1. és 2. gyakorlat

Függvények határértéke

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ *sugarú környezetét.*
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
- Írja le a *hatványsor* definícióját.
- Definiálja az exp függvényt.
- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

■ Feladatok

1. Legyen f valós-valós függvény. Fogalmazza meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat:

(a) $\lim_{-2} f = 7$, (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

2. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

M. Kritikus határértékek vizsgálata. Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben” alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó (igen általános!) tételünket. Ezek az eredmények akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli $A+B, AB, A/B$ műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs értelmezve, akkor a megfelelő függvények határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a **kritikus határértékeket** röviden a

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékké átalakítani.

3. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \qquad (m,n = 1,2,\ldots)$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$, (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$.

4. A „gyöktelenítés technikájával” határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n=2,3,\ldots)$.

5. A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

6. A hatványsorokra vonatkozó ismeretek alkalmazásával határozza meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$.

■ Gyakorló feladatok

1. A definíció alapján lássa be, hogy

(a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\infty & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots; \end{cases}$

(d) minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n}$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(f) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ = +\infty & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^3 - 1} \right)$,

(b) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{n}{1 - x^n} - \dfrac{m}{1 - x^m} \right) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$,

(c) $\lim_{x \to 0} x \left[\dfrac{1}{x} \right]$, ahol $[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli,

(d) $\lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$,

(e) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ $(m, n = 2, 3, \ldots)$, (f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - 1}$,

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

3. Polinom határértéke. Legyen $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *polinom*, ahol $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \neq 0$. Mutassa meg, hogy

(a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$,

(b) $\lim_{x \to +\infty} p(x) = \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$,

(c) $\lim_{x \to -\infty} p(x) = (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$.

M. A (b) és (c) állítások tehát azt jelentik, hogy polinomok „viselkedését” a plusz/mínusz végtelen környezetében a polinom főtagja (az $\alpha_n x^n$ tag, illetve még pontosabban az α_n főegyüttható előjele és n paritása) határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik a főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

4. Racionális törtfüggvények határértéke. Legyen p és q polinom, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vizsgáljuk a következő határértéket:

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

A lehetséges esetek: $a = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$; $q(a) \neq 0$, $q(a) = 0$; egyoldali határértékek.

5. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) \right) = 0$?

6. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \{x\}$, ahol $\{x\} := x - [x]$ az x valós szám tört része,

(b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - \{x\}$,

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(e) **Riemann-függvény:**

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (p,q) = 1, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(itt (p, q) jelöli a p és q számok legnagyobb közös osztóját).