Analízis II.

Előadás jegyzet

10. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. november 21.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Integrálszámítás

Két fő része van: határozott és határozatlan integrálszámítás.

1.1. Határozatlan integrálszámítás

Probléma: (a deriválás megfordítása)
Adott: $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Van-e olyan

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F' \equiv f?$$

Vizsgáljuk ezt a problémát.

1.1.1. Példa. $f(x) := x + \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$. Van-e olyan függvény, melyet deriválva ezt kapjuk? A válasz az hogy igen, ez pedig a

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \operatorname{arc\,tg} x + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

1.1.2. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az $f : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, ha

- $F \in D(I)$
- $F'(x) = f(x) \quad (x \in I)$

Kérdéseink ezek után a következőek:

- Milyen függvénynek van primitív függvénye?
- Ha van, hány van?
- Hogyan lehet meghatározni?

1.1.3. Tétel. (elégséges feltétel primitív függvény létezésére)
Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} I \subset \mathbb{R} \quad \text{nyílt intervallum,} \\ f : I \to \mathbb{R} \quad \text{folytonos} \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{-nek van primitív függvénye.}$$

bizonyítása később.

1.1.4. Tétel. (szükséges feltétel primitív függvény létezésére)
Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} I \subset \mathbb{R} \quad \text{nyílt intervallum,} \\ f : I \to \mathbb{R} \quad \text{függvénynek van primitív részfüggvénye} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ Darboux tulajdonságú } I\text{-n.}$$

biz nélkül.

1.1.5. Példa. $f(x) := \operatorname{sgn}(x) \quad (x \in (-1,1))$. Nincs primitív függvénye, mert nem Darbaux tulajdonságú.

1.1.6. Tétel. (a primitív függvények számára vonatkozó állítás)
Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor:

1. Ha $F : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}:$ $F + c$ is primitív függvénye.
2. Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ f primitív függvényei $\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}:$ $F_1(x) = F_2(x) + c \quad (x \in I)$.

a bizonyítás meggondolandó. ■

1. ábra.

1.1.7. Megjegyzés. A primitív függvények konstansban különböznek csak egymástól.

1.1.8. Megjegyzés. Miért értelmezünk mi mindent intervallumban? Ez igazán csak az állítás második részében lényeges. (Az elsőben nem feltétlenül szükséges)

$$F_1' \equiv F_2' \equiv f \quad \text{és} \quad F_1 - F_2 \not\equiv \text{áll.}$$

1.1.9. Definíció. (Jelölések, elnevezések)
$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum; $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.

Ekkor f összes primitív függvénye:

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} =: \int f(x)dx$$

Kiejtésben „integrál f”, vagy inkább az f függvény **határozatlan integrálja**.

Kevésbé precízen:

$$\int f = F + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

vagy

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (x \in R, c \in \mathbb{R})$$

A fenti halmazt kéne írnunk mindig, így használjuk ezt inkább.

1.1.10. Példa.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg} x + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

1.1.11. Példa.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), c \in \mathbb{R}\right)$$

1.2. Primitív függvények meghatározása

Alapintegrálok:

1.2.1. Példa.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

1.2.2. Példa.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c \quad (x > 0)$$

1.2.3. Példa.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + c \quad (x < 0)$$

1.2.4. Tétel. (műveleti tételek)
Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\exists$ prím függvénye $\quad\Rightarrow$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad (\alpha f + \quad \beta g) \text{ függvénynek is van primitív függvénye, és} \int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

1.2.5. Példa. Polinomok:

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)dx = a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots + a_0 \cdot x + c$$

1.2.6. Tétel. (hatványsorok)
Tegyük fel, hogy

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a); \quad R > 0).$$

Ekkor:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c \quad (x \in K_R(a), \quad c \in \mathbb{R})$$

1.2.7. Tétel. (parciális integrálás (szorzat deriválásának a megfordítása))
Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g \in D(I)$, és $f'g$-nek van primitív függvénye.
Ekkor fg'-nek is van primitív függvénye, és

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Ugyanis:

$$\left(f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x). \quad \blacksquare$$

1.2.8. Példa.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + x \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

1.2.9. Tétel. (első helyettesítési szabály)
Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,

$$\left.\begin{array}{c} f \in D(I), \quad \mathcal{R}_g \subset J; \quad f : J \to \mathbb{R} \\ f\text{-nek van primitív függvénye} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \circ f \cdot g'\text{-nek is van primitív függvénye, és} \\ \displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c \quad (x \in I, c \in \mathbb{R}), \\ \text{ahol } F \text{ a } f \text{ primitív függvénye.} \end{array}$$

Ugyanis:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x) \cdot g'(x) \overset{F'=f}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \blacksquare$$

1.2.10. Példa.

$$\int x^2(1+x^3)^{2016}dx = \frac{1}{3}\int (3x^2) \cdot (1+x^3)^{2016} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{2016}}{2017} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

1.2.11. Tétel. (második helyettesítési szabály)
Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(I)$ és $f \circ g \cdot g'$-nek van primitív függvénye.
Ekkor f-nek is van primitív függvénye, és

$$\int f(x)dx \overset{x:=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

1.2.12. Példa.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = ?$$

Megoldás: $\int \sqrt{1-x^2}dx$.
Alkalmazzuk az $x = \sin t = g(t) \quad x \in (-1,1) \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítést:

$$g'(t) = \cos t > 0 \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \exists g^{-1}; \quad t := \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t > 0} \cdot \cos t \, dt \underset{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}{\overset{\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t}{=}} \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x + x \cdot \cos(\arcsin x)}{2} + c$$

$$\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\substack{=:\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\alpha=x}}) = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c. \quad \blacksquare$$