Definíciók és tételek
Analízis 2. vizsgákon
Programtervező informatikus szak
2017-2018. tanév tavaszi félév

• Függvények határértéke

1. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Válasz. Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van.

2. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

3. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = A.$$

4. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós *hatványsornak* nevezzük.

5. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

6. Definiálja függvény jobb oldali határértékét.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az *a helyen létezik a jobb oldali határértéke*, ha a

$$g(x) := f(x) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)$$

függvénynek a-ban van határértéke. Ezt a határértéket az f függvény *a helyen vett jobb oldali határértékének* nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{a+0} f := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- **Függvények folytonossága**

7. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *pontbeli folytonosságát.*

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban folytonos*, ha

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\ \delta > 0, \quad \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

8. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

9. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

10. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C\{a\} \quad \iff \quad \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ sorozatra } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

11. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény pontbeli folytonosságára vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g} \in C\{a\}$.

12. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$.

13. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról folytonos egy pontban*?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *jobbról folytonos az a pontban*, ha

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\ \delta > 0, \quad \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ a \le x < a + \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

14. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f korlátos $[a, b]$-n.

15. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

16. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

17. Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\quad \exists\, \xi \in (a, b): \quad f(\xi) = c$.

18. Mit jelent az, hogy egy f függvény *Darboux-tulajdonságú*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú I-n*, ha minden $a, b \in I$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

19. Milyen állítást ismer az inverz függvény folytonosságáról?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és invertálható. Ekkor az f^{-1} inverz függvény folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon.

20. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

21. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

22. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Válasz. Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az f függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.

• Differenciálszámítás

23. Mi a *belső pont* definíciója?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A halmaz *belső pontja*, ha

$$\exists\, K(a), \text{ hogy } K(a) \subset A.$$

Az $\operatorname{int} A$ szimbólummal jelöljük az A halmaz belső pontjainak a halmazát.

24. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

Válasz. Ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor:

$$f \in D\{a\} \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{és ez a határérték véges.}$$

25. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Válasz. $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. az $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

26. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról deriválható* egy pontban?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ jobb oldali határérték,}$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az *a pontban jobbról deriválható*. A fenti határértéket az f függvény *a pontbeli jobb oldali deriváltjának nevezzük*, és az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük.

27. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

Válasz. $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

28. Mi az *érintő* definíciója?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény grafikojának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban *van érintője*, ha $f \in D\{a\}$. Ekkor f *garfikonjának* $\big(a, f(a)\big)$ *pontbeli érintőjén* az

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

29. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\} \Longrightarrow fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

30. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

31. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

32. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény (α, β)-n, és egy $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$, továbbá $f'(a) \neq 0$. Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, ahol $b := f(a)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

33. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban az f függvény differenciálható és a deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott sor összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1}.$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

34. Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

35. Értelmezze az ln függvényt.

Válasz. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért invertálható. Az

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

függvényt *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük.

36. Mi a definíciója az a^x $\;(a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?

Válasz. $a^x := \exp(x \ln a)$.

37. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $f \in D\big(K_r(a)\big)$ és $f' \in D\{a\}$.

38. Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó *Leibniz-tételt.*

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f, g \in D^n\{a\}$, akkor $fg \in D^n\{a\}$ és

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

39. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális maximuma van*?

Válasz. Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban *lokális maximuma* van, ha

$$\exists\, K(c): \quad f(x) \le f(c) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

40. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az f függvénynek a c pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

41. Mondja ki a *Rolle-tételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b):$ $f'(\xi) = 0$.

42. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b)$, akkor

$$\exists\, \xi \in (a,b): \ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(\xi).$$

43. Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a,b], f, g \in D(a,b)$ és $g'(x) \ne 0$, $(x \in (a,b))$. Ekkor

$$\exists\, \xi \in (a,b): \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

44. Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$ és $f' > 0$ az (a,b) intervallumon, akkor f szigorúan monoton növekedő $[a,b]$-n.

45. Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$, akkor

$$f \ \text{ monoton növekedő } \ [a,b]\text{-n} \iff f' \ge 0 \ \ [a,b]\text{-n}.$$

46. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen *előjelet vált*?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$, hogy $K_\delta(c) \subset \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (c - \delta, c)$ és $f(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (c, c + \delta)$ vagy fordítva.

47. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$ és f' a $c \in (a,b)$ pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek c-ben lokális szélsőértéke van.

48. Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a,b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális minimuma van.

49. Írja le a *lokális maximumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a, b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális maximuma van.

50. Mi a konvex függvény definíciója?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ esetén}$$

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

51. Milyen ekvivalens definíciót ismer a konvexitásra?

Válasz. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ és } \ \forall\, \lambda \in (0, 1) \ \text{ esetén}$$

$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

52. Jellemezze egy függvény *konvexitását* az első derivált segítségével.

Válasz. Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } (a, b)\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \ \text{ monoton növekedő } (a, b)\text{-n}.$$

53. Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második derivált segítségével.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D^2(I)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } I\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \ge 0 \ \ I\text{-n}.$$

54. Jellemezze egy függvény konvexitását az érintőkkel.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D(I)$. Ekkor

$$f \ \text{ konvex } I\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, c \in I \ \text{ pontban } \ f(x) \ge f'(c)(x - c) + f(c) \ \ (\forall\, x \in I).$$

55. Mi az inflexiós pont definíciója?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D(I)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in I$ pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha

$$\exists\, \delta > 0 : \quad f \text{ konvex } (c - \delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c + \delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva.}$$

56. Mi az aszimptota definíciója?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek $(+\infty)$-ben *van aszimptotája*, ha létezik olyan $l(x) = Ax + B$ $(x \in \mathbb{R})$ lineáris függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor l az f függvény *aszimtotája* $(+\infty)$-ben. (Vagy geometriai nyelven: az $y = f(x)$ egyenletű görbe aszimptotája $(+\infty)$-ben az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes.)

57. Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek $(+\infty)$-ben akkor és csak akkor van aszimptotája, ha *léteznek* és *végesek* az alábbi határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B.$$

Ebben az esetben az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes f aszimptotája $(+\infty)$-ben. Ha a fenti határértékek közül valamelyik nem létezik vagy nem véges, akkor f-nek nincs $(+\infty)$-ben aszimptotája.

58. Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*

Válasz. Legyen $-\infty \le a < b < +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(a, b)$, $g(x) \ne 0$ és $g'(x) \ne 0$ $(x \in (a, b))$, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ és tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

59. Definiálja a π számot.

Válasz. A cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$-nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos\xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot: $\pi := 2\xi$.

60. Definiálja a *periodikus* függvényt.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periodikus*, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x + p) = f(x).$$

A p számot f *periódusának*, az f függvényt pedig p *szerint priodikus* függvénynek nevezzük.

61. Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?

Válasz. A sin és a cos függvények 2π-szerint periodikusak függvények, és 2π a legkisebb periódusuk.

62. Értelmezze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényt.

Válasz. A sin függvény szigorúan monoton növekedő a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvény.

63. Értelmezze az $\operatorname{arc\,cos}$ függvényt.

Válasz. A cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az $\operatorname{arc\,cos}$ függvény.

64. Értelmezze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt.

Válasz. A tg függvény szigorúan monoton növekedő a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény.

65. Értelmezze az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvényt.

Válasz. A ctg függvény szigorúan monoton csökkenő a $(0, \pi)$ intervallumon, ezért invertálható. Ennek a leszűkítésnek az inverze az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvény.

66. Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor $f \in D^{\infty}\big(K_R(a)\big)$ és

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \big(n = 0, 1, 2, \ldots\big).$$

67. Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \in D^{\infty}\{a\}$. Ekkor a

$$\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó *Taylor-sorának* nevezzük.

68. Mi a *Taylor-polinom* definíciója?

Válasz. Ha $f \in D^{\infty}\{a\}$, akkor

$$T_{n,a}(f,x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

az f függvény *a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomja.*

69. Fogalmazza meg a *Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal* néven tanult tételt.

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor $\forall\, x \in K(a)$ ponthoz $\exists\, \xi \in (a, x)$ (ha $a < x$) vagy $\exists\, \xi \in (x, a)$ (ha $x < a$), hogy

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

• Határozatlan integrál (primitív függvények)

70. Definiálja a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. A $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

71. Milyen *elégséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

72. Milyen *szükséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon, azaz tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

73. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye.

Válasz. $f(x) := \operatorname{sign}(x) \ \big(x \in (-1, 1)\big)$.

74. Milyen állítást ismer a primitív függvények számával kapcsolatban?

Válasz. Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.

1^o Ha $F : I \to \mathbb{R}$ a f függvény egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.

2^o Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei a f függvénynek, akkor

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad F_1(x) = F_2(x) + c \qquad (x \in \mathbb{I}),$$

azaz a primitív függvények konstansban különböznek egymástól.

75. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye. A f ***függvény határozatlan integrálja*** a következő függvényhalmaz:

$$\int f := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Ezt a függvényhalmazt így is jelöljük:

$$\int f(x)\, dx := F(x) + c \qquad (x \in I).$$

76. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

77. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy, $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx.$$

78. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $f : J \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek van primitív függvénye, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

79. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

• Határozott integrál

80. Definiálja intervallum egy felosztását.

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

81. Mit jelent egy felosztás finomítása?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

82. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := \inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\}$ $(i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

83. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\}$ $(i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

84. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}\big([a, b]\big)\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik a szuprémuma. Az

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

85. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\}$ halmaz alulról korlátos, ezért létezik az infimuma. Az

$$I^*(f) := \inf\bigl\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\bigr\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

86. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ekkor f *Riemann-integrálható* az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_* f = I^* f$.

87. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ha $I_* f = I^* f$, akkor az f függvény határozott (vagy Riemann-)integrálja az $I_* f = I^* f$ valós szám.

88. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.

Válasz. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

89. Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó, ill. felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege.

90. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $\Omega(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó oszcillációs összege. Ekkor

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \;\; \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

91. Definiálja a *Riemann-féle közelítő összegeket.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a, b]$ egy felosztása és $\xi := \bigl(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\bigr)$, ahol $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Ekkor a

$$\sigma\bigl(f, \tau, \xi\bigr) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

számot az f függvény τ felosztáshoz és a ξ közbülső helyekhez tartozó Riemann-féle közelítő összegének nevezzük.

92. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a Riemann-integrálhatóságra a Riemann-féle közelítő összegekkel?

93. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a,b] \subset R[a,b]$, de $C[a,b] \neq R[a,b]$.

94. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha f monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a,b]$.

95. Definiálja az $[a,b]$ intervallumon a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha F folytonos $[a,b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a,b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

96. Hogyan szól a *Newton–Leibniz-tétel?*

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek létezik primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$, ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

97. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Válasz. Ha $f, g \in R[a,b]$ és $f \leq g$, akkor $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

98. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

99. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Válasz. Legyen $f, g \in R[a,b]$, $g \geq 0$, $M = \sup \mathcal{R}_f$ és $m = \inf \mathcal{R}_f$. Ekkor

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Ha még $f \in C[a,b]$ is teljesül, akkor $\exists\ \xi \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

100. Fogalmazza meg a Cauchy–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget.

Válasz. Ha f és g integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor fg is integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

101. Definiálja az integrálfüggvényt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$ függvényt a f függvény *integrálfüggvényének* nevezzük.

102. Írja le az integrálfüggvénnyel kapcsolatban tanult tételt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$. Ekkor

1^o a F integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-n;

2^o ha $d \in (a,b)$ és f folytonos d-ben, akkor F differenciálható d-ben és $F'(d) = f(d)$.