Analízis II.

Előadás jegyzet

11. óra.

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadásán. (2016. december 5.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Információk

- Második zh időpontja: dec. 16 (péntek) 19.00-21.00
- Harmadik zh időpontja: dec. 22 (csüt) 8.00-10.00
- Negyedik zh időpontja: jan 3 (kedd) 8.00-10.00
- zh-k előtt nem sokkal kint lesz a bizonyítással várt tételek listája

2. Határozott integrál (folyt.)

2.0.1. Emlékeztető.

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \quad \Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon.$$

2.0.2. Tétel. Tegyük fel, hogy $f, g \in K[a,b]$

$$\left.\begin{array}{c} \exists f \in R[a,b] \\ \exists A \subset [a,b] \ \ \textbf{véges}\text{ halmaz} \\ f(x) = g(x) \quad (\forall x \in [a,b] \setminus A) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b g = \int_a^b f$$

bizonyítása meggondolandó.

2.0.3. Tétel. (műveleti tételek)
Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$.

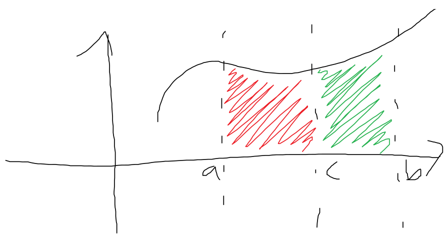
1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad \lambda f + \mu g \in R[a,b] \quad$ és $\quad \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
   (az integrált lineáris)
2. $f \cdot g \in R[a,b]$
3. ha még: $\exists m > 0: \quad |g(x)| > m \quad (\forall x \in [a,b]) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} \in R[a,b]$

bizonyítása meggondolandó.

2.1. Az integrál intervallum szerinti additivitás

2.1.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, és $c \in (a,b)$ tetszőleges. Ekkor:

$$f \in R[a,c], \quad f \in R[c,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b = \int_a^c f + \int_c^b f$$



1. ábra. Paintben csináltam, dont hate. Zöld + piros $= \int_a^b f$

Eddig: $\int_a^b f: \quad a < b$

2.1.2. Definíció.

$$\int_a^a f := 0$$

Ha $a < b$ és $f \in R[a,b]$

$$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

2.1.3. Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in R[A,B]$, $\quad a,b,c \in [A,B]$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

bizonyítása meggondolandó.

2.2. Integrálható függvények osztálya

2.2.1. Tétel. Ha $f \in k[a,b]$ monoton $\quad\Rightarrow\quad f \in R[a,b]$
bizonyítás: (oszcillációs összegekkel)
Legyen f (például) $\nearrow$ $[a,b]$-n.

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{tetszőleges}$$

$$\inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: m := f(x_i)$$

$$\sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: M := f(x_{i+1})$$

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}^{\ge 0}\overbrace{(x_{i+1}-x_i)}^{\ge 0} \le \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)\cdot \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

– teleszkópikus!

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) \le ||\tau|| \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \quad ||\tau|| \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

2.2.2. Tétel. Ha $f \in c[a,b] \quad\Rightarrow\quad f \in R[a,b]$, azaz:

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

biz. nélkül. (ne gondoljuk meg!)

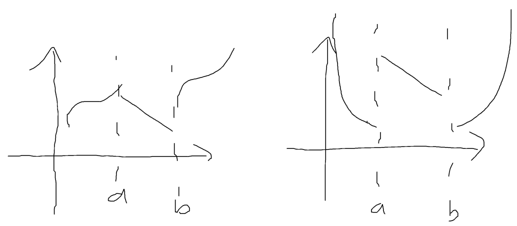
2.2.3. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos, azaz:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \text{és} \quad \exists \tau = \{a = x_0 < ... < x_n = b\},$$

$$f\big|_{(x_i,x_{i+1})} \quad \text{folyt.} \quad (i = 0,\ldots,n-1), \quad \text{és} \quad \exists \lim_{x_i\to 0} f, \quad \lim_{x_{i+1}-0} f \quad \text{és végesek}$$

Ekkor $f \in R[a,b]$, és

$$\int_a , bf = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$$



2. ábra. Szakaszos és nem szakaszos integrálhatóság (végtelen nem megengedett, ugye)

2.3. Egyenlőtlenségek

2.3.1. Tétel.

1. Ha $f \in R[a,b]$ és $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \geq 0$
2. Ha $f, g \in R[a,b]$ és $f \geq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$

2.3.2. Tétel.

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad |f| \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

2.3.3. Megjegyzés. Visszafelé ez az állítás nem teljesül. Például:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

$|f| \in R[0,1], \quad f \notin R[0,1].$ ■

2.3.4. Tétel. (az integrál számítás első középértéktétele)
Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{matrix} f, g \in R[a,b] \\ g \geq 0, \quad [a,b]\text{-n} \\ \inf \mathcal{R}_f =: m, \quad \sup \mathcal{R}_f =: M \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad m \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \int_a^b g.$$

Ha még $f \in C[a,b]$ is teljesül,

$$\exists \xi [a,b] : \quad \int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g$$

2.3.5. Tétel. (Cauchy - Bunyakovszkij)
Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor $f \cdot g \in R[a,b]$

$$\left| \int_a^b f \cdot g \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2}$$

bizonyítás nélkül. (ezt se kell meggondolni!)

2.4. Az integrál kiszámítása

Eddig: Prím függvények nyílt intervallumon ért.

2.4.1. Definíció. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$. Az $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye $[a,b]$-n, ha

$$F \quad \text{folytonos} \quad [a,b]\text{-n}, \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a,b)).$$

2.4.2. Tétel. (Newton-Leibniz)
Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{matrix} f \in R[a,b] \\ f\text{-nek van primitív függvénye} \quad [a,b]\text{-n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

F az f egy primitív függvénye.

2.4.3. Megjegyzés. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.

Bizonyítás: Legyen $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges.

$$F(a) - F(b) = F(x_n) - F(x_0) \overset{\text{TRÜKK}}{=} (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \ldots + (F(x_1) - F(x_0)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

Tegyünk gy apróbb megállapítást: F-re $[x_i, x_{i+1}]$-en a Lagrange k.é.t.:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \overset{F'=f}{=} \quad f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Folytatván a bizonyítást:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) \leq S(f,\tau) \quad \text{inf}$$

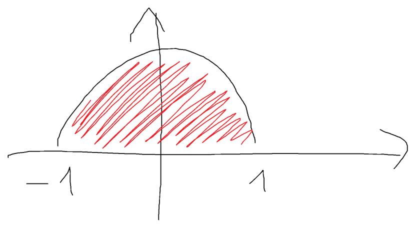
$\forall\tau$-ra $\quad\Rightarrow\quad$ sup

$$I_*(f) \leq F(b) - F(a) \leq I^*(f)$$

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f = \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

2.4.4. Példa.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad |x| \leq 1$$



3. ábra.

A π amit mi definiáltunk valóban ekvivalens, azzal, amit középsuliban tanultunk?

$$T = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_{-1}^{1} \quad \overset{\frac{\pi}{2}}{=} \quad \frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Igen.