

Analízis II.

Első ZH tételkidolgozás

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadása alapján. (2016. október 23.)

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

Általános tudnivalók: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Zh1-tudni.pdf

Követelményrendszer: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Kov_An2_2016.pdf

ZH témakörei: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/An2_1_zh_temakork_2016.pdf

1. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Tegyük fel, hogy
$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ korlátos.}$$

Bizonyítás: f korlátos, ha

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \leq K$$

Indirekt: Tegyük fel, hogy nem korlátos, azaz,

$$\begin{aligned} \forall K > 0, \quad \exists x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K \\ \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \quad \exists x_n \in [a, b], \quad |f(x_n)| \geq n \end{aligned} \quad (1)$$

Tehát: $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{B-W kiv.}}$ $\exists (x_{n_k})$ konv. részsorozat.

Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k})$$

Ekkor: $\alpha \in [a, b]$.

(Indirekt: Tegyük fel, hogy $\alpha \notin [a, b] \Rightarrow \exists K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$.

$\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_0, \quad x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, ui. $x_{n_k} \in [a, b]$).

Az f folytonos $[a, b]$ -n \Rightarrow

$$f \in C\{\alpha\} \xrightarrow{\text{átviteli elv}} x_{n_k} \rightarrow \alpha \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k})) \text{ korlátos, mert konv.}$$

Ez ellentmond **1**-nek. ■

2. A Weierstrass-tétel.

Tegyük fel, hogy:

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\text{-nek } \exists \text{ absz. szélsőértéke, azaz } \exists \alpha, \beta \in [a, b] : \\ f(x) \leq f(\alpha) \\ f(\beta) \leq f(x) \end{array} \quad (x \in [a, b])$$

Bizonyítás: f folytonos $[a, b]$ -n $\Rightarrow f$ korlátos.

Ekkor:

$$\exists \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: m \in \mathbb{R}$$

Igazoljuk: $\exists \alpha \in [a, b] : \quad f(\alpha) = M$.

$$M \sup \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : \quad f(x_n) = y_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$ korlátos sorozat $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{B-W kiv.}} \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\lim(x_{n_k}) =: \alpha \in [a, b]$ (indirekt belátható)

$$f \text{ folyt. } [a, b]\text{-n} \Rightarrow f \in C\{\alpha\} \xrightarrow{\text{átviteli elv}} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x_{n_k}) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n_k} = f(\alpha) \Rightarrow M = f(\alpha)$$

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

3. A Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá

$$\left. \begin{array}{l} \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0.$$

Bizonyítás: (Bolzano-féle felezési eljárás)

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Legyen $[x_0, y_0] := [a, b]$.

Felezzük meg az intervallumot! Legyen $z_0 := \frac{a+b}{2}$. 3 eset lehetséges:

- a) $f(z_0) = 0 \checkmark$
- b) $f(z_0) > 0$ esetén $[x_1, y_1] := [a, z_0]$.
- c) $f(z_0) < 0$ esetén $[x_1, y_1] := [z_0, b]$.

Megfelezzük $[x_1, y_1]$ -et. Itt is 3 eset lehetséges. (...) Folytatjuk az eljárást.

Az eljárás közben vagy találunk véges sok lépésben olyan ξ -t melyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Amennyiben nem, $\exists [x_n, y_n] \ (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, melyre teljesül hogy

- a) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ (\forall n \in \mathbb{N})$
- b) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$
- c) $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$

Cantor-féle közsérész tételből következik hogy ezeket az intervallumoknak van közös pontja ha $n \in \mathbb{N}$, azaz:

$$\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Cantor}} \exists \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n], \quad x_n \nearrow \xi, \quad y_n \searrow \xi. \quad (\text{monoton tartanak } \xi\text{-hez})$$

$$f \text{ folytonos } [a, b]\text{-n} \Rightarrow f \in C\{\xi\} \xrightarrow[\text{elv}]{\text{átviteli}} \lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n)) \text{ Ha}$$

- a) $f(x_n) < 0 \Rightarrow \lim(f(x_n)) \leq 0$
- b) $f(y_n) > 0 \Rightarrow \lim(f(y_n)) \geq 0$

Tehát:

$$\underbrace{f(\xi) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\xi) \geq 0}_{\Downarrow} f(\xi) = 0$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

4. Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\left. \begin{array}{l} \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f\text{-en.}$$

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \rightarrow [a, b]$ nem folytonos, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f, : f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

Átviteli elv $\Rightarrow \exists (y_n) \subset \mathcal{R}_f \quad \lim(y_n) = y_0, \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n), \quad \text{azaz} \quad f(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$x_0 := f^{-1}(y_0), \quad \text{azaz} \quad f(x_0) = y_0.$$

Így:

$$\lim(x_n) \neq x_0. \quad (2)$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\exists \delta > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \delta\} \quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Bolz-Weier}} \exists (x_{\nu_n})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\bar{x} := \lim(x_{\nu_n}) \in [a, b]$. (indirekt módon lehetett bizonyítani)

$$\left. \begin{array}{l} f \in C\{\bar{x}\} \\ x_{\nu_n} \rightarrow \bar{x} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{elv}]{\text{átviteli}} \underbrace{f(x_{\nu_n})}_{y_{\nu_n}} \rightarrow f(\bar{x}) \quad (\text{emiatt: } 2)$$

Viszont:

$$y_n \rightarrow y_0, \quad y_{\nu_n} \rightarrow y_0 (= f(x_0))$$

Ez pedig ellentmondás. ■

5. A folytonosság és a derivált kapcsolata.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{int } \mathcal{D}_f$.

$$a) \quad f \in D\{a\} \Rightarrow f \in C\{a\}.$$

$$b) \quad f \in D\{a\} \not\Rightarrow f \in C\{a\}.$$

Bizonyítás:

\Rightarrow

$$f \in D\{a\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

$\not\Rightarrow$

$\text{abs} \notin D\{0\} :$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} \Rightarrow \text{abs} \notin D\{0\}. \quad \blacksquare$$

6. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{int } \mathcal{D}_f$

$$f \in D\{a\} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \end{cases}$$

$$A = f'(a).$$

Bizonyítás:

\Rightarrow

$$f \in D\{a\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right)}_{=:\varepsilon(x)} = 0$$

Így: $\lim_a \varepsilon = 0$, és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \checkmark$$

\Leftarrow Tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 :$

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \xrightarrow{x \neq a} \quad \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} = \underbrace{A + \varepsilon(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} A}$$

$$\Rightarrow f'(a) = A \quad \blacksquare$$

7. A szorzatfüggvény deriválása.

Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g).$

Ekkor:

$$f, g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Bizonyítás:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \quad \frac{-f(a)g(x)}{+f(a)g(x)} \quad \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} \cdot g(x) + f(a) \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} g'(a)}$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) \Rightarrow \text{mivel folytonos, és } x \rightarrow a, \text{ Ui.: } g \in D\{a\} \Rightarrow g \in C\{a\} \quad \blacksquare$$

8. A hányadosfüggvény deriválása.

Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad g(a) \neq 0.$

Ekkor:

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Bizonyítás: Közös ötlet: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ -t behozni.

a) Igazoljuk: $a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$

Valóban: $g \in D\{a\} \Rightarrow g \in C\{a\}, \text{ de } g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\exists K(a) : \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a))$$

$$\Rightarrow a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

b)

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)}{x - a} = \frac{1}{g(a) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} \quad \frac{-f(a)g(a)}{+f(a)g(a)}$$

$$\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} g'(a)} \right)$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) \neq 0, \text{ mert } g \in C\{a\}. \quad \blacksquare$$

9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és

$$\left. \begin{array}{l} f \in D\{a\} \quad a \in \text{int } D_f \\ f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélső értéke van} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

Bizonyítás: Lokális maximumra: Tekintsük

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

törtet. Ha $x > a$

$$\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \leq 0 \quad f \in D\{a\} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

Ha $x < a$

$$\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \geq 0$$

$$f \in D\{a\} \Rightarrow f'(a) \geq 0 \text{ Tehát: } f'(a) \leq 0 \text{ és } f'(a) \geq 0 \Rightarrow f'(a) = 0. \blacksquare$$

10. A Rolle-féle középértéktétel.

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \xi \in (a, b) \\ f'(\xi) = 0 \end{array}$$

Bizonyítás: $f \in C[a, b] \xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Weier.}}$ $\exists \alpha, \beta \in [a, b] :$

$$f(\alpha) := \min_{[a, b]} f := m$$

$$f(\beta) := \max_{[a, b]} f := M$$

$$a) \text{ eset: } f \equiv \text{áll. } (m = M) \Rightarrow f' \equiv 0$$

$$b) \text{ eset: } f \not\equiv \text{áll.} \Rightarrow m \neq M \text{ és } m < M$$

Ha $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \alpha \in (a, b)$ Ekkor $f(\alpha)$: abszolút minimum és $f(\alpha)$ lokális minimum is.

$$f'(\alpha) = 0, \quad \xi = \alpha \quad \text{„jó”}$$

Ha $m = f(a) = f(b) \blacksquare$ Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész.

11. A Lagrange-féle középértéktétel.

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b) \\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}$$

Bizonyítás: A szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Legyen:

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

F -re a Rolle feltételei teljesülnek (ellenőrizni kell!)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \blacksquare$$