Analízis II.

Előadás jegyzet

3. óra.

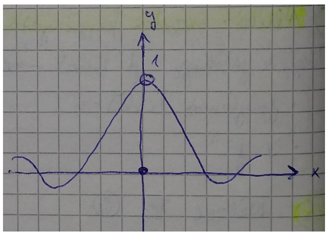
A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadásán. (2016. október 2.)
Külön köszönet jár CSONKA Szilviának a képek elkészítésért.

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Folytatás.

1.0.1. Emlékeztető. Szakadási helyek, osztályozás.

1.0.2. Példa.



1. ábra.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ezalapján megállapítható:

1. $f \in C\{a\}, \quad \forall a \neq 0$
2. $a = 0$ megszüntethető szakadási hely, mert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0 \neq f(0) = 0$.

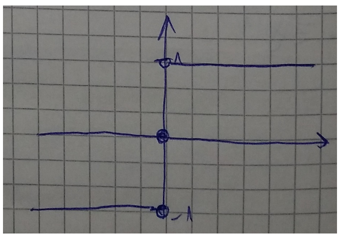
Ha

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

akkor $\tilde{f} \in C\{0\}$.

1.0.3. Példa.

$$f(x) := \text{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$



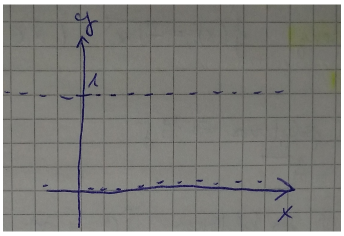
2. ábra.

1. $f \in C\{a\}, \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. az $a = 0$ elsőfajú szakadási hely, mert $\quad \exists \lim\limits_{0+0} f = 1 \neq \exists \lim\limits_{0-0} f = -1$.

1.0.4. Megjegyzés. Másodfajú szakadás sokféleképpen lehet.

1.0.5. Példa. Dirichlet-fv.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

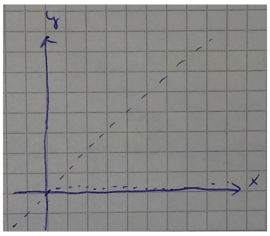


3. ábra.

$\forall a \in \mathbb{R}$ másodfajú szakadási hely, mert $\nexists \lim\limits_{a+0} f, \lim\limits_{a-0} f$.

1.0.6. Példa. Dirichlet típusú függvény.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

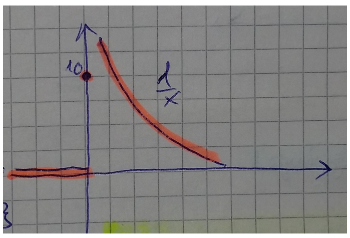


4. ábra.

1. $f \in C\{0\}$✓
2. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont másodfajú szakadási hely.

1.0.7. Példa.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ 10, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



5. ábra.

1. $f \in C\{a\}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $a = 0$ másodfajú szakadási hely, mert $\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$

1.0.8. Tétel. (Monoton függvény szakadási helyei)
Ha $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvény (α, β)-n, akkor legfeljebb elsőfajú szakadásai lehetnek, azaz egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban az f vagy folytonos, vagy elsőfajú szakadása van.

biz nélkül.

2. Elemi függvények.

2.1. Hatvány- és gyökfüggvények.

2.1.1. Emlékeztető. (hatványfüggvény) $f(x) := x^n \quad (x \in [0, +\infty))$

2.1.2. Emlékeztető. (gyökfüggvény) $f(x) := \sqrt[n]{x}, \quad (x \in [0, +\infty))$

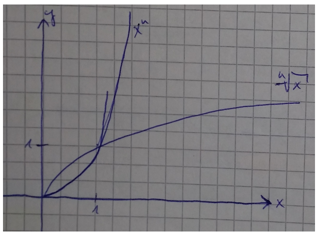
Igazolható:

– $f \uparrow$ folytonos $\Rightarrow \exists f^{-1}$

– $\left| f^{-1} = \sqrt[n]{} \right|$

– $f^{-1} \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$-n.

A függvények képe:



6. ábra.

2.2. Az exp és az ln függvények.

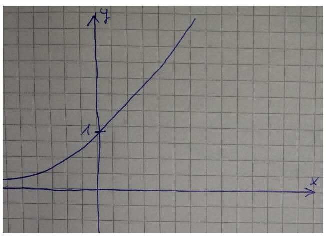
2.2.1. Tétel. (Az exp függvény tulajdonságai)

1. $\exp(x) \quad := \quad \exp x \quad := \quad e^x \quad := \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N})$
2. (helyettesítési értékek)

   a) $\exp(0) = 1$

   b) $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \left(\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$
3. A függvény egyenlet: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$
4. $\exp \uparrow$ folytonos $\mathbb{R}$-en.
5. $\mathcal{R}_{\exp} = (0; +\infty)$.
6. $\lim_{+\infty} \exp = +\infty, \quad \lim_{-\infty} \exp = 0.$

biz nélkül.



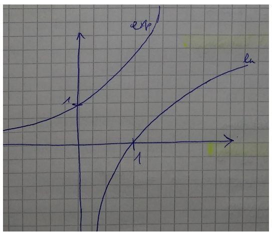
7. ábra.

2.2.2. Definíció. exp függvény szigorú monoton növekedő $\mathbb{R}$-en $\Rightarrow$ $\exists$ inverze.
Jele:

$$\ln \quad := \quad \log \quad := \quad (\exp)^{-1}$$

a természetes alapú v. e-alapú logaritmus függvény.

2.2.3. Megjegyzés. 1. $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$, $\quad \mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.



8. ábra.

2. Ha $x > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x \quad := \quad \ln(x) \quad := \quad y \quad \underset{\text{def.}}{\overset{\text{inverz}}{\Rightarrow}} \quad e^y = x$ (lásd: középiskolás definíció)

2.2.4. Tétel. (az ln függvény tulajdonságai)

1. $\ln e^x = x \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{\ln x} = x \quad (\forall x > 0)$
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (x, y > 0)$
3. $\ln \uparrow$ és folytonos $(0, +\infty)$-en, $\mathcal{R}_{\ln} = \mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{0+0} \ln = -\infty$; $\quad \lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$

2.2.5. Megjegyzés.

1. $\exp x$ jól számolható $\forall x \in \mathbb{R}$-re.
2. $\forall x > 0$-ra $\ln x$ értelmezhve van, de így nem számolható.

2.3. Az $\exp_a$ és $\log_a$ függvények.

2.3.1. Megjegyzés. $a > 0$; $\quad x \in \mathbb{R}$, mi legyen a^x?

- ha $x \in \mathbb{Q}$✓
- ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges: a hatványazonosságok érvényben maradjanak.
  Ötlet: $\boxed{a = e^{\ln a}}$, azaz az e-t a hatványként írjuk fel.

$$a = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$$

2.3.2. Definíció. $a > 0$ valós, $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}$$

ezt nevezzük az a szám x-edik hatványának.

2.3.3. Definíció. $a > 0$, $\quad \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

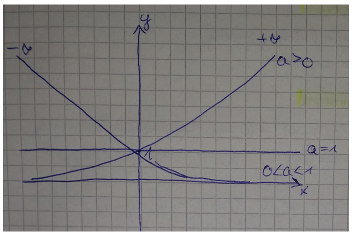
$$\exp_a(x) := a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

az a alapú exponenciális függvény.

2.3.4. Megjegyzés. $\exp_e = \exp$
Igazolható:

- $0 < a \neq 1$, $\quad \exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ folytonos bijekció.
- Ha az $a > 1 \quad \Rightarrow \quad \exp_a \uparrow$, $\quad \lim_{-\infty} \exp_a = 0$, $\quad \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty$

- Ha $0 < a < 1$, akkor $\exp \downarrow$, $\lim_{-\infty} \exp_a := +\infty$; $\lim_{+\infty} \exp_a = 0$



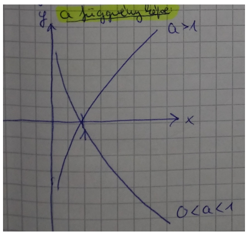
9. ábra.

2.3.5. Definíció. $0 < a \neq 1$ valós $\Rightarrow$ $\exp_a$ szigorúan monoton és folytonos $\mathbb{R}$-en $\Rightarrow$ $\exists$ inverze.

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

a alapú logaritmus függvény.

2.3.6. Megjegyzés. $\log_e = \ln = \log$



10. ábra.

2.3.7. Megjegyzés. A függvénytulajdonságok és logaritmusazonosságok megfogalmazhatók (H.F.), megjegyzendők.

2.4. Hatványfüggvények.

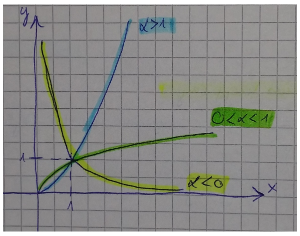
2.4.1. Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, *az α kitevőjű hatványfüggvény*:

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \to x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$$

2.4.2. Tétel. (a hatványfüggvény tulajdonságai)
Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ $h_\alpha(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ folytonos bijekció, amely

1. ha $\alpha > 0$ $\uparrow$
$$\lim_{0+0} h_\alpha = 0, \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = +\infty$$

2. ha $\alpha < 0$ $\downarrow$
$$\lim_{0+0} h_\alpha = +\infty, \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = 0$$



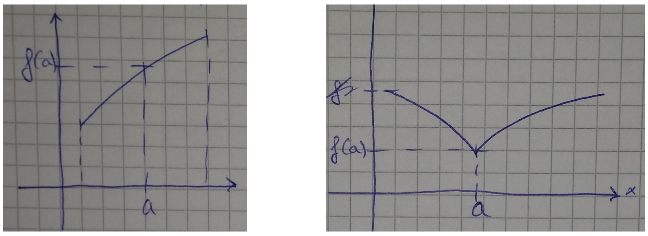
11. ábra.

3. Differenciálszámítás.

3.0.1. Megjegyzés. hóóó crap

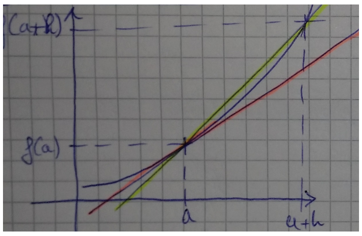
3.0.2. Emlékeztető. Határérték (függvénytulajdonság)

A pontbeli derivált motivációja pl. hogy a függvény grafikonjának van-e „töréspontja”.



12. ábra. Az elsőnek nincs, a másodiknak van töréspontja.

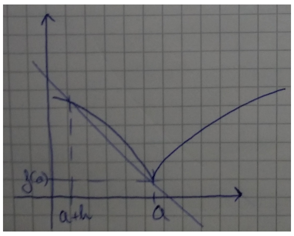
Ötlet: $(a, f(a))$-ban szelőt húzni



13. ábra.

A szelő meredeksége $m_h = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ A szelőknek van határhelyzete:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



14. ábra.

A szelőknek nincs határhelyzete:

$$\nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \blacksquare$$