Analízis 2.

8. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Előző előadás utolsó részének folyatatása

$f \rightsquigarrow \sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Pl: ii,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} : & x \neq 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$$

$a = 0 \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad k = 0,1,...$

Taylor sora: $0 + 0 + ... + f(x) = f(x)$

<u>Tétel</u>: (Taylor formula Lagrange maradéktaggal)

Ha $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(K(a))$, akkor $\forall x \in K(a), \exists \xi \in (a,x) \cup (x,a)$:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

<u>Bizonyítás</u>: Legyen $F(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$F(a) = f(a) - f(a) = 0$

$F'(x) = f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}$

$\Rightarrow F'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

$F''(x) = f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (k-1)(x-a)^{k-2}$

$F''(a) = f''(a) - f''(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{(n)}(a) = 0, \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

Legyen $G(x) = (x-a)^{(n+1)} \Rightarrow G(a) = 0$

$G'(x) = (n+1)(x-a)^n \Rightarrow G'(a) = 0, ..., G''(a) = 0$

$\Rightarrow G^{(n)}(a) = 0, \quad G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Alkalmazzuk a Cauchy középértéktételt: $\exists$ ilyen $\xi_1, \xi_2 ... \xi_{n+1}$

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{(n+1)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = ... =$$

$$= \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Legyen $\xi = \xi_{n+1}$ ■

<u>Megj</u>: $n = 0 : \exists \xi : f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$ Lagrange középérték tétel miatt.

<u>Tétel</u>: Tfh. $f \in \mathcal{D}^{\infty}(K(a))$ és $sup\{\left|f^{(n)}(x)\right| \quad n \in \mathbb{N}, x \in K(a)\} = M$ és $M < \infty$

Ekkor: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K(a))$

<u>Bizonyítás</u>: $\exists \xi \in (a,x) : \left| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right| \leq$

$\leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ ■

Pl: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)} = \sin x, \quad ... \quad a = 0$

$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Konvexitás, Konkávitás

Definíció: Az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény:

i, konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

ii, szigorúan konvex, ha $<$

iii, konkáv, ha $\geq$

iv, szigorúan konkáv, ha $>$

Pl: Az $f(x) = \alpha x + \beta$ függvény konvex és konkáv is.

Tétel: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ és $\forall x \in (x_1, x_2)$:

$f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

Bizonyítás nélkül.

Tétel: (2. átfogalmazás)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow \forall r, s, t \in (a,b), r < s < t : \frac{f(s)-f(r)}{s-r} \leq \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$

Bizonyítás: Az előző tételben behelyettesítjük az alábbi értékeket: $s = x, t = x_2, r = x_1$

$f(s) \leq \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \cdot (s - r) + f(r) \quad \blacksquare$

Tétel: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

i, Ha $f \in \mathcal{D}(a,b)$, akkor

a, f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow \quad (a,b)$-n

b, f szigorúan konvex $\Leftrightarrow f' \uparrow \quad (a,b)$-n

ii, Ha $f \in \mathcal{D}^2(a,b)$, akkor

a, f konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \quad (a,b)$-n

b, f szigorúan konvex $\Leftarrow f'' > 0 \quad (a,b)$-n

$\not\Rightarrow$ **Pl:** $f(x) = x^4$

Bizonyítás: Elég **i,**-t bizonyítani

a, "$\Rightarrow$" Tfh. f konvex

Legyen $x_1 < x_2$ tetszőleges és $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$

$$\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2}$$

$\lim\limits_{y_1 \to x_1+0} \frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} = f'(x_1)$ és $\lim\limits_{y_2 \to x_2-0} \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2} = f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2) \Rightarrow f' \nearrow$

"$\Leftarrow$" Tfh. $f' \nearrow$ Elég:

$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2) : f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

Azaz $r(x) := f(x) - (\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad r(x_1) = 0, \quad r(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ Rolle középértéktétel miatt: $\exists \xi \in (x_1, x_2) : r'(\xi) = 0$

$r'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \nearrow$

$\Rightarrow r' \leq 0 \quad (x_1, \xi)$-n $\quad \Rightarrow r \searrow \quad (x_1, \xi)$-n és

$r' \geq 0 \quad (\xi, x_2)$-n $\quad \Rightarrow r \nearrow \quad (\xi, x_2)$-n

$\Rightarrow r \leq 0 \quad (x_1, x_2)$-n

b, Hasonló $\blacksquare$

Definíció: $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b), f\in\mathcal{D}(x_0)$

x_0 infelxiós pontja f-nek, ha $l(x) := f(x) - (\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{érintő}})$ szigorúan előjelet vált

azaz $\exists\delta>0, l(x)<0, \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ és $l(x)>0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ vagy fordítva

Tétel: $f\in\mathcal{D}(a,b), x_0\in(a,b)$ Ha $\exists\delta>0, f$ szigorúan konvex $(x_0-\delta,x_0)$-n és f szigorúan konkáv $(x_0,x_0+\delta)$-n, akkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás: f szigorúan konvex $\Rightarrow f'\uparrow \quad (x_0-\delta,x_0)$-n

f szigorúan konkáv $\Rightarrow f'\downarrow \quad (x_0,x_0+\delta)$-n

$l'(x)=f'(x)-f'(x_0)\Rightarrow l'(x_0)=0$

$$\left.\begin{array}{lllll} l'\uparrow\ (x_0-\delta,x_0)\text{-n} & \Rightarrow & l'<0\ (x_0-\delta,x_0)\text{-n} & \Rightarrow & l\downarrow(x_0-\delta,x_0)\text{-n} \\ l'\downarrow\ (x_0,x_0+\delta)\text{-n} & \Rightarrow & l'<0\ (x_0,x_0+\delta)\text{-n} & \Rightarrow & l\downarrow(x_0,x_0+\delta)\text{-n} \end{array}\right\}\Rightarrow l\downarrow \quad (x_0-\delta,x_0+\delta)\text{-n}$$

De! $l(x_0)=0\Rightarrow l>0 \quad (x_0-\delta,x_0)$ és $l<0 \quad (x_0,x_0+\delta)$ ■

Tétel: $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b)$

i, Ha f kétszer folytonosan deriválható és x_0 inflexiós pont, ekkor $f''(x_0)=0$

ii, Ha f háromszor folytonosan deriválható és $f''(x_0)=0$ és $f'''(x_0)\neq 0$, ekkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás: **i,** Indirekten Tfh. $f''(x_0)\neq 0$, pl: $f''(x_0)>0$

f'' folytonos $\Rightarrow \exists K(x_0): f''>0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula

$$n=1:\exists\xi:\underbrace{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}_{l(x)}=\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow l$ nem vált előjelet $\Rightarrow x_0$ nem inflexiós pont.

ii, Tfh. $f'''(x_0)>0\Rightarrow\exists K(x_0): f'''>0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula $n=2$:

$$\exists\xi: l(x)=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\tfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2)=\underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}_{>0}\cdot(x-x_0)^3 \quad x\in K(x_0)$$

A jobb oldal szigorúan előjelet vált $\Rightarrow$ x_0 inflexiós pont. ■