Analízis II.

Előadás jegyzet

7. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. október 24.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Információ.

Fontos, hogy azt kell követni ami le van írva, nem feltétlenül elég ami ea-n el van mondva.

2. Konvex és konkáv függvények.

2.0.1. Megjegyzés. Intervallumon értelmezett függvényekre. $I \subset \mathbb{R}$ int.; pl.: $(-1,1)$; $[-1,1)$; $(0,+\infty)$

Szemléletesen: $f \nearrow$ lehet

1. ábra

Jellemzés:

2.0.2. Megjegyzés. Teljesen lehetetlen mindent lerajzolni. A lényeg az, hogy **húrokkal** jellemezzük ezeket a függvényeket. Konvex függvényeknél minden függvényérték a húr alatt, konkávnál a húr felett lesznek.

A húregyenes egyenlete: $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

2.0.3. Definíció. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, f függvény **konvex I intervallumon**, ha

$$\forall a,b \in I, \quad a<b: \quad f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \quad (\forall x \in (a,b))$$

2.0.4. Megjegyzés. Szigorúan konv, ha $\leq$ helyet $<$ van, konvex ha $\leq$ helyett $\geq$ van, és szigorúan konvex ha $>$ van.

2.0.5. Tétel. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow$

$$\forall a,b \in I, \quad a<b \quad \text{és} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f(\lambda a + (1+\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Bizonyítás: Ha $a<b$ és $0<\lambda<1 \quad \Rightarrow$

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a,b),$$

Ugyanis

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b = x < \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

Fordítva: $x \in (a,b)$, legyen

$$\lambda := \frac{b-x}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-x}{b-a}\cdot a + \left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)\cdot b = x\checkmark$$

A konvexitás definíciója $\Leftrightarrow \quad a<b, \quad \lambda \in (0,1)$

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a,b)$$

$$f(x) = f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)-a\Big)+f(a) =$$

$$= \big(f(b)-f(a)\big)(1-\lambda)+f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \quad \blacksquare$$

2.0.6. Tétel. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvec I-n $\Leftrightarrow$

$$\forall c \in I : \quad \Delta_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x \in I \setminus \{c\})$$

$fv \nearrow$
Bizonyítás: Csak szóbelin, honlapon található. ■

2.0.7. Megjegyzés. Konkávra hasonló.

2.0.8. Megjegyzés. folytonosság fogalmának és a derivált fogalmának köztüs fogalma a konvexitás.

2.0.9. Tétel. Ha $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ konvex, (α, β)-n $\Rightarrow$

1. $\forall c \in (\alpha, \beta) : \quad f \in C\{c\};$
2. $\forall c \in (\alpha, \beta) : \quad \exists f'_+(c) \quad \text{és} \quad \exists f'_-(c)$

Bizonyítás: csak szóbelin.

2.0.10. Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in F(\alpha, \beta)$

1. f konvex $\Leftrightarrow$ $f' \nearrow (\alpha, \beta)$-n
2. f konkáv $\Leftrightarrow$ $f' \searrow (\alpha, \beta)$-n

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Legyen $a, b, \quad \alpha < a < b < \beta$.

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \big(x \in (\alpha, \beta) \setminus \{a\}\big) \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad x < b, \quad x \neq a : \quad \Delta_a f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Mivel $f'(a) = \lim_{x \to a} \Delta_a f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Hasonlóan:

$$\Delta_b f(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \nearrow$$

$$\Rightarrow \forall x > a, \quad x \neq b : \quad \Delta_b f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(b) = \lim_b \Delta_b f \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$a < b$

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

$\Rightarrow f' \nearrow$
$\boxed{\Leftarrow}$ (Lagrange k.ét) Legyen $a, b, x : \quad \alpha < a < x < b < \beta$ $[a, x]$-n $\quad \Rightarrow \quad \exists \xi_1 \in (a, x) :$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$[x, b]$-re $\quad \exists \xi_2 \in (x, b) :$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

$\xi_2 < \xi_2, \quad f \nearrow: \quad f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Átrendezve: $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad f$ konvex. ■

2.0.11. Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha, \beta)$

1. f konvex (α, β)-n $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0 \quad (\alpha, \beta)$-n.

2. f konkáv (α,β)-n $\quad\Leftrightarrow\quad f''\leq 0 \quad (\alpha,\beta)$-n.

2.0.12. Tétel. Tegyük fel, hogy $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} f\in D(\alpha,\beta)\\ f \text{ konvex } (\alpha,\beta)\text{-n}\end{array}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{c}\forall c\in(\alpha,\beta)\\ f(x)\geq f'(c)(x-c)+f(c)\quad (\forall c\in(\alpha,\beta))\end{array}$$

Bizonyítás nélkül.

2.0.13. Definíció. Tegyük fel, hogy $f\in D(\alpha,\beta)$. A $c\in(\alpha,\beta)$ az f függvény **inflexiós pontja**, ha

$$\exists\delta>0:\quad f\quad \text{konvex}\quad (c-\delta,c]\text{-n}$$

$$\exists\delta>0:\quad f\quad \text{konkáv}\quad [c-\delta,c)\text{-n}$$

vagy fordítva.

2.0.14. Tétel. (Szükséges feltétel az inflexiós pontra.)

$$\left.\begin{array}{r}\text{Tegyük fel, hogy } f\in D^2(\alpha,\beta)\\ c\in(\alpha,\beta) \text{ infációs pontja } f\text{-nek}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad f''(c)=0.$$

2.0.15. Tétel. Tegyük fel, hogy $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}; n\in\mathbb{N}$ és $c\in(\alpha,\beta)$ pontban:

$$f'(c)=f''(c)=f'''(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0\quad \text{és}\quad f^{(n)}(c)\neq 0$$

Ekkor:

1. c lokális szélső érték hely $\quad\Leftrightarrow\quad n$ páros.
2. c inflációs pont $\quad\Leftrightarrow\quad n$ páratlan.

2.0.16. Megjegyzés. Lehet, hogy nem alkalmazható:

$$f(x):=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Igazolható:

$$f^{(n)}(0)=0(\forall n\in N)\quad\blacksquare$$

2.0.17. Definíció. Az $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ függvénynek van **aszimptotája** $(+\infty)$-ben:

$$\exists l(x):=Ax+B\quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-l(x))=0$$

l : az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

2.0.18. Megjegyzés. $(-\infty)$-ben hasonló.

2.0.19. Tétel. Az $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ függvénynek $(+\infty)$-ben, van aszimptotája $\quad\Leftrightarrow$ léteznek és végesek:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=:A\in\mathbb{R};\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)=:B\in\mathbb{R}$$

Ekkor $l(x)=Ax-B\quad (x\in\mathbb{R})$ egyenes f aszimptotája $(+\infty)$-ben.

3. Teljes függvény vizsgálat.

1. lépés: Kezdeti lépések (deriválás, paritás,...) (RÖVIDEN)
2. lépés: Monoton intervallumok
3. lépés: Lokális szélső értékeke vizsgálata $\begin{cases}\text{szükséges}\\ \text{elégséges}\begin{cases}\text{elsőrendű}\\ \text{másodrendű}\end{cases}\end{cases}$
4. lépés: Konvecitási intervallum
5. lépés: Határértékek vizsgálata: $\mathcal{D}'_{\{}\setminus\mathcal{D}_{\{}$
6. lépés: aszimptota
7. lépés: ábrázolás

3.0.1. Megjegyzés. Gyakon lesz bemutatva.

3.1. Trigonometrikus függvényekről.

3.1.1. Emlékeztető. Középiskolai definíció, anal1-es definíció.

3.1.2. Definíció. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus, ha

$$\exists > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad x \pm p \in \mathcal{D}_f \quad \text{és} \quad f(x+p) = f(x).$$

p: az f periódusa.

3.1.3. Megjegyzés. Trivi: ha $p > 0$ periódus $\quad\Rightarrow\quad \forall k = 2{,}3, \ldots \quad k \cdot p$ is periódus.

Legkisebb pozitív periódus nem feltétlen van. Pl.: $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}^* \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \forall$ racionális szám periódusa.