Analízis II.
Előadás jegyzet
4. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. október 3.)
Külön köszönet jár Csonka Szilviának a képek elkészítésért.

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Folytatás.

1.0.1. Emlékeztető. A derivált motivációja.

1.1. A derivált fogalma

1.1.1. Megjegyzés. A deriváltat az értelmezési tartomány belső pontjaiban értelmezzük.

1.1.2. Definíció. $0 \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz **belső pontja** $a \in A$, ha

$$\exists K(a): \quad K(a) \subset A.$$

Jele: $\mathrm{int}A := \{a \in A \mid a \text{ belső pontja } A\text{-nak } \}$

1.1.3. Példa. $A := [0{,}1], \quad \mathrm{int}A = (0{,}1)$

1.1.4. Példa. $A := (0{,}1], \quad \mathrm{int}A = (0{,}1)$

1.1.5. Példa. $A := \{1{,}4, e\}, \quad \mathrm{int}A = \emptyset$

1.1.6. Definíció. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$. f **differenciálható**, vagy **deriválható** az a pontban, ha

$$\exists \quad \text{és véges} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =: f'(a) \quad \text{határérték.}$$

$f'(a)$: f **deriváltja**, vagy **differenciálhányadosa**. Jelöljük így is: $f \in D\{a\}$.

1.1.7. Megjegyzés. $a + h = x$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

1.1.8. Megjegyzés. $\varDelta_a f(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$: az f függvény a-hoz tart. **Különbségihányados**-fv, vagy **differenciahányados** függvény.

1.1.9. Megjegyzés. Ez a határérték mindig $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték.

1.1.10. Megjegyzés. A differenciálhatóság „erősebb” megkötés a folytonosságnak.

1.1.11. Tétel. (A folytonosság és a deriválás kapcsolata)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$.

1. $f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{a\}$.
2. $f \in D\{a\} \quad \not\Leftarrow \quad f \in C\{a\}$.

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x-a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) = f'(a). \quad 0 = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\not\Leftarrow}$ abs$\notin D\{a\}$:

$$\frac{|x|-|0|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{abs} \notin \mathrm{D}\{0\}. \quad \blacksquare$$

1.2. Egyoldali deriváltak

1.2.1. Definíció. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0$: $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ hátérérték, akkor az f függvény **jobbról deriválható** az a-ban.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'_+(a) \quad \text{az } f \text{ jobb oldali deriváltja az } a\text{-ban.}$$

1.2.2. Megjegyzés. A bal oldali derivált hasonló. Jele: $f'_-(a)$.

1.2.3. Megjegyzés. f deriválható az a-ban $\Leftrightarrow \exists f'_+(a)$, $\exists f'_-(a)$, és $f'_+(a) = f'_-(a)$. Jele: $f'(a)$.

1.3. Deriváltfüggvény.

1.3.1. Definíció. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és

$$\{a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f \mid f \in D\{a\}\} \neq \emptyset,$$

akkor

$$f' : \quad \{a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f \mid f \in D\{a\}\} \to \mathbb{R}, \quad x \to f'(x)$$

az f **deriváltfüggvénye**, vagy **differenciálhányados-függvénye**.

1.4. Elemi függvények deriváltja.

1.4.1. Megjegyzés. Lásd: honlapon táblázat.

1. Konstansfüggvény: $c \in \mathbb{R}$ rögzített, $f(x) = c$. $(x \in \mathbb{R})$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f \in D\{x\} \quad \text{és} \quad f'(x) = 0, \quad \boxed{\text{(c)'=0}}.$$

2. Hatványfüggvények: $n \in \mathbb{N}$, $f(x) := x^n$ $(x \in \mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \in D\{x\}, \quad \text{és} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bizonyítás:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{h \cdot [(x+h)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}]}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} n \cdot x^{n-1} \quad \blacksquare$$

3. Reciprok függvény: $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad f \in D\{x\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

4. abs$\notin D\{0\}$.

5. Négyzetgyökfüggvény. $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [0, +\infty[)$

$$\forall x > 0\text{-ra}: \quad f \in D\{x\}: \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in (0, +\infty))$$

6. sin

$$\sin' x = cosx \quad (x \in \mathbb{R})$$

(biz nélkül.)

7. cos

$$\cos' x = -sin \quad (x \in \mathbb{R})$$

(biz nélkül.)

1.5. Ekvivalens átfogalmazás (lineáris közelítés). Érintő.

1.5.1. Tétel. (Lineáris közelítés)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$

$$f \in D\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad \lim\limits_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \end{cases}$$

$A = F'(a)$.

Bizonyítás:
$\boxed{\Rightarrow}$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right)}_{=:\varepsilon(x)} = 0$$

Így: $\lim_a \varepsilon = 0$, és
$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)\checkmark$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$:

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \overset{x \neq a}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} = \underbrace{A + \varepsilon(x)}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} A}$$

$$\Rightarrow f'(a) = A \quad \blacksquare$$

1.5.2. Megjegyzés. Szemléletes jelentése.
$f \in D\{a\}$.

1. ábra.

$$f(x) - f(a) = \underbrace{A(x-a)}_{\textbf{Főrész}} \qquad + \qquad \underbrace{\varepsilon(x)(x-a)}_{\text{sokkal kisebb. } \textbf{Maradék}}$$

ha $x \sim a \quad \underset{\lim_a \varepsilon > 0}{\Rightarrow} \quad f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(a) \sim A(x-a)$. $\blacksquare$

1.5.3. Megjegyzés. $f'(a)$ definíció általánosítsa $\to$ nem mindig. lin. köz általánosítása $\to$ gyakran problémamentes. $\blacksquare$

1.5.4. Emlékeztető. Érintő: $f \in D\{a\}$

2. ábra.

1.5.5. Definíció. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának van érintője, az $(a, f(a))$ pontban, ha $f \in D\{a\}$.
A grafikon $(a, f(a))$-béli **érintője** az
$$x = f'(a)(x-a) + f(a)$$
egyenletű egyenes.

1.5.6. Megjegyzés. HF: Kör, parabola érintője a fenti definícióból; ez ekvivalens a középiskolai definícióval.