2. előadás

2016. szeptember 19.

Emlékeztető. Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények fontos tulajdonságaiból kettőt ismertünk meg:

- $[a, b]$-n folytonos függvény korlátos,
- az abszolút szélsőértékek létezésére vonatkozó Weierstrass-tételt.

Most további fontos tulajdonságokat fogunk igazolni.

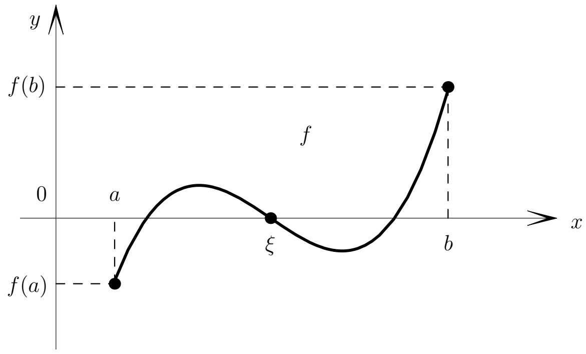
Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a, b]$*-n,*
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

(f *a két végpontban különböző előjelű)*

$\implies$ $\exists\, \xi \in (a, b)$, *ami gyöke az* f *függvénynek, azaz* $f(\xi) = 0$.

Szemléletesen:



Megjegyzés. A fenti ábra azt is illusztrálja, hogy f-nek az intervallumban több gyöke is lehet, és ezek az intervallumban „bárhol” elhelyezkedhetnek. ■

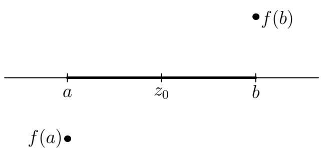
Bizonyítás. (A Bolzano-féle felezési eljárással.)

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen

$$[x_0, y_0] := [a, b]$$



Az intervallumot megfelezzük. Legyen

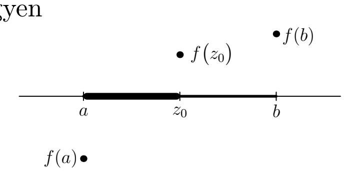
$$z_0 := \frac{a+b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ gyöke az egyenletnek.

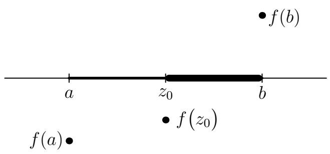
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [a, z_0]$$



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [z_0, b]$$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

$\vdots$

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben

$\exists\ [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

A Cantor-féle közösrész tételből és (iii)-ből következik, hogy az intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ, azaz

$$\text{egyértelműen } \exists\ \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért

$$\lim\big(f(x_n)\big) = f(\xi) = \lim\big(f(y_n)\big).$$

De (ii)-ből

$$\lim\big(f(x_n)\big) \leq 0 \leq \lim\big(f(y_n)\big),$$

azaz $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

Megjegyzés. Az eljárással az $f(x) = 0$ **egyenlet közelítő megoldásait** is elő lehet állítani. ■

Bolzano–Darboux-tétel.

$$\left.\begin{array}{c} \textit{Ha az } f : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} f \textit{ minden } f(a) \textit{ és } f(b) \textit{ közötti értéket felvesz } [a,b]\textit{-n,} \\ \textit{azaz ha } f(a) < f(b), \textit{ akkor} \\ \forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)\textit{-hez } \ \exists\, \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = c. \end{array}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $\varphi(x) := f(x) - c \ \big(x \in [a,b]\big)$ függvényre. ■

Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***Darboux-tulajdonságú I-n****, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.*

Az előzőek alapján a Bolzano–Darboux-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú $[a,b]$-n.* Ennek felhasználásával viszonylag egyszerűen igazolhatók a *tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$* intervallumon ($I = (a,b)$, $(a,b]$, $(0,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, stb.) folytonos függvények alábbi tulajdonságai.

Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n. Ekkor*

1^o *f Darboux-tulajdonságú I-n,*

2^o *$\mathcal{R}_f$ intervallum, vagyis intervallum folytonos képe is intervallum.*

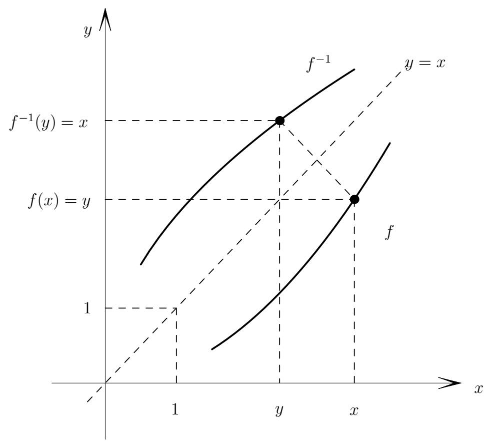
Megjegyzés. Van Darboux-tulajdonságú NEM folytonos függvény is. ■

Az inverz függvény folytonossága

Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékek tartoznak, azaz minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$ elem, amelyre $f(x) = y$. Ebben az esetben f *inverz függvénye*:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y.$$

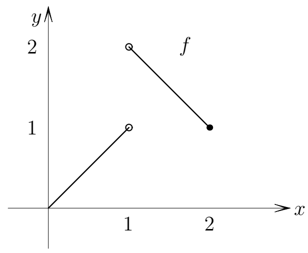
Tegyük fel, hogy f invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy *f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan*:



Megjegyzés. A következő egyszerű példa azt mutatja, hogy az f függvény folytonossága NEM „öröklődik" az f^{-1} inverz függvényre.

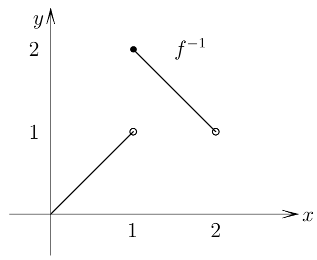
Példa. Ha

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 < x \le 2, \end{cases}$$



akkor

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 \le x < 2. \end{cases}$$



Világos, hogy

- f folytonos a $\mathcal{D}_f = [0, 2] \setminus \{1\}$ halmazon,
- f invertálható és $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$,
- $f^{-1} \notin C\{1\}$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy ha feltesszük, hogy f invertálható, az értelmezési tartománya *korlátos* és *zárt* intervallum, továbbá f folytonos $\mathcal{D}_f$-en, akkor az inverz függvénye is folytonos.

Tétel. (Az inverz függvény folytonossága.)

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Tegyük fel, hogy az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \quad\bullet\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n}, \\ \quad\bullet\ \exists\, f^{-1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\textit{az } f^{-1} \textit{ függvény folytonos a} \\ \mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{R}_f \textit{ halmazon.}\end{array}$$

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1}:\mathcal{R}_f\to[a,b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists\, y_0\in\mathcal{R}_f,\quad \text{hogy}\quad f^{-1}\notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\Longrightarrow \exists\,(y_n)\subset\mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim(y_n)=y_0,\quad \text{DE}\quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n)\neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$\begin{aligned} x_n &:= f^{-1}(y_n)\quad (\text{azaz } f(x_n)=y_n)\quad (\forall\, n\in\mathbb{N}),\\ x_0 &:= f^{-1}(y_0)\quad (\text{azaz } f(x_0)=y_0).\end{aligned}$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n)\neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \exists\,\delta>0,\quad \text{hogy az}\quad \big\{n\in\mathbb{N}\mid |x_n-x_0|\geq\delta\big\}\ \text{halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n)\subset[a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists\,\big(x_{n_k}\big)$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x}:=\lim\big(x_{n_k}\big)$. Indirekt úton belátható, hogy $\overline{x}\in[a,b]$.

$(*)$-ból következik, hogy az $\big(x_{n_k}\big)$ részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle)\qquad \overline{x}\neq x_0.$$

Mivel $f\in C\{\overline{x}\}$ és $\lim\big(x_{n_k}\big)=\overline{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim\Big(f\big(x_{n_k}\big)\Big)=\lim\big(y_{n_k}\big)=f\big(\overline{x}\big).$$

Az $\big(y_n\big)$ (vagyis az $\big(f(x_n)\big)$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim\big(y_{n_k}\big)=f\big(x_0\big),$$

ami azt jelenti, hogy $f\big(\overline{x}\big)=f\big(x_0\big)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\overline{x}=x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval. ■

Tétel.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Tegyük fel, hogy az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \quad\bullet\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n}, \\ \quad\bullet\ \exists\, f^{-1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\textit{az } f \textit{ függvény szigorúan monoton} \\ (\textit{növekedő vagy csökkenő}) \ [a,b]\textit{-n.}\end{array}$$

Tétel.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Legyen } I\subset\mathbb{R} \textit{ tetszőleges intervallum} \\ \quad\bullet\ f:I\to\mathbb{R} \textit{ folytonos } I\textit{-n}, \\ \quad\bullet\ \exists\, f^{-1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\mathcal{R}_f \textit{ is intervallum,} \\ f^{-1} \textit{ folytonos a } \mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{R}_f \textit{ intervallumon.}\end{array}$$

Szakadási helyek

Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* ***szakadási helye****, ha $f \notin C\{a\}$.*

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **megszüntethető szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték} \quad \text{és} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

2^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **elsőfajú szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \text{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{ezek végesek,} \quad \text{de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

3^o Az egyéb szakadási pontokat **másodfajú szakadási helyeknek** nevezzük.