f(c)$ határérték, azaz $F \in D\{c\}$ és $F'(c) = f(c)$. ■

Ha tehát az előbbi tételben szereplő $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor egyrészt a 9.1.7. Tétel értelmében $f \in R[a,b]$, másrészt a 9.3.8. Tétel szerint az F integrálfüggvényére

$F \in \mathcal{C}$ és $F \in D\{x\}$, $F'(x) = f(x)$ $(a < x < b)$ teljesül. Következésképpen az F primitív függvénye az f-nek az $[a,b]$ intervallumon. Így pl. a 9.3.7. Tételben folytonos f függvény esetén „automatikusan" teljesül az a feltétel, hogy „az f-nek legyen primitív függvénye". Ha még figyelembe vesszük a 9.2. xi) megjegyzést, akkor a 9.3.7. Tételnek az alábbi speciális változatát fogalmazhatjuk meg:

tekintsük a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum esetén az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvényt. Legyen továbbá a valamilyen $[\alpha,\beta]$ korlátos és zárt intervallumon értelmezett $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ függvény folytonos, az (α,β) nyílt intervallum minden pontjában differenciálható, $g' \in \mathcal{C}\{x\}$ $(\alpha < x < \beta)$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, és léteznek a véges $\lim_\alpha g'$, $\lim_\beta g'$ határértékek. Ekkor $(f \circ g)\cdot g' \in R[a,b]$, és $\int_\alpha^\beta (f \circ g)\cdot g' = \int_a^b f$.

Az integrálfüggvény fogalmának a felhasználásával láthatjuk be az integrálszámítás *második középérték-tételét* (a tétel első két állításában szereplő egyenlőségek az ún. *Bonnet-formulák*).

9.3.9. Tétel. *Bármely $g \in R[a,b]$ és $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény esetén az alábbi állítások igazak:*

a) *ha az f függvény nem-negatív és monoton fogyó, akkor van olyan $\xi \in [a,b]$, amellyel*
$$\int_a^b fg = f(a)\cdot \int_a^\xi g;$$

b) *ha az f függvény nem-negatív és monoton növő, akkor valamilyen $\xi \in [a,b]$ mellett*
$$\int_a^b fg = f(b)\cdot \int_\xi^b g;$$

c) *ha az f függvény monoton, akkor egy alkalmas $\xi \in [a,b]$ választással*
$$\int_a^b fg = f(a)\cdot \int_a^\xi g + f(b)\cdot \int_\xi^b g.$$

Bizonyítás. Előzetesen emlékeztetünk a 9.1.7. Tételre, miszerint $f \in R[a,b]$, és így (ld. 9.3.2. Tétel) $fg \in R[a,b]$. A b) állítás könnyen láthatóan következik az a)-ból. Ha ui. az $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ függvény monoton növő, akkor legyen
$$h(x) := f(-x) \quad , \quad H(x) := g(-x) \qquad (-b \le x \le -a).$$
Ekkor (ld. 9.2. xxiii) megjegyzés) $H \in R[-b,-a]$, ill. a
$$h : [-b,-a] \to [0,+\infty)$$

függvény nyilván monoton fogyó. Ezért a) szerint valamilyen $\eta \in [-b, -a]$ mellett (ld. 9.2. xxiii) megjegyzés)

$$\int_{-b}^{-a} hH = h(-b)\cdot \int_{-b}^{\eta} H = f(b)\cdot \int_{-b}^{\eta} g(-x)\,dx = f(b)\cdot \int_{-\eta}^{b} g(x)\,dx,$$

tehát $\xi := -\eta$ megfelelő.

Vegyük észre továbbá, hogy a harmadik állítás következik az elsőből. Ehhez nyilván feltehető, hogy az f függvény monoton fogyó (különben f-et helyettesíthetjük $(-f)$-fel). Ekkor tehát $0 \le f - f(b)$ is monoton fogyó, ezért a tétel a) része szerint egy $\xi \in [a, b]$ helyen

$$\int_{a}^{b} (f - f(b))\cdot g = (f(a) - f(b))\cdot \int_{a}^{\xi} g,$$

azaz

$$\int_{a}^{b} fg = (f(a) - f(b))\cdot \int_{a}^{\xi} g + f(b)\cdot \int_{a}^{b} g = f(a)\cdot \int_{a}^{\xi} g + f(b)\cdot \left(\int_{a}^{b} g - \int_{a}^{\xi} g\right) =$$

$$f(a)\cdot \int_{a}^{\xi} g + f(b)\cdot \int_{\xi}^{b} g.$$

Az a) állítás bizonyításához legyen először $f(a) = 0$. Ekkor nyilván $f \equiv 0$, ezért tetsző-leges $\xi \in [a, b]$ választással

$$0 = \int_{a}^{b} fg = f(a)\cdot \int_{a}^{\xi} g = 0.$$

Feltehető tehát, hogy $f(a) > 0$. A 9.3.8. Tétel alapján a

$$G(x) := \int_{a}^{x} g \qquad (x \in [a, b])$$

függvény folytonos, így (ld. 5.5.10. Tétel) léteznek az

$$m := \min \mathcal{R}_G \ , \ M := \max \mathcal{R}_G$$

szélsőértékek. Mutassuk meg, hogy

$$m\cdot f(a) \le \int_{a}^{b} fg \le M\cdot f(a).$$

Legyen ehhez $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \le n \in \mathbf{N})$, ekkor (ld. 9.1.4. Tétel)

$$\int_{a}^{b} fg = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} fg =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} g + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f - f(x_i))g =: \sigma(\tau) + \rho(\tau).$$

Jelölje C a g függvény egy korlátját: $|g(x)| \leq C \quad (x \in [a,b])$. Világos, hogy

$$|\rho(\tau)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - f(x_i)|\cdot |g(t)|\, dt \leq$$

$$C\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sup\{|f(t) - f(x)| : x_i \leq t, x \leq x_{i+1}\}\cdot (x_{i+1} - x_i) = C\cdot \omega(f,\tau).$$

Mivel (ld. 9.2. vi) megjegyzés) $\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f,\tau) = 0$, ezért $\lim_{\delta_\tau \to 0} \rho(\tau) = 0$. Következésképpen

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(\tau) = \int_a^b fg.$$

Ugyanakkor (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + G(b)f(x_{n-1}),$$

amiből az

$$f(x_{i-1}) - f(x_i),\ f(x_{n-1}) \geq 0 \ \ ,\ \ m \leq G(x_i),\ G(b) \leq M \qquad (i = 1, ..., n-1)$$

egyenlőtlenségeket figyelembe véve

$$\sigma(\tau) \leq M\cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1}) \right) = M\cdot f(x_0) = M\cdot f(a),$$

ill.

$$\sigma(\tau) \geq m\cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1}) \right) = m\cdot f(x_0) = m\cdot f(a)$$

következik. Innen $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(\tau) = \int_a^b fg$ miatt egyúttal

$$m\cdot f(a) \leq \int_a^b fg \leq M\cdot f(a)$$

is adódik. Tehát

$$m \leq \lambda := \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{f(a)} \leq M.$$

Mivel $\mathcal{R}_G = [m, M]$, ezért egy alkalmas $\xi \in [a,b]$ helyen

$$\lambda = G(\xi) = \int_a^\xi g,$$

ami a tételünk első állítása. ■

9.4. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy $-\infty \le a < b < +\infty$, és az $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ függvényről a következőt tudjuk (ld. 9.1.4. Tétel): tetszőleges $a < c < b$ esetén létezik az $\int_c^b f$ határozott integrál. Legyen

$$G(x) := \int_x^b f \qquad (a < x < b).$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény *impropriusan integrálható,* ha létezik a $\lim_{x\to a} G(x)$ véges határérték. Ekkor az

$$\int_a^b f := \lim_{x\to a} G(x)$$

számot az f *improprius integráljának* nevezzük. Tekintsük pl. az

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (0 < x \le 1)$$

függvényt. Ekkor (ld. 6.1.1. Tétel) $f \in \mathcal{C}$, ezért bármely $0 < c \le 1$ esetén a

$$g_c(x) := f(x) \qquad (c \le x \le 1)$$

függvény is folytonos, következésképpen (ld. 9.1.7. Tétel) $g_c \in R[c, 1]$. Mivel a

$$h(x) := 2\sqrt{x} \qquad (c \le x \le 1)$$

függvény primitív függvénye a g_c-nek a $[c, 1]$ intervallumon, ezért a 9.3.5. Tétel alapján

$$G(x) := \int_x^1 g_x = h(1) - h(x) = 2 - 2\sqrt{x} \qquad (0 < x < 1).$$

Világos (ld. 6.1.1. Tétel), hogy létezik a $\lim_{x\to 0} G(x) = 2$ határérték, azaz a szóban forgó f impropriusan integrálható, és

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

ii) Nem nehéz meggondolni, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, és az $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvénynek a 9.2. ix) megjegyzés értelmében létezik az $\int_a^b f$ integrálja, akkor az f impropriusan is integrálható, és az improprius integrálja is az előbbi $\int_a^b f$. Ui. (a feltételünk miatt) bármely $y \in \mathbf{R}$ esetén az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a < x \le b) \\ \\ y & (x = a) \end{cases}$$

függvényre $\tilde{f} \in R[a,b]$. Ha $a < x < b$, akkor (ld. 9.1.4. Tétel)

$$\int_x^b f = \int_x^b \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f} - \int_a^x \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f} - F(x),$$

ahol F az $\tilde{f}$ integrálfüggvénye. A 9.3.8. Tétel szerint az F függvény folytonos, ezért $0 = F(a) = \lim_{x \to a} F(x)$. Következésképpen létezik a

$$\lim_{x \to a} \int_x^b f = \int_a^b \tilde{f} - \lim_{x \to a} F(x) = \int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$$

(véges) határérték is.

iii) Analóg módon értelmezhető $-\infty < a < b \leq +\infty$ esetén az $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ függvény improprius integrálja:

$$\int_a^b f := \lim_{c \to b} \int_a^c f,$$

ahol bármilyen $a < c < b$ mellett feltesszük, hogy létezik az $\int_a^c f$ Riemann-integrál, és az előbbi határérték véges. Legyen pl.

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \qquad (1 \leq x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_a^c f = \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{c} \to 1 \qquad (1 < c \to +\infty),$$

tehát

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

iv) A 9.3.5. Tétellel kapcsolatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy az abban szereplő mindkét feltétel lényeges: $f \in R[a,b]$, és az f-nek az $[a,b]$-n van primitív függvénye. Pl. az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ -1 & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$$

függvény monoton növő, ezért (ld. 9.1.7. Tétel) $f \in R[-1,1]$. Ugyanakkor nem Darboux-tulajdonságú (ld. 5.5.), ezért (ld. 7.5.10. Tétel) nincs primitív függvénye a $[-1,1]$ intervallumon. Ha

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \cdot \sin(1/x^2) & (0 \neq x \in \mathbf{R}), \end{cases}$$

akkor könnyen láthatóan a g függvény folytonos. Továbbá

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin(1/x^2)=0$$

miatt $g\in D\{0\}$ és $g'(0)=0$, ill. (ld. 7.3.1., 7.3.2. Tételek) $0\neq x\in\mathbf{R}$ esetén is $g\in D\{x\}$ és

$$g'(x)=2x\cdot\sin(1/x^2)-\frac{2}{x}\cdot\cos(1/x^2).$$

Ha tehát

$$f(x):=g'(x)\qquad(0\le x\le 1),$$

akkor az f függvény (egyszerűen ellenőrizhetően) nem korlátos, így $f\notin R[0,1]$. Viszont világos, hogy az f-nek van primitív függvénye a $[0,1]$ intervallumon, ui. az

$$F(x):=g(x)\qquad(0\le x\le 1)$$

nyilván az. Megjegyezzük, hogy ennél lényegesen bonyolultabb konstrukcióval tetszőleges $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ esetén megadható olyan $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ korlátos függvény is, amelynek van primitív függvénye az $[a,b]$-n, de $f\notin R[a,b]$. (Az egyik ilyen legismertebb példa. az ún. *Volterra-függvény.*)

v) Egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény a-beli, vagy b-beli differenciálhatóságát „ugyanúgy" értelmezhetjük, mint tettük azt az $[a,b]$ belső pontjaiban. Nevezetesen, azt mondjuk, hogy az előbbi f függvény *differenciálható* (vagy *deriválható*) az a-ban, ha létezik a véges

$$f'(a):=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határérték (röviden: $f\in D\{a\}$). Hasonlóan, $f\in D\{b\}$, ha létezik

$$f'(b):=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\in\mathbf{R}.$$

Egyszerű meggondolni, hogy a „műveleti szabályok" (ld. 7.3.) továbbra is érvényben maradnak. Legyen

$$D[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}:f\in D\{x\}\ \ (a\le x\le b)\}$$

az $[a,b]$ *intervallumon differenciálható függvények* halmaza. Ekkor nyilvánvaló, hogy $D[a,b]\subset C[a,b]$, ahol (ld. 5.6. vii) megjegyzés)

$$C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}:f\in\mathcal{C}\{x\}\ \ (a\le x\le b)\}$$

az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza. Azt fogjuk mondani, hogy a $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvénynek *van primitív függvénye,* ha létezik olyan $D[a, b]$-beli G függvény, amelyre $G' = g$. Ekkor G a g *primitív függvénye.* A 9.3.5. Tétel előtt mondottakra utalva világos, hogy a G egyúttal primitív függvénye a g-nek az $[a, b]$ intervallumon is. Tekintsük viszont a

$$g(x) := \sqrt{x} \qquad (0 \le x \le 1)$$

függvényt. Ekkor a g folytonos, $g \notin D\{0\}$, ill. $g \in D\{x\}$ és

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (0 < x \le 1).$$

Ha tehát

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & (0 < x \le 1), \end{cases}$$

akkor a g primitív függvénye a h-nak a $[0, 1]$ intervallumon, de könnyen láthatóan nincs olyan $H \in D[0, 1]$ függvény, amelyre $H' = h$.

vi) Az előző megjegyzést figyelembe véve a Newton-Leibniz-formula (ld. 9.3.5. Tétel) egy speciális esete a következő: *ha* $f \in R[a, b]$, *és* f*-nek van primitív függvénye (azaz van olyan* $F \in D[a, b]$, *amelyre* $F' = f$), *akkor minden ilyen* F*-fel*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

vii) Az előbbiekhez hasonlóan a parciális integrálás (ld. 9.3.6. Tétel) egy speciális változata az alábbiak szerint fogalmazható meg. Legyen ui. $f, g \in D[a, b]$ *és* $f'g,\ fg' \in R[a, b]$, *ekkor*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f.$$

Mivel $f, g \in D[a, b] \subset C[a, b] \subset R[a, b]$, ezért $f',\ g' \in R[a, b]$ esetén (ld. 9.3.2. Tétel) $f'g,\ fg' \in R[a, b]$.

viii) A vii) megjegyzésben mondottakat tovább specializálhatjuk. Legyen ui.

$$C^1[a, b] := \{f \in D[a, b] : f' \in C[a, b]\}$$

az $[a, b]$ intervallumon *folytonosan differenciálható* függvények halmaza. Ekkor a 9.3.6. Tétel egy további speciális esete az alábbi állítás (ld. 9.1.7. Tétel): *tetszőlegesen adott* $f, g \in C^1[a, b]$ *függvényekre*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f.$$

Így pl. az $\int_0^1 xe^x\,dx$ integrál kiszámításához legyen

$$g(x) := x \ , \ f(x) := e^x \qquad (0 \le x \le 1),$$

amikor is (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 f'g = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 fg' =$$

$$e - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e - e^0) = 1.$$

ix) Az előbbi megjegyzések szellemében a 9.3.7. Tételnek (integrálás helyettesítéssel) egy „variánsa" a következő állítás: *legyen*

$$g \in D[\alpha,\beta] \ , \ g' \in R[\alpha,\beta] \ , \ g(\alpha) < g(\beta) \ , \ \mathcal{R}_g = [g(\alpha), g(\beta)],$$

ekkor tetszőleges $f \in C[g(\alpha), g(\beta)]$ *függvényre*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ g)\cdot g'.$$

Ekkor ti. (ld. 5.5.3., 9.1.7. Tételek) $f \circ g \in C[\alpha,\beta] \subset R[\alpha,\beta]$, így (ld. 9.3.2. Tétel) $(f \circ g)\cdot g' \in R[\alpha,\beta]$, ill. (ld. 9.3.8. Tétel) az f-nek van primitív függvénye. Speciálisan, ha $g \in C^1[\alpha,\beta]$, akkor $g' \in C[\alpha,\beta] \subset R[\alpha,\beta]$ miatt $g' \in R[\alpha,\beta]$. Világos, hogy $g'(x) > 0 \quad (\alpha < x < \beta)$ esetén a g függvény (ld. 7.5.7. Tétel) szigorúan monoton növő, azaz ekkor a $g(\alpha) < g(x) < g(\beta) \quad (\alpha < x < \beta)$ feltétel (ld. 9.3.7. Tétel) „automatikusan" teljesül. A jelen megjegyzésben tárgyalt állítás akkor is igaz, ha $f \in C[g(\alpha), g(\beta)]$ helyett csupán annyit teszünk fel, hogy $f \in R[g(\alpha), g(\beta)]$. Ennek a bizonyítása azonban jóval bonyolultabb a fentieknél. Alkalmazzuk a most mondottakat pl. az

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$$

integrál kiszámítására. Legyen

$$g(x) := 3x + 1 \quad (0 \le x \le 1) \ , \ f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1 \le x \le 4).$$

Ekkor $g \in D$, $g'(x) = 3 \ (0 \le x \le 1)$, így a fentiek (és a 9.3.5. Tétel) szerint

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot \int_0^1 (f \circ g)\cdot g' = \frac{1}{3}\cdot \int_1^4 f = \frac{1}{3}\cdot \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\frac{2}{3}\cdot \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot (\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3}.$$

x) Az integrálfüggvény fogalmát kibővíthetjük az alábbiak szerint. Legyen ui. ehhez $f \in R[a,b]$ és $c \in [a,b]$, ill. (ld. 9.1.4. Tétel) $a \le d \le c$ esetén

$$\int_c^d f := \begin{cases} 0 & (d = c) \\ -\int_d^c f & (d < c). \end{cases}$$

Ekkor az

$$F_c(x) := \int_c^x f \qquad (x \in [a,b])$$

függvényt az f (*c-ben eltűnő*) *integrálfüggvényének* nevezzük. A 9.3.8. Tétel (amelyben az a-ban eltűnő $F := F_a$ integrálfüggvényt vizsgáltuk) könnyen átláthatóan igaz marad F_c-re. Sőt, az v) megjegyzést szem előtt tartva az is igaz, hogy ha (a tételben szereplő f függvényre) $f \in \mathcal{C}\{a\}$ (vagy $f \in \mathcal{C}\{b\}$), akkor $F_c \in D\{a\}$ és $F_c'(a) = f(a)$ (vagy $F_c \in D\{b\}$ és $F_c'(b) = f(b)$.)

xi) Legyen $g \in R[a,b]$, $f : J \to [a,b]$ pedig a J nyílt intervallumon értelmezett függvény, és

$$F(x) := \int_a^{f(x)} g \qquad (x \in J).$$

Ekkor:

a) ha f folytonos, akkor F is folytonos;

b) ha $f \in D$, akkor $F \in D$, és $F'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$ $(x \in J)$.

Legyen ui. G a g integrálfüggvénye. Ekkor (ld. 9.3.8. Tétel) $G \in \mathcal{C}$. Ha tehát $f \in \mathcal{C}$, akkor (ld. 5.5.3. Tétel) $F = G \circ f \in \mathcal{C}$ is igaz. Ha $f \in D$, akkor az f függvény folytonos is, így ismét csak a 9.3.8. Tétel miatt $G \in D$. A 7.3.2. Tételt alkalmazva innen az következik, hogy $F = G \circ f \in D$, továbbá

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (x \in J).$$

xii) Mutassuk meg pl., hogy tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}$ esetén

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx.$$

Ha ui.

$$f(x) := x^n (1-x)^m \quad , \quad g(x) := 1 - x \qquad (0 \le x \le 1),$$

akkor

$$\int_{g(0)}^{g(1)} f = \int_1^0 f = -\int_0^1 f = \int_0^1 (f \circ g) \cdot g' =$$

$$\int_0^1 f(1-x) \cdot g'(x) \, dx = -\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx,$$

amit állítottunk.

xiii) Adott $f \in R[a,b]$ függvény esetén tekintsük az alábbi $\Phi : R[a,b] \to \mathbf{R}$ leképezést:

$$\Phi(f) := \int_a^b f \qquad (f \in R[a,b]).$$

Ekkor a 9.3.1. Tétel szerint a Φ *integrálfunkcionál* egyrészt *additív,* azaz

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \qquad (f \in R[a,b]),$$

másrészt *homogén,* azaz

$$\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f) \qquad (f \in R[a,b],\ \lambda \in \mathbf{R}).$$

Röviden: a Φ egy *lineáris funkcionál.*

xiv) A 9.3.2. Tételt a 9.3.1. Tétel után már elegendő lenne csak az $f = g$ esetben belátni: $f^2 \in R[a,b] \quad (f \in R[a,b])$. Ui. tetszőleges $f, g \in R[a,b]$ választással

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

ahol a 9.3.1. Tétel miatt $f \pm g \in R[a,b]$. Ha tehát már tudjuk, hogy $R[a,b]$ „zárt a négyzetreemelésre nézve", akkor $(f \pm g)^2 \in R[a,b]$ is igaz. Innen ismét a 9.3.1. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in R[a,b].$$

Az $f^2 \in R[a,b]$ $(f \in R[a,b])$ állítás bizonyítása a meglehetősen egyszerű

$$\omega(f^2, \tau) \le 2M\omega(f, \tau) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b)$$

egyenlőtlenség igazolásával történhet (ahol M az f függvény valamelyik korlátja: $|f(x)| \le M \quad (x \in [a,b])$).

xv) Jegyezzük meg, hogy a 9.3.3. Tétel bizonyításában $f, g \in R[a,b]$ mellett nem elég azt feltenni, hogy $g(x) \neq 0 \quad (x \in [a,b])$. Legyen ui.

$$f(x) := 1 \ , \ \ g(x) := \begin{cases} -1 & (x = 0) \\ \\ x & (0 < x \le 1). \end{cases}$$

Ekkor f is, g is monoton (növő), ezért (ld. 9.1.7. Tétel) $f, g \in R[0,1]$. Viszont az $f/g = 1/g$ függvény triviális módon nem korlátos, így $1/g \notin R[0,1]$.

9.5. A Riemann-integrál alkalmazásai

9.5.1. Ívhossz

Legyen valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum esetén adott az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény, és tetszőleges $\tau=\{x_0,...,x_n\}\in\mathcal{F}_a^b$ felosztás esetén (alkalmas $1\le n\in\mathbf{N}$ mellett) tekintsük a következő összeget:

$$\ell_f(\tau):=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2}.$$

Az itt szereplő

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2}\qquad(i=0,...,n-1)$$

kifejezés geometriailag nem más, mint a (koordinátasíkon) az

$$(x_i,f(x_i))\ \ ,\ \ (x_{i+1},f(x_{i+1}))\in\mathbf{R}^2$$

pontokat összekötő R_i szakasz hossza (ld. 7.6. i) megjegyzés). Az $R_i\quad(i=0,...,n-1)$ szakaszok „egyesítése" egy, a függvény(grafikon)ba írt *töröttvonal,* $\ell_f(\tau)$ ez utóbbinak a hossza. Nem nehéz meggondolni, hogy ha $\tau,\mu\in\mathcal{F}_a^b$ és $\tau\subset\mu$, azaz a μ felosztás finomabb a τ-nál, akkor

$$\ell_f(\tau)\le\ell_f(\mu).$$

A teljes indukcióra gondolva ui. ezt elegendő csak a τ „miniális finomítására" belátni, amikor is valamilyen $c\in(a,b)\setminus\tau$ esetén $\mu=\tau\cup\{c\}$. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $j\in\{0,...,n-1\}$, hogy $x_j<c<x_{j+1}$. Következésképpen azt kell belátnunk, hogy

$$\ell_f(\mu)-\ell_f(\tau)=$$

$$\sqrt{(c-x_j)^2+\left(f(c)-f(x_j)\right)^2}+\sqrt{(x_{j+1}-c)^2+\left(f(x_{j+1})-f(c)\right)^2}-$$
$$\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2+\left(f(x_{j+1})-f(x_j)\right)^2}\ge 0.$$

Az

$$\alpha:=c-x_j\ \ ,\ \ \beta:=x_{j+1}-c\ \ ,\ \ \gamma:=f(c)-f(x_j)\ \ ,\ \ \delta:=f(x_{j+1})-f(c)$$

jelölésekkel a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőt jelenti (ennek az igazolását ld. 1.4. xxii) megjegyzés):

$$\sqrt{(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2}\le\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}+\sqrt{\beta^2+\delta^2}.$$

Ha

$$\ell_f:=\sup\{\ell_f(\tau):\tau\in\mathcal{F}_a^b\}<+\infty,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény(grafikon) *rektifikálható* (vagy más szóval *van hossza*), és ℓ_f a szóban forgó függvény(grafikon) *ívhossza.* Az előbb mondottak alapján világos, hogy az ℓ_f definíciójában szorítkozhatunk „elég finom" felosztásokra, azaz bármilyen $\delta > 0$ esetén

$$\ell_f = \sup\{\ell_f(\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta\}.$$

9.5.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in C^1[a,b]$. Ekkor az f függvény(grafikon)nak van ívhossza, és*

$$\ell_f = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}.$$

Bizonyítás. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy a feltétel miatt az f' deriváltfüggvény folytonos. Így (ld. 5.5.1. Tétel) az $1+(f')^2$ függvény is folytonos. Mivel a négyzetgyök-függvény is folytonos (ld. 6.1.1. Tétel), ezért az 5.5.3. Tétel miatt

$$F := \sqrt{1+(f')^2} \in C[a,b],$$

így (ld. 9.1.7. Tétel) $F \in R[a,b]$.

Legyen $\tau = \{x_0,...,x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ (valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén). Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel) szerint alkalmas $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ $(i = 0,...,n-1)$ helyeken

$$\ell_f(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f'(\xi_i))^2 \cdot (x_{i+1}-x_i)^2} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \cdot (x_{i+1}-x_i) = \sigma(F,\tau,y_\tau),$$

ahol

$$y_\tau := (\xi_0,...,\xi_{n-1}) \in \mathbf{R}^n.$$

Tehát

$$s(F,\tau) \le \ell_f(\tau) \le \ell_f,$$

amiből

$$\int_a^b F = \sup\{s(F,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le \ell_f$$

következik. Az F folytonos lévén, korlátos is (ld. 5.5.10. Tétel), legyen $M \ge 0$ egy korlátja:

$$0 \le F(x) \le M \qquad (x \in [a,b]).$$

Az előbbiek alapján így azt kapjuk, hogy

$$0 \le \ell_f(\tau) = \sigma(F, \tau, y_\tau) \le \sum_{i=0}^{n-1} M(x_{i+1} - x_i) = M(b-a) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Más szóval az $\{\ell_f(\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\}$ halmaz korlátos, és $M(b-a)$ egy felső korlátja. Ezért

$$\ell_f \le M(b-a) < +\infty,$$

azaz az f függvény(grafikon) rektifikálható.

Tekintsük most a fenti $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztást. Az 5.5.10. Tétel szerint minden egyes $i = 0, ..., n-1$ indexhez van olyan $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, amellyel

$$\inf\{F(t) : x_i \le t \le x_{i+1}\} = F(\eta_i),$$

tehát

$$s(F, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\eta_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Ezt egybevetve az $\ell_f(\tau)$-ra fent kapott előállítással az adódik, hogy

$$|\ell_f(\tau) - s(F, \tau)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (F(\xi_i) - F(\eta_i)) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |F(\xi_i) - F(\eta_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

A Heine-tétel (ld. 5.5.11. Tétel) alapján az F függvény egyenletesen folytonos, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|F(u) - F(v)| < \varepsilon \qquad (u, v \in [a, b],\ |u - v| < \delta).$$

Ha tehát $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ olyan, hogy $\delta_\tau < \delta$, akkor az előzmények miatt

$$|\ell_f(\tau) - s(F, \tau)| < \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = (b-a) \cdot \varepsilon.$$

Így azt mondhatjuk, hogy az előbbi τ felosztásra

$$\ell_f(\tau) = \ell_f(\tau) - s(F, \tau) + s(F, \tau) \le$$

$$|\ell_f(\tau) - s(F, \tau)| + s(F, \tau) < (b-a) \cdot \varepsilon + s(F, \tau) \le (b-a) \cdot \varepsilon + \int_a^b F.$$

Innen világos, hogy

$$\ell_f = \sup\{\ell_f(\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta\} \le (b-a) \cdot \varepsilon + \int_a^b F,$$

ezért a fenti $\int_a^b F \le \ell_f$ becslés alapján

$$\left|\ell_f - \int_a^b F\right| \le (b-a)\cdot \varepsilon$$

következik. Az itt szereplő $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $\ell_f - \int_a^b F = 0$, vagy ami ezzel ekvivalens, $\ell_f = \int_a^b F$. ■

9.5.2. Terület, forgástest térfogata

A 9.2. i) megjegyzésre utalva legyen valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum és a $0 \le f \in R[a,b]$ függvény esetén

$$\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a,b],\, 0 \le y \le f(x)\}$$

a *függvény(grafikon) alatti síkidom.* Ha $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, akkor $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ az $\mathcal{S}$-be *beírt,* ill. *körülírt* téglalapok területösszege (*téglányösszegek*). Ha az $\mathcal{S}$ síkidomnak is szeretnénk $|\mathcal{S}|$ *területet* tulajdonítani, akkor „elemi" elvárásként annak kell teljesülnie, hogy

$$s(f,\tau) \le |\mathcal{S}| \le S(f,\tau).$$

Következésképpen

$$\int_a^b f = \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le |\mathcal{S}| \le \inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} = \int_a^b f.$$

Ennek alapján azt mondjuk, hogy

$$|\mathcal{S}| := \int_a^b f$$

az $\mathcal{S}$ síkidom *területe.*

Világos, hogy ha $m > 0$ és $f(x) := m \quad (x \in [a,b])$, akkor $\mathcal{S}$ egy *téglalap,* amelynek a területe (az „elemi" területképlet szerint)

$$m\cdot (b-a) = \int_a^b f.$$

Legyen most valamilyen $r > 0$ mellett

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (0 \le x \le r).$$

Ekkor $\mathcal{S}$ egy *negyedkörlemez,* és

$$|\mathcal{S}| = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r\cdot \int_0^r \sqrt{1 - (x/r)^2}\, dx.$$

A 9.3.7. Tételt az

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad (0 \le x \le 1) \ , \ g(t) := \frac{t}{r} \qquad (0 \le t \le r)$$

szereposztással alkalmazva

$$\int_0^r \sqrt{1-(x/r)^2}\, dx = r\cdot \int_0^r (f\circ g)\cdot g' = r\cdot \int_0^1 f = r\cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Ismét a 9.3.7. Tétel szerint, de most a

$$g(x) := \sin x \qquad (0 \le x \le \pi/2)$$

választással (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{\pi/2} 1\, dt + \frac{1}{2}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(2t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Összegezve a fentieket

$$|\mathcal{S}| = r\cdot r\cdot \frac{\pi}{4} = \frac{r^2\pi}{4}$$

(ami „összhangban" van a körlemez területére ismert $r^2\pi$-vel).

Tekintsük továbbra is a jelen pont bevezetésében szereplő $0 \le f \in R[a,b]$ függvényt. „Forgassuk meg" az f függvény(grafikon)t az X-tengely körül, amin a következőt értjük: „elkészítjük" a

$$\mathcal{T} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2+z^2 \le f^2(x) \ \ (y,z \in \mathbf{R})\}$$

forgástestet. Ha $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, akkor az előbbi „forgatást" tegyük meg minden $i = 0, ..., n-1$ esetén a

$$h_i(x) := m_i = \inf\{f(t) : x_i \le t \le x_{i+1}\} \qquad (x_i \le x \le x_{i+1}),$$

$$H_i(x) := M_i = \sup\{f(t) : x_i \le t \le x_{i+1}\} \qquad (x_i \le x \le x_{i+1})$$

függvényekkel is, amikor a

$$\gamma_i(\tau) := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 \le m_i^2 \ \ (y,z \in \mathbf{R})\},$$

$$\Gamma_i(\tau) := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 \le M_i^2 \ \ (y,z \in \mathbf{R})\}$$

„hengereket" kapjuk. Világos, hogy ha

$$\gamma_\tau := \bigcup_{i=0}^{n-1} \gamma_i(\tau) \ \ , \ \ \Gamma_\tau := \bigcup_{i=0}^{n-1} \Gamma_i(\tau),$$

akkor

$$\gamma_\tau \subset \mathcal{T} \subset \Gamma_\tau .$$

A $\gamma_i(\tau), \Gamma_i(\tau)$ $(i = 0, ..., n-1)$ *hengerek* $|\gamma_i(\tau)|, |\Gamma_i(\tau)|$ térfogatát már ismerjük:

$$|\gamma_i(\tau)| = m_i^2 \pi (x_{i+1} - x_i) \ \ , \ \ |\Gamma_i(\tau)| = M_i^2 \pi (x_{i+1} - x_i),$$

amiből a γ_τ, Γ_τ egyesítéseik $|\gamma_\tau|, |\Gamma_\tau|$ térfogata is adódik:

$$|\gamma_\tau| = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma_i(\tau)| = \pi\cdot \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi\cdot s(f^2, \tau),$$

$$|\Gamma_\tau| = \sum_{i=0}^{n-1} |\Gamma_i(\tau)| = \pi\cdot \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi\cdot S(f^2, \tau).$$

Ha tehát a $\mathcal{T}$ forgástestnek is akarunk $|\mathcal{T}|$ térfogatot tulajdonítani, akkor fenn kell állnia az alábbi egyenlőtlenségpárnak:

$$\pi\cdot s(f^2, \tau) \leq |\mathcal{T}| \leq \pi\cdot S(f^2, \tau) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Más szóval

$$\pi\cdot \int_a^b f^2 = \sup\{s(f^2, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \leq |\mathcal{T}| \leq \pi\cdot \inf\{S(f^2, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} = \pi\cdot \int_a^b f^2.$$

„Logikusnak" tűnik ezért az alábbi értelmezés:

$$|\mathcal{T}| := \pi\cdot \int_a^b f^2.$$

Ha itt valamilyen $M > 0$ konstanssal $f(x) := M$ $(a \leq x \leq b)$, akkor $\mathcal{T}$ egy henger, és

$$|\mathcal{T}| = \pi \int_a^b M^2 = M^2 \pi (b - a),$$

egyezésben a hengerre ismert elemi térfogatképlettel.

Tekintsük valamilyen $r > 0$ mellett a fenti

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (0 \leq x \leq r)$$

függvényt. Ekkor $\mathcal{T}$ egy *félgömb,* és (ld. 9.3.5. Tétel)

$$|\mathcal{T}| = \pi\cdot \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \pi\cdot \Big(r^3 - \frac{r^3}{3}\Big) = \frac{2r^3\pi}{3},$$

ami ugyancsak „összhangban" van a gömbtérfogatra jól ismert $4r^3\pi/3$ formulával.

9.5.3. Forgástest felszíne

Legyen most $0 \le f \in C^1[a,b]$ (azaz a $0 \le f$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonosan differenciálható), és tekintsük a 9.5.2. pontban kapott forgástest *felületét*:

$$\mathcal{A} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2+z^2 = f^2(x)\ \ (y,z \in \mathbf{R})\}.$$

Ha $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$, akkor az X-tengely körüli „forgatást" végezzük el minden $i = 0, ..., n-1$ esetén a

$$c_i(x) := f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) \qquad (x_i \le x \le x_{i+1})$$

függvényekkel is (azaz geometriailag a

$$P_i := (x_i, f(x_i)) \ \ , \ \ P_{i+1} := (x_{i+1}, f(x_{i+1})) \in \mathbf{R}^2$$

pontokat összekötő *szakaszt* forgatjuk meg az X-tengely körül), amikor az

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 \le c_i^2(x)\ \ (y,z \in \mathbf{R})\}$$

csonkakúpokat kapjuk. Ez utóbbiaknak a felülete:

$$\kappa_i(\tau) := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2+z^2 = c_i^2(x)\ \ (y,z \in \mathbf{R})\},$$

amelyeknek a $|\kappa_i(\tau)|$ felszíne pedig (az ismert elemi felszínképlet szerint):

$$|\kappa_i(\tau)| = \frac{2c_i(x_i)\cdot \pi + 2c_i(x_{i+1})\cdot \pi}{2} \cdot \overline{P_i P_{i+1}} =$$

$$\pi \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot \overline{P_i P_{i+1}} \qquad (i = 0, ..., n-1).$$

Itt

$$\overline{P_i P_{i+1}} := \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \qquad (i = 0, ..., n-1)$$

a P_i, P_{i+1} pontokat összekötő szakasz hossza. Mivel az f függvény folytonos (is), ezért (ld. 5.5.6. Tétel és 5.6. x) megjegyzés) létezik olyan $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, amellyel

$$f(x_i) + f(x_{i+1}) = 2 \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = 2f(\xi_i) \qquad (i = 0, ..., n-1).$$

Továbbá az f differenciálhatósága miatt a Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel) alapján egy alkalmas $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$ helyen

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\eta_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \qquad (i = 0, ..., n-1),$$

következésképpen

$$\overline{P_iP_{i+1}} = \sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i) \qquad (i=0,...,n-1).$$

Mindezt egybevetve azt kapjuk, hogy

$$|\kappa_i(\tau)| = 2\pi\cdot f(\xi_i)\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i) \qquad (i=0,...,n-1).$$

Az $\mathcal{A}$ felületre „illesztett"

$$\kappa(\tau) := \bigcup_{i=0}^{n-1}\kappa_i(\tau)$$

csonkakúppalást $|\kappa(\tau)|$ felszíne:

$$|\kappa(\tau)| = \sum_{i=0}^{n-1}|\kappa_i(\tau)| = 2\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

Alakítsuk át a most kapott formulát a következőképpen:

$$|\kappa(\tau)| = 2\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(\eta_i)\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i)-$$

$$2\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(f(\eta_i)-f(\xi_i))\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

Ha $y_\tau := (\eta_0,...,\eta_{n-1})\in\mathbf{R}^n$, akkor

$$2\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(\eta_i)\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i) = 2\pi\cdot\sigma\Big(f\cdot\sqrt{1+(f')^2},\tau,y_\tau\Big).$$

Legyen továbbá

$$\Delta_\tau := 2\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(f(\eta_i)-f(\xi_i))\cdot\sqrt{1+(f'(\eta_i))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

Az f' folytonossága miatt (ld. 5.5.10. Tétel) valamilyen $M\geq 0$ konstanssal $|f'(x)|\leq M$ $(x\in[a,b])$, ezért

$$|\Delta_\tau| \leq 2\pi\cdot\sqrt{1+M^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}|f(\eta_i)-f(\xi_i)|\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

A Heine-tétel (ld. 5.5.11. Tétel) alapján az f egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$, hogy

$$|f(u)-f(v)|<\varepsilon \qquad (u,\,v\in[a,b],\,|u-v|<\delta).$$

Ha tehát a $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás finomságára $\delta_\tau < \delta$ teljesül, akkor

$$|\Delta_\tau| < 2\pi\cdot \varepsilon\cdot \sqrt{1+M^2}\cdot \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = 2(b-a)\pi\cdot \sqrt{1+M^2}\cdot \varepsilon.$$

Ezért a 9.1.3. Tételt, ill. a 9.2. iv), v) megjegyzéseket figyelembe véve

$$2\pi\cdot \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma\Big(f\cdot \sqrt{1+(f')^2}, \tau, y_\tau\Big) = 2\pi\cdot \int_a^b f\cdot \sqrt{1+(f')^2},$$

ill.

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\Delta_\tau| = 0.$$

Mindezek alapján azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ *forgásfelületnek* van *felszíne,* ami

$$|\mathcal{A}| := 2\pi\cdot \int_a^b f\cdot \sqrt{1+(f')^2}.$$

Példaként legyen az $f := f_R$ függvény a következő:

$$f_R(x) := \sqrt{r^2-x^2} \qquad (0 \le x \le R),$$

ahol $0 < R < r$ adott számok. Ekkor

$$f_R'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad (0 \le x \le R),$$

ill.

$$1+(f_R'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2} \qquad (0 \le x \le R).$$

Ezért az f_R által a fentiekben meghatározott forgásfelületet $\mathcal{A}_R$-rel jelölve:

$$|\mathcal{A}_R| := 2r\pi\cdot \int_0^R \sqrt{r^2-x^2}\cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 2rR\cdot \pi.$$

„Szemlélet alapján" könnyen elfogadható (az egzakt meggondolásokat nem részletezve), hogy az $R \to r$ határátmenettel $\mathcal{A}_R \to \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{A}$ egy félgömb felülete. Ugyanakkor

$$\lim_{R\to r} |\mathcal{A}_R| = \lim_{R\to r}(2rR\cdot \pi) = 2r^2\cdot \pi,$$

ami valóban nem más, mint egy r sugarú félgömb felszíne.

9.5.4. Taylor-formula integrál-maradéktaggal

Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon adott az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ természetes számra $f \in D^{n+1}$, azaz az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható. Ekkor a 7.7.2. Tétel (Taylor-formula) szerint bármely $a, x \in I,\ x \neq a$ esetén van olyan $\xi \in (a, x)$ (ha $x > a$), vagy $\xi \in (x, a)$ (ha $x < a$), amellyel

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ahol

$$T_{a,n}f(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \qquad (t \in \mathbf{R})$$

az f függvény a-hoz tartozó n-edik Taylor-polinomja, az

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

kifejezés az ún. Lagrange-féle maradéktag.

A továbbiakban a fenti $f(x) - T_{a,n}f(x)$ különbségre (maradéktagra) adunk egy másfajta előállítást, az alcímben jelzett „integrál-maradéktag" alakjában. Ezt tartalmazza a

9.5.4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \in \mathbf{N}$, és az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvény $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható. Ekkor tetszőleges $a, x \in I,\ x \neq a$ esetén*

$$(*) \qquad f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, dt.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval végezve a bizonyítást, legyen először $n = 0$. Ez azt jelenti, hogy az f' deriváltfüggvény (létezik és) folytonos, a $(*)$ egyenlőség pedig a következő:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt.$$

Mivel itt (ld. 9.1.7. Tétel) $f' \in R[a, b]$, az f függvény pedig nyilván primitív függvénye az f'-nek, ezért a Newton-Leibniz-formula (ld. 9.3.5. Tétel) miatt az előbbi egyenlőség triviálisan fennáll.

Tegyük most fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett a tételünk állítása már igaz. Ha az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény $(n+2)$-szer folytonosan differenciálható, akkor egyrészt a

$$G(t) := -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \qquad (t \in I)$$

jelöléssel $G \in D$ és

$$G'(t) = (x-t)^n \qquad (t \in I),$$

másrészt a parciális integrálás „szabálya" (ld. 9.3.6. Tétel) szerint

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, dt =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(x)G(x) - f^{(n+1)}(a)G(a)}{n!} - \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot G(t) \, dt =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot (x-t)^{n+1} \, dt.$$

Innen

$$f(x) - T_{a,n}f(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = f(x) - T_{a,n+1}f(x) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot (x-t)^{n+1} \, dt$$

következik, ami a bizonyítandó állítás n helyett $(n+1)$-re. ■

9.5.5. Binomiális sor

Tetszőleges $\mu \in \mathbf{R}$ kitevő mellett tekintsük a következő függvényt:

$$f_\mu(x) := (1+x)^\mu \qquad (-1 < x \in \mathbf{R}).$$

A 7.3.6. Tétel szerint $f_\mu \in D^\infty$, és

$$f_\mu^{(k)}(x) = \Big(\prod_{j=0}^{k-1}(\mu - j)\Big) \cdot (1+x)^{\mu-k} \qquad (-1 < x \in \mathbf{R},\ 1 \le k \in \mathbf{N}).$$

Ezért az f_μ függvénynek a 0-hoz tartozó Taylor-együtthatói (ld. 7.7.) a következők:

$$f_\mu(0) = 1 =: \binom{\mu}{0} \quad , \quad \frac{f_\mu^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(\mu - j) =: \binom{\mu}{k} \qquad (1 \le k \in \mathbf{N})$$

(általánosított *binomiális együtthatók*). Ennek megfelelően a

$$\sum \left(\binom{\mu}{n} \cdot x^n \right)$$

hatványsor (*binomiális sor*) az f_μ függvény 0-hoz tartozó Taylor-sora (Maclaurin-sora), a

$$T_n(x) := T_{0,n}f_\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\mu}{k} \cdot x^k \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

polinomok pedig az f_μ-nek a 0-hoz tartozó Taylor-polinomjai.

Ha $\mu := N \in \mathbf{N}$, akkor nyilván

$$\binom{\mu}{k} = \binom{N}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (N-j) = 0 \qquad (N+1 \le k \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$T_{0,n}f_N(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot x^k = T_{0,N}f_N(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy ekkor a $\sum (\binom{N}{n} \cdot x^n)$ binomiális sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} \cdot x^n = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot x^k \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ami a binomiális tétel szerint nem más, mint az $(1+x)^N$ hatvány.

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy a következő állítás a binomiális tétel egyfajta általánosítása.

9.5.5.1. Tétel. *Tetszőleges $\mu \in \mathbf{R}$ esetén a fenti binomiális sor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon, és*

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} \cdot x^k \qquad (x \in (-1,1)).$$

Bizonyítás. A tétel előtt mondottakat figyelembe véve feltehetjük, hogy $\mu \notin \mathbf{N}$. Világos továbbá, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ „kitevővel" $f_\mu \in C^{n+1}$. Mivel $x = 0$ esetén a tétel állítása nyilvánvaló, ezért az is feltehető, hogy $0 \neq x \in (-1,1)$. Alkalmazható tehát f_μ-re a 9.5.4.1. Tétel, miszerint a

$$c_k := \prod_{j=0}^{k-1} (\mu - j) \qquad (1 \le k \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$f_\mu(x) - T_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x f_\mu^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \frac{c_{n+1}}{n!} \cdot \int_0^x (1+t)^{\mu-n-1} \cdot (x-t)^n dt =$$

$$\frac{c_{n+1}}{n!}\cdot \int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \, dt.$$

Következésképpen

$$|f_\mu(x) - T_n(x)| \le \frac{|c_{n+1}|}{n!}\cdot \left|\int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n dt\right| =$$

$$\frac{|c_{n+1}|}{n!}\cdot |x|^n\cdot \left|\int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left|\frac{1-t/x}{1+t}\right|^n dt\right| =: \delta_n(x).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az előbbi integrálban szereplő x, t változókkal

$$\left|\frac{1-t/x}{1+t}\right| \le 1.$$

Így

$$\left|\int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left|\frac{1-t/x}{1+t}\right|^n dt\right| \ge \left|\int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left|\frac{1-t/x}{1+t}\right|^{n+1} dt\right|,$$

amiből

$$\delta_n(x) \ge \frac{|c_{n+1}|}{n!}\cdot |x|^n\cdot \left|\int_0^x (1+t)^{\mu-1}\cdot \left|\frac{1-t/x}{1+t}\right|^{n+1} dt\right|.$$

Megjegyezzük, hogy a $\mu \notin \mathbf{N}$ feltétel miatt $c_k \neq 0$ $(1 \le k \in \mathbf{N})$. Ezért „jogos" az alábbi átalakítás:

$$\delta_n(x) \ge \frac{|c_{n+1}|}{n!}\cdot |x|^n\cdot \frac{(n+1)!}{|c_{n+2}|}\cdot \frac{1}{|x|^{n+1}}\cdot \delta_{n+1}(x) = \frac{1}{|x|}\cdot \frac{n+1}{|\mu-(n+1)|}\cdot \delta_{n+1}(x),$$

azaz

$$(*) \qquad \delta_{n+1}(x) \le \frac{|\mu-(n+1)|}{n+1}\cdot |x|\cdot \delta_n(x) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel itt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|\mu-(n+1)|}{n+1}\cdot |x|\right) = |x| < 1,$$

ezért egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindextől kezdve

$$\frac{|\mu-(n+1)|}{n+1}\cdot |x| < 1 \qquad (N \le n \in \mathbf{N}),$$

így egyúttal

$$0 \le \delta_{n+1}(x) \le \delta_n(x) \qquad (N \le n \in \mathbf{N}).$$

A $(\delta_n(x))$ sorozat tehát „lényegében" monoton fogyó és korlátos, amiből (ld. 3.5.3. Tétel) az következik, hogy konvergens. Legyen

$$\delta(x) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(x),$$

ekkor az előbbi $(*)$ becslés és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mu-(n+1)|}{n+1} = 1$$

miatt

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_{n+1}(x) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|\mu-(n+1)|}{n+1}\cdot |x|\cdot \delta_n(x)\right) = |x|\cdot \delta(x).$$

Az $|x| < 1$ egyenlőtlenség alapján így $\delta(x) = 0$. Az $|f_\mu(x) - T_n(x)| \leq \delta_n(x) \quad (n \in \mathbf{N})$ becslés szerint ezért egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} |f_\mu(x) - T_n(x)| = 0$$

is igaz. Ez viszont azt jelenti, hogy a $(T_n(x))$ sorozat, azaz a szóban forgó binomiális sor konvergens, az összege pedig $f_\mu(x)$. ■

9.5.6. Wallis-formula

Elöljáróban számoljuk ki az

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

integrálokat. Ezt egy rekurzív összefüggés révén tehetjük meg. Ez utóbbinak a „felállításához" alkalmazzuk a parciális integrálást (ld. 9.3.6. Tétel): tetszőleges $2 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin\cdot \sin^{n-1} = \int_0^{\pi/2} (-\cos')\cdot \sin^{n-1} = (n-1)\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\cdot \sin^{n-2} =$$

$$(n-1)\cdot \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2)\cdot \sin^{n-2} = (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n,$$

ahol $I_0 = \pi/2$ és

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin = \cos 0 - \cos(\pi/2) = 1.$$

Tehát

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2} \qquad (2 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Innen (teljes indukcióval) azt kapjuk, hogy

$$I_{2n} = I_0\cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2n-2j+1}{2n-2j+2} = \frac{\pi}{2}\cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2n-2j+1}{2n-2j+2} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ill.

$$I_{2n+1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2n-2j+2}{2n-2j+3} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$0 \le \sin x \le 1 \qquad (0 \le x \le \pi/2),$$

ezért

$$(\sin x)^{2n+1} \le (\sin x)^{2n} \le (\sin x)^{2n-1} \qquad (0 \le x \le \pi/2),$$

amiből (ld. 9.1.5. Tétel)

$$I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

következik. Így a fentiek szerint

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{2n-2j+2}{2n-2j+3} \le \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2n-2j+1}{2n-2j+2} \le \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2n-2j}{2n-2j+1} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Innen átrendezéssel azt kapjuk, hogy az

$$a_n := \prod_{j=1}^{n} \frac{(2n-2j+2)^2}{(2n-2j+3) \cdot (2n-2j+1)} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$a_n \le \frac{\pi}{2} \le a_n \cdot \frac{2n+1}{2n} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az (a_n) sorozat monoton növő, ezért a fenti

$$a_n \le \frac{\pi}{2} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N})$$

korlátosság miatt konvergens is. Ugyanakkor $(2n+1)/(2n) \to 1 \quad (n \to \infty)$, amiből az alábbi előállítás (*Wallis-formula*) adódik:

$$\frac{\pi}{2} = \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{(2n-2j+2)^2}{(2n-2j+3) \cdot (2n-2j+1)}.$$

9.6. Megjegyzések

i) A 9.5.1. pontban tárgyalt ívhossz fogalom messzemenően általánosítható. Legyen ehhez adott az $1 \le N \in \mathbf{N}$ „dimenzió", és valamilyen korlátos és zárt intervallumon tekintsük a

$$\varphi_i : [a, b] \to \mathbf{R} \qquad (i = 1, ..., N)$$

függvényeket. Ezeknek a $\varphi_i \quad (i = 1, ..., N)$ *koordinátafüggvényeknek* a segítségével készítsük el azt a

$$\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^N$$

függvényt, amelyre a $\varphi(x) \in \mathbf{R}^N$ vektor i-edik koordinátája a $\varphi_i(x) \in \mathbf{R}$ szám $(i = 1, ..., N)$:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_N(x)) \qquad (x \in [a, b]).$$

Mindezt röviden így írjuk:

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N).$$

A φ *vektorfüggvényről* azt mondjuk, hogy *folytonos* $: \varphi \in \mathcal{C}$ (vagy *differenciálható*: $\varphi \in D$), ha minden $\varphi_i \quad (i = 1, ..., N)$ koordinátafüggvénye folytonos (vagy differenciálható). Ha $\varphi \in D$, akkor legyen

$$\varphi' := (\varphi_1', ..., \varphi_N')$$

a φ *deriváltfüggvénye.* Az előbbi φ-t *folytonosan differenciálhatónak* nevezzük, ha $\varphi' \in \mathcal{C}$. Könnyű meggondolni, hogy ekkor a

$$\|\varphi'\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\varphi_i')^2}$$

függvény (mint $\|\varphi'\| : [a, b] \to [0, +\infty)$ egyváltozós valós függvény) is folytonos. Ha még a φ injektív és $\|\varphi'\| > 0$, akkor a φ-re a *sima görbe* elnevezést használjuk. A φ *zárt sima görbe,* ha folytonosan differenciálható, $\varphi(a) = \varphi(b)$, a $\varphi_{|_{[a,b)}}$ leszűkítés injektív, és $\|\varphi'\| > 0$. Legyen ezek után $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$ egy felosztás, és

$$\ell_{\varphi,j}(\tau) := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\varphi_i(x_{j+1}) - \varphi_i(x_j))^2} \qquad (j = 0, ..., n-1),$$

ill.

$$\ell_\varphi(\tau) := \sum_{j=0}^{n-1} \ell_{\varphi,j}(\tau).$$

Azt mondjuk, hogy a φ sima görbe *rektifikálható* (vagy más szóval *van ívhossza*), ha

$$\ell_\varphi := \sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} < +\infty.$$

Az utóbbi esetben az ℓ_φ szám a φ sima görbe *ívhossza.* Belátható, hogy minden φ sima görbének van ívhossza, és

$$\ell_\varphi = \int_a^b \|\varphi'\|.$$

Sőt, az is megmutatható, hogy ℓ_φ valójában csak az $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészlet-halmaztól (a geometriai értelemben vett „sima görbétől") függ, és (ebben a terminológiában) a φ *paraméterezéstől* nem. A fenti $\ell_{\varphi,j}(\tau)$ geometriai jelentése a

$$\varphi(x_j),\ \varphi(x_{j+1}) \in \mathbf{R}^N$$

pontokat összekötő $r_j \quad (j = 0, ..., n-1)$ szakasz hossza, $\ell_\varphi(\tau)$ pedig a φ-be beírt $\bigcup_{j=0}^{n-1} r_j$ *töröttvonal* hossza. Legyen pl.

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t, t^2/2) \qquad (0 \le t \le 1)$$

(egy ún. *csavarvonal*). Ekkor

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, t) \qquad (0 \le t \le 1),$$

így

$$\|\varphi'\|(t) = \sqrt{1+t^2} \qquad (0 \le t \le 1).$$

A 9.3.7. Tételt alkalmazva (ld. 9.4. ix) megjegyzés)

$$\ell_\varphi = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{\mathrm{arsh}(1)} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}\cdot \mathrm{ch}\,x\,dx =$$

$$\int_0^{\mathrm{arsh}(1)} \mathrm{ch}^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{\mathrm{arsh}(1)} (1+\mathrm{ch}(2x))\,dx = \frac{\mathrm{arsh}(1)}{2} + \frac{1}{4}\cdot \mathrm{sh}((2\cdot \mathrm{arsh}(1)) =$$

$$\frac{\mathrm{arsh}(1)}{2} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}(1))\cdot \mathrm{ch}(\mathrm{arsh}(1)) = \frac{\mathrm{arsh}(1)+\sqrt{2}}{2}.$$

ii) Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és $f \in C^1[a,b]$. Ekkor a

$$\varphi_f(x) := (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x \in [a,b])$$

definícióval megadott $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ függvény nyilván egy sima görbe (ld. i)), és

$$\varphi_f'(x) = (1, f'(x)) \qquad (x \in [a,b]).$$

Következésképpen

$$\|\varphi_f'\| = \sqrt{1+(f')^2},$$

amiből az i) megjegyzésben mondottak szerint

$$\ell_{\varphi_f} = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$$

következik. A 9.5.1.1. Tételt figyelembe véve ezért azt mondhatjuk, hogy

$$\ell_{\varphi_f} = \ell_f.$$

Ha pl.

$$f(x) := \frac{x^2}{2} \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

akkor az előző megjegyzésben szereplő példa alapján

$$\ell_f = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{\operatorname{arsh}(1) + \sqrt{2}}{2}.$$

iii) Az i) megjegyzésre utalva legyen $N := 2$, és emlékeztessünk a *síkbeli polárkoordinátákra*: tetszőleges $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbf{R}^2$ vektor egyértelműen felírható

$$x = r \cdot \cos\alpha \ \ , \ y = r \cdot \sin\alpha$$

alakban, ahol $r := \sqrt{x^2+y^2}$, és $\alpha \in [0, 2\pi)$ egy alkalmas „szög". Tegyük fel, hogy egy $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum esetén adottak a folytonosan differenciálható

$$r : [a,b] \to (0, +\infty) \ \ , \ \ \alpha : [a,b] \to [0, 2\pi)$$

függvények, amelyekkel

$$\varphi(x) := (r(x) \cdot \cos(\alpha(x)), r(x) \cdot \sin(\alpha(x))) \qquad (x \in [a,b])$$

egy (*polárkoordinátás alakban megadott*) sima görbe. Mivel bármely $x \in [a,b]$ helyen

$$(r(x) \cdot \cos(\alpha(x)))' = r'(x) \cdot \cos(\alpha(x)) - r(x) \cdot \alpha'(x) \cdot \sin(\alpha(x)),$$

$$(r(x) \cdot \sin(\alpha(x)))' = r'(x) \cdot \sin(\alpha(x)) + r(x) \cdot \alpha'(x) \cdot \cos(\alpha(x)),$$

ezért

$$\left((r(x) \cdot \cos(\alpha(x)))'\right)^2 =$$

$$(r'(x))^2 \cdot \cos^2(\alpha(x)) + r^2(x) \cdot (\alpha'(x))^2 \cdot \sin^2(\alpha(x)) - r(x) \cdot r'(x) \cdot \alpha'(x) \cdot \sin(2\alpha(x)),$$

és

$$\left((r(x) \cdot \sin(\alpha(x)))'\right)^2 =$$

$$(r'(x))^2 \cdot \sin^2(\alpha(x)) + r^2(x) \cdot (\alpha'(x))^2 \cdot \cos^2(\alpha(x)) + r(x) \cdot r'(x) \cdot \alpha'(x) \cdot \sin(2\alpha(x)).$$

Ebből az következik, hogy

$$\|\varphi'\| = \sqrt{(r')^2 + r^2 \cdot (\alpha')^2},$$

és ezért

$$\ell_\varphi = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + r^2 \cdot (\alpha')^2}.$$

Ha pl. $\rho > 0$ és

$$r(x) := \rho \ , \ \alpha(x) := x \qquad (x \in [0, 2\pi]),$$

akkor $r' \equiv 0$, $\alpha' \equiv 1$, így a

$$\varphi(x) = \rho \cdot (\cos x, \sin x) \qquad (x \in [0, 2\pi])$$

körvonal hossza

$$\ell_\varphi = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + r^2 \cdot (\alpha')^2} = \int_0^{2\pi} \rho = 2\pi\rho.$$

iv) Gyakran van szükség ún. *szektorszerű tartományok* területének a kiszámítására. Legyen ehhez valamilyen $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ korlátos és zárt intervallum esetén adott a folytonos $r : [a, b] \to (0, +\infty)$ függvény. Tekintsük ezután a

$$\mathcal{K} := \{(\rho \cdot \cos x, \rho \cdot \sin x) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le \rho \le r(x) \ \ (x \in [a, b])\}$$

halmazt. Ha $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \le n \in \mathbf{N})$, akkor legyen

$$m_i := \min\{r(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \qquad (i = 0, ..., n-1),$$

$$M_i := \max\{r(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \qquad (i = 0, ..., n-1),$$

és készítsük el az alábbi körcikkeket:

$$\mathcal{K}_{i0} := \{(\rho \cdot \cos x, \rho \cdot \sin x) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le \rho \le m_i \ \ (x \in [x_i, x_{i+1}])\},$$

$$\mathcal{K}_{i1} := \{(\rho \cdot \cos x, \rho \cdot \sin x) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le \rho \le M_i \ \ (x \in [x_i, x_{i+1}])\}.$$

Ha

$$\mathcal{K}_0 := \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{K}_{i0}, \ \ \mathcal{K}_1 := \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{K}_{i1},$$

akkor nyilván

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1,$$

így a $\mathcal{K}$ szektorszerű tartomány feltételezett $|\mathcal{K}|$ területére

$$|\mathcal{K}_0| \le |\mathcal{K}| \le |\mathcal{K}_1|.$$

A $\mathcal{K}_{i0}, \mathcal{K}_{i1} \ \ (i = 0, ..., n-1)$ körcikkek területe:

$$|\mathcal{K}_{i0}| = \frac{1}{2} \cdot m_i^2 (x_{i+1} - x_i), \ \ |\mathcal{K}_{i1}| = \frac{1}{2} \cdot M_i^2 (x_{i+1} - x_i),$$

következésképpen

$$\frac{1}{2} \cdot s(r^2, \tau) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 (x_{i+1} - x_i) \le |\mathcal{K}| \le$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} M_i^2(x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{2}\cdot S(r^2,\tau)$$

adódik. Ezért „logikus" az alábbi definíció:

$$|\mathcal{K}| := \frac{1}{2}\cdot\int_a^b r^2.$$

Legyen pl. $R>0$, $[a,b]:=[0,\pi/2]$, $r\equiv R$, ekkor a $\mathcal{K}$ *negyedkörlemez* területe:

$$|\mathcal{K}| := \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} R^2 = \frac{R^2\pi}{4},$$

megegyezően az R sugarú körlemez területére ismert $R^2\pi$-vel.

v) A 9.5.4.1. Tételből (az ottani feltételek mellett) a 9.3.4. Tétel (középérték-tétel) alkalmazásával egyszerűen megkapható a Taylor-formulával kapcsolatos Lagrange-féle maradéktag (ld. 7.7.2. Tétel). Ui. a 9.5.4.1. Tétel szerint

$$f(x)-T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!}\cdot\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt,$$

ahol $I\subset\mathbf{R}$ nyílt intervallum, az $f:I\to\mathbf{R}$ függvény $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható, és $a,x\in I$, $x\neq a$. Ezért a 9.3.4. Tétel alapján kapunk olyan $\xi\in[a,x]$ (vagy $\xi\in[x,a]$) helyet, amellyel (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_a^x (x-t)^n\,dt =$$

$$f^{(n+1)}(\xi)\cdot\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}-\frac{(x-x)^{n+1}}{n+1}\right) = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Következésképpen

$$f(x)-T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ami a Lagrange-féle maradéktag.

vi) Tegyük fel, hogy $f\in D[0,1]$, $f'(x)\neq 0$ $(0<x<1)$. Ekkor

$$\min\left\{\int_0^1 |f(x)-y|\,dx : y\in\mathbf{R}\right\} = \int_0^1 |f(x)-f(1/2)|\,dx.$$

Legyen ui. $g:\mathcal{R}_f\to\mathbf{R}$ a következő függvény:

$$g(y) := \int_0^1 |f(x)-y|\,dx \qquad (y\in\mathcal{R}_f).$$

Emlékeztetünk arra (ld. 5.5.7., 5.5.9. Tételek), hogy az $\mathcal{R}_f$ értékkészlethalmaz korlátos és zárt intervallum:

$$\mathcal{R}_f = [a, b].$$

Az f' Darboux-tulajdonsága miatt (ld. 7.5.10. Tétel) bármelyik $0 < x < 1$ helyen (pl.) $f'(x) > 0$ (az $f'(x) < 0 \quad (0 < x < 1)$ esetben analóg a bizonyítás), ezért (ld. 7.5.7. Tétel) az f függvény szigorúan monoton növő. Jelöljük F-fel az f egy primitív függvényét (pl. az integrálfüggvénye (ld. 9.3.8. Tétel) ilyen). Ekkor (ld. 9.1.4. Tétel és 9.3.5. Tétel)

$$g(y) = \int_0^{f^{-1}(y)} (y - f(x))\,dx + \int_{f^{-1}(y)}^1 (f(x) - y)\,dx =$$

$$y\cdot f^{-1}(y) - \int_0^{f^{-1}(y)} f(x)\,dx + \int_{f^{-1}(y)}^1 f(x)\,dx - y + y\cdot f^{-1}(y) =$$

$$2y\cdot f^{-1}(y) - 2F(f^{-1}(y)) + F(1) + F(0) - y \qquad (a < y < b).$$

Innen a 9.3.8. Tétel, valamint az inverzfüggvény differenciálhatósága (ld. 7.3.3. Tétel) alapján $g \in D\{y\}$ és

$$g'(y) = 2f^{-1}(y) + \frac{2y}{f'(f^{-1}(y))} - \frac{2f(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))} - 1 =$$

$$2f^{-1}(y) - 1 \qquad (a < y < b).$$

Ezért

$$g'(y) = 0 \iff f^{-1}(y) = 1/2 \iff y = f(1/2).$$

A 7.5.9. Tétel alkalmazásával innen azt kapjuk, hogy a g függvénynek az (egyetlen) $1/2$ helyen lokális minimuma van. Továbbá a g fenti előállításából

$$g(f(1/2)) = \int_0^{f^{-1}(y)} (f(1/2) - f(x))\,dx + \int_{f^{-1}(y)}^1 (f(x) - f(1/2))\,dx =$$

$$\int_{1/2}^1 f - \int_0^{1/2} f.$$

Vegyük észre, hogy

$$g(a) = g(f(0)) = \int_0^1 f - f(0) \geq \int_{1/2}^1 f - \int_0^{1/2} f,$$

ti.

$$\int_{1/2}^1 f - \int_0^{1/2} f = \int_0^1 f - 2\int_0^{1/2} f \leq \int_0^1 f - f(0)$$

azzal ekvivalens, hogy $2\int_0^{1/2} f \geq f(0)$, ami az f (és az integrál) monotonitása miatt igaz. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$g(b) = g(f(1)) = f(1) - \int_0^1 f \geq \int_{1/2}^1 f - \int_0^{1/2} f.$$

Mindez azt jelenti, hogy az $f(1/2)$-ben a g függvénynek abszolút minimuma van. Annyit kell már csupán megjegyeznünk, hogy $z \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{R}_f$ esetén egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$\int_0^1 |f(x) - z|\,dx \geq \int_0^1 |f(x) - y|\,dx \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

Következésképpen

$$\min\left\{\int_0^1 |f(x) - y|\,dx : y \in \mathbf{R}\right\} = \min\left\{\int_0^1 |f(x) - y|\,dx : y \in \mathcal{R}_f\right\} =$$

$$\min \mathcal{R}_g = \int_0^1 |f(x) - f(1/2)|\,dx.$$

vii) Az előző megjegyzésben szereplő

$$\int_0^1 |f(x) - y|\,dx =$$

$$\int_0^{f^{-1}(y)} (y - f(x))\,dx + \int_{f^{-1}(y)}^1 (f(x) - y)\,dx \qquad (y \in \mathcal{R}_f)$$

felbontás alapján az $\int_0^1 |f(x) - y|\,dx$ integrál geometriailag a következőképpen interpretálható (ld. 9.5.2.). Legyen ui.

$$\mathcal{T}_y := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq u \leq f^{-1}(y),\ f(u) \leq v \leq y\},$$

ill.

$$\mathcal{T}^y := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : f^{-1}(y) \leq u \leq 1,\ y \leq v \leq f(u)\},$$

ekkor a szóban forgó integrál a $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}^y$ síkidomok területeinek az összege:

$$\int_0^1 |f(x) - y|\,dx = |\mathcal{T}_y| + |\mathcal{T}^y|.$$

Azt az y-t kerestük tehát, amellyel a $|\mathcal{T}_y| + |\mathcal{T}^y|$ területösszeg minimális. Esetenként ez a feladat egyszerűen „megoldható" a szemlélet alapján (valójában csupán szemléltethető a vi) megjegyzésben közölt egzakt bizonyítás). Legyen pl.

$$f(x) := x^2 \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Ekkor vi) szerint az $y := f(1/2) = 1/4$ választással lesz a legkisebb az

$$\int_0^1 |x^2 - y|\, dx$$

integrál, amikor

$$\int_0^1 |x^2 - 1/4|\, dx = \int_0^{1/2} (1/4 - x^2)\, dx + \int_{1/2}^1 (x^2 - 1/4)\, dx =$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

A „szokásos" derékszögű koordinárendszerben ábrázolva mindezt egyszerűen „leolvasható", hogy bármely $1/4 \neq y \in \mathcal{R}_f = [0,1]$ esetén

$$\mathcal{T}_y + \mathcal{T}^y > \mathcal{T}_{1/4} + \mathcal{T}^{1/4}.$$

viii) A vi) megjegyzésben vizsgált feladat más szempontból is „mintaadó". Legyen ui. valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum és $f, g \in C[a,b]$ esetén

$$\rho(f,g) := \int_a^b |f - g|$$

az f, g függvények *távolsága.* Ekkor a Riemann-integrál tulajonságai (ld. korábbi tételek, ill. megjegyzések) alapján rögtön adódnak a most definiált távolságra az alábbi állítások tetszőlegesen választott $f, g, h \in C[a,b]$ függvényekre:

$$\rho(f,g) \geq 0 \ \ , \ \ \rho(f,g) = 0 \iff f = g \ \ , \ \ \rho(f,g) = \rho(g,f),$$

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

Ha $f \in C[a,b]$ és $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset C[a,b]$, akkor az f függvénynek az $\mathcal{A}$ halmaztól vett $\rho(f, \mathcal{A})$ *távolságán* a következő infimumot értjük:

$$\rho(f, \mathcal{A}) := \inf \{\rho(f,g) : g \in \mathcal{A}\}.$$

Az approximációelmélet egyik alapfeladata annak az eldöntése, hogy az előbbi infimum helyett mikor írható minimum? Más szóval, van-e az $\mathcal{A}$ halmazban az f függvényhez „legközelebbi" (ún. *extremális*) elem? A vi) megjegyzésben tehát az ott szereplő f függvénynek az

$$\mathcal{A} := \{g \in C[0,1] : g \equiv y \ \ (y \in \mathbf{R})\}$$

halmaztól (a $[0,1]$ intervallumon konstans függvények halmazától) vett távolságát számoltuk ki. Kiderült, hogy a $g \equiv f(1/2)$ függvény az előbbi értelemben extremális, sőt, az egyetlen ilyen.

ix) Tegyük fel, hogy az $f \in C[a,b]$ függvény esetén az $f(x)$ helyettesítési érték az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum mentén mozgó pontra ható (a mozgással megegyező irányú) erő nagysága az $x \in [a,b]$ helyen. Ha $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, ..., n-1)$, akkor az $f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$ szorzat tekinthető az $x_i \to x_{i+1}$ elmozdulás során végzett munka közelítéséül. Következésképpen az

$$y_\tau := (\xi_0, ..., \xi_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

jelöléssel a

$$\sigma(f, \tau, y_\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$$

közelítő összeg nem más, mint az $[a,b]$-n végzett $L_{[a,b]}$ munka egy közelítése. Mivel (ld. 9.1.3. Tétel, 9.2. v) megjegyzés)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(f, \tau, y_\tau) = \int_a^b f,$$

ezért „jogos" a szóban forgó munka matematikai modelljéül az

$$L_{[a,b]} := \int_a^b f$$

választás. Ha $f \in C[a, +\infty)$, akkor az

$$L_{[a,+\infty)} := \int_a^{+\infty} f$$

improprius integrál jelenti a végzett munkát (feltéve, hogy létezik). Határozzuk meg pl. a *második kozmikus sebességet.* Ez az a legkisebb kezdősebesség, amellyel egy rakétát elindítva, az kiszabadul a Föld vonzásából. Legyen $m > 0$ a rakéta tömege, $v > 0$ a kezdősebessége,

$$M \approx 5,976\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

a Föld tömege,

$$R \approx 6378,14\,\mathrm{km}$$

pedig a sugara,

$$\gamma \approx 6,6716\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{s}^2\mathrm{kg})$$

a gravitációs állandó, azaz a Föld felszínétől $t > R$ távolságban $\gamma m M / t^2$ gravitációs vonzóerő hat a rakétára. Mivel a vonzóerő $L_{[R,+\infty)}$ munkáját a rakéta $mv^2/2$ kezdeti mozgási energiájának kell fedezni, ezért

$$\frac{mv^2}{2} = L_{[R,+\infty)} = \int_R^{+\infty} \frac{\gamma m M}{t^2}\,dt = \gamma m M\cdot \lim_{b\to+\infty} \int_R^b \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$\gamma m M \cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)=\frac{\gamma m M}{R}.$$

Innen

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

adódik. A fenti adatokkal tehát

$$v\approx\sqrt{\frac{2\cdot 6,6716\cdot 5,976}{6378,14}}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 11,18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\approx 40248\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

x) A határozott integrál fogalmának a felhasználásával (nem meglepő módon) bizonyos összegek határértékét tudjuk könnyen kiszámítani. Legyen pl. $f\in R[a,b]$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f(k/n)=\int_0^1 f.$$

Valóban, ha

$$\tau_n:=\left\{\frac{i}{n}:i=0,...,n\right\}\in\mathcal{F}_0^1\qquad(1\le n\in\mathbf{N})$$

és $y_{\tau_n}:=(1/n,2/n,...,1)\in\mathbf{R}^n$, akkor

$$\sigma_n(f):=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f(k/n)=\sigma(f,\tau_n,y_{\tau_n})\qquad(1\le n\in\mathbf{N}).$$

Mivel $\delta_{\tau_n}=1/n\to 0\ \ (n\to\infty)$, ezért (ld. 9.1.3. Tétel, 9.2. v) megjegyzés)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f(k/n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\tau_n,y_{\tau_n})=\int_0^1 f.$$

Legyen pl. a feladat a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}$$

határérték kiszámítása. Ekkor az

$$f(x):=\sqrt{x}\qquad(0\le x\le 1)$$

függvénnyel

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k/n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f(k/n),$$

így (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}.$$

xi) Az előbbi megjegyzésben mondott feladathoz hasonlóan „kezelhető" a következő is: számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2}$$

határértéket. Ui. most az

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

függvénnyel tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\frac{1}{n^2}\cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \frac{1}{n}\cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-(k/n)^2} = \frac{1}{n}\cdot \sum_{k=1}^{n} f(k/n),$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Láttuk (ld. 9.5.2.), hogy a helyettesítéssel való integrálást alkalmazva

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \cos x\, dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx =$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi - \sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

xii) Az improprius integrálok segítségével jól használható „eszközt" adhatunk egyes végtelen sorok konvergencia-vizsgálatához. Tegyük fel ui., hogy valamilyen monoton fogyó $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ függvényre létezik az $\int_1^{+\infty} f$ improprius integrál (ld. 9.4. iii) megjegyzés). Ekkor bármely $1 < n \in \mathbf{N}$ mellett az

$$f_n := f_{|[1,n]} \;\; , \;\; \tau_n := \{1, ..., n\} \in \mathcal{F}_1^n$$

jelölésekkel

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S(f_n, \tau_n) \ge \int_1^n f_n = \int_1^n f,$$

amiből

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ge \lim_{n\to\infty} \int_1^n f = \int_1^{+\infty} f$$

következik. Hasonlóan,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = f(1) + s(f_n, \tau_n) \leq$$

$$f(1) + \int_1^n f_n = f(1) + \int_1^n f \qquad (1 < n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \lim_{n\to\infty} \int_1^n f = f(1) + \int_1^{+\infty} f.$$

Mivel a feltételezésünk szerint létezik az $\int_1^{+\infty} f \in \mathbf{R}$ improprius integrál, ezért a $\sum (f(k))$ (nem-negatív tagú) végtelen sor konvergens, és

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f.$$

A fentiekből „mellesleg" az is kiderült, hogy ha

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f = +\infty,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = +\infty.$$

Legyen pl. $0 < \alpha \in \mathbf{R}$, és vizsgáljuk a $\sum (1/n^{\alpha})$ végtelen sort. Ha

$$f(x) := \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad (x \geq 1),$$

akkor tetszőleges $1 < b \in \mathbf{R}$ mellett (lévén az f függvény folytonos) létezik az $\int_1^b f$ integrál, és (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_1^b f = \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \ln b & (\alpha = 1) \\ \\ \dfrac{1}{1-\alpha} \cdot (b^{1-\alpha} - 1) & (\alpha \neq 1). \end{cases}$$

Mivel

$$\lim_{b\to+\infty} \ln b = \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = +\infty \qquad (0 < \alpha < 1),$$

ill.

$$\lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = -1 \qquad (\alpha > 1),$$

ezért

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & (0<\alpha\le 1) \\ \dfrac{1}{\alpha-1}<+\infty & (\alpha>1). \end{cases}$$

Más szóval $0<\alpha\le 1$ esetén a $\sum(1/n^\alpha)$ sor divergens, míg $\alpha>1$ kitevővel konvergens. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^\alpha(k+1)} \begin{cases} =+\infty & (0<\alpha\le 1) \\ <+\infty & (\alpha>1). \end{cases}$$

Ti. tetszőleges $b>1$ mellett (ld. 8.4. vii) megjegyzés és 9.3.5. Tétel)

$$\int_1^b \frac{1}{(x+1)\cdot\ln^\alpha(x+1)}\,dx = \int_2^{b+1}\frac{1}{x\cdot\ln^\alpha x}\,dx = \int_2^{b+1}\ln'\cdot\ln^{-\alpha} =$$

$$\begin{cases} \ln(\,\ln(b+1)) - \ln(\,\ln 2) & (\alpha=1) \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot(\,\ln^{-\alpha+1}(b+1)-\ln^{-\alpha+1}2) & (\alpha\ne 1). \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\lim_{b\to+\infty}\ln(\,\ln(b+1)) = \lim_{b\to+\infty}\ln^{-\alpha+1}(b+1) = +\infty \qquad (0<\alpha<1),$$

míg

$$\lim_{b\to+\infty}\ln^{-\alpha+1}(b+1) = 0 \qquad (\alpha>1),$$

az állításunkat igazoltuk.

xiii) Legyen

$$b_n := \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \qquad (1\le n\in\mathbf{N}),$$

ekkor a Wallis-formulából (ld. 9.5.6.) könnyen levezethető, hogy

$$\pi = \lim\left(\frac{b_n}{n}\right),$$

vagy ami ugyanaz:

$$\lim\left(\frac{4^n}{\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{n}}\right) = \sqrt{\pi}.$$

xiv) A határozott integrálok közelítő kiszámításával a *numerikus analízis* foglalkozik. Az ezzel kapcsolatos módszerek egy széles osztálya azon alapul, hogy ha a szóban forgó $f \in R[a,b]$ függvénynek valamilyen

$$f \approx g \in R[a,b]$$

közelítése ismert, akkor az $\int_a^b f$ integrálra az alábbi közelítést használjuk:

$$\int_a^b f \approx \int_a^b g.$$

Mindennek akkor „van értelme", ha az $\int_a^b g$-t „könnyebben" ki tudjuk számolni, mint az $\int_a^b f$-et. Továbbá a gyakorlat számára akkor „ér valamit" az $\int_a^b f \approx \int_a^b g$ közelítés, ha az $|\int_a^b f - \int_a^b g|$ „hibáról" is van információnk. Egy „kezdetleges" közelítés pl. az alábbi: legyen $c \in [a,b]$, a g függvény pedig a legegyszerűbb lépcsősfüggvény (ld. 9.2. xiii) megjegyzés), nevezetesen

$$g(x) := f(c) \qquad (a < x < b).$$

Ekkor

$$\int_a^b f \approx \int_a^b g = f(c) \cdot (b-a).$$

Ha pl. $f \in C^1[a,b]$, akkor a Lagrange-féle középérték-tétel (ld. 7.5.3. Tétel) szerint minden $x \in [a,b]$ mellett egy alkalmas, x és c közötti ξ_x-szel

$$f(x) - f(c) = f'(\xi_x) \cdot (x-c),$$

így

$$\left| \int_a^b f - f(c) \cdot (b-a) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f(c))\, dx \right| = \left| \int_a^b f'(\xi_x) \cdot (x-c)\, dx \right| \leq$$

$$\int_a^b |f'(\xi_x)| \cdot |x-c|\, dx \leq M \cdot \int_a^b |x-c|\, dx = M \cdot \frac{(c-a)^2 + (b-c)^2}{2},$$

ahol M az f' függvény egy korlátja: $|f'(t)| \leq M \ \ (t \in [a,b])$. Speciálisan a

$$c := \frac{a+b}{2}$$

választással

$$\left| \int_a^b f - f((a+b)/2) \cdot (b-a) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}.$$

Ha most $1 \leq n$ és $\tau_n := \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$, akkor a

$$c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \qquad (i = 0, ..., n-1)$$

választással legyen $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ az a lépcsősfüggvény, amelyre

$$g(x) := f(c_i) \qquad (x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, ..., n-1).$$

Ekkor az alábbi közelítő eljárást kapjuk (az ún. *téglánymódszert*):

$$\int_a^b f \approx \int_a^b g = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

amikor is az előbbiek szerint

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| =$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx - f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right) \right| \le$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx - f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| \le \frac{M}{4} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Legyen pl. a τ_n az egyenletes felosztás:

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, ..., n),$$

ekkor

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| \le \frac{M(b-a)^2}{4n}.$$

Megjegyezzük, hogy az $y_{\tau_n} := (c_0, ..., c_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ jelöléssel

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sigma(f, \tau_n, y_{\tau_n}).$$

Ezért (ld. 9.1.3. Tétel) $\delta_{\tau_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt bármely $f \in R[a,b]$ esetén

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \to \int_a^b f \qquad (n \to \infty).$$

xv) Az elemi integrálközelítő eljárások közül további illusztrációul röviden tárgyaljuk még az ún. *trapézmódszert*. Legyen ehhez adott az $f \in R[a,b]$ függvény, és jelöljük g-vel az $(a, f(a)), (b, f(b)) \in \mathbf{R}^2$ pontokat összekötő „húrt":

$$g(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x - a) \qquad (a \le x \le b).$$

Ekkor (ld. 9.3.5. Tétel)

$$\int_a^b g = \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \right) dx =$$

$$f(a) \cdot (b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a).$$

Ha itt $f \geq 0$, akkor az utóbbi szorzat (a g integrálja) geometriailag nem más (ld. 9.5.2.), mint az

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$$

trapéz területe. Tegyük fel, hogy $f \in C^2[a,b]$, és mutassuk meg, hogy az

$$\omega(x) := (x-a) \cdot (x-b) \qquad (a \leq x \leq b)$$

jelöléssel

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2} \cdot \omega(x) \qquad (a \leq x \leq b),$$

ahol $\xi_x \in [a,b]$ egy alkalmas (x-től függő) hely. Ez ui. $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ miatt nyilvánvaló, ha $x = a$, vagy $x = b$. Különben legyen $x \in (a,b)$, és

$$F(t) := f(t) - g(t) - \frac{f(x)-g(x)}{\omega(x)} \cdot \omega(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Ekkor $F(a) = F(x) = F(b) = 0$, így a Rolle-tétel (ld. 7.5.2. Tétel) miatt vannak olyan $u \in (a,x)$, $v \in (x,b)$ helyek, amelyekben

$$F'(u) = F'(v) = 0.$$

Innen megint csak a Rolle-tétel alapján adódik olyan $\xi_x \in (u,v)$, hogy

$$0 = F''(\xi_x) = f''(\xi_x) - \frac{f(x)-g(x)}{\omega(x)} \cdot \omega''(\xi_x) = f''(\xi_x) - 2 \cdot \frac{f(x)-g(x)}{\omega(x)},$$

amiből az állításunk már következik. Mindezek alapján a 9.3.4. Tételt felhasználva kapunk olyan $\xi \in [a,b]$ helyet, amellyel

$$\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f''(\xi_x) \cdot \omega(x)\, dx =$$

$$\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b \omega(x)\, dx = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b (x-a) \cdot (x-b)\, dx = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3.$$

Legyen M egy korlátja az f'' függvénynek: $|f''(x)| \leq M$ $(x \in [a,b])$, ekkor

$$\left| \int_a^b f - \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) \right| \leq \frac{M}{12} \cdot (b-a)^3.$$

Tekintsünk most egy $\tau_n = \{x_0, ..., x_n\}$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ felosztást, és alkalmazzuk a fentieket minden egyes $i \in \{0, ..., n-1\}$ esetén az $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ leszűkítésre. Ekkor az ún. *trapézmódszer* révén az alábbi közelítést kapjuk az $\int_a^b f$ integrálra:

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

ahol

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| \le$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \right| \le$$

$$\frac{M}{12} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^3 \le \frac{Mn}{12} \cdot \delta_{\tau_n}^3.$$

Ha pl.

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, 1, ..., n),$$

akkor

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2n} \cdot f(a) + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{2n} \cdot f(b),$$

és

$$\left| \int_a^b f - \left(\frac{b-a}{2n} \cdot f(a) + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{2n} \cdot f(b) \right) \right| \le \frac{M}{12n^2} \cdot (b-a)^3.$$

A téglánymódszerrel kapcsolatban mondottakhoz hasonlóan jegyezzük meg, hogy ha a $\tau_n = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ felosztás esetén

$$y_{\tau_n} := (x_0, ..., x_{n-1}) \ , \ \ z_{\tau_n} := (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor bármely $f \in R[a, b]$ függvényre

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma(f, \tau_n, y_{\tau_n}) + \sigma(f, \tau_n, z_{\tau_n})).$$

A 9.1.3. Tétel szerint $\delta_{\tau_n} \to 0$ $(n \to \infty)$ esetén

$$\sigma(f, \tau_n, y_{\tau_n}),\ \sigma(f, \tau_n, z_{\tau_n}) \to \int_a^b f \qquad (n \to \infty),$$

ezért egyúttal

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \to \int_a^b f \qquad (n \to \infty).$$

Speciálisan az egyenletes felosztásokkal adódó közelítésekre is

$$\frac{b-a}{2n}\cdot f(a)+\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{b-a}{2n}\cdot f(b)\to\int_a^b f \qquad (n\to\infty).$$

xvi) Számítsuk ki a trapézmódszer segítségével pl. az $\ln 2$-t 10^{-2} pontossággal. Ehhez vegyük észre először is, hogy

$$\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx.$$

Most tehát $[a,b]:=[1,2]$, ill. $f(x):=1/x$ $(1\le x\le 2)$. Következésképpen

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ ,\ \ f''(x)=\frac{2}{x^3}\qquad (1\le x\le 2),$$

tehát $|f''(x)|\le M:=2$. Az $[1,2]$ intervallum egyenletes felosztásaira vonatkozó hiba a xv)-beli hibaképlet szerint alkalmas $1\le n\in\mathbf{N}$ index mellett azt várjuk, hogy

$$\frac{M}{12n^2}\cdot(b-a)^3=\frac{2}{12n^2}=\frac{1}{6n^2}<10^{-2}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség $n=5$-re már igaz. Így (ld. xv)) az

$$\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\approx\frac{1}{10}\left(f(1)+2\cdot\sum_{i=1}^{4}f(x_i)+\frac{1}{10}f(2)\right)=$$

$$\frac{1}{10}\left(1+2\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{5}{5+i}+\frac{1}{2}\right)=0,15+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=0,6956349...$$

közelítés megfelelő. (Az $\ln 2$ egy több tizedesjegyre pontos értéke a következő: 0.69314718056.)

xvii) Emlékeztetünk az e definíciójára (ld. 3.10. i) megjegyzés), miszerint

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n.$$

A 4.1.5. Tétel szerint az e irracionális. Lássuk be most ugyanezt az idézett tétel bizonyításától eltérő módon is. Ehhez mutassuk meg először is azt, hogy minden $n\in\mathbf{N}$ esetén megadhatók olyan $a_n,b_n\in\mathbf{Z}$ (egész) számok, amelyekkel

$$\int_0^1 x^n e^x\,dx=a_n e+b_n.$$

Valóban, ha $n=0$, akkor a Newton-Leibniz-tétel (ld. 9.3.5. Tétel) szerint

$$\int_0^1 x^n e^x\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^1-e^0=e-1,$$

azaz az $a_0 := 1, b_0 := -1$ számok megfelelőek. A teljes indukcióra hivatkozva tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén igaz az állításunk, ekkor parciálisan integrálva (ld. 9.3.6. Tétel)

$$\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx = x^{n+1}e^x\,_{|x=1} - x^{n+1}e^x\,_{|x=0} - (n+1)\cdot\int_0^1 x^n e^x\,dx =$$

$$e - (n+1)(a_n e + b_n) = \Big(1-(n+1)a_n\Big)e - (n+1)b_n.$$

Innen „leolvasható", hogy az

$$a_{n+1} := 1-(n+1)a_n\ ,\ b_{n+1} := -(n+1)b_n$$

(nyilván egész) számokkal az állításunk $(n+1)$-re is teljesül.

Ugyanakkor azt sem nehéz bebizonyítani, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n e^x\,dx = 0.$$

Ui. (ismét csak az előbbi 9.3.5. Tétel alapján)

$$0 < \int_0^1 x^n e^x\,dx \le e\cdot\int_0^1 x^n\,dx = \frac{e}{n+1} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

amiből a szóban forgó állításunk már következik.

Minden „készen áll" ahhoz, hogy az e irracionális voltát igazoljuk. Ha ui. (indirekt módon feltételezve) $e \in \mathbf{Q}$, akkor $e > 0$ miatt valamilyen $0 < p, q \in \mathbf{N}$ számokkal $e = p/q$. Így a fentiek szerint

$$0 < a_n e + b_n = \frac{pa_n + qb_n}{q} = \int_0^1 x^n e^x\,dx \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

amiből

$$pa_n + qb_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Ez nyilván nem lehetséges, hiszen $1 \le pa_n + qb_n \in \mathbf{Z}\ \ (n \in \mathbf{N})$.

xviii) A 6.8. v) megjegyzésben utaltunk arra, hogy az e nem algebrai szám (ahol algebrai számon olyan valós számot értünk, amelyik gyöke valamilyen (nem azonosan nulla) egész szám együtthatós polinomnak). Mutassuk meg, hogy az e valóban rendelkezik ezzel a tulajdonsággal (röviden: az e *transzcendens* szám). Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy ez nem igaz, más szóval egy $n \in \mathbf{N}$ „kitevővel" és $a_0, ..., a_n \in \mathbf{Z}$, $a_n \ne 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^k = 0.$$

Nyilván $n \geq 1$, valamint feltehető, hogy $a_0 \neq 0$, különben legyen

$$r := \min\{k = 0, ..., n : a_k \neq 0\},$$

amikor is

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k = e^r \cdot \sum_{k=r}^{n} a_k e^{k-r} = e^r \cdot \sum_{k=0}^{n-r} a_{k+r} e^k =: e^r \cdot \sum_{k=0}^{n-r} b_k e^k.$$

Tehát $\sum_{k=0}^{n-r} b_k e^k = 0$, és itt már $b_0 = a_r \neq 0$.

Ha a P függvény (tetszőleges) polinom, akkor – a fokszámát s-sel $(s \in \mathbf{N})$ jelölve – $(s+1)$-szeri egymás utáni parciális integrálással (ld. 9.3.6. Tétel)

$$\int_0^k P(x) \cdot e^{-x}\, dx = \sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(0) - \left(\sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(k) \right) \cdot e^{-k} \qquad (k = 0, ..., n).$$

Ezért

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \cdot \int_0^k P(x) \cdot e^{-x}\, dx =$$

$$- \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(k) + \sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(0) \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k e^k = - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(k).$$

Ugyanakkor alkalmas P polinommal elérhető, hogy az előbbi egyenlőségben a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \cdot \int_0^k P(x) \cdot e^{-x}\, dx$$

összeg a $(-1, 1)$ intervallumban van, míg a

$$- \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P^{(j)}(k)$$

kettős összeg nullától különböző egész szám, ami az egyenlőségük miatt nyilván nem lehet.

Mindehhez először is vegyük észre, hogy ha az R egész-együtthatós polinom, és

$$T_m(x) := \frac{x^m \cdot R(x)}{m!} \qquad (x \in \mathbf{R}, 1 \leq m \in \mathbf{N}),$$

akkor a $T_m^{(k)}(0)$ $(k \in \mathbf{N})$ deriváltak egész számok. Ha ui. itt $k < m$, akkor a Leibniz-szabály (ld. 7.7.) szerint

$$T_m^{(k)}(x) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot R^{(k-j)}(x) \cdot m \cdot \ldots \cdot (m-j+1) \cdot x^{m-j} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így nyilván $T_m^{(k)}(0)=0$. Ha $k\geq m$, akkor ugyanezen „szabály" alapján

$$T_m^{(k)}(x)=\frac{1}{m!}\cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{k}{j}\cdot R^{(k-j)}(x)\cdot m\cdot\ldots\cdot(m-j+1)\cdot x^{m-j}\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

amiből

$$T_m^{(k)}(0)=\frac{1}{m!}\cdot\binom{k}{m}\cdot R^{(k-m)}(0)\cdot m!=\binom{k}{m}\cdot R^{(k-m)}(0)\in\mathbf{Z}.$$

Innen az is rögtön adódik, hogy minden $a\in\mathbf{Z}$ esetén az

$$F_m(x):=\frac{(x-a)^m\cdot R(x)}{(m-1)!}\qquad(x\in\mathbf{R},1\leq m\in\mathbf{N})$$

függvényre az

$$F_m^{(i)}(a)\qquad(i\in\mathbf{N})$$

deriváltak m-mel osztható egész számok. Ti. az

$$S_m(x):=\frac{x^m\cdot R(x+a)}{m!}\qquad(x\in\mathbf{R})$$

jelöléssel

$$F_m(x)=m\cdot S_m(x-a)\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

ahol – lévén az $\mathbf{R}\ni x\mapsto R(x+a)$ leképezés egész-együtthatós polinom – az előbbiek szerint az $S_m^{(i)}(0)$-k $(i\in\mathbf{N})$ egész számok. Világos, hogy

$$F_m^{(i)}(a)=m\cdot S_m^{(i)}(0)\qquad(i\in\mathbf{N}).$$

Legyen már most az előbbi m olyan prímszám, amelyre $m>\max\{|a_0|,n\}$, és

$$P(x):=P_m(x):=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-k)^m\qquad(x\in\mathbf{R}).$$

Ekkor a

$$P_m(x)=\frac{(x-k)^m x^{m-1}\cdot\prod_{k\neq j=1}^{n}(x-j)^m}{(m-1)!}\qquad(x\in\mathbf{R},k=1,...,n)$$

felbontásra tekintettel a

$$P_m^{(i)}(k)\qquad(i\in\mathbf{N},k=1,...,n)$$

deriváltak is m-mel osztható egész számok. Nem nehéz belátni, hogy

$$m-1\neq i\in\mathbf{N}$$

mellett $P_m^{(i)}(0)$ is m-mel osztható egész szám. Ui. (a P fokszámát s-sel jelölve: $s = mn + m - 1$) megfelelő

$$c_m, ..., c_s \in \mathbf{Z}\ ,\ c_{m-1} := \Big((-1)^n \cdot n!\Big)^m$$

együtthatókkal

$$P_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \sum_{j=m-1}^{s} c_j x^j \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

így

$$P_m^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & (i \leq m-2 \text{ vagy } i > s) \\ \Big((-1)^n \cdot n!\Big)^m & (i = m-1) \\ c_i \cdot m \cdot (m+1) \cdot \ldots \cdot i & (m \leq i \leq s). \end{cases}$$

Az is „látszik", hogy

$$P_m^{(m-1)}(0) = \Big((-1)^n \cdot n!\Big)^m$$

nem osztható m-mel, mivel az m prímszám, és $n < m$. Ugyanez igaz a_0-ra is, hiszen $|a_0| < m$. Továbbá

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P_m^{(j)}(k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P_m^{(j)}(k) + a_0 \cdot \sum_{j=0}^{s} P_m^{(j)}(0) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} P_m^{(j)}(k) + a_0 \cdot \sum_{m-1 \neq j = 0}^{s} P_m^{(j)}(0) + a_0 \cdot P_m^{(m-1)}(0) =: A + a_0 \cdot P_m^{(m-1)}(0),$$

ahol az $A, a_0 \cdot P_m^{(m-1)}(0) \in \mathbf{Z}$ számok közül az A osztható m-mel, az $a_0 \cdot P_m^{(m-1)}(0)$ nem. Ezért az $A + a_0 \cdot P_m^{(m-1)}(0)$ egész szám nem osztható m-mel, emiatt nullától különböző.

Viszont

$$|P_m(x)| \leq \frac{n^{(n+1)\cdot m}}{(m-1)!} =: \frac{q^m}{(m-1)!} \qquad (0 \leq x \leq n),$$

következésképpen a

$$C := n(n+1)e^n \cdot \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|\}$$

jelöléssel

$$\alpha_m := \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot e^k \cdot \int_0^k P_m(x) \cdot e^{-x}\, dx \right| \leq C \cdot \frac{q^m}{(m-1)!} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Ezért van olyan $m \in \mathbf{N}$, amellyel $\alpha_m \in [0, 1)$.

xix) Részben az előző megjegyzésben követett módszerrel most lássuk be azt, hogy a π (ld. 6.7.) irracionális szám. Legyen ehhez rögzített $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett

$$T_n(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és tekintsük az alábbi integrálokat:

$$J_{n,r} := \int_0^1 T_n(x) \cdot \sin(rx)\, dx \qquad (r > 0).$$

A xviii) megjegyzésben mondottak alapján (az $R(x) := (1-x)^n \ \ (x \in \mathbf{R})$ választással) a $T_n^{(k)}(0) \quad (k \in \mathbf{N})$ deriváltak egész számok. Mivel

$$T_n(x) = T_n(1-x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért (ld. 7.3.2. Tétel)

$$T_n^{(k)}(0) = (-1)^k \cdot T_n^{(k)}(1) \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

tehát a $T_n^{(k)}(1)$-ek is egész számok. Ezek után $2n$-szer parciálisan integrálva (ld. 9.3.6. Tétel)

$$J_{n,r} = \int_0^1 T_n(x) \cdot \sin(rx)\, dx =$$

$$-\frac{1}{r} \cdot T_n(x) \cdot \cos(rx)_{|x=1} + \frac{1}{r} \cdot T_n(x) \cdot \cos(rx)_{|x=0} + \frac{1}{r} \int_0^1 T_n'(x) \cdot \cos(rx)\, dx =$$

$$\frac{1}{r} \int_0^1 T_n'(x) \cdot \cos(rx)\, dx = \frac{T_n'(1) \cdot \sin r}{r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \int_0^1 T_n''(x) \cdot \sin(rx)\, dx =$$

$$\frac{T_n'(1) \cdot \sin r}{r^2} + \frac{T_n''(1) \cdot \cos r - T_n''(0)}{r^3} - \frac{1}{r^3} \cdot \int_0^1 T_n'''(x) \cdot \cos(rx)\, dx =$$

$$\frac{T_n'(1) \cdot \sin r}{r^2} + \frac{T_n''(1) \cdot \cos r - T_n''(0)}{r^3} - \ldots + \frac{T_n^{(2n)}(1) \cdot \cos r - T_n^{(2n)}(0)}{r^{2n+1}}.$$

Ha itt $r \in (0, \pi] \cap \mathbf{Q}$, és a $\sin r, \cos r$ számok mindegyike racionális lenne, akkor (közös nevezőre hozva az $1/r, \sin r, \cos r$ számokat, és $0 < q_r$-rel jelölve a közös nevezőjüket) egy alkalmas A_{nr} egész számmal

$$J_{nr} = \frac{A_{nr}}{q_r^{2n+2}}.$$

Mivel a $0 < x < 1$ helyeken $T_n(x) > 0$, és (ld. 6.7.) $\sin(rx) > 0$, ezért $J_{nr} > 0$. Következésképpen $A_{nr} \geq 1$, így

$$J_{nr} \geq \frac{1}{q_r^{2n+2}} \qquad \Big(r \in (0, \pi] \cap \mathbf{Q}\Big).$$

Világos azonban, hogy

$$0 \leq T_n(x) \cdot \sin(rx) \leq \frac{1}{n!} \qquad \Big(x \in [0,1], r \in (0,\pi] \cap \mathbf{Q}\Big),$$

ezért $J_{nr} \leq 1/n!$, és így

$$\frac{1}{q_r^{2n+2}} \leq J_{nr} \leq \frac{1}{n!} \qquad \Big(r \in (0,\pi] \cap \mathbf{Q}\Big).$$

Ez viszont nem lehet, hiszen $n!/q_r^{2n+2} \to +\infty \quad (n \to \infty)$.

Más szóval $r \in (0,\pi] \cap \mathbf{Q}$ esetén a $\sin r, \cos r$ számok valamelyike irracionális. Speciálisan, ha $\pi \in \mathbf{Q}$ teljesülne, akkor a $\sin \pi = 0, \cos \pi = -1$ számok (ld. 6.7.) valamelyike is irracionális lenne, ami nem igaz. Tehát $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Arcképcsarnok

A jegyzetben az alábbi matematikusok név szerint is említésre kerültek:

- **Archimedes**
  (Syracuse, i.e. 287-i.e. 212)
- Jean Le Rond **d'Alembert**
  (Párizs, 1717. XI. 17. - Párizs, 1783. X. 29.)
- Stefan **Banach**
  (Krakkó, 1892. III. 30. - Lvov, 1945. VIII. 31.)
- Jacob (Jaques) **Bernoulli**
  (Bázel, 1654. XII. 27. - Bázel, 1705. VIII. 16.)
- Bernard Placidus Johann Nepomuk **Bolzano**
  (Prága, 1781. X. 5. - Prága, 1848. XII. 18.)
- Pierre Ossian **Bonnet**
  (Montpellier, 1819. XII. 22. - Párizs, 1892. VI. 22.)
- Viktor Jakovlevics **Bunyakovszkij**
  (Bar, 1804. XII. 16. - Szentpétervár, 1889. XII. 12.)
- Renato **Cacciopoli**
  (Nápoly, 1904. I. 20. - Nápoly, 1959. V. 8.)
- Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor**
  (Szentpétervár, 1845. III. 3. - Halle, 1918. I. 6.)
- Augustin Louis **Cauchy**
  (Párizs, 1789. VIII. 21. - Sceaux, 1857. V. 23.)
- Jean Gaston **Darboux**
  (Nimes, 1842. VIII. 14. - Párizs, 1917. II. 23.)

- Julius Wilhelm Richard **Dedekind**
  (Braunschweig, 1831. X. 6. - Braunschweig, 1916. II. 12.)
- Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet**
  (Düren, 1805. II. 13. - Göttingen, 1859. V. 5.)
- Leonhard **Euler**
  (Bázel, 1707. IV. 15. - Bázel, 1783. IX. 18.)
- Jacques Salomon **Hadamard**
  (Versailles, 1865. XII. 8. - Párizs, 1963. X. 17.)
- Heinrich Eduard **Heine**
  (Berlin, 1821. III. 16. - Halle, 1881. X. 21.)
- Guillaume Francois Antoine Marquis de **L'Hospital**
  (Párizs, 1661. ? - Párizs, 1704. II. 2.)
- Johan Ludwig William V. **Jensen**
  (Nakskov, 1859. V. 8. - Koppenhága, 1925. III. 5.)
- Joseph-Louis **Lagrange**
  (Turin, 1736. I. 25. - Párizs, 1813. IV. 10.)
- Henri Léon **Lebesgue**
  (Beauvais, 1875. VI. 28. - Párizs, 1941. VII. 26.)
- Gottfried Wilhelm von **Leibniz**
  (Lipcse, 1646. VII. 1. - Hannover, 1716. XI. 14.)
- Colin **Maclaurin**
  (Kilmodan, 1698. II. ? - Edinburgh, 1746. VI. 14.)
- Franz Carl Joseph **Mertens**
  (Schroda, 1840. III. 20. - Bécs, 1927. III. 5.)
- Sir Isaac **Newton**
  (Woolsthorpe, 1643. I. 4. - London, 1727. III. 31.)

- Giuseppe **Peano**
  (Cuneo, 1858. VIII. 27. - Turin, 1932. IV. 20.)
- **Pithagoras**
  (Samos, i.e. 569-i.e. 475)
- Georg Friedrich Bernhard **Riemann**
  (Breselenz, 1826. IX. 17. - Selasca, 1866. VII. 20.)
- Michel **Rolle**
  (Ambert, 1652. IV. 21. - Párizs, 1719. XI. 8.)
- Oscar Xaver **Schlömilch**
  (Weimar, 1823. IV. 13. - Drezda, 1901. II. 7.)
- Ernst **Steinitz**
  (Laurahütte, 1871. VI. 13. - Kiel, 1928. IX. 29.)
- Brook **Taylor**
  (Edmonton, 1685. VIII. 18. - Somerset House, 1731. XII. 29.)
- Andrei Nyikolajevics **Tyihonov**
  (Gzhatska, 1906. X. 30. - Moszkva, 1993. X. 7.)
- Samuel Giuseppe Vito **Volterra**
  (Ancona, 1860. V. 3. - Róma, 1940. X. 11.)
- Bartel Leendert **van der Waerden**
  (Amszterdam, 1903. II. 2. - Zürich, 1996. I. 12.)
- John **Wallis**
  (Ashford, 1616. XI. 23. - Oxford, 1703. X. 28.)
- Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass**
  (Ostenfelde, 1815. X. 31. - Berlin, 1897. II. 19.)

Archimedes

i.e. 287-i.e. 212

Jean R. d'Alembert

1717-1783

Stefan Banach

1892-1945

Jacob Bernoulli

1654-1705

Bernard P. Bolzano

1781-1848

Pierre O. Bonnet

1819-1892

Viktor J. Bunyakovszkij

1804-1889

Renato Cacciopoli

1904-1959

Georg F. Cantor

1845-1918

Augustin L. Cauchy

1789-1857

Jean G. Darboux

1842-1917

Julius W. Dedekind

1831-1916

Johann P. Dirichlet

1805-1859

Leonhard Euler

1707-1783

Jacques S. Hadamard

1865-1963

Heinrich E. Heine

1821-1881

Guillaume F. de L'Hospital

1661-1704

Johan L. Jensen

1859-1925

Joseph-L. Lagrange

1736-1813

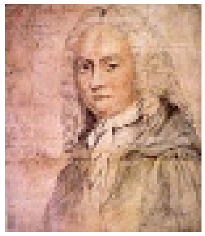
Henri L. Lebesgue

1875-1941

Gottfried W. von Leibniz

1646-1716

Colin Maclaurin



1698-1746

Franz C. J. Mertens

1840-1927

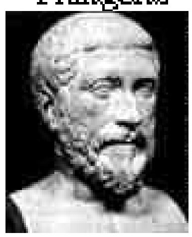
Isaac Newton

1643-1727

Giuseppe Peano

1858-1932

Pithagoras



i.e. ~569-i.e.~475

Georg F. Riemann

1826-1866

Michel Rolle

1652-1719

Oscar X. Schlömilch

1823-1901

Ernst Steinitz

1871-1928

Brook Taylor

1685-1731

Andrei N. Tyihonov

1906-1993

Samuel G. Volterra

1860-1940

Bartel L. van der Waerden

1903-1996

John Wallis

1616-1703

Karl T. Weierstrass

1815-1897

Tárgymutató