Analízis 2.

12. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Megj előző előadás végéhez: $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$

$$\not\Leftarrow$$

Pl: $x \in [0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \notin R[0,1]$, de $|f| = 1 \in R[0,1]$

Tétel: (1. középértéktétel)

Tfh. $f, g \in R[a,b], g \geq 0, m := \inf f$ és $M := \sup f$, ekkor: $\quad m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: $\quad m \leq f \leq M \Rightarrow m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$

$\Rightarrow \int\limits_a^b m \cdot g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq \int\limits_a^b M \cdot g \Rightarrow m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g \quad \blacksquare$

Tétel: (2. középértéktétel)

Tfh. $g \in R[a,b], g \geq 0, f \in C[a,b]$, ekkor: $\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: $\quad$ Előző tétel miatt: $m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g$

$\Rightarrow \exists c \in [m, M] : \int\limits_a^b f \cdot g = c \cdot \int\limits_a^b g$

$f \in C[a,b] \Rightarrow m$ az abszolút minimum és M az abszolút maximum a Weierstrass-tétel miatt
$\Rightarrow M$-et és m-et is felveszi f értékként $\Rightarrow$ Bolzano-tétel miatt minden közbülső értéket is felvesz, így c-t is $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : c = f(\xi) \quad \blacksquare$

Tétel: (Newton-Leibniz formula)

Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek $\exists F$ primitív függvénye, akkor: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Jelölés: $\left[F\right]_a^b$

Bizonyítás: $\quad$ Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\} \in F[a,b]$

$\Rightarrow F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + ... + F(x_1) - F(x_0) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$ Alkalmazzuk a Lagrange középértéktételt az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon

$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] : F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^n (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) \leq S(f,\tau) \quad$ /sup a bal oldalon és inf a jobb oldalon

$\Rightarrow I_* f \leq F(b) - F(a) \leq I^* f \qquad$ Mivel $I_* f = I^* f = \int\limits_a^b f \Rightarrow F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f \quad \blacksquare$

Pl: i, $\int\limits_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

ii, Félkör területe: $f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1{,}1]$

$T=\int\limits_{-1}^{1} f=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\left[\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{\pi}{2}$

<u>Megj</u>: Egyik feltétel sem hagyható el, pl:

i, $\exists f\in R[a,b]$, de $\nexists$ primitív függvény

$f(x)=sign(x) \quad x\in[-1{,}1]$

f szakaszonként folytonos $\Rightarrow f\in R[-1{,}1]$, de $\nexists$ primitív függvény, mert nem Darboux-tulajdonságú

ii, $\exists f:[a,b]\to\mathbb{R}, \exists F$ primitív függvény, de $f\notin R[a,b]$ (nehéz)

Definíció: Ha $f\in R[a,b]$ és $x_0\in[a,b]$, akkor: $F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f \quad (x\in[a,b])$ az f integrál függvénye

<u>Tétel</u>: (A differenciál- és integrálszámítás alaptétele)

Legyen $f\in R[a,b], x_0\in[a,b], F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f \quad (x\in[a,b])$, ekkor:

i, $F\in C[a,b]$

ii, Ha $f\in C(d)$, akkor $F\in D(d)$ és $F'(d)=f(d) \quad (d\in[a,b])$

<u>Bizonyítás</u>: **i,** $f\in R[a,b]\Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow \exists M:|f|\le M$

$$|F(x_2)-F(x_1)|=\left|\int\limits_{x_0}^{x_2} f-\int\limits_{x_0}^{x_1} f\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f\right|\le\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}|f|\right|\le M\cdot|x_2-x_1|\Rightarrow x_2\to x_1\Rightarrow F(x_2)\to F(x_1)$$

$\Rightarrow F\in C(x_1) \quad x_1$ tetszőleges

ii, Igazolni kell, hogy $f(d)=F'(d)=\lim\limits_{h\to0}\frac{F(d+h)-F(d)}{h}$, azaz $\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h}-f(d)\right|=0$

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h}-f(d)\right|=\left|\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{d}^{d+h} f(t)dt-f(d)\right|=\left|\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{d}^{d+h} f(t)-f(d)dt\right|\le\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{d}^{d+h}|f(t)-f(d)|dt$$

$f\in C(d)\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall t\in[a,b],|t-d|<\delta:|f(t)-f(d)|<\varepsilon$

Legyen $|h|<\delta\Rightarrow|t-d|\le|h|<\delta\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall|h|<\delta:\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h}-f(d)\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h}-f(d)\right|=0 \quad \blacksquare$

<u>Megj</u>: Ha $d=a$ vagy $d=b$, akkor jobb vagy bal oldali deriváltról van szó

<u>Következmény</u>: Ha $f\in C[a,b]$, akkor $F\in\mathcal{D}[a,b]$ és $F'(x)=f(x), \quad \forall x\in[a,b]$

<u>Következmény</u>: Ha $f\in C[a,b]$, akkor $\exists$ primitív függvénye

<u>Tétel</u>: (Parciális integrálás)

Ha $f,g\in\mathcal{D}[a,b]$ és $f',g'\in R[a,b]$, akkor $\int\limits_{a}^{b} f'\cdot g=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-\int\limits_{a}^{b} f\cdot g'$

<u>Bizonyítás</u>: $f'\cdot g+f\cdot g'$ primitív függvénye $f\cdot g$

$\Rightarrow\int\limits_{a}^{b} f'\cdot g+f\cdot g'=\left[f\cdot g\right]_{a}^{b}=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a) \quad \blacksquare$

Tétel: (Helyettesítés)

Tfh. $f \in R[a,b], g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ differenciálható bijekció és $g' \neq 0$, ekkor: $\int\limits_a^b f = \int\limits_\alpha^\beta f \circ g \cdot g'$

Bizonyítás: f-nek $\exists$ primitív függvénye: $(\int\limits_\alpha f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$

$$\int\limits_a^b f = \left[(\int\limits_\alpha f \circ g \cdot g') \circ g^{-1} \right]_a^b = \int\limits_\alpha^\beta f \circ g \cdot g' \quad \blacksquare$$

Alkalmazás

1. Terület: $T(H) = \int\limits_a^b f, \quad f \geq 0$
2. Ívhossz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \gamma = \{(x, f(x)), x \in [a,b]\}$ az f grafikonja

   $\tau \in F[a,b] : l(\gamma, \tau) =$ töröttvonal hossza

   $l(\gamma) = \sup\limits_{\tau \in F[a,b]} l(\gamma, \tau)$ a γ ívhossza

   Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható, ekkor $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
3. Térfogat $f \geq 0 \quad H := \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ forgástest

   Tétel: $V(H) = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2 \quad (f \in R[a,b])$
4. Felszín:

   Tétel: Ha f folytonosan differenciálható, akkor: $F(H) = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$