Az 1. zh témakörei

Analízis 2.

2016. október

1. feladat. *A definíció alapján határozza meg a következő határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-4}{x^2+1}$.

Megoldás.

(a) (-3) a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez először átalakítjuk a törtet:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\big).$$

Ez a kifejezés (-3)-hoz „közeli” pontokban $-\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$-höz „közeli” értékeket vesz fel, ezért azt *sejtjük*, hogy a keresett határérték $-\frac{2}{5}$. A *bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right) \right| < \varepsilon,$$

ha $0 < |x-(-3)| = |x+3| < \delta$, valamely, alkalmas, ε-tól függő $\delta > 0$ számmal. Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést:

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right) \right| = \frac{|2x^2+5x-3|}{5(x^2+1)} = \frac{|(x+3)(2x-1)|}{5(x^2+1)} = |x+3| \cdot \frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}.$$

Ebből látszik, hogy egy lehetséges δ megkapható, ha felülről megbecsüljük az $\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}$ kifejezést. Ha (például) $|x-(-3)| = |x+3| < 1$, azaz ha $-4 < x < -2$, akkor

$$\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)} < \frac{2|x|+1}{5(x^2+1)} < \frac{2\cdot 4+1}{5\big((-2)^2+1\big)} = \frac{9}{25}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \min\left\{1, \frac{25\varepsilon}{9}\right\}$ választás megfelelő. ■

(b) $+\infty$ a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez most a következő átalakítást végezzük el:

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} = \frac{x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A *sejtés* tehát az, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty.$$

Azt kell *igazolnunk*, hogy $\forall\, P > 0$ számhoz $\exists\, x_0 > 0$, hogy

$$(*) \qquad \frac{x^3+x-4}{x^2+1} > P, \qquad \text{ha } \ x \ge x_0.$$

Mivel

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} \overset{\boxed{\text{ha } x>4}}{>} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2},$$

ezért $(*)$ teljesül, ha $x \ge x_0 := \max\{4, 2P\}$. ■

2. feladat. *Számítsa ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+100}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-\cos x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x}$.

Meogoldás.

(a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítsük a számlálót, azaz bővítsük a törtet $(\sqrt{1+x}+1)$-gyel, majd egyszerűsítsünk x-szel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.\qquad\blacksquare$$

(b) 0 a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó, ezért azonos átalakításokkal nem kritikus határértékre próbáljuk visszavezetni. Mivel

$$1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2},$$
$$\cos 7x-\cos 3x=\cos(5+2)x-\cos(5-2)x=-2\sin 5x\sin 2x \quad\text{és}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1 \quad\text{minden } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ esetén,}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin 5x\cdot\sin 2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2}=-\frac{1}{40}.\qquad\blacksquare$$

(c) A számláló tart 1-hez, a nevező pedig 0-hoz, ha $x\to 1$. $\frac{1}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Most a jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali pedig $-\infty$, ezért a keresett határérték nem létezik.

(d) A számlálónak $+\infty$, a nevezőnek pedig $-\infty$ a határértéke $-\infty$-ben, tehát ez egy $\frac{+\infty}{-\infty}$-típusú kritikus határérték. Emeljük ki a domináns tagokat: a számlálóban x^2-et, a nevezőben pedig x^3-t. Egyszerűsítés után azt kajuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+1000}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3\cdot(1+\frac{1000}{x^3})}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1000}{x^3}}=0.\qquad\blacksquare$$

(e) Írjuk be $\sin x$, e^x és $\cos x$ helyére a **hatványsoraikat**:

$$\frac{x-\sin x}{e^x-\cos x}=\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\right)}{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\right)}=$$
$$=\frac{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}-\cdots}{x+2\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+2\dfrac{x^6}{6!}\cdots}=\frac{\dfrac{x^2}{3!}-\dfrac{x^4}{5!}+\dfrac{x^6}{7!}-\cdots}{1+2\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+2\dfrac{x^5}{6!}\cdots}.$$

Alkalmazzuk most a hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tételt: a számláló határértéke 0-ban 0, a nevezőé pedig 1, ezért a kérdezett határérték 0. ■

(f) Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \frac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[4]{16}}{x}$$

az $f(x) := \sqrt[4]{x}$ $(x > 0)$ függvénynek az $a = 16$ ponthoz tartozó *különbségihányadosfüggvénye.* Ennek a függvénynek a határértéke $x \to 0$ esetén éppen az f függvény $a = 16$ pontban vett deriváltja. Mivel az f függvény mindenütt *differenciálható* és

$$f'(16) = \left(x^{1/4}\right)'_{x=16} = \frac{1}{4}\left(x^{-3/4}\right)_{x=16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{32},$$

ezért a kérdezett határérték $\frac{1}{32}$. ■

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{2,5\} \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5; \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit és a szakadási helyek típusait.

Megoldás. Mivel $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, ezért 2 és 5 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$ halmaz minden pontjában folytonos. A további vizsgálatokhoz alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{2,5\}).$$

Legyen $a = 2$. A fentiek alapján

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3} \neq f(2) = 0,$$

ezért az $a = 2$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.*

Legyen most $a = 5$. Ekkor

$$\lim_{x\to 5-0} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 5+0} f(x) = +\infty,$$

ami azt jelenti, hogy az $a = 5$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

4. feladat. *Írja fel az* $f(x) := \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$ $(0 < x < \pi^2)$ *függvény grafikonjának az* $x_0 := \frac{\pi^2}{4}$ *abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.*

Megoldás. Az $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$ azonosság felhasználásával $f(x)$ így alakítható át:

$$f(x) = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}} = e^{e^{1/x}\ln(\sin\sqrt{x})} \qquad (0 < x < \pi^2).$$

Az f függvénynek ebből az alakjából már következik, hogy f deriválható, és minden $x \in (0, \pi^2)$ pontban

$$f'(x) = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}\cdot\ln(\sin\sqrt{x}) + e^{1/x}\cdot\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right].$$

Az f függvény grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontban van érintője, és az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Mivel $x_0 = \frac{\pi^2}{4}$, $\sin\sqrt{x_0} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\sqrt{x_0} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\ln(\sin\sqrt{x_0}) = \ln 1 = 0$ és $f(x_0) = 1$, ezért $f'(x_0) = 0$. A keresett érintőegyenes egyenlete tehát $y = 1$. ■

5. feladat *Milyen a és b valós paraméter esetén lesz mindenütt differenciálható az*

$$f(x) := \begin{cases} a \operatorname{tg} x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ e^x - b, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvény. Adja meg a deriváltfüggvényt is.

Megoldás.

Ha $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = \frac{a}{\cos^2 x_0}$$

minden $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Ha $\boxed{x_0 > 0}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = e^{x_0}$$

minden $b \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Legyen $\boxed{x_0 = 0}$. A deriválhatóság szükséges feltétele a folytonosság, ezért

az első lépésben f **folytonosságát** kell megvizsgálni a 0 pontban. Ehhez a függvénynek a 0-pontbeli jobb-és bal oldali határértékét kell meghatározni. Ha ezek egyenlők és a közös értékük a függvény pontbeli helyettesítési értékével megegyezik, akkor a függvény folytonos, az ellenkező esetben nem folytonos, következésképpen nem deriválható.

Ahhoz, hogy az f függvény itt deriválható legyen szükséges, hogy f *folytonos* is legyen ebben a pontban, azaz a jobb- és a bal oldali határértékek megegyezzenek. Mivel

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (e^x - b) = 1 - b = f(0)$$

és

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} a \operatorname{tg} x = 0,$$

ezért

$$f \in C\{0\} \iff f(0+0) = f(0-0) = f(0) = 1 - b \iff 1 - b = 0 \iff b = 1,$$

és ez azt is jelenti, hogy $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén f *nem deriválható* 0-ban.

A második lépésben a függvény **deriválhatóságát** vizsgáljuk a 0 pontban. A fentiek miatt tegyük fel, hogy $b = 1$.

Az f függvény jobbról deriváható az $x_0 = 0$ pontban és

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = (e^x - 1)'_{x=0} = e^0 = 1.$$

A bal oldali derivált:

$$f'_-(0) := \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{a \operatorname{tg} x - 0}{x} = \lim_{x \to 0-0} a \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = a.$$

Ezért

$$f \in D\{\} \iff f'_+(0) = f'_-(0) \iff a = 1 \text{ és } b = 1.$$

Összefoglalva: Az f függvény pontosan akkor deriválható az értelmezési tartományán (azaz a $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ halmazon), ha $a = b = 1$. Ekkor a deriváltfüggvény

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ e^x, & \text{ha } x > 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$