Definíciók és tételek

Analízis 2.

Programtervező informatikus szak

2017-2018. tanév tavaszi félév

• Függvények határértéke

1. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Válasz. Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van.

2. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

3. Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim_a f = A$ egyenlőségnek?

Válasz. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in k_\varepsilon(A).$

4. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

5. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > P.$$

6. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ +\infty \in \mathcal{D}_f',\ A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

7. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, x_0 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) > P.$$

8. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = A.$$

9. Milyen műveleti tételeket ismer függvények határértékére vonatkozóan?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ és léteznek az

$$A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}, \quad B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$$

határértékek.

Ekkor

1^o az $f+g$ összegfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a (f+g) = A + B,$$

feltéve, hogy az $A+B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van;

2^o az fg szorzatfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a (f\,g) = A\,B,$$

feltéve, hogy az $A\,B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van;

3^o az f/g hányadosfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $A/B \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

10. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós *hatványsornak* nevezzük.

11. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

12. Definiálja függvény jobb oldali határértékét.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a *helyen létezik a jobb oldali határértéke*, ha a

$$g(x) := f(x) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)$$

függvénynek a-ban van határértéke. Ezt a határértéket az f függvény a *helyen vett jobb oldali határértékének* nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{a+0} f := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- **Függvények folytonossága**

13. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *pontbeli folytonosságát.*

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban folytonos*, ha

$$\forall\, \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

14. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

15. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

16. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C\{a\} \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ sorozatra } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

17. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény pontbeli folytonosságára vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g} \in C\{a\}$.

18. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$.

19. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról folytonos egy pontban*?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *jobbról folytonos az a pontban*, ha

$$\forall\, \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a \leq x < a + \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

20. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f korlátos $[a, b]$-n.

21. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

22. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

23. Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\quad \exists\, \xi \in (a, b) : \quad f(\xi) = c$.

24. Mit jelent az, hogy egy f függvény *Darboux-tulajdonságú*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú I-n*, ha minden $a, b \in I$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

25. Milyen állítást ismer az inverz függvény folytonosságáról?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és invertálható. Ekkor az f^{-1} inverz függvény folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon.

26. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

27. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

28. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Válasz. Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az f függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.

• Differenciálszámítás

29. Mi a *belső pont* definíciója?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A halmaz *belső pontja*, ha

$$\exists\, K(a), \text{ hogy } K(a) \subset A.$$

Az $\operatorname{int} A$ szimbólummal jelöljük az A halmaz belső pontjainak a halmazát.

30. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

Válasz. Ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor:

$$f \in D\{a\} \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{és ez a határérték véges.}$$

31. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Válasz. $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. az $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

32. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról deriválható* egy pontban?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ jobb oldali határérték,}$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az *a pontban jobbról deriválható*. A fenti határértéket az f függvény *a pontbeli jobb oldali deriváltjának nevezzük*, és az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük.

33. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

Válasz. $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

34. Mi az *érintő* definíciója?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény grafikojának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban *van érintője*, ha $f \in D\{a\}$. Ekkor *f garfikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjén* az

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

35. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\} \implies fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

36. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

37. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

38. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény (α, β)-n, és egy $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$, továbbá $f'(a) \neq 0$. Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, ahol $b := f(a)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

39. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban az f függvény differenciálható és a deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott sor összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1}.$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

40. Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := e^x := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

41. Értelmezze az ln függvényt.

Válasz. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért invertálható. Az

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

függvényt *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük.

42. Mi a definíciója az $a^x \;\; (a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?

Válasz. $a^x := \exp(x \ln a)$.

43. Szemléltesse az $\exp_a$ függvények grafikonjait.

44. Szemléltesse az $\log_a$ függvények grafikonjait.

45. Definiálja az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvényeket.

46. Szemléltesse az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvények grafikonjait.

47. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $f \in D\big(K_r(a)\big)$ és $f' \in D\{a\}$.

48. Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó *Leibniz-tételt.*

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f, g \in D^n\{a\}$, akkor $fg \in D^n\{a\}$ és

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

49. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális maximuma van*?

Válasz. Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban *lokális maximuma* van, ha

$$\exists\, K(c): \quad f(x) \le f(c) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

50. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális minimuma van*?

Válasz. Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban *lokális minimuma* van, ha

$$\exists\, K(c): \quad f(c) \le f(x) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

51. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az f függvénynek a c pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

52. Mondja ki a *Rolle-tételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a, b], f \in D(a, b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

53. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a, b], f \in D(a, b)$, akkor

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(\xi).$$

54. Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a, b], f, g \in D(a, b)$ és $g'(x) \ne 0$, $(x \in (a, b))$. Ekkor

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

55. Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$ és $f' > 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f szigorúan monoton növekedő $[a, b]$-n.

56. Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$, akkor

$$f \ \text{ monoton növekedő } \ [a, b]\text{-n} \iff f' \ge 0 \ \ [a, b]\text{-n}.$$

57. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen *előjelet vált*?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$, hogy $K_\delta(c) \subset \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0\ \ \forall\, x \in (c-\delta, c)$ és $f(x) > 0\ \ \forall\, x \in (c, c+\delta)$ vagy fordítva.

58. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$ és f' a $c \in (a,b)$ pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek c-ben lokális szélsőértéke van.

59. Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a,b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális minimuma van.

60. Írja le a *lokális maximumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a,b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális maximuma van.

61. Mi a konvex függvény definíciója?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ esetén}$$

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

62. Milyen ekvivalens definíciót ismer a konvexitásra?

Válasz. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ és } \ \forall\, \lambda \in (0,1) \ \text{ esetén}$$

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

63. Jellemezze egy függvény *konvexitását* az első derivált segítségével.

Válasz. Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D(a,b)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } (a,b)\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \ \text{ monoton növekedő } (a,b)\text{-n.}$$

64. Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második derivált segítségével.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D^2(I)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } I\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \ge 0 \ \ I\text{-n.}$$

65. Jellemezze egy függvény konvexitását az érintőkkel.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D(I)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } I\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, c \in I \ \text{ pontban } \ f(x) \ge f'(c)(x-c) + f(c) \ \ (\forall\, x \in I).$$

66. Mi az inflexiós pont definíciója?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D(I)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in I$ pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha

$$\exists\, \delta > 0 : \quad f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva.}$$

67. Mi az aszimptota definíciója?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek $(+\infty)$-ben *van aszimptotája*, ha létezik olyan $l(x) = Ax + B$ $(x \in \mathbb{R})$ lineáris függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor l az f függvény *aszimtotája* $(+\infty)$-ben. (Vagy geometriai nyelven: az $y = f(x)$ egyenletű görbe aszimptotája $(+\infty)$-ben az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes.)

68. Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek $(+\infty)$-ben akkor és csak akkor van aszimptotája, ha *léteznek* és *végesek* az alábbi határértékek:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \quad \text{és} \quad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B.$$

Ebben az esetben az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes f aszimptotája $(+\infty)$-ben. Ha a fenti határértékek közül valamelyik nem létezik vagy nem véges, akkor f-nek nincs $(+\infty)$-ben aszimptotája.

69. Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*

Válasz. Legyen $-\infty \le a < b < +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(a, b)$, $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ és tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

70. Definiálja a π számot.

Válasz. A cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$-nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot: $\pi := 2\xi$.

71. Definiálja a *periodikus* függvényt.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periodikus*, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x + p) = f(x).$$

A p számot f *periódusának*, az f függvényt pedig p *szerint priodikus* függvénynek nevezzük.

72. Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?

Válasz. A sin és a cos függvények 2π-szerint periodikusak függvények, és 2π a legkisebb periódusuk.

73. Értelmezze az $\arcsin$ függvényt.

Válasz. A sin függvény szigorúan monoton növekedő a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az $\arcsin$ függvény.

74. Értelmezze az arc cos függvényt.

Válasz. A cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0,\pi]$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az arc cos függvény.

75. Értelmezze az arc tg függvényt.

Válasz. A tg függvény szigorúan monoton növekedő a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az arc tg függvény.

76. Értelmezze az arc ctg függvényt.

Válasz. A ctg függvény szigorúan monoton csökkenő a $(0,\pi)$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az arc ctg függvény.

77. Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Válasz. Legyen $a\in\mathbb{R}$ és $\alpha_n\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,2\ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ $(x\in\mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x\in K_R(a)\big).$$

Ekkor $f\in D^\infty\big(K_R(a)\big)$ és

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \big(n=0,1,2,\ldots\big).$$

78. Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $f\in D^\infty\{a\}$. Ekkor a

$$\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó *Taylor-sorának* nevezzük.

79. Mi a *Taylor-polinom* definíciója?

Válasz. Ha $f\in D^\infty\{a\}$, akkor

$$T_{n,a}(f,x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$$

az f függvény *a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomja*.

80. Fogalmazza meg a *Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal* néven tanult tételt.

Válasz. Legyen $n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$ és $f\in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor $\forall\, x\in K(a)$ ponthoz $\exists\,\xi\in(a,x)$ (ha $a<x$) vagy $\exists\,\xi\in(x,a)$ (ha $x<a$), hogy

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

• Határozatlan integrál (primitív függvények)

81. Definiálja a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. A $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

82. Milyen *elégséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

83. Milyen *szükséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon, azaz tetszőleges $a, b \in I,\ a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

84. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye.

Válasz. $f(x) := \operatorname{sign}(x)\ \big(x \in (-1, 1)\big)$.

85. Milyen állítást ismer a primitív függvények számával kapcsolatban?

Válasz. Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.

1^o Ha $F : I \to \mathbb{R}$ a f függvény egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.

2^o Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei a f függvénynek, akkor

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad F_1(x) = F_2(x) + c \qquad (x \in \mathbb{I}),$$

azaz a primitív függvények konstansban különböznek egymástól.

86. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye. A *f függvény határozatlan integrálja* a következő függvényhalmaz:

$$\int f := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Ezt a függvényhalmazt így is jelöljük:

$$\int f(x)\, dx := F(x) + c \qquad (x \in I).$$

87. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

88. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

Válasz. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a),\ R > 0\big).$$

Ekkor f-nek van primitív függvénye és

$$F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

a f függvény egy primitív függvénye.

89. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy, $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx.$$

90. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $f : J \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek van primitív függvénye, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

91. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\, dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\, dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

• Határozott integrál

92. Definiálja intervallum egy felosztását.

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

93. Mit jelent egy felosztás finomítása?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

94. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := \inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

95. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

96. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $s(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $s(f, \tau_1) \le s(f, \tau_2)$.

97. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $S(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő felső közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $S(f, \tau_1) \ge S(f, \tau_2)$.

98. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó, ill. felső közelítő összeg, akkor $s(f, \tau_1) \le S(f, \tau_2)$.

99. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik a szuprémuma. Az

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

100. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\}$ halmaz alulról korlátos, ezért létezik az infimuma. Az

$$I^*(f) := \inf\big\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

101. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ekkor f *Riemann-integrálható* az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_* f = I^* f$.

102. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ha $I_* f = I^* f$, akkor az f függvény határozott (vagy Riemann-)integrálja az $I_* f = I^* f$ valós szám.

103. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.

Válasz. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

104. Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó, ill. felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege.

105. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $\Omega(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó oszcillációs összege. Ekkor

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \;\; \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

106. Definiálja a *Riemann-féle közelítő összegeket.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a, b]$ egy felosztása és $\xi := \big(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\big)$, ahol $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Ekkor a

$$\sigma\big(f, \tau, \xi\big) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

számot az f függvény τ felosztáshoz és a ξ közbülső helyekhez tartozó Riemann-féle közelítő összegének nevezzük.

107. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a Riemann-integrálhatóságra a Riemann-féle közelítő összegekkel?

108. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a, b] \subset R[a, b]$, de $C[a, b] \neq R[a, b]$.

109. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha f monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a, b]$.

110. Definiálja az $[a,b]$ intervallumon a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha F folytonos $[a,b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a,b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

111. Hogyan szól a *Newton–Leibniz-tétel?*

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek létezik primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$, ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

112. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Válasz. Ha $f, g \in R[a,b]$ és $f \le g$, akkor $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

113. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

114. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Válasz. Legyen $f, g \in R[a,b]$, $g \ge 0$, $M = \sup \mathcal{R}_f$ és $m = \inf \mathcal{R}_f$. Ekkor

$$m \int\limits_a^b g \le \int\limits_a^b fg \le M \int\limits_a^b g.$$

Ha még $f \in C[a,b]$ is teljesül, akkor $\exists\ \xi \in [a,b]$, hogy

$$\int\limits_a^b fg = f(\xi) \int\limits_a^b g.$$

115. Fogalmazza meg a Cauchy–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget.

Válasz. Ha f és g integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor fg is integrálható $[a,b]$-n és

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}.$$

116. Definiálja az integrálfüggvényt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a $F(x) := \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$ függvényt a f függvény ***integrálfüggvényének*** nevezzük.

117. Írja le az integrálfüggvénnyel kapcsolatban tanult tételt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $F(x) := \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$. Ekkor

1^o a F integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-n;

2^o ha $d \in (a,b)$ és f folytonos d-ben, akkor F differenciálható d-ben és $F'(d) = f(d)$.