3. előadás

2016. szeptember 26.

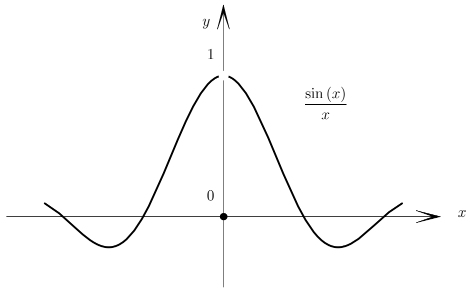
Emlékeztető:

- Szakadási helyek: $f \notin C\{a\}$.
- A szakadási helyek osztályozása. ■

A továbbiakban néhány példát mutatunk szakadási helyekre.

1. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$



- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **megszüntethető szakadási hely**, mert

$$\lim_0 f = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$

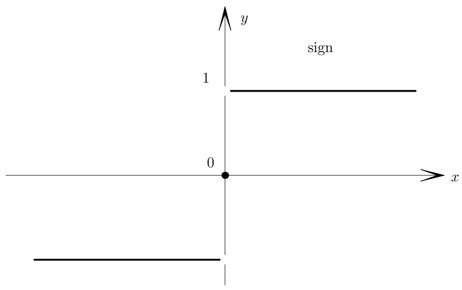
A *megszüntethető szakadási hely* elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim\limits_0 f = 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény „már" folytonos az $a = 0$ pontban, azaz $\widetilde{f} \in C\{0\}$, mert $\lim\limits_0 \widetilde{f} = \widetilde{f}(0) = 1$. ■

2. példa. Az előjel-függvény:

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$



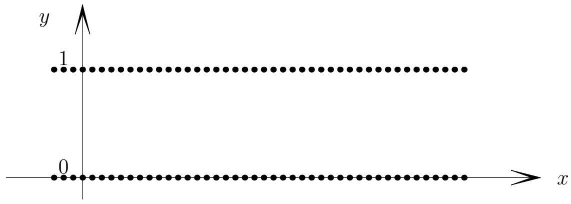
- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **elsőfajú szakadási hely**, mert

$$\lim_{0+0} f = 1 \neq \lim_{0-0} f = -1.$$

Megjegyzés. Másodfajú szakadás sokféleképpen lehet.

3. példa. A Dirichlet-függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

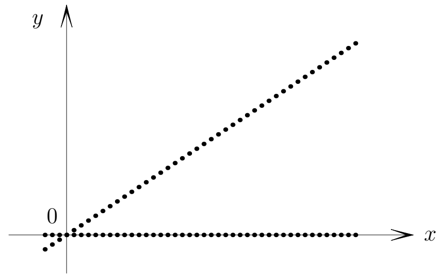


- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ **másodfajú szakadási hely**, mert

$$\nexists \lim_{a+0} f \text{ és } \nexists \lim_{a-0} f.$$

4. példa. Dirichlet-típusú függvény

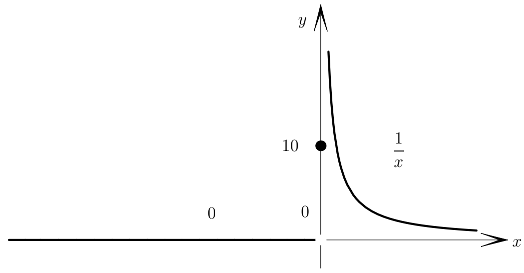
$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$



- $f \in C\{0\}$,
- $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **másodfajú szakadási hely**, mert
$$\nexists \lim_{a+0} f \text{ és } \nexists \lim_{a-0} f.$$

5. példa.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 10, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$



- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ **másodfajú szakadási hely**, mert
$$\lim_{0-0} f = 0 \neq \lim_{0+0} f = +\infty.$$

Tétel. (Monoton függvények szakadási helyei.)
Legyen $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *monoton függvény. Ekkor* f*-nek legfeljebb elsőfajú szakadásai lehetnek, azaz egy* $a \in \mathcal{D}_f = (\alpha, \beta)$ *pontban* f *folytonos vagy elsőfajú szakadása van.*

Bizonyítás nélkül. ■

Elemi függvények

1. A hatvány- és a gyökfüggvények

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rözített természetes szám.

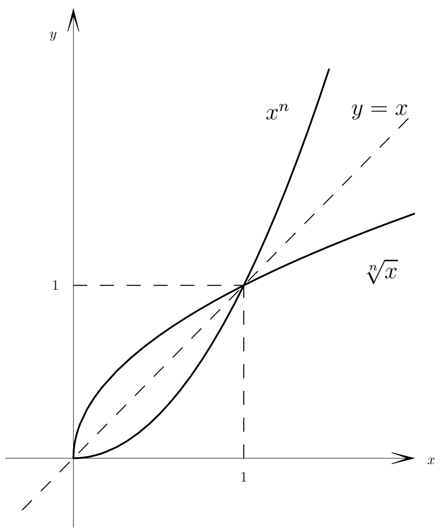
Hatványfüggvény: $f(x) := x^n \quad \big(x \in [0, +\infty)\big)$.

Gyökfüggvény: $\sqrt[n]{} : [0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Igazolható:

- $f \quad \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$-n $\quad\Longrightarrow\quad \exists$ inverze,
- $f^{-1} = \sqrt[n]{}$ (a gyökfüggvény a hatványfüggvény inverze),
- $f^{-1} \quad \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$-n.

A függvények képe:



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. Például:

$$\lim_{0} \sqrt[n]{} = 0, \quad \lim_{+\infty} \sqrt[n]{} = +\infty. \ \blacksquare$$

2. Az exp és az ln függvény

Tétel. (Az exp függvény tulajdonságai.)

1^o $\exp(x) := \exp x := e^x := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

2^o • $\exp(0) = 1$,

• $\exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e \ \big(:= \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n\big).$

3^o *A függvényegyenlet:*

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

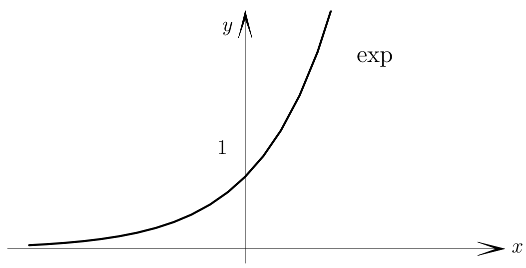
4^o $\exp \uparrow$ *és folytonos* $\mathbb{R}$*-en.*

5^o $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$.

6^o $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$ *és* $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$.

Bizonyítás nélkül. ■

Az exp **függvény képe:**



Definíció. *Mivel az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* $\uparrow$ $\mathbb{R}$*-en, ezért* $\exists$ *inverze. Legyen*

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

a (természetes alapú vagy e alapú) ***logaritmusfüggvény***.

Megjegyzések.

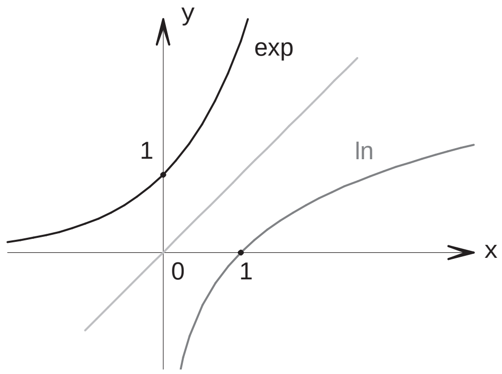
1^o $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.

2^o Ha $x > 0$, akkor

$$\ln x := \ln(x) = y \quad \underset{\text{def.}}{\overset{\text{inverz}}{\Longrightarrow}} \quad e^y = x.$$

$\ln x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az e számot) emelve x-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy a fenti módon értelmezett logaritmus a középiskolai definícióval egyezik meg. ■.

Az $\ln$ **függvény képe** az exp függvény képének az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe.



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (Az ln függvény tulajdonságai.)

1^o • $\ln e^x = x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$,

• $e^{\ln x} = x \quad (\forall\, x > 0)$.

2^o $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad (x, y > 0)$.

3^o $\ln \uparrow$ *és folytonos* $(0, +\infty)$*-en, továbbá* $\mathcal{R}_{\ln} = \mathbb{R}$.

4^o $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ *és* $\lim\limits_{0+0} \ln = -\infty$.

Megjegyzések.

1^o Az $\exp x$ „jól számolható" $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén, mert $\exp x$ egy végtelen sor összege.

2^o Az $\ln x$ minden $x > 0$ számra értelmezve van, de az értéke így nem számolható. Később majd az ln függvényt is előállítjuk hatványsor összegeként, és annak felhasználásával lehet a függvényértékeket kiszámolni. ■

3. Az $\exp_a$ és a $\log_a$ függvények

Megjegyzés. A célunk az a^x értelmezése tetszőleges $a > 0$ alap és $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetére úgy, hogy a hatványozás $x \in \mathbb{Q}$ esetén „megszokott" azonosságai érvényben maradjanak.

Az e szám tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevős hatványait már értelmeztük. a^x ételmezéséhez abból indulunk ki, hogy az $a > 0$ számot felírhatjuk e hatványaként:

$$a = e^{\ln a}.$$

A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság csak úgy marad érvényben, ha a^x-t így értelmezzük:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}. \;■$$

Definíció. *Legyen* $a > 0$ *valós szám. Tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén az* a ***szám*** x***-edik hatványát*** *így értelmezzük:*

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}$$

Igazolható: $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ és $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $(a, b > 0;\ x, y \in \mathbb{R})$. ■

Definíció. *Legyen $a > 0$ valós szám. Az a* ***alapú exponenciális függvényt*** *így értelmezzük:*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x = \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\exp_e = \exp$. ■

Igazolható (az exp és az ln függvény tulajdonságait is figyelembe véve):

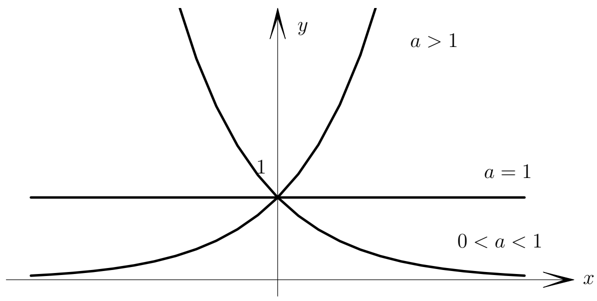
- Ha $0 < a \neq 1$, akkor az $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció.
- Ha $a > 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton növő és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0, \qquad \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty.$$

- Ha $0 < a < 1$, akkor $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} \exp_a = 0. \ ■$$

Az $\exp_a$ függvény képe



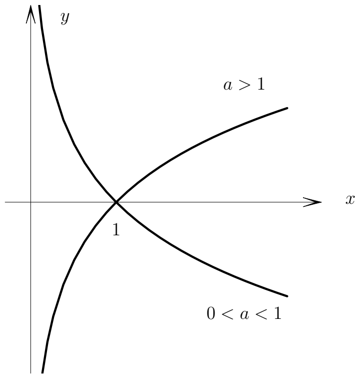
Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Definíció. *Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az $\exp_a$ szigorúan monoton és folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért van inverze, amelyet a* ***alapú logaritmusfüggvénynek*** *nevezünk és $\log_a$-val jelölünk, azaz*

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \textit{ha } a > 0 \textit{ és } a \neq 1.$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\log_e = \ln = \log$. Továbbá $\log_a(x) = \log_a x = y \iff a^y = x$, azaz $\log_a x$ az a kitevő, amire a-t emelve x-et kapunk. ■

A $\log_a$ **függvény képe**:



Megjegyzés. A függvénytulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (A $\log_a$ függvény tulajdonságai.)

1^o *Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növő folytonos függvény és $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, továbbá*

$$\lim_{0+0} \log_a = -\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = +\infty.$$

2^o *Ha $0 < a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó folytonos függvény és $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, továbbá*

$$\lim_{0+0} \log_a = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

3^o *Logaritmusazonosságok: Legyen $0 < a \neq 1$. Ekkor*

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a (x^y) = y \log_a x \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$.

4. Hatványfüggvények

Definíció. *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az α **kitevőjű hatványfüggvényt** így értelmezzük:*

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Tétel. (A hatványfüggvény tulajdonságai.)

Legyen $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor a $h_\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció, amely

- *$\alpha > 0$ esetén szigorúan monoton növő, és*

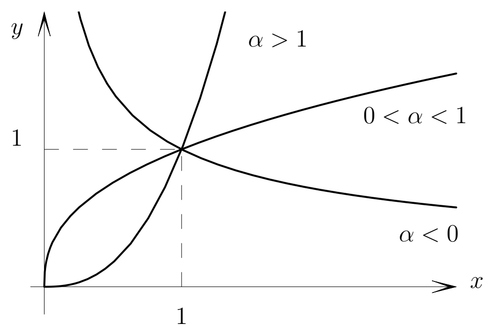
$$\lim_{0+0} h_\alpha = 0, \qquad \lim_{+\infty} h_\alpha = +\infty,$$

- *$\alpha < 0$ esetén pedig szigorúan monoton fogyó, és*

$$\lim_{0+0} h_\alpha = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} h_\alpha = 0.$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján. ■

A h_α hatványfüggvény képe:



DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Előzetes megjegyzések

Korábban megismertük a matematikai analízis egyik legalapvetőbb fogalmát, nevezetesen: valós-valós függvény **pontbeli határértékének** a definícióját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból is *pontos* formában, hogy egy *adott ponthoz „közeli" helyeken a függvényértékek „közel" vannak valamely* (*valós,* $+\infty$ *vagy akár* $-\infty$) *értékhez.*

A további néhány előadáson a **differenciálszámítás** legfontosabb eredményeivel és eszköztárával ismerkedünk meg. Ez a témakör a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. *A differenciálszámítás jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.*

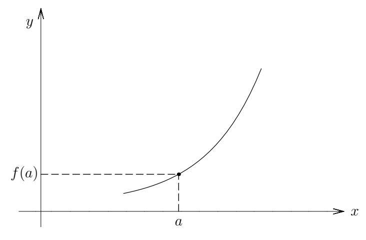
Több elemi függvényt hatványsor összegfüggvényeként értelmeztünk. Például az exp függvény szigorú monotonitása a definícióból kiindulva viszonylag könnyen igazolható. Más a helyzet a sin vagy a cos függvényekkel. Megemlítettük, hogy ezek a függvények a középiskolai tanulmányainkban megismert függvényekkel azonosak. A megszokott tulajdonságok igazolása (például a monotonitási intervallumok) a „hatványsoros" definícióból kiindulva azonban nem egyszerű feladat; ehhez (is) szükségünk lesz a differenciálszámítás eszköztárához.

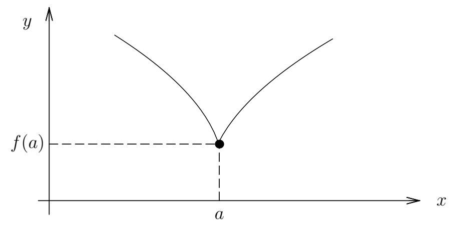
A kiindulópontunk a pontbeli **derivált** fogalmának az értelmezése.

A derivált motivációja, szemléletes jelentése

Valós-valós függvény grafikonjának egyik „jellegzetes" tulajdonsága az, hogy annak vajon van-e „töréspontja" vagy nincsen.

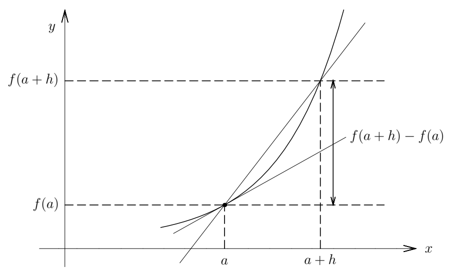
Vegyünk két egyszerű példát:

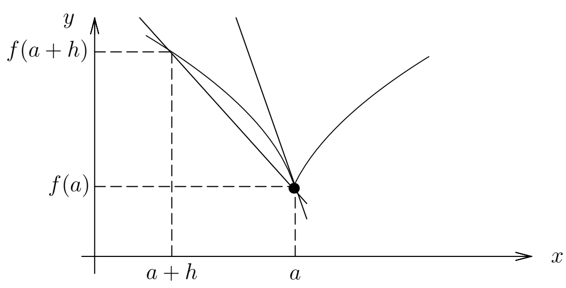




A jobb oldali függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pont egy „töréspontja". A bal oldali függvény grafikonjának nincs „töréspontja".

A különbség pontos leírásához induljunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontjában:





A szelő meredeksége:

$$m_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A bal oldali függvénynél a szelőknek van „határhelyzete”, a jobb oldali függvénynél nincs, amit „geometriamentesen” úgy fogalmazhatunk meg, hogy a bal oldali függvénynél

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték és az véges,}$$

a jobb oldali függvénynél a szóban forgó határérték nem létezik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a bal oldali függvény „deriválható az a pontban”, a jobb oldali függvény pedig „nem deriválható az a pontban”.