Analízis 1. bizonyítások

1. Arkhimédész tétele

Arkhimédész tétele szerint két x, y valós függvény esetén ha x nagyobb, mint 0, akkor van olyan n természetes szám, melyre n\*x nagyobb, mint y, vagyis: .

***Bizonyítás:***

* y<=0: n=1
* y>0: nx>y⬄. Elég megmutatni, hogy létezik n, amely nagyobb x/y-nál, mert a természetes számok halmaza felülről nem korlátos.

1. Cantor tétele

Tegyük fel, hogy: .

***Bizonyítás n, k természetes számra***: először megmutatjuk, hogy: , aztán k-ra vonatkozóan indukcióval bebizonyítjuk. 0-ra, illetve 1-re igaz. Ha k olyan természetes szám, amelyre a következő állítás igaz, akkor a tételét kihasználva: .

Ezek után legyen n,k természetes szám.

1. **Korlátos halmaznak létezik szuprémuma és infimuma**

Ha egy adott halmaznak van felső és alsó korlátja, akkor biztosan van szuprémuma és infimuma.

**Bizonyítás**: adott egy A halmaz, amely teljesíti a Dedekind-axióma feltételeit:

1. A határérték egyértelmű

Adott egy a valós sorozat, illetve A1 és A2 határérték🡪A1=A2.

Ha A1 és A2 határértékek🡪. Ha epszilon tetszőleges, akkor annak kétszerese is az. Így a határértékek különbsége 0, vagyis megegyeznek.

1. A korlátosság a konvergencia szükséges feltétele

Ha az a valós sorozat konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás: Legyen a valós sorozat határértéke A, és az ε=1🡪.

**Felülről korlátosság**:

K:=max

n természetes számra:

* n kisebb, vagy egyenlő, mint N esetén: an={a1,…,aN}🡪an<=max{a0,…,aN }<=K
* n nagyobb, mint N esetén: an<A+1<=K

**Alulról korlátosság**:

L:min

n természetes számra:

* n kisebb, vagy egyenlő, mint N esetén: an={a1,…,aN}🡪an>=min{a0,…,aN }<=L
* n nagyobb, mint N esetén: an>A-1>=L

1. Műveletek null-sorozatokkal

Adott két valós sorozat. Ha azok nullsorozatok, akkor azok összege, illetve szorzatuk is nullsorozatok, vagyis a határértékük 0.

**Bizonyítás az összegre**:

Bizonyítás a szorzatra:

1. A közrefogási elv.

Adott a, b és c valós sorozatok. . Ennek alapján, ha a és c konvergens, illetve azok határértéke ugyanaz, akkor b is konvergens, és a határértéke ugyanaz, mint az a-é.

**Bizonyítás**:

bn=(bn-an)[nullsorozat]+(an)[konvergens]🡪bn konvergens, és lim bn=(bn-an)[=0]+lim (an)-lim (an)

1. A konvergens sorozatok összegére vonatkozó tétel

Ha az adott valós sorozatok konvergensek, akkor az összegük is az. Az összeg határértéke a valós sorozatok limenseinek az összege.

**Bizonyítás**: Legyen A:= lim a, és B:= lim b. Azt kell megmutatni, hogy (an+bn-A-B) null-sorozat

a valós sorozat konvergens és határértéke A csak akkor, ha an-A null-sorozat.

b valós sorozat konvergens és határértéke B csak akkor, ha bn-B null-sorozat.

1. A konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

Ha az adott valós sorozatok konvergensek, akkor a szorzatuk is az. A szorzat határértéke a valós sorozatok limenseinek a szorzata.

**Bizonyítás**: azt kell megmutatni, hogy (anbn-AB) null-sorozat.

(anbn-AB)= (anbn-Abn+ Abn-AB)=bn(an-A)+A(bn-B). Az egyenletet vizsgálva kiderül, hogy az null-sorozat.

1. A monotonitás és korlátosság, mint a konvergencia elégséges feltétele

**Bizonyítás A:=sup Ra-ra**:

Ha a sorozat monoton növekvő, akkor

Összefoglalva:

Ennek következtében a konvergens és határértéke egyenlő az értékkészletének szuprémumával.

Ha az a sorozat monoton csökkenő, akkor konvergens, és határértéke egyenlő az értékkészletének infimumával.

1. Nem-negatív tagú sorok konvergenciája. Az összehasonlító kritérium

Adott két xn és yn sorozat, amely majdnem minden n-re . Ha yn által generált végtelen sor konvergens, akkor az xn által generált végtelen sor is az. Ha xn által generált végtelen sor divergens, akkor az yn által generált végtelen sor is az.

**Bizonyítás**:

. Ha ezek nem negatív tagú sorok, akkor ezek monoton növekvők.

. Ennek következtében: konvergens, vagyis

Másrészt , azaz

1. A hányados kritérium

Adott egy a valós sorozat, melynek n. tagja nem 0. Tegyük fel, hogy .

1. Ha a határérték kisebb, mint egy, akkor a sor abszolút konvergens.
2. Ha nagyobb, mint 1, akkor divergens.
3. Ha pontosan 1, akkor konstans, tehát se konvergens, se divergens.

**Bizonyítás**:

1. Tegyük fel, hogy van

A<q<1🡪határérték definíciója felhasználásával🡪

Aztán indukcióval: 🡪k=n igaz🡪k=n+1:

Összefoglalva:

1. A>1:
2. A gyökkritérium

Adott egy a valós sorozat. Tegyük fel, hogy .

* Ha a határérték kisebb, mint 1, akkor a sor abszolút konvergens.
* Ha nagyobb, mint 1, akkor divergens.
* Ha pontosan 1, akkor konstans, tehát se konvergens, se divergens.

**Bizonyítás**:

* .

A határérték definíciójából következtetve:

1. Végtelen sorok szorzása. A téglányszorzat konvergenciája, abszolút konvergenciája

Adott két a, b valós sorozat, melyek által generált sorozatok . A két számsor téglányszorzata . Ha , konvergens, akkor téglányszorzat is konvergens, és .

**Bizonyítás**:

1. A hatványsorok konvergencia halmazára vonatkozó tétel

A hatványsor konvergencia halmazában (KH) adott egy x valós szám melyre: KH:{}. A hatványsornak csak akkor van konvergencia halmaza, ha sor konvergens. A hatványsorok konvergencia halmaza valójában egy intervallum.

**Bizonyítás**:

Tegyük fel, hogy

Tegyük fel, hogy

miatt: -1<q<1

Következtetésképpen: . Összehasonlító kritérium felhasználásával

1. A Cauchy-Hadamard tétel

A Cauchy-Hadamard tétel szerint a hatványsor konvergencia sugara egyenlő a konvergencia halmazbeli x-x0 valós szám abszolút értékének szuprémumával, vagyis legkisebb felső korlátjával.

Képletben:

Ha ; Ha

A konvergencia sugár definíciója és a szuprémum tulajdonságai miatt:

* . A fentiek miatt x konvergencia halmazban van.

Megjegyzés: A hatványsor a –ban abszolút konvergens.