# Analízis 2.

## 9. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

**Tétel:** Tfh. $f:(a,b)\to\mathbb{R}, f\in\mathcal{D}^{(n)}(c), c\in(a,b)$

$f'(c)=0=f''(c)=...=f^{(n-1)}(c),\quad f^{(n)}(c)\neq 0$ Ekkor:

**i,** $c$-ben lokális szélső értéke van $\Leftrightarrow n$ páros

**ii,** Ha $f$ $n$-szer folytonosan deriválható, akkor $c$-ben inflexiós pont van $\Leftrightarrow n$ páratlan.

Bizonyítás nélkül.

## Integrált

2 féle integrált lehet:

- Határozatlan integrált (primitív függvény)
- Határozott integrált

Határozatlan integrált

Kérdés: $f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}$ intervallum, ekkor $\exists$-e: $F:I\to\mathbb{R}, F'=f$

**Pl:** $f(x)=x^4+x^2,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+c,\quad c\in\mathbb{R}$

Megj: A függvények mindig intervallumon vannak értelmezve.

**Definíció:** $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$

Az $F:I\to\mathbb{R}$ függvény az $f$ primitív függvénye, ha $F\in\mathcal{D}(I)$ és $F'(x)=f(x),\quad\forall x\in I$

Kérdések:

- $\exists$-e primitív függvény?
- Ha igen, akkor hány $\exists$?
- Primitív függvény meghatározása

**Tétel:** (Szükséges feltétel)

Ha $I$ intervallum, és $f:I\to\mathbb{R}$ függvénynek $\exists$ primitív függvénye, akkor $f$ Darboux tulajdonságú, azaz $\forall a,b\in I, a<b, \forall c\in(f(a),f(b)), \exists\xi\in(a,b): f(\xi)=c$

Bizonyítás: Tfh. $f(a)<f(b)$, legyen $f_1=f-c$, $f_1$-nek is $\exists$ primitív függvénye, mégpedig $F_1(x)=F(x)-cx$, ahol $F$ az $f$ primitív függvénye, hiszen $F_1'(x)=F'(x)-c=f(x)-c=f_1(x)$

Ekkor: $F_1'(a)=f_1(a)=f(a)-c<0$

$F_1'(b)=f_1(b)=f(b)-c>0$

$\Rightarrow F_1'(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{F_1(x)-F_1(a)}{x-a}=f_1(a)<0\quad\Rightarrow\quad\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta):\frac{F_1(x)-F_1(a)}{x-a}<0$

itt $x-a>0\Rightarrow\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta): F_1(x)<F_1(a)$

$F_1'(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b}=f_1(b)>0\quad\Rightarrow\quad\exists\delta>0,\forall x\in(b-\delta,b):\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b}>0$

$x-b<0\Rightarrow\exists\delta>0,\forall x\in(b-\delta,b): F_1(x)<F_1(b)\quad\Rightarrow F_1\in\mathcal{D}(I)\Rightarrow F_1\in C[a,b]$

A Weierstrass-tétel miatt $F_1$-nek $\exists$ abszolút minimuma, azaz $\exists\xi\in[a,b]: F_1(\xi)=\min\limits_{[a,b]}F_1$

$\xi\neq a,\xi\neq b\Rightarrow\xi\in(a,b)\Rightarrow\xi$-ben lokális minimum $\Rightarrow F_1'(\xi)=0\Rightarrow f_1(\xi)=f(\xi)-c=0\quad\blacksquare$

**Pl:** $f(x)=signx\quad\nexists$ primitív függvény, mert nem Darboux tulajdonságú

**Tétel:** (Elégséges feltétel)

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists$ primitív függvény

Bizonyítás később

**Tétel:** (Primitív függvények száma) $\quad f : I \to \mathbb{R}$

**i,** Ha $F$ primitív függvény, akkor $F + c$ is az, ahol $c \in \mathbb{R}$

**ii,** Ha $F_1$ és $F_2$ is primitív függvény, akkor $\exists c \in \mathbb{R} : F_1 = F_2 + c$

Bizonyítás: **i,** $(F + c)' = F' = f$

**ii,** $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \quad I\text{-n} \quad \Rightarrow F_1 - F_2 = c \quad c \in \mathbb{R}$ ■

**Definíció:** Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye $F$, akkor legyen:

$$\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Neve határozatlan integrál

Egyszerűsített jelölés: $\int f = F + c \quad c \in \mathbb{R}$ vagy $\int f(x)dx = F(x) + c$

**Pl: i,** $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c \quad x \in \mathbb{R}$

**ii,** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \quad x \in \mathbb{R}$

**iii,** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**Definíció:** $\int\limits_{x_0} f$ jelöli azt az egyetlen $F$ primitív függvényt, amelyre $F(x_0) = 0$

Neve: $x_0$-ban eltűnő primitív függvény

**Pl:** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x - 1$

Primitív függvények meghatározása

**Pl: i,** $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, x > 0$

**ii,**

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + c : & x > 0 \\ \ln|x| + c \quad : & x < 0 \end{cases}$$

**Tétel:** (Műveletek) $\quad f, g : I \to \mathbb{R}$

$\exists \int f, \int g \quad$ Ekkor

$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$

$\int\limits_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_{x_0} f + \beta \int\limits_{x_0} g \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bizonyítás: elég a másodikat, legyen a jobb oldal $H$

Ekkor $H(x_0) = 0, \quad H' = \alpha f + \beta g \Rightarrow H$ egyenlő a baloldallal is ■

**Pl:** polinom: $\int a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c$

**Tétel:** (Hatványsor)

A $\sum \alpha_n (x - a)^n, x \in K_R(a), R > 0$, hatványsor primitív függvénye:

$\sum\limits_{n=0} \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c, \quad x \in K_R(a)$

Bizonyítás nélkül (a hatványsor deriválhatóságából kijön)

**Tétel:** (Parciális integrálás) Tfh. $f, g : I \to \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{D}(I)$

Ha $\exists f' \cdot g$ primitív függvénye, akkor $\exists f \cdot g'$ primitív függvénye, és

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$ és $\int\limits_{x_0} f \cdot g' = f \cdot g - f(x_0) \cdot g(x_0) - \int\limits_{x_0} f' \cdot g$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$

$\Rightarrow H(x_0) = 0$ és $H' = (f \cdot g)' - (\int\limits_{x_0} f' \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f' \cdot g = f \cdot g' \Rightarrow H$ a baloldal is $\blacksquare$

Megj: $\int\limits_{x_0} f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) - \int\limits_{x_0} f'(x) \cdot g(x)dx$

**Pl: i,** $f = x \quad g' = e^x \quad g(x) = e^x$

$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

**ii,** $\int \ln x dx = \int \ln 1 \cdot x dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - x + c \quad x > 0$

**Tétel:** (1. helyettesítéses szabály)

$g : I \to J, g \in \mathcal{D}(I), f : J \to \mathbb{R}, I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum

Ha $\exists f$-nek primitív függvénye, akkor

$\int f \circ g \cdot g' = (\int f) \circ g$ és

$\int\limits_{t_0} f \circ g \cdot g' = (\int\limits_{g(t_0)} f) \circ g$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$

$\Rightarrow H(t_0) = (\int\limits_{g(t_0)} f) \circ g(t_0) = 0$ és $H' = (\int\limits_{g(t_0)} f)' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g' \Rightarrow H$ a bal oldal is. $\blacksquare$

**Pl: i,** $\int x(1 + x^2)^{2017} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1 + x^2)^{2017} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{2018}}{2018} + c$

$g(x) = 1 + x^2 \qquad f(u) = u^{2017} \qquad \int f = \frac{u^{2018}}{2018}$

**ii,** $\int \frac{g'}{g} = \ln g + c, \quad g > 0$

$f(u) = \frac{1}{u}, \quad f \circ g \cdot g' = \frac{1}{g} \cdot g'$

**iii,** $\int g^\alpha \cdot g' dx = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$

$f(u) = u^\alpha \qquad f \circ g \cdot g' = g^\alpha \cdot g'$

**Tétel:** (2. helyettesítéses szabály)

Tfh. $g : I \to J$ bijekció, $g \in \mathcal{D}(I), \quad g'(x) \neq 0, \quad x \in I, \quad f : I \to J$

Ha $\exists f \circ g \cdot g'$ primitív függvény, ekkor:

$\int f = (\int f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$ és $\int\limits_{x_0} f = (\int\limits_{x_0} f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$, azaz:

$H(x) = (\int\limits_{x_0} f \circ g \cdot g') \circ (g^{-1}(x)) \Rightarrow H(x_0) = 0$ és $H'(x) = (\int f \circ g \cdot g')' \cdot (g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) =$

$= (f \circ g \cdot g') \cdot (g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f \circ g(g^{-1}(x)) \cdot \cancel{g'(g^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1}(x))}} = f(x) \Rightarrow H$ a bal oldal is $\blacksquare$

Megj: $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)}$

**Pl:** $\int \sqrt{1 - x^2} dx \quad x \in (-1,1) \quad x = \sin t$

$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 t}}_{\cos t} \cdot \cos t dt|_{t=\arcsin x}$