Analízis 2.

4. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Pl: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad$ Legyen $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-(a+h)}{(a+h)\cdot a \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a\cdot(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

Tétel: (A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása)

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f \quad$ Ekkor

$f \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$

Ekkor $A = f'(a)$

Megj: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \quad$ hiszen $x = a+h$

Bizonyítás: "$\Rightarrow$"

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = A \Rightarrow \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A}_{\varepsilon(x)} = 0$

$\Rightarrow f(x) - f(a) - A(x-a) = \varepsilon(x)(x-a)$

"$\Leftarrow$" Tfh.

$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A = \varepsilon(x) \to 0 \quad x \to a$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{D}(a)$ és $f'(a) = A \quad \blacksquare$

Definíció: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontban van érintője, ha $f \in \mathcal{D}(a)$. Az érintő meredeksége $f'(a)$, egyenlete: $l(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

Tétel: Deriválhatóság és folytonosság kapcsolata

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f$, ekkor

i, $f \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow f \in C(a)$

ii, $\not\Leftarrow$

Bizonyítás:

i, $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \to 0 \quad x \to a$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow f \in C(a)$, hiszen $a \in int\mathcal{D}_f \Rightarrow a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$

ii, $f(x) = |x| \quad f \in C(a)$ de $f \notin \mathcal{D}(a) \quad \blacksquare$

Definíció: Legyen $A := \{a \in int\mathcal{D}_f, f \in \mathcal{D}(a)\}$ és $f' : A \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a)$

Ekkor az f' függvényt az f derivált függvényének nevezzük.

Pl: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

1. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$
2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $f(x) = |x| \Rightarrow f \notin \mathcal{D}(0)$
4. $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
6. $\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

Tétel: (Algebrai műveletek deriváltakkal)

Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor:

i, $f + g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $\lambda f \in \mathcal{D}(a)$ és $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

iii, $f \cdot g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

iv, Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(a)$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{(f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a))}{g^2(a)}$

Bizonyítás:

i, $a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) = int\mathcal{D}_{f+g}$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

$\Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $$\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lambda \cdot f'(a)$$

iii, $$\lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(a) + g(x) \cdot f(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad (x \to a)$$

$\Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

iv, Először igazoljuk, hogy $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \underbrace{(-\frac{1}{g(x) \cdot g(a)})}_{\to \frac{-1}{g^2(a)}} \cdot \underbrace{(\frac{g(x) - g(a)}{x-a})}_{\to g'(a)} \longrightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad (x \to a)$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})'(a) = (f \cdot \frac{1}{g})'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot (\frac{1}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \quad \blacksquare$$

Megj: **i,** $P(x) = Q_n \cdot x^n + Q_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + Q_1 \cdot x + Q_0$

$\Rightarrow P'(x) = n \cdot Q_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot Q_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + Q_1$

ii, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ is deriválható, ha $Q(a) \neq 0$

iii, $(tg)'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2(x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad$ ha $\cos x \neq 0$

Tétel: Összetett függvény deriváltja

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R_g \subset D_f, g \in \mathcal{D}(a), f \in \mathcal{D}(g(a))$, ekkor

$f \circ g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Bizonyítás:

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow a \in int\mathcal{D}_g \Rightarrow int\mathcal{D}_{f\circ g}$

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{a} \varepsilon_1 = 0$ és $g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \quad (x \in D_f)$

$f \in \mathcal{D}(g(a)) \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0$ és $f(y) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (y - g(a)) + \varepsilon_2(y) \cdot (y - g(a))$

Legyen $y = g(x)$

$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (g(x) - g(a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) =$

$= f'(g(a)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) =$

$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot (x-a) + (x-a) \cdot \underbrace{(f'(g(a)) \cdot \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot g'(a) + \varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(g(x)))}_{\varepsilon(x)}$

$\varepsilon_1 \to 0, \quad (x \to a)$

$g(x) \to g(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(g(x)) = \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a} \varepsilon = 0$

$\Rightarrow (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad \blacksquare$

Pl:$h(x) = (3x^2 + 2x + c)^{2017}$

$f(u) = u^{2017}, \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 6$

$\Rightarrow h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2017 \cdot (3x^2 + 2x + 6)^{2016} \cdot (6x + 2)$

Inverz függvény deriváltja

Tétel: Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, szig. mon. növő és folytonos függvény.
Ha $\xi \in (a,b), f \in \mathcal{D}(\xi)$ és $f'(\xi) \neq 0$, akkor
$(f^{-1}) \in \mathcal{D}(\eta)$ és $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$, ahol $\eta = f(\xi)$

Bizonyítás: $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow R_f$ intervallum.

f szig. mon. növő $\Rightarrow R_f$ nyílt intervallum $\Rightarrow \eta \in intR_f \qquad f^{-1} : R_f \to D_f$

$$\lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (x \to \xi)$$

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \xi = f^{-1}(\eta)$

Ui. $x \to \xi$, mert $y \to \eta$: $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos $\Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta)$
$\Rightarrow x \to \xi$

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} = \frac{1}{f'(\xi)} \quad \blacksquare$$