$\boxed{\text{5. és 6. gyakorlat}}$

Differenciálszámítás

■ Szükséges ismeretek

- Mi a belső pont definíciója?
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?
- Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
- Mi a jobb oldali derivált definíciója?
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
- Mi az érintő definíciója?
- Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Írja fel az $\exp_a$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ függvény deriváltját valamely helyen.
- Írja fel a $\log_a$ $(a \in \mathbb{R},\ 0 < a \neq 1)$ függvény deriváltját valamely helyen.

■ Feladatok

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

(a) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad (x > -1),\ a := 3;$

(b) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9}$ $\quad (\pm 3 \neq x \in \mathbb{R}),\ a := -1.$

2. Gyakorolja a mechanikus deriválást:

(a) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5},$ (b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}},$

(c) $f(x) := x^2 \sin x,$ (d) $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-x-2}.$

3. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határozza meg $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \operatorname{tg}(5x^2+3x),$ (b) $f(x) := \sin\dfrac{x^2+1}{x+3},$

(c) $f(x) := \sqrt{x^3+2x+1},$ (d) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}}.$

4. Határozza meg $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := (\ln x)^x \quad (x > 1).$$

5. Legyen α valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

6. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := \frac{1}{2}.$$

7. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$$

határértéket.

Házi feladatok

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

$$f(x) := \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \; a := -1.$$

2. Legyenek a és b valós paraméterek. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ a \sin x + x + b, & x > 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

3. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sin \frac{x - 1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \frac{1}{2}.$$

Gyakorló feladatok

1. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 + x - 2}$$

határértéket.

2. Gyakorolja a mechanikus deriválást:

(a) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$, (b) $f(x) := \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$,

(c) $f(x) := \sin(\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3})$, (d) $f(x) := \ln(\sin x) - \frac{1}{2}\sin^2 x$,

(e) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$, (f) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

(g) $f(x) := 3^{x^2}$, (h) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$,

(i) $f(x) := \ln\big(e^{-x}\sin x\big)$, (j) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x$,

(k) $f(x) := e^x \sin x$, (l) $f(x) := x^2\sqrt[3]{x}$,

(m) $f(x) := (x+2)^8(x+3)^6$, (n) $f(x) := \big(\sin^3 x\big)\cdot\cos x$,

(o) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, (p) $f(x) := \dfrac{\sin 2x^2}{3-\cos 2x}$,

(q) $f(x) := \ln(x^2 e^x)$, (r) $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x)$,

(s) $f(x) := \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$, (t) $f(x) := \ln\big(\cos x\big)$,

(u) $f(x) := \sqrt[5]{x\operatorname{tg} x}$,

(v) $f(x) := \sin^2\big(\ln(\sqrt{1+\cos^2 x}+1)\big)$,

(w) $f(x) := (\sin x)^{\cos x}$, (x) $f(x) := (1+e^{3x+1})^{x^2+1}$.

3. Hol deriválhatók az alábbi függvények? (a, b és c valós paraméterek.) Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := \dfrac{1}{|x|+1}$ $(x\in\mathbb{R})$, (b) $f(x) := e^{|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x) := |\ln(1+x)|$ $(x>-1)$, (d) $f(x) := \ln|x|$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$,

(e) $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x-1|)$ $(x\in\mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \begin{cases} 1-ax, & x<0 \\ e^{-x^2}, & x\geq 0, \end{cases}$ (g) $f(x) := \begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ -x^2, & x\in\mathbb{Q}^*, \end{cases}$

(h) $f(x) := \begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0. \end{cases}$

4. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét:

(a) $f(x) := \dfrac{x}{x^2-4}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\})$, $a=1$;

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\ln^2(x-\frac{1}{x})}$ $(x>1)$, $a=2$;

(c) $f(x) := x^{\ln x}$ $(x>0)$, $a=e^2$.

5. Írja fel az alábbi egyenletek által meghatározott síkgörbéknek a megadott pontokhoz tartozó érintőjük egyenletét:

(a) $y = \dfrac{x}{x^2-2}$, $(2, 1)$;

(b) $y = (e^x + e^{2x})$, $(0, 2)$.

6. Keressen az $y = e^x$ egyenletű görbéhez olyan érintőt, amely

(a) párhuzamos az $x - 4y = 1$ egyenessel,

(b) átmegy az origón.

7. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha:

(a) $f(x) := x^2 g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := g(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := g^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := g(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := g(e^x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := e^{g(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := g(\ln x) \quad (x > 0)$,

(h) $f(x) := \ln|g(x)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\})$.

8. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

(a) $h(x) := \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\})$.

9. Tegyük fel, hogy az f és a g valós-valós függvények, továbbá $a \in \operatorname{int}\big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$. Mit lehet mondani az $f + g$, illetve az $f \cdot g$ függvény a-beli deriválhatóságáról, ha

(a) f differenciálható a-ban és g nem differenciálható a-ban;

(b) f és g egyike sem differenciálható az a pontban?

10. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket és olyan $a \in \mathbb{R}$ pontot, amelyekre

(a) $g \in D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

(b) $g \notin D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$

(c) $g \notin D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

teljesül, azonban $f \circ g \in D\{a\}$.