5. előadás

2016. október 10.

Deriválási szabályok

Megjegyzés. Az analízisben (és általában a matematikában) a legegyszerűbb függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális, a hatvány- és logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények és a hiperbolikus függvények. **Elemi függvényeknek** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatunk meg a négy alapművelet, a kompozíció és az invertálás segítségével.

Az előző órán a definícióból kiindulva vizsgáltunk meg differenciálhatóság szempontjából néhány elemi függvényt. A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamilyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt megkönnyítik. Ezek az ún. **deriválási szabályok**, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

• Algebrai műveletek

Tétel. (Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}\big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$ pontban. Ekkor

1^o $\quad cf \in D\{a\}$ *és* $\big(cf\big)'(a) = cf'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$,

2^o $\quad f + g \in D\{a\}$ *és* $\big(f + g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

3^o $\quad f \cdot g \in D\{a\}$ *és* $\big(f \cdot g\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

4^o *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítások közös **ötlete** az, hogy az egyes függvények differenciahányadosait az $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ differenciahányadosok segítségével fejezzük ki.

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{fg} \setminus \{a\}\big).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $fg \in D\{a\}$ és

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \quad \big(\forall\, x \in K(a)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

Az $\dfrac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\frac{1}{g(a)g(x)}\cdot\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{g(a)g(x)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\quad\Big(x\in\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}\setminus\{a\}\Big).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g\in C\{a\}\implies\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a)\neq 0$. Ezért

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{1}{g(a)\lim\limits_{x\to a}g(x)}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=$$

$$=\frac{1}{g^2(a)}\left(f'(a)g(a)-f(a)g'(a)\right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{f}{g}\in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\ \blacksquare$$

• Összetett függvény

Tétel. (Az összetett függvény deriválása.)

Tegyük fel, hogy $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és
- $\mathcal{R}_g\subset\mathcal{D}_f$,
- $g\in D\{a\}$ *egy* $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_g$*-ra,*
- $f\in D\{g(a)\}$

$\implies$ $f\circ g\in D\{a\}$ *és* $\big(f\circ g\big)'(a)=f'\big(g(a)\big)\cdot g'(a)$.

Bizonyítás.

(i) Először azt igazoljuk, hogy $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_{f\circ g}$.

Valóban: $g\in D\{a\}\implies a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_g$, és $\mathcal{R}_g\subset\mathcal{D}_f$ miatt $\mathcal{D}_{f\circ g}=\mathcal{D}_g$, tehát $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_{f\circ g}$.

(ii) $g\in D\{a\}\ \underset{\text{közelítés}}{\overset{\text{lineáris}}{\implies}}\ \exists\,\varepsilon:\mathcal{D}_g\to\mathbb{R},\ \lim\limits_{a}\varepsilon=0$:

$$(*)\qquad g(x)-g(a)=g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\quad\big(x\in\mathcal{D}_g\big).$$

Hasonlóan: $f\in D\{g(a)\}\ \underset{\text{közelítés}}{\overset{\text{lineáris}}{\implies}}\ \exists\,\eta:\mathcal{D}_f\to\mathbb{R},\ \lim\limits_{a}\eta=0$:

$$f(y)-f\big(g(a)\big)=f'\big(g(a)\big)\big(y-g(a)\big)+\eta(y)\big(y-g(a)\big)\quad\big(y\in\mathcal{D}_f\big).$$

Ebbe $y=g(x)$-et helyettesítve:

$$\big(f\circ g\big)(x)-\big(f\circ g\big)(a)=f\left(g(x)\right)-f\left(g(a)\right)=$$

$$=f'\big(g(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)+\eta\big(g(x)\big)\big(g(x)-g(a)\big)\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}f'\big(g(a)\big)\big[g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big]+\eta\big(g(x)\big)\big[g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big]=$$

$$=f'\big(g(a)\big)\,g'(a)(x-a)+(x-a)\big[f'\big(g(a)\big)\cdot\varepsilon(x)+\eta\big(g(x)\big)\big(g'(a)+\varepsilon(x)\big)\big]=$$

$$=A\cdot(x-a)+\delta(x)(x-a)\quad\big(x\in\mathcal{D}_{f\circ g}\big),$$

ahol

$$A := f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a),$$
$$\delta(x) := f'\left(g(a)\right) \cdot \varepsilon(x) + \eta\left(g(x)\right) \cdot \big(g'(a) + \varepsilon(x)\big).$$

Mivel $x \to a$ esetén $g(x) \to g(a)$, ezért $\eta\big(g(x)\big) \to 0$, ha $x \to a$ (feltehető ugyanis, hogy $\eta\big(g(a)\big) = 0$, ezért η folytonos $g(a)$-ban). Ebből, továbbá a $\lim_a \varepsilon = 0$-ból következik, hogy

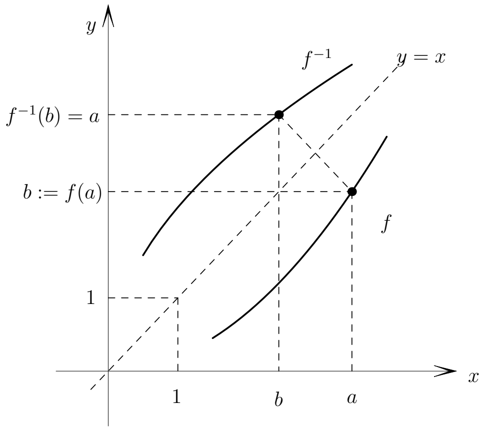
$$\delta(x) \to 0, \text{ ha } x \to a.$$

Ez pedig a lineáris közelítésre vonatkozó tétel szerint éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\left(g(a)\right) g'(a). \blacksquare$$

• Inverz függvény

Szemléletesen. Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei:



Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $\big(a, f(a)\big) =: (a, b)$ pontját. Ennek tükörképe az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $\big(f(a), a\big) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f'(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \blacksquare$$

Tétel. (Az inverz függvény deriválása.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy az } f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} \textit{ függvény} \\ \bullet \textit{ szigorúan monoton és} \\ \quad \textit{folytonos az } (\alpha, \beta) \textit{ intervallumon,} \\ \bullet \textit{ valamilyen } a \in (\alpha, \beta) \textit{ pontban } f \in D\{a\}, \\ \bullet f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{az } f^{-1} \textit{ függvény deriválható a} \\ b := f(a) \textit{ pontban és} \\ \big(f^{-1}\big)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}. \end{array}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $(y_n) \subset \mathcal{R}_f$ sorozatot, amelyre $\lim_{n\to+\infty} y_n = b$.

Legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{és} \quad f(x_n) = y_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az inverz függvény folytonossága alapján

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Ezeket felhasználva az f^{-1} függvény b-pontbeli különbséghányados függvénye:

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}=\frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)}=\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv és a hányados határértékére vonatkozó tétel alapján, $f'(a)\neq 0$ figyelembevételével következik, hogy $f^{-1}\in D\{b\}$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (α,β) intervallumban, és tegyük fel, hogy f mindenütt deriválható (α,β)-ban. Ha f' sehol sem nulla, akkor az előbbi tétel szerint f^{-1} mindenütt deriválható a $J=\mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{R}_f$ intervallumban, és $\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big)=1/f'(x)$ minden $x\in(\alpha,\beta)$. Ha $y\in J$, akkor $f^{-1}(y)\in(\alpha,\beta)$ és $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$. Ebből azt kapjuk, hogy $\left(f^{-1}\right)'(y)=1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$. Mivel ez minden $y\in J$-re igaz, ezért

$$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}. \ \blacksquare$$

• Hatványsor összegfüggvénye

Tétel. (Hatványsor összegfüggvényének deriválása.)

Legyen $a\in\mathbb{R}$ és $\alpha_n\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,\ldots)$. Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}\alpha_n(x-a)^n \qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x\in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x\in K_R(a)$ pontban $f\in D\{x\}$ és

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha_n(x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x\in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás. Nem kérdezzük. Az érdeklődők a bizonyítást az órai anyag végén megtalálják. $\blacksquare$

Megjegyzés. A sin és a cos függvény deriválhatóságára vonatkozó állításokat korábban már igazoltuk. A fenti tétel alapján a szóban forgó állításokra új bizonyításokat adunk.

Emlékeztetünk arra, hogy a sin és a cos függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x:=\sin(x):=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és

$$\cos x:=\cos(x):=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A fenti tétel alapján $\forall\, x\in\mathbb{R}$ pontban $\sin,\ \cos\in D\{x\}$ és

$$\begin{aligned}\sin' x=(\sin x)'&=1-3\cdot\frac{x^2}{3!}+5\cdot\frac{x^4}{5!}-7\cdot\frac{x^6}{7!}+\cdots=\\&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\cos x \qquad (x\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

$$\cos' x = (\cos x)' = -2 \cdot \frac{x}{2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} - 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + 8 \cdot \frac{x^7}{8!} \cdots =$$

$$= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}). \blacksquare$$

Néhány elemi függvény deriváltja (folytatás)

7. **Polinomfüggvénynek** nevezzük a

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvényeket, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ valós számok. A hatványfüggvények deriválására, valamint az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ pontban } P \in D\{x\}, \text{ és}$$

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}. \blacksquare$$

8a. **A tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos}, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{tg}\, x := \mathrm{tg}\,(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}} = \big\{ x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0 \big\} \Big).$$

A cos függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}}$ pontban $\mathrm{tg} \in D\{x\}$, és

$$\mathrm{tg}'\, x = \big(\mathrm{tg}\ x\big)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\mathrm{tg}'\, x = \big(\mathrm{tg}\ x\big)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}}\big)}\,. \blacksquare$$

8b. **A kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{ctg}\ x := \mathrm{ctg}\,(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{ctg}} = \big\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0 \big\} \Big).$$

A sin függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\mathrm{ctg}}$ pontban $\mathrm{ctg} \in D\{x\}$, és

$$\mathrm{ctg}'\, x = \big(\mathrm{ctg}\ x\big)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\cos' x \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\mathrm{ctg}'\, x = \big(\mathrm{ctg}\ x\big)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{ctg}}\big)}\,. \blacksquare$$

$\boxed{\mathbf{9.}}$ **A természetes alapú exponenciális függvény** $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Az exp függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt az $a := 0$, $\alpha_n := \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = \exp(x) = e^x. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az exp **függvény deriváltfüggvénye önmaga**. Tulajdonképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának. $\blacksquare$

$\boxed{\mathbf{10.}}$ **A természetes alapú logaritmusfüggvény** $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az ln függvényt az exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\ln})$ pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{\exp'\big(\ln x\big)} = \frac{1}{\exp\big(\ln x\big)} = \frac{1}{x}. \ \blacksquare$$

$\boxed{\mathbf{11.}}$ **Exponenciális függvények.** Ha $a > 0$ valós szám, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\exp_a})$ pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp_a'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az $\exp_a$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp_a'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a. \ \blacksquare$$

$\boxed{\mathbf{12.}}$ **Logaritmusfüggvények.** Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall\, x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty)\backslash\{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := \big(\exp_a\big)^{-1}.$$

Az $\exp_a$ függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\,(= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{\exp_a'\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacksquare$$

$\boxed{13.}$ **Általánosított hatványfüggvények.** Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0, +\infty)\,(= \mathcal{D}_{h_\alpha})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}\,.$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Írjuk fel az $x > 0$ alapot e-hatványként: $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = \big(e^{\ln x}\big)^\alpha = e^{\alpha\,\ln x} \qquad \big(x > 0\big),$$

majd alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó állításunkat. Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$ és

$$h_\alpha'(x) = (x^\alpha)' = \big(e^{\alpha\,\ln x}\big)' = e^{\alpha\,\ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}. \ \blacksquare$$

$\boxed{14.}$ **A $h(x) = f(x)^{g(x)}$ alakú függvények deriválásánál** az $f(x)$ alapot ismét e-hatványként írjuk fel: ha $f(x) > 0$, akkor

$$f(x) = e^{\ln f(x)}.$$

Ekkor

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = \Big(e^{\ln f(x)}\Big)^{g(x)} = e^{g(x)\,\cdot\,\ln f(x)}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy h egy összetett függvény, exp a külső és $g \cdot \big(\ln \circ f\big)$ a belső függvény.

Példa. Legyen $f(x) := x^x$ $(x > 0)$. Ekkor

$$f(x) = x^x = \big(e^{\ln x}\big)^x = e^{x \cdot \ln x} \qquad (x > 0).$$

Ebből az alakból már látszik, hogy f összetett függvény: az exp a külső függvény és $x \cdot \ln x$ $(x > 0)$ a belső függvény. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel összes feltétele teljesül, ezért az f függvény minden $x > 0$ pontban deriválható és

$$f'(x) = (x^x)' = \big(e^{x \cdot \ln x}\big)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1). \ \blacksquare$$

$\boxed{15.}$ **Hiberbolikusz függvények**

$\boxed{15a.}$ **Az szinuszhiperbolikusz-függvény és a koszinuszhiperbolikusz-függvény**

Először emlékeztetünk arra, hogy a szinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése sh) és a koszinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése ch) az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\text{sh}\, x := \text{sh}\,(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{ch}\, x := \text{ch}\,(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Jegyezzük meg jól, hogy ezek a függvények kifejezhetők az exp függvénnyel. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots, \end{aligned}$$

ezért

$$(*) \qquad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \qquad \text{és} \qquad \boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. *$\forall\, x \in \mathbb{R}\, (= \mathcal{D}_{\text{sh}} = \mathcal{D}_{\text{ch}})$ pontban* $\operatorname{sh}, \operatorname{ch} \in D\{x\}$, *és*

$$\boxed{\operatorname{sh}' x = \big(\operatorname{sh} x\big)' = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \textit{és} \qquad \boxed{\operatorname{ch}' x = \big(\operatorname{ch} x\big)' = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. A sh és a ch függvényre a hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban $\operatorname{sh}, \operatorname{ch} \in D\{x\}$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}' x = \big(\operatorname{sh} x\big)' &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' = \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{x^2}{3!} + 5 \cdot \frac{x^4}{5!} + 7 \cdot \frac{x^6}{7!} + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch}' x = \big(\operatorname{ch} x\big)' &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right)' = \\ &= 2 \cdot \frac{x}{2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} + 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + 8 \cdot \frac{x^7}{8!} + \cdots = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sh} x. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzések.

1^o A tétel állításait a $(*)$ képletek felhasználásával is bizonyíthatjuk.

2^o Korábban már megjegyeztük, hogy a trigonometrikus függvényekkel sok rokon vonást mutatnak a hiperbolikusz függvények. A hasonlóságot mutatják az előző félévben ismertetett állítások:

Az addíciós tételek: minden x, y valós számra

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

A négyzetes összefüggések: minden x valós számra

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1. \end{aligned}$$

Az analógiát tovább erősítik a deriváltakra vonatkozó állítások.

A jelzett hasonlóságok azt mutatják, hogy az exponenciális függvényeknek (vagyis a hatványozásnak) sok köze van a trigonometrikus függvényekhez. Ez eléggé megdöbbentő, ha a szóban forgó függvények garfikonjaira gondolunk. Az exponenciális- és a trigonometrikus függvények közötti összefüggést azonban csak a komplex számokon keresztül érthetjük meg. Komplex értékű függvényeket azonban csak később fogunk tárgyalni. ■

15b. A tangenshiperbolikusz-függvény és a kotangenshiperbolikusz-függvény

A tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük a tangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése th) és a kotangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése cth):

$$\operatorname{th} := \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{th} x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\text{th}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{ch} x \neq 0\big\}\Big),$$

$$\mathrm{cth} := \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{cth}\, x := \mathrm{cth}\,(x) := \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} \quad \Big(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{cth}} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{sh}\, x \neq 0\big\}\Big).$$

A ch függvény definíciójából következik, hogy $\mathrm{ch}\, x \geq 1$ minden x valós számra, ezért

$$\mathcal{D}_{\mathrm{th}} = \mathbb{R}.$$

Mivel

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff x = 0, \quad \text{ezért} \quad \mathcal{D}_{\mathrm{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R} \big(= \mathcal{D}_{\mathrm{th}}\big)$ pontban $\mathrm{th} \in D\{x\}$, és

$$\mathrm{th}'\, x = \big(\mathrm{th}\ x\big)' = \left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \frac{\mathrm{sh}' x \cdot \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}' x}{\mathrm{ch}^2\, x} = \frac{\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x}{\mathrm{ch}^2\, x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x},$$

azaz

$$\boxed{\mathrm{th}'\,(x) = \big(\mathrm{th}\ x\big)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\mathrm{th}}\big)}\,.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\mathrm{cth}}$ pontban $\mathrm{cth} \in D\{x\}$, és

$$\mathrm{cth}'\, x = \big(\mathrm{cth}\, x\big)' = \left(\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\right)' = \frac{\mathrm{ch}'\, x \cdot \mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{sh}'\, x}{\mathrm{sh}^2\, x} = \frac{\mathrm{sh}^2\, x - \mathrm{ch}^2\, x}{\mathrm{sh}^2\, x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x},$$

azaz

$$\boxed{\mathrm{cth}'\, x = \big(\mathrm{cth}\ x\big)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2\, x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathcal{D}_{\mathrm{ctg}}\big)}\,. \blacksquare$$

Kiegészítés: Hatványsor összegfüggvényének deriválása

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás.

1. lépés. Először azt mutatjuk meg, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=1} n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}$$

számsor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Ezt az állítást a következőképpen látjuk be. Tekintsük a konvergenciaintervallum egy $x_0 \in K_R(a)$ pontját és válasszuk meg a ϱ számot úgy, hogy még az is a konvergenciaintervallum belsejébe tartozzék és az

$$|x_0 - a| < |\varrho - a| < R$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Ekkor a $\sum_{n=0} \alpha_n (\varrho - a)^n$ számsor konvergens, tehát a tagjai nullához tartanak, ezért korlátosak is, azaz

$$\exists\, K > 0 \ : \ |\alpha_n| \cdot |\varrho - a|^n < K \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

A tagonkénti deriválással kapott sor n-edik tagja x_0-ban

$$n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1} = n\alpha_n (\varrho - a)^n \cdot \frac{1}{\varrho - a} \left(\frac{x_0 - a}{\varrho - a}\right)^{n-1},$$

ezért

$$|n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}| \le nK \cdot \frac{1}{|\varrho - a|} \left|\frac{x_0 - a}{\varrho - a}\right|^{n-1} = \frac{K}{|\varrho - a|} \cdot nq^{n-1},$$

ahol $0 \le q := \left|\frac{x_0 - a}{\varrho - a}\right| < 1$.

A $\sum_{n=0} \left|n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}\right|$ sornak tehát majoránsa a $\sum_{n=0} \frac{K}{|\varrho - a|} nq^{n-1}$ számsor. Ez $q = 0$ mellett nyilván konvergens, $q > 0$ esetén pedig pozitív tagú számsor és szomszédos tagjainak hányadosa

$$\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q \to q < 1, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

A számsorokra vonatkozó hányadoskritérium szerint tehát a talált majoráns sor konvergens, így az eredeti $\sum_{n=0} n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}$ sor abszolút konvergens. Ezzel az állítást igazoltuk.

2. lépés. Jelöljük F-fel az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott hatványsor összegfüggvényét:

$$F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Megmutatjuk, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban

$$(*) \qquad \lim_{t \to x_0} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0)\right) = 0.$$

Ebből már következik, hogy az f függvény differenciálható az x_0 pontban és a deriváltja $F(x_0)$-lal egyenlő, azaz

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}.$$

A $(*)$ egyenlőség igazolásához rögzítsük az $x_0 \in K_R(a)$ pontot és vegyünk egy olyan $0 < R_0 < R$ számot, amelyre $x_0 \in K_{R_0}(a)$. Legyen $\xi := t - a$ és $\xi_0 := x_0 - a$. Ekkor minden $t \in K_{R_0}(a)$ esetén

$$\begin{aligned} f(t) - f(x_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (t-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x_0 - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \big(\xi^n - \xi_0^n\big) = \\ &= (\xi - \xi_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big) = \\ &= (t - x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \big(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \cdots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}\big) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n \xi_0^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \big[(\xi^{n-1} - \xi_0^{n-1}) + \xi_0(\xi^{n-2} - \xi_0^{n-2}) + \cdots + \xi_0^{n-2}(\xi - \xi_0)\big]. \end{aligned}$$

Mivel

$$\xi^l - \xi_0^l = \big(\xi - \xi_0\big)(\xi^{l-1} + \cdots + \xi_0^{l-1}\big) \qquad (l \in \mathbb{N}),$$

$|\xi| = |t - a| < R_0$ és $|\xi_0| = |x_0 - a| < R_0$, ezért

$$\big|\xi^l - \xi_0^l\big| \le |\xi - \xi_0| \cdot l \cdot R_0^{l-1}.$$

A fentiek alapján tehát

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0)\right| \le \\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |\xi - \xi_0| \big[(n-1)R_0^{n-2} + (n-2)R_0^{n-2} + \cdots + 1 \cdot R_0^{n-2}\big] = \\ &= |t - x_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Alkalmazzuk most az 1. lépésben kapott eredményt a $\sum\limits_{n=1} n\alpha_n (x-a)^{n-1}$ hatványsorra. A tagonkénti deriválással nyert

$$\sum_{n=2} n(n-1)\alpha_n (x-a)^{n-2}$$

sor tehát konvergens, sőt abszolút konvergens minden $x \in K_R(a)$ pontban. Ebből következik, hogy az (1)-ben szereplő $\sum |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}$ sor konvergens. Jelöljük M-mel az összegét. Így kapjuk az

$$\left|\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0)\right| \le M|t - x_0|$$

becslést, amiből $t \to x_0$ határátmenetet véve adódik (1), és ez a tétel bizonyítását jelenti. ■