Analízis 2.

2. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Tétel: Bolzano: Tfh. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ akkor $\exists x \in [a, b] : f(x) = 0$

Bizonyítás: Legyen $[x_0, y_0] = [a, b]$ és tfh. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$

Legyen $z_0 := \frac{x_0+y_0}{2}$, ekkor 3 eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$ ✓
2. $f(z_0) < 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$
3. $f(z_0) > 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$

Ezt az eljárást folytatva véges sok lépésben kapunk ξ-t amelyre $f(\xi) = 0$, ha nem akkor kapunk egy $([x_n, y_n])$ intervallum sorozatot, amelyre a következők igazak:

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$
2. $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0$
3. $y_n - x_n = \frac{y_0-x_0}{2^n}$

A Cantor-tétel miatt

$$\exists\xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}[x_n, y_n] \text{ Mivel } y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ ,ezért } \exists!\, \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}[x_n, y_n]$$

Továbbá $0 \le \xi - x_n \le y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(x_n) = \xi}$,és $\quad y_n - \xi \le y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(y_n) = \xi}$

Tudjuk, hogy $f(x_n) < 0$ és $\lim(x_n) = \xi$ és $f \in C(\xi)$,ezért az átviteli elv miatt
$\lim f(x_n) = f(\xi) \Rightarrow f(\xi) \le 0$

Hasonlóan $f(y_n) > 0, \quad \lim(y_n) = \xi \Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$
itt: $f(y_n) > 0$ ezért $f(\xi) \ge 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ ■

Következmény: (Bolzano), Tfh. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos.
Ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall c \in (f(a), f(b)) : \exists\xi \in [a, b] : f(\xi) = c$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = f(x) - c$, ekkor
$g(a) = f(a) - c < 0$ és $g(b) = f(b) - c > 0 \Rightarrow$ előző tétel alapja
$\exists\xi \in [a, b] : g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - c = 0$ ■

Definíció: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függyvény Darboux tulajdonságú, ha
$\forall x_1 < x_2, \quad (x_1, x_2 \in [a, b]), \quad f(x_1) \ne f(x_2), \quad \forall c \in (f(x_2), f(x_1)) \quad \exists\xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = c$

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függyvény folytonos, akkor Darboux tulajdonságú.

Tétel: Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függyvény folytonos, ekkor R_f intervallum.

Bizonyítás: Legyen $M := sup\{f(x)|x \in I\}$ és $m := inf\{f(x)|x \in I\}$
Igazoljuk, hogy $(m, M) \subset R_F$ Legyen $y_0 \in (m, M)$ tetszőleges.
Igazoljuk, hogy $y_0 \in R_f \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) < y_0 < f(x_2)$
Tekintsük az $f : [x_2, x_1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. A Bolzano-következmény miatt
$c = y_0$-ra is $\exists\xi \in [x_2, x_1] : f(\xi) = y_0 \Rightarrow y_0 \in R_f \Rightarrow (m, M) \subset R_f$
$\Rightarrow R_f = [(m, M)]$ vagy nyitott vagy zárt. ■

Egyenletes folytonosság

$f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subset \mathbb{R})$ folytonos, azaz $f \in C(A) \Leftrightarrow \forall x \in A : f \in C(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in A : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in A : |y - x| < \delta, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Megjegyzés: δ függ ε-tól és x-től.

Példa: 1, $f(x) = x \quad (x \in [0, +\infty])$ Legyen $\delta := \varepsilon$, ekkor
Ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon$ δ itt nem függ x-től.

2, $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$ Tfh. $x < y \quad y - x < \delta \Rightarrow y < x + \delta$
Ekkor $f(x) - f(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{x+\delta-x}{x(x+\delta)} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} < \varepsilon$
Itt δ függ az x-től, kül. bal oldal $\to \infty$
Ha δ nem függ x-től: egyenletesen folytonos.

Definíció: $f : A \to \mathbb{R}$ függyvény egyneletesen folytonos, ha
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Tétel: $f : A \to \mathbb{R}$

1. Ha f egyenletesen folytonos $\Rightarrow$ folytonos.
2. Ha f folytonos $\not\Rightarrow$ egyenletesen folytonos.

Bizonyítás:

1. Triviális.
2. $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1]$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos, azaz:
   Igazoljuk, hogy $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in A : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
   Feltehető, hogy $\delta = \frac{1}{n}$ azaz:
   $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+, \exists x_n, y_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad (A = (0,1])$
   Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$
   $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ és $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2}$ ■

Tétel: (Heine): Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás: (Indirekt) Tfh. f nem egyenletesen folytonos.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Legyen $\delta = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot $\Rightarrow (x_n)$ korlátos.
Bolzano-Weierstrass kiv. tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, azaz:
$\lim(x_{n_k}) =: \alpha, \quad \alpha \in [a, b]$
De! $|y_{n_k} - \alpha| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - \alpha| \to 0$ azaz $\lim(y_{n_k}) = \alpha$
$f \in C(\alpha)$ átviteli elv miatt
$\lim(f(x_{n_k})) = f(\alpha)$ és $\lim(f(y_{n_k})) = f(\alpha) \Rightarrow \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$
viszont ez ellentmondás, azzal, hogy $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ ■