Analízis 2.

5. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Megj: $f(\xi) = \eta$

meredeksége: $f'(\xi) = m$

egyenlete: $y = mx + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{m} \rightarrow$ meredeksége: $\frac{1}{m}$

$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{m} = \frac{1}{f'(\xi)}$

Hatványsor deriváltja

Tétel: Legyen $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad x \in K_R(a)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}(x_0) \quad \forall x_0 \in K_R(a)$ és

$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0 - a)^{n-1}$, ahol $x_0 \in K_R(a)$

Bizonyítás: 1. lépés: Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens $\forall 0 < r < R$

Legyen $0 < r < r' < R$ és $x = a + r'$

x-ben konvergens a hatványsor $\Rightarrow \sum_{n=0} \alpha_n (r')^n$ konvergens $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \alpha_n (r')^n = 0 \Rightarrow (\alpha_n (r')^n)$ korlátos

$\Rightarrow \exists M > 0 : |\alpha_n (r')^n| \leq M \Rightarrow |\alpha_n| \leq \frac{M}{(r')^n} \Rightarrow \sum_{n=0} |n \cdot \alpha_n \cdot r^n| \leq M \cdot \sum_{n=0} n \cdot (\frac{r}{r'})^n$

ez konvergens, hiszen a gyökkritérium miatt

$\sqrt[n]{n \cdot (\frac{r}{r'})^n} = \sqrt[n]{n} \cdot (\frac{r}{r'}) \to (\frac{r}{r'}) < 1 \Rightarrow \sum_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens

$\Rightarrow \sum_{n=1} n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}$ is abszolút konvergens $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \sum_{n=N+1}^{\infty} |n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$

2. lépés:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x_0-a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n (x-a)^n - \alpha_n (x_0-a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{N} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right|}_{(I)} + \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} \right|}_{(II)} +$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right|}_{(III)} = (I) + (II) + (III)$$

Tfh. $|x_0 - a| < r < R$

Mivel $x \to x_0$ ezért feltehető, hogy $|x-a| < r \Rightarrow (III) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot |\alpha_n| \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(II) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| \frac{((x-a)-(x_0-a))((x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + ... + (x_0-a)^{n-1})}{x-x_0} \right| =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| (x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + ... + (x_0-a)^{n-1} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(I) \le \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \left| \underbrace{\frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} - n \cdot (x_0-a)^{n-1}}_{\to 0,\text{ ha } x \to x_0} \right|$$

$g(x) = (x-a)^n \Rightarrow$ a tört határértéke $\quad g'(x_0) = n \cdot (x_0-a)^{n-1} \quad (x \to x_0)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, (I) < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (\text{ ha } |x-x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow \lim \left| \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| = 0$$

$$f \in \mathcal{D}(x_0) \text{ és } f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0-a)^{n-1} \quad \blacksquare$$

Elemi függvények deriváltja

1. exp $\quad exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = exp(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

   $exp' = exp$

2. $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$

   Hasonlóan $\cos' x = -\sin x, \quad ch'x = shx, \quad sh'x = chx$

3. $\ln = \exp^{-1}, \quad \exp \xi = \eta \Rightarrow$

   $\ln'(\eta) = \frac{1}{\exp' \xi} = \frac{1}{\exp \xi} = \frac{1}{\eta} \quad (\eta > 0)$

4. $a^x = exp_a(x), \quad a > 0$

   $exp_a'(x) = (exp(x \cdot \ln a))' = exp(x \cdot \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

5. $\log_a = (exp_a)^{-1}, \quad exp_a(\xi) = \eta \quad (a > 0, a \ne 1)$

   $\log_a'(\eta) = \frac{1}{exp_a'(\xi)} = \frac{1}{a^\xi \cdot \ln a} = \frac{1}{\eta \cdot \ln a} \quad (\eta > 0, a > 0, a \ne 1)$

6. $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$

   $(x^\alpha)' = (exp(\alpha \cdot \ln x))' = exp(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

7. $F(x) = f(x)^{g(x)} = exp(\ln\big(f(x)^{g(x)}\big)) = exp(g(x) \cdot \ln \cdot f(x)) =$

   $= exp(g(x) \cdot \ln \cdot f(x)) \cdot (g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x))$

Egyoldali derivált

$f(x) = |x| \quad f \notin \mathcal{D}(0)$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

Definíció: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f$ és $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$

Ekkor: f jobbról deriválható a-ban, ha

$$f_+{}'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ határérték létezik és véges.}$$

Hasonló az $f_-{}'(a)$ definíciója.

<u>Tétel</u>: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f$ Ekkor:

$f \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow {f_+}'(a)$ és ${f_-}'(a)$ léteznek és egyenlőek.

<u>Többször deriválható függyvények</u>

Definíció: f kétszer deriválható a-ban, ha $\exists K(a)$, hogy $f \in \mathcal{D}(K(a))$ és $f' \in \mathcal{D}(a)$

Jelölés: $f''(a) = (f')'(a), \quad (f \in \mathcal{D}^2(a))$

Definíció: Az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható a-ban, ha

$\exists K(a)$, hogy $f \in \mathcal{D}^n(K(a))$ és $f^{(n)} \in \mathcal{D}(a)$

Jelölés: $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a), \quad (f \in \mathcal{D}^{n+1})(a)$
$f^{(0)} = f$

Definíció: f végtelenszer deriválható a-ban, ha $\forall n \in \mathbb{N} : f \in \mathcal{D}^n(a)$

<u>Tétel</u>: (Leibniz)

$$f, g \in \mathcal{D}^n(a) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}^n(a) \text{ és } (f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

<u>Bizonyítás:</u> Teljes indukcióval

<u>$n = 0$:</u> $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

<u>$n = 1$:</u> $(f \cdot g)'(a) = 1 \cdot f(a) \cdot g'(a) + 1 \cdot f'(a) \cdot g(a)$

Folytatás Hf.

<u>Tétel</u>: Tfh. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k, \quad x \in K_R(a)$

Ekkor: $f \in \mathcal{D}^n(x_0) \quad n \in \mathbb{N}$ és

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-n+1) \cdot (x_0 - a)^{k-n} \quad (x_0 \in K_R(a))$$

Továbbá: $f^{(n)}(a) = \alpha_n \cdot n!$

<u>Bizonyítás:</u> Hf. Teljes indukcióval.