Definíciók és tételek az 1. zh-hoz

Analízis 2.

Programtervező informatikus szak

2017-2018. tanév tavaszi félév

• Függvények határértéke

1. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

2. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta : \quad f(x) > P.$$

4. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, x_0 > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) > P.$$

5. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

6. Definiálja függvény jobb oldali határértékét.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az *a helyen létezik a jobb oldali határértéke*, ha a

$$g(x) := f(x) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)$$

függvénynek a-ban van határértéke. Ezt a határértéket az f függvény *a helyen vett jobb oldali határértékének* nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{a+0} f := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

• Függvények folytonossága

7. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *pontbeli folytonosságát.*

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban folytonos*, ha

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\ \delta > 0,\ \ \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

8. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

9. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

10. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C\{a\} \iff \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \text{ sorozatra } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

11. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról folytonos egy pontban*?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *jobbról folytonos az a pontban*, ha

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\ \delta > 0,\ \ \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ a \le x < a + \delta \text{ pontban } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

12. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f korlátos $[a, b]$-n.

13. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

14. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

15. Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a,b]$-n és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\quad \exists\, \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = c$.

16. Mit jelent az, hogy egy f függvény *Darboux-tulajdonságú*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú I-n*, ha minden $a, b \in I$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.

17. Milyen állítást ismer az inverz függvény folytonosságáról?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a,b]$-n és invertálható. Ekkor az f^{-1} inverz függvény folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon.

18. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_{a} f \quad \text{véges határérték, de} \quad \lim_{a} f \neq f(a).$$

19. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

20. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Válasz. Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az f függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.

• Differenciálszámítás

21. Mi a *belső pont* definíciója?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A halmaz *belső pontja*, ha

$$\exists\, K(a), \text{ hogy } K(a) \subset A.$$

Az $\operatorname{int} A$ szimbólummal jelöljük az A halmaz belső pontjainak a halmazát.

22. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

Válasz. Ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor:

$$f \in D\{a\} \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{és ez a határérték véges.}$$

23. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Válasz. $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. az $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

24. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról deriválható* egy pontban?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ jobb oldali határérték,}$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az *a pontban jobbról deriválható*. A fenti határértéket az f függvény *a pontbeli jobb oldali deriváltjának nevezzük*, és az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük.

25. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

Válasz. $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

26. Mi az *érintő* definíciója?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény grafikojának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban *van érintője*, ha $f \in D\{a\}$. Ekkor f *garfikonjának* $\big(a, f(a)\big)$ *pontbeli érintőjén* az

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

27. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\} \implies fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

28. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

29. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

30. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény (α, β)-n, és egy $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$, továbbá $f'(a) \neq 0$. Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, ahol $b := f(a)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

31. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban az f függvény differenciálható és a deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott sor összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (x-a)^{n-1}.$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

32. Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := e^x := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

33. Értelmezze az ln függvényt.

Válasz. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért invertálható. Az

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

függvényt *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük.

34. Mi a definíciója az $a^x \ \ (a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?

Válasz. $a^x := \exp(x \ln a)$.

35. Szemléltesse az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvények grafikonjait.

36. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $f \in D\big(K_r(a)\big)$ és $f' \in D\{a\}$.

37. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális maximuma van*?

Válasz. Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban *lokális maximuma* van, ha

$$\exists\, K(c): \quad f(x) \le f(c) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

38. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az f függvénynek a c pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

39. Mondja ki a *Rolle-tételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a, b], f \in D(a, b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a, b) :$ $f'(\xi) = 0$.

40. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a, b], f \in D(a, b)$, akkor

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(\xi).$$

41. Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a, b], f, g \in D(a, b)$ és $g'(x) \neq 0$, $(x \in (a, b))$. Ekkor

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

42. Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$ és $f' > 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f szigorúan monoton növekedő $[a, b]$-n.

43. Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$ $\big(a, b \in \mathbb{R}, a < b\big)$, akkor

$$f \ \text{ monoton növekedő } \ [a, b]\text{-n} \iff f' \geq 0 \ \ [a, b]\text{-n}.$$

44. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen *előjelet vált*?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$, hogy $K_\delta(c) \subset \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (c - \delta, c)$ és $f(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (c, c + \delta)$ vagy fordítva.

45. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?

Válasz. Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a, b)$ és f' a $c \in (a, b)$ pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek c-ben lokális szélsőértéke van.

46. Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a, b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális minimuma van.

47. Írja le a *lokális maximumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a, b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális maximuma van.