Az 1. zh témakörei

Analízis 2.

2016. október

1. feladat. *A definíció alapján határozza meg a következő határértékeket:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x-4}{x^2+1}$.

Megoldás.

(a) (-3) a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez először átalakítjuk a törtet:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\big).$$

Ez a kifejezés (-3)-hoz „közeli" pontokban $-\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$-höz „közeli" értékeket vesz fel, ezért azt *sejtjük*, hogy a keresett határérték $-\frac{2}{5}$. A *bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right) \right| < \varepsilon,$$

ha $0 < |x-(-3)| = |x+3| < \delta$, valamely, alkalmas, ε-tól függő $\delta > 0$ számmal. Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést:

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right) \right| = \frac{|2x^2+5x-3|}{5(x^2+1)} = \frac{|(x+3)(2x-1)|}{5(x^2+1)} = |x+3| \cdot \frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}.$$

Ebből látszik, hogy egy lehetséges δ megkapható, ha felülről megbecsüljük az $\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}$ kifejezést. Ha (például) $|x-(-3)| = |x+3| < 1$, azaz ha $-4 < x < -2$, akkor

$$\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)} < \frac{2|x|+1}{5(x^2+1)} < \frac{2\cdot 4+1}{5\big((-2)^2+1\big)} = \frac{9}{25}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \min\left\{1, \frac{25\varepsilon}{9}\right\}$ választás megfelelő. ■

(b) $+\infty$ a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez most a következő átalakítást végezzük el:

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} = \frac{x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A *sejtés* tehát az, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty.$$

Azt kell *igazolnunk*, hogy $\forall\, P > 0$ számhoz $\exists\, x_0 > 0$, hogy

$$(*) \qquad \frac{x^3+x-4}{x^2+1} > P, \qquad \text{ha } x \geq x_0.$$

Mivel

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} \overset{\boxed{\text{ha } x>4}}{>} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2},$$

ezért $(*)$ teljesül, ha $x \geq x_0 := \max\{4, 2P\}$. ■

2. feladat. *Számítsa ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+100}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-\cos x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x}$.

Meogoldás.

(a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítsük a számlálót, azaz bővítsük a törtet $(\sqrt{1+x}+1)$-gyel, majd egyszerűsítsünk x-szel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

(b) 0 a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó, ezért azonos átalakításokkal nem kritikus határértékre próbáljuk visszavezetni. Mivel

$$1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2},$$
$$\cos 7x-\cos 3x=\cos(5+2)x-\cos(5-2)x=-2\sin 5x\sin 2x \quad \text{és}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1 \quad \text{minden } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ esetén,}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin 5x\cdot\sin 2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2}=-\frac{1}{40}. \quad \blacksquare$$

(c) A számláló tart 1-hez, a nevező pedig 0-hoz, ha $x\to 1$. $\frac{1}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Most a jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali pedig $-\infty$, ezért a keresett határérték nem létezik.

(d) A számlálónak $+\infty$, a nevezőnek pedig $-\infty$ a határértéke $-\infty$-ben, tehát ez egy $\frac{+\infty}{-\infty}$-típusú kritikus határérték. Emeljük ki a domináns tagokat: a számlálóban x^2-et, a nevezőben pedig x^3-t. Egyszerűsítés után azt kajuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+1000}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3\cdot(1+\frac{1000}{x^3})}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1000}{x^3}}=0. \qquad \blacksquare$$

(e) Írjuk be $\sin x$, e^x és $\cos x$ helyére a **hatványsoraikat**:

$$\frac{x-\sin x}{e^x-\cos x}=\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\right)}{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\right)}=$$
$$=\frac{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}-\cdots}{x+2\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+2\dfrac{x^6}{6!}\cdots}=\frac{\dfrac{x^2}{3!}-\dfrac{x^4}{5!}+\dfrac{x^6}{7!}-\cdots}{1+2\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+2\dfrac{x^5}{6!}\cdots}.$$

Alkalmazzuk most a hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tételt: a számláló határértéke 0-ban 0, a nevezőé pedig 1, ezért a kérdezett határérték 0. ■

(f) Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x}=\frac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[4]{16}}{x}$$

az $f(x) := \sqrt[4]{x}$ $(x > 0)$ függvénynek az $a = 16$ ponthoz tartozó *különbségihányados-függvénye.* Ennek a függvénynek a határértéke $x \to 0$ esetén éppen az f függvény $a = 16$ pontban vett deriváltja. Mivel az f függvény mindenütt *differenciálható* és

$$f'(16)=\left(x^{1/4}\right)'_{x=16}=\frac{1}{4}\left(x^{-3/4}\right)_{x=16}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{32},$$

ezért a kérdezett határérték $\frac{1}{32}$. ■

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\} \\ 0, & ha\ x = 2, x = 5; \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit és a szakadási helyek típusait.

Megoldás. Mivel $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$, ezért 2 és 5 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$ halmaz minden pontjában folytonos. A további vizsgálatokhoz alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x-3}{x-5}=1+\frac{2}{x-5}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{2,5\}).$$

Legyen $a = 2$. A fentiek alapján

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-5}=\frac{1}{3}\neq f(2)=0,$$

ezért az $a = 2$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.*

Legyen most $a = 5$. Ekkor

$$\lim_{x\to 5-0} f(x)=-\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 5+0} f(x)=+\infty,$$

ami azt jelenti, hogy az $a = 5$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

4. feladat. *Írja fel az* $f(x) := \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$ $(0 < x < \pi^2)$ *függvény grafikonjának az* $x_0 := \frac{\pi^2}{4}$ *abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.*

Megoldás. Az $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$ azonosság felhasználásával $f(x)$ így alakítható át:

$$f(x)=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}=e^{e^{1/x}\ln(\sin\sqrt{x})}\qquad (0<x<\pi^2).$$

Az f függvénynek ebből az alakjából már következik, hogy f deriválható, és minden $x \in (0, \pi^2)$ pontban

$$f'(x)=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}\cdot\ln(\sin\sqrt{x})+e^{1/x}\cdot\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right].$$

Az f függvény grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontban van érintője, és az érintőegyenes egyenlete:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Mivel $x_0 = \frac{\pi^2}{4}$, $\sin\sqrt{x_0} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\sqrt{x_0} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\ln(\sin\sqrt{x_0}) = \ln 1 = 0$ és $f(x_0) = 1$, ezért $f'(x_0) = 0$. A keresett érintőegyenes egyenlete tehát $y = 1$. ■

5. feladat *Milyen a és b valós paraméter esetén lesz mindenütt differenciálható az*

$$f(x) := \begin{cases} a \operatorname{tg} x, & \textit{ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ e^x - b, & \textit{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvény. Adja meg a deriváltfüggvényt is.

Megoldás.

Ha $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = \frac{a}{\cos^2 x_0}$$

minden $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Ha $\boxed{x_0 > 0}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = e^{x_0}$$

minden $b \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Legyen $\boxed{x_0 = 0}$. A deriválhatóság szükséges feltétele a folytonosság, ezért

az első lépésben f **folytonosságát** kell megvizsgálni a 0 pontban. Ehhez a függvénynek a 0-pontbeli jobb-és bal oldali határértékét kell meghatározni. Ha ezek egyenlők és a közös értékük a függvény pontbeli helyettesítési értékével megegyezik, akkor a függvény folytonos, az ellenkező esetben nem folytonos, következésképpen nem deriválható.

Ahhoz, hogy az f függvény itt deriválható legyen szükséges, hogy f *folytonos* is legyen ebben a pontban, azaz a jobb- és a bal oldali határértékek megegyezzenek. Mivel

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (e^x - b) = 1 - b = f(0)$$

és

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} a \operatorname{tg} x = 0,$$

ezért

$$f \in C\{0\} \iff f(0+0) = f(0-0) = f(0) = 1 - b \iff 1 - b = 0 \iff b = 1,$$

és ez azt is jelenti, hogy $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén f *nem deriválható* 0-ban.

A második lépésben a függvény **deriválhatóságát** vizsgáljuk a 0 pontban. A fentiek miatt tegyük fel, hogy $b = 1$.

Az f függvény jobbról deriváható az $x_0 = 0$ pontban és

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = (e^x - 1)'_{x=0} = e^0 = 1.$$

A bal oldali derivált:

$$f'_-(0) := \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{a \operatorname{tg} x - 0}{x} = \lim_{x \to 0-0} a \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = a.$$

Ezért

$$f \in D\{\} \quad \iff \quad f'_+(0) = f'_-(0) \quad \iff \quad a = 1 \text{ és } b = 1.$$

Összefoglalva: Az f függvény pontosan akkor deriválható az értelmezési tartományán (azaz a $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ halmazon), ha $a = b = 1$. Ekkor a deriváltfüggvény

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ e^x, & \text{ha } x > 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Analízis 2. (BSc) **1. ZÁRTHELYI** **2016. október 28.**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *A definíció alapján határozza meg a*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}$$

határértéket.

Megoldás. $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Mivel

$$\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x+7}{x^2+1}\qquad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\big),$$

ezért a *sejtés*:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}=4.$$

A *definíció alapján a bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \ \exists\,\delta>0,\ \ \forall\,x: 0<|x-1|<\delta \text{ esetén } \left|\frac{x+7}{x^2+1}-4\right|<\varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ számot. Ekkor

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1}-4\right|=\frac{|4x^2-x-3|}{x^2+1}=\frac{|(x-1)(4x+3)|}{x^2+1}=|x-1|\cdot\frac{|4x+3|}{x^2+1}.$$

Ha (például) $|x-1|<1$, azaz ha $0<x<2$, akkor

$$\frac{|4x+3|}{x^2+1}=\frac{4x+3}{x^2+1}<\frac{4\cdot 2+3}{1}=11.$$

Így

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1}-4\right|<11\cdot|x-1|<\varepsilon,\quad \text{ha}\ \ 0<|x-1|<1\ \ \text{és}\ \ 0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{11}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\varepsilon>0$ számhoz a $\delta:=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{11}\right\}$ választás megfelelő, ezért

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}=4.\ \blacksquare$$

2. feladat. *Számítsa ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin 2x}{\sin 3x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}$.

Megoldás. (a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítés, majd szorzatra bontás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\big(\sqrt{x-1}+1\big)=$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\cdot\big(\sqrt{x-1}+1\big)=(x+2)\cdot\big(\sqrt{x-1}+1\big).$$

Ez az átalakítás már nem kritikus határértékre vezet, ezért használhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}(x+2)\cdot\big(\sqrt{x-1}+1\big)=4\cdot 2=8.\ \blacksquare$$

(b) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Tudjuk, hogy

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \quad \text{minden } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ esetén.}$$

Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot x - \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2}{\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}.$$

A $(*)$ és a $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ határértékek, valamint a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin 3x} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}. \ \blacksquare$$

(c) Írjuk fel az e^{-x} és az e^{3x} $(x \in \mathbb{R})$ függvény hatványsorát. Mivel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + 3^2\frac{x^2}{2!} + 3^3\frac{x^3}{3!} + 3^4\frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\frac{e^{-x} - e^{3x}}{x} = \frac{-4x + \frac{1-3^2}{2!}x^2 - \frac{1+3^3}{3!}x^3 + \frac{1-3^4}{4!}x^4 - \cdots}{x} =$$

$$= -4 + \frac{1-3^2}{2!}x - \frac{1+3^3}{3!}x^2 + \frac{1-3^4}{4!}x^3 - \cdots .$$

Az utóbbi hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, és az összegfüggvényének a határértéke 0-ban az összegfüggvény 0-ban vett helyettesítési értéke, vagyis -4. Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - e^{3x}}{x} = -4. \ \blacksquare$$

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\} \\ 3, & \text{ha } x = -1 \\ 0, & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáját.

Megoldás. Mivel $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, ezért -1 és -2 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ halmaz minden pontjában folytonos.

Az $a = -1$ és az $a = -2$ pontokban kell még megvizsgálni a függvényt. Ehhez először a következő átalakítást végezzük el:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}).$$

Legyen $a = -1$. A fentiek alapján

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x+4}{x+2} = 3 = f(1),$$

ezért az $a = -1$ pontban az f függvény *folytonos* (itt nincs szakadási helye).

Legyen most $a = -2$. Ekkor

$$\lim_{x\to-2+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0} \frac{x+4}{x+2} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-2-0} f(x) = \lim_{x\to-2-0} \frac{x+4}{x+2} = -\infty.$$

Az egyoldali határértékek tehát léteznek és különbözőek. Mivel ezek nem végesek, ezért az $a = -2$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

4. feladat. *A logaritmusazonosságok alkalmazása után számítsa ki az*

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \qquad (x > -1)$$

függvény deriváltját.
Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 := 0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

Megoldás. Az f függvény deriválható minden $x > -1$ pontban (l. az elemi függvények deriválására, valamint a műveletek és a deriváltakra vonatkozó állításokat). A logaritmus azonosságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - 5\ln(x^2+1) \qquad (x > -1),$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1 - 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1} \qquad (x > -1).$$

Az f függvény grafikonjának $\big(x_0, f(x_0)\big)$ pontjában az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Mivel

$$f(x_0) = f(0) = \ln 1 = 0$$

és

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{2},$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = \frac{x}{2}. \quad ■$$

5. feladat *Milyen a és b valós paraméter esetén lesz az egész $\mathbb{R}$-en differenciálható az*

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{ha } x < 2 \\ x^2 - bx - 3, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

függvény. Adja meg a deriváltfüggvényt is.

Megoldás. Ha $\boxed{x_0 < 2}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = 2ax_0$$

minden $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Ha $\boxed{x_0 > 2}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = 2x_0 - b$$

minden $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Legyen $\boxed{x_0 = 2}$. Ahhoz, hogy az f függvény itt deriválható legyen szükséges, hogy f *folytonos* is legyen ebben a pontban. Nézzük meg f-nek 2-ben a bal- és a jobb oldali határértékét:

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \big(ax^2+1\big) = 4a+1$$

és

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \big(x^2-bx-3\big) = 1-2b = f(2),$$

ezért

$$f \in C\{0\} \iff f(2-0) = f(2+0) = f(2) \iff 4a+1 = 1-2b \iff b = -2a\,.$$

A deriválhatóság vizsgálatánál most már feltesszük azt, hogy $b = -2a$. A bal oldali derivált 2-ben:

$$f'_-(2) := \lim_{x\to 2-0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{\big(ax^2+1\big)-(1-2b)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{ax^2-4a}{x-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = 4a.$$

A jobb oldali derivált a 2 pontban

$$f'_+(2) = \big(x^2-bx-3\big)'_{x=2} = (2x-b)_{x=2} = 4-b = 4+2a.$$

Ezért

$$f'_-(2) = f'_+(2) \iff 4a = 4+2a \iff a = 2.$$

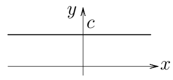
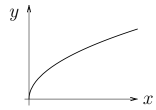
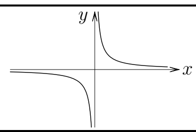
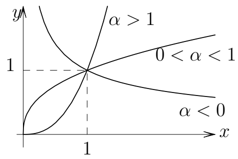
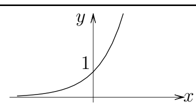
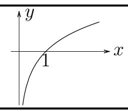
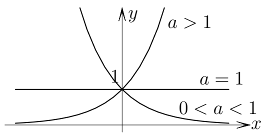
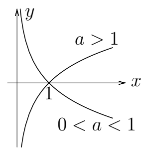
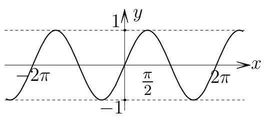
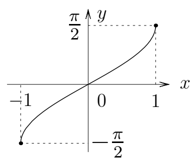
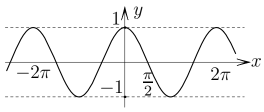
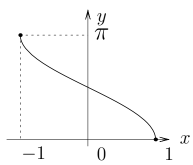
Így

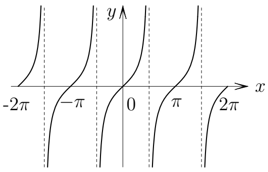
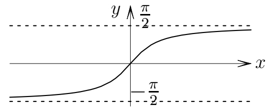
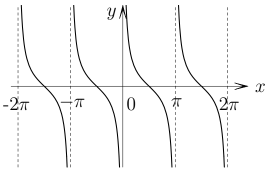
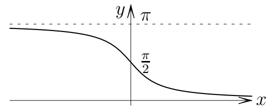
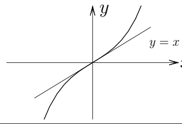
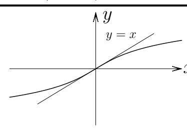
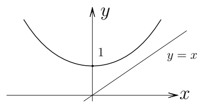
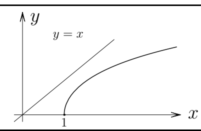
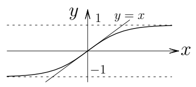
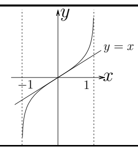
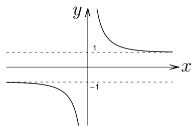
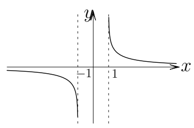
$$f \in D\{2\} \iff b = -2a \text{ és } a = 2 \iff a = 2 \text{ és } b = -4. \text{ Ekkor } f'(2) = 8.$$

Összefoglalva: Az f függvény pontosan akkor deriválható az egész $\mathbb{R}$-en, ha $a = 2$ és $b = -4$. Ekkor a deriváltfüggvény

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } x < 2 \\ 8, & \text{ha } x = 2 \\ 2x+4, & \text{ha } x > 2. \end{cases} \blacksquare$$

Elemi függvények deriváltja

$\mathcal{D}_f$ és $\mathcal{D}_{f'}$	$f(x)$	$f'(x)$	f képe
$\mathbb{R}$	c $(c \in \mathbb{R})$	0	
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	x^n $(n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	
$\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$ $\mathcal{D}_{f'} = (0, +\infty)$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	
$(0, +\infty)$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$(0, +\infty)$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\mathbb{R}$	a^x $(a \in (0, +\infty))$	$a^x \ln a$	
$(0, +\infty)$	$\log_a x$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	
$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$ $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	
$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$ $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$ $(:= \frac{e^x - e^{-x}}{2})$	$\operatorname{ch} x$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsh} x$ $(= \ln(x + \sqrt{x^2+1}))$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$ $(:= \frac{e^x + e^{-x}}{2})$	$\operatorname{sh} x$	
$\mathcal{D}_f = [1, +\infty)$ $\mathcal{D}_{f'} = (1, +\infty)$	$\operatorname{arch} x$ $(= \ln(x + \sqrt{x^2-1}))$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x$ $(:= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x})$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
$(-1, 1)$	$\operatorname{arth} x$ $(= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x})$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{cth} x$ $(:= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x})$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	
$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$\operatorname{arcth} x$ $(= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1})$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	

Deriváltak

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
C(állandó)	0
x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arch} x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Deriválási szabályok

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$af+bg$	$af'+bg'$
$f\cdot g$	$f'g+fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$(\bar{f}(x))'$	$\frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$

Integrálok

$\int k\,dx = kx + C$ $\quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \alpha \neq -1$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$ $\quad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + C$ $\quad \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

Integrálási szabályok

$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\quad \int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a} + C$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$ $\quad \int f(g(x))g'(x) = F(g(x)) + C$

$\int uv' = uv - \int u'v$ parciális integrálás

u	v'
P	e^L
P	a^L
P	$\sin L$
P	$\cos L$
$\log_a x$	1
ar és arc	1

u	v'
$\sin L$	e^L
$\sin L$	a^L
$\cos L$	e^L
$\cos L$	a^L

P polinom,
$L = ax+b$
lineáris függvény

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ hely.: $\sin x = \frac{2t}{1+t}$; $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Fourier-sor	Fourier-transzformáció
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \exp(jn\omega t)$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
$X_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp(-jn\omega t)\,\mathrm{d}t$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)\,\mathrm{d}t$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{F-sor trig. alak}$$

Trigonometria

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}$ $\quad \sin x = \frac{j}{2}\exp(-jx) - \frac{j}{2}\exp(jx)$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}\exp(-jx) + \frac{1}{2}\exp(jx)$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)$ $\quad e^{jx} = \exp(jx) = \cos x + j\sin x$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

Óbudai Egyetem, Alba Regia Oktatási Központ, Szfvár, 2011. január 5.