$\boxed{\text{9. és 10. gyakorlat}}$

Elemi függvények. Konvexitás és konkávitás. Teljes függvényvizsgálat

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja a π számot.
- Értelmezze az $\operatorname{arc}\sin$ függvényt, és ábrázolja egy koordinátarendszerben a $\sin$ és az $\operatorname{arc}\sin$ függvényeket.
- Értelmezze az $\operatorname{arc}\operatorname{tg}$ függvényt, és ábrázolja egy koordinátarendszerben a tg és az $\operatorname{arc}\operatorname{tg}$ függvényeket.
- Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?
- Mi a konvex függvény definíciója?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* az első derivált segítségével.
- Jellemezze egy függvény *konkávitását* a második derivált segítségével.
- Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
- Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton csökkenésével* kapcsolatban?
- Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
- Mi a *konkáv* függvény definíciója?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második derivált segítségével.
- Milyen állítást ismer a $(-\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

■ Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{arc}\sin\tfrac{1}{2},\quad \operatorname{arc}\cos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \operatorname{arc}\operatorname{tg}1,\quad \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\sqrt{3}.$$

2. A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \tfrac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc}\sin$ és az $\operatorname{arc}\cos$ függvények garfikonjai között?

3. A $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $\big(y \in (0, \pi)\big)$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \tfrac{\pi}{2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc}\operatorname{tg}$ és az $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}$ függvények garfikonjai között?

4. A $\sin y = \sin(\pi - y)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával mutassa meg, hogy

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases},$$

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ennek felhasználásával ábrázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,sin}(\sin x)$$

függvény grafikonját.

5. Vizsgálja meg konvexitás és konkávitás szempontjából a következő függvényeket:

(a) exp,

(b) ln,

(c) $f(x) := x^\alpha \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

6. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n < \dfrac{x^n + y^n}{2} \qquad (1 < n \in \mathbb{N};\ x, y > 0 \text{ és } x \neq y);$

(b) $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \neq y);$

7. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

8. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^2 + 9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(c) $f(x) := x - 2 \operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

9. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

10. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. *Gauss-görbe*).

11. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{x^3+x}{x^2-1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

függvény grafikonját.

12. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^x \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény grafikonját.

Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in [-1, 1]),$$
$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

2. Bizonyítsa be, hogy

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2} < x\ln x + y\ln y \qquad (x, y > 0).$$

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját.

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \ln\big(x^2+2x+2\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big),$

(b) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \big(x \in (-1, 1),\ x \neq 0\big).$

2. Az $\arccos(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \arccos(\cos x)$$

függvény képét.

3. Bizonyítsa be, hogy

$$x^{\lambda_1}y^{\lambda_2} < \lambda_1 x + \lambda_2 y \qquad (x, y > 0;\ \lambda_1, \lambda_2 > 0;\ \text{és } \lambda_1 + \lambda_2 = 1).$$

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{x(x^2+1)}{x^2-1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

függvény grafikonját.

5. Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

6. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

7. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x - 2\operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x(x-3)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$,

(d) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\})$,

(e) $f(x) := \dfrac{x^2+9}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(f) $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,

(g) $f(x) := x + \sqrt{1-x} \qquad (x \le 1)$,

(h) $f(x) := \sqrt{x^2-x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(i) $f(x) := x\sqrt{2+x} \qquad (x \ge -2)$,

(j) $f(x) := x\sqrt{8-x^2} \qquad (|x| \le 2\sqrt{2})$,

(k) $f(x) := \sin^2 x - 2\cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(l) $f(x) := e^{2x-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(m) $f(x) := \dfrac{1+x^2}{e^{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(n) $f(x) := \ln(x^2-1) \qquad (|x| > 1)$,

(o) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \qquad (x > 0)$,

(p) $f(x) := x \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(q) $f(x) := \begin{cases} x^4\big(2 + \sin \frac{1}{x}\big), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$