9. Gyakorlatra

I. Gyakorlati anyaga

Emlékeztető

Derivált függvény csak ott válthat előjelet, ahol zérushelye van vagy olyan pontban ahol nem folytonos.

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

a) $f(x) := x^2(x-3) \; (x \in \mathbb{R})$

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f \in D$,

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

mivel a derivált függvény folytonos, ezért csak zérushelyen válthat előjelet:

$f' \in C$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$ Zérushelyei tehát: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

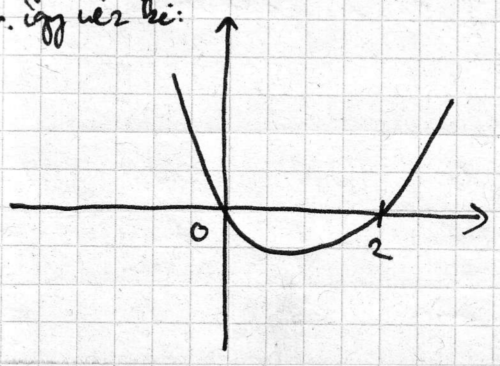
Tehát az alábbi intervallumokon vizsgáljuk (melyeken nem válthat előjelet):

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
f	↑	↓	↑
f'	⊕	⊖	⊕

⇒ 0-ban a fv-nek lokális maximuma van

⇒ 2-ben a fv-nek lokális minimuma van

Tudjuk: egyenes állású a parabola (főegyüttható pozitív)
kb. így néz ki:



Zérushelyei: 0, 2

Tehát:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f	$\uparrow$	lokális max	$\downarrow$	lokális min.	$\uparrow$
f'	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$

ⓓ $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq -1)$

$f \in D(\mathbb{R} \setminus \{0,-1\})$

$$f'(x) = \frac{2' \cdot x - 2 \cdot x'}{x^2} - \frac{8' \cdot (1+x) - 8 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{0 - 2}{x^2} - \frac{0-8}{(x+1)^2} = -\frac{2}{x^2} - \left(-\frac{8}{(x+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{8}{(x+1)^2} - \frac{2}{x^2}$$

$f' \in C(\mathbb{R} \setminus \{0,-1\})$

Tudjuk: mivel 0-ba és -1-ben nem folytonos $\Rightarrow$ ott válthat előjelet

ezen kívül csak zérushelyeken válthat előjelet, ha van

Zérushely:

$$\frac{8}{(1+x)^2} - \frac{2}{x^2} = 0 \iff \frac{8}{(1+x)^2} = \frac{2}{x^2} \iff 8x^2 = 2(1+x)^2 \iff$$

$$8x^2 = 2(x^2+2x+1) \iff 8x^2 = 2x^2 + 4x + 2 \iff 0 = 6x^2 - 4x - 2 \iff$$

$$0 = 3x^2 - 2x - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Tehát: a derivált függvény előjelet válthat: $-1, -\frac{1}{3}, 0, 1$ pontokban

Tehát vizsgáljuk:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f	$\downarrow$		$\downarrow$	lokális min.	$\uparrow$	lokális max	$\downarrow$	lokális min	$\uparrow$
f'	$\oplus$	—	$\oplus$	0	$\ominus$	—	$\ominus$	0	$\oplus$

Az egyszerűbb számolás érdekében a derivált függvényt szorzattá alakítjuk:

$$f'(x) = \frac{8}{(1+x)^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{8x^2 - 2(1+x)^2}{x^2(1+x)^2} = \frac{8x^2 - 2x^2 - 4x - 2}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 4x - 2}{\underbrace{\underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(1+x)^2}_{>0}}_{>0}}$$

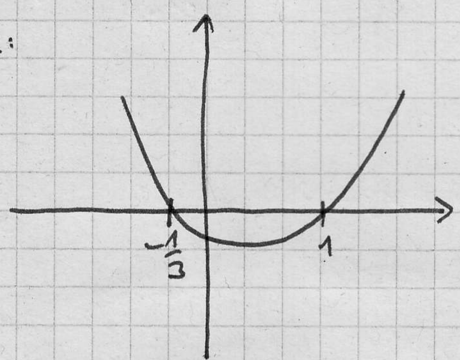
Tehát a derivált előjele $6x^2 - 4x - 2$ -től fog függeni:

$$6x^2 - 4x - 2 \overset{?}{=} 0 \iff 3x^2 - 2x - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Tehát egyenes állású és zérushelyei: $-\frac{1}{3}$, 1

Ábr.:



$\boxed{\text{Emlékeztető}}$

Lokális szélsőérték szükséges feltételei:

ott lehet lokális sz.é., ahol $f'(x) = 0$

(már ha deriválható ugye)

Lokális szélsőérték elégséges feltételei:

Elsőrendű: ha előjelet is vált f':
- $\oplus \to \ominus$: lokális maximum
- $\ominus \to \oplus$: lokális minimum

(kell: adott pont környékén deriválható függvény)

Másodrendű: (konvexitással kapcsolatos)

Ha a fv. mégegyszer deriválható adott pontban, azaz: ha $\exists\, f''(x)$:

$\oplus \to$ lokális minimum

$\ominus \to$ lokális maximum

Mj: bármelyiket lehet használni, de egyelőre az elsőrendűt fogjuk, másodrendűt később, akkor is fog érthetővé válni

~~Abs~~

<u>Abszolult szélsőérték:</u> a függvény minimum/maximum értéke

pl. zárt intervallumon lehet ($f:[a,b]\to\mathbb{R}$)

- lokális szélsőértékhelyen (ez am mindig igaz)
- végpontokban, azaz: a-ban/b-ben

és biztosan létezik (Weierstrass-tétel alapján)

3. Határozza meg az f függvény 1) lokális szélsőértékeit
2) az absz. szélsőértékeit az $A\subset D_f$ halmazon, ha

(a) $f(x)=x^4-4x^3+10$ ($x\in\mathbb{R}$), és $A=[-1,4]$

<u>1) lokális szélsőértékek</u>

$f'(x)=4x^3-12x^2+0$, $f'\in C$

Zérushelyek: $4x^2(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=3$

$\Rightarrow$ fv. deriváltja csak 0-ban/3-ban válthat előjelet

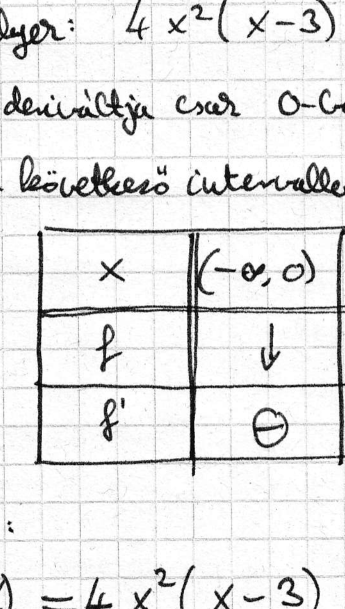
Tehát a következő intervallumokon vizsgáljuk:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
f	↓	nincs sz.-é.	↓	lokális min.	↑
f'	⊖	0	⊖	0	⊕

<u>Előjelei:</u>

$f'(x)=\underbrace{4x^2}_{\geq 0}(x-3)$

<u>Pl.:</u>



<u>Tehát:</u> az egyetlen lokális szélsőértéke 3-ban van ahol lokális minimuma van:

$f(3)=\underbrace{3^4}_{81}-4\cdot 3^3+10=-17$

<u>2) abszolút szélsőérték</u> $A=[-1,4]$ halmazon

- <u>lehet:</u> lokális szélsőértékhelyen, intervallum végpontjaiban
- <u>lokális minimum:</u> $f(3)=\underline{-17}$

• egyik végpont: $f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + 10 = \underline{\underline{15}}$

• másik végpont: $f(4) = 4^4 - 4 \cdot 4^3 + 10 = \underline{10}$

Tehát:

• abszolút maximum: $15 = f(-1)$

• abszolút minimum: $-17 = f(3)$

II. Elméleti kérdések

1) Definiálja a π számot.

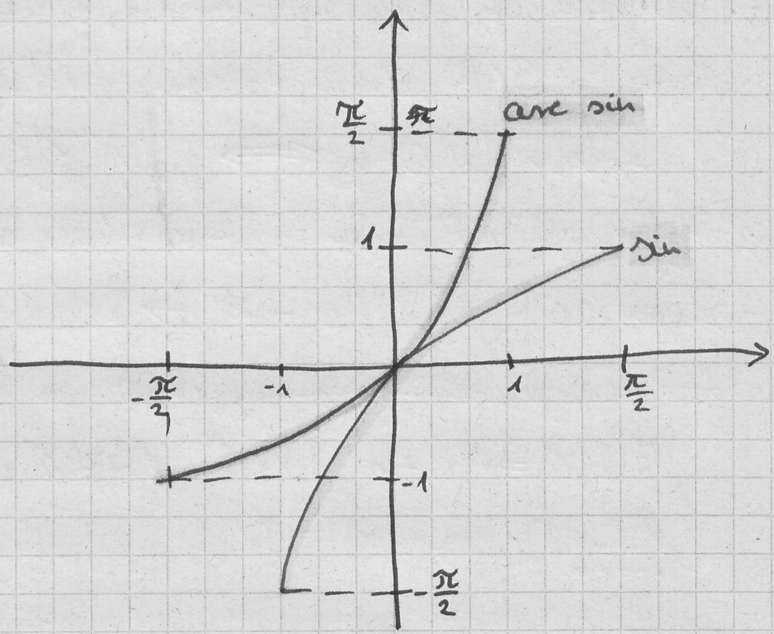
~~A cos függvények a~~

$\exists!\ \xi \in [0,2] : \cos \xi = 0.$

Legyen $\pi = 2\xi$

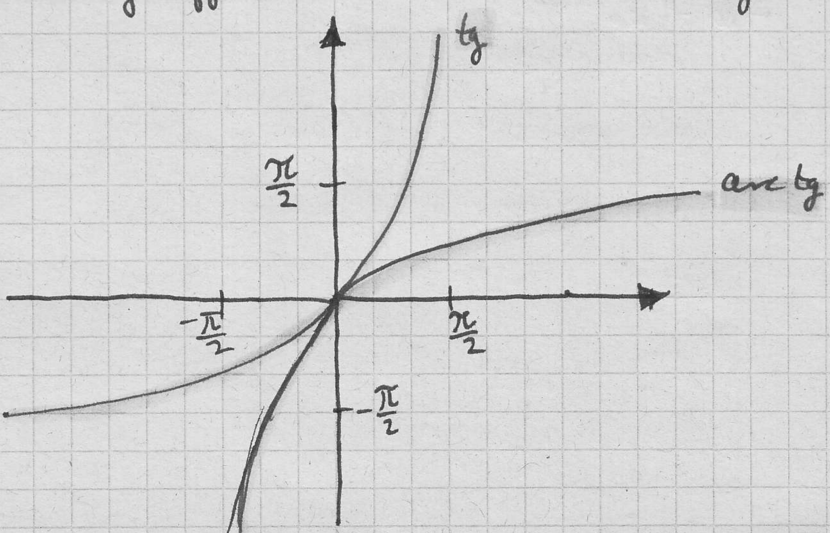
2) Értelmezze az arc sin függvényt és ábrázolja egy koordinátarendszerben a ~~tg~~ sin és az arc sin függvényeket.

$\text{arc sin} = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$



3) Értelmezze az arc tg függvényt, és ábrázolja egy koordinátarendszerben a tg és az arc tg függvényeket.

$\text{arc tg} = \left(\text{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$



4.) Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$, f kétszer deriválható a-ban (jele: $f \in D^2\{a\}$), ha

- $\exists r > 0 : f \in D(K_r(a))$ és
- $f' \in D\{a\}$

Ekkor:

$f''(a) = (f')'(a)$ az f függvény második deriváltja az a-ban.

5.) Mi a konvex függvény definíciója?

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény <u>konvex</u> az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén $f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ $(\forall x \in (a, b))$.

6.) Jellemezze egy függvény konvexitását az első derivált segítségével.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$.

Az f függvény konvex (α, β)-n $\iff$ az f' függvény $\nearrow$

7.) Jellemezze egy függvény konkávitását a második derivált segítségével.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha, \beta)$. ~~Ekk~~ Ekkor:

f konkáv (α, β)-n $\iff f''(x) \leq 0$ $(\forall x \in (\alpha, \beta))$.

8.) Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha

$\exists\, l(x) = Ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ elsőfokú függvény, amelyre

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - l(x)) = 0.$

Ebben az esetben az $l(x) = Ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

III. Házi feladatok

2.

Vizsgálja meg monotonitás szempontjából ~~az~~ a köv. függvényt:

$$f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f \in D, \quad f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = e^x \cdot \frac{(x-1)}{x^2}$$

Zérushelyek: $e^x \cdot \frac{(x-1)}{x^2} \overset{?}{=} 0$ ha $x = 1$

Derivált fv. előjelet válthat: 0-ban és 1-ben.

Tehát az alábbi intervallumon és helyeken vizsgáljuk:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
f	$\downarrow$	—	$\downarrow$	lokális min.	$\uparrow$
f'	$\ominus$	—	$\ominus$	0	$\oplus$

Előjel vizsgálata:

$(-\infty, 0)$ intervallumon: $f'(-1) = e^{-1} \cdot \frac{-2}{4} < 0$

$(0,1)$ intervallumon: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e^1} \cdot \left(-\frac{4}{2}\right) < 0$

1-ben: $f'(1) = e \cdot \frac{0}{1} = 0$ ~~$\neq 0$~~

$(1, +\infty)$ intervallumon: $f'(2) = e^2 \cdot \frac{1}{4} > 0$

Tehát:

$(-\infty, 0)$ intervallumon $\downarrow$

$(0, 1)$ intervallumon $\downarrow$

$(1, +\infty)$ intervallumon $\uparrow$

3. Határozza meg a következő fv. lokális szélsőértékeit és az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ intervallumon.

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ⓐ lokális szélsőértékek

$$f \in D, \; f'(x) = \frac{x^2+x+1 - x(2x+1)}{(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} \Big\} \geq 0$$

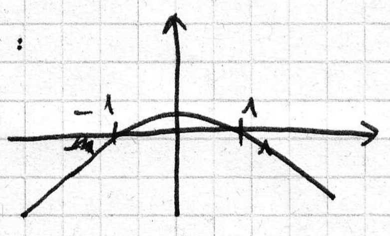
Zérushelyek:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{ha } x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Tehát:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f	$\downarrow$	lokális min.	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$
f'	$\ominus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$

f' kb.:



Tehát:

lokális min.: $f(-1) = -1$

lokális max.: $f(1) = \frac{1}{3}$

ⓑ abszolút szélsőérték $[-2, 0]$ halmazon

lehetnek: lokális szélsőértékek, intervallum végpontjai

- lokális min: $f(-1) = -1$
- lokális max.: $f(1) = \frac{1}{3}$
- egyik végpont: $f(0) = 0$
- másik végpont: $f(-2) = -\frac{2}{3}$

Tehát:

- abszolút min.: $-1 = f(-1)$
- abszolút max.: $\frac{1}{3} = f(1)$