Analízis 2.

6. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Előző előadás vége: a hatványsor végtelenszer deriválható.

Következmény: $\exp, \cos, \sin, ch, sh \in \mathcal{D}^{\infty}(\mathbb{R})$

Definíció: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $c \in int\mathcal{D}_f$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists K(c) \subset \mathcal{D}_f, \forall x \in K(c) : f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c))$

Tétel: (Elsőrendű szükséges feltétel)

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}(c)$ és f-nek lokális szélső értéke van c-ben $\Rightarrow f'(c) = 0$

Bizonyítás: Tfh. f-nek lokális minimuma van c-ben

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(c), \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D_f$

$$\exists \lim_{x \to c+0} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} \geq 0 \text{ és } \exists \lim_{x \to c-0} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to c} \tfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \underbrace{\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\leq 0} \Rightarrow f'(c) = 0 \quad \blacksquare$$

Megj: A feltétel nem elégséges, hiszen: $f(x) = x^3, \quad f'(0) = 3x^2|_{x=0}$

Jelölés: $f \in C[a, b]$ f folytonos $[a, b]$-n, $\quad f \in \mathcal{D}(a, b)$ f deriválható (a, b)-n

Középérték-tételek

1. Rolle-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a, b]$ és $f \in \mathcal{D}(a, b)$

Ha $f(a) = f(b)$, ekkor $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Bizonyítás: $f \in C[a, b] \Rightarrow$ Weierstrass-tétel miatt

$\Rightarrow \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f =: m$ és $\exists \beta \in [a, b] : f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f =: M$

1. lépés: Tfh. $m = M \Rightarrow f = m \quad ([a, b]$-n), a függvény konstans $\Rightarrow f' = 0 \quad [a, b]$-n

2. lépés: $m \neq M$ és $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow m = f(\alpha) \Rightarrow \alpha \neq a, b \Rightarrow \alpha \in (a, b)$

$\Rightarrow \alpha$-ban lokális minimum van. $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$

3. lépés: Tfh. $m \neq M$ és $m = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow M \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \beta \neq a, b \Rightarrow \beta \in (a, b) \Rightarrow \beta$-ban lokális maximum van $\Rightarrow f'(\beta) = 0 \quad \blacksquare$

Megj: Ha c-ben abszolút szélső érték van és c belső pont, akkor c-ben lokális szélső érték is van.

2. Cauchy-tétel

Tétel: Tfh. $f, g \in C[a, b]$, $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$ és $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$

Ekkor: $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bizonyítás: $g(b) \neq g(a)$, hiszen különben $\exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$

Válasszuk meg λ-t úgy, hogy az $F := f - \lambda g$ függvényre alkalmazhassuk a Rolle-tételt

$F \in C[a, b], F \in \mathcal{D}(a, b), F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$\Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \blacksquare$

Megj: Ha $f(a) = f(b)$, akkor visszakapjuk a Rolle tételt.

3. Lagrange-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a,b], f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \neq 0$ Így alkalmazható rá a Cauchy-tétel ■

Következmény:

i, $f \in \mathcal{D}(a,b)$ és $f' = 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f = c \quad (a,b)$-n

ii, $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$ és $f' = g' \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f = g + c \quad (a,b)$-n $\quad (c \in \mathbb{R})$

Bizonyítás: **i,** Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

ii, Alkalmazzuk az **i,**-t az $f - g$ függvényre.

Monotonitás

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton nő (a,b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton fogy (a,b)-n

iii, $f' > 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton nő (a,b)-n

iv, $f' < 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy (a,b)-n

Bizonyítás:

i, Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő.

ii, Ugyanígy

iii, A Lagrange tétel után $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

iv, Ugyanígy. ■

Megj: **i,** $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (x \neq 0)$

$\not\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy, hiszen a 0-ban nincs értelmezve.

$\Rightarrow$ Az előző tételben fontos az intervallum.

ii, Az előző tételben a **iii,** nem fordítható meg, azaz $f \uparrow \not\Rightarrow f' > 0$ **Pl:** $f(x) = x^3$

Tétel: (A monotonitásra vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton nő (a,b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton fogy (a,b)-n

iii, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton nő (a,b)-n

iv, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton fogy (a,b)-n

Bizonyítás: **i,** "$\Rightarrow$"✓ "$\Leftarrow$" Tfh. f monoton nő és legyen $\xi \in (a,b)$ tetszőleges

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \geq 0 & , \text{ha } x \geq \xi \\ \geq 0 & , \text{ha } x < \xi \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

ii, Hasonló

iii, "$\Rightarrow$" $f' \geq 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

Indirekten Tfh. f nem szigorú monoton

$\Rightarrow \exists c, d : f(c) = f(d) \Rightarrow f = f(c) \quad (c, d)$-n $\Rightarrow f' = 0 \quad (c, d)$-n, ez ellentmondás

$\Rightarrow f$ szigorú monoton nő.

"$\Leftarrow$" f szigorú monoton nő $\Rightarrow f$ monoton nő. $\Rightarrow f' \geq 0$ Indirekten:

Tfh. $\exists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0 \quad (c, d)$-n$\Rightarrow f$ konstans (c, d)-n $\Rightarrow f$ nem szigorú monoton nő

És így ellentmondásra jutottunk $\Rightarrow \nexists (c, d) : f' = 0 \quad (c, d)$-n

iv, Hasonló $\blacksquare$

Tétel: (Elsőrendű elégséges feltétel)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a, b), c \in (a, b)$ és $f'(c) = 0$

Ha f' előjelet vált c-ben, akkor lokális szélső értéke van c-ben.
Ha f' negatívból pozitívba megy akkor lokális minimum.
Ha f' pozitívból negatívba megy akkor lokális maximum.

Bizonyítás: Tfh. f' negatívból pozitívba megy.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : f' \leq 0 \quad (c - \delta, c)$-n $\quad \Rightarrow f \searrow \quad (c - \delta, c)$-n

$f' \geq 0 \quad (c, c + \delta)$-n $\quad \Rightarrow f \nearrow \quad (c, c + \delta)$-n

$\Rightarrow f$-nek lokális minimuma van c-ben. $\blacksquare$

Megj: A feltétel nem szükséges

Pl:

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin \dfrac{1}{x}) & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Tétel: (Másodrendű elégséges feltétel)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a, b), c \in (a, b), f'(c) = 0, f \in \mathcal{D}^2(c)$

Ha $f''(c) \neq 0$, ekkor c-ben lokális szélső értéke van.

Ha $f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokális minimum

Ha $f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokális maximum

Bizonyítás: Tfh. $f''(c) > 0 \Rightarrow f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \backslash \{c\}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) \quad$ és $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$

$\Rightarrow f'$ előjelet vált c-ben (negatívból pozitívba) $\Rightarrow f$-nek lokális minimuma van. $\blacksquare$

Pl: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2$

Megj: **i,** Ha $f''(c) = 0$, akkor lokális lehet.

ii, $\exists$ magasabb rendű feltétel is.