Analízis II.
+/− kidolgozás
5-6. óra

A jegyzet UMANN Kristóf kidolgozásaiból készült, Dr. SZILI László előadása alapján. (2016. október 13.)
Gyakorlathoz pdf: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/An2_gyak_2016_osz.pdf

1. **Mi a *belső pont* definíciója?**

   Válasz: $0 \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz **belső pontja** $a \in A$, ha

   $$\exists K(a): \quad K(a) \subset A.$$

   Jele: $\operatorname{int} A := \{a \in A \mid a \text{ belső pontja } A\text{-nak }\}$

2. **Mikor mondja azt, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* valamely pontban?**

   Válasz: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. f **differenciálható**, vagy **deriválható** az a pontban, ha

   $$\exists \quad \text{és véges} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a) \quad \text{határérték.}$$

   $f'(a)$: f **deriváltja**, vagy **differenciálhányadosa** a pontban. Jelöljük így is: $f \in D\{a\}$.

3. **Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?**

   Válasz: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

   a) $f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{a\}$.

   b) $f \in C\{a\} \quad \not\Rightarrow \quad f \in D\{a\}$.

4. **Mi a *jobb oldali derivált* definíciója?**

   Válasz: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0 : \quad [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha létezik és véges a $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ hátérérték, akkor az f függvény **jobbról deriválható** az a-ban.

   $$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'_+(a) \quad \text{az } f \text{ jobb oldali deriváltja az } a\text{-ban.}$$

5. **Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?**

   Válasz: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$

   $$f \in D\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \end{cases}$$

   $A = f'(a)$.

6. **Mi az *érintő* definíciója?**

   Válasz: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának van érintője, az $(a, f(a))$ pontban, ha $f \in D\{a\}$.

   A grafikon $(a, f(a))$-béli **érintője** az

   $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

   egyenletű egyenes.

7. **Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?**

   Válasz: Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$.

   $$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

8. **Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?**

   Válasz: Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f, g \in D\{a\}$, $\quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$, $\quad g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

9. **Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?**

   Válasz: Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ és

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f \\ g \in D\{a\} \\ f \in D\{g(a)\} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} f \circ g \in D\{a\}, \\ (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \end{array}$$

10. **Írja fel az** $\exp_a \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0)$ **függvény deriváltját valamely helyen.**

    Válasz: Az $\exp_a$ függvény: $\quad (a^x = e^{x \cdot \ln a}) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a \in D\{x\}$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (x \in \mathbb{R})}$$

11. **Írja fel az** $\log \quad (a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1)$ **függvény deriváltját valamely helyen.**

    Válasz: $\log_a$ függvény, $0 < a$ és $a \neq 1$, $\quad \forall x \in (0, +\infty)$, $\quad \log_a \in D\{x\}$

$$\boxed{\log_a' x = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x \in (0, +\infty))}$$