# 1. előadás

2016. szeptember 12.

## Az előadó:

Szili László (déli épület 2.309 szoba)

## A tantárgy honlapja:

http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

## A honlapon van:

- a követelményrendszer,
- tervezett zh időpontok,
- gyakorlatanyagok,
- segédanyagok.

## A követelményrendszer:

- Az előadásokon és a gyakorlatokon a részvétel kötelező.
- A gyakorlatokon heti rendszeres számonkérés lesz.
- Megajánlott vizsgajegyet lehet szerezni.

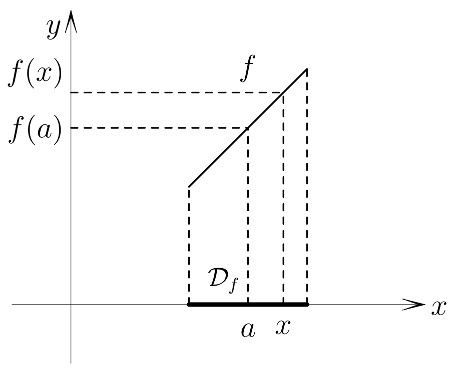
A részletes követelményrendszer a honlapon megtalálható.

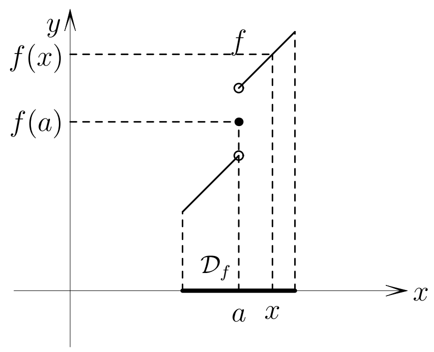
## Irodalom:


- Lackovich Miklós–T. Sós Vera: *ANALÍZIS I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2005.
- Leindler László–Schipp Ferenc: *ANALÍZIS I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
- Schipp Ferenc: *Analízis II., Folytonosság, differenciálhatóság*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1996.
- Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe I.*, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.


# FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

**A folytonosság szemléletes jelentése.** A „folytonos” kifejezést a mindennapi életben gyakran használjuk. Most függvényekre értelmezzük ezt a fogalmat. Motivációként tekintsük a következő két függvényt:




A jobb oldali $f$ függvénynél: „ha $x$ közel van $a$-hoz (jelben $x \sim a$), akkor $f(x)$ nincs közel $f(a)$-hoz”. A függvénynek ezt a tulajdonságát úgy fejezzük ki, hogy az $f$ függvény *nem folytonos* az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.

A bal oldali függvénynél: minden $a \in \mathcal{D}_f$ pontban igaz az, hogy „ha $x \sim a$, akkor $f(x) \sim f(a)$”. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *folytonos* az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban. ∎

**Megjegyzés.** Hasonló problémával találkoztunk függvény *végesben vett véges* határértékénél. Ott azt a szemléletes tartalmat fogalmaztuk meg pontosan, hogy ha $f$ egy valós-valós függvény, akkor az „$a \in \mathbb{R}$ ponthoz közeli $x$ helyeken az $f(x)$ függvényértékek közel vannak az $A \in \mathbb{R}$ számhoz” (röviden: „ha $x \sim a \implies f(x) \sim A$”).

Emlékeztetünk a definícióra:

$$\text{Ha } a, A \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathcal{D}'_f,\ \text{akkor}$$

$$\lim_a f = A \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ 0 < |x-a| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \end{cases} \quad \blacksquare$$

## Pontbeli folytonosság

**Definíció.** *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$* ***pontban folytonos****, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \quad \textit{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

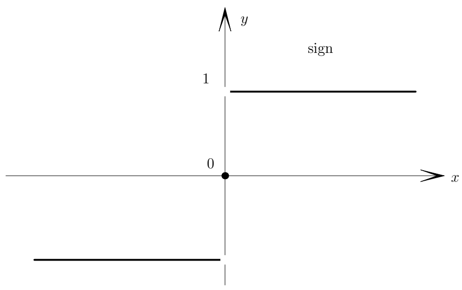
*Jelölése:* $f \in C\{a\}$.

**Megjegyzések.**
$1^o$ Függvény folytonosságát csak az **értelmezési tartományának** pontjaiban értelmezzük.
$2^o$ Gondoljuk meg, hogy a fenti definíció egy függvénynek valóban azt a szemléletes tulajdonságát írja le pontosan, hogy „ha $x \sim a \Longrightarrow f(x) \sim f(a)$”. $\blacksquare$

Kezdjük néhány egyszerű példával!

**1. példa. Az előjel-függvény:**

$f(x) := \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$




A definíció alapján igazoljuk, hogy ez a függvény *NEM folytonos* az $a = 0$ pontban:

$$f \notin C\{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0,\ \text{hogy } \forall\, \delta > 0\text{-hoz } \exists\, |x| < \delta: \quad |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

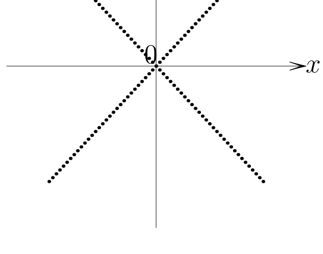
Legyen (például) $\varepsilon = 1/2$. Ekkor $\forall\, \delta > 0$ szám és $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont esetén

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = 1 > 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad f \notin C\{0\}.$$

A függvény minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban viszont *folytonos*, mert (például) egy rögzített $a > 0$ pontban minden $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = a$ egy(!) megfelelő $\delta$. $\blacksquare$

**2. példa. Dirichlet-típusú függvény:**

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



A definíció alapján egyszerűen igazolható, hogy

- a függvény **folytonos a** 0 **pontban** (tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz $\delta = \varepsilon$ „jó" $\delta$),
- $f \notin C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Az utóbbi állítást így bizonyítjuk: Legyen (például) $a \neq 0$ racionális szám. Ekkor minden – $a$-val egyező előjelű – irracionális $x$ helyen $|f(x) - f(a)| > |a|$. Ez azt jelenti, hogy $0 < \varepsilon < |a|$ esetén $\varepsilon$-hoz nem létezik „jó" $\delta$. Hasonló a bizonyítás, ha $a$ irracionális. (Tudjuk, hogy minden $(a-\delta, a+\delta)$ intervallumban van racionális és irracionális szám is.) ■

A következő tételekben folytonos függvények néhány alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg.

**Tétel.** *Ha* $a \in \mathcal{D}_f$ *izolált pont (azaz* $\exists\, K(a):\ K(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$) $\implies$ $f \in C\{a\}$.

**Bizonyítás.** A definíció alapján. ■

**Tétel.** (A folytonosság és a határérték kapcsolata.) *Ha* $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, *akkor*

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f \ \text{ és } \ \lim_a f = f(a).$$

**Bizonyítás.** A definíció alapján. ■

**Tétel.** (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.)

$1^o$ *Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.*

$2^o$ *Az* exp, *a* sin, *a* cos, *a* sh *és a* ch *függvény minden* $\mathbb{R}$*-beli pontban folytonos.*

**Bizonyítás.**

$1^o$ A hatványsor összegfüggvényének határértékére vonatkozó tétel, valamint az előző állítások alapján.

$2^o$ A szóban forgó függvényeket az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsorok összegeként értelmeztük, ezért az állítás $1^o$ következménye. ■

**Tétel.** (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv.) *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \iff \quad \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim(x_n) = a \ \text{ esetén } \ \lim\big(f(x_n)\big) = f(a).$$

**Bizonyítás.**

- Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor az állítás a határértékre vonatkozó átviteli elv, valamint a folytonosság és a határérték kapcsolatát leíró tétel következménye.
- Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}'_f \Rightarrow a$ izolált pont. Ebben az esetben az állítás nyilvánvaló. ■

**Tétel.** (A műveletek és a folytonosság kapcsolata.) *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$1^o$ *Ha* $f, g \in C\{a\}$, *akkor* $\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}),\quad f+g,\quad f \cdot g,\quad \dfrac{f}{g}\ (\text{ha } g(a) \neq 0) \quad \in C\{a\}$.

$2^o$ *Ha* $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f,\ \ g \in C\{a\}$ *és* $f \in C\{g(a)\} \implies f \circ g \in C\{a\}$.

**Bizonyítás.** Az állításokat az átviteli elv felhasználásával lehet bebizonyítani. ■

**Megjegyzés.** Az *inverz függvény* folytonosságának a kérdése nehezebb probléma. Ezt később fogjuk megvizsgálni. ■

## Egyoldali folytonosság

**Definíció.** *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Az* $f$ *függvény* ***jobbról folytonos az*** $a$ ***pontban****, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ \ a \le x < a + \delta \ \text{ esetén } \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Megjegyzés.** A bal oldali folytonosság fogalmát hasonló módon definiáljuk. ■

**Tétel.** $f \in C\{a\} \iff$ *ha $f$ jobbról és balról is folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.*

## Halmazon folytonos függvények

**Definíció.** *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $A \subset \mathcal{D}_f$. Az $f$ függvény **folytonos az $A$ halmazon**, ha*

$$\forall\, a \in A \text{ esetén } f\big|_A \in C\{a\}.$$

*Jelölése: $f \in C(A)$.*

**Megjegyzések.**

$1^o$ A műveleti tételek halmazon folytonos függvényekre is érvényesek.

$2^o$ Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $f \in C(A)$ reláció *nem jelenti* azt, hogy $f$ az $A$ halmaz minden pontjában folytonos. Például az ent (egészrész-) függvény folytonos a $[0, 1/2]$ halmazon, de az (egész $\mathbb{R}$-en értelmezett) ent függvény nem folytonos a $0 \in [0, 1/2]$ pontban. ■

## Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

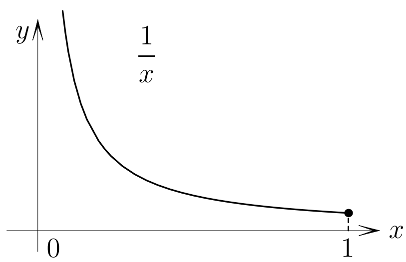
**Megjegyzés.** A továbbiakban $[a, b]$ nemelfajuló korlátos és zárt intervallumot jelöl, vagyis feltesszük azt, hogy $-\infty < a < b < +\infty$. ■

Az alábbi tételek azt mutatják, hogy ha egy $f$ függvény folytonos egy korlátos és zárt intervallumban, akkor ebből következik, hogy $f$ számos egyéb fontos tulajdonsággal is rendelkezik.

**Tétel.** ($[a, b]$-n folytonos függvény korlátos.)

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Tegyük fel, hogy az } f : [a, b] \to \mathbb{R} \textit{ függvény}\\ \textit{folytonos } [a, b]\textit{-n}\end{array}\right\} \implies f \textit{ korlátos } [a, b]\textit{-n.}$$

**Megjegyzés.** A tételben lényeges feltétel az, hogy az $f$ függvény egy *korlátos* és *zárt* intervallumon folytonos. Bármelyik feltételt elhagyva a tétel állítása nem marad igaz. Például az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $\big(x \in (0, 1]\big)$ függvény folytonos a korlátos $(0, 1]$ intervallumon, de $f$ itt *nem korlátos.*




Az $f(x) := x^2$ $\big(x \in [0, +\infty)\big)$ függvény folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, de szintén nem korlátos itt. ■

**Bizonyítás.** $f$ korlátos, ha

$$\exists\, K > 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \text{ esetén } |f(x)| \le K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy $f$ nem korlátos, azaz

$$\forall\, K > 0\text{-hoz } \exists\, x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K.$$

A $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists\, x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| \ge n.$$

Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolzano–Weierstrass}}{\underset{\text{kiválasztási tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\ (x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Ekkor: $\alpha \in [a,b]$. (Ezt indirekt módon igazoljuk: Ha $\alpha \notin [a,b] \Rightarrow \exists\, K(\alpha) : K(\alpha) \cap [a,b] = \emptyset$. De $\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqq k_0, \quad x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, mivel $x_{n_k} \in [a,b]$).

Az $f$ függvény folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow$ $f \in C\{\alpha\}$ $\overset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$

$$\lim\big(x_{n_k}\big) = \alpha \ \text{ miatt } \ \lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha).$$

Ez azt jelenti, hogy $\big(f(x_{n_k})\big)$ korlátos sorozat, ami ellentmondás. ■

Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek **szélsőérték-feladatokra**, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak következő fogalmak.

**Definíció.** *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek* ***van abszolút maximuma****, ha*

$$\exists\, \alpha \in \mathcal{D}_f : \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f \quad \textit{esetén} \quad f(x) \leqq f(\alpha).$$

*$\alpha$:* ***abszolút maximumhely,***
*$f(\alpha)$: a függvény* ***abszolút maximuma****.*

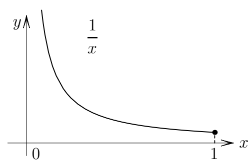
**Megjegyzés.** Az **abszolút minimumra** hasonló definíciók fogalmazhatók meg.
Az abszolút maximum-, illetve abszolút minimumhelyeket közösen **abszolút szélsőértékhelyeknek** nevezzük.
■

Egy valós-valós függvénynek vagy vannak abszolút szélsőértékei, vagy nincsenek. Ez utóbbi esetre mutatunk példákat.

**1. példa.**

Az $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in (0,1]\big)$ függvény

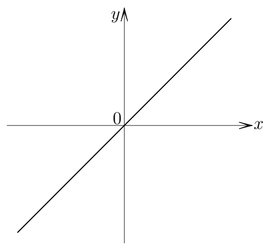
- folytonos $(0,1]$-en,
- $\exists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.




**2. példa.**

Az $f(x) = x \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$ függvény

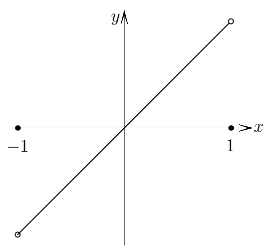
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\nexists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.




**3. példa.**

Az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{ha } x = \pm 1 \end{cases}$ függvény

- nem folytonos $[-1,1]$-en,
- $\nexists$ abszolút minimuma,
- $\nexists$ abszolút maximuma.



**Megjegyzés.** A következő tétel azt állítja, hogy egy *korlátos* és *zárt* intervallumon *folytonos* függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye. ■

**Weierstrass-tétel.**

$$\left.\begin{array}{c} \text{\it Ha az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ \it függvény} \\ \text{\it folytonos } [a,b]\text{\it -n} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} f\text{\it -nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz} \\ \exists\,\alpha,\beta\in[a,b]: \\ f(\beta)\le f(x)\le f(\alpha)\quad \big(\forall\,x\in[a,b]\big). \end{array}.$$

**Bizonyítás.** $f$ folytonos $[a,b]$-n $\implies$ $f$ korlátos $[a,b]$-n. Ezért

$$\exists\ \sup\big\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\big\} =: M\in\mathbb{R}\,,$$

$$\exists\ \inf\big\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\big\} =: m\in\mathbb{R}\,.$$

Igazoljuk: az $f$ függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists\,\alpha\in[a,b]: f(\alpha)=M$.

A szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \exists\,y_n\in\mathcal{R}_f:\quad M-\frac{1}{n}<y_n\le M.$$

Viszont:

$$y_n\in\mathcal{R}_f\quad\implies\quad \exists\,x_n\in[a,b]:\ f(x_n)=y_n\quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n):\mathbb{N}\to[a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az $(x_n)$ sorozatnak létezik $(x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Jelölje $\alpha$ ennek a határértékét, azaz legyen

$$(*)\qquad \alpha:=\lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha\in[a,b]$.

$f$ folytonos $[a,b]$-n $\implies$ $f\in C\{\alpha\}$ $\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\implies}}$

$$(*)\text{ miatt}\quad \lim_{k\to+\infty}\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}}=f(\alpha).$$

Mivel

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})=y_{n_k}\le M\quad (\text{minden } k\text{-ra}),$$

ezért $\lim\limits_{k\to+\infty}y_{n_k}=M$, ami azt jelenti, hogy az $f(\alpha)=M$ egyenlőség valóban fennáll.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■