Analízis 2. (BSc) **1. ZÁRTHELYI** **2016. október 28.**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *A definíció alapján határozza meg a*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}$$

határértéket.

Megoldás. $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Mivel

$$\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x+7}{x^2+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big),$$

ezért a *sejtés*:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = 4.$$

A *definíció alapján a bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \ \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x : 0 < |x-1| < \delta \text{ esetén } \left|\frac{x+7}{x^2+1} - 4\right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - 4\right| = \frac{|4x^2-x-3|}{x^2+1} = \frac{|(x-1)(4x+3)|}{x^2+1} = |x-1| \cdot \frac{|4x+3|}{x^2+1}.$$

Ha (például) $|x-1| < 1$, azaz ha $0 < x < 2$, akkor

$$\frac{|4x+3|}{x^2+1} = \frac{4x+3}{x^2+1} < \frac{4\cdot 2+3}{1} = 11.$$

Így

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - 4\right| < 11 \cdot |x-1| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |x-1| < 1 \quad \text{és} \quad 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{11}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$ választás megfelelő, ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = 4. \quad \blacksquare$$

2. feladat. *Számítsa ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin 3x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}$.

Megoldás. (a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítés, majd szorzatra bontás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{x^2-4}{x-2} \cdot \big(\sqrt{x-1}+1\big) =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \cdot \big(\sqrt{x-1}+1\big) = (x+2) \cdot \big(\sqrt{x-1}+1\big).$$

Ez az átalakítás már nem kritikus határértékre vezet, ezért használhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x\to 2} (x+2) \cdot \big(\sqrt{x-1}+1\big) = 4 \cdot 2 = 8. \ \blacksquare$$

(b) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Tudjuk, hogy

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}=1 \quad \text{minden } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ esetén.}$$

Ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}.$$

A $(*)$ és a $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ határértékek, valamint a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}. \blacksquare$$

(c) Írjuk fel az e^{-x} és az e^{3x} $(x\in\mathbb{R})$ függvény hatványsorát. Mivel

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

$$e^{3x}=1+3x+3^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+3^4\frac{x^4}{4!}+\cdots \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Így

$$\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}=\frac{-4x+\frac{1-3^2}{2!}x^2-\frac{1+3^3}{3!}x^3+\frac{1-3^4}{4!}x^4-\cdots}{x}=$$

$$=-4+\frac{1-3^2}{2!}x-\frac{1+3^3}{3!}x^2+\frac{1-3^4}{4!}x^3-\cdots.$$

Az utóbbi hatványsor minden $x\in\mathbb{R}$ pontban konvergens, és az összegfüggvényének a határértéke 0-ban az összegfüggvény 0-ban vett helyettesítési értéke, vagyis -4. Ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}=-4. \blacksquare$$

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}\\ 3, & \text{ha } x=-1\\ 0, & \text{ha } x=-2\end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáját.

Megoldás. Mivel $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, ezért -1 és -2 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ halmaz minden pontjában folytonos.

Az $a=-1$ és az $a=-2$ pontokban kell még megvizsgálni a függvényt. Ehhez először a következő átalakítást végezzük el:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}=\frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+4}{x+2} \qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}).$$

Legyen $a=-1$. A fentiek alapján

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x+4}{x+2}=3=f(1),$$

ezért az $a=-1$ pontban az f függvény *folytonos* (itt nincs szakadási helye).

Legyen most $a=-2$. Ekkor

$$\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{x+4}{x+2}=+\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{x+4}{x+2}=-\infty.$$

Az egyoldali határértékek tehát léteznek és különbözőek. Mivel ezek nem végesek, ezért az $a=-2$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

4. feladat. *A logaritmusazonosságok alkalmazása után számítsa ki az*

$$f(x):=\ln\frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \qquad (x>-1)$$

függvény deriváltját.
Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0:=0$ *abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.*

Megoldás. Az f függvény deriválható minden $x>-1$ pontban (l. az elemi függvények deriválására, valamint a műveletek és a deriváltakra vonatkozó állításokat). A logaritmus azonosságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)-5\ln(x^2+1) \qquad (x>-1),$$

ezért

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot 1-5\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{10x}{x^2+1} \qquad (x>-1).$$

Az f függvény grafikonjának $\big(x_0,f(x_0)\big)$ pontjában az érintőegyenes egyenlete:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Mivel

$$f(x_0)=f(0)=\ln 1=0$$

és

$$f'(x_0)=f'(0)=\frac{1}{2},$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y=\frac{x}{2}.$$ ■

5. feladat *Milyen* a *és* b *valós paraméter esetén lesz az egész* $\mathbb{R}$*-en differenciálható az*

$$f(x):=\begin{cases} ax^2+1, & \textit{ha } x<2\\ x^2-bx-3, & \textit{ha } x\geq 2\end{cases}$$

függvény. Adja meg a deriváltfüggvényt is.

Megoldás. Ha $\boxed{x_0<2}$, akkor $f\in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0)=2ax_0$$

minden $a,b\in\mathbb{R}$ paraméter esetén.

Ha $\boxed{x_0 > 2}$, akkor $f \in D\{x_0\}$ és

$$f'(x_0) = 2x_0 - b$$

minden $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter esetén.

Legyen $\boxed{x_0 = 2}$. Ahhoz, hogy az f függvény itt deriválható legyen szükséges, hogy f *folytonos* is legyen ebben a pontban. Nézzük meg f-nek 2-ben a bal- és a jobb oldali határértékét:

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \left(ax^2 + 1\right) = 4a + 1$$

és

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \left(x^2 - bx - 3\right) = 1 - 2b = f(2),$$

ezért

$$f \in C\{0\} \iff f(2-0) = f(2+0) = f(2) \iff 4a+1 = 1-2b \iff b = -2a\ .$$

A deriválhatóság vizsgálatánál most már feltesszük azt, hogy $b = -2a$. A bal oldali derivált 2-ben:

$$f'_-(2) := \lim_{x\to 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{\left(ax^2 + 1\right) - (1-2b)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{ax^2 - 4a}{x-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = 4a.$$

A jobb oldali derivált a 2 pontban

$$f'_+(2) = \left(x^2 - bx - 3\right)'_{x=2} = (2x-b)_{x=2} = 4 - b = 4 + 2a.$$

Ezért

$$f'_-(2) = f'_+(2) \iff 4a = 4 + 2a \iff a = 2.$$

Így

$$f \in D\{2\} \iff b = -2a \ \text{ és } \ a = 2 \iff a = 2 \text{ és } b = -4. \text{ Ekkor } f'(2) = 8.$$

Összefoglalva: Az f függvény pontosan akkor deriválható az egész $\mathbb{R}$-en, ha $a = 2$ és $b = -4$. Ekkor a deriváltfüggvény

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } x < 2 \\ 8, & \text{ha } x = 2 \\ 2x + 4, & \text{ha } x > 2. \end{cases} \blacksquare$$