- Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ *sugarú környezetét.*

Válasz. Az $A \in \mathbb{R}$ valós szám $r > 0$ sugarú környezetén a

$$K_r(A) := (A - r,\ A + r)$$

intervallumot értjük. Az $A = +\infty$ elem $r > 0$ sugarú környezete a

$$K_r(+\infty) := \left(\tfrac{1}{r}, +\infty\right),$$

az $A = -\infty$ elemé pedig a

$$K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\tfrac{1}{r}\right)$$

intervallum.

- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f: \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$, $\ A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0\ \exists\, x_0 > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, x > x_0: \quad f(x) > P.$$

- Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x - a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós *hatványsornak* nevezzük.

- Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x - a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b - a)^n.$$