Analízis 2.
Programtervező informatikus szak
A, B és C szakirány
2016-2017. tanév őszi félév

Az 1–9. előadások

(Szili László)

2016. szeptember–november

1. előadás

2016. szeptember 12.

Az előadó:

Szili László (déli épület 2.309 szoba)

A tantárgy honlapja (2016-ban):

`http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm`

A honlapon van:

- a követelményrendszer,
- tervezett zh időpontok,
- gyakorlatanyagok,
- segédanyagok.

A követelményrendszer:

- Az előadásokon és a gyakorlatokon a részvétel kötelező.
- A gyakorlatokon heti rendszeres számonkérés lesz.
- Megajánlott vizsgajegyet lehet szerezni.

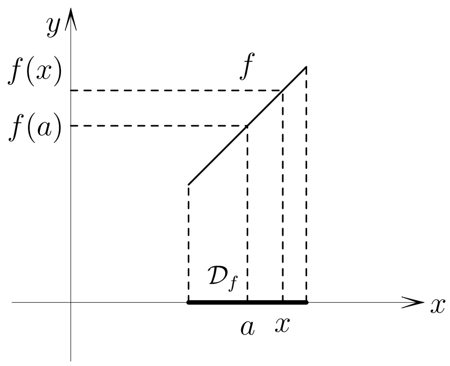
A részletes követelményrendszer a honlapon megtalálható.

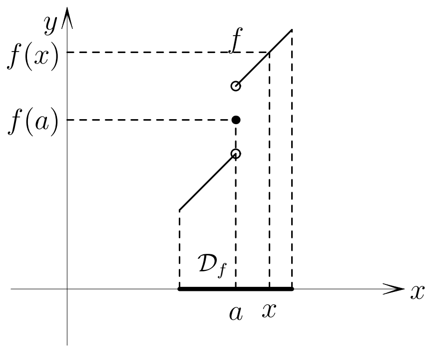
Irodalom:

- Kósa András: *Ismerkedés a matematikai analízissel*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- Lackovich Miklós–T. Sós Vera: *Aanlízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2005.
- Leindler László–Schipp Ferenc: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
- Schipp Ferenc: *Analízis II., Folytonosság, differenciálhatóság*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1996.
- Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe I.*, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

A folytonosság szemléletes jelentése. A „folytonos” kifejezést a mindennapi életben gyakran használjuk. Most függvényekre értelmezzük ezt a fogalmat. Motivációként tekintsük a következő két függvényt:





A jobb oldali f függvénynél: „ha x közel van a-hoz (jelben $x \sim a$), akkor $f(x)$ nincs közel $f(a)$-hoz”. A függvénynek ezt a tulajdonságát úgy fejezzük ki, hogy az f függvény *nem folytonos* az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.

A bal oldali függvénynél: minden $a \in \mathcal{D}_f$ pontban igaz az, hogy „ha $x \sim a$, akkor $f(x) \sim f(a)$”. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos* az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban. ■

Megjegyzés. Hasonló problémával találkoztunk függvény *végesben vett véges* határértékénél. Ott azt a szemléletes tartalmat fogalmaztuk meg pontosan, hogy ha f egy valós-valós függvény, akkor az „$a \in \mathbb{R}$ ponthoz közeli x helyeken az $f(x)$ függvényértékek közel vannak az $A \in \mathbb{R}$ számhoz” (röviden: „ha $x \sim a \implies f(x) \sim A$”).

Emlékeztetünk a definícióra:

$$\text{Ha } a, A \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathcal{D}'_f,\ \text{akkor}$$

$$\lim_a f = A \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ 0 < |x-a| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \ \blacksquare \end{cases}$$

Pontbeli folytonosság

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$* ***pontban folytonos****, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \quad \textit{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jelölése: $f \in C\{a\}$.

Megjegyzések.

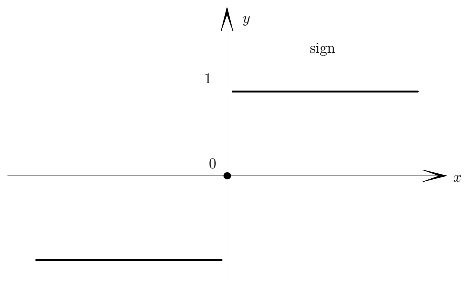
1^o Függvény folytonosságát csak az **értelmezési tartományának** pontjaiban értelmezzük.

2^o Gondoljuk meg, hogy a fenti definíció egy függvénynek valóban azt a szemléletes tulajdonságát írja le pontosan, hogy „ha $x \sim a \Longrightarrow f(x) \sim f(a)$”. $\blacksquare$

Kezdjük néhány egyszerű példával!

1. példa. Az előjel-függvény:

$f(x) := \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$



A definíció alapján igazoljuk, hogy ez a függvény *NEM folytonos* az $a = 0$ pontban:

$$f \notin C\{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists |x| < \delta : \quad |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

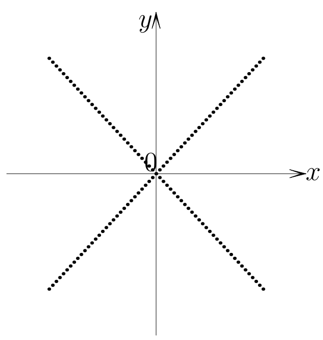
Legyen (például) $\varepsilon = 1/2$. Ekkor $\forall \delta > 0$ szám és $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont esetén

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = 1 > 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad f \notin C\{0\}.$$

A függvény minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban viszont *folytonos*, mert (például) egy rögzített $a > 0$ pontban minden $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = a$ egy(!) megfelelő δ. $\blacksquare$

2. példa. Dirichlet-típusú függvény:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



A definíció alapján egyszerűen igazolható, hogy

- a függvény **folytonos a** 0 **pontban** (tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz $\delta = \varepsilon$ „jó” δ),
- $f \notin C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Az utóbbi állítást így bizonyítjuk: Legyen (például) $a \neq 0$ racionális szám. Ekkor minden – a-val egyező előjelű – irracionális x helyen $|f(x) - f(a)| > |a|$. Ez azt jelenti, hogy $0 < \varepsilon < |a|$ esetén ε-hoz nem létezik „jó” δ. Hasonló a bizonyítás, ha a irracionális. (Tudjuk, hogy minden $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumban van racionális és irracionális szám is.) ■

A következő tételekben folytonos függvények néhány alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg.

Tétel. *Ha* $a \in \mathcal{D}_f$ *izolált pont (azaz* $\exists\, K(a):\ K(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$*)* $\implies f \in C\{a\}$.

Bizonyítás. A definíció alapján. ■

Tétel. (A folytonosság és a határérték kapcsolata.) *Ha* $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, *akkor*

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f \ \text{ és } \ \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. A definíció alapján. ■

Tétel. (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.)

1^o *Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.*

2^o *Az* exp, *a* sin, *a* cos, *a* sh *és a* ch *függvény minden* $\mathbb{R}$*-beli pontban folytonos.*

Bizonyítás.

1^o A hatványsor összegfüggvényének határértékére vonatkozó tétel, valamint az előző állítások alapján.

2^o A szóban forgó függvényeket az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsorok összegeként értelmeztük, ezért az állítás 1^o következménye. ■

Tétel. (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv.) *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \iff \quad \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim(x_n) = a \ \text{ esetén } \ \lim\big(f(x_n)\big) = f(a).$$

Bizonyítás.

- Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor az állítás a határértékre vonatkozó átviteli elv, valamint a folytonosság és a határérték kapcsolatát leíró tétel következménye.
- Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}'_f \Rightarrow a$ izolált pont. Ebben az esetben az állítás nyilvánvaló. ■

Tétel. (A műveletek és a folytonosság kapcsolata.) *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1^o *Ha* $f, g \in C\{a\}$, *akkor* $\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}),\quad f + g,\quad f \cdot g,\quad \dfrac{f}{g}\ $ *(ha* $g(a) \neq 0$*)* $\quad \in C\{a\}$.

2^o *Ha* $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f,\ \ g \in C\{a\}$ *és* $f \in C\{g(a)\} \implies f \circ g \in C\{a\}$.

Bizonyítás. Az állításokat az átviteli elv felhasználásával lehet bebizonyítani. ■

Megjegyzés. Az *inverz függvény* folytonosságának a kérdése nehezebb probléma. Ezt később fogjuk megvizsgálni. ■

Egyoldali folytonosság

Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Az* f *függvény* ***jobbról folytonos az*** a ***pontban****, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ \ a \le x < a + \delta \ \text{ esetén } \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés. A bal oldali folytonosság fogalmát hasonló módon definiáljuk. ■

Tétel. $f \in C\{a\} \iff$ *ha f jobbról és balról is folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.*

Halmazon folytonos függvények

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $A \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény* ***folytonos az*** A ***halmazon****, ha*

$$\forall\, a \in A \text{ esetén } f\big|_A \in C\{a\}.$$

Jelölése: $f \in C(A)$.

Megjegyzések.

1^o A műveleti tételek halmazon folytonos függvényekre is érvényesek.

2^o Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $f \in C(A)$ reláció *nem jelenti* azt, hogy f az A halmaz minden pontjában folytonos. Például az ent (egészrész-) függvény folytonos a $[0, 1/2]$ halmazon, de az (egész $\mathbb{R}$-en értelmezett) ent függvény nem folytonos a $0 \in [0, 1/2]$ pontban. ■

Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

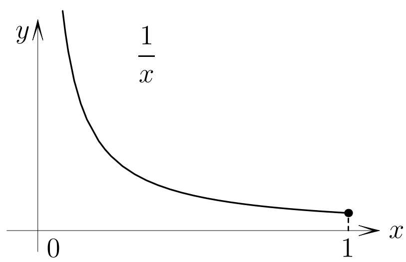
Megjegyzés. A továbbiakban $[a, b]$ nemelfajuló korlátos és zárt intervallumot jelöl, vagyis feltesszük azt, hogy $-\infty < a < b < +\infty$. ■

Az alábbi tételek azt mutatják, hogy ha egy f függvény folytonos egy korlátos és zárt intervallumban, akkor ebből következik, hogy f számos egyéb fontos tulajdonsággal is rendelkezik.

Tétel. ($[a, b]$-n folytonos függvény korlátos.)

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Tegyük fel, hogy az } f : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n} \end{array}\right\} \implies f \textit{ korlátos } [a,b]\textit{-n.}$$

Megjegyzés. A tételben lényeges feltétel az, hogy az f függvény egy *korlátos* és *zárt* intervallumon folytonos. Bármelyik feltételt elhagyva a tétel állítása nem marad igaz. Például az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $\big(x \in (0, 1]\big)$ függvény folytonos a korlátos $(0, 1]$ intervallumon, de f itt *nem korlátos.*



Az $f(x) := x^2$ $\big(x \in [0, +\infty)\big)$ függvény folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, de szintén nem korlátos itt. ■

Bizonyítás. f korlátos, ha

$$\exists\, K > 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \;\text{ esetén }\; |f(x)| \le K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy f nem korlátos, azaz

$$\forall\, K > 0\text{-hoz } \;\exists\, x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K.$$

A $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \;\exists\, x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| \ge n.$$

Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolzano–Weierstrass}}{\underset{\text{kiválasztási tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\ (x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Ekkor: $\alpha \in [a,b]$. (Ezt indirekt módon igazoljuk: Ha $\alpha \notin [a,b] \Rightarrow \exists\, K(\alpha)\ :\ K(\alpha) \cap [a,b] = \emptyset$. De $\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geqq k_0,\ \ x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, mivel $x_{n_k} \in [a,b]$).

Az f függvény folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow$ $f \in C\{\alpha\}$ $\overset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$

$$\lim\big(x_{n_k}\big) = \alpha \ \text{ miatt } \ \lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha).$$

Ez azt jelenti, hogy $\big(f\big(x_{n_k}\big)\big)$ korlátos sorozat, ami ellentmondás. ■

Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek **szélsőérték-feladatokra**, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak következő fogalmak.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek **van abszolút maximuma**, ha*

$$\exists\, \alpha \in \mathcal{D}_f:\ \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f \ \text{ esetén } \ f(x) \leqq f(\alpha).$$

*α: **abszolút maximumhely**,*
*$f(\alpha)$: a függvény **abszolút maximuma**.*

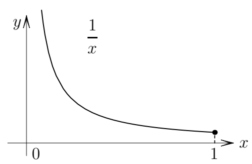
Megjegyzés. Az **abszolút minimumra** hasonló definíciók fogalmazhatók meg.
Az abszolút maximum-, illetve abszolút minimumhelyeket közösen **abszolút szélsőértékhelyeknek** nevezzük.
■

Egy valós-valós függvénynek vagy vannak abszolút szélsőértékei, vagy nincsenek. Ez utóbbi esetre mutatunk példákat.

1. példa.

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\big(x \in (0,1]\big)$ függvény

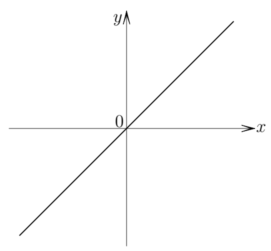
- folytonos $(0,1]$-en,
- $\exists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.



2. példa.

Az $f(x) = x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$ függvény

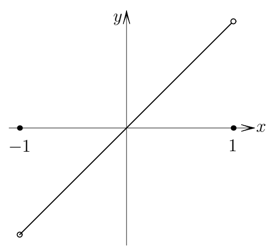
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\nexists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.



3. példa.

Az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{ha } x = \pm 1 \end{cases}$ függvény

- nem folytonos $[-1,1]$-en,
- $\nexists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.



Megjegyzés. A következő tétel azt állítja, hogy egy *korlátos* és *zárt* intervallumon *folytonos* függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye. ■

Weierstrass-tétel.

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Ha az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \textit{ függvény}\\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n}\end{array}\right\} \implies \begin{array}{c}f\textit{-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz}\\ \exists\,\alpha,\beta\in[a,b]:\\ f(\beta)\le f(x)\le f(\alpha)\quad \big(\forall\,x\in[a,b]\big).\end{array}$$

Bizonyítás. f folytonos $[a,b]$-n $\implies$ f korlátos $[a,b]$-n. Ezért

$$\exists\ \sup\big\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\big\} =: M\in\mathbb{R},$$

$$\exists\ \inf\big\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\big\} =: m\in\mathbb{R}.$$

Igazoljuk: az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists\,\alpha\in[a,b]: f(\alpha)=M$.

A szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \exists\,y_n\in\mathcal{R}_f:\quad M-\frac{1}{n}<y_n\le M.$$

Viszont:

$$y_n\in\mathcal{R}_f \implies \exists\,x_n\in[a,b]:\ f(x_n)=y_n \quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n):\mathbb{N}\to[a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az (x_n) sorozatnak létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje α ennek a határértékét, azaz legyen

$$(*)\qquad \alpha:=\lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha\in[a,b]$.

f folytonos $[a,b]$-n $\implies$ $f\in C\{\alpha\}$ $\underset{\text{elv}}{\overset{\text{átviteli}}{\implies}}$

$$(*) \text{ miatt}\quad \lim_{k\to+\infty}\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}}=f(\alpha).$$

Mivel

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})=y_{n_k}\le M \quad (\text{minden } k\text{-ra}),$$

ezért $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}=M$, ami azt jelenti, hogy az $f(\alpha)=M$ egyenlőség valóban fennáll.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

2. előadás

2016. szeptember 19.

Emlékeztető. Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények fontos tulajdonságaiból kettőt ismertünk meg:

- $[a, b]$-n folytonos függvény korlátos,
- az abszolút szélsőértékek létezésére vonatkozó Weierstrass-tételt.

Most további fontos tulajdonságokat fogunk igazolni.

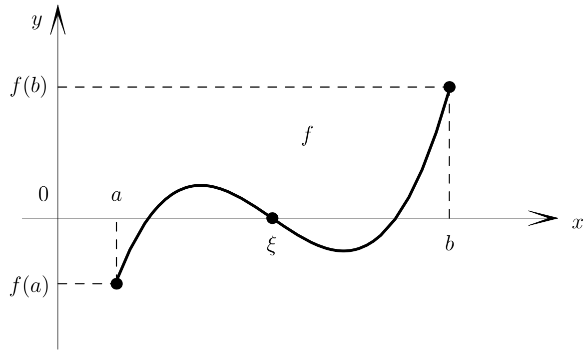
Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a, b]$*-n,*
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

(f a két végpontban különböző előjelű)

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in (a, b)$, *ami gyöke az* f *függvénynek, azaz* $f(\xi) = 0$.

Szemléletesen:



Megjegyzés. A fenti ábra azt is illusztrálja, hogy f-nek az intervallumban több gyöke is lehet, és ezek az intervallumban „bárhol" elhelyezkedhetnek. ■

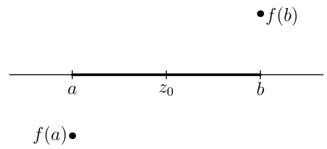
Bizonyítás. (A Bolzano-féle felezési eljárással.)

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen

$$[x_0, y_0] := [a, b]$$



Az intervallumot megfelezzük. Legyen

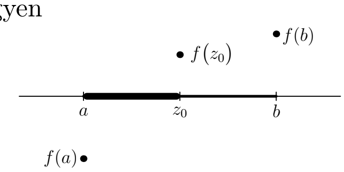
$$z_0 := \frac{a + b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ gyöke az egyenletnek.

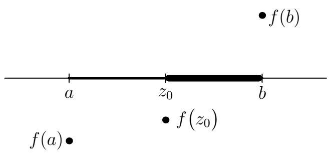
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [a, z_0]$$



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [z_0, b]$$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

$\vdots$

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben

$\exists\ [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

A Cantor-féle közösrész tételből és (iii)-ből következik, hogy az intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ, azaz

$$\text{egyértelműen } \exists\ \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért

$$\lim\big(f(x_n)\big) = f(\xi) = \lim\big(f(y_n)\big).$$

De (ii)-ből

$$\lim\big(f(x_n)\big) \le 0 \le \lim\big(f(y_n)\big),$$

azaz $f(\xi) \le 0$ és $f(\xi) \ge 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

Megjegyzés. Az eljárással az $f(x) = 0$ **egyenlet közelítő megoldásait** is elő lehet állítani. ■

Bolzano–Darboux-tétel.

$$\left.\begin{array}{c} \textit{Ha az } f : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} f \textit{ minden } f(a) \textit{ és } f(b) \textit{ közötti értéket felvesz } [a,b]\textit{-n,} \\ \textit{azaz ha } f(a) < f(b), \textit{ akkor} \\ \forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)\textit{-hez } \ \exists\, \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = c. \end{array} .$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $\varphi(x) := f(x) - c \ \big(x \in [a,b]\big)$ függvényre. ■

Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **Darboux-tulajdonságú I-n**, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.*

Az előzőek alapján a Bolzano–Darboux-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú $[a,b]$-n.* Ennek felhasználásával viszonylag egyszerűen igazolhatók a *tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$* intervallumon ($I = (a,b)$, $(a,b]$, $(0,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, stb.) folytonos függvények alábbi tulajdonságai.

Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n. Ekkor*

1^o *f Darboux-tulajdonságú I-n,*

2^o *$\mathcal{R}_f$ intervallum, vagyis intervallum folytonos képe is intervallum.*

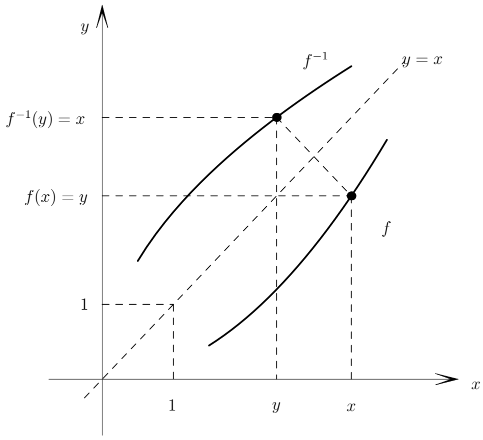
Megjegyzés. Van Darboux-tulajdonságú NEM folytonos függvény is. ■

Az inverz függvény folytonossága

Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékek tartoznak, azaz minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$ elem, amelyre $f(x) = y$. Ebben az esetben f *inverz függvénye*:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y.$$

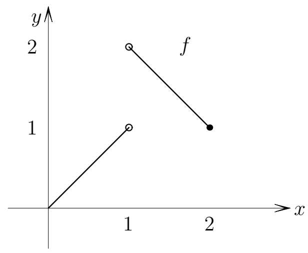
Tegyük fel, hogy f invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy *f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan*:



Megjegyzés. A következő egyszerű példa azt mutatja, hogy az f függvény folytonossága NEM „öröklődik” az f^{-1} inverz függvényre.

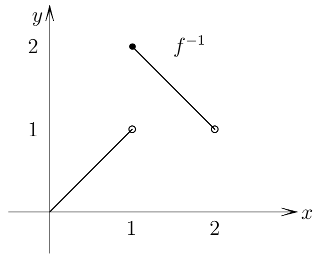
Példa. Ha

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 < x \le 2, \end{cases}$$



akkor

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 \le x < 2. \end{cases}$$



Világos, hogy

- f folytonos a $\mathcal{D}_f = [0, 2] \setminus \{1\}$ halmazon,
- f invertálható és $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$,
- $f^{-1} \notin C\{1\}$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy ha feltesszük, hogy f invertálható, az értelmezési tartománya *korlátos* és *zárt* intervallum, továbbá f folytonos $\mathcal{D}_f$-en, akkor az inverz függvénye is folytonos.

Tétel. (Az inverz függvény folytonossága.)

Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a,b]$*-n,*
- $\exists\, f^{-1}$

$\Longrightarrow$ *az* f^{-1} *függvény folytonos a* $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ *halmazon.*

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a,b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists\, y_0 \in \mathcal{R}_f, \quad \text{hogy} \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\Longrightarrow \exists\, (y_n) \subset \mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim(y_n) = y_0, \quad \text{DE} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n) \quad (\text{azaz } f(x_n) = y_n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$
$$x_0 := f^{-1}(y_0) \quad (\text{azaz } f(x_0) = y_0).$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n) \neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\, \delta > 0, \quad \text{hogy az} \quad \big\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| \geq \delta\big\} \text{ halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists\, \big(x_{n_k}\big)$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x} := \lim\big(x_{n_k}\big)$. Indirekt úton belátható, hogy $\overline{x} \in [a,b]$.

$(*)$-ból következik, hogy az $\big(x_{n_k}\big)$ részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle) \qquad \overline{x} \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\overline{x}\}$ és $\lim\big(x_{n_k}\big) = \overline{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim\Big(f\big(x_{n_k}\big)\Big) = \lim\big(y_{n_k}\big) = f\big(\overline{x}\big).$$

Az $\big(y_n\big)$ (vagyis az $\big(f(x_n)\big)$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim\big(y_{n_k}\big) = f\big(x_0\big),$$

ami azt jelenti, hogy $f\big(\overline{x}\big) = f\big(x_0\big)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\overline{x} = x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval. ■

Tétel.

Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a,b]$*-n,*
- $\exists\, f^{-1}$

$\Longrightarrow$ *az* f *függvény szigorúan monoton (növekedő vagy csökkenő)* $[a,b]$*-n.*

Tétel.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ *tetszőleges intervallum*
- $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos* I*-n,*
- $\exists\, f^{-1}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_f$ *is intervallum,* f^{-1} *folytonos a* $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ *intervallumon.*

Szakadási helyek

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **szakadási helye**, ha $f \notin C\{a\}$.*

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **megszüntethető szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték} \quad \text{és} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

2^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **elsőfajú szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \text{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{ezek végesek,} \quad \text{de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

3^o Az egyéb szakadási pontokat **másodfajú szakadási helyeknek** nevezzük.

3. előadás

2016. szeptember 26.

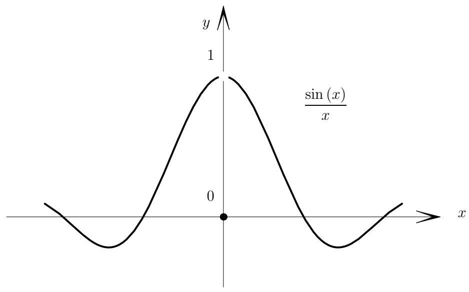
Emlékeztető:

- Szakadási helyek: $f \notin C\{a\}$.
- A szakadási helyek osztályozása. ■

A továbbiakban néhány példát mutatunk szakadási helyekre.

1. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$



- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **megszüntethető szakadási hely**, mert

$$\lim_{0} f = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$

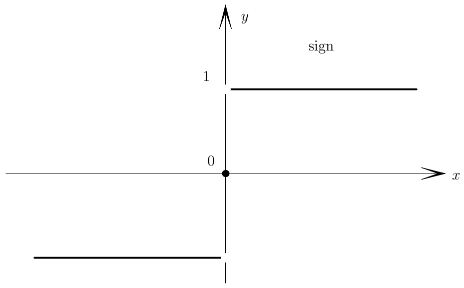
A *megszüntethető szakadási hely* elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim\limits_{0} f = 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény „már” folytonos az $a = 0$ pontban, azaz $\widetilde{f} \in C\{0\}$, mert $\lim\limits_{0} \widetilde{f} = \widetilde{f}(0) = 1$. ■

2. példa. Az előjel-függvény:

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$



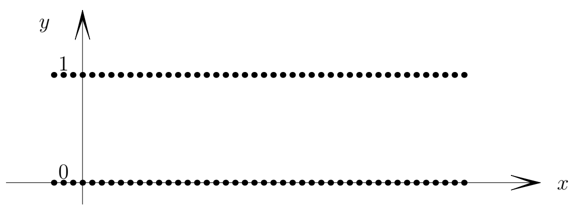
- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **elsőfajú szakadási hely**, mert

$$\lim_{0+0} f = 1 \neq \lim_{0-0} f = -1.$$

Megjegyzés. Másodfajú szakadás sokféleképpen lehet.

3. példa. A Dirichlet-függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

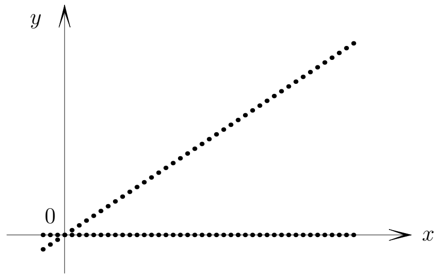


- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ **másodfajú szakadási hely**, mert

$$\nexists \lim_{a+0} f \text{ és } \nexists \lim_{a-0} f.$$

4. példa. Dirichlet-típusú függvény

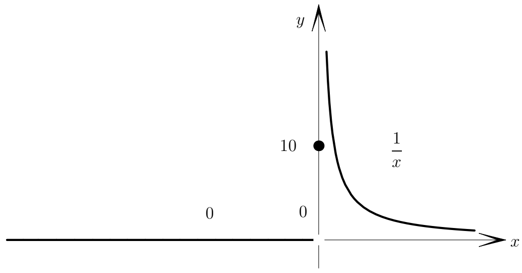
$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$



- $f \in C\{0\}$,
- $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **másodfajú szakadási hely**, mert
$$\nexists \lim_{a+0} f \text{ és } \nexists \lim_{a-0} f.$$

5. példa.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 10, & \text{ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$



- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **másodfajú szakadási hely**, mert
$$\lim_{0-0} f = 0 \neq \lim_{0+0} f = +\infty.$$

Tétel. (Monoton függvények szakadási helyei.)
Legyen $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor f-nek legfeljebb elsőfajú szakadásai lehetnek, azaz egy $a \in \mathcal{D}_f = (\alpha, \beta)$ pontban f folytonos vagy elsőfajú szakadása van.

Bizonyítás nélkül. ■

Elemi függvények

1. A hatvány- és a gyökfüggvények

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rözített természetes szám.

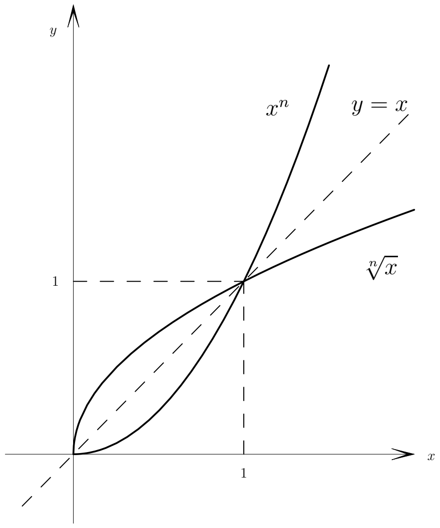
Hatványfüggvény: $f(x) := x^n \quad \big(x \in [0, +\infty)\big)$.

Gyökfüggvény: $\sqrt[n]{\ } : [0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Igazolható:

- $f \quad \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$-n $\quad \Longrightarrow \quad \exists$ inverze,
- $f^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ (a gyökfüggvény a hatványfüggvény inverze),
- $f^{-1} \quad \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$-n.

A függvények képe:



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. Például:

$$\lim_{0} \sqrt[n]{} = 0, \quad \lim_{+\infty} \sqrt[n]{} = +\infty. \blacksquare$$

2. Az exp és az ln függvény

Tétel. (Az exp függvény tulajdonságai.)

1^o $\exp(x) := \exp x := e^x := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$.

2^o • $\exp(0) = 1$,

• $\exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e \; \Big(:= \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n\Big)$.

3^o *A függvényegyenlet:*

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

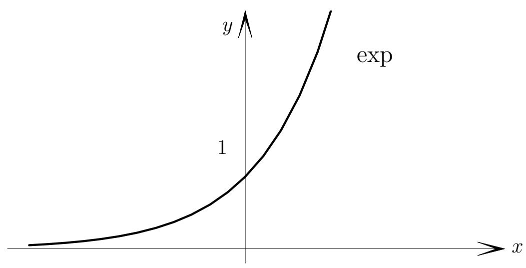
4^o exp $\uparrow$ *és folytonos* $\mathbb{R}$*-en.*

5^o $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$.

6^o $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$ *és* $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$.

Bizonyítás nélkül. $\blacksquare$

Az exp **függvény képe:**



Definíció. *Mivel az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* $\uparrow$ $\mathbb{R}$*-en, ezért* $\exists$ *inverze. Legyen*

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

a (természetes alapú vagy e alapú) ***logaritmusfüggvény****.*

Megjegyzések.

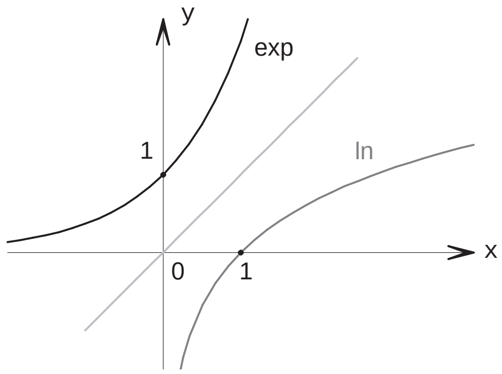
1^o $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.

2^o Ha $x > 0$, akkor

$$\ln x := \ln(x) = y \quad \overset{\text{inverz}}{\underset{\text{def.}}{\Longrightarrow}} \quad e^y = x.$$

$\ln x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az e számot) emelve x-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy a fenti módon értelmezett logaritmus a középiskolai definícióval egyezik meg. ■.

Az ln **függvény képe** az exp függvény képének az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe.



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (Az ln függvény tulajdonságai.)

1^o • $\ln e^x = x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$,

• $e^{\ln x} = x \quad (\forall\, x > 0)$.

2^o $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad (x, y > 0)$.

3^o $\ln \uparrow$ *és folytonos* $(0, +\infty)$*-en, továbbá* $\mathcal{R}_{\ln} = \mathbb{R}$.

4^o $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ *és* $\lim\limits_{0+0} \ln = -\infty$.

Megjegyzések.

1^o Az $\exp x$ „jól számolható” $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén, mert $\exp x$ egy végtelen sor összege.

2^o Az $\ln x$ minden $x > 0$ számra értelmezve van, de az értéke így nem számolható. Később majd az ln függvényt is előállítjuk hatványsor összegeként, és annak felhasználásával lehet a függvényértékeket kiszámolni. ■

3. Az $\exp_a$ és a $\log_a$ függvények

Megjegyzés. A célunk az a^x értelmezése tetszőleges $a > 0$ alap és $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetére úgy, hogy a hatványozás $x \in \mathbb{Q}$ esetén „megszokott” azonosságai érvényben maradjanak.

Az e szám tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevős hatványait már értelmeztük. a^x ételmezéséhez abból indulunk ki, hogy az $a > 0$ számot felírhatjuk e hatványaként:

$$a = e^{\ln a}.$$

A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság csak úgy marad érvényben, ha a^x-t így értelmezzük:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}. \ ■$$

Definíció. *Legyen $a > 0$ valós szám. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén az a* ***szám x-edik hatványát*** *így értelmezzük:*

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}$$

Igazolható: $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ és $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $(a, b > 0;\ x, y \in \mathbb{R})$. ■

Definíció. *Legyen $a > 0$ valós szám. Az a* ***alapú exponenciális függvényt*** *így értelmezzük:*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x = \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\exp_e = \exp$. ■

Igazolható (az exp és az ln függvény tulajdonságait is figyelembe véve):

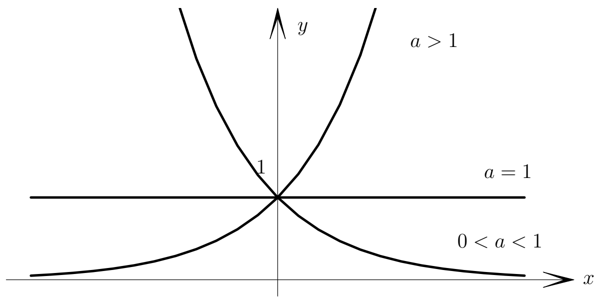
- Ha $0 < a \neq 1$, akkor az $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció.
- Ha $a > 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton növő és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0, \qquad \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty.$$

- Ha $0 < a < 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} \exp_a = 0. \ ■$$

Az $\exp_a$ függvény képe



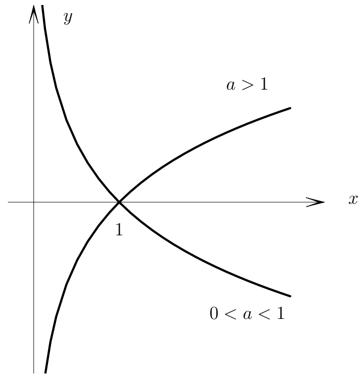
Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Definíció. *Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az $\exp_a$ szigorúan monoton és folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért van inverze, amelyet a* ***alapú logaritmusfüggvénynek*** *nevezünk és $\log_a$-val jelölünk, azaz*

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \textit{ha } a > 0 \textit{ és } a \neq 1.$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\log_e = \ln = \log$. Továbbá $\log_a(x) = \log_a x = y \iff a^y = x$, azaz $\log_a x$ az a kitevő, amire a-t emelve x-et kapunk. ■

A $\log_a$ **függvény képe**:



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (A $\log_a$ függvény tulajdonságai.)

1^o *Ha* $a > 1$, *akkor* $\log_a$ *szigorúan monoton növő folytonos függvény és* $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, *továbbá*

$$\lim_{0+0} \log_a = -\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = +\infty.$$

2^o *Ha* $0 < a < 1$, *akkor* $\log_a$ *szigorúan monoton fogyó folytonos függvény és* $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, *továbbá*

$$\lim_{0+0} \log_a = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

3^o *Logaritmusazonosságok: Legyen* $0 < a \neq 1$. *Ekkor*

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a (x^y) = y \log_a x \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$.

4. Hatványfüggvények

Definíció. *Tetszőleges* $\alpha \in \mathbb{R}$ *szám esetén az* α ***kitevőjű hatványfüggvényt*** *így értelmezzük:*

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Tétel. (A hatványfüggvény tulajdonságai.)

Legyen $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. *Ekkor a* $h_\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *függvény egy folytonos bijekció, amely*

- $\alpha > 0$ *esetén szigorúan monoton növő, és*

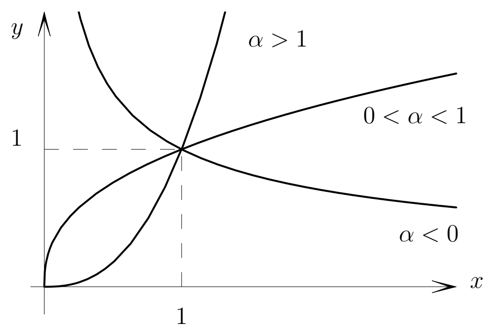
$$\lim_{0+0} h_\alpha = 0, \qquad \lim_{+\infty} h_\alpha = +\infty,$$

- $\alpha < 0$ *esetén pedig szigorúan monoton fogyó, és*

$$\lim_{0+0} h_\alpha = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} h_\alpha = 0.$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján. ■

A h_α hatványfüggvény képe:



DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Előzetes megjegyzések

Korábban megismertük a matematikai analízis egyik legalapvetőbb fogalmát, nevezetesen: valós-valós függvény **pontbeli határértékének** a definícióját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból is *pontos* formában, hogy egy *adott ponthoz „közeli" helyeken a függvényértékek „közel" vannak valamely* (*valós,* $+\infty$ *vagy akár* $-\infty$) *értékhez.*

A további néhány előadáson a **differenciálszámítás** legfontosabb eredményeivel és eszköztárával ismerkedünk meg. Ez a témakör a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. *A differenciálszámítás jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.*

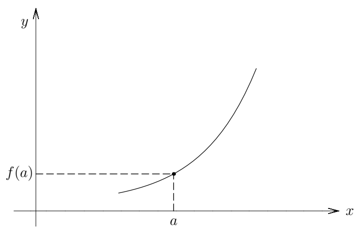
Több elemi függvényt hatványsor összegfüggvényeként értelmeztünk. Például az exp függvény szigorú monotonitása a definícióból kiindulva viszonylag könnyen igazolható. Más a helyzet a sin vagy a cos függvényekkel. Megemlítettük, hogy ezek a függvények a középiskolai tanulmányainkban megismert függvényekkel azonosak. A megszokott tulajdonságok igazolása (például a monotonitási intervallumok) a „hatványsoros" definícióból kiindulva azonban nem egyszerű feladat; ehhez (is) szükségünk lesz a differenciálszámítás eszköztárához.

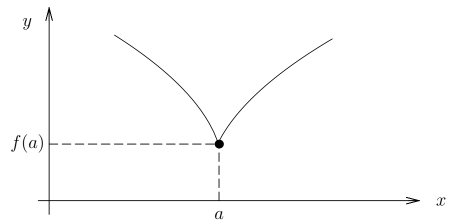
A kiindulópontunk a pontbeli **derivált** fogalmának az értelmezése.

A derivált motivációja, szemléletes jelentése

Valós-valós függvény grafikonjának egyik „jellegzetes" tulajdonsága az, hogy annak vajon van-e „töréspontja" vagy nincsen.

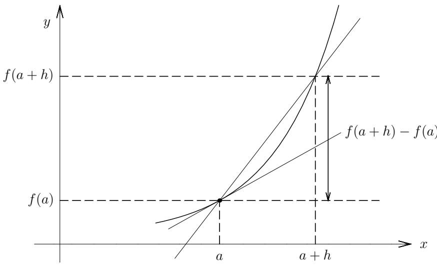
Vegyünk két egyszerű példát:

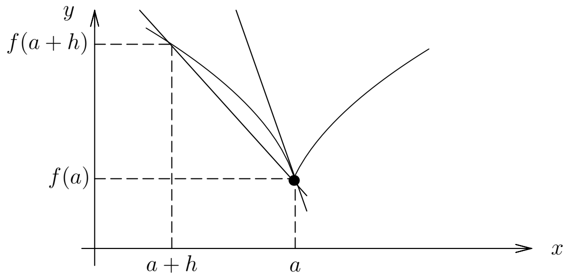




A jobb oldali függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pont egy „töréspontja". A bal oldali függvény grafikonjának nincs „töréspontja".

A különbség pontos leírásához induljunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontjában:





A szelő meredeksége:

$$m_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A bal oldali függvénynél a szelőknek van „határhelyzete”, a jobb oldali függvénynél nincs, amit „geometriamentesen” úgy fogalmazhatunk meg, hogy a bal oldali függvénynél

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \ \text{ határérték és az véges,}$$

a jobb oldali függvénynél a szóban forgó határérték nem létezik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a bal oldali függvény „deriválható az a pontban”, a jobb oldali függvény pedig „nem deriválható az a pontban”.

4. előadás

2016. október 3.

Emlékeztető:

- A derivált motivációja, szemléletes jelentése.

A derivált fogalma

A deriváltat először az értelmezési tartomány **belső pontjaiban** értelmezzük.

Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A ***halmaz belső pontja**, ha*

$$\exists\, K(a), \quad \textit{hogy} \quad K(a) \subset A.$$

Jelölje

$$\operatorname{int} A := \big\{ a \in A \mid a \quad \textit{belső pontja} \quad A\textit{-nak} \big\}$$

az A *halmaz* ***belső pontjainak a halmazát.***

Példák:

(a) Ha $A = [0,1]$, akkor $\operatorname{int} A = (0,1)$.

(b) Ha $A = (5,6]$, akkor $\operatorname{int} A = (5,6)$.

(c) Ha $A = \{2;\, 3;\, 4\}$, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***differenciálható*** (*vagy* ***deriválható***), *ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ *szimbólummal jelöljük, és az* f *függvény a* ***pontbeli deriváltjának*** (*vagy* ***differenciálhányadosának***) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölése: $f \in D\{a\}$.

Megjegyzések.

1^o A fenti definícióban szereplő határértéket az $x = a + h$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2^o Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\triangle_a f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$

függvényt az f függvény a ponthoz tartozó **különbségihányados-függvényének** vagy **differenciahányados-függvényének** nevezzük.

3^o A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó. ■

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

Tétel. (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

1^o $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$,

2^o $\quad\not\Longleftarrow$.

Bizonyítás.
1^o $f \in D\{a\} \implies$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\text{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \text{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto \frac{\text{abs}\,(x) - \text{abs}\,(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

• Egyoldali deriváltak

A most vizsgált példában a 0 pontbeli különbségihányados-függvénynek nincs ugyan határértéke a 0 pontban, de létezik a jobb- és bal oldali határértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvénynek a 0 pontban van *jobb- és bal oldali deriváltja.*

Célszerű bevezetni tehát a derivált fogalmának a féloldali variánsait.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \textit{határérték,}$$

akkor azt mondjuk, hogy f az a ***pontban jobbról deriválható****, és a fenti határértéket az f függvény a* ***pontbeli jobb oldali deriváltjának*** *nevezzük és az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük.*

Megjegyzések.

1^o Analóg módon értelmezzük az $f'_-(a)$ szimbólummal jelölt **bal oldali deriváltat**.

2^o Nyilvánvaló, hogy $f \in D\{a\} \iff \exists\, f'_+(a)$, $\exists\, f'_-(a)$ és $f'_+(a) = f'_-(a)\,(= f'(a))$. ■

• Deriváltfüggvény

Megjegyzés. Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Az alkalmazásokban legtöbbször olyan függvények szerepelnek, amelyek valamely halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket. ■

Definíció. *Ha* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$, *akkor az*

$$\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f ***deriváltfüggvényének*** (*vagy* ***differenciálhányados-függvényének***) *nevezzük, és az* f' *szimbólummal jelöljük.*

Néhány elemi függvény deriváltja

1. Konstans függvények. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és a deriváltja 0, azaz

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \text{vagy} \qquad \boxed{\big(c\big)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}\,.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \ \blacksquare$$

2. Hatványfüggvények. Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható, és a deriváltja nx^{n-1}, azaz

$$\boxed{\big(x^n\big)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}\,.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\text{(az } a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big) \text{ azonosság miatt)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. $\blacksquare$

3. Az abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban nem deriválható, azaz abs $\notin D\{0\}$. (v.ö. a függvény grafikonjának ott töréspontja van).

Bizonyítás. Volt. $\blacksquare$

4. A reciprokfüggvény, azaz az

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvény tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \ \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ **A négyzetgyök függvény**, azaz az

$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (x \in [0, +\infty)).$$

függvény minden $x \in (0, +\infty)\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(x \in (0, +\infty)\right)}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ pontban

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

a négyzetgyök függvény folytonossága alapján. ■
Megjegyzés. Az $x = 0$ pontban a függvénynek csak a **jobb oldali** deriválhatóságát vizsgálhatjuk:

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

A különbségihányados-függvényének a 0 pontban tehát létezik a jobb oldali határértéke, azonban az **nem véges**, ezért a négyzetgyökfüggvény a 0 **pontban jobbról nem deriválható**. ■

$\boxed{\textbf{6.a}}$ **A szinuszfüggvény** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x := \left(\sin x\right)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R} (= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \sin h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h + 1} = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

ezért

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x. \ ■$$

$\boxed{\textbf{6.b}}$ **A koszinuszfüggvény** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és

$$\boxed{\cos' x := \left(\cos x\right)' = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R} (= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= -\sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x. \ ■$$

A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása: lineáris közelítés. Az érintő fogalma

Megjegyzés. Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvénnyel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő”, de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx+b$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető” elsőfokú polinommal.* ■

Tétel. (Lineáris közelítés.)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \ \ \text{és} \ \ \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \ \lim\limits_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0.$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

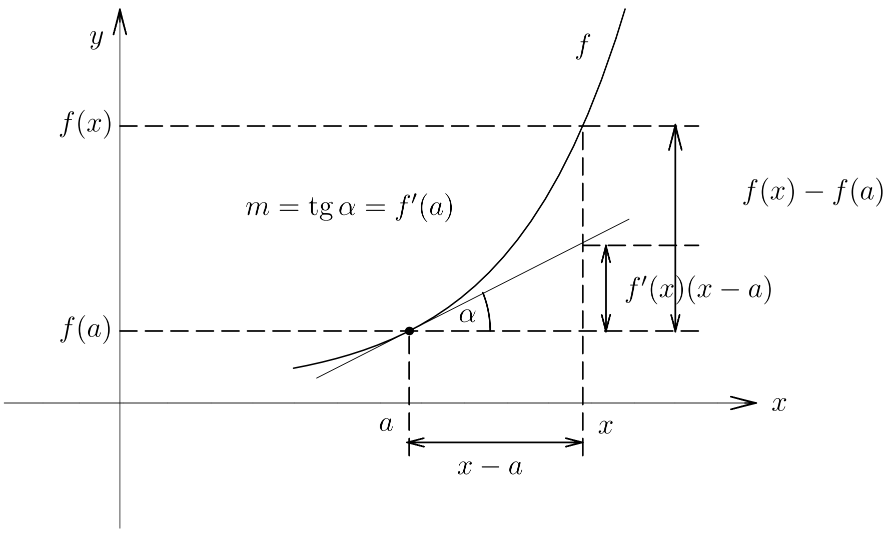
$$f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

Szemléletes jelentés:



Megjegyzések.

1^o A függvényértékek megváltozása

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

A jobb oldalon álló első tag egy lineáris függvény, a második tag pedig a $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ feltétel miatt az elsőhöz képest „kicsi”. Az f függvény a **pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény megváltozása az a pont környezetében„jól” közelíthető lineáris függvénnyel.**

2^o Az $f(x) - f(a)$ megváltozás első tagját (vagyis az $x \mapsto f'(a)(x - a)$ lineáris függvényt) az a helyhez tartozó megváltozás **fő részének** vagy **differenciáljának** nevezzük. Azt a tényt, hogy ez a tag a második taghoz képest „kicsi” gyakran az

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki.

3^o A deriválhatóság előzőkben igazolt ekvivalens átfogalmazásának a jelentősége többek között abban áll, hogy ha a differenciálhatóság fogalmát ki akarjuk terjeszteni más – nem feltétlenül valós változós vagy valós értékű – függvényekre, akkor a definícióval analóg értelmezésre nem mindig van lehetőség, míg a lineáris közelítéssel az általánosítás gyakran problémamentes. ■

• Érintő

Megjegyzés. A középiskolai tanulmányaink során megismerkedtünk néhány síkbeli görbe (kör, parabola) érintőjének a fogalmával.

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ ponton és a meredeksége $f'(a)$. ■

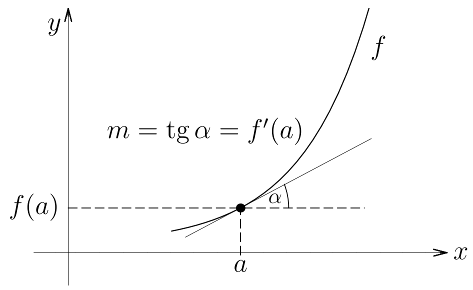
Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* ***van érintője****, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* ***érintőjén*** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

• $f'(a)$ szemléletes jelentése:
a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének
a meredeksége,

• $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték **véges**,
ezért az érintő **nem** párhuzamos az
y-tengellyel.



Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója *ekvivalens* a középiskolában geometriai úton megadott definícióval. ■

5. előadás

2016. október 10.

Deriválási szabályok

Megjegyzés. Az analízisben (és általában a matematikában) a legegyszerűbb függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális, a hatvány- és logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények és a hiperbolikus függvények. **Elemi függvényeknek** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatunk meg a négy alapművelet, a kompozíció és az invertálás segítségével.

Az előző órán a definicióból kiindulva vizsgáltunk meg differenciálhatóság szempontjából néhány elemi függvényt. A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamilyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt megkönnyítik. Ezek az ún. **deriválási szabályok**, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

• Algebrai műveletek

Tétel. (Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $f, g \in D\{a\}$ *valamilyen* $a \in \operatorname{int}\big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$ *pontban. Ekkor*

1^o $\quad cf \in D\{a\}$ *és* $\big(cf\big)'(a) = cf'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$,

2^o $\quad f + g \in D\{a\}$ *és* $\big(f + g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

3^o $\quad f \cdot g \in D\{a\}$ *és* $\big(f \cdot g\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

4^o *ha még a* $g(a) \neq 0$ *feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítások közös **ötlete** az, hogy az egyes függvények differenciahányadosait az $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ differenciahányadosok segítségével fejezzük ki.

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{fg} \setminus \{a\}\big).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $fg \in D\{a\}$ és

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \ \blacksquare$$

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \quad \big(\forall\, x \in K(a)\big) \qquad \implies \qquad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

Az $\dfrac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)-\left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\frac{1}{g(a)g(x)}\cdot\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{g(a)g(x)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\quad\Big(x\in\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}\setminus\{a\}\Big).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g\in C\{a\}\implies\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a)\neq 0$. Ezért

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)-\left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{1}{g(a)\lim\limits_{x\to a}g(x)}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=$$

$$=\frac{1}{g^2(a)}\left(f'(a)g(a)-f(a)g'(a)\right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{f}{g}\in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\ \blacksquare$$

• Összetett függvény

Tétel. (Az összetett függvény deriválása.)

Tegyük fel, hogy $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és

- $\mathcal{R}_g\subset\mathcal{D}_f$,
- $g\in D\{a\}$ *egy* $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_g$*-ra,*
- $f\in D\{g(a)\}$

$\implies$ $f\circ g\in D\{a\}$ *és* $\big(f\circ g\big)'(a)=f'\big(g(a)\big)\cdot g'(a)$.

Bizonyítás.

(i) <u>Először azt igazoljuk, hogy</u> $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_{f\circ g}$.

Valóban: $g\in D\{a\}\implies a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_g$, és $\mathcal{R}_g\subset\mathcal{D}_f$ miatt $\mathcal{D}_{f\circ g}=\mathcal{D}_g$, tehát $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_{f\circ g}$.

(ii) $g\in D\{a\}\ \underset{\text{közelítés}}{\overset{\text{lineáris}}{\implies}}\ \exists\,\varepsilon:\mathcal{D}_g\to\mathbb{R},\ \lim\limits_{a}\varepsilon=0$:

$$(*)\qquad g(x)-g(a)=g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\quad\big(x\in\mathcal{D}_g\big).$$

Hasonlóan: $f\in D\{g(a)\}\ \underset{\text{közelítés}}{\overset{\text{lineáris}}{\implies}}\ \exists\,\eta:\mathcal{D}_f\to\mathbb{R},\ \lim\limits_{a}\eta=0$:

$$f(y)-f\big(g(a)\big)=f'\big(g(a)\big)\big(y-g(a)\big)+\eta(y)\big(y-g(a)\big)\quad\big(y\in\mathcal{D}_f\big).$$

Ebbe $y=g(x)$-et helyettesítve:

$$\big(f\circ g\big)(x)-\big(f\circ g\big)(a)=f\left(g(x)\right)-f\left(g(a)\right)=$$

$$=f'\big(g(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)+\eta\big(g(x)\big)\big(g(x)-g(a)\big)\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}f'\big(g(a)\big)\big[g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big]+\eta\big(g(x)\big)\big[g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big]=$$

$$=f'\big(g(a)\big)\,g'(a)(x-a)+(x-a)\big[f'\big(g(a)\big)\cdot\varepsilon(x)+\eta\big(g(x)\big)\big(g'(a)+\varepsilon(x)\big)\big]=$$

$$=A\cdot(x-a)+\delta(x)(x-a)\quad\big(x\in\mathcal{D}_{f\circ g}\big),$$

ahol

$$A := f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a),$$
$$\delta(x) := f'\left(g(a)\right) \cdot \varepsilon(x) + \eta\left(g(x)\right) \cdot \big(g'(a) + \varepsilon(x)\big).$$

Mivel $x \to a$ esetén $g(x) \to g(a)$, ezért $\eta\big(g(x)\big) \to 0$, ha $x \to a$ (feltehető ugyanis, hogy $\eta\big(g(a)\big) = 0$, ezért η folytonos $g(a)$-ban). Ebből, továbbá a $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$-ból következik, hogy

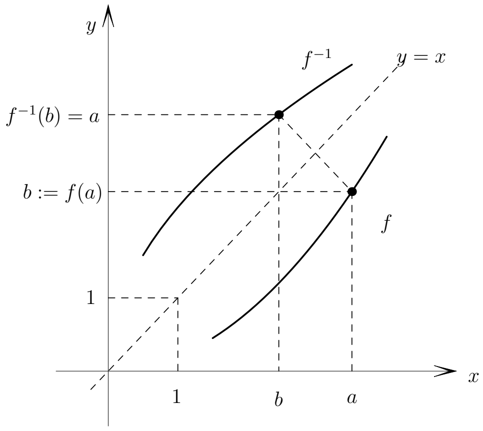
$$\delta(x) \to 0, \text{ ha } x \to a.$$

Ez pedig a lineáris közelítésre vonatkozó tétel szerint éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\left(g(a)\right) g'(a). \ \blacksquare$$

• Inverz függvény

Szemléletesen. Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei:



Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $\big(a, f(a)\big) =: (a, b)$ pontját. Ennek tükörképe az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $\big(f(a), a\big) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f'(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \ \blacksquare$$

Tétel. (Az inverz függvény deriválása.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy az } f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \bullet \textit{ szigorúan monoton és} \\ \quad \textit{folytonos az } (\alpha, \beta) \textit{ intervallumon,} \\ \bullet \textit{ valamilyen } a \in (\alpha, \beta) \textit{ pontban } f \in D\{a\}, \\ \bullet f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{az } f^{-1} \textit{ függvény deriválható a} \\ b := f(a) \textit{ pontban és} \\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}. \end{array}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $(y_n) \subset \mathcal{R}_f$ sorozatot, amelyre $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$.

Legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{és} \quad f(x_n) = y_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az inverz függvény folytonossága alapján

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Ezeket felhasználva az f^{-1} függvény b-pontbeli különbségihányados függvénye:

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}=\frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)}=\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv és a hányados határértékére vonatkozó tétel alapján, $f'(a)\neq 0$ figyelembevételével következik, hogy $f^{-1}\in D\{b\}$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.\ \blacksquare$$

Megjegyzés. Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (α,β) intervallumban, és tegyük fel, hogy f mindenütt deriválható (α,β)-ban. Ha f' sehol sem nulla, akkor az előbbi tétel szerint f^{-1} mindenütt deriválható a $J=\mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{R}_f$ intervallumban, és $\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big)=1/f'(x)$ minden $x\in(\alpha,\beta)$. Ha $y\in J$, akkor $f^{-1}(y)\in(\alpha,\beta)$ és $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$. Ebből azt kapjuk, hogy $\left(f^{-1}\right)'(y)=1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$. Mivel ez minden $y\in J$-re igaz, ezért

$$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.\ \blacksquare$$

• Hatványsor összegfüggvénye

Tétel. (Hatványsor összegfüggvényének deriválása.)

Legyen $a\in\mathbb{R}$ és $\alpha_n\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,\ldots)$. Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}\alpha_n(x-a)^n\qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(x-a)^n\qquad \big(x\in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x\in K_R(a)$ pontban $f\in D\{x\}$ és

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha_n(x-a)^{n-1}\qquad \big(\forall\, x\in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás. Nem kérdezzük. Az érdeklődők a bizonyítást az órai anyag végén megtalálják. $\blacksquare$

Megjegyzés. A sin és a cos függvény deriválhatóságára vonatkozó állításokat korábban már igazoltuk. A fenti tétel alapján a szóban forgó állításokra új bizonyításokat adunk.

Emlékeztetünk arra, hogy a sin és a cos függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x:=\sin(x):=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és

$$\cos x:=\cos(x):=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A fenti tétel alapján $\forall\, x\in\mathbb{R}$ pontban $\sin,\ \cos\in D\{x\}$ és

$$\begin{aligned}\sin' x=(\sin x)'&=1-3\cdot\frac{x^2}{3!}+5\cdot\frac{x^4}{5!}-7\cdot\frac{x^6}{7!}+\cdots=\\&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\cos x\qquad (x\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

$$\cos' x = (\cos x)' = -2 \cdot \frac{x}{2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} - 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + 8 \cdot \frac{x^7}{8!} \cdots =$$

$$= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}). \blacksquare$$

Néhány elemi függvény deriváltja (folytatás)

$\boxed{7.}$ **Polinomfüggvénynek** nevezzük a

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvényeket, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ valós számok. A hatványfüggvények deriválására, valamint az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ pontban } P \in D\{x\}, \text{ és}$$

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}. \blacksquare$$

$\boxed{8a.}$ **A tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\operatorname{tg} := \frac{\sin}{\cos}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\big\}\Big).$$

A cos függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}$ pontban $\operatorname{tg} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{tg}' x = \big(\operatorname{tg} x\big)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{tg}' x = \big(\operatorname{tg} x\big)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}\big)}. \blacksquare$$

$\boxed{8b.}$ **A kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\operatorname{ctg} := \frac{\cos}{\sin}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\big\}\Big).$$

A sin függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}$ pontban $\operatorname{ctg} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{ctg}' x = \big(\operatorname{ctg} x\big)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{ctg}' x = \big(\operatorname{ctg} x\big)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}\big)}. \blacksquare$$

9. **A természetes alapú exponenciális függvény** $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Az exp függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt az $a := 0$, $\alpha_n := \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = \exp(x) = e^x. \;\blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az exp **függvény deriváltfüggvénye önmaga**. Tulajdonképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának. $\blacksquare$

10. **A természetes alapú logaritmusfüggvény** $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az ln függvényt az exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{\exp'\big(\ln x\big)} = \frac{1}{\exp\big(\ln x\big)} = \frac{1}{x}. \;\blacksquare$$

11. **Exponenciális függvények.** Ha $a > 0$ valós szám, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp_a})$ pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp_a'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az $\exp_a$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp_a'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a. \;\blacksquare$$

12. **Logaritmusfüggvények.** Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := \big(\exp_a\big)^{-1}.$$

Az $\exp_a$ függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)$ $(= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{\exp_a'\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacksquare$$

$\boxed{13.}$ **Általánosított hatványfüggvények.** Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0, +\infty)$ $(= \mathcal{D}_{h_\alpha})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Írjuk fel az $x > 0$ alapot e-hatványként: $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = \big(e^{\ln x}\big)^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad \big(x > 0\big),$$

majd alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó állításunkat. Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$ és

$$h_\alpha'(x) = (x^\alpha)' = \big(e^{\alpha \ln x}\big)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}. \ \blacksquare$$

$\boxed{14.}$ **A $h(x) = f(x)^{g(x)}$ alakú függvények deriválásánál** az $f(x)$ alapot ismét e-hatványként írjuk fel: ha $f(x) > 0$, akkor

$$f(x) = e^{\ln f(x)}.$$

Ekkor

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = \Big(e^{\ln f(x)}\Big)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy h egy összetett függvény, exp a külső és $g \cdot \big(\ln \circ f\big)$ a belső függvény.

Példa. Legyen $f(x) := x^x$ $(x > 0)$. Ekkor

$$f(x) = x^x = \big(e^{\ln x}\big)^x = e^{x \cdot \ln x} \qquad (x > 0).$$

Ebből az alakból már látszik, hogy f összetett függvény: az exp a külső függvény és $x \cdot \ln x$ $(x > 0)$ a belső függvény. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel összes feltétele teljesül, ezért az f függvény minden $x > 0$ pontban deriválható és

$$f'(x) = (x^x)' = \big(e^{x \cdot \ln x}\big)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1). \ \blacksquare$$

$\boxed{15.}$ **Hiberbolikusz függvények**

$\boxed{15a.}$ **Az szinuszhiperbolikusz-függvény és a koszinuszhiperbolikusz-függvény**

Először emlékeztetünk arra, hogy a szinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése sh) és a koszinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése ch) az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x := \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Jegyezzük meg jól, hogy ezek a függvények kifejezhetők az exp függvénnyel. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots, \end{aligned}$$

ezért

$$(*) \qquad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \qquad \text{és} \qquad \boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. *$\forall\, x \in \mathbb{R}\,(= \mathcal{D}_{\mathrm{sh}} = \mathcal{D}_{\mathrm{ch}})$ pontban $\operatorname{sh}, \operatorname{ch} \in D\{x\}$, és*

$$\boxed{\operatorname{sh}' x = \big(\operatorname{sh} x\big)' = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \textit{és} \qquad \boxed{\operatorname{ch}' x = \big(\operatorname{ch} x\big)' = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. A sh és a ch függvényre a hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban $\operatorname{sh}, \operatorname{ch} \in D\{x\}$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}' x = \big(\operatorname{sh} x\big)' &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' = \\ &= 1 + 3\cdot\frac{x^2}{3!} + 5\cdot\frac{x^4}{5!} + 7\cdot\frac{x^6}{7!} + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch}' x = \big(\operatorname{ch} x\big)' &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right)' = \\ &= 2\cdot\frac{x}{2!} + 4\cdot\frac{x^3}{4!} + 6\cdot\frac{x^5}{6!} + 8\cdot\frac{x^7}{8!} + \cdots = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sh} x. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzések.

1^o A tétel állításait a $(*)$ képletek felhasználásával is bizonyíthatjuk.

2^o Korábban már megjegyeztük, hogy a trigonometrikus függvényekkel sok rokon vonást mutatnak a hiperbolikusz függvények. A hasonlóságot mutatják az előző félévben ismertetett állítások:

Az addíciós tételek: minden x, y valós számra

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

A négyzetes összefüggések: minden x valós számra

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1. \end{aligned}$$

Az analógiát tovább erősítik a deriváltakra vonatkozó állítások.

A jelzett hasonlóságok azt mutatják, hogy az exponenciális függvényeknek (vagyis a hatványozásnak) sok köze van a trigonometrikus függvényekhez. Ez eléggé megdöbbentő, ha a szóban forgó függvények garfikonjaira gondolunk. Az exponenciális- és a trigonometrikus függvények közötti összefüggést azonban csak a komplex számokon keresztül érthetjük meg. Komplex értékű függvényeket azonban csak később fogunk tárgyalni. $\blacksquare$

15b. A tangenshiperbolikusz-függvény és a kotangenshiperbolikusz-függvény

A tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük a tangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése th) és a kotangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése cth):

$$\operatorname{th} := \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{th} x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{th}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{ch} x \neq 0\big\}\Big),$$

$$\operatorname{cth} := \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{cth} x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sh} x \neq 0\big\}\Big).$$

A ch függvény definíciójából következik, hogy $\operatorname{ch} x \geq 1$ minden x valós számra, ezért

$$\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$

Mivel

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff x = 0, \quad \text{ezért} \quad \mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R} \big(= \mathcal{D}_{\operatorname{th}}\big)$ pontban $\operatorname{th} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{th}' x = \big(\operatorname{th} x\big)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}' x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{th}'(x) = \big(\operatorname{th} x\big)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\operatorname{th}}\big)}.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{cth}}$ pontban $\operatorname{cth} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{cth}' x = \big(\operatorname{cth} x\big)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}' x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{cth}' x = \big(\operatorname{cth} x\big)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}\big)}. \ \blacksquare$$

Kiegészítés: Hatványsor összegfüggvényének deriválása

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás.

1. lépés. Először azt mutatjuk meg, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=1} n\alpha_n (x_0-a)^{n-1}$$

számsor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Ezt az állítást a következőképpen látjuk be. Tekintsük a konvergenciaintervallum egy $x_0 \in K_R(a)$ pontját és válasszuk meg a ϱ számot úgy, hogy még az is a konvergenciaintervallum belsejébe tartozzék és az

$$|x_0 - a| < |\varrho - a| < R$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Ekkor a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(\varrho - a)^n$ számsor konvergens, tehát a tagjai nullához tartanak, ezért korlátosak is, azaz

$$\exists\, K > 0 \;:\; |\alpha_n| \cdot |\varrho - a|^n < K \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

A tagonkénti deriválással kapott sor n-edik tagja x_0-ban

$$n\alpha_n (x_0-a)^{n-1} = n\alpha_n(\varrho-a)^n \cdot \frac{1}{\varrho-a}\left(\frac{x_0-a}{\varrho-a}\right)^{n-1},$$

ezért

$$|n\alpha_n (x_0-a)^{n-1}| \le nK \cdot \frac{1}{|\varrho-a|}\left|\frac{x_0-a}{\varrho-a}\right|^{n-1} = \frac{K}{|\varrho-a|} \cdot nq^{n-1},$$

ahol $0 \le q := \left|\frac{x_0-a}{\varrho-a}\right| < 1$.

A $\sum\limits_{n=0} \big|n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\big|$ sornak tehát majoránsa a $\sum\limits_{n=0} \frac{K}{|\varrho-a|} nq^{n-1}$ számsor. Ez $q = 0$ mellett nyilván konvergens, $q > 0$ esetén pedig pozitív tagú számsor és szomszédos tagjainak hányadosa

$$\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q \to q < 1, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

A számsorokra vonatkozó hányadoskritérium szerint tehát a talált majoráns sor konvergens, így az eredeti $\sum\limits_{n=0} n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}$ sor abszolút konvergens. Ezzel az állítást igazoltuk.

2. lépés. Jelöljük F-fel az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott hatványsor összegfüggvényét:

$$F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Megmutatjuk, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban

$$(*) \qquad \lim_{t \to x_0} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0)\right) = 0.$$

Ebből már következik, hogy az f függvény differenciálható az x_0 pontban és a deriváltja $F(x_0)$-lal egyenlő, azaz

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x_0 - a)^{n-1}.$$

A $(*)$ egyenlőség igazolásához rögzítsük az $x_0 \in K_R(a)$ pontot és vegyünk egy olyan $0 < R_0 < R$ számot, amelyre $x_0 \in K_{R_0}(a)$. Legyen $\xi := t - a$ és $\xi_0 := x_0 - a$. Ekkor minden $t \in K_{R_0}(a)$ esetén

$$\begin{aligned} f(t) - f(x_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(t-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x_0-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\big(\xi^n - \xi_0^n\big) = \\ &= (\xi - \xi_0)\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big) = \\ &= (t - x_0)\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} - F(x_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n\xi_0^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\big[(\xi^{n-1} - \xi_0^{n-1}) + \xi_0(\xi^{n-2} - \xi_0^{n-2}) + \cdots + \xi_0^{n-2}(\xi - \xi_0)\big]. \end{aligned}$$

Mivel

$$\xi^l - \xi_0^l = \big(\xi - \xi_0\big)(\xi^{l-1} + \cdots + \xi_0^{l-1}\big) \qquad (l \in \mathbb{N}),$$

$|\xi| = |t - a| < R_0$ és $|\xi_0| = |x_0 - a| < R_0$, ezért

$$\big|\xi^l - \xi_0^l\big| \le |\xi - \xi_0| \cdot l \cdot R_0^{l-1}.$$

A fentiek alapján tehát

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} - F(x_0)\right| \le \\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |\xi - \xi_0| \big[(n-1)R_0^{n-2} + (n-2)R_0^{n-2} + \cdots + 1 \cdot R_0^{n-2}\big] = \\ &= |t - x_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Alkalmazzuk most az 1. lépésben kapott eredményt a $\sum_{n=1} n\alpha_n(x-a)^{n-1}$ hatványsorra. A tagonkénti deriválással nyert

$$\sum_{n=2} n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2}$$

sor tehát konvergens, sőt abszolút konvergens minden $x \in K_R(a)$ pontban. Ebből következik, hogy az (1)-ben szereplő $\sum |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}$ sor konvergens. Jelöljük M-mel az összegét. Így kapjuk az

$$\left|\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} - F(x_0)\right| \le M|t - x_0|$$

becslést, amiből $t \to x_0$ határátmenetet véve adódik (1), és ez a tétel bizonyítását jelenti. ■

6. előadás

2016. október 17.

Többször deriválható függvények, magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a *többször deriválható függvények* és a *magasabb rendű deriváltak* fogalmához. A *rekurzió módszerét* alkalmazzuk. Először a *kétszer deriválhatóság* fogalmát definiáljuk.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f* ***kétszer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha*

- *a függvény deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében, azaz $\exists\, r > 0 :\ f \in D\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

az f függvény ***a-beli második deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f''(x)$$

az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \ \text{ és } \ f^{(1)} := f',$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a) \ \text{ és } \ f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy

$$f^{(0)}(a) := f(a) \ \text{ és } \ f^{(0)} := f. \ \blacksquare$$

Indukcióval értelmezzük az *n-szeri deriválhatóságot* és az *n-edik deriváltat.* Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \ldots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$-gyel jelölt $(n-1)$-edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy f* ***n-szer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha*

- *$\exists\, r > 0 :\ f \in D^{n-1}\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \big(f^{(n-1)}\big)'(a)$$

az f függvény ***a-beli n-edik deriváltja.***

Ha $H := \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény **n-edik deriváltfüggvénye**, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **a-ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az f **függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

Tétel. *Ha valamilyen* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f, g \in D^n\{a\}$*, akkor*

1^o $f + g \in D^n\{a\}$ *és* $\big(f+g\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$,

$$2^o\ f \cdot g \in D^n\{a\} \quad \textit{és} \quad \big(f \cdot g\big)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

(*Ez a* ***Leibniz-szabály***.)

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható. 1^o bizonyítása szinte triviális, 2^o belátása némi számolgatást igényel. ■

A lokális szélsőérték és a derivált kapcsolata

Megjegyzés. Megemlítettük már azt, hogy a differenciálszámítás jól használható *általános módszert* ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.

Hamarosan látni fogjuk, hogy a derivált milyen hatékony segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez *lokálisan* és *globálisan* is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke a függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket.

Ha viszont f egy intervallum minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. ■

Korábban már értelmeztük az **abszolút szélsőértékek** fogalmát. Célszerű bevezetni ezek **lokális** változatait.

Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***lokális maximuma van****, ha*

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad \forall\, x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f \ \textit{ esetén } \ f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontot* f ***lokális maximumhelyének*** *nevezzük, az* $f(a)$ *érték pedig a függvény* ***lokális maximuma****.*

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az x $(x \in [0,1])$ függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.

Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy } f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{ és} \\ \bullet\ f \in D\{a\} \ \textit{valamilyen } a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f\textit{-ben} \\ \bullet\ f\textit{-nek } a\textit{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont *lokális maximumhelye* az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists\, r > 0 : \quad \forall\, x \in (a - r, a + r) \ \text{ esetén } f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a+r$, azaz $x-a>0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x)-f(a)\le 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) = f'(a) \le 0.$$

Ha $a-r < x < a$, azaz $x-a<0$, akkor $f(x)\le f(a)$ (vagyis $f(x)-f(a)\le 0$) miatt a $(*)$ alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a) = f'(a) \ge 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a)\le 0$ és $f'(a)\ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a)=0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha *a lokális minimumhelye* az f függvénynek. ■

Megjegyzések.

1^o Deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x)=0$ egyenletet kell megoldani.

2^o Abból, hogy $f'(a)=0$, *nem következik*, hogy az f függvénynek az $a\in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pont lokális szélsőértékhelye. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvényre $f'(x)=3x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ miatt $f'(0)=0$, de a függvénynek *nincs* 0-ban lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a)=0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen. ■

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

Definíció. *Az $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$* ***stacionárius pontja****, ha*

$$f\in D\{a\} \qquad \textit{és} \qquad f'(a)=0.$$

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvénynek lokális szélsőértékhelyei a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékhelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

A differenciálszámítás középértéktételei

Tétel. (A Rolle-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a,b\in\mathbb{R},\ a<b.\ \textit{Tegyük fel,}\\ \textit{hogy } f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ \textit{és}\\ \quad\bullet\ f\in C[a,b],\\ \quad\bullet\ f\in D(a,b),\\ \quad\bullet\ f(a)=f(b).\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\exists\,\xi\in(a,b),\ \ \textit{hogy}\\ f'(\xi)=0.\end{array}$$

Bizonyítás. Mivel $f\in C[a,b]$, ezért Weierstrass tételéből következik, hogy

$$\exists\,\alpha,\,\beta\in[a,b]: \qquad f(\alpha)=\min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta)=\max_{[a,b]} f =: M.$$

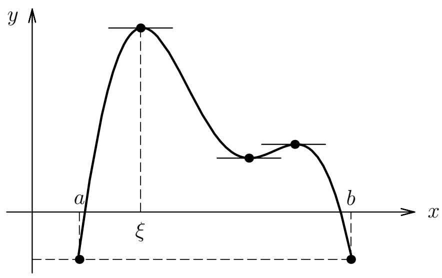
1. eset: $m = M$. Ekkor f állandó (a, b)-n, így tetszőleges $\xi \in (a, b)$ pontban $f'(\xi) = 0$.

2. eset: $m \neq M$, tehát $m < M$.

Ha $m \neq f(a) = f(b)$, akkor az α abszolút minimumhely az (a, b) intervallumban van. Világos, hogy α egyúttal lokális minimumhelye is az f függvénynek. A feltételeink alapján $f \in D\{\alpha\}$, ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\alpha) = 0$. A tétel állítása tehát a $\xi := \alpha \in (a, b)$ választással teljesül.

Ha $m = f(a) = f(b) < M$, akkor a β abszolút maximumhely van az (a, b) intervallumban, és ez egyúttal lokális maximumhely is, tehát $f'(\beta) = 0$. Ebben az esetben tétel állítása tehát a $\xi := \beta \in (a, b)$ választással teljesül. ■

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x-tengellyel:



Tétel. (A Lagrange-féle középértéktétel.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. *Tegyük fel, hogy* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *és*
- $f \in C[a, b]$,
- $f \in D(a, b)$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in (a, b)$, *hogy*
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Az $\big(a, f(a)\big)$ és a $\big(b, f(b)\big)$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.

Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a, b]$-n és deriválhatók (a, b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0, \\ F(b) &= f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right) = 0, \end{aligned}$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül.

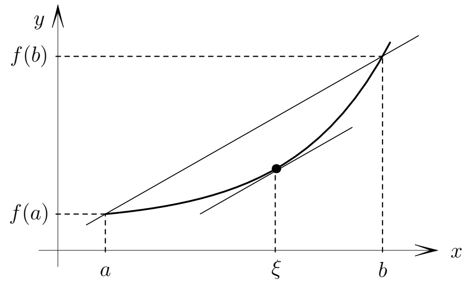
A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ ■$$

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és deriválható (a,b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ pontokon áthaladó szelővel:



Tétel. (A Cauchy-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a,b\in\mathbb{R},\ a<b. \textit{ Tegyük fel,} \\ \textit{hogy } f,g:[a,b]\to\mathbb{R} \quad \textit{és} \\ \quad\bullet\ f,g\in C[a,b], \\ \quad\bullet\ f,g\in D(a,b), \\ \quad\bullet\ \forall\, x\in(a,b) \textit{ esetén } g'(x)\neq 0. \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \exists\,\xi\in(a,b), \quad \textit{hogy} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \end{array}$$

Bizonyítás. A Rolle-tételből következik, hogy $g(a)\neq g(b)$. Valóban, $g(a)=g(b)$-ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a,b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) \qquad \big(x\in[a,b]\big).$$

Az F függvény folytonos $[a,b]$-n, deriválható (a,b)-n és $F(a)=F(b)=0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi\in(a,b)$, amelyre $F'(\xi)=0$. Ekkor

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi)\neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \ \blacksquare$$

A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

Tétel. (A deriváltak egyenlősége.)

1^o *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f\in D(a,b)$. Ekkor*

$$f'\equiv 0\ (a,b)\text{-}n \iff f\equiv \textit{állandó}\ (a,b)\text{-}n.$$

2^o *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f,g\in D(a,b)$. Ekkor*

$$f'\equiv g'\ (a,b)\text{-}n \iff \exists\, c\in\mathbb{R}:\ f(x)=g(x)+c\ \big(\forall\, x\in(a,b)\big).$$

Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longleftarrow}$ Ezt már tudjuk, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Legyen $a<x_1<x_2<b$. Alkalmazzuk az f függvényre az $[x_1,x_2]$ intervallumon a Lagrange-féle középértéktételt. Ekkor van olyan $\xi\in(x_1,x_2)$, amelyre

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Mivel $f'(\xi)=0$, ezért $f(x_1)=f(x_2)$, következésképpen f állandó.

2^o Az $F:=f-g$ függvényre alkalmazzuk az 1^o állítást. $\blacksquare$

A monotonitás és a derivált kapcsolata

Az alkalmazások szempontjából hasznosak az alábbi állítások.

Tétel. (Elégséges feltétel a monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $f \in C[a, b]$ *és* $f \in D(a, b)$. *Ekkor,*

1^o (a) *ha* $f' \geq 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *monoton növekedő* $[a, b]$*-n;*
(b) *ha* $f' \leq 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *monoton csökkenő* $[a, b]$*-n;*

2^o (a) *ha* $f' > 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton növekedő* $[a, b]$*-n;*
(b) *ha* $f' < 0$ (a, b)*-n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton csökkenő* $[a, b]$*-n.*

Bizonyítás. Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. Ekkor $f \in C[x_1, x_2]$ és $f \in D(x_1, x_2)$, ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ezt felhasználva mindegyik állítás egyszerűen bizonyítható. ■

Megjegyzések.

1^o A fenti tétel szerint a *derivált előjeléből* következtethetünk a *monotonitásra.*

2^o A tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \quad \text{akkor} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \ \big(\forall\, x \in \mathcal{D}_f\big),$$

de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum.* ■

A *monotonitásra* vonatkozó állítások *megfordíthatók.*

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $f \in C[a, b]$ *és* $f \in D(a, b)$. *Ekkor*

1^o f *monoton növekedő* $[a, b]$*-n* $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$ (a, b)*-n,*

2^o f *monoton csökkenő* $[a, b]$*-n* $\Longleftrightarrow$ $f' \leq 0$ (a, b)*-n.*

Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longleftarrow}$ Az előző tétel 1^o (a) része.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy f monoton növekedő $[a, b]$-n, azaz

$$\forall\, x, t \in [a, b], \ x \leq t \ \text{ esetén } \ f(x) \leq f(t).$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in (a, b)$ pontot, és tekintsük az f függvény x-hez tartozó különbséghányadosfüggvényét:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad \big(t \in [a, b] \setminus \{x\}\big).$$

Ha $[a, b] \ni t > x$, akkor $t - x > 0$, és $f(t) \geq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \geq 0$) miatt a fenti tört nem negatív:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ha $[a, b] \ni t < x$, akkor $t - x < 0$, és $f(t) \leq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \leq 0$) miatt a szóban forgó tört szintén nem negatív.

Mivel $f \in D\{x\}$, ezért

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

2^o Hasonló a bizonyítás monoton csökkenő függvény esetére. ■

A *szigorú monotonitásra* vonatkozó elégséges feltételek *nem fordíthatók meg.* Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő az egész $\mathbb{R}$-en, de a deriváltja 0 értéket is felvesz: $f'(0) = 0$.

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a szigorú monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

1^o *f szigorúan monoton növekedő $[a, b]$-n $\iff$*
$f' \geq 0$ (a, b)-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla;

2^o *f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$-n $\iff$*
$f' \leq 0$ (a, b)-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

Bizonyítás. Egyszerűen belátható, hogy egy f függvény pontosan akkor szigorúan monoton $[a, b]$-n, ha monoton, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f állandó. Így az állítás egyszerűen következik abból, hogy $f' \equiv 0$ $(c, d) \subset [a, b]$-n $\iff$ $f \equiv$ állandó (c, d)-n. ■

A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy
- *$f \in D(a, b)$,*
- *egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és*
- *az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben.*

Ekkor,

1^o *ha az f' függvény negatívból pozitívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye;*

2^o *ha az f' függvény pozitívból negatívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Az előjelváltást formálisan így definiáljuk: Legyen $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$. Azt mondjuk, hogy a h függvény az a pontban *negatívból pozitívba megy át* (röviden: $(-, +)$ *előjelváltása van*), ha $h(a)$=0 és $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy

$$h(x) < 0, \text{ ha } x \in (a - \delta, a) \quad \text{és} \quad h(x) > 0, \text{ ha } x \in (a, a + \delta).$$

A $(+, -)$ előjelváltást hasonló módon értelmezzük. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy
- *f kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban, azaz $f \in D^2\{c\}$,*
- *$f'(c) = 0$,*
- *$f''(c) \neq 0$.*

Ekkor c lokális szélsőértékhelye az f függvénynek;

1^o *ha $f''(c) > 0$, akkor f-nek c-ben lokális minimuma van,*

2^o *ha $f''(c) < 0$, akkor f-nek c-ben lokális maximuma van.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor, sem arra nem következtethetünk, hogy f-nek van, sem arra, hogy f-nek nincs lokális szélsőértéke c-ben. A különböző lehetőségeket mutatják például az

$$f(x) := x^3, \qquad f(x) := x^4 \quad \text{és az} \quad f(x) := -x^4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek. ■

7. előadás

2016. október 24.

Konvex és konkáv függvények

Megjegyzés. Valós-valós függvények konvexitását és konkávitását **intervallumon** fogjuk értelmezni. **Intervallumon** mindig nem üres és nem egyetlen pontból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt értünk. A továbbiakban gyakran használt

$$„I \subset \mathbb{R} \text{ (tetszőleges) intervallum”}$$

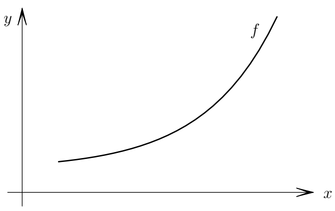
kijelentésen (hacsak mást nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum. A következő halmazok mindegyike intervallum:

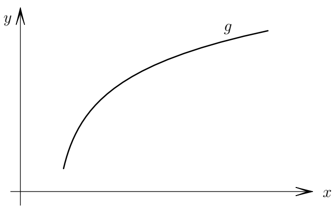
$$(-1, 1), \quad [-1, 1], \quad [-1, 0), \quad [0, +\infty), \quad (-\infty, 0), \quad (-\infty, +\infty). \ \blacksquare$$

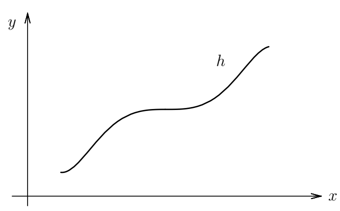
• A konvexitás és a konkávitás szemléletes jelentése

Célunk továbbra is függvények általános tulajdonságainak a leírása, jellemzése. Azt már láttuk, hogy a differenciálszámítás milyen hatékony eszközöket kínál a monotonitás és a szélsőértékek vizsgálatához.

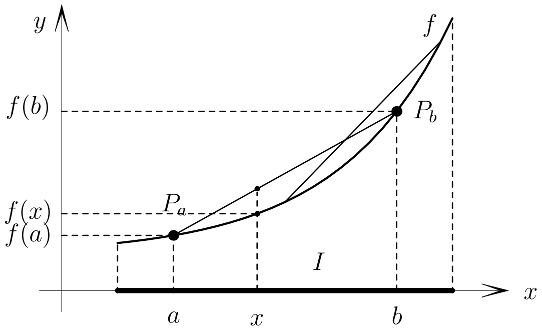
Most tovább folytatjuk függvények „alaki” tulajdonságainak a tanulmányozását. Számos *konkrét* függvény grafikonját már jól ismerjük. Gondoljunk most a *monoton növekedésre*. Világos, hogy egy függvény többféleképpen is lehet monoton növekedő:

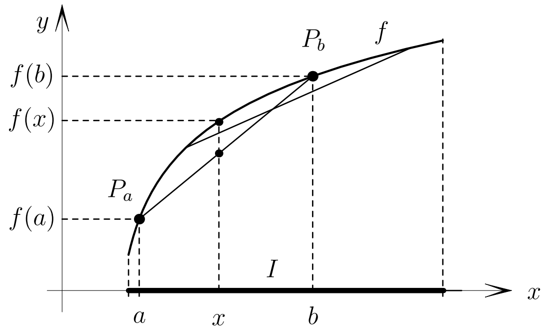






A jobb oldali grafikonnal ellentétben a másik kettő bizonyos jellegzetes „szabályosságot” mutat. Ezeket a tulajdonságokat célszerű definiálni. Az f függvényt (bal oldali ábra) **konvexnek**, g-t pedig (középső ábra) **konkávnak** fogjuk nevezni. A definíció megfogalmazásához használjuk fel a derivált definíciójánál már bevált *ötletet*: húzzunk be húrokat:





Szemléletesen világos, hogy az I intervallum tetszőleges $a < b$ pontjai esetén az f (a g) függvény grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt (felett) van. A szóban forgó húr egyenesének az egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A fentiek alapján eléggé természetesek a következő definíciók. $\blacksquare$

• A konvexitás és a konkávitás fogalma

Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* ***konvex az*** $I \subset \mathbb{R}$ ***intervallumon****, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \ \textit{esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $(*)$-ban $\le$ helyett $<$ áll, akkor f-et **I-n szigorúan konvexnek**, ha $\ge$, illetve $>$ áll, akkor f-et **I-n konkávnak**, illetve **szigorúan konkávnak** nevezzük.

Megjegyzések.

1^o Ha az f függvény elsőfokú $\mathbb{R}$-en, azaz $f(x) = cx + d$ $(x \in \mathbb{R})$ valamely c és d állandóval, akkor $(*)$-ban egyenlőség áll minden x-re. Tehát egy elsőfokú függvény egyszerre konvex és konkáv is.

2^o Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en. ■

A konvexitást jellemző egyenlőtlenséget érdemes más formában is megadni.

Tétel. *Az* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallumon értelmezett* $f : I \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor konvex* I*-n, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \ \textit{és} \ \ \forall\, \lambda \in (0, 1) \ \ \textit{esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

Megjegyzés. Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \in (a, b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)b = x < \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Másrészt az (a, b) intervallum minden eleme előálll $\lambda a + (1 - \lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a, b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b - x}{b - a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b - x}{b - a} \cdot a + \left(1 - \frac{b - x}{b - a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I,\ a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} f\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) &\le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big(\big[\lambda a + (1 - \lambda)b - a\big]\big) + f(a) = \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big[(1 - \lambda)(b - a)\big] + f(a) = \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b), \end{aligned}$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

Korábban láttuk, hogy függvények monotonitása kapcsolatba hozható azok különbségihányados-függvényeivel. Hasonló a helyzet a konvexitás és a konkávitás esetében is. Emlékeztetünk arra, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\triangle_c f(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{c\}\big)$$

függvényt neveztük az f függvény c ponthoz tartozó *különbségihányados-függvényének.*

Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor*

1^o *f konvex [szigorúan konvex] I-n $\iff$ $\forall\, c \in I$ esetén $\triangle_c f \nearrow$ [$\uparrow$].*

2^o *f konkáv [szigorúan konkáv] I-n $\iff$ $\forall\, c \in I$ esetén $\triangle_c f \searrow$ [$\downarrow$].*

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I intervallumon, azaz

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Be kell látnunk, hogy tetszőleges $c \in I$ esetén a $\triangle_c f$ függvény monoton növekedő, vagyis hogy

$$(\#) \qquad \forall\, x, t \in I \setminus \{c\},\ x < t \text{ esetén } \triangle_c f(x) \le \triangle_c f(t).$$

A c és az $x < t$ pontok helyzetét illetően három eset lehetséges:

$$1^o\ c < x < t, \qquad 2^o\ x < c < t, \qquad 3^o\ x < t < c.$$

<u>1^o eset ($c < x < t$)</u>: Legyen (*)-ban $a := c$, $x := x$, $b := t$. Ekkor

$$f(x) \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}(x - c) + f(c),$$

amiből egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz} \quad \triangle_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \triangle_c f(t),$$

vagyis ebben az esetben igaz a (#) egyenlőtlenség.

<u>2^o eset ($x < c < t$)</u>: Ha (*)-ban $a := x$, $x := c$ és $b := t$, akkor

$$f(c) \le \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(c - x) + f(x),$$

amiből ekvivalens átalakítássokkal azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \iff \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz} \quad \triangle_c f(x) \le \triangle_c f(t),$$

ezért a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

<u>3^o eset ($x < t < c$)</u>: ($*$) helyett most a vele nyilván ekvivalens

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big)$$

egyenlőtlenségből indulunk ki. Ebből az $a := x$, az $x := t$ és az $b := c$ szereposztással azt kapjuk, hogy

$$f(t) \le \frac{f(c) - f(x)}{c - x}(t - c) + f(c).$$

Vegyük figyelembe, hogy $t < c$, azaz $t - c < 0$, ezért

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \ge \frac{f(c) - f(x)}{c - x}.$$

Következésképpen

$$\triangle_c f(t) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \ge \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \triangle_c f(x) \qquad (x < t),$$

és ez azt jelenti, hogy a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

Az állítás $\boxed{\Rightarrow}$ részét tehát bebizonyítottuk.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\forall\, c \in I$-re $\triangle_c f \nearrow$. Be kell látnunk, hogy f konvex I-n, vagyis hogy

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \text{ és } \forall\, x \in (a, b) \text{ esetén}$$
$$f(x) \le \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Valóban, legyen $c := a$ és $(a <)\, x < b$. Mivel $\triangle_a f \nearrow$, ezért

$$\triangle_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \triangle_a f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

amiből átrendezéssel az adódik, hogy

$$f(x) \le \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

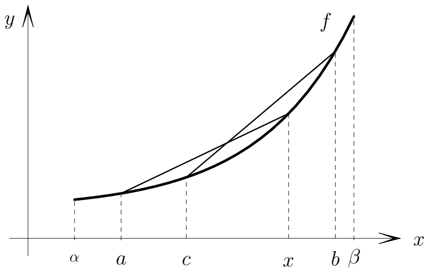
és ez éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az I intervallumon. ■

• A konvexitás-konkávitás és a folytonosság, illetve a deriválhatóság kapcsolata

A következő tétel azt állítja, hogy a konvexitás a folytonosság és a deriválhatóság fogalma „között" van abban az értelemben, hogy a konvexitás fogalma a folytonosságnál „erősebb", a deriválhatóságnál pedig „gyengébb" fogalom.

Tétel.
Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon. $\Longrightarrow$
1^o *f az (α, β) intervallum minden c pontjában folytonos.*
2^o *f az (α, β) intervallum minden c pontjában jobbról is és balról is deriválható.*

Bizonyítás.
1^o Rögzítsük a $c \in (\alpha, \beta)$ pontot és válasszuk meg a-t és b-t úgy, hogy $\alpha < a < c < b < \beta$. Vegyünk egy tetszőleges $x \in (c, b)$ elemet, és tekintsük a következő ábrát:



Alkalmazzuk az f függvényre a konvexitás definícióját a $c < x < b$ pontokban:

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - c) + f(c).$$

Írjuk most fel az $a < c < x$ pontokban is a megfelelő egyenlőtlenséget:

$$f(c) \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(c - a) + f(a).$$

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) \le f(x).$$

Így

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) \le f(x) \le \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - c) + f(c) \qquad \big(x \in (c, b)\big).$$

A fenti egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló függvények folytonosak c-ben, és

$$\lim_{x\to c+0}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)+f(a)\right)=\lim_{x\to c+0}\left(\frac{f(b)-f(c)}{b-c}(x-c)+f(c)\right)=f(c),$$

ezért a függvény határértékére vonatkozó közrefogási elv alapján

$$\lim_{x\to c+0} f(x)=f(c).$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=f(c),$$

és ez azt jelenti, hogy az f függvény folytonos a c pontban.

2^o Legyen $c\in(\alpha,\beta)$. Egyik korábbi tételünk szerint az f függvény tetszőleges $c\in(\alpha,\beta)$ ponthoz tartozó különbségihányados-függvénye, vagyis a

$$\triangle_c f(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\qquad \big(x\in(\alpha,\beta)\setminus\{a\}\big)$$

függvény monoton növekedő. Rögzítsünk egy $d\in(\alpha,c)$ számot. Ekkor

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\le\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\qquad \big(x\in(c,\beta)\big),$$

tehát $\triangle_c f$ monoton növekedő és alulról korlátos a (c,β) intervallumon, ezért a monoton függvények szakadási helyeire vonatkozó állításból következik, hogy a

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

határérték létezik és véges, ami éppen azt jelenti, hogy f jobbról deriválható c-ben. Ugyanígy bizonyítható, hogy f balról is differenciálható c-ben. ■

Tétel. *Legyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, és tegyük fel, hogy $f\in D(\alpha,\beta)$.*

1^o Az f függvény konvex [szigorúan konvex] (α,β)-n $\iff$ az f' függvény $\nearrow$ $[\uparrow]$.

2^o Az f függvény konkáv [szigorúan konkáv] (α,β)-n $\iff$ az f' függvény $\searrow$ $[\downarrow]$.

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az (α,β) intervallumon, azaz

$$\forall\, a,b\in(\alpha,\beta),\ a<b \text{ esetén}$$
$$f(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\quad \big(\forall\, x\in(a,b)\big).$$

Ebből következik, hogy a $\triangle_a f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{a\}$ halmazon, ezért

$$\triangle_a f(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad \forall\, x<b,\ x\ne a \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(a)=\lim_{x\to a}\triangle_a f(x)$, ezért

$$(*)\qquad f'(a)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hasonlóan, a $\triangle_b f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{b\}$ halmazon, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\triangle_b f(a)\le\triangle_b f(x)=\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\quad \forall\, a<x,\ x\ne b \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(b)=\lim_{x\to b}\triangle_b f(x)$, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b).$$

Így $(*)$ alapján azt kapjuk, hogy $f'(a) \le f'(b)$. Mivel ez minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$-re igaz, ezért f' monoton növekedő az (α, β) intervallumon.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy f' monoton növekedő (α, β)-n. Legyen $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ tetszőleges. f-re a Lagrange-féle középértéktételt először az $[a, x]$, majd az $[x, b]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \xi_1 \in (a, x): \quad f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{és} \quad \exists\, \xi_2 \in (x, b): \quad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Mivel $\xi_1 < \xi_2$ és $f' \nearrow$, ezért $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$. Így

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{[f(b) - f(a)] - [f(x) - f(a)]}{b - x} \iff$$

$$\iff [f(x) - f(a)] \cdot [(b - x) + (x - a)] \le [f(b) - f(a)] \cdot (x - a) \iff f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Ez az egyenlőtlenség minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az (α, β) intervallumon. ■

Tétel. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha, \beta)$. Ekkor*

1^o *f konvex (α, β)-n* $\iff f''(x) \ge 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

2^o *f konkáv (α, β)-n* $\iff f''(x) \le 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

3^o *ha* $f''(x) > 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies$ *f szigorúan konvex (α, β)-n,*

4^o *ha* $f''(x) < 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies$ *f szigorúan konkáv (α, β)-n.*

Bizonyítás. A tétel állításai az előző tétel, valamint a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások egyszerű következményei. ■

Tétel.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy
- *$f \in D(\alpha, \beta)$,*
- *f konvex (α, β)-n.*

$\iff$ $\forall\, c \in (\alpha, \beta)$ pontban $f(x) \ge f'(c)(x - c) + f(c) \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$.

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzés. A tétel geometriai tartalma a következő: Az f függvény akkor és csak akkor konvex (α, β)-n, ha minden $c \in (\alpha, \beta)$ esetén az f függvény grafikonja a c pontban húzott érintő felett halad. ■

• Inflexiós pont

Definíció. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek **inflexiós pontja**, ha*

$$\exists\, \delta > 0: \quad f \text{ konvex } (c, c - \delta]\text{-n és konkáv } [c, c + \delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva.}$$

Tétel. (Szükséges feltétel az inflexiós pontra.)

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy
- *$f \in D^2(\alpha, \beta)$ és*
- *$c \in (\alpha, \beta)$ inflexiós pontja f-nek.*

$\implies$ $f''(c) = 0$.

Magasabb rendű *elégséges feltételek* a lokális szélsőértékekre és az inflexióra.

Tétel. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és*

- *valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra egy $c \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D^n\{c\}$, továbbá*
- *$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ és $f^{(n)}(c) \neq 0$.*

Ekkor a következő állítósok teljesülnek:

1^o *A $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek lokális szélsőértékhelye $\iff$ ha n páros (ha $f^{(n)}(c) > 0$, illetve $f^{(n)}(c) < 0$ akkor az f függvénynek c-ben lokális minimuma, illetve lokális maximuma van).*

2^o *A $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek inflexiós pontja $\iff$ ha n páratlan.*

Aszimptoták

Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***van aszimptotája*** *$(+\infty)$**-ben**, ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ebben az esetben az $l(x) = Ax + B$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes az f függvény ***aszimptotája*** *$(+\infty)$**-ben**.*

Megjegyzés. Hasonló módon értelmezzük a $(-\infty)$-beli aszimptotát. ■

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. ■

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

1^o Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)
2^o Monotonitási intervallumok.
3^o Lokális és abszolút szélsőértékek.
4^o Konvexitási, konkávitási intervallumok.
5^o A határértékek a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.
6^o Aszimptota $(\pm\infty)$-ben.
7^o A függvény grafikonjának felrajzolása.

8. előadás

2016. november 7.

ELEMI FÜGGVÉNYEK

Trigonometrikus függvények

• Előzetes megjegyzések a trigonometrikus függvényekről

A trigonometrikus függvényeket más szóval szögfüggvényeknek is nevezik, mert szögekhez, pontosabban szögek mérőszámaihoz rendelnek valós számokat.

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket érdemes felidézni és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerpelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése" vagy a *körív hossza.* A π **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3,14$.

Az Analízis 1-ben a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** bizonyos hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos" sin és cos szimbólumokat. ■

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő:

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***periodikus****, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és*

$$f(x+p) = f(x).$$

A p számot f ***periódusának****, az f függvényt pedig p* ***szerint priodikus*** *függvénynek nevezzük.*

Megjegyzés. Ha az f függvény p szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+kp) = f(x).$$

Vagyis, ha p az f függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén kp is periódusa f-nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb (pozitív) periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb. ■

• A sin és a cos függvény

Megjegyzés. A **szinusz-** és a **koszinuszfüggvénnyt** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban (többek között az Analízis 1-ben) már megismertünk:

1º A sin függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,
a cos függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

2º Addíciós képletek: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3º Négyzetes összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4º A sin és a cos függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és $\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin$. ■

Most a sin és a cos függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a π **számot.**

Tétel. *A* cos *függvénynek a* $[0, 2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0, 2]$*-nek pontosan egy* ξ *pontjában áll fenn a* $\cos \xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* ξ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** π ***számot:***

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0, 2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \dots = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right) - \dots <$$
$$< \text{(a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak)} < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\, \xi \in [0, 2]$: $\cos \xi = 0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos \downarrow$ a $[0, 2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots > 0 \quad \big(x \in (0, 2)\big)$$

egyenlőtlenség következménye. ■

Megjegyzések.

1^o A Bolzano-tétel bizonyításánal alkalmazott *Bolzano-féle felezési eljárással* π közelítő értékei meghatározhatók.

2^o Igazolható, hogy π **irracionális** és **transzcendens** szám.

3^o Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például:

$$\sin \tfrac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \tfrac{\pi}{4} = \cos \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

4^o Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és megmutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete 2π. Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált π szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert π számmal. ■

A sin és a cos függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Tétel. *A* sin *és a* cos *függvény* 2π *szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és 2π *mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Most a sin és a cos függvény „alaki" tulajdonságait tanulmányozzuk. A periodicitást, valamint a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég egy π hosszú intervallumon elvégezni. Legyen ez az intervallum $[0,\pi]$.

Az (1) azonosságok alapján egyszerűen igazolható

$$\cos x>0\ \big(x\in(0,\tfrac{\pi}{2})\big) \quad \cos x<0\ \big(x\in(\tfrac{\pi}{2},\pi)\big) \quad \text{és} \quad \sin x>0\ (x\in(0,\pi))$$

egyenlőtlenségeket, a deriváltakra vonatkozó már ismert

$$\sin' x=\cos x,\ \cos' x=-\sin x,\ \sin'' x=-\sin x,\ \cos'' x=-\cos x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

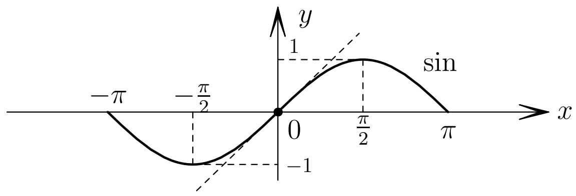
képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás-konkávitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a következő állításokat.

Tétel.

1^o sin $\uparrow$ $[0,\frac{\pi}{2}]$*-en,* $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2},\pi]$*-n és szigorúan konkáv* $[0,\pi]$*-n.*

2^o cos $\downarrow$ $[0,\pi]$*-n, szigorúan konkáv* $[0,\frac{\pi}{2}]$*-en és szigorúan konvex* $[\frac{\pi}{2},\pi]$*-n.*

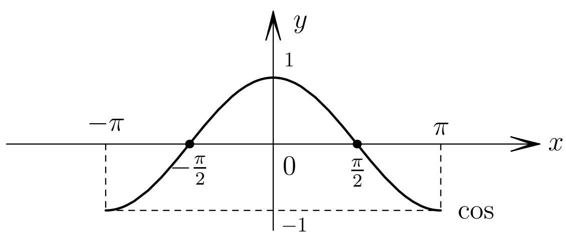
A sin függvény *páratlan*, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a sin függvény grafikonját a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A sin **függvény**

- $\downarrow$ $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$-en, $\uparrow$ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$-en és $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi,0]$-n és szigorúan konkáv $[0,\pi]$-n,
- 0 inflexiós pont.

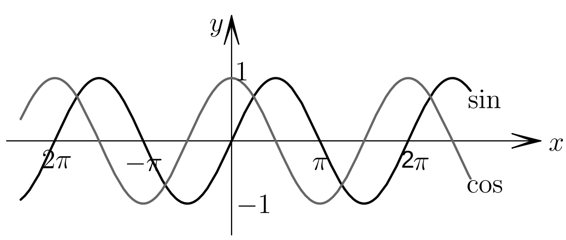
A cos függvény *páros*, ezért a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A cos **függvény**

- $\uparrow$ $[-\pi,0]$-n és $\downarrow$ $[0,\pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n,
- $\pm\frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.

Az alábbi ábrán a sin és a cos függvény grafikonjait szemléltetjük:



Az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény **zérushelyeire** vonatkozó alábbi állítások:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x=0 &\iff x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),\\ \cos x=0 &\iff x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}}$$

• A tg és a ctg függvény

A tg függvény korábbi értelmezésénél még nem tudtuk jellemezni a cos függvény zérushelyeit. Ezek ismeretében a **tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}\,(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k\pi \in \mathbb{Z}\}\right)}\,.$$

A tg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en megállapítani. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{tg} \in D^{\infty}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, és például

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}'' x = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm\frac{\pi}{2}$ pont körüli viselkedését. Mivel

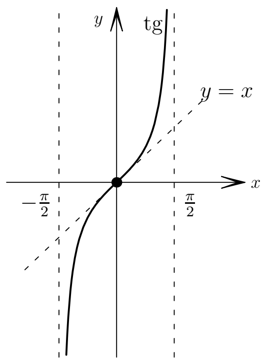
$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{továbbá} \quad \cos x > 0, \ \text{ha } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty\,.$$

A tg függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A tg **függvény**

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- szigorúan konkáv $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$-n,
  szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

A **kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}\,(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k\pi \in \mathbb{Z}\}\right)}\,.$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

(2) $$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right).$$

A ctg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0, \pi)$-n megvizsgálni. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{ctg} \in D^{\infty}(0, \pi)$, és például

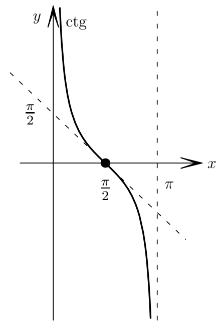
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}'' x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \qquad \left(x \in (0, \pi)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

A ctg függvény 0 és π pont körüli viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty\,.$$

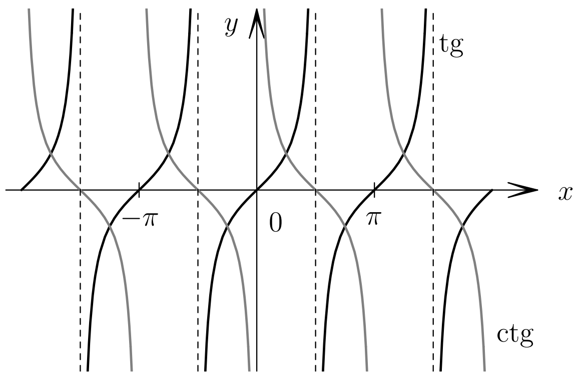
A ctg függvény grafikonja a $(0, \pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A ctg **függvény**

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow$ $(0, \pi)$-n,
- szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
  szigorúan konkáv $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$-n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ és $\lim\limits_{x \to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

Az alábbi ábrán a tg és a ctg függvények grafikonjait szemléltetjük:



Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

Megjegyzés. A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmas intervallumra vonatkozó leszűkítéseik, amelyeken a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket **arkuszfüggvényeknek** nevezzük. (Az *arcus* szó — latinul ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.) ■

Definíció. *A szigorúan monoton*

$$\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}, \quad \cos_{|\,[0,\pi]}, \quad \operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}, \quad \operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}$$

*függvények inverzeit rendre **arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz, arkusztangens-, arkuszkotangens-függvényeknek** nevezzük és így jelöljük:*

$$\operatorname{arc\,sin} := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,cos} := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordinátarendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következésképpen mindegyik arkuszfüggvény garikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az arc sin **függvény** definíciójából következik, hogy tetszőleges $x \in [-1,1]$ esetén $\operatorname{arc\,sin} x$ az a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x-szel egyenlő, azaz

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \operatorname{arc\,sin} x & = & y & \iff & \sin y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & & \big(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\big) & & \end{array}}$$

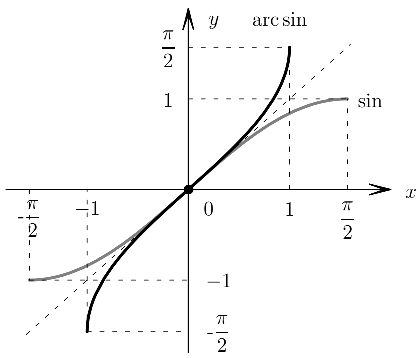
Az arc sin függvény *folytonos* $[-1,1]$-*en* (l. az „inverz függvény folytonosságára” vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1,1]$, azaz $y = \operatorname{arc\,sin} x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért minden $x \in (-1,1)$ esetén $\operatorname{arc\,sin} \in D\{x\}$ és

$$\operatorname{arc\,sin}' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

azaz

(3) $$\boxed{\operatorname{arc\,sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc sin függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc sin **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,sin}} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,sin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1,1]$-en,
- deriválható $(-1,1)$-en, és

$\operatorname{arc\,sin}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)$,
- $\uparrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konkáv $[-1,0]$-n, szigorúan konvex $[0,1]$-en,
- 0 inflexiós pont.

Az arc cos **függvény** definíciójából következik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \operatorname{arc\,cos} x & = & y & \iff & \cos y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & & (y \in [0,\pi]) & & \end{array}}$$

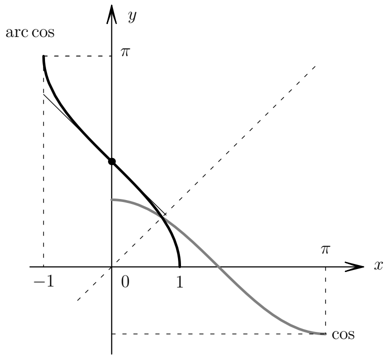
Az (1) azonosságok felhasználásával igazolható, hogy

(4) $$\boxed{\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} \quad \big(x \in [-1,1]\big)}.$$

Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az arc cos függvény *folytonos* $[-1,1]$-*en.* A (4) és a (3) képletekből pedig az következik, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén $\operatorname{arc\,cos} \in D\{x\}$ és

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc cos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc cos **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc cos}} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\text{arc cos}} = [0,\pi]$,
- folytonos $[-1,1]$-en,
- deriválható $(-1,1)$-en, és

$$\text{arc cos}'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big),$$

- $\downarrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konvex $[-1,0]$-n, szigorúan konkáv $[0,1]$-en,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont.

Az arc tg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc tg} \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{arc tg}\, x & = & y & \Longleftrightarrow & \text{tg}\, y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & \big(y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\big) & & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arc tg}\, x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{arc tg}\, x = +\frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az arc tg függvény aszimptotája a $(-\infty)$-ben (illetve a $(+\infty)$-ben).

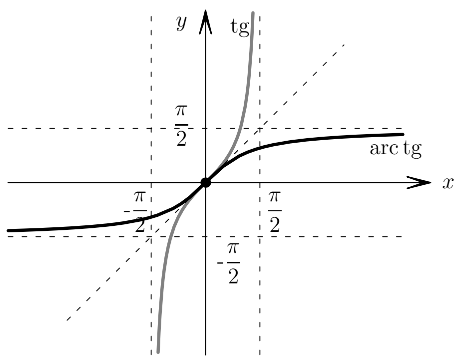
Mivel minden $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\text{tg}'y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \text{tg}\, y \in \mathbb{R}$ pontban az arc tg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\text{arc tg}'x = \frac{1}{\text{tg}'y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

azaz

$$\boxed{\text{arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc tg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc tg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$$\text{arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$$

- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szogorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0,+\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$-ben.

Az arc ctg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{arc ctg}\, x & = & y & \Longleftrightarrow & \text{ctg}\, y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & (y \in (0,\pi)) & & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = 0$ (illetve az $y = \pi$) egyenletű egyenes az arc ctg függvény aszimptotája $(-\infty)$-ben (illetve $(+\infty)$-ben).

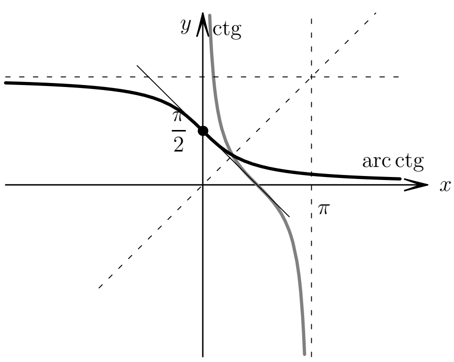
A (2) azonosságból következik, hogy az arc tg és az arc ctg függvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R})},$$

ezért arc ctg $\in D(\mathbb{R})$, és

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Most szemléltetjük az arc ctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc ctg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,ctg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,ctg}} = (0, \pi)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$\operatorname{arc\,ctg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

- $\downarrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = 0$ aszimptota a $(-\infty)$-ben,
- $y = \pi$ aszimptota a $(+\infty)$-ben.

Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

Emlékeztetünk arra, hogy a **szinuszhiberbolikusz-** és a **koszinuszhiberbolikusz-függvényt** az egész $\mathbb{R}$-en konergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x := \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

(5) $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (5) formulák, valamint az

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

alapvető képlet felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1° A sh *páratlan*, a ch pedig *páros* függvény.

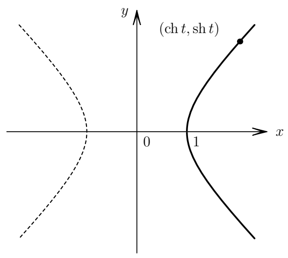
2° *Addíciós képletek*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3° *Négyzetes összefüggés*:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:



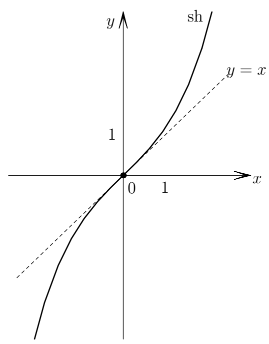
Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $(x, y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző. ■

4° A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzése nélkül felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

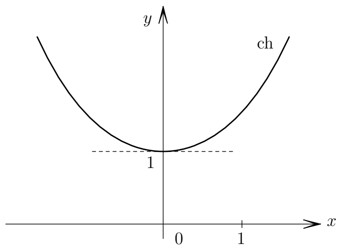
A sh függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \geq 1 > 0$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$,
  $\operatorname{sh}' 0 = \operatorname{ch} 0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont.



A ch függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$,
  $\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n, $\uparrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.



Megjegyzés. A ch függvény képét **láncgörbének** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel. ■

A **tangenshiperbolikusz-** és a **kotengenshiperbolikusz-függvényeket** a tg és a ctg függvények mintájára korábban már bevezettük:

$$\operatorname{th} x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \ \big(x \in \mathbb{R}\big), \qquad \operatorname{cth} x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

(A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $\operatorname{ch} x \neq 0$, és $\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0$.)

Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaikat elég a $(0,+\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th}$, a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{cth}$ és a $\lim\limits_{0+0} \operatorname{cth}$ határértékeket. Mivel

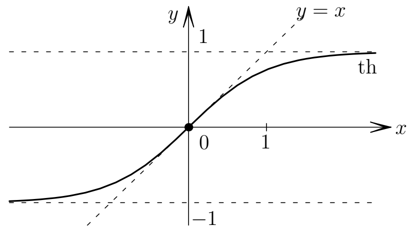
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \overset{(5)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sh} x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty.$$

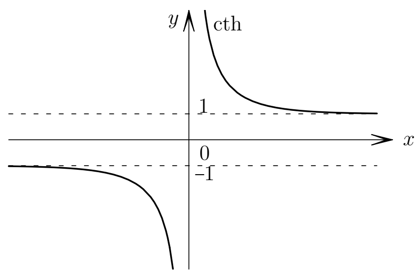
A th **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{th}} = (-1,1)$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$, $\operatorname{th}' 0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0,+\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



A cth **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{cth}} = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$,
- páratlan függvény,
- deriválható, és $\operatorname{cth}' x = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n és $\downarrow$ $(0,+\infty)$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0,+\infty)$-en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



9. előadás

2016. november 14.

ELEMI FÜGGVÉNYEK (folytatás)

• Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)

Definíció. *A szigorúan monoton* sh, $\operatorname{ch}_{|[0,+\infty)}$, th, $\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}$ *függvények inverzeit rendre* ***area-szinuszhiperbolikusz-, areakoszinuszhiperbolikusz-, areatangenshiperbolikusz-, areakotangens-függvényeknek*** *nevezzük és így jelöljük:*

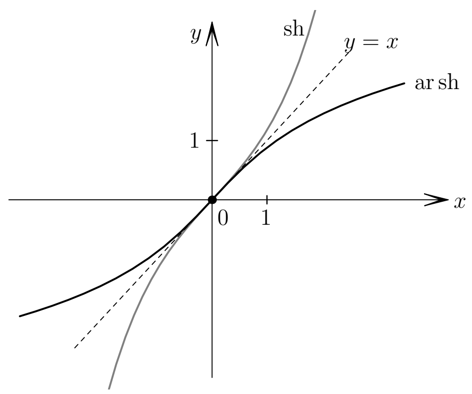
$$\operatorname{ar\,sh} := \operatorname{sh}^{-1}, \quad \operatorname{ar\,ch} := \left(\operatorname{ch}_{|[0,+\infty)}\right)^{-1}, \quad \operatorname{ar\,th} := \operatorname{th}^{-1}, \quad \operatorname{ar\,cth} := \left(\operatorname{cth}_{|(0,+\infty)}\right)^{-1}.$$

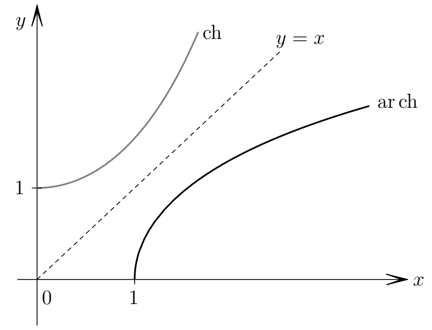
Megjegyzés. Az inverz hiperbolikus függvények nevében megjelenő *area*=terület szó azt jelzi, hogy az $\operatorname{ar\,ch} u$ mennyiség egy bizonyos síkidom területével egyenlő. Pontosabban: Legyen $u \geq 1$ és $v = \sqrt{u^2-1}$. Jelölje A_u azt a tartományt, amelyet az origót az (u,v) és $(u,-v)$ pontokkal összekötő két szakasz, valamint az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának az (u,v) és $(u,-v)$ pontok közötti íve határol. Meg lehet mutatni, hogy az A_u tartomány területe éppen $\operatorname{ar\,ch} u$-val egyenlő. ■

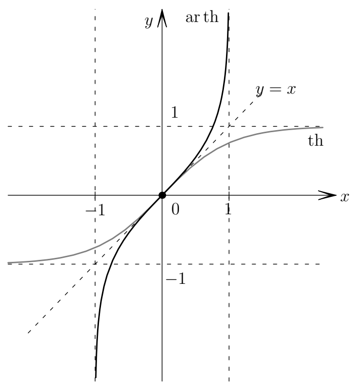
Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

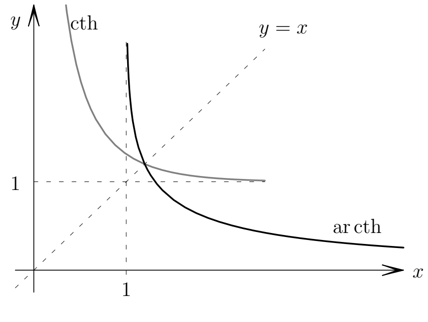
$$\operatorname{ar\,sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{ar\,ch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big),$$
$$\operatorname{ar\,th}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(x \in (-1,1)\big), \qquad \operatorname{ar\,cth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big).$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.









A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az exp függvénnyel. Az exp függvény inverze az ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az ln segítségével is fel tudjuk írni.

Tétel. *A következő azonosságok teljesülnek:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ar\,sh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) && (x\in\mathbb{R}),\\
\operatorname{ar\,ch} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) && (x\in[1,+\infty)),\\
\operatorname{ar\,th} x &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) && (x\in(-1,1)),\\
\operatorname{ar\,cth} x &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) && (x\in(1,+\infty)).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak az első azonosság igazolását részletezzük.

Legyen $x\in\mathbb{R}$ és $y := \operatorname{ar\,sh} x$, azaz $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést, t-re a $t^2-2tx-1=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t>0$, ezért $t = e^y = x+\sqrt{x^2+1}$, azaz

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$$

Megjegyzés. A fenti képletek jelentősége a következő: Ha az ln függvény helyettesítési értékeit ki tudjuk számolni, akkor az areafüggvények helyettesítési értékei is számolhatók. ■

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS TOVÁBBI ALKALMAZÁSAI

L'Hospital-szabályok

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy függvények határértékével kapcsolatban **kritikus határértékeknek** neveztük azokat az eseteket, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty)+(-\infty),\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0.$$

Eddig azt az „elvet” követtük, hogy egy kritikus határértéket igyekeztünk nem kritikus határértékké átalakítani (például *szorzatra bontással*, *gyöktelenítéssel* vagy *leosztással*.) ■

A L'Hospital-szabályok hatékony módszerek kritikus határértékek kiszámolására.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és
- $f,g\in D(a,b),\ \left(-\infty\le a<b<+\infty\right)$,
- $g(x)\neq 0$ *és* $g'(x)\neq 0\ \left(x\in(a,b)\right)$,
- $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$,
- $\exists \lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}$ *határérték.*

$\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g}$ *és* $\lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}.$

Bizonyítás. 1. eset: $a>-\infty$ (véges).

Legyen

$$A := \lim_{a+0}\frac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Azt kell igazolni, hogy

$$(\#) \qquad \forall\,\varepsilon > 0 \ \text{ számhoz } \ \exists\,\delta > 0 : \ \forall\,x \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \ \text{ esetén } \ \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \forall\,\varepsilon > 0 \ \text{ számhoz } \ \exists\,\delta > 0 : \ \forall\,y \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \ \text{ esetén } \ \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a.a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists\,\xi_x \in (a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \ \text{(és ez $(*)$ miatt)} \ \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk, és az azt jelenti, hogy a $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

$\boxed{\text{2. eset: } a = -\infty.}$ Nem bizonyítjuk. ■

Most megfogalmazzuk a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és*

- $f, g \in D(a,b)$, $\big(-\infty \le a < b < +\infty\big)$,
- $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0$ $\big(x \in (a,b)\big)$,
- $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty$,
- $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ *határérték.*

$\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ *és*

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. ■

Megjegyzések.

1^o A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt az a pontbeli **jobb oldali határértékre** fogalmaztuk meg. Hasonló állítások érvényesek (az értelemszerű módosításokkal) a **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre**, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre is (ekkor $a = +\infty$).

2^o A $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre hasonló állítások érvényesek. ■

3^o A többi típusú kritikus határértéket gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

Többször volt már szó arról, hogy hatványsor összegfüggvényének helyettesítési értékeit (elvben) tetszőleges pontossággal meg lehet határozni csupán a négy alapművelet felhasználásával.

Az exp, a sin, a cos, a sh, valamint a ch függvényt hatványsor összegfüggvényeként definiáltuk. Megmutattuk azt, hogy ezeknek bizonyos intervallumokra vonatkozó leszűkítéseik invertálhatók. A szóban forgó inverz függvények helyettesítési értékeit tetszőleges helyen a definíció alapján nem lehet kiszámolni. Ezért (is) fontos a következő kérdésfelvetés.

Probléma. *Egy adott függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?*

Induljunk ki a hatványsor összegfüggvényének a deriválására vonatkozó tételből.

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Az f' deriváltfüggvény is egy hatványsor összegfüggvénye, ezért a fenti tétel alapján f' is deriválható, vagyis f kétszer deriválható. Világos, hogy f''-re mindaz elmondható, ami f'-re. Ebben az esetben $f'' \in D$. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk azt, hogy minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén az f függvény n-szer deriválható, amit úgy fejeztünk ki, hogy f végtelen sokszor (vagy akárhányszor) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty$ szimbólumot vezettük be.

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{k=0} \alpha_k (x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (x-a)^k \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D^\infty\{x\}$ és minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha_k (x-a)^{k-n} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Ha $x = a$, akkor

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A tétel tehát azt is állítja, hogy egy hatványsor együtthatói és az összegfüggvénye között szoros kapcsolat van.

A fentiek motiválják a következő fogalmak bevezetését.

Definíciók.

1^o *Ha* $f \in D^{\infty}\{a\}$, *akkor a*

$$T_a(f,x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \\ = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f ***függvény*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***ponthoz tartozó Taylor-sorának*** *nevezzük. (Az* $a = 0$ *esetben használatos a* ***Maclaurin-sor*** *elnevezés is.)*

2^o *Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $f \in D^{(n)}\{a\}$, *akkor*

$$T_{n,a}(f,x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

az f ***függvény*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***ponthoz tartozó*** n***-edik Taylor-polinomja.***

Az előző tételben megfogalmazott állítás — a most bevezetett szóhasználattal élve — pontosan azt jelenti, hogy **minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sora**.

Természetes módon vethetők fel a következő kérdések.

A sorfejtés problémája. Legyen $f \in D^{\infty}$ egy adott függvény és tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

1^o Hol konvergens a $T_a(f)$ Taylor-sor?

2^o Ha a Taylor-sor konvergens egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor vajon fennáll-e az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in I)$$

azonosság, azaz a Taylor-sor vajon előállítja-e a függvényt?

1. példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \qquad \big(x \in (-1,+\infty)\big).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát.

Most a magasabb rendű deriváltak egyszerűen meghatározhatók. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n} \quad (x > -1), \qquad \text{és} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n = 1,2,\ldots).$$

A keresett Taylor-sor tehát

$$T_0(f,x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez $(-x)$ hányadosú geometriai sor, ami pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, és ekkor az összege:

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad (|x| < 1).$$

A Taylor-sor konvergenciahalmaza a $(-1,1)$ intervallum, és az összegfüggvénye ezen az intervallumon az f függvénnyel egyenlő.

Azt kaptuk tehát, hogy a $(-1,+\infty)$ intervallumon értelmezett f függvényt a 0 ponthoz tartozó Taylor-sora csak a $(-1,1)$ intervallumon állítja elő, azaz

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad \big(x \in (-1,1)\big). \ \blacksquare$$

Megjegyzés. A Taylor-sor előállításához a függvény magasabb rendű deriváltjait kell egy pontban meghatározni. Ez sok esetben nem egyszerű feladat. Bizonyos függvények hatványsorát más, egyszerűbb módon is meg lehet kapni. Például a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosság alapján a $\sin^2$ függvény Taylor-sora azonnal felírható, és az is látható, hogy a Taylor-sor az egész $\mathbb{R}$-en előállítja a függvényt. ■

2. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Igazolható, hogy $f \in D^\infty\{0\}$, és $f^{(n)}(0)=0$ minden n természetes számra, ezért f Taylor-sorának minden együtthatója 0, ezért az mindenütt konvergens, és az összegfüggvénye az azonosan 0 függvény, amely nyilván nem egyenlő f-fel. ■

A sorfejtés problémájának a vizsgálatához az

$$f(x) - T_{n,a}(f,x)$$

különbséget kell tekinteni. A következő tételben ezt egy jól kezelhető alakban állítjuk elő.

Tétel. (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \ \ \textit{ponthoz} \ \ \exists\, \xi \ \ a \textit{ és } x \textit{ között}:$$

$$f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$\begin{aligned} F(x) : &= f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \\ &= f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) \qquad \big(x \in K(a)\big). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0, \\ F''(a) &= f''(a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0, \\ &\ \vdots \\ F^{(n)}(a) &= 0, \\ F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad \big(x \in K(a)\big). \end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned} G(x) : &= (x-a)^{n+1} & &\Longrightarrow & G(a) &= 0, \\ G'(x) &= (n+1)(x-a)^n & &\Longrightarrow & G'(a) &= 0, \\ G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} & &\Longrightarrow & G''(a) &= 0, \\ &\ \vdots & & & &\ \vdots \\ G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) & &\Longrightarrow & G^{(n)}(a) &= 0, \\ G^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$, és tegyük fel, hogy például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a,x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists\, \xi_1 \in (a,x): \quad \frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a Cauchy-féle középértéktételt az F' és a G' függvényekre az $[a,\xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\exists\,\xi_2\in(a,\xi_1):\quad \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists\,\xi_{n+1}\in(a,\xi_n):\quad \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)}=\frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(a)}=\frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}=\cdots=\frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)}=\frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)}=f^{(n+1)}-T_{n,a}^{(n+1)}=f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)}=(n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

A $\xi:=\xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

Függvények egy fontos osztályára igaz, hogy egy rögzített a helyhez tartozó Taylor-polinomok sorozata egy $K(a)$ környezet bármely x helyén $f(x)$-hez tart, ha $n\to+\infty$. Az egyik legegyszerűbb, de fontos ilyen jellegű tétel a következő.

Tétel. (Elégséges feltétel az előállításra.) *Legyen $f\in D^{\infty}\big(K(a)\big)$, és tegyük fel, hogy*

$$\exists\,M>0\ \ \textit{valós szám}:\quad \big|f^{(n)}(x)\big|\le M\qquad \big(\forall\,x\in K(a),\ \forall\,n\in\mathbb{N}\big).$$

Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\qquad\big(x\in K(a)\big)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $x\in K(a)$ egy tetszőleges pont. Ekkor az előző tétel alapján létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\Big|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big|=\Big|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\Big|\le M\cdot\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ebből a tétel állítása már következik, mert

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0.\ ■$$