Analízis II.

2. zh tételkidolgozás

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadása alapján. (2016. december 16.)

1. **A konvexitás ekvivalens átfogalmazása egyenlőtlenséggel.**

> **Tétel.** *Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha*
> $$\forall\, a, b \in I,\ \ a < b \ \ \textit{és}\ \ \forall\, \lambda \in (0,1)\ \ \textit{esetén}$$
> $$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Megjegyzés. Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a, b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b = x < \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Másrészt az (a, b) intervallum minden eleme előálll $\lambda a + (1-\lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a, b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b-x}{b-a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b-x}{b-a} \cdot a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I,\ a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) &\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big(\big[\lambda a + (1-\lambda)b - a\big]\big) + f(a) = \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big[(1-\lambda)(b-a)\big] + f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \end{aligned}$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

2. **A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.**

> **Tétel.** *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$.*
>
> 1^o *Az f függvény konvex [szigorúan konvex] (α, β)-n $\iff$ az f' függvény $\nearrow$ $[\uparrow]$.*
>
> 2^o *Az f függvény konkáv [szigorúan konkáv] (α, β)-n $\iff$ az f' függvény $\searrow$ $[\downarrow]$.*

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az (α, β) intervallumon, azaz

$$\forall\, a, b \in (\alpha, \beta),\ \ a < b \ \ \text{esetén}$$

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ebből következik, hogy a $\triangle_a f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ halmazon, ezért

$$\triangle_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall\, x < b,\ \ x \ne a \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \triangle_a f(x)$, ezért

$$(*) \qquad f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hasonlóan, a $\triangle_b f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{b\}$ halmazon, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \triangle_b f(a) \le \triangle_b f(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \qquad \forall\, a<x,\ x\ne b \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(b) = \lim_{x\to b} \triangle_b f(x)$, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b).$$

Így $(*)$ alapján azt kapjuk, hogy $f'(a)\le f'(b)$. Mivel ez minden $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$-re igaz, ezért f' monoton növekedő az (α,β) intervallumon.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy f' monoton növekedő (α,β)-n. Legyen $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$ és $x\in(a,b)$ tetszőleges. f-re a Lagrange-féle középértéktételt először az $[a,x]$, majd az $[x,b]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists\,\xi_1\in(a,x):\quad f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{és} \quad \exists\,\xi_2\in(x,b):\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Mivel $\xi_1<\xi_2$ és $f'\ \nearrow$, ezért $f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$. Így

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{[f(b)-f(a)]-[f(x)-f(a)]}{b-x} \iff$$

$$\iff [f(x)-f(a)]\cdot[(b-x)+(x-a)] \le [f(b)-f(a)]\cdot(x-a) \iff f(x)\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Ez az egyenlőtlenség minden $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$ és $x\in(a,b)$ esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az (α,β) intervallumon. ■

3. A π szám bevezetését megalapozó állítás

Tétel. *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* ξ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi=0$ *egyenlőség. Ennek a* ξ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** π ***számot****:*

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos\in C[0,2]$ és $\cos 0=1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\frac{2^{10}}{10!}+\frac{2^{12}}{12!}-\cdots = 1-2+\frac{2}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7\cdot 8}\right)-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{2^2}{11\cdot 12}\right)-\cdots <$$

$$< (\text{a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak}) < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\,\xi\in[0,2]$: $\cos\xi=0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos\downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\cdots>0 \quad (x\in(0,2))$$

egyenlőtlenség következménye. ■

4. **A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.**

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Tegyük fel, hogy } f,g \in \mathbb{R}\to\mathbb{R} \textit{ és} \\ \bullet\ f,g\in D(a,b),\ \ (-\infty\le a<b<+\infty), \\ \bullet\ g(x)\neq 0 \textit{ és } g'(x)\neq 0\ \ (x\in(a,b)), \\ \bullet\ \lim_{a+0} f=\lim_{a+0} g=0, \\ \bullet\ \exists \lim_{a+0}\frac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}} \textit{ határérték.}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\exists \lim_{a+0}\frac{f}{g} \quad \textit{és} \\ \lim_{a+0}\frac{f}{g}=\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}.\end{array}$$

Bizonyítás. $\boxed{\text{1. eset: } a>-\infty \text{ (véges).}}$

Legyen

$$A:=\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Azt kell igazolni, hogy

$$(\#)\qquad \forall\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\delta>0:\ \forall x\in(a,a+\delta)\subset(a,b) \text{ esetén } \frac{f(x)}{g(x)}\in K_\varepsilon(A).$$

Az $A=\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \forall\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\delta>0:\ \forall y\in(a,a+\delta)\subset(a,b) \text{ esetén } \frac{f'(y)}{g'(y)}\in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a):=0 \quad \text{és} \quad g(a):=0.$$

A $\lim_{a+0} f=\lim_{a+0} g=0$ feltételből következik, hogy ekkor $f,g\in C[a,a+\delta)$.

Legyen most $x\in(a.a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists\,\xi_x\in(a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez } (*) \text{ miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk, és az azt jelenti, hogy a $\lim_{a+0}\frac{f}{g}$ határérték létezik, és

$$\lim_{a+0}\frac{f}{g}=A.$$

$\boxed{\text{2. eset: } a=-\infty.}$ Nem bizonyítjuk. ■

5. **A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.**

Tétel. (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.) *Legyen $n\in\mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f\in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor*

$$\forall x\in K(a) \textit{ ponthoz } \exists\,\xi \textit{ a és x között}:$$

$$f(x)-T_{n,a}(f,x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) \qquad (x \in K(a)).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0, \\ F''(a) &= f''(a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0, \\ &\ \vdots \\ F^{(n)}(a) &= 0, \\ F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad (x \in K(a)). \end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned} G(x) &:= (x-a)^{n+1} & &\Longrightarrow & G(a) &= 0, \\ G'(x) &= (n+1)(x-a)^n & &\Longrightarrow & G'(a) &= 0, \\ G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} & &\Longrightarrow & G''(a) &= 0, \\ &\ \vdots & & & &\ \vdots \\ G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) & &\Longrightarrow & G^{(n)}(a) &= 0, \\ G^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$, és tegyük fel, hogy például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists\, \xi_1 \in (a, x): \quad \frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a Cauchy-féle középértéktételt az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \xi_2 \in (a, \xi_1): \quad \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists\, \xi_{n+1} \in (a, \xi_n): \quad \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_{n,a}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)} = (n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.$$

A $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

6. **A $\sqrt{1-x^2}$ $\quad (x \in (-1,1))$ primitív függvényeinek előállítása.**

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c \quad (x \in (-1,1), \quad c \in \mathbb{R})}$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az $x = \sin t = g(t) \quad (x \in (-1{,}1)), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítést:

$$g'(t) = \cos t > 0 \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \exists g^{-1}; \quad t := \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t > 0} \cdot \cos t\,dt \underset{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}{\overset{\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t}{=}} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x + x \cdot \cos(\arcsin x)}{2} + c$$

$$\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\substack{=:\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\alpha = x}}) = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c. \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

7. **Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.**

> Tegyük fel, hogy $f[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor:
>
> $$f \in R[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b], \quad \Omega(f;\tau) < \varepsilon \\ \text{(az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsi lehet)} \end{array}$$

Bizonyítás:

$\boxed{\Rightarrow:}$

$$I_*(f) = I^*(f) =: I$$

$\varepsilon > 0$ tetszőleges, szuprémum definíciójából:

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \le I$$

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I < S(f;\tau_2) \le I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Legyen $\boxed{\tau := \tau_1 \cup \tau_2}$.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \le s(f;\tau) \le S(f;\tau) \le S(f;\tau_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ $\varepsilon > 0$-hoz $\quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \Omega(f;\tau) < \varepsilon$:

$$\Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) \ge I^*(f) - I_*(f) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad I^*(f) - I_*(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad I^*(f) = I_*(f) \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

8. **Monoton függvény integrálható.**

> Ha $f \in K[a,b]$ ÉS monoton $\quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]$.

Bizonyítás: (oszcillációs összegekkel) Legyen f (például) $\nearrow$ $[a,b]$-n.

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{tetszőleges}$$

$$\inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: m := f(x_i)$$

$$\sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: M := f(x_{i+1})$$

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)}^{\ge 0} \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{\ge 0} \le \max_{0 \le i \le n-1}(x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)$$

– teleszkópikus!

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) \le ||\tau|| \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \quad ||\tau|| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

9. **A Newton-Leibniz tétel.**

Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} f \in R[a,b] \\ f\text{-nek van primitív függvénye} \quad [a,b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol F az f egy primitív függvénye.

Bizonyítás: Legyen $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges.

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) \overset{\text{TRÜKK}}{=} \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) + \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \ldots + \big(F(x_1) - F(x_0)\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

Tegyünk egy apróbb megállapítást: F-re $[x_i, x_{i+1}]$-en a Lagrange középérték tétel:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \overset{F'=f}{=} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Folytatván a bizonyítást:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le S(f,\tau) \quad \inf$$

$\forall \tau$-ra sup $\quad \Rightarrow$

$$I_*(f) \le F(b) - F(a) \le I^*(f)$$

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f = \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

10. **Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás.**

Tegyük fel hogy $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$,

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]).$$

Ekkor az F függvény folytonos $[a,b]$-n.

Bizonyítás: $c \in [a,b]$ tetszőleges, $x \in [a,b]$, és pl. $x > c$.

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{c} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f + \int_{c}^{x_0} f \right| = \left| \int_{c}^{x} f(t)\,dt \right| \overset{x>0}{\leq} \int_{c}^{x} |f(t)|\,dt \leq$$

$$\overset{M:=\sup\limits_{[a,b]}|f|<+\infty}{\leq} M \cdot \int_{c}^{x} 1\,dt = M|x-c|$$

$$0 \leq |F(x) - F(c)| \leq M|x-c| \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c} |F(x) - F(c)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to c} F(x) - F(c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to c} F(x) = F(c) \quad \Rightarrow \quad F \in C\{c\} \overset{c \text{ tetszőleges}}{\Rightarrow} F \in C[a,b]. \quad \blacksquare$$

11. **Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás.**

Tegyük fel hogy $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$,

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]).$$

Ha $f \in C\{d\}$ $(d \in (a,b))$, akkor az $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$.

Bizonyítás: Tegyük fel hogy $d \in (a,b)$ és $f \in C\{d\}$.

Igazoljuk:

$$F \in D\{d\} \quad \text{és} \quad f(d) = F'(d) := \lim_{h\to 0} \frac{F(d+h) - F(d)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \left(f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \left| f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h} \right| = 0,$$

azaz $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall |h| < \delta: \quad \left| f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h} \right| < \varepsilon. \quad (*)$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott:

$$\left| f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h} \right| = \left| f(d) - \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f \right) \right| = \left| f(d) - \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{d+h} f + \int_{d}^{x_0} f \right) \right| =$$

$$\left| f(d) - \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} f(t)\,dt \right| \overset{f(d) = \frac{1}{h}\int_d^{d+h} f(d)\,dt}{=} \left| \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} f(d) - f(t)\,dt \right| \overset{h>0}{\leq} \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} |f(d) - f(t)|\,dt.$$

Mivel $f \in C\{d\} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon$-hoz $\exists \delta > 0 \quad \forall |t-d| < \delta: \quad |f(d) - f(t)| < \varepsilon.$

Ha $h > 0$, $(0 < h < \delta)$ és $t \in [d, d+h] \quad \Rightarrow$

$$\left| f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \underbrace{\int_{d}^{d+h} 1\,dt}_{=h} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (*). \quad \blacksquare$$