Analízis 2

Tételbizonyítások az 1. ZH-ra

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

1. Korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény korlátos is.

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f korlátos.

Bizonyítás: f korlátos, ha $\exists K > 0, \quad \forall x \in [a,b] : \quad |f(x)| \leq K$

Indirekt: Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz

$\Rightarrow \forall K > 0, \exists x \in [a,b] : |f(x)| > K$. Legyen a $K = n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$

$\Rightarrow x_n \in [a,b] \Rightarrow (x_n)$ korlátos $\Rightarrow$ Bolzano - Weierstrass tétel miatt

$\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat $\Rightarrow \lim(x_{n_k}) =: \alpha$. Ekkor $\alpha \in [a,b]$

hiszen, ha $\alpha \notin [a,b]$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : [a,b] \cap K_\varepsilon(\alpha) = \emptyset$

$\Rightarrow \exists k_0, \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in K_\varepsilon(\alpha)$, viszont ez ellentmondás.

$x_{n_k} \in [a,b] \Rightarrow \alpha \in [a,b] \Rightarrow f \in C(\alpha)$

Alkalmazzuk az átviteli elvet, $\lim(x_{n_k}) = \alpha \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ konvergens.

$\Rightarrow (f(x_{n_k}))$ korlátos. És így ellentmondásra juttotunk, hiszen:

$|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ nem korlátos. ■

2. Weierstrass-tétel

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f-nek létezik abszolút maximuma és minimuma is.

Bizonyítás: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor korlátos

$\Rightarrow M :=\sup\{f(x),\text{ha } x \in [a,b]\}$, $m :=\inf\{f(x),\text{ha } x \in [a,b]\}$, $M, m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall n \geq 1$ -re, $\exists x \in [a,b] : M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M$

$\Rightarrow \lim f(x_n) = M \Rightarrow (x_n)$ korlátos.

$\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat$\Rightarrow \lim x_{n_k} = \alpha, \alpha \in [a,b] \Rightarrow$ átviteli elv, $f \in C(\alpha)$

$\Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$.

De! $\lim f(x_n) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(\alpha)$

m -re hasonló. ■

3. Bolzano-tétel

Tétel: Tfh. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha $f(a) * f(b) < 0$ akkor $\exists x \in [a,b] : f(x) = 0$

Bizonyítás: Legyen $[x_0, y_0] = [a,b]$ és tfh. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$

Legyen $z_0 := \frac{x_0+y_0}{2}$, ekkor 3 eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$ ✓
2. $f(z_0) < 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$
3. $f(z_0) > 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$

Ezt az eljárást folytatva véges sok lépésben kapunk ξ-t amelyre $f(\xi) = 0$, ha nem akkor kapunk egy $([x_n, y_n])$ intervallum sorozatot, amelyre a következők igazak:

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$
2. $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0$
3. $y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n}$

A Cantor-tétel miatt

$$\exists \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n] \text{ Mivel } y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ ,ezért } \exists!\, \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n]$$

Továbbá $0 \leq \xi - x_n \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(x_n) = \xi}$,és $\quad y_n - \xi \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(y_n) = \xi}$
Tudjuk, hogy $f(x_n) < 0$ és $\lim(x_n) = \xi$ és $f \in C(\xi)$,ezért az átviteli elv miatt
$\lim f(x_n) = f(\xi) \Rightarrow f(\xi) \leq 0$
Hasonlóan $f(y_n) > 0, \quad \lim y_n = \xi \Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$
itt: $f(y_n) > 0$ ezért $f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \quad \blacksquare$

4. Heine-tétel

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás: (Indirekt) Tfh. f nem egyenletesen folytonos.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Legyen $\delta = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot $\Rightarrow (x_n)$ korlátos.
Bolzano-Weierstrass kiv. tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, azaz:
$\lim(x_{n_k}) =: \alpha, \quad \alpha \in [a, b]$
De! $|y_{n_k} - \alpha| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - \alpha| \to 0 \quad$ azaz $\lim(y_{n_k}) = \alpha$
$f \in C(\alpha)$ átviteli elv miatt
$\lim(f(x_{n_k})) = f(\alpha)$ és $\lim(f(y_{n_k})) = f(\alpha) \Rightarrow \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$
viszont ez ellentmondás, azzal, hogy $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \quad \blacksquare$

5. Az inverzfüggyvény folytonossága

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor f^{-1} is folytonos.
Bizonyítás: 1. lépés: $f^{-1}\ \exists$ Indirekt.
Tfh. f^{-1} nem folytonos. $\Rightarrow \exists y_0 \in R_f, f^{-1} \notin C(y_0) \Rightarrow$ átviteli elv.
$\exists y_n \in R_f, \lim(y_n) = y_0 \colon \lim(f^{-1}(y_n)) \neq f^{-1}(y_0)$
Legyen $x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim(x_n) \neq x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \colon \{n : |x_n - x_0| \geq \delta\}$ végtelen.
Legyen n_k indexsorozat, hogy: $|x_{n_k} - x_0| \geq \delta$
$(x_{n_k}) : \mathbb{N} \to [a, b] \Rightarrow (x_{n_k})$ korlátos. $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozat.
$(x_{n_k})' : \quad \lim(x_{n_k})' := \alpha \quad$ **De!** $\quad |(x_{n_k})' - x_0| \geq \delta \Rightarrow |\alpha - x_0| \geq \delta \Rightarrow \alpha \neq x_0$
2. lépés: $f \in C(\alpha) \quad \alpha \in [a, b]$
átviteli elv $\Rightarrow \lim \underbrace{f(x_{n_k})'}_{(y_{n_k})'} = f(\alpha) \Rightarrow \lim(y_{n_k})' = f(\alpha)$

De! $\lim(y_{n_k})' = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(\alpha) = f(x_0) \quad f$ injektív. $\Rightarrow \alpha = x_0 \quad$ Ez ellentmondás. $\blacksquare$

6. Folytonos invertálható függvény jellemzése a monotonitással.

Tétel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f$ szig. mon.

Bizonyítás: Ha $f(a) < f(b)$, ekkor f szig. mon. nő

1. Igazoljuk, hogy $f(a) = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ és $f(b) = max\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Csak az elsőt. Indirekten, Tfh:

$f(a) > minf$ ($<$ nem lehet) Weierstrass-tétel $\Rightarrow \exists\alpha \in [a, b] : f(\alpha) = minf \quad \alpha \neq a, b$

Tekintsük az $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ függvényt. A Bolzano-tétel miatt $c = f(a) \in (f(\alpha), f(b))$-hoz is $\exists\xi \in [\alpha, b] : f(a) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow a = \xi \quad$ Ellentmondás.

2. Igazoljuk, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in [a, b])$

Indirekt, Tfh: $f(x_1) > f(x_2)$

Ekkor $f(x_1) \in (f(x_2), f(b))$ Tekintsük az $f : [x_2, b] \to \mathbb{R}$ függvényt.

$c = f(x_1)$-hez is $\exists\xi \in (x_2, b) : f(x_1) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow x_1 = \xi \quad$ Ellentmondás. ■

7. Differenciálható függvények összege, szorzata, hányadosa.

Tétel: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor:

i, $f + g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $f * g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$

iii, Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(a)$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \dfrac{(f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a))}{g^2(a)}$

Bizonyítás:

i, $a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) = int\mathcal{D}_{f+g}$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a)$$

$\Rightarrow (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $$\lim_{x\to a} \frac{(f * g)(x) - (f * g)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) * g(x) - f(a) * g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) * g(x) - g(x) * f(a) + g(x) * f(a) - f(a) * g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) * \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\to f'(a)} + \lim_{x\to a} f(a) * \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a) \quad (x \to a)$$

$\Rightarrow (f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$

iii, Először igazoljuk, hogy $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x) * g(a) * (x - a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \underbrace{(-\frac{1}{g(x) * g(a)})}_{\to \frac{-1}{g^2(a)}} * \underbrace{(\frac{g(x) - g(a)}{x - a})}_{\to g'(a)} \longrightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad (x \to a)$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})'(a) = (f * \frac{1}{g})'(a) = f'(a) * \frac{1}{g(a)} + f(a) * (\frac{1}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) * g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a)}{g^2(a)}$$

■

8. Differenciálható függvények kompozíciója.

Tétel: $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R_g \subset D_f, g \in \mathcal{D}(a), f \in \mathcal{D}(g(a))$, ekkor
$f \circ g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) * g'(a)$

<u>**Bizonyítás:**</u> $g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow a \in int\mathcal{D}_g \Rightarrow int\mathcal{D}_{f \circ g}$

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon_1 = 0$ és $g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \quad (x \in D_f)$

$f \in \mathcal{D}(g(a)) \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim_{g(a)} \varepsilon_2 = 0$ és $f(y) - f(g(a)) = f'(g(a)) * (y - g(a)) + \varepsilon_2(y) * (y - g(a))$

Legyen $y = g(x)$

$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a)) * (g(x) - g(a)) + \varepsilon_2(g(x)) * (g(x) - g(a)) =$

$= f'(g(a)) * (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) + \varepsilon_2(g(x)) * (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) =$

$$= f'(g(a)) * g'(a) * (x-a) + (x-a) * \underbrace{(f'(g(a)) * \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(g(x)) * g'(a) + \varepsilon_1(x) * \varepsilon_2(g(x)))}_{\varepsilon(x)}$$

$\varepsilon_1 \to 0, \quad (x \to a)$

$g(x) \to g(a)$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} \varepsilon_2(g(x)) = \lim_{g(a)} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lim_a \varepsilon = 0$

$\Rightarrow (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) * g'(a) \quad \blacksquare$

9. Az inverz függvény deriváltja.

Tétel: Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, szig. mon. növő és folytonos függvény.
Ha $\xi \in (a,b), f \in \mathcal{D}(\xi)$ és $f'(\xi) \neq 0$, akkor
$(f^{-1}) \in \mathcal{D}(\eta)$ és $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(\xi)}$, ahol $\eta = f(\xi)$

<u>**Bizonyítás:**</u> $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow R_f$ intervallum.

f szig. mon. növő $\Rightarrow R_f$ nyílt intervallum $\Rightarrow \eta \in intR_f \qquad f^{-1} : R_f \to D_f$

$$\lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \lim_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (x \to \xi)$$

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \xi = f^{-1}(\eta)$

Ui. $x \to \xi$, mert $y \to \eta$: $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos $\Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta)$
$\Rightarrow x \to \xi$

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} = \frac{1}{f'(\xi)} \quad \blacksquare$$

10. Hatványsor összegfüggvényének deriváltja

Tétel: Legyen $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen

$f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad x \in K_R(a)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}(x_0) \quad \forall x_0 \in K_R(a)$ és

$f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n * \alpha_n * (x_0 - a)^{n-1}$, ahol $x_0 \in K_R(a)$

Bizonyítás: <u>1. lépés:</u> Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n=0} n*\alpha_n*r^n$ abszolút konvergens $\forall 0<r<R$

Legyen $0<r<r'<R$ és $x=a+r'$

x-ben konvergens a hatványsor $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}\alpha_n(r')^n$ konvergens $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n(r')^n=0 \Rightarrow (\alpha_n(r')^n)$ korlátos

$\Rightarrow \exists M>0: |\alpha_n(r')^n|\le M \Rightarrow |\alpha_n|\le \frac{M}{(r')^n} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}|n*\alpha_n*r^n|\le M*\sum\limits_{n=0}n*(\frac{r}{r'})^n$

ez konvergens, hiszen a gyökkritérium miatt

$\sqrt[n]{n*(\frac{r}{r'})^n}=\sqrt[n]{n}*(\frac{r}{r'})\to(\frac{r}{r'})<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}n*\alpha_n*r^n$ abszolút konvergens

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}n*\alpha_n*r^{n-1}$ is abszolút konvergens $\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N: \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|n*\alpha_n*r^{n-1}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

<u>2. lépés:</u>

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\sum_{n=1}^{\infty}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|=\left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-a)^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x_0-a)^n}{x-x_0}-\sum_{n=1}^{\infty}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|\le$$

$$\le\underbrace{\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n(x-a)^n-\alpha_n(x_0-a)^n}{x-x_0}-\sum_{n=1}^{N}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|}_{(I)}+\underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\frac{(x-a)^n-(x_0-a)^n}{x-x_0}\right|}_{(II)}+$$

$$+\underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|}_{(III)}=(I)+(II)+(III)$$

Tfh. $|x_0-a|<r<R$

Mivel $x\to x_0$ ezért feltehető, hogy $|x-a|<r \Rightarrow (III)\le\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}n*|\alpha_n|*r^{n-1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$(II)\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|\left|\frac{((x-a)-(x_0-a))((x-a)^{n-1}+(x-a)^{n-2}(x_0-a)+...+(x_0-a)^{n-1})}{x-x_0}\right|=$$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|\left|(x-a)^{n-1}+(x-a)^{n-2}(x_0-a)+...+(x_0-a)^{n-1}\right|=\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|*n*r^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$(I)\le\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|\left|\underbrace{\frac{(x-a)^n-(x_0-a)^n}{x-x_0}-n*(x_0-a)^{n-1}}_{\to 0,\text{ ha } x\to x_0}\right|$$

$g(x)=(x-a)^n \Rightarrow$ a tört határértéke $\quad g'(x_0)=n*(x_0-a)^{n-1} \quad (x\to x_0)$

$\Rightarrow \exists\delta>0,(I)<\varepsilon$, ha $|x-x_0|<\delta$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\sum_{n=1}^{\infty}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon \quad (\text{ ha } |x-x_0|<\delta)$$

$$\Rightarrow lim\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\sum_{n=1}^{\infty}n*\alpha_n(x_0-a)^{n-1}\right|=0$$

$f\in\mathcal{D}(x_0)$ és $f'(x_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n*\alpha_n*(x_0-a)^{n-1}$ ■

11. A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle-, Cauchy-, Lagrange-tétel).

1. Rolle-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a,b]$ és $f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ha $f(a) = f(b)$, ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

<u>**Bizonyítás:**</u> $f \in C[a,b] \Rightarrow$ Weierstrass-tétel miatt

$\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f =: m$ és $\exists \beta \in [a,b] : f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f =: M$

<u>1. lépés:</u> Tfh. $m = M \Rightarrow f = m \quad ([a,b]\text{-n})$, a függvény konstans $\Rightarrow f' = 0 \quad [a,b]$-n

<u>2. lépés:</u> $m \neq M$ és $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow m = f(\alpha) \Rightarrow \alpha \neq a,b \Rightarrow \alpha \in (a,b)$

$\Rightarrow \alpha$-ban lokális minimum van. $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$

<u>3. lépés:</u> Tfh. $m \neq M$ és $m = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow M \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \beta \neq a,b \Rightarrow \beta \in (a,b) \Rightarrow \beta$-ban lokális maximum van $\Rightarrow f'(\beta) = 0$ ■

2. Cauchy-tétel

Tétel: Tfh. $f,g \in C[a,b]$, $f,g \in \mathcal{D}(a,b)$ és $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a,b))$

Ekkor: $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

<u>**Bizonyítás:**</u> $g(b) \neq g(a)$, hiszen különben $\exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$

Válasszuk meg λ-t úgy, hogy az $F := f - \lambda g$ függvényre alkalmazhassuk a Rolle-tételt

$F \in C[a,b], F \in \mathcal{D}(a,b), F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$\Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a,b) : F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ■

3. Lagrange-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a,b], f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

<u>**Bizonyítás:**</u> Legyen $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \neq 0$ Így alkalmazható rá a Cauchy-tétel ■

12. A monotonitásra vonatkozó szükséges, és szükséges és elégséges feltételek.

12.1. Szükséges Feltétel

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton nő (a,b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton fogy (a,b)-n

iii, $f' > 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton nő (a,b)-n

iv, $f' < 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy (a,b)-n

<u>**Bizonyítás:**</u>

i, Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő.

ii, Ugyanígy

iii, A Lagrange tétel után $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

iv, Ugyanígy. ■

12.2. Szükséges és elégséges feltétel

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}(a, b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a, b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton nő (a, b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a, b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton fogy (a, b)-n

iii, $f' \geq 0 \quad (a, b)$-n, de $\nexists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0 \quad (c, d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton nő (a, b)-n

iv, $f' \leq 0 \quad (a, b)$-n, de $\nexists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0 \quad (c, d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton fogy (a, b)-n

<u>**Bizonyítás:**</u> **i,** "$\Rightarrow$"✓ "$\Leftarrow$" Tfh. f monoton nő és legyen $\xi \in (a, b)$ tetszőleges

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \geq 0 & , \text{ha } x \geq \xi \\ \geq 0 & , \text{ha } x < \xi \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$

ii, Hasonló

iii, "$\Rightarrow$" $f' \geq 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

Indirekten Tfh. f nem szigorú monoton

$\Rightarrow \exists c, d : f(c) = f(d) \Rightarrow f = f(c) \quad (c, d)$-n $\Rightarrow f' = 0 \quad (c, d)$-n, ez ellentmondás

$\Rightarrow f$ szigorú monoton nő.

"$\Leftarrow$" f szigorú monoton nő $\Rightarrow f$ monoton nő. $\Rightarrow f' \geq 0$ Indirekten:

Tfh. $\exists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0 \quad (c, d)$-n$\Rightarrow f$ konstans (c, d)-n $\Rightarrow f$ nem szigorú monoton nő

És így ellentmondásra jutottunk $\Rightarrow \nexists (c, d) : f' = 0 \quad (c, d)$-n

iv, Hasonló ■