6. előadás

2016. október 17.

Többször deriválható függvények, magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a *többször deriválható függvények* és a *magasabb rendű deriváltak* fogalmához. A *rekurzió módszerét* alkalmazzuk. Először a *kétszer deriválhatóság* fogalmát definiáljuk.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f* ***kétszer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha*

- *a függvény deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében, azaz $\exists\, r > 0 : \ f \in D\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

az f függvény ***a-beli második deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f''(x)$$

az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \ \text{ és } \ f^{(1)} := f',$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a) \ \text{ és } \ f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy

$$f^{(0)}(a) := f(a) \ \text{ és } \ f^{(0)} := f. \ \blacksquare$$

Indukcióval értelmezzük az *n-szeri deriválhatóságot* és az *n-edik deriváltat.* Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \ldots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$-gyel jelölt $(n-1)$-edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy f* ***n-szer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha*

- *$\exists\, r > 0 : \ f \in D^{n-1}\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \big(f^{(n-1)}\big)'(a)$$

az f függvény ***a-beli n-edik deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény **n-edik deriváltfüggvénye**, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **a-ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az f **függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

Tétel. *Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor*

1^o $f + g \in D^n\{a\}$ *és* $\big(f+g\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$,

$$2^o \ f \cdot g \in D^n\{a\} \quad \textit{és} \quad \big(f \cdot g\big)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

(*Ez a **Leibniz-szabály**.*)

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható. 1^o bizonyítása szinte triviális, 2^o belátása némi számolgatást igényel. ■

A lokális szélsőérték és a derivált kapcsolata

Megjegyzés. Megemlítettük már azt, hogy a differenciálszámítás jól használható *általános módszert* ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.

Hamarosan látni fogjuk, hogy a derivált milyen hatékony segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez *lokálisan* és *globálisan* is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke a függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket.

Ha viszont f egy intervallum minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. ■

Korábban már értelmeztük az **abszolút szélsőértékek** fogalmát. Célszerű bevezetni ezek **lokális** változatait.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma van**, ha*

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad \forall\, x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f \ \textit{ esetén } \ f(x) \le f(a).$$

*Ekkor az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontot f **lokális maximumhelyének** nevezzük, az $f(a)$ érték pedig a függvény **lokális maximuma**.*

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az x ($x \in [0,1]$) függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.

Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy } f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{ és} \\ \bullet\ f \in D\{a\} \textit{ valamilyen } a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f\textit{-ben} \\ \bullet\ f\textit{-nek } a\textit{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont *lokális maximumhelye* az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists\, r > 0 : \quad \forall\, x \in (a-r, a+r) \ \text{ esetén } f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a+r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \le 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a $(*)$ alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \ge 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \le 0$ és $f'(a) \ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha *a lokális minimumhelye* az f függvénynek. ■

Megjegyzések.

1^o Deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

2^o Abból, hogy $f'(a) = 0$, *nem következik*, hogy az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont lokális szélsőértékhelye. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $f'(x) = 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ miatt $f'(0) = 0$, de a függvénynek *nincs* 0-ban lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen. ■

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***stacionárius pontja****, ha*

$$f \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad f'(a) = 0.$$

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvénynek lokális szélsőértékhelyei a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékhelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

A differenciálszámítás középértéktételei

Tétel. (A Rolle-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a, b \in \mathbb{R},\ a < b. \textit{ Tegyük fel,} \\ \textit{hogy } f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \textit{ és} \\ \quad \bullet\ f \in C[a,b], \\ \quad \bullet\ f \in D(a,b), \\ \quad \bullet\ f(a) = f(b). \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b), \quad \textit{hogy} \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$$

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a,b]$, ezért Weierstrass tételéből következik, hogy

$$\exists\, \alpha,\, \beta \in [a,b]: \qquad f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

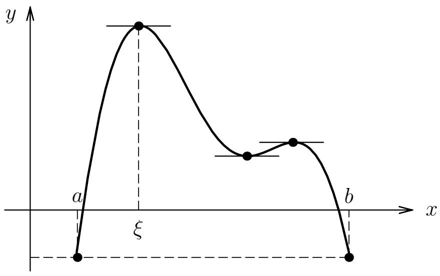
1. eset: $m = M$. Ekkor f állandó (a,b)-n, így tetszőleges $\xi \in (a,b)$ pontban $f'(\xi) = 0$.

2. eset: $m \neq M$, tehát $m < M$.

Ha $m \neq f(a) = f(b)$, akkor az α abszolút minimumhely az (a,b) intervallumban van. Világos, hogy α egyúttal lokális minimumhelye is az f függvénynek. A feltételeink alapján $f \in D\{\alpha\}$, ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\alpha) = 0$. A tétel állítása tehát a $\xi := \alpha \in (a,b)$ választással teljesül.

Ha $m = f(a) = f(b) < M$, akkor a β abszolút maximumhely van az (a,b) intervallumban, és ez egyúttal lokális maximumhely is, tehát $f'(\beta) = 0$. Ebben az esetben tétel állítása tehát a $\xi := \beta \in (a,b)$ választással teljesül. ■

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x-tengellyel:



Tétel. (A Lagrange-féle középértéktétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és
- $f \in C[a,b]$,
- $f \in D(a,b)$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$, *hogy*
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Az $\big(a, f(a)\big)$ és a $\big(b, f(b)\big)$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.
Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a,b]$-n és deriválhatók (a,b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right) = 0,$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül.

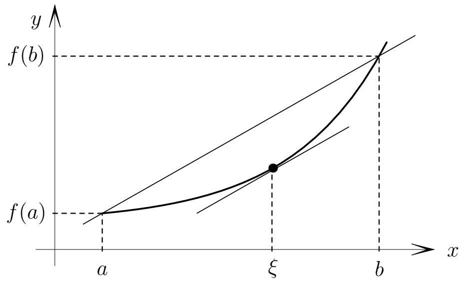
A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ ■$$

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és deriválható (a,b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $\big(a,f(a)\big)$, $\big(b,f(b)\big)$ pontokon áthaladó szelővel:



Tétel. (A Cauchy-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a,b\in\mathbb{R},\ a<b.\ \textit{Tegyük fel,}\\ \textit{hogy } f,g:[a,b]\to\mathbb{R}\quad \textit{és}\\ \qquad\bullet\ f,g\in C[a,b],\\ \qquad\bullet\ f,g\in D(a,b),\\ \qquad\bullet\ \forall\, x\in(a,b)\ \textit{esetén } g'(x)\neq 0. \end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c}\exists\,\xi\in(a,b),\quad \textit{hogy}\\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.\end{array}$$

Bizonyítás. A Rolle-tételből következik, hogy $g(a)\neq g(b)$. Valóban, $g(a)=g(b)$-ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a,b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)\qquad \big(x\in[a,b]\big).$$

Az F függvény folytonos $[a,b]$-n, deriválható (a,b)-n és $F(a)=F(b)=0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi\in(a,b)$, amelyre $F'(\xi)=0$. Ekkor

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi)\neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.\ \blacksquare$$

A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

Tétel. (A deriváltak egyenlősége.)

1^o *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f\in D(a,b)$. Ekkor*

$$f'\equiv 0\ (a,b)\textit{-n}\quad\Longleftrightarrow\quad f\equiv \textit{állandó}\ (a,b)\textit{-n}.$$

2^o *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f,g\in D(a,b)$. Ekkor*

$$f'\equiv g'\ (a,b)\textit{-n}\quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, c\in\mathbb{R}:\ f(x)=g(x)+c\ \big(\forall\, x\in(a,b)\big).$$

Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longleftarrow}$ Ezt már tudjuk, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Legyen $a<x_1<x_2<b$. Alkalmazzuk az f függvényre az $[x_1,x_2]$ intervallumon a Lagrange-féle középértéktételt. Ekkor van olyan $\xi\in(x_1,x_2)$, amelyre

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Mivel $f'(\xi)$=0, ezért $f(x_1)=f(x_2)$, következésképpen f állandó.

2^o Az $F:=f-g$ függvényre alkalmazzuk az 1^o állítást. $\blacksquare$

A monotonitás és a derivált kapcsolata

Az alkalmazások szempontjából hasznosak az alábbi állítások.

Tétel. (Elégséges feltétel a monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor,

1^o (a) *ha* $f' \geq 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *monoton növekedő* $[a, b]$*-n;*
(b) *ha* $f' \leq 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *monoton csökkenő* $[a, b]$*-n;*

2^o (a) *ha* $f' > 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton növekedő* $[a, b]$*-n;*
(b) *ha* $f' < 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton csökkenő* $[a, b]$*-n.*

Bizonyítás. Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. Ekkor $f \in C[x_1, x_2]$ és $f \in D(x_1, x_2)$, ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ezt felhasználva mindegyik állítás egyszerűen bizonyítható. ■

Megjegyzések.

1^o A fenti tétel szerint a *derivált előjeléből* következtethetünk a *monotonitásra*.

2^o A tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \quad \text{akkor} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \ \big(\forall\, x \in \mathcal{D}_f\big),$$

de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum.* ■

A *monotonitásra* vonatkozó állítások *megfordíthatók.*

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

1^o f *monoton növekedő* $[a, b]$*-n* $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$ (a, b)*-n,*

2^o f *monoton csökkenő* $[a, b]$*-n* $\Longleftrightarrow$ $f' \leq 0$ (a, b)*-n.*

Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longleftarrow}$ Az előző tétel 1^o (a) része.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy f monoton növekedő $[a, b]$-n, azaz

$$\forall\, x, t \in [a, b], \ x \leq t \ \text{ esetén } \ f(x) \leq f(t).$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in (a, b)$ pontot, és tekintsük az f függvény x-hez tartozó különbségihányadosfüggvényét:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad \big(t \in [a, b] \setminus \{x\}\big).$$

Ha $[a, b] \ni t > x$, akkor $t - x > 0$, és $f(t) \geq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \geq 0$) miatt a fenti tört nem negatív:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ha $[a, b] \ni t < x$, akkor $t - x < 0$, és $f(t) \leq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \leq 0$) miatt a szóban forgó tört szintén nem negatív.

Mivel $f \in D\{x\}$, ezért

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

2^o Hasonló a bizonyítás monoton csökkenő függvény esetére. ■

A *szigorú monotonitásra* vonatkozó elégséges feltételek *nem fordíthatók meg.* Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő az egész $\mathbb{R}$-en, de a deriváltja 0 értéket is felvesz: $f'(0) = 0$.

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a szigorú monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

1^o *f szigorúan monoton növekedő $[a, b]$-n $\iff$*
$f' \geq 0$ (a, b)-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla;

2^o *f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$-n $\iff$*
$f' \leq 0$ (a, b)-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

Bizonyítás. Egyszerűen belátható, hogy egy f függvény pontosan akkor szigorúan monoton $[a, b]$-n, ha monoton, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f állandó. Így az állítás egyszerűen következik abból, hogy $f' \equiv 0$ $(c, d) \subset [a, b]$-n $\iff$ $f \equiv$ állandó (c, d)-n. ■

A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- *$f \in D(a, b)$,*
- *egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és*
- *az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben.*

Ekkor,

1^o *ha az f' függvény negatívból pozitívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye;*

2^o *ha az f' függvény pozitívból negatívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Az előjelváltást formálisan így definiáljuk: Legyen $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$. Azt mondjuk, hogy a h függvény az a pontban *negatívból pozitívba megy át* (röviden: $(-, +)$ *előjelváltása van*), ha $h(a)=0$ és $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy

$$h(x) < 0,\ \text{ha } x \in (a - \delta, a) \quad \text{és} \quad h(x) > 0,\ \text{ha } x \in (a, a + \delta).$$

A $(+, -)$ előjelváltást hasonló módon értelmezzük. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- *f kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban, azaz $f \in D^2\{c\}$,*
- *$f'(c) = 0$,*
- *$f''(c) \neq 0$.*

Ekkor c lokális szélsőértékhelye az f függvénynek;

1^o *ha $f''(c) > 0$, akkor f-nek c-ben lokális minimuma van,*

2^o *ha $f''(c) < 0$, akkor f-nek c-ben lokális maximuma van.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor, sem arra nem következtethetünk, hogy f-nek van, sem arra, hogy f-nek nincs lokális szélsőértéke c-ben. A különböző lehetőségeket mutatják például az

$$f(x) := x^3, \qquad f(x) := x^4 \quad \text{és az} \quad f(x) := -x^4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek. ■