

7. gyakorlat

Differenciálszámítás (folytatás)

■ Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D(\mathbb{R})$ és $f' = f$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$f(x) = ce^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mutassa meg, hogy az

(a) $f(x) := x^3 + x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $(f^{-1})'(2)$ -t.

(b) $f(x) := x + e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2$, és számítsa ki $(f^{-1})''(1)$ -et.

3. Bizonyítsa be, hogy

(a) az $x^5 + 10x + 3 = 0$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van;

(b) pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre $e^x = 1 + x$.

4. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $1 + x < e^x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);

(b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$ ($x \in \mathbb{R}^+$);

(c) $\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x$ ($x \in \mathbb{R}^+$);

(d) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ ($x \in \mathbb{R}^+$);

(e) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

5. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény szigorúan monoton:

(a) $f(x) := x^2(x-3)$ ($x \in \mathbb{R}$); (b) $f(x) := xe^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);

(c) $f(x) := (x-3)\sqrt{x}$ ($x > 0$); (d) $f(x) := xe^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$);

(e) $f(x) := 2e^{x^2-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$); (f) $f(x) := x \ln x$ ($x \in \mathbb{R}^+$);

(g) $f(x) := \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\}$);

(h) $f(x) := \frac{e^x}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);

(i) $f(x) := \ln \frac{x^2}{(1+x)^3}$ ($x > -1$, $x \neq 0$);

(j) $f(x) := \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$).