Programtervező Informatikus BSC Szak, Analízis2 , gyakorló feladatok a 2. zárthelyi dolgozathoz,2013.11.25.

1. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értéke mellett lesz deriválható az

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sqrt{1-x} + b \cdot \sin x + 2, & \text{ha } x \le 0; \\ a \cdot e^x + b \cdot \mathrm{ch}x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény a teljes valós számhalmazon ? Ezen esetekben adja meg az f' függvényt.

Megoldás : A fenti két ág elemi függvényei deriválhatóak a megadott nyílt intervallumonokon, és a deriválásra vonatkozó itteni műveleti szabályok ezt megőrzik, így :

Ha $x \in (-\infty, 0)$, akkor $f \in \mathrm{D}\{x\}$ és $f'(x) = (a \cdot \sqrt{1-x} + b \cdot \sin x + 2)' = \dfrac{-a}{2\sqrt{1-x}} + b \cdot \cos x.$

Ha $x \in (0, +\infty)$, akkor $f \in \mathrm{D}\{x\}$ és $f'(x) = (a \cdot e^x + b \cdot \mathrm{ch}x)' = a \cdot e^x + b \cdot \mathrm{sh}x.$

Külön vizsgáljuk az $x = 0$ pontot. Ebben az esetben $f \in \mathrm{D}\{0\} \iff f \in \mathrm{C}\{0\}$ és $f'_b(0) = f'_j(0)$.

A folytonosságot vizsgálva :

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} (a \cdot \sqrt{1-x} + b \cdot \sin x + 2) = a + 2 = f(0),$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} (a \cdot e^x + b \cdot \mathrm{ch}x) = a + b.$$

A kétoldali deriváltak pedig :

$$f'_b(0) = \frac{-a}{2\sqrt{1-0}} + b \cdot \cos(0) = b - \frac{a}{2},$$

$$f'_j(0) = a \cdot e^0 + b \cdot \mathrm{sh}(0) = a.$$

A mondott feltételek alapján :

$$f \in \mathrm{D}\{0\} \iff a + 2 = a + b, \quad \text{illetve} \quad b - a/2 = a \iff a = 4/3, b = 2.$$

A fenti esetben $f'(0) = 4/3$. A keresett mindenhol deriválható f függvény és deriváltja tehát :

$$f(x) = \begin{cases} 4/3 \cdot \sqrt{1-x} + 2 \cdot \sin x + 2, & \text{ha } x \le 0; \\ 4/3 \cdot e^x + 2 \cdot \mathrm{ch}x, & \text{ha } x > 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3\sqrt{1-x}} + 2 \cdot \cos x, & \text{ha } x \le 0; \\ 4/3 \cdot e^x + 2 \cdot \mathrm{sh}x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$$

---

2. Hol deriválható az alábbi függvény ? Ahol igen ott adjuk meg $f'(x)$-et !

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & \text{ha } x \ne 0; \\ 0, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

Megoldás : Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ akkor, az elemi függvények és a deriválással kapcsolatos műveleti szabályok értelmében $f \in \mathrm{D}\{x\}$ és $f'(x) = \dfrac{1 + e^{\frac{1}{x}} - x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2} = \dfrac{1 + e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$

Ha $x = 0$, akkor most a definíció szerint kell eljárnunk, azaz, a különbségi hányadost felírva :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0; \\ \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1. \end{cases}$$

A fentiekből látszik, hogy $f'_b(0) = 1 \ne f'_j(0) = 0$ ezért $f \notin \mathrm{D}\{0\}$.

---

3. Tekintsük az $f(x)=2x-\operatorname{arctg}(x)$, $(x\in\mathbb{R})$ függvényt.

i) Írja fel a függvény érintőjének egyenletét az $x_0=1$ abszcisszájú pontjában.

ii) Bizonyítsa be, hogy f invertálható, az inverze deriválható és számolja ki az $(f^{-1})'\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$ deriváltat.

Megoldás :

a) Az érintő egyenlete az $(1,f(1))$ pontban : $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$. Itt

$$f(1)=2-\operatorname{arctg}(1)=2-\frac{\pi}{4},\quad \text{illetve}\quad f'(x)=2-\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

A keresett érintő egyenlete tehát :

$$y-\left(2-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Megjegyzés : A felírt érintő egyenes egyben az f függvénynek az adott $x_0=1$ ponthoz tartozó elsőfokú Taylor polinomja is, azaz :

$$T_1f(x)=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)=2-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\cdot(x-1)\quad (x\in\mathbb{R}).$$

b) Mivel $f'(x)=2-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1+2x^2}{1+x^2}>0$ $(\forall x\in(0;+\infty))$, ezért f szigorúan monoton nő a $(0;+\infty)$ intervallumon, így invertálható is itt. Ekkor, lévén, hogy $f\in C$ és D_f intervallum, ezért, tétel értelmében (intervallum folytonos képe intervallum) $R_f=(\lim_{x\to 0+0}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x))=(0;+\infty)=D_{f^{-1}}$. Tehát $\exists\ f^{-1}:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$. Az inverz függvény deriválhatóságára vonatkozó tétel értelmében $f^{-1}\in D$ és felhasználva, hogy $f^{-1}\left(2-\frac{\pi}{4}\right)=1$ kapjuk, hogy :

$$(f^{-1})'\left(2-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(2-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}.$$

---

4. Tekintsük az $f(x):=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\operatorname{tg}(\cos(\pi x))$, $(x\in(0;1))$ függvényt.

a) Igazolja, hogy f invertálható. Számítsa ki $f(1/2)$-et.

b) Határozza meg az f^{-1} deriváltját a $\pi/3$ helyen.

Megoldás : a) Az elemi függvények és a deriválással kapcsolatos műveleti szabályok értelmében $f\in\mathrm{D}(0,1)$ és

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\frac{-\pi\cdot\sin(\pi x)}{\cos^2(\cos(\pi x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\pi\cdot\sin(\pi x)}{\cos^2(\cos(\pi x))}=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\pi\cdot\sin(\pi x)}{\cos^2(\cos(\pi x))}=$$

$$=(x\in(0;1))=\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\pi\cdot\sin(\pi x)}{\cos^2(\cos(\pi x))}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\pi\cdot\sin(\pi x)}{\cos^2(\cos(\pi x))}.$$

Itt mindkét tag negatív, ugyanis, ha $x\in(0;1)$, akkor $\pi x\in(0,\pi)$ és így $\sin(\pi x)>0$. Tehát $\forall x\in(0;1)$: $f'(x)<0$ így tétel alapján f szigorúan monoton csökken a $(0;1)$ intervallumon, tehát f **invertálható** is!

$$f(1/2)=\arcsin\sqrt{1-1/4}+\operatorname{tg}(\cos(\pi/2))=\arcsin(\sqrt{3}/2)+\operatorname{tg}(0)=\pi/3.$$

b) Az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel értelmében :

$$(f^{-1})'(\pi/3)=\frac{1}{f'(f^{-1}(\pi/3))}=\frac{1}{f'(1/2)}=\frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-1/4}}-\dfrac{\pi\cdot\sin\pi/2}{\cos^2(\cos(\pi/2))}}=\frac{1}{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\pi}=-\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}\cdot\pi}.$$

---

5. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan differenciálható f függvény, amelyre :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *és* $\forall x\in(0;\pi): f\Big(\mathrm{ctg}(x)+\mathrm{arcctg}(x)+\dfrac{1}{x}\Big)=x^3+\cos(x).$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *és* $\forall x\in\mathbb{R}: f^3(x)+f^2(x)+f(x)+2=e^x+5\sin(x)$. *Mennyi* $f'(0)$ *értéke ?*

Megoldás :

a) Az adott függvényegyenlet a következő alakú : $f(g(x))=h(x)\Leftrightarrow(f\circ g)(x)=h(x)\quad(x\in(0;\pi))$, ahol

$g(x):=\mathrm{ctg}(x)+\mathrm{arcctg}(x)+\dfrac{1}{x}\quad(x\in(0;\pi))$ és $h(x):=x^3+\cos(x)\quad(x\in(0;\pi))$. Keressük tehát azt az f deriválható függvényt, amelyre : $f\circ g=h$ a $(0;\pi)$ intervallumon. Elég belátni, hogy g invertálható itt és, hogy képezhető a $h\circ g^{-1}$ kompozíció. Ekkor létezik a feladatban keresett $f:=h\circ g^{-1}$ függvény is. A deriválás és a műveleti szabályokra tanult tételek értelmében

$$\forall x\in(0;\pi): g\in D\{x\},\ \text{ illetve }\ g'(x)=\Big(\mathrm{ctg}(x)+\mathrm{arcctg}(x)+\frac{1}{x}\Big)'=-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0\quad(\forall x\in(0;\pi)).$$

Mivel g' negatív a megadott nyílt intervallumon, ezért a tanult tétel értelmében g szigorúan monoton csökken a $(0;\pi)$ intervallumon. Ebből már következik, hogy g invertálható, tehát $\exists g^{-1}: R_g\to D_g=(0;\pi)$.

Vegyük észre, hogy $D_{g^{-1}}=R_g=\mathbb{R}$ *(miért ?)* , illetve $R_{g^{-1}}=D_g=(0;\pi)\subset D_h=(0;\pi)$. Ez azt jelenti, hogy létezik a keresett $f:=h\circ g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény és ez kielégíti a $(0;\pi)$ intervallumon az $f\circ g=h$ egyenletet. Az f deriválhatósága adódik az inverz függvény és a kompozícióró deriválására vonatkozó tétel alapján *(hogyan ?)*.

---

b) Ismét átírhatjuk az adott egyenletet a következő formában :

$$g(f(x))=h(x)\Longleftrightarrow(g\circ f)(x)=h(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$

ahol $g(x):=x^3+x^2+x+2\quad(x\in\mathbb{R})$ és $h(x):=e^x+5\sin(x)\quad(x\in\mathbb{R})$. Elég belátni, hogy g invertálható és, hogy képezhető az $f:=g^{-1}\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény. Mivel $g'(x)=3x^2+2x+1>0\ (\forall x\in\mathbb{R})$ (miért ?) ezért g szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, ezért itt invertálható is. Vegyük észre, hogy $g\in C(\mathbb{R})$ és mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, illetve $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ezért tétel alapján ("intervallum folytonos képe intervallum") $R_g=\mathbb{R}$. Ezek alapján tehát $\exists g^{-1}:R_g=\mathbb{R}\to D_g=\mathbb{R}$ és képezhető a $g^{-1}\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kompozíció is. Legyen a keresett függvény $f:=g^{-1}\circ h$. Világos, hogy ez utóbbi kompozíció deriválható a teljes számegyenesen. Speciel

$$f'(0)=(g^{-1}\circ h)'(0)=(g^{-1})'(h(0))\cdot h'(0)=(g^{-1})'(1)\cdot(e^0+5\cos(0))=6\cdot(g^{-1})'(1)=6\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\frac{6}{g'(-1)}=\frac{6}{2}=3.$$

Itt kihasználtuk, hogy $g^{-1}(1)=-1$. *(Miért ?)*

---

6. Számítsa ki a következő határértékeket, ha léteznek :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\Big(x\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\Big);\quad b)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}};\quad c)\ \lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\Big);$$

$$d)\ \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\mathrm{tg}\sqrt{x}};\quad e)\ \lim_{x\to 0+0}(3^x+5^x-1)^{1/\sin x}.$$

Megoldás :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(x\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}\Big)=+\infty\cdot 0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{0}{0}=(\text{L'Hospital szabály})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=$

$=\dfrac{1}{1+0}=\mathbf{1}.$

---

b) $L := \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$ = (az **exp** függvény folytonosságát használva) $= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}} =: e^l$, ahol

$$l := \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = (\mathrm{L'Hospital}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}x}{2x} = \frac{0}{0} = (\mathrm{L'Hospital}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\cos^2 x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Tehát, az eredeti határérték L$=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

---

c)$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\cdot\ln(x)} = \frac{0}{0}$ = (L'Hospital szabály) $= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln(x)+x-1} =$

$= \frac{0}{0}$ = (L'Hospital szabály) $= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{2}$.

---

d) $\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\mathrm{tg}\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ =(L'Hospital szabály) $= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{e^{x^2}+2\sqrt{x}}\cdot(2x\cdot e^{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ = ($2\sqrt{x}$ -el bővítve a törtet)=

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{e^{x^2}+2\sqrt{x}}\cdot(4x\sqrt{x}\cdot e^{x^2}+2)}{\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{e^0+2\sqrt{0}}\cdot(4\cdot 0\cdot e^0+2)}{\frac{1}{\cos^2\sqrt{0}}} = 2.$$

---

e) Legyen L $:= \lim_{x\to 0+0}(3^x+5^x-1)^{1/\sin x} = \lim_{x\to 0+0} e^{(\ln(3^x+5^x-1))/\sin x}$ = (az *exp* függvény folytonosságát használva)$=: e^l$,

ahol $l = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(3^x+5^x-1)}{\sin x} = 0/0$ = (L'Hospital szabály) $= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{3^x\cdot\ln 3+5^x\cdot\ln 5}{3^x+5^x-1}}{\cos x} = \frac{\ln 3+\ln 5}{1} = \ln(15)$.

Tehát L$=e^{\ln(15)} = 15$.

---

7. Bizonyítsa be, hogy : $\forall\ 0<a<b<+\infty : \frac{2ab-2a^2}{1+b^4} < \mathrm{arctg}(b^2)-\mathrm{arctg}(a^2) < \frac{2b^2-2ab}{1+a^4}$.

Megoldás :

Az adott egyenlőtlenség a következő ekvivalens alakra hozható :

$$\frac{2a\cdot(b-a)}{1+b^4} < \mathrm{arctg}(b^2)-\mathrm{arctg}(a^2) < \frac{2b\cdot(b-a)}{1+a^4}\Big| : (b-a)>0 \iff \frac{2a}{1+b^4} < \frac{\mathrm{arctg}(b^2)-\mathrm{arctg}(a^2)}{b-a} < \frac{2b}{1+a^4}.$$

Alkalmazzuk Lagrange tételét az $f(x) := \mathrm{arctg}(x^2)$ $(x\in\mathbb{R})$ függvényre, a megadott $[a;b]$ intervallumon. Mivel tehát $f\in C[a;b]\cap D(a;b) \implies \exists\,\xi\in(a;b)$ amellyel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\mathrm{arctg}(b^2)-\mathrm{arctg}(a^2)}{b-a} = f'(\xi) = \frac{2\xi}{1+\xi^4}$. Tudva, hogy $0<a<\xi<b<+\infty$ a fenti utolsó törtet becsülve adódik, hogy $\frac{2a}{1+b^4} < \frac{2\xi}{1+\xi^4} < \frac{2b}{1+a^4}$, amit szerettünk volna belátni.

---

8. Bizonyítsa be, hogy :

a) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *esetén :* $\mathrm{tg}x - 1 \geq 2x - \frac{\pi}{2}$.

b) $\forall x \in (0, +\infty)$ *esetén :* $x \cdot \mathrm{arctg}x > \ln(1 + x^2)$.

Megoldás :

a) Rendezzük 0-ra a megadott egyenlőtlenséget, majd vezessük be az $f(x) := \mathrm{tg}x - 1 - 2x + \frac{\pi}{2}$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ függvényt. Elég belátni, hogy $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $f(x) \geq 0$. Világos, hogy $f \in D$ és $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 2 = \frac{1 - 2\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$. A megadott intervallum pontjaiban, ha tehát $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(x) = 1/\sqrt{2} \Longleftrightarrow x = \pi/4$, illetve $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$. Ezek alapján f szigorúan monoton fogy a megadott intervallum pontjaiban. Mivel f folytonos is a végpontban, így

$$f(x) \leq f(\pi/4) = 0 \ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Megjegyzés : Úgy is megoldhatjuk a feladatot, ha felírjuk a $g := tg$ függvény érintőjét a $\pi/4$ helyen és kapjuk a $T_1 g(x) = 1 + 2x - \pi/2$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenest. A feladatban megadott intervallumon a tg függvény lévén konvex *(miért ?)* az érintő "fölött" helyezkedik el, ami éppen a bizonyítandó állítás.

---

b) Rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget, majd vezessük be az $f(x) := x \cdot \mathrm{arctg}x - \ln(1 + x^2)$, $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy $\forall x \in (0, +\infty) : f(x) > 0$.

Mivel $f \in \mathbf{D}$ és $f'(x) = \mathrm{arctg}x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}x - \frac{x}{1 + x^2}$ előjele így nem határozható meg, deriváljuk újra. Azt kapjuk, hogy : $f''(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 1 + x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2}$

A fentiekből már látszik, hogy $f''(x) > 0 = f''(0)$, $\forall x > 0$, amiből kapjuk, hogy f' szigorúan monoton nő a $(0; +\infty)$ intervallumon, így $\forall x > 0$ esetén $f'(0) = 0 < f'(x)$ ez utóbbiból, hasonlóan kajuk, hogy f szigorúan monoton nő a $(0; +\infty)$ intervallumon, így $\forall x > 0$ esetén $f(0) = 0 < f(x)$, amit be kellett látnunk.

---

9. Adja meg a következő függvény értékkészletét : $f(x) := \mathrm{arctg}\frac{x - 1}{x + 1} - \mathrm{arctg}(x)$ $\ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Megoldás :

Kiszámolva a deriváltfüggvényt kapjuk, hogy $f'(x) = 0$ $\ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$. Ez azt jelenti, hogy f konstansfüggvény a $(-\infty; -1)$ illetve a $(-1; +\infty)$ intervallumok mindegyikén. (Vigyázat : nem feltétlenül ugyanaz a konstans !)

Ennek megfelelően, kapjuk, hogy :

$$f(x) = \begin{cases} f(0) = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, & \text{ha } x \in (-1; +\infty); \\ \lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \mathrm{arctg}(+\infty) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, & \text{ha } x \in (-\infty; -1) \end{cases}.$$

Tehát a keresett értékkészlet egy kételemű halmaz : $R_f = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$.

---

10. a) Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x + 1}}$, $\left(x > -\frac{1}{2}\right)$ *függvény másodfokú Taylor polinomját az* $a = 0$ *pont körül, és adjon felső becslést az* $\left|\frac{1}{\sqrt[3]{2x + 1}} - \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2\right)\right|$ *eltérésre, ha* $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

b) Határozza meg az $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $\ (x \in (-\pi/2; \pi/2))$ *függvény másodfokú Taylor polinomját az* $a = 0$ *pont körül, és adjon felső becslést az* $\left|f(x) - T_2 f(x)\right|$ *eltérésre, ha* $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, *ahol* $T_2 f$ *jelöli a kérdéses másodrendű Taylor polinomot.*

Megoldás :

a) A másodrendű Taylor polinomhoz, és a becslés hibatagjához szükségünk lesz a megfelelő deriváltakra. A tétel értelmében :

$T_2f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$ és

$\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right] : |f(x) - T_2f(x)| = \left|\dfrac{f'''(c)}{3!}\cdot x^3\right|$ alkalmas 0 és x közti c valós számmal.

Tehát :

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} = (2x+1)^{-\frac{1}{3}}, \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1,$

$f'(x) = -\dfrac{2}{3}\cdot(2x+1)^{-\frac{4}{3}}, \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\dfrac{2}{3},$

$f''(x) = \dfrac{16}{9}\cdot(2x+1)^{-\frac{7}{3}}, \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \dfrac{16}{9},$

$f'''(x) = -\dfrac{224}{27}\cdot(2x+1)^{-\frac{10}{3}}, \quad \Rightarrow \quad f'''(c) = -\dfrac{224}{27}\cdot(2c+1)^{-\frac{10}{3}} = -\dfrac{224}{27}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2c+1)^{10}}}.$

Ekkor : $T_2f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 = 1 - \dfrac{2}{3}\cdot x + \dfrac{8}{9}\cdot x^2.$

A keresett becslés pedig :

$$|f(x) - T_2f(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} - \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2\right)\right| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}\cdot x^3\right| = \left|-\frac{224}{27}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2c+1)^{10}}}\right|\cdot|x^3| \leq (0<c) \leq$$

$$\leq \frac{112}{81}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2c+1)^{10}}}\cdot|x|^3 \leq (\text{mivel} \quad 0<c<x\leq\frac{1}{4}) < \frac{112}{81}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2\cdot 0+1)^{10}}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{7}{324}.$$

---

b) Határozzuk meg a függvény másodrendű Taylor polinomját az $a = 0$ körül és a becsléshez a harmadrendű hibatagot. Ehhez szükségünk lesz a megfelelő deriváltakra. A tétel értelmében :

$$T_2f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$$

és

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] : |f(x) - T_2f(x)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}\cdot x^3\right|$$

alkalmas 0 és x közti c valós számmal.

Tehát :

$f(x) = \ln(1+\sin x), \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln(1) = 0,$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}, \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1,$

$f''(x) = \dfrac{-\sin x\cdot(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = -\dfrac{1}{1+\sin x}, \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1,$

$f'''(x) = \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}, \quad \Rightarrow \quad f'''(c) = \dfrac{\cos c}{(1+\sin c)^2},$

Ekkor : $T_2f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 = x - \dfrac{1}{2}x^2.$

A keresett becslés pedig, felhasználva, hogy $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ és c egy 0 és x közti alkalmas szám :

$$|f(x) - T_2f(x)| = \left|\ln(1+\sin x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\right| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}\cdot x^3\right| = \frac{|\cos c|}{6\cdot(1+\sin c)^2}\cdot|x^3| \leq \frac{1}{6\cdot(1+\sin(-\pi/4))^2}\cdot\frac{\pi^3}{4^3} <$$

$$< \frac{1}{6\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\frac{4^3}{4^3} < \frac{4}{6\cdot(2-\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3\cdot(6-4\sqrt{2})} = \frac{1}{3(3-2\sqrt{2})}.$$

---

11. a) Határozza meg, az $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$, $(x \in \mathbb{R})$ függvény lokális szélsőértékeit.

b) Határozza meg az f abszolút szélsőértékeit a $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ halmazon.

Megoldás :

a) Mivel $f \in \mathrm{D}$ és $f'(x) = e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = e^{1-x^2} \cdot (1-2x^2)$, ezért a lehetséges szélsőérték helyek a derivált zérushelyei lehetnek csak $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2} \cdot (1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Itt f' előjele csak az $(1-2x^2)$ tényezőtől függ. Ez egy "lefelé nyitott" parabola így a fenti két zérushelyen előjelet vált x_1-ben " $-$ " - ból " $+$ " - ba ezért ez egy lokális minimumhely, míg az x_2 pontban fordítva " $+$ " - ból " $-$ " - ba, így ez a pont egy lokális maximumhely. A felvett értékek itt $f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$ és $f(x_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

b) Mivel $f \in \mathrm{C}\left[-\frac{1}{2};1\right]$ és ez egy kompakt halmaz (korlátos és zárt intervallum) ezért Weierstrass tétele értelmében f-nek van abszolút maximuma és minimuma. Ezek az intervalum belső pontjaiban, vagy annak végpontjaiban lehetnek. A belső pontokban ott lehetnek, ahol a deirvált eltűnik, azaz a fenti két x_1, x_2 értékben. Ezek közül $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$ teljesül, míg $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \left[-\frac{1}{2};1\right]$. A végpontokkal összevetve, kapjuk, hogy :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt[4]{e^3}}{2} < f(1) = 1 < f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

Tehát : $x = -\frac{1}{2}$ - ben van az abszolút minimum, értéke : $-\frac{\sqrt[4]{e^3}}{2}$, és

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ - ben pedig az abszolút maximum, értéke : $\sqrt{\frac{e}{2}}$.

---

12. Határozza meg az $f(x) := x^2 \cdot \sqrt{4x+1}$, $(x > -1/4)$ függvény lokális szélsőértékeit. Adja meg az f függvény minimumát és maximumát a $[-1/6;2]$ intervallumon.

Megoldás :

a) Mivel $f \in \mathrm{D}$ és $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{4x+1} + x^2 \cdot \frac{4}{2 \cdot \sqrt{4x+1}} = \frac{2x \cdot (4x+1) + 2x^2}{\sqrt{4x+1}} = \frac{10x^2 + 2x}{\sqrt{4x+1}}$, ezért a lehetséges szélsőérték helyek a derivált zérushelyei lehetnek csak : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (5x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Itt f' előjele csak a számlálótól, azaz $2x \cdot (5x+1)$-től függ. Ez egy felfelé nyitott parabola így a fenti két zérushelyen előjelet vált, x_1-ben " $-$ " - ból " $+$ " - ba ezért ez egy lokális minimumhely, míg az x_2 pontban fordítva " $+$ " - ból " $-$ " - ba, így ez a pont egy lokális maximumhely. A felvett értékek itt : $f(x_1) = f(0) = 0$ és $f(x_2) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25 \cdot \sqrt{5}}$.

b) Mivel $f \in \mathrm{C}\left[-\frac{1}{6};2\right]$ és ez egy kompakt halmaz (korlátos és zárt intervallum) ezért Weierstrass tétele értelmében f-nek van abszolút maximuma és minimuma. Ezek az intervalum belső pontjaiban, vagy annak végpontjaiban lehetnek. A belső pontokban ott lehetnek, ahol a derivált eltűnik, azaz a fenti két x_1, x_2 értékben. Ezek közül $x_2 = -\frac{1}{5} \notin \left[-\frac{1}{6};2\right]$, míg $x_1 = 0 \in \left[-\frac{1}{6};2\right]$. A végpontokkal összevetve, kapjuk, hogy :

$$f(0) = 0 < f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36 \cdot \sqrt{3}} < f(2) = 12.$$

Tehát : $x = 0$ - ban van az abszolút minimum, értéke : 0, és

$x = 2$ - ben pedig az abszolút maximum, értéke : 12.

---

13. Határozza meg, egy $R > 0$ adott sugarú gömbbe írt hengerek közül azt, amelyiknek legnagyobb a térfogata.

Megoldás :

A beírt henger sugarát r-rel, magasságát h-val jelölve, írjuk fel Pitagorász tételét, és azt kapjuk, hogy : $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$.
Ezt felhasználva, a henger térfogata : $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot (4R^2 - h^2)$. A feladathoz elég, ha az $f(h) := h \cdot (4R^2 - h^2), \quad (h \in [0, 2R])$ függvény abszolút maximumát keressük meg. Mivel $f \in \mathrm{C}[0, 2R]$ és ez korlátos és zárt halmaz, így kompakt, ezért Weierstrass tétele értelmében a függvénynek van minimuma és maximuma. Keressük ezt az intervallum végpontjaiban, vagy a belső pontokban, a derivált zérushelyei közt :

$f'(h) = (4R^2 - h^2) + h \cdot (-2h) = 4R^2 - 3h^2 = 0$. Ez h-nak másodfokú polinomja, így a jelzett intervallum pontjaiban : $f'(h) > 0 \Leftrightarrow h \in \left[0, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right], \quad f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ és $f'(h) < 0 \Leftrightarrow h \in \left[\frac{2R}{\sqrt{3}}, 2R\right]$ ezért a tanult tételek értelmében f' a $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ zérushelyen előjelet vált : pozitívból, negatívba, így a jelzett pont lokális maximumhely. Mivel az intervallum végpontjaiban : $f(0) = f(2R) = 0 < f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \left(4R^2 - \frac{4R^2}{3}\right) = \frac{16R^3}{3\sqrt{3}}$ így ez utóbbi az abszolút maximum is.

A keresett henger adatai tehát : magassága $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ és sugara $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$, végül a maximális térfogat értéke $V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

---

14. Végezzen teljes tárgyalást, majd ábrázolja grafikusan az alábbi függvényeket :

$$a) f(x) = e^{1/x} - x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \quad b) f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}); \quad c) f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (x > 0).$$

Megoldás :

b) $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\});$

(1.) Tengelymetszési pontok : mivel $f(0) = 0$, ezért a függvény az y tengelyt a $(0; 0)$ pontban metszi, illetve ugyanitt metszi az x tengelyt is, ugyanis $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2.) f' és előjele : $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+2)^2 - 2(x+2) \cdot x^3}{(x+2)^4} = \frac{x^2 \cdot (x+6)}{(x+2)^3}$.

Ekkor : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vagy $x = -6$; $\quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 \neq x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$ és $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-6, -2)$.

A tételeink értelmében : f szigorúan monoton fogy a $(-6; -2)$ intervallumon, és szigorúan monoton nő a $(-\infty, -6)$, illetve $(-2, 0), (0 + \infty)$ intervallumokon.

(3.) f'' és előjele : $f''(x) = \frac{(3x^2 + 12x)(x+2)^3 - (x^3 + 6x^2) \cdot 3 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{24x}{(x+2)^4}$.

Ekkor a D_f halmazon : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, továbbá $0 < f''(x) \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$ és $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$.

Tehát : f konvex a $(0; +\infty)$ intervallumon és konkáv a $(-\infty; -2)$, illetve $(-2; 0)$ intervallumokon és inflexiós pontja van az $x = 0$ pontban.

(4) Határértékek, aszimptoták : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} = +\infty$.

Vizsgáljuk tovább a következő határértékeket :

$$a := \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x+2)^2} = 1.$$

Ekkor

$$b := \lim_{x \to -\infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4.$$

Tehát az $y = ax + b = x - 4$ egyenes aszimptota $-\infty$-ben. Hasonlóan kapjuk, hogy az $y = x - 4$ egyenes aszimptota $+\infty$-ben is.

Továbbá : $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{-8}{+0} = -\infty$, így az $x=-2$ egyenes függőleges aszimptota "mindkét oldalról".

---

c) $f(x) = x^2 \cdot \ln x \ \ (x>0)$.

(1) Tengelymetszési pontok : mivel $x>0$ ezért, most csak az x tengelyt metszheti a függvény, ott ahol :

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1$, azaz f grafikonja metszi az x tengelyt az $(1,0)$ pontban.

(2) f' és előjele : $f'(x) = 2x\cdot\ln x + x = x\cdot(2\cdot\ln x+1) = 0 \Leftrightarrow (0<x \text{ miatt})\ 2\cdot\ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$.

Mivel $x>0$ kapjuk, hogy : $0<f'(x) \Leftrightarrow 0<2\cdot\ln x+1 \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}}$ és $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln x+1<0 \Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{1}{2}}$.

A tételeink értelmében : f szigorúan monoton fogy a $(0;e^{-\frac{1}{2}})$ intervallumon, szigorúan monoton nő az $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ intervallumon, és az $x=e^{-\frac{1}{2}}$ pontban lokális minimuma van, melynek értéke $f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\dfrac{1}{2e}$.

(3) f'' és előjele : $f''(x) = 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x} + 2\cdot\ln x + 1 = 2\cdot\ln x+3 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln x+3=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$.

Továbbá : $0<f''(x) \Leftrightarrow 0<2\cdot\ln x+3 \Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$ és $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln x+3<0 \Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{3}{2}}$.

Tehát : f konvex az $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ intervallumon, konkáv a $(0,e^{-\frac{3}{2}})$ intervallumon és inflexiós pontja van az $x=e^{-\frac{3}{2}}$ pontban, ahol $f(e^{-\frac{3}{2}}) = -\dfrac{3}{2e^3}$.

(4) Határértékek, aszimptoták : $\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2\cdot\ln x) = 0\cdot(-\infty) = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{-\infty}{+\infty} =$ (L'Hospital szabály)$= \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0+0} -\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = -0$.

Továbbá : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\cdot\ln x) = +\infty$. Mivel még $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\ln x) = +\infty$ is, ezért nincs sem vízszintes, sem ferde aszimptota.
