$\boxed{\text{8. gyakorlat}}$

Monotonitás. Szélsőértékek

■ Szükséges ismeretek

- Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális minimuma* van?
- Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?
- Hogyan szól a *lokális maximumra* vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
- Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.
- Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

■ Feladatok

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := x^2(x-3)\ (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2-6x-16}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\})$,

(c) $f(x) := x \ln x\ \ (x \in (0, +\infty))$,

(d) $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x}\ \ (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq -1)$.

2. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor az inverze is szigorúan monoton csükkenő.

3. Határozza meg az f függvény

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit az $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha

(ii) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10\ \ (x \in \mathbb{R})$, és $A = [-1, 4]$;

(iii) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}\ (x \in \mathbb{R})$, és $A = \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$;

(iv) $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x}\ \ (0 < x < +\infty)$, és $A = \mathcal{D}_f$.

4. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

■ Házi feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekedő, akkor az inverze is szigorúan monoton növekedő.

2. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) := \frac{e^x}{x} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvényt.

3. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2,0]$ halmazon.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha $f \in D$ és f páros (páratlan, periodikus), akkor f' páratlan (páros, periodikus).

2. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

3. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4. Adjon meg olyan $H \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt halmazt és olyan $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $f'(x) > 0$ minden $x \in H$ esetén, de f nem szigorúan monoton növekedő H-n.

5. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := 2e^{x^2-4x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := xe^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := xe^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$,

(e) $f(x) := (x-3)\sqrt{x}$ $(x \in [0,+\infty))$.

6. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := x^2 e^{-x} \ (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x - \ln(1 + x) \ (x \in (-1, +\infty))$.

7. Számítsa ki az f függvény abszolút szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \ (x \in [-3, 3])$,

(b) $f(x) := x^2 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

8. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot.

9. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

10. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le.

11. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?