1. Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvény szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?

Tétel. (Elégséges feltétel a monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $f \in C[a, b]$ *és* $f \in D(a, b)$. *Ekkor,*

1^o (a) *ha* $f' \geq 0$ (a, b)-*n* $\Longrightarrow$ f *monoton növekedő* $[a, b]$-*n;*
(b) *ha* $f' \leq 0$ (a, b)-*n* $\Longrightarrow$ f *monoton csökkenő* $[a, b]$-*n;*

2^o (a) *ha* $f' > 0$ (a, b)-*n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton növekedő* $[a, b]$-*n;*
(b) *ha* $f' < 0$ (a, b)-*n* $\Longrightarrow$ f *szigorúan monoton csökkenő* $[a, b]$-*n.*

2. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvény monoton növekedésével kapcsolatban?

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a szigorú monotonitásra.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $f \in C[a, b]$ *és* $f \in D(a, b)$. *Ekkor*

1^o f *szigorúan monoton növekedő* $[a, b]$-*n* $\Longleftrightarrow$
$f' \geq 0$ (a, b)-*n, és* $[a, b]$-*nek nincs olyan részintervalluma, amelyen* f' *azonosan nulla;*

2^o f *szigorúan monoton csökkenő* $[a, b]$-*n* $\Longleftrightarrow$
$f' \leq 0$ (a, b)-*n, és* $[a, b]$-*nek nincs olyan részintervalluma, amelyen* f' *azonosan nulla.*

3. Mit ért azon, hogy az f ∈ R → R függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***lokális maximuma van****, ha*

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad \forall x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f \text{ esetén } \; f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontot* f ***lokális maximumhelyének*** *nevezzük, az* $f(a)$ *érték pedig a függvény* ***lokális maximuma****.*

4. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel?

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy } f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ és} \\ \bullet\; f \in D\{a\} \textit{ valamilyen } a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f\textit{-ben} \\ \bullet\; f\textit{-nek } a\textit{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f'(a) = 0.$$

5. Hogyan szól a lokális maximumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- $f \in D(a, b)$,
- *egy* $c \in (a, b)$ *pontban* $f'(c) = 0$ *és*
- *az* f' *deriváltfüggvény előjelet vált* c*-ben.*

Ekkor,

1^o *ha az* f' *függvény negatívból pozitívba megy át, akkor a* $c \in (a, b)$ *pont az* f *függvénynek lokális minimumhelye;*

2^o *ha az* f' *függvény pozitívból negatívba megy át, akkor a* $c \in (a, b)$ *pont az* f *függvénynek lokális maximumhelye.*

6. Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- f *kétszer deriválható egy* $c \in (a, b)$ *pontban, azaz* $f \in D^2\{c\}$,
- $f'(c) = 0$,
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c *lokális szélsőértékhelye az* f *függvénynek;*

1^o *ha* $f''(c) > 0$, *akkor* f*-nek* c*-ben lokális minimuma van,*

2^o *ha* $f''(c) < 0$, *akkor* f*-nek* c*-ben lokális maximuma van.*

7. Hogyan szól a Weierstrass-tétel?

Weierstrass-tétel.

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Ha az } f : [a, b] \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \textit{folytonos } [a, b]\textit{-n}\end{array}\right\} \implies \begin{array}{c}f\textit{-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz} \\ \exists\, \alpha, \beta \in [a, b] : \\ f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha) \quad (\forall x \in [a, b]).\end{array}$$