5. Gyakorlatra

I. Órai anyag

3. Határozza meg, hogy mely pontokban nem folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} 2x+1 & x \le -1 \\ 3x & -1 < x < 1 \\ 2x-1 & x \ge 1 \end{cases}$$

függvény.

Döntse el, hogy ezekben a pontokban vajon folytonos-e jobbról illetve balról.

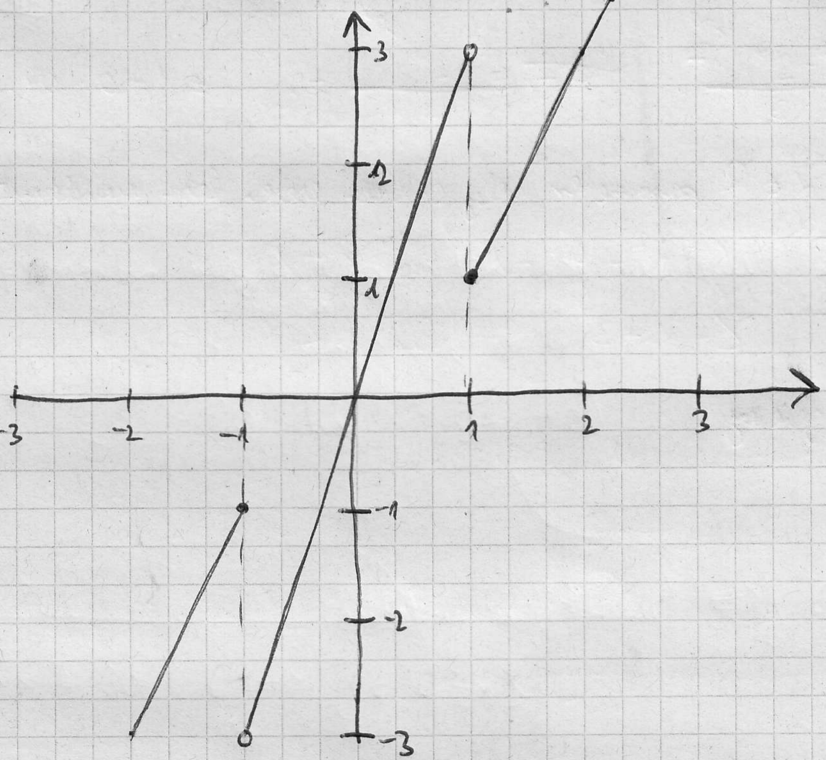
Ha $x < -1$: $2x+1 \in C \Rightarrow f \in C$ (mivel az ~~fenti~~ utóbbi fv. folytonos)

Ha $-1 < x < 1$: $3x \in C$ (x folytonos $\xrightarrow[\text{tételek}]{\text{műv.}}$ $3x$ is az) $\Rightarrow f \in C$

Ha $x \ge 1$: $2x-1 \in C \Rightarrow f \in C$

Mj: Érdekesebb a -1, 1 pontokban, ahol ez a stratégia nem működik.

↳ a kül. értékeket egymás mellé rakva folytonos függvényt kapunk?



Ha $x = -1$

Tudjuk: $f \in C\{-1\} \iff \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \iff \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \cancel{\lim}\, f(-1)$

Tehát:

- bal oldali határérték: $\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ \uparrow \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1-0 \\ \uparrow \\ x<-1}} 2x+1 = 2(-1)+1 = \underline{\underline{-1}}$

• jobb oldali határérték: $\lim\limits_{\substack{x\to -1+0\\ \uparrow \\ x>-1}} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ x>-1}}{=} \lim\limits_{x\to -1+0} 3x = 3(-1) = \underline{\underline{-3}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = -1 \neq -3 = \lim\limits_{x\to -1+0}$ $\Rightarrow$ a függvény nem folytonos -1-ben

$\Rightarrow$ a függvénynek elsőfajú szakadási helye (ugrása) van -1-ben

<u>Ha $x = 1$</u>

Tudjuk: $f \in C\{1\} \iff \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$

Tehát:

• bal oldali határérték: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ x<1}}{=} \lim\limits_{x\to 1-0} 3x = \underline{\underline{3}}$

• jobb oldali határérték: $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ x>1}}{=} \cancel{2x-1} \lim\limits_{x\to 1+0} 2x-1 = 2(1)-1 = \underline{\underline{1}}$

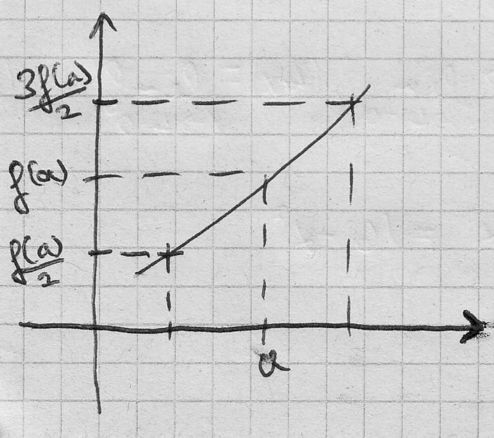
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \rightarrow$ 1-ben a függvény nem folytonos

$\Rightarrow$ elsőfajú szakadási helye (ugrása) van 1-ben

Tehát a függvény -1-ben és 1-ben nem folytonos, ~~viszont~~ mindenhol máshol pedig folytonos.

$\boxed{4.}$ Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor az a pontnak létezik olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

$f \in C\{a\} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in K(a) \cap D_f : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$



$\varepsilon := \frac{f(a)}{2} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f : |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$

$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ teljesül ha $x \in K_\delta(a) \cap D_f$

$\Updownarrow$

$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$

$\Rightarrow \underline{f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0 \quad \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f}$

5. Értelmezhető-e az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ függvény úgy, hogy mindenütt folytonos legyen?

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $f \in C\{x\}$, ugyanis $\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\in C\ (x \neq 0)}$ folytonos.

$x = 0$-ban

$$f \in C\{0\} \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{1}} \quad \Rightarrow f(0) := 1$$

↳ ~~ha~~ ha bármilyen más értéket választunk nem lesz folytonos

→ tehát a függvénynek megszüntethető szakadási helye van 0-ban.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

6. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & \text{ha } x \in (-\infty, 4) \\ \alpha x + 20, & \text{ha } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

függvény?

<u>Ha $x < 4$</u>: $x^2 - \alpha^2 \in C$ (α értékétől függetlenül) $\Rightarrow f \in C\{x\}$

<u>Ha $x > 4$</u>: $\alpha x + 20 \in C \Rightarrow f \in C\{x\}$

<u>Ha $x = 4$</u>:

Tudjuk: $f \in C\{4\} \iff \lim_{x \to 4} f(x) = f(4) \iff \lim_{x \to 4+0} f(4x) = \lim_{x \to 4-0} f(x) = f(4)$

(két oldali határértéket kell használni)

- bal oldali határérték: $\lim\limits_{\substack{x \to 4-0 \\ \uparrow \\ x<4}} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x<x}}{=} \lim\limits_{x \to 4-0} x^2 - \alpha^2 = 16 - \alpha^2$

· jobb oldali határérték: $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) \underset{x>4}{=} \lim\limits_{x\to 4+0} \alpha x + 20 = 4\alpha + 20$

$f(4)$ kiszámolása:

$f(4) = \alpha x + 20 = 4\alpha + 20$ (nem igazán számít, mivel megegyezik a jobb old. h.é.-el)

Ahhoz, hogy ezek egyenlőek legyenek:

$$16 - \alpha^2 = 4\alpha + 20$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

Következmény: $f \in C \iff \alpha = -2$.

$\boxed{7.}$ Határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2;5\} \\ 0, & \text{ha } x=2 \text{ vagy } x=5 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek fajtáit.

Ha $x=2$:

~~$f \in C\{2\}$~~

Tudjuk: $f \in C\{2\} \iff \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Mj: felesleges jobbról és balról is vizsgálni, mivel mindkét oldalon ugyanúgy értelmezzük (csak akkor kéne, ha jobb és bal oldalon kül. hozzárend. szabály lenne)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-5} \overset{\text{műv. tét.}}{=} \frac{2-3}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

kritikus $\left(\frac{0}{0}\right)$ határérték ~~lenne~~ lenne, bontsuk szorzatra ezért

Számláló: $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$

Nevező: $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$

$f(2) = 0$

$\Rightarrow \exists$ határértéke de 2-ben nem folytonos

$\Rightarrow$ megszüntethető szakadási helye van

(Ha egyetlen pontban megváltoztathatnánk a függvényértéket, akkor folytonos függvényt kapnánk azaz ha $f(2)=0$ helyett $f(2)=\frac{1}{3}$ lenne.)

Ha $x=5$:

Tudjuk: $f \in C\{5\} \iff \lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \lim_{x\to 5} \underbrace{\frac{(x-3)}{(x-5)}}$$

mint előző esetben $f(2)$-nél

nem mindegy, melyik oldalról közelítjük → egyoldali h.é. vizsgálata

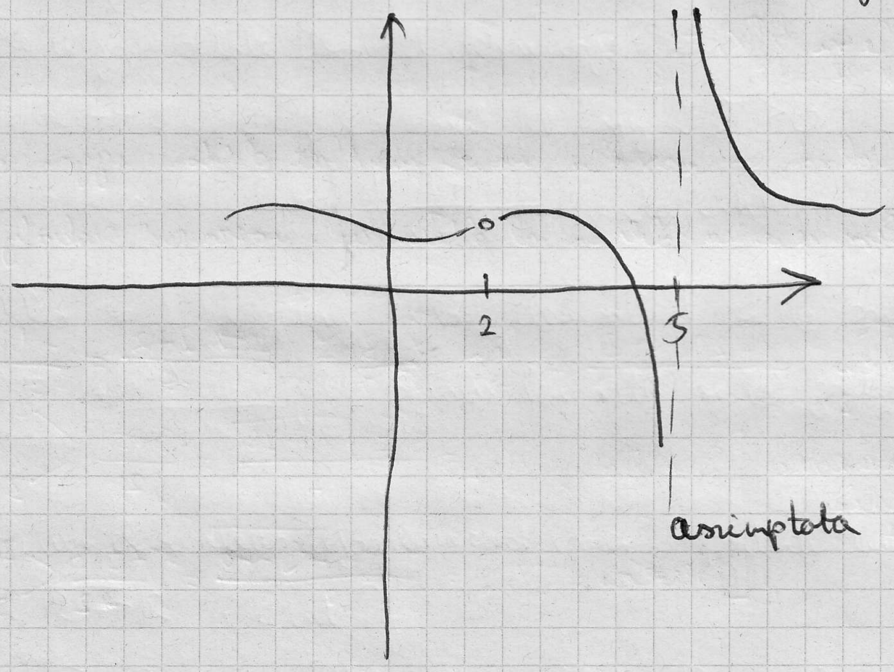
- bal oldali határérték: $\lim\limits_{x\to 5-0} \frac{x-3}{x-5} \underset{\substack{\uparrow \\ x<5}}{=} \underline{\underline{-\infty}}$ (számláló $\to 2$, nevező $\to 0$)
- jobb oldali határérték: $\lim\limits_{x\to 5+0} \frac{x-3}{x-5} \underset{\substack{\uparrow \\ x>5}}{=} \underline{\underline{+\infty}}$ (számláló $\to 2$, nevező $\to 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5-0} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 5+0} f(x)$$

$\Rightarrow$ a függvénynek $\nexists$ határértéke az 5-ben

$\Rightarrow$ nem is lehet folytonos az 5-ben

$\Rightarrow$ 5-ben elsőfajú szakadási helye van a függvénynek



8. Igazolja, hogy az $\underline{\ln x = e^x - 3}$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

Mivel nem oldható meg egyszerűen, ezért vizsgáljuk a függvényt.

$$\ln x = e^x - 3 \Longleftrightarrow e^x - 3 - \ln x = 0$$

$$f(x) := e^x - 3 - \ln x \; ; \; x \in [1, 2]$$

Bolzano tétel:

$$f \in C[1;2] \text{ mivel } \left.\begin{array}{r} e^x \in C \\ 3 \in C \\ \ln x \in C \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{miatt}]{\text{műv. tételek}} e^x - 3 - \ln x \in C$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \underbrace{e^1}_{\sim 2,7} - 3 - \underbrace{\ln 1}_{0} = e - 3 < 0 \\ f(2) = \underbrace{e^2}_{\sim 2,7^2 > 4} - 3 - \underbrace{\ln 2}_{<1} > e^2 - 4 > 0 \end{array}\right\} \text{különböző előjelű a fv. a két pontban}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zérushely}}}{\exists x^*} \in (1,2) : f(x^*) = 0$$

$\Rightarrow$ tehát valahol $[1;2]$ intervallumban metszi az x tengelyt $\Rightarrow \exists$ megoldása

9. Mutassa meg, hogy az $e^x = 2 - x$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

Definiáljunk rá egy függvényt, és keressük a zérushelyét (hogy van-e):

$$f(x) := e^x + x - 2 \qquad f \in C(\mathbb{R})$$

$$f(0) = \underbrace{e^0}_{1} + 0 - 2 = -1 < 0$$

MJ: Nagyobb helyen nagyobb lesz a fv. érték $\rightarrow$ kell még 1 poz. érték, hogy használni tudjuk a Bolzano-tételt

$$f(1) = \underbrace{e^1}_{\sim 2,7} + 1 - 2 = \underbrace{e}_{\sim 2,7} - 1 > 0$$

$\Rightarrow [0,1]$ intervallumon $f(0) \cdot f(1) < 0$ (Bolzano-tételhez kell)

$\Rightarrow \underset{\text{zérushely}}{\exists x^*} \in (0,1) : f(x^*) = 0 \Rightarrow$ van megoldása az egyenletnek

II. Elméleti kérdések

1.) Mi a belső pont definíciója?

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontja $a \in A$, ha $\exists K(a): K(a) \subset A$

$\mathrm{int}\, A := \{a \in A \mid a \text{ belső pontja } A\text{-nak}\}$

↳ interior: belső pontok halmazának jelölése

Példák:

a) $A = [0,1]$, $\mathrm{int}\, A = (0,1)$ b) $A = (0,1]$, $\mathrm{int}\, A = (0,1)$ c) $A = \{1, 4, e\}$, $\mathrm{int}\, A = \emptyset$

2.) Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}\, D_f$

f differenciálható/deriválható az a pontban, ha $\exists$ és véges $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a)$ határérték.

$f'(a)$: f deriváltja vagy differenciálhányadosa az a pontban.

jelölés: $f \in D\{a\}$

3.) Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}\, D_f$.

1° $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$

2° $f \in C\{a\} \not\Longrightarrow f \in D\{a\}$

4.) Mi a jobb oldali derivált definíciója?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$ és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0_+ : [a, a+\delta] \subset D_f$. Ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték.

akkor az f függvény jobbról deriválható az a pontban.

$\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'_+(a)$ az f jobb oldali deriváltja az a pontban.

5.) Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}\, D_f$

$$f \in D\{a\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : D_f \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{a} \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in D_f) \end{cases}$$

$A = f'(a)$

6.) Mi az érintő definíciója?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának van érintője az $(a, f(a))$ pontban, ha $f \in D\{a\}$.
A grafikon $(a, f(a))$ pontbeli érintője az $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ egyenletű egyenes.

III. Házi feladatok

1. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4 - 1, & \text{ha } x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

függvény?

Ha $x < 1$: $\alpha x^2 + 4x - 1 \in C \Rightarrow f \in C\{x\}$

Ha $x > 1$: $-x + 3 \in C \Rightarrow f \in C\{x\}$

Ha $x = 1$:

Tudjuk: $f \in C\{1\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$

- jobb oldali határérték:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) \underset{x>1}{=} \lim_{x \to 1+0} -x + 3 \underset{\text{műv. tételek}}{=} \underline{\underline{2}}$$

- bal oldali határérték:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) \underset{x<1}{=} \lim_{x\to 1-0} \alpha x^2 + 4x - 1 \underset{\text{műv. tételek}}{=} \alpha + 4 - 1 = \underline{\underline{\alpha + 3}}$$

$f(1) = \alpha + 4 - 1 = \alpha + 3$ (mivel megegyezik a jobb oldali h. é.-el, nem kell figyelembe venni)

Ahhoz, hogy a jobb és bal oldali h. é. egyenlő legyen:

$\alpha + 3 = 2 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Következmény: $f \in C \Leftrightarrow \alpha = -1$

$\boxed{2.}$ Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ 0, & \text{ha } x = -1 \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

függvény folytonossági illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

<u>Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:</u> $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} \in C \Longrightarrow f \in C\{x\}$

<u>Ha $x = -1$:</u>

Tudjuk: $f \in C\{-1\} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} f(x)$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szorzattá} \\ \text{alakítjuk}}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x+1}$$

← függ az egyoldali határértékektől

Számláló: $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$

Nevező: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

- jobb oldali határérték: $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x+4}{x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x>-1}}{=} \underline{\underline{+\infty}}$

- bal oldali határérték: $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x+4}{x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x<-1}}{=} \underline{\underline{-\infty}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim\limits_{x\to -1-0} f(x)$

$\Rightarrow$ a függvénynek nincs határértéke -1-ben

$\Rightarrow$ a függvénynek elsőfajú szakadási helye van -1-ben

<u>Ha $x = 2$:</u>

Tudjuk: $f \in C\{2\} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$ $\quad f(2) = \alpha$

$\Rightarrow$ ha $\alpha = 2$, akkor 2-ben folytonos, ha $\alpha \neq 2$, akkor megszüntethető szakad. helye van

$\boxed{3.}$ Igazolja, hogy az $x^2=\sqrt{x+1}$ egyenletnek van legalább egy megoldása $(1,2)$ intervallumonban.

A Bolzano-tételt fogjuk felhasználni:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy } f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a,b]\text{-n, és} \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi\in[a,b]: f(\xi)=0$$

$$f(x):=x^2-\sqrt{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-\sqrt{2}<0 \\ f(2)=4-\sqrt{2+1}=4-\sqrt{3}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(2)<0$$

És f folytonos $[1,2]$ intervallumon

Tehát a Bolzano-tétel alapján:

$$\exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zérushely}}}{x^*}\in(1,2): f(x^*)=0 \Rightarrow \text{~~te~~} \exists \text{ legalább 1 megoldása az egyenletnek.}$$

$\boxed{4.}$ Mutassa meg, hogy az $x^5-x^2+2x+3=0$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

Itt is a Bolzano-tételt fogjuk felhasználni.

$$f(x):=x^5-x^2+2x+3$$

$$f(1)=1-1+2+3=5>0$$

$$f(-2)=-32-4-4+3=-37<0$$

És f folytonos $[-2,1]$ intervallumon.

Ezért a Bolzano-tétel miatt:

$$\exists x^*\in(-2,1): f(x^*)=0 \Rightarrow \text{az egyenletnek } \exists \text{ legalább 1 megoldása}$$