

Gyakorló feladatok I.

Analízis 1.

Programtervező informatikus szak

A,B, C szakirány

2015-2016. tanév tavaszi félév

2016. január

1. gyakorlat

Egyenlőtlenségek

■ Szükséges ismeretek (1. Matematikai alapozás)

- Teljes indukció.
- Kijelentések, kvantorok.

■ Feladatok

1. **A Bernoulli-egyenlőtlenség:** Minden $h \geq -1$ valós számra és minden $n = 1, 2, \dots$ természetes számra

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$ vagy $n = 1$.

2. **A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség:** Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és a_1, a_2, \dots, a_n tetszés szerinti *nemnegatív* valós számok. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. Mutassa meg, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ számra

$$(a) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$(b) \quad 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

■ Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg a következő kijelentések tagadását, és döntse el, hogy az állítások és tagadásuk közül melyek igazak.

$$(a) \quad \exists y \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } x < y^2,$$

$$(b) \quad \exists y \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathbb{R}^- \text{ esetén } x < y^2,$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ és } \exists y \in \mathbb{R}, \text{ hogy } x^2 + y^2 = 1.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

2. Igazolja, hogy ha az a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számok szorzata 1, akkor

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Mikor van itt egyenlőség?

3. Mutassa meg, hogy minden pozitív a, b, c valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$8abc \leq (a+b) \cdot (b+c) \cdot (a+c) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

4. Bizonyítsa be, hogy minden $a \geq -1/2$ valós számra fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség.

5. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és a_1, a_2, \dots, a_n tetszőleges pozitív valós számok, akkor

$$(a) \quad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n;$$

$$(b) \quad a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}.$$

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

6. Bizonyítsa be, hogy

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

2. gyakorlat

Számhalmaz szuprémuma és infimuma

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit mond ki a *teljességi axióma*?
- Fogalmazza meg a szuprémum elvet.
- Mi a szuprémum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$.
- Mi az infimum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$.
- Fogalmazza meg az Archimedes-tételt.
- Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

■ Feladatok

• Számhalmaz korlátossága, maximuma és minimuma

1. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről *nem* korlátos.
2. Bizonyítsa be, hogy az $A := \{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$ halmaznak nincs maximuma.

• Számhalmaz szuprémuma és infimuma

3. Van-e az alábbi halmazoknak minimuma, illetve maximuma? Határozza meg a halmaz szuprémumát és infimumát.

(a) $[-1, 1]$, (b) $(-1, 1]$.

4. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1 \right\}$,

(b) $A := \left\{ \frac{n+1}{2n+3} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(c) $A := \left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} : x \in [-2, +\infty) \right\}$,

(d) $A := \{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} : 0 \leq x \in \mathbb{R} \}$?

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Házi feladatok

1. Van-e az alábbi halmazoknak minimuma, illetve maximuma? Határozza meg a halmaz szuprémumát és infimumát.

(a) $(-1, 1]$, (b) $(-1, 1)$.

2. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1 \right\}$,

(b) $A := \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(c) $A := \left\{ \frac{5x+7}{2x+1} \in \mathbb{R} : x \in [0, +\infty) \right\}$,

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Gyakorló feladatok

1. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \frac{|x|-2}{|x|+2} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $A := \left\{ \frac{2x^2+1}{5x^2+2} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $A := \left\{ \frac{n^2+n+2}{3n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(d) $A := \left\{ \frac{2m-1}{3n+2} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$,

(e) $A := \left\{ \frac{2^{n+2}+9}{3 \cdot 2^n+2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(f) $A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} : 0 < x \in \mathbb{R} \right\}$?

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

2. Korlátos-e alulról, illetve felülről az

$$A := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1, 0 < y < x \right\}$$

halmaz? Ha igen, akkor számítsa ki $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

3. **$\sqrt{2}$ létezése.** Mutassa meg, hogy az $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ nemüres, felülről korlátos halmaz és a $\xi := \sup A$ jelöléssel $\xi^2 = 2$. A ξ számot a 2 valós szám *négyzetgyökének* nevezzük, és $\sqrt{2}$ -vel jelöljük. Bizonyítsa be azt is, hogy $\sqrt{2}$ egy irracionális szám, és határozza meg az első három tizedesjegyet.

4. Bizonyítsa be, hogy a szuprémum-elvből következik a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.
5. Igazolja, hogy az archimédészi és a Cantor-tulajdonság együtteséből levezethető a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.

3. gyakorlat

Függvények

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit jelent az $f : A \rightarrow B$ szimbólum?
- Mit jelent az $f \in A \rightarrow B$ szimbólum?
- Hogyan értelmezzük halmaznak függvény által létesített *képét*?
- Definiálja halmaznak függvény által létesített *ősképét*?
- Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?
- Definiálja az inverz függvényt.
- Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

■ Feladatok

• Halmaz függvény által létesített képe és ősképe

1. Legyen $f(x) := 3 + 2x - x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Határozza meg a $C := \{0\}$ halmaz f által létesített képét (vagyis az $f[C]$ halmazt) és ősképét (azaz $f^{-1}[C]$ -t). Milyen $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $f[A]$ egyelemű halmaz?
2. Írja fel intervallumokkal az $\text{abs}^{-1}[(1, 4)]$ halmazt.

• Függvények kompozíciója

3. Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$(a) \quad f(x) := \sqrt{x+1} \quad (x \in [-1, +\infty)), \quad g(x) := x^2 - 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(b) \quad f(x) := \frac{1}{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}), \quad g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

• Függvény inverze

4. Igazolja, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{1 + |x - 1|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény *nem* invertálható.

5. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{x+1}{x-2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$$

függvény invertálható. Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$)?

■ Házi feladatok

1. Határozza meg a $C := [0, 1]$ halmaznak az

$$f(x) := 3x^2 - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét és ősképet. Szemléltesse a függvényt és a szóban forgó halmazokat.

2. Határozza meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \quad \text{és} \quad g(u) := u^2 \quad (u \in \mathbb{R}).$$

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvény invertálható. Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$)?

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f(x) := \sqrt{|5x-2|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad D := (-1, 2].$$

Határozza meg az $f^{-1}[D]$ halmazt.

2. Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 3x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \sqrt{18-x} & \text{ha } (1 < x < 2) \end{cases}$$

függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

4. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ \alpha x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

függvény invertálható? Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$)?

5. Legyen $f(x) := x^2$ ($x > 0$) és $g(x) := x + 1$ ($x > 0$). Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

6. Igazolja, hogy az $f : A \rightarrow B$ függvényre az

$$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

7. Igazolja, hogy az $f : A \rightarrow B$ függvényre az

$$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

8. Legyen $f : A \rightarrow B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy minden $D \subset B$ halmazra $f[f^{-1}[D]] \subset D$. Igazolja azt is, hogy az $f[f^{-1}[D]] = D$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $D \subset B$ halmazra, ha $\mathcal{R}_f = B$.

4. gyakorlat

Sorozat konvergenciája

■ Szükséges ismeretek

- Mikor mondjuk azt, hogy egy valós sorozat felülről (alulról) korlátos?
- Mit jelent az, hogy egy valós sorozat korlátos?
- Mikor mondjuk azt, hogy egy valós sorozat monoton (szigorúan monoton) növekedő?
- Mikor nevezünk egy (x_n) valós sorozatot *konvergensnek*?
- Definiálja egy konvergens sorozat határértékét.
- Mi a részsorozat definíciója?
- Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatairól?

■ Feladatok

• Sorozatok korlátossága és monotonitása

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x_n &:= \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), & \text{(b)} \quad x_n &:= \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \text{(c)} \quad x_n &:= \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}), & \text{(d)} \quad x_n &:= \frac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \text{(e)} \quad x_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

• Határérték meghatározása a definíció alapján

2. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

$$\text{(a)} \quad \lim \left(\frac{1}{n^2 - 3} \right) = 0, \quad \text{(b)} \quad \lim \left(\frac{n}{2n - 3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Adott $\varepsilon > 0$ számhoz tehát határozzon meg egy n_0 küszöbindexet.

3. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

$$\text{(a)} \quad \left(\frac{1 + n^2}{2 + n + 2n^2} \right), \quad \text{(b)} \quad (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}).$$

■ Házi feladatok

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

$$\text{(a)} \quad x_n := n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{(b)} \quad x_n := \frac{2 - 7n}{3n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

$$\lim \left(\frac{3n+4}{2n-1} \right) = \frac{3}{2}.$$

Adott $\varepsilon > 0$ számhoz tehát határozzon meg egy n_0 küszöbindexet.

3. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

$$(a) \left(\frac{3n^2 - 1}{2n^2 + n + 3} \right), \quad (b) (\sqrt{n^2 + 1} - n).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

$$(a) x_n := \frac{3n-7}{2^{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(b) x_n := \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

$$(c) x_n := \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

2. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

$$(a) \left(\frac{2n^3 + 10}{n^3 + n^2 + n + 1} \right),$$

$$(b) \left(\frac{n - \sqrt{n} - 1}{n + \sqrt{n} + 1} \right),$$

$$(c) \left(\sqrt{\frac{n^3 + n^2 - 2n}{n^3 + 3}} \right).$$

5. gyakorlat

Konvergens sorozat határértékének kiszámítása

■ Szükséges ismeretek

- Mit tud mondani korlátos sorozat és nullasorozat szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?
- Milyen állításokat ismer az alábbi sorozatok konvergenciájával kapcsolatosan:

$$(q^n), (n^k \cdot q^n), \left(\frac{a^n}{n!}\right)?$$

■ Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$(a) \left(\frac{n^3 - 3n^2 + n - 1}{1 - 2n^3 + n} \right),$$
$$(b) \left(\frac{(2-n)^7 + (2+n)^7}{(n^2 + n + 1) \cdot (2n + 1)^5} \right).$$

2. Igazolja, hogy ha $\alpha := \lim(x_n) \implies |\alpha| = \lim(|x_n|)$.

3. Tegyük fel, hogy $x_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) és $\alpha := \lim(x_n)$. Igazolja, hogy

(a) $\alpha \geq 0$,

(b) a $(\sqrt{x_n})$ sorozat is konvergens, és $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{\alpha}$.

4. Számítsa ki az alábbi határértéket:

$$\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right).$$

5. A nevezetes (q^n) , $(n^k \cdot q^n)$, $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ sorozatok határértékéről tanultakat is felhasználva, számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim\left(\frac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}}\right); \quad (b) \lim\left(\frac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n}\right) \quad ;$$

$$(c) \lim\left(\sqrt{\frac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}}\right); \quad (d) \lim\left(\frac{(-2)^n + n}{n! + 3^n}\right) \quad .$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$(a) \left(\frac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3} \right), \quad (b) \left(\frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1} \right).$$

2. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

(a) $\left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - 2n\right);$ (b) $\left(n(n - \sqrt{n^2 + 1})\right).$

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\left(\sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}}\right),$

(b) $\left(\frac{n - \sqrt{n} - 1}{n + \sqrt{n} + 1}\right),$

(c) $\lim \left(\frac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n}\right),$

(d) $\lim \left(\frac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n}\right),$

(e) $\lim \left(\sqrt{\frac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}}\right),$

(f) $\lim \left(\frac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n}\right).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

(a) $\left(\frac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n}\right);$

(b) $\left(\frac{n + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 3}}\right);$

(c) $\left(\frac{n + \sqrt{n^4 + 3}}{2n^2 + 5}\right).$

2. Határozza meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2}) = 1$$

legyen.

6. gyakorlat

Sorozat (tágabb értelemben vett) határértéke

■ Szükséges ismeretek

- Mit jelent az, hogy az (x_n) sorozat $(+\infty)$ -hez tart?
- Mi a definíciója annak, hogy az (x_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?
- Mikor mondja azt, hogy az (x_n) sorozatnak *van határértéke*?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

■ Feladatok

1. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy $\lim (n^2 + 3) = +\infty$.
2. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

$$(a) \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} \right), \quad (b) \left(\frac{2 - 3n^2}{n + 1} \right).$$

3. Mutassa meg, hogy ha (x_n) pozitív tagú nullasorozat, akkor $\lim \left(\frac{1}{x_n} \right) = +\infty$.

4. Legyen

$$P(x) := a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ (x \in \mathbb{R}, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

egy pontosan r -edfokú polinom (azaz $a_r \neq 0$). Mutassa meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_r > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a_r < 0. \end{cases}$$

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$(a) \left(\frac{n^7 + n - 12}{1 - n^2 + 3n} \right), \quad (b) \left(\frac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4} \right), \\ (c) \left(n^2 (n - \sqrt{n^2 + 1}) \right).$$

6. Az $a \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg a következő határértékeket:

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - a \cdot n \right).$$

■ Házi feladatok

1. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy $\lim (2 - n^3) = -\infty$.
2. Sejtse meg az alábbi sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

$$\left(\frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right).$$

3. Mutassa meg, hogy ha (x_n) negatív tagú nullasorozat, akkor $\lim \left(\frac{1}{x_n} \right) = -\infty$.

■ Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$, $b_0, \dots, b_s \in \mathbb{R}$, $b_s \neq 0$ számok, és legyen

$$R_n := \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_r n^r}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_s n^s}$$

olyan $n \in \mathbb{N}$ indexekre, amelyekre a nevező nem nulla.

Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \begin{cases} \frac{a_r}{b_s}, & \text{ha } r = s \\ 0, & \text{ha } r < s \\ +\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s > 0 \\ -\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s < 0. \end{cases}$$

Gyakorló feladatok II.

Analízis 1.

Programtervező informatikus szak

A,B, C szakirány

2015-2016. tanév tavaszi félév

2016. március

7. gyakorlat

Sorozatok határértékének kiszámolása

■ Szükséges ismeretek

- Milyen állítást ismer monoton sorozatok határértékéről?
- Hogyan szól a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
- Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?
- Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?
- Milyen állítást ismer az $(n^k \cdot q^n)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatban, ahol k és q valós paraméterek?
- Milyen állítást ismer az $(a^n/n!)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatban, ahol a valós paraméter?
- Mi az e szám definíciója?
- Milyen konvergenciatételt tanult az $(\sqrt[n]{a})$ ($a > 0$) sorozatról?
- Milyen állítást ismer az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat konvergenciájáról?
- Mi a határértéke az $(\sqrt[n]{n!})$ sorozatnak?

■ Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a *nemnegatív tagú* (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\lim(\sqrt[n]{a_n}) = 1.$$

2. Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük:

$$(a) \left(\sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1}\right), \quad (b) \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}}\right), \quad (c) \left(\sqrt[n]{\frac{3^n}{n!} + 2^n}\right)$$

3. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

$$(a) \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right), \quad (b) \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right), \quad (c) \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\right).$$

4. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow (0, +\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

5. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

$$(a) \left(\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}\right), \quad (b) \left(\left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n}\right), \quad (c) \left(\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3}\right).$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \left(\sqrt[n]{n^2 + 100} \right), & \text{(b)} \left(\sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 7^n} \right), \\ \text{(c)} \left(\left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{6n+5} \right); & \text{(d)} \left(\left(\frac{2n+3}{3n+1} \right)^{n-5} \right). \end{array}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozat határértékét:

$$\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right).$$

2. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozat

$$\text{(a) nullasorozat} \qquad \text{(b) nem konvergens.}$$

Vizsgálja meg határérték szempontjából az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozatot.

3. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \left(\sqrt[n]{\sqrt{n} + 2} \right), & \\ \text{(b)} \left(\sqrt[n]{a^n + b^n} \right) \quad (0 \leq a, b \in \mathbb{R}), & \\ \text{(c)} \left(\left(\frac{n^3 - 3}{n^3 + 2} \right)^{n^3} \right), & \\ \text{(d)} \left(\left(\frac{4n+3}{5n} \right)^{5n^2} \right). & \end{array}$$

8. gyakorlat

Rekurzív sorozat határértéke

■ Szükséges definíciók és tételek

- Milyen állítást ismer monoton sorozatok határértékéről?
- Hogyan szól a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
- Mit állít a Cauchy-féle konvergenciakritérium?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?
- Milyen állítást ismer az $(a^n/n!)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatosan, ahol a valós paraméter?
- Milyen állítást ismer monotonitás és korlátosság szempontjából az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sorozatról?

- Milyen állítást ismer az $(\sqrt[n]{n!})$ sorozat határértékével kapcsolatosan?
- Fogalmazza meg pozitív valós szám m -edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.

■ Feladatok

1. Legyen

$$a_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}, \quad 1 \leq n \in \mathbb{N}, \quad \text{és itt } n \text{ darab gyökvonás szerepel.}$$

Adjon meg rekurzív összefüggést az (a_n) sorozat tagjai között, és ennek alapján számítsa ki $\lim(a_n)$ -et.

2. Legyen

$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2\cdots}}}, \quad 1 \leq n \in \mathbb{N}, \quad \text{és itt } n \text{ darab gyökvonás szerepel.}$$

Adjon meg rekurzív összefüggést az (a_n) sorozat tagjai között, és ennek alapján számítsa ki $\lim(a_n)$ -et.

3. Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az

$$a_0 := \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, és ekkor mi a határértéke?

4. Milyen $\alpha \geq 0$ valós paraméter esetén konvergens az

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha konvergens, akkor mi a határértéke?

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_0 := \sqrt{3}, a_{n+1} := \sqrt{3 + 2a_n} \quad (n \in \mathbb{N});$

(b) $a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^3 + 1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_0 := \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + \alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét.

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Igazolja, hogy

$$a_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. Számítsa ki az

$$a_0 := 6, \quad a_{n+1} := 5 - \frac{6}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét.

3. Konvergens-e az

$$0 \leq a_0 \leq 1, \quad a_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

4. A nemnegatív $\alpha < \beta$ valós számokból kiindulva a következőképpen képezzük az (a_n) és a (b_n) sorozatot:

$$a_0 := \alpha, \quad b_0 := \beta \text{ és } a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy a sorozatok konvergenssek, és a határértékük egyenlő. Lényeges-e az $\alpha < \beta$ feltétel? (C. F. Gauss nyomán ezt a közös értéket az α és a β számok **számtani-mértani közepének** nevezzük.)

9. és 10. gyakorlat

Végtelen sorok

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?
- Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?
- Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?
- Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor konvergenciájával kapcsolatban?
- Mondjon *szükséges* feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen.
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat*.
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot*.
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányadoskritériumot*.
- Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

■ Feladatok

1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergenssek, és határozza meg az összegüket:

(a) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2^n};$

(b) $\sum_{n=10} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}};$

(c) $\sum_{n=1} \frac{1}{4n^2 - 1};$

(d) $\sum_{n=1} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}.$

2. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ és határozza meg a következő sorösszeget:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n.$$

3. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum_{n=1} \sqrt[n]{0,1};$

(b) $\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1};$

(c) $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}};$

(d) $\sum_{n=1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2}.$

4. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1};$

(b) $\sum_{n=1} \frac{1}{1+n^2};$

(c) $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

(d) $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$

5. Az alábbi sorok közül melyek konvergensak?

(a) $\sum_{n=1} \frac{1}{n!};$

(b) $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n;$

(c) $\sum_{n=1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$

(d) $\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n + 3^n};$

(e) $\sum_{n=0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1};$

(f) $\sum_{n=1} \frac{2n+1}{(-3)^n}.$

6. Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

sor, és akkor mi az összege?

7. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

végtelen sor?

8. Az $x \in \mathbb{R}$ szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

végtelen sor?

■ Házi feladatok

1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensak, és határozza meg az összegüket:

(a) $\sum_{n=10} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}}\right);$

(b) $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}.$

2. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum_{n=1} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1};$

(b) $\sum_{n=1} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n-1}.$

3. Konvergensek-e a következő sorok:

$$(a) \sum_{n=1} \frac{n^2 + n + 1}{\sqrt{n^4 + 1} + n^5}; \quad (b) \sum_{n=1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} ?$$

4. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

$$(a) \sum_{n=1} \frac{100^n}{n!}; \quad (b) \sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n};$$

$$(c) \sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \quad (d) \sum_{n=1} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n};$$

$$(e) \sum_{n=1} \frac{2 + (-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor, ha a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

egyenlőség minden $p = 1, 2, \dots$ számra teljesül?

2. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges. Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál.

3. **A Cauchy-féle kondenzációs elv:** Ha $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor a $\sum a_n$ és a $\sum (2^n a_{2^n})$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek (röviden: a két sor *ekvikonvergens*).

4. A Cauchy-féle kondenzációs elv felhasználásával mutassa meg, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{hiperharmonikus sor} \quad \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

5. A $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ feltételesen konvergens sornak adjon meg egy olyan átrendezését, amelynek összege

$$(a) 12, \quad (b) +\infty.$$

6. Mutassa meg, hogy a

$$(a) \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ sor önmagával vett Cauchy-szorzata konvergens,}$$

$$(b) \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.}$$

11. gyakorlat

Hatványsorok

■ Szükséges ismeretek

- Írja le a *hatványsor* definícióját.
- Fogalmazza meg a *Cauchy–Hadamard-tételt*.
- Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.
- Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.
- Definiálja a \sin függvényt.
- Definiálja a \cos függvényt.

■ Feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1} (3x-1)^n \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x+2)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő 0-körüli hatványsor összegeként:

$$(a) f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}),$$

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n+1} x^n \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} (-x)^n \quad (x \in \mathbb{R});$$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő 0-körüli hatványsor összegeként:

(a) $f(x) = \frac{1+x}{3x-2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}),$

(b) $f(x) = \frac{x+3}{5x^2+9x-2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{5}\}),$

(c) $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}),$

(d) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$

(e) $f(x) = \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R}).$

12. gyakorlat

1. Bizonyítsa be, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor konvergens és e az összege, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

(Emlékeztetőül: az e számot az $(1 + \frac{1}{n})^n$ ($0 < n \in \mathbb{N}$) sorozat határértékeként értelmeztük.)

Mutassa meg, hogy

- (a) minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!};$$

- (b) az e szám irracionális és $2,7180 < e < 2,7183$.

2. Bizonyítsa be, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$; (b) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;

(c) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$; (d) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

(e) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.