7. előadás

2016. október 24.

Konvex és konkáv függvények

Megjegyzés. Valós-valós függvények konvexitását és konkávitását **intervallumon** fogjuk értelmezni. **Intervallumon** mindig nem üres és nem egyetlen pontból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt értünk. A továbbiakban gyakran használt

„$I \subset \mathbb{R}$ (tetszőleges) intervallum”

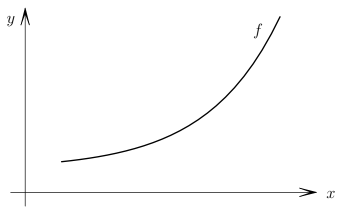
kijelentésen (hacsak mást nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum. A következő halmazok mindegyike intervallum:

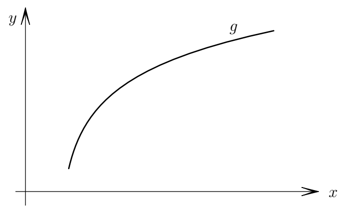
$$(-1,1), \quad [-1,1], \quad [-1,0), \quad [0,+\infty), \quad (-\infty,0), \quad (-\infty,+\infty). \ \blacksquare$$

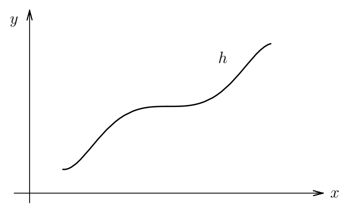
• A konvexitás és a konkávitás szemléletes jelentése

Célunk továbbra is függvények általános tulajdonságainak a leírása, jellemzése. Azt már láttuk, hogy a differenciálszámítás milyen hatékony eszközöket kínál a monotonitás és a szélsőértékek vizsgálatához.

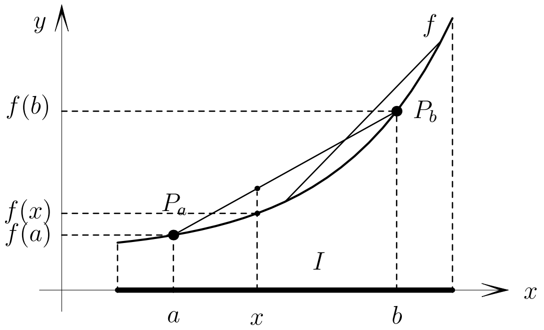
Most tovább folytatjuk függvények „alaki” tulajdonságainak a tanulmányozását. Számos *konkrét* függvény grafikonját már jól ismerjük. Gondoljunk most a *monoton növekedésre.* Világos, hogy egy függvény többféleképpen is lehet monoton növekedő:

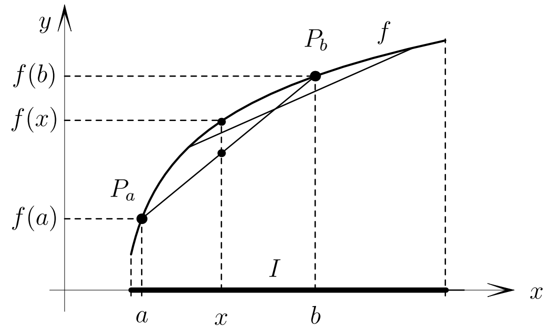






A jobb oldali grafikonnal ellentétben a másik kettő bizonyos jellegzetes „szabályosságot” mutat. Ezeket a tulajdonságokat célszerű definiálni. Az f függvényt (bal oldali ábra) **konvexnek**, g-t pedig (középső ábra) **konkávnak** fogjuk nevezni. A definíció megfogalmazásához használjuk fel a derivált definíciójánál már bevált *ötletet*: húzzunk be húrokat:





Szemléletesen világos, hogy az I intervallum tetszőleges $a < b$ pontjai esetén az f (a g) függvény grafikonjának az (a,b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt (felett) van. A szóban forgó húr egyenesének az egyenlete:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a), \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b).$$

A fentiek alapján eléggé természetesek a következő definíciók. $\blacksquare$

• A konvexitás és a konkávitás fogalma

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***konvex az*** $I \subset \mathbb{R}$ ***intervallumon****, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ \ a < b \ \ \textit{esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $(*)$-ban $\le$ helyett $<$ áll, akkor f-et **I-n szigorúan konvexnek**, ha $\ge$, illetve $>$ áll, akkor f-et **I-n konkávnak**, illetve **szigorúan konkávnak** nevezzük.

Megjegyzések.

1^o Ha az f függvény elsőfokú $\mathbb{R}$-en, azaz $f(x) = cx + d$ $(x \in \mathbb{R})$ valamely c és d állandóval, akkor $(*)$-ban egyenlőség áll minden x-re. Tehát egy elsőfokú függvény egyszerre konvex és konkáv is.

2^o Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en. ■

A konvexitást jellemző egyenlőtlenséget érdemes más formában is megadni.

Tétel. *Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ \ a < b \ \ \textit{és} \ \ \forall\, \lambda \in (0, 1) \ \ \textit{esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

Megjegyzés. Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1 - \lambda) b \in (a, b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1 - \lambda) a < \lambda a + (1 - \lambda) b = x < \lambda b + (1 - \lambda) b = b.$$

Másrészt az (a, b) intervallum minden eleme előálll $\lambda a + (1 - \lambda) b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a, b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b - x}{b - a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b - x}{b - a} \cdot a + \left(1 - \frac{b - x}{b - a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I,\ a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1 - \lambda) b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) &\le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big(\big[\lambda a + (1 - \lambda) b - a\big]\big) + f(a) = \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big[(1 - \lambda)(b - a)\big] + f(a) = \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b), \end{aligned}$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

Korábban láttuk, hogy függvények monotonitása kapcsolatba hozható azok különbségihányados-függvényeivel. Hasonló a helyzet a konvexitás és a konkávitás esetében is. Emlékeztetünk arra, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\triangle_c f(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{c\}\big)$$

függvényt neveztük az f függvény c ponthoz tartozó *különbségihányados-függvényének.*

Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor*

1^o *f konvex [szigorúan konvex] I-n* $\iff$ *$\forall\, c \in I$ esetén $\triangle_c f \nearrow$ [$\uparrow$].*

2^o *f konkáv [szigorúan konkáv] I-n* $\iff$ *$\forall\, c \in I$ esetén $\triangle_c f \searrow$ [$\downarrow$].*

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I intervallumon, azaz

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Be kell látnunk, hogy tetszőleges $c \in I$ esetén a $\triangle_c f$ függvény monoton növekedő, vagyis hogy

$$(\#) \qquad \forall\, x, t \in I \setminus \{c\},\ x < t \text{ esetén } \triangle_c f(x) \le \triangle_c f(t).$$

A c és az $x < t$ pontok helyzetét illetően három eset lehetséges:

$$1^o\ c < x < t, \qquad 2^o\ x < c < t, \qquad 3^o\ x < t < c.$$

<u>1^o eset ($c < x < t$)</u>: Legyen (*)-ban $a := c$, $x := x$, $b := t$. Ekkor

$$f(x) \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}(x - c) + f(c),$$

amiből egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz} \quad \triangle_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \triangle_c f(t),$$

vagyis ebben az esetben igaz a (#) egyenlőtlenség.

<u>2^o eset ($x < c < t$)</u>: Ha (*)-ban $a := x$, $x := c$ és $b := t$, akkor

$$f(c) \le \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(c - x) + f(x),$$

amiből ekvivalens átalakítássokkal azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \iff \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz} \quad \triangle_c f(x) \le \triangle_c f(t),$$

ezért a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

<u>3^o eset ($x < t < c$)</u>: ($*$) helyett most a vele nyilván ekvivalens

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big)$$

egyenlőtlenségből indulunk ki. Ebből az $a := x$, az $x := t$ és az $b := c$ szereposztással azt kapjuk, hogy

$$f(t) \le \frac{f(c) - f(x)}{c - x}(t - c) + f(c).$$

Vegyük figyelembe, hogy $t < c$, azaz $t - c < 0$, ezért

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \ge \frac{f(c) - f(x)}{c - x}.$$

Következésképpen

$$\triangle_c f(t) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \ge \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \triangle_c f(x) \qquad (x < t),$$

és ez azt jelenti, hogy a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

Az állítás $\boxed{\Rightarrow}$ részét tehát bebizonyítottuk.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\forall\, c \in I$-re $\triangle_c f \nearrow$. Be kell látnunk, hogy f konvex I-n, vagyis hogy

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ és } \ \forall\, x \in (a,b) \ \text{ esetén}$$
$$f(x) \le \frac{f(a) - f(b)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Valóban, legyen $c := a$ és $(a <)\, x < b$. Mivel $\triangle_a f \nearrow$, ezért

$$\triangle_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \le \triangle_a f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

amiből átrendezéssel az adódik, hogy

$$f(x) \le \frac{f(a) - f(b)}{b-a}(x-a) + f(a),$$

és ez éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az I intervallumon. ■

• A konvexitás-konkávitás és a folytonosság, illetve a deriválhatóság kapcsolata

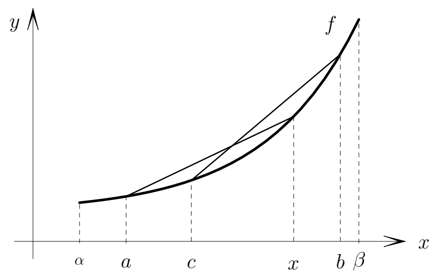
A következő tétel azt állítja, hogy a konvexitás a folytonosság és a deriválhatóság fogalma „között" van abban az értelemben, hogy a konvexitás fogalma a folytonosságnál „erősebb", a deriválhatóságnál pedig „gyengébb" fogalom.

Tétel.
Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon. $\Longrightarrow$

1^o *f az (α, β) intervallum minden c pontjában folytonos.*

2^o *f az (α, β) intervallum minden c pontjában jobbról is és balról is deriválható.*

Bizonyítás.
1^o Rögzítsük a $c \in (\alpha, \beta)$ pontot és válasszuk meg a-t és b-t úgy, hogy $\alpha < a < c < b < \beta$. Vegyünk egy tetszőleges $x \in (c, b)$ elemet, és tekintsük a következő ábrát:



Alkalmazzuk az f függvényre a konvexitás definícióját a $c < x < b$ pontokban:

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(c)}{b-c}(x-c) + f(c).$$

Írjuk most fel az $a < c < x$ pontokban is a megfelelő egyenlőtlenséget:

$$f(c) \le \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(c-a) + f(a).$$

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a}(x-a) + f(a) \le f(x).$$

Így

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a}(x-a) + f(a) \le f(x) \le \frac{f(b) - f(c)}{b-c}(x-c) + f(c) \qquad \big(x \in (c,b)\big).$$

A fenti egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló függvények folytonosak c-ben, és

$$\lim_{x\to c+0}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)+f(a)\right)=\lim_{x\to c+0}\left(\frac{f(b)-f(c)}{b-c}(x-c)+f(c)\right)=f(c),$$

ezért a függvény határértékére vonatkozó közrefogási elv alapján

$$\lim_{x\to c+0} f(x)=f(c).$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=f(c),$$

és ez azt jelenti, hogy az f függvény folytonos a c pontban.

2^o Legyen $c\in(\alpha,\beta)$. Egyik korábbi tételünk szerint az f függvény tetszőleges $c\in(\alpha,\beta)$ ponthoz tartozó különbségihányados-függvénye, vagyis a

$$\triangle_c f(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\qquad\big(x\in(\alpha,\beta)\setminus\{a\}\big)$$

függvény monoton növekedő. Rögzítsünk egy $d\in(\alpha,c)$ számot. Ekkor

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\le\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\qquad\big(x\in(c,\beta)\big),$$

tehát $\triangle_c f$ monoton növekedő és alulról korlátos a (c,β) intervallumon, ezért a monoton függvények szakadási helyeire vonatkozó állításból következik, hogy a

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

határérték létezik és véges, ami éppen azt jelenti, hogy f jobbról deriválható c-ben. Ugyanígy bizonyítható, hogy f balról is differenciálható c-ben. ■

Tétel. *Legyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, és tegyük fel, hogy $f\in D(\alpha,\beta)$.*

1^o *Az f függvény konvex [szigorúan konvex] (α,β)-n $\iff$ az f' függvény $\nearrow$ $[\uparrow]$.*

2^o *Az f függvény konkáv [szigorúan konkáv] (α,β)-n $\iff$ az f' függvény $\searrow$ $[\downarrow]$.*

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az (α,β) intervallumon, azaz

$$\forall\, a,b\in(\alpha,\beta),\ a<b\ \text{ esetén}$$

$$f(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\quad\big(\forall\, x\in(a,b)\big).$$

Ebből következik, hogy a $\triangle_a f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{a\}$ halmazon, ezért

$$\triangle_a f(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\forall\, x<b,\ x\ne a \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\triangle_a f(x)$, ezért

$$(*)\qquad f'(a)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hasonlóan, a $\triangle_b f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{b\}$ halmazon, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\triangle_b f(a)\le\triangle_b f(x)=\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\quad\forall\, a<x,\ x\ne b \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(b)=\lim\limits_{x\to b}\triangle_b f(x)$, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b).$$

Így $(*)$ alapján azt kapjuk, hogy $f'(a) \leq f'(b)$. Mivel ez minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$-re igaz, ezért f' monoton növekedő az (α, β) intervallumon.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy f' monoton növekedő (α, β)-n. Legyen $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ tetszőleges. f-re a Lagrange-féle középértéktételt először az $[a, x]$, majd az $[x, b]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \xi_1 \in (a, x): \quad f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{és} \quad \exists\, \xi_2 \in (x, b): \quad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Mivel $\xi_1 < \xi_2$ és $f' \nearrow$, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Így

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{[f(b) - f(a)] - [f(x) - f(a)]}{b - x} \iff$$

$$\iff [f(x) - f(a)] \cdot [(b - x) + (x - a)] \leq [f(b) - f(a)] \cdot (x - a) \iff f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Ez az egyenlőtlenség minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az (α, β) intervallumon. ■

Tétel. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha, \beta)$. Ekkor*

1^o *f konvex (α, β)-n* $\iff f''(x) \geq 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

2^o *f konkáv (α, β)-n* $\iff f''(x) \leq 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big)$,

3^o *ha* $f''(x) > 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies$ *f szigorúan konvex (α, β)-n,*

4^o *ha* $f''(x) < 0 \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big) \implies$ *f szigorúan konkáv (α, β)-n.*

Bizonyítás. A tétel állításai az előző tétel, valamint a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások egyszerű következményei. ■

Tétel.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy
- *$f \in D(\alpha, \beta)$,*
- *f konvex (α, β)-n.*

$\iff$ $\forall\, c \in (\alpha, \beta)$ pontban

$$f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \ \big(\forall\, x \in (\alpha, \beta)\big).$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzés. A tétel geometriai tartalma a következő: Az f függvény akkor és csak akkor konvex (α, β)-n, ha minden $c \in (\alpha, \beta)$ esetén az f függvény grafikonja a c pontban húzott érintő felett halad. ■

• Inflexiós pont

Definíció. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek **inflexiós pontja**, ha*

$$\exists\, \delta > 0: \quad f \text{ konvex } (c, c - \delta]\text{-n és konkáv } [c, c + \delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva.}$$

Tétel. (Szükséges feltétel az inflexiós pontra.)

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy
- *$f \in D^2(\alpha, \beta)$ és*
- *$c \in (\alpha, \beta)$ inflexiós pontja f-nek.*

$\implies$ $f''(c) = 0.$

Magasabb rendű *elégséges feltételek* a lokális szélsőértékekre és az inflexióra.

Tétel. *Legyen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. *Tegyük fel, hogy* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *és*

- *valamilyen* $n \in \mathbb{N}$ *számra egy* $c \in (\alpha, \beta)$ *pontban* $f \in D^n\{c\}$, *továbbá*
- $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ *és* $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Ekkor a következő állítósok teljesülnek:

1^o *A* $c \in (\alpha, \beta)$ *pont az* f *függvénynek lokális szélsőértékhelye* $\iff$ *ha* n *páros* (*ha* $f^{(n)}(c) > 0$, *illetve* $f^{(n)}(c) < 0$ *akkor az* f *függvénynek* c*-ben lokális minimuma, illetve lokális maximuma van*).

2^o *A* $c \in (\alpha, \beta)$ *pont az* f *függvénynek inflexiós pontja* $\iff$ *ha* n *páratlan.*

Aszimptoták

Definíció. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek* ***van aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben***, *ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ebben az esetben az $l(x) = Ax + B$ $(x \in \mathbb{R})$ *egyenes az* f *függvény* ***aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben***.

Megjegyzés. Hasonló módon értelmezzük a $(-\infty)$-beli aszimptotát. ■

Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$. *Az* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája* $(+\infty)$*-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f *függvény aszimptotája* $(+\infty)$*-ben.*

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. ■

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

1^o Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)
2^o Monotonitási intervallumok.
3^o Lokális és abszolút szélsőértékek.
4^o Konvexitási, konkávitási intervallumok.
5^o A határértékek a $\mathcal{D}_f' \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.
6^o Aszimptota $(\pm\infty)$-ben.
7^o A függvény grafikonjának felrajzolása.