8. előadás

2016. november 7.

ELEMI FÜGGVÉNYEK

Trigonometrikus függvények

• Előzetes megjegyzések a trigonometrikus függvényekről

A trigonometrikus függvényeket más szóval szögfüggvényeknek is nevezik, mert szögekhez, pontosabban szögek mérőszámaihoz rendelnek valós számokat.

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket érdemes felidézni és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerpelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése" vagy a *körív hossza.* A π **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3,14$.

Az Analízis 1-ben a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** bizonyos hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos" sin és cos szimbólumokat. ■

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő:

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***periodikus****, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és*

$$f(x+p) = f(x).$$

A p számot f ***periódusának****, az f függvényt pedig p* ***szerint priodikus*** *függvénynek nevezzük.*

Megjegyzés. Ha az f függvény p szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+kp) = f(x).$$

Vagyis, ha p az f függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén kp is periódusa f-nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb (pozitív) periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb. ■

• A sin és a cos függvény

Megjegyzés. A **szinusz-** és a **koszinuszfüggvénnyt** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban (többek között az Analízis 1-ben) már megismertünk:

1º A sin függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,
a cos függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

2º Addíciós képletek: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3º Négyzetes összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4º A sin és a cos függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és $\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin$. ■

Most a sin és a cos függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a π **számot.**

Tétel. *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* ξ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* ξ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** π ***számot:***

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \dots = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right) - \dots <$$
$$< \text{(a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak)} < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\, \xi \in [0,2]$: $\cos\xi = 0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos \downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots > 0 \quad \big(x \in (0,2)\big)$$

egyenlőtlenség következménye. ■

Megjegyzések.

1^o A Bolzano-tétel bizonyításánal alkalmazott *Bolzano-féle felezési eljárással* π közelítő értékei meghatározhatók.

2^o Igazolható, hogy π **irracionális** és **transzcendens** szám.

3^o Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például:

$$\sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\pi = -1, \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

4^o Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és megmutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete 2π. Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált π szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert π számmal. ■

A sin és a cos függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(1) \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. *A* sin *és a* cos *függvény* 2π *szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és 2π *mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa.*

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Most a sin és a cos függvény „alaki” tulajdonságait tanulmányozzuk. A periodicitást, valamint a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég egy π hosszú intervallumon elvégezni. Legyen ez az intervallum $[0,\pi]$.

Az (1) azonosságok alapján egyszerűen igazolható

$$\cos x>0\ \big(x\in(0,\tfrac{\pi}{2})\big) \quad \cos x<0\ \big(x\in\big(\tfrac{\pi}{2},\pi\big)\big) \quad \text{és} \quad \sin x>0\ (x\in(0,\pi))$$

egyenlőtlenségeket, a deriváltakra vonatkozó már ismert

$$\sin' x=\cos x,\ \cos' x=-\sin x,\ \sin'' x=-\sin x,\ \cos'' x=-\cos x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

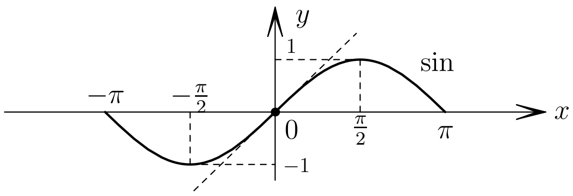
képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás-konkávitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a következő állításokat.

Tétel.

1^o sin $\uparrow$ $[0,\frac{\pi}{2}]$*-en,* $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2},\pi]$*-n és szigorúan konkáv* $[0,\pi]$*-n.*

2^o cos $\downarrow$ $[0,\pi]$*-n, szigorúan konkáv* $[0,\frac{\pi}{2}]$*-en és szigorúan konvex* $[\frac{\pi}{2},\pi]$*-n.*

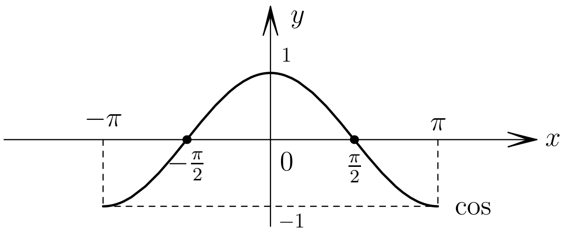
A sin függvény *páratlan*, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a sin függvény grafikonját a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A sin **függvény**

- $\downarrow$ $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$-en, $\uparrow$ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$-en és $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi,0]$-n és szigorúan konkáv $[0,\pi]$-n,
- 0 inflexiós pont.

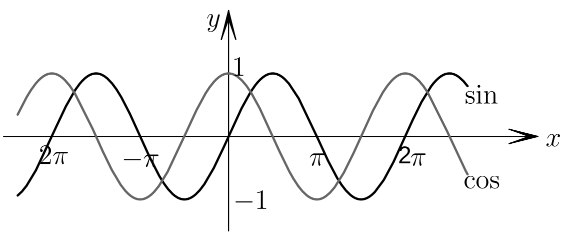
A cos függvény *páros*, ezért a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A cos **függvény**

- $\uparrow$ $[-\pi,0]$-n és $\downarrow$ $[0,\pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n,
- $\pm\frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.

Az alábbi ábrán a sin és a cos függvény grafikonjait szemléltetjük:



Az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény **zérushelyeire** vonatkozó alábbi állítások:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),\\ \cos x=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}}$$

• A tg és a ctg függvény

A tg függvény korábbi értelmezésénél még nem tudtuk jellemezni a cos függvény zérushelyeit. Ezek ismeretében a **tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k\pi \in \mathbb{Z}\}\big)}\,.$$

A tg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en megállapítani. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{tg} \in D^\infty\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, és például

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}'' x = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

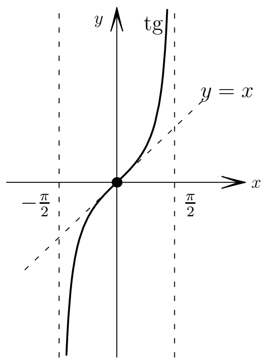
Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm\frac{\pi}{2}$ pont körüli viselkedését. Mivel

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \text{és}$$
$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{továbbá} \quad \cos x > 0, \text{ ha } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty\,.$$

A tg függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A tg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- szigorúan konkáv $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$-n,
  szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ és $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

A **kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k\pi \in \mathbb{Z}\})}\,.$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

(2) $$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})\,.$$

A ctg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0, \pi)$-n megvizsgálni. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{ctg} \in D^\infty(0, \pi)$, és például

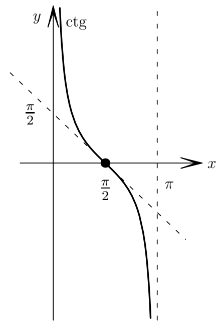
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}'' x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \qquad \big(x \in (0, \pi)\big),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

A ctg függvény 0 és π pont körüli viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty\,.$$

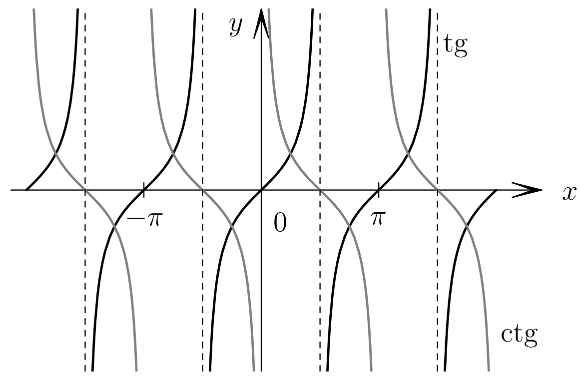
A ctg függvény grafikonja a $(0, \pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A ctg **függvény**

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow$ $(0, \pi)$-n,
- szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
  szigorúan konkáv $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$-n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

Az alábbi ábrán a tg és a ctg függvények grafikonjait szemléltetjük:



Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

Megjegyzés. A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmas intervallumra vonatkozó leszűkítéseik, amelyeken a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket **arkuszfüggvényeknek** nevezzük. (Az *arcus* szó — latinul ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.) ■

Definíció. *A szigorúan monoton*

$$\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}, \quad \cos_{|\,[0,\pi]}, \quad \operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}, \quad \operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}$$

*függvények inverzeit rendre **arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz, arkusztangens-, arkuszkotangens-függvényeknek** nevezzük és így jelöljük:*

$$\operatorname{arc\,sin} := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,cos} := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordinátarendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következésképpen mindegyik arkuszfüggvény garikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az arc sin **függvény** definíciójából következik, hogy tetszőleges $x \in [-1,1]$ esetén arc sin x az a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x-szel egyenlő, azaz

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \text{arc sin}\, x & = \quad y & \iff & \sin y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & \big(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\big) & & \end{array}}$$

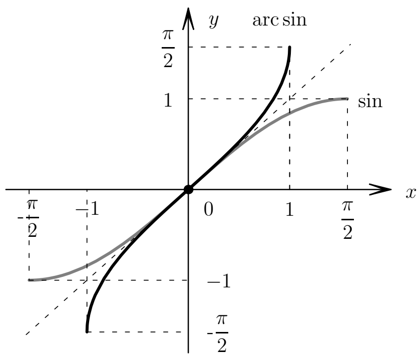
Az arc sin függvény *folytonos* $[-1,1]$*-en* (l. az „inverz függvény folytonosságára” vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1,1]$, azaz $y = \text{arc sin}\, x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért minden $x \in (-1,1)$ esetén arc sin $\in D\{x\}$ és

$$\text{arc sin}' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

azaz

(3)
$$\boxed{\text{arc sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc sin függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc sin **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc sin}} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\text{arc sin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1,1]$-en,
- deriválható $(-1,1)$-en, és

$\text{arc sin}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)$,

- $\uparrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konkáv $[-1,0]$-n, szigorúan konvex $[0,1]$-en,
- 0 inflexiós pont.

Az arc cos **függvény** definíciójából következik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \text{arc cos}\, x & = \quad y & \iff & \cos y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & (y \in [0,\pi]) & & \end{array}}$$

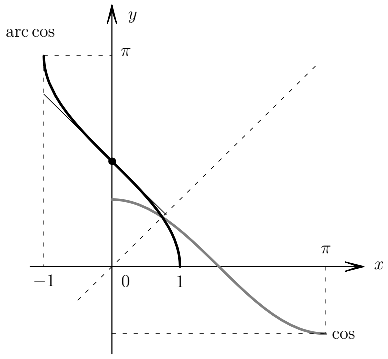
Az (1) azonosságok felhasználásával igazolható, hogy

(4)
$$\boxed{\text{arc sin}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} \quad \big(x \in [-1,1]\big)}.$$

Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az arc cos függvény *folytonos* $[-1,1]$*-en.* A (4) és a (3) képletekből pedig az következik, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén arc cos $\in D\{x\}$ és

$$\boxed{\text{arc cos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc cos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc cos **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc cos}} = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_{\text{arc cos}} = [0, \pi]$,
- folytonos $[-1, 1]$-en,
- deriválható $(-1, 1)$-en, és

$\text{arc cos}'x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$,

- $\downarrow$ $[-1, 1]$-en,
- szigorúan konvex $[-1, 0]$-n, szigorúan konkáv $[0, 1]$-en,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont.

Az arc tg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc tg} \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{arc tg}\, x \;= & y & \iff & \text{tg}\, y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & \big(y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\big) & & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arc tg}\, x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{arc tg}\, x = +\frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az arc tg függvény aszimptotája a $(-\infty)$-ben (illetve a $(+\infty)$-ben).

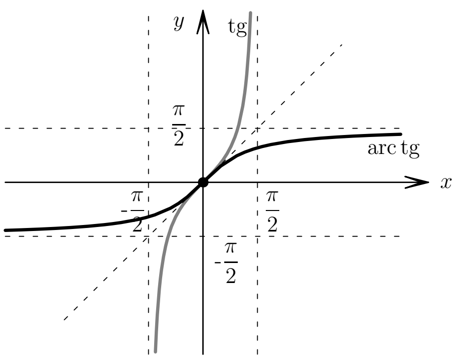
Mivel minden $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\text{tg}'y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \text{tg}\, y \in \mathbb{R}$ pontban az arc tg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\text{arc tg}'x = \frac{1}{\text{tg}'y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

azaz

$$\boxed{\text{arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc tg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc tg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$\text{arc tg}'x = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szogorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$-ben.

Az arc ctg **függvény** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{arc ctg}\, x \;= & y & \iff & \text{ctg}\, y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & (y \in (0, \pi)) & & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = 0$ (illetve az $y = \pi$) egyenletű egyenes az arc ctg függvény aszimptotája $(-\infty)$-ben (illetve $(+\infty)$-ben).

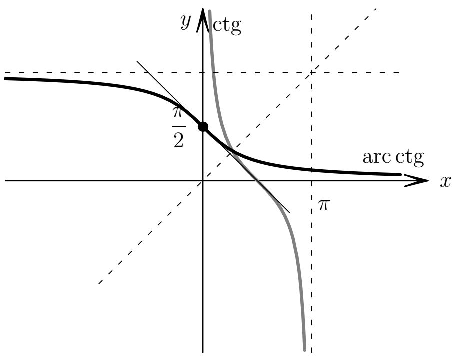
A (2) azonosságból következik, hogy az arc tg és az arc ctg függvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R})},$$

ezért arc ctg $\in D(\mathbb{R})$, és

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Most szemléltetjük az arc ctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az arc ctg **függvény**

- $\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = (0, \pi)$,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$\operatorname{arc\,ctg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

- $\downarrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = 0$ aszimptota a $(-\infty)$-ben,
- $y = \pi$ aszimptota a $(+\infty)$-ben.

Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

Emlékeztetünk arra, hogy a **szinuszhiberbolikusz-** és a **koszinuszhiberbolikusz-függvényt** az egész $\mathbb{R}$-en konergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\operatorname{sh} x : = \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x : = \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

$$(5) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (5) formulák, valamint az

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

alapvető képlet felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1° A sh *páratlan*, a ch pedig *páros* függvény.

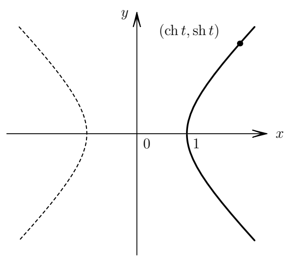
2° *Addíciós képletek*:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

3° *Négyzetes összefüggés*:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:



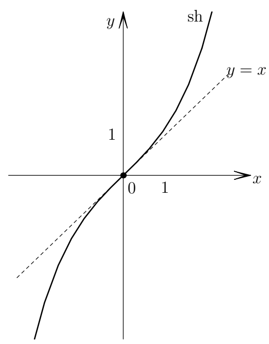
Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $(x, y) = (\operatorname{ch}t, \operatorname{sh}t)$ síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző. ■

4° A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzése nélkül felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

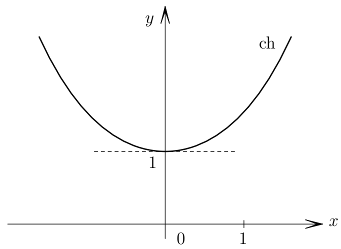
A sh függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x \geq 1 > 0$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$,
  $\operatorname{sh}'0 = \operatorname{ch}0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont.



A ch függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$,
  $\operatorname{ch}'0 = \operatorname{sh}0 = 0$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n, $\uparrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.



Megjegyzés. A ch függvény képét **láncgörbének** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel. ■

A **tangenshiperbolikusz-** és a **kotengenshiperbolikusz-függvényeket** a tg és a ctg függvények mintájára korábban már bevezettük:

$$\operatorname{th}x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} \ \big(x \in \mathbb{R}\big), \qquad \operatorname{cth}x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

(A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $\operatorname{ch}x \neq 0$, és $\operatorname{sh}x = 0 \iff x = 0$.)

Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaikat elég a $(0, +\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th}$, a $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{cth}$ és a $\lim\limits_{0+0} \operatorname{cth}$ határértékeket. Mivel

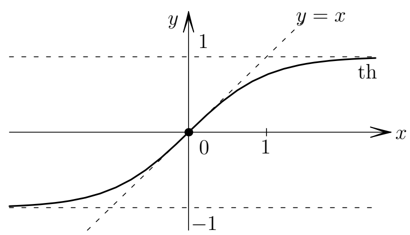
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \overset{(5)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{sh} x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty.$$

A th **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{th}} = (-1, 1)$,
- páratlan függvény,
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és $\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$, $\operatorname{th}' 0 = 1$,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



A cth **függvény**

- $\mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{cth}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
- páratlan függvény,
- deriválható, és $\operatorname{cth}' x = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.