11., 12. és 13. gyakorlat

L'Hospital-szabályok. Taylor-polinomok és Taylor-sorok. Vegyes feladatok

Szükséges ismeretek

- Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*
- Írja le a $\frac{+\infty}{-\infty}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*
- Fogalmazza meg a hatványsor összegfüggvényének a deriválására vonatkozó tételt. (L. az 5. előadást.)
- Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

  Válasz: Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:
  $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ $\big(x \in K_R(a)\big)$. Ekkor $f \in D^\infty\big(K_R(a)\big)$ és
  $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\big(n = 0, 1, 2, \ldots\big)$.
- Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?
- Mi a *Taylor-polinom* definíciója?
- Fogalmazza meg a *Taylor-formula Lagrange maradéktaggal* néven tanult tételt.
- Milyen *elégséges feltételt* ismer arra, hogy egy függvény Taylor-sora előállítja a függvényt?

Feladatok

1. Mutassa meg, hogy

(a) ha $a \in (1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén az a^x függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa);

(b) ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa gyorsabban tart végtelenhez, mint $\ln x$ bármely pozitív egész kitevőjű hatványa).

2. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.)

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.)

(a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$, (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+3)}{\operatorname{ch}(x-3)}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$.

A (b) feladatban figyeljük meg, hogy a L'Hospital-szabály azért nem alkalmazható, mert a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték nem létezik, pedig $\lim\limits_{0} = f \lim\limits_{0} g = 0$, ugyanakkor a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik.

5. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot az $x + 1$ hatványai szerint. A feladat általánosításaként mutassa meg, hogy ha p egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

6. Írja fel az f függvény $a = 0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, $T_{n,a}(f, x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{n,a}(f, x)|$$

hibára az I intervallumon, ha

(a) $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad I = [0, 1]$;

(b) $f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)), \quad n = 2, \quad I = [0, 1]$;

(c) $f(x) := \operatorname{tg} x \quad (|x| < \frac{\pi}{2}), \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$.

7. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

8. Legyen

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad (x \in (-1, +\infty)) .$$

(a) Mutassa meg, hogy az f függvény $a = 0$ ponthoz tarozó Taylor-sora:

$$T_a(f,x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Bizonyítsa be, hogy a Taylor-sor a $(-1, 1]$ intervallumon előállítja a függvényt, vagyis fennáll az

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \big(x \in (-1, 1]\big)$$

egyenlőség. Speciálisan:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

9. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Speciálisan:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x \cdot \ln x$,

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-x^2} \cdot \ln(x^2 - x + 1)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{2,0}(f,x)|$$

hibára a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}\quad (a>0)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\Big)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} xe^{1/x} - x$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{-x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^x$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)^x$.

2. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$.

3. Rendezze át a $p(x) := (1+2x)^3$ $(x\in\mathbb{R})$ polinomot $x-\frac{1}{2}$ hatványai szerint.

4. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli n-edik Taylor-polinomját:

(a) $f(x) := \sqrt{x}\quad (x\ge 0)\qquad (n=3,\ a=1)$,

(b) $f(x) := \sin(\sin x)\quad (x\in\mathbb{R})\qquad (n=3,\ a=0)$.

5. Írja fel az alábbi f függvények $a=0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a megadott I intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt:

(a) $f := \sin,\quad n=4,\ \ I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

(b) $f(x) := \ln(1+x)\ \ (x>-1),\quad n\in\mathbb{N},\quad I := [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

6. Számítsa ki ε-nál kisebb hibával az alábbi számokat a Taylor-formula felhasználásával:

(a) $e\quad (\varepsilon = 10^{-3})$, (b) $\sin 1^o\quad (\varepsilon = 10^{-5})$,

(c) $\cos 9^o\quad (\varepsilon = 10^{-5})$, (d) $\ln 1{,}2\quad (\varepsilon = 10^{-3})$.

7. Adja meg a következő függvények 0 pont körüli Taylor-sorát:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x^2-5x+6}\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\})$,

(b) $f(x) := \sin^2 x\quad (x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2}\quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\big)$.

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Vegyes feladatok

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám. Igazolja, hogy

(a) $\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x \in (-1,+\infty);\quad n \geq 1),$

(b) $\sin^{(n)} x = \sin\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $\cos^{(n)} x = \cos\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

2. Mutassa meg, hogy az f függvény invertálható, és határozza meg az inverzét:

(a) $f(x) := \pi - \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \qquad \big(x \in \big[\tfrac{1}{2}, 1\big]\big),$

(b) $f(x) := \operatorname{tg}\Big(\dfrac{\operatorname{arc\,sin}\,(2x-5)}{3}\Big) \qquad (x \in [2,3]).$

3. Az $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,cos}(\cos x)$$

függvény képét.

4. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x > 1 \\ 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

5. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1),$

(b) $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1),$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$