Vizsgakérdések
Analízis 2. (BSc)
Programtervező informatikus szak
A, B és C szakirány
2016-2017. tanév 1. félév

• Folytonosság

1. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

Válasz. Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\; |x-a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

2. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists\, \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

3. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

4. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. $f \in C\{a\} \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

5. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C\{a\}$.

6. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

Válasz. $g \in C\{a\},\ f \in C\{g(a)\} \Longrightarrow f \circ g \in C\{a\}$.

7. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor f korlátos $[a, b]$-n.

8. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

9. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$). Ha f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

10. Mit jelent az, hogy egy f függvény *Darboux-tulajdonságú*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú I-n*, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

11. Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

Válasz. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\exists\, \xi \in (a, b) : \quad f(\xi) = c$.

12. Milyen állításokat ismer az inverz függvény folytonosságáról?

Válasz. Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ függvény *folytonos* és *invertálható*. Ekkor f inverze folytonos.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *folytonos* és *invertálható* I-n. Ekkor $\mathcal{R}_f$ intervallum és az f függvény inverze folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ intervallumon.

13. Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ függvény *folytonos* és *invertálható*. Mit mondhatunk ekkor az f függvényről?

Válasz. Ekkor f szigorúan monoton függvény.

14. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{és ez véges, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

15. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

16. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Válasz. Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az f függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.

• Differenciálszámítás

17. Mikor mondja, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

Válasz. Ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor:

$$f \in D\{a\} \iff \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{és ez a határérték véges.}$$

18. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

Válasz. $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

19. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Válasz. $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

20. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\} \implies fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

21. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \implies \frac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

22. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

23. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény (α, β)-n, és egy $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$, továbbá $f'(a) \neq 0$. Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, ahol $b := f(a)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

24. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban az f függvény differenciálható és a deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott sor összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1}.$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

25. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f \in D\big(K_\delta(a)\big)$ és $f' \in D\{a\}$.

26. Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó *Leibniz-tételt.*

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f, g \in D^n\{a\}$, akkor $fg \in D^n\{a\}$ és

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

27. Mondja ki a *Rolle-tételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

28. Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a,b], f, g \in D(a,b)$ és $g'(x) \neq 0$, $(x \in (a,b))$. Ekkor $\exists\, \xi \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

29. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

30. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

Válasz. Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális minimuma van, ha

$$\exists\, K(c) : \quad f(c) \leq f(x) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

31. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$, hogy $K_\delta(c) \subset \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (c-\delta, c)$ és $f(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (c, c+\delta)$ vagy fordítva.

32. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az f függvénynek c-ben lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

33. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$ és f' a $c \in (a,b)$ pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek c-ben lokális szélsőértéke van.

34. Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

Válasz. Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a,b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor az f függvénynek c-ben lokális minimuma van.

35. Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$ $\big(a,b \in \mathbb{R}, a < b\big)$ és $f' > 0$ az (a,b) intervallumon, akkor f szigorúan monoton növekedő $[a,b]$-n.

36. Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?

Válasz. Ha $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$ $\big(a,b \in \mathbb{R}, a < b\big)$, akkor

$$f \;\text{ monoton növekedő }\; [a,b]\text{-n} \quad\Longleftrightarrow\quad f' \geq 0 \;\; [a,b]\text{-n}.$$

37. Mi a konvex függvény definíciója?

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a,b \in I,\;\; a < b \;\text{ esetén}$$
$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

38. Jellemezze egy függvény konvexitását egyenlőtlenséggel.

Válasz. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha

$$\forall\, a,b \in I,\;\; a < b \;\text{ és }\; \forall\, \lambda \in (0,1) \;\text{ esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

39. Jellemezze egy függvény konvexitását a differenciahányados segítségével.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor f konvex I-n $\Longleftrightarrow$ $\forall\, c \in I$ esetén a $\triangle_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ $(x \in I \setminus \{c\})$ függvény monoton növekedő.

40. Jellemezze egy függvény konvexitását az első derivált segítségével.

Válasz. Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D$. Ekkor

$$f \;\text{ konvex } [a,b]\text{-n} \quad\Longleftrightarrow\quad f' \;\text{ monoton növekedő } [a,b]\text{-n}.$$

41. Jellemezze egy függvény *konkávitását* a második derivált segítségével.

Válasz. Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D^2$. Ekkor

$$f \;\text{ konkáv } [a,b]\text{-n} \quad\Longleftrightarrow\quad f'' \leq 0 \;\; [a,b]\text{-n}.$$

42. Mi az inflexiós pont definíciója?

Válasz. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha,\beta)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in (\alpha,\beta)$ pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha

$$\exists\, \delta > 0 : \quad f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva}.$$

43. Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*

Válasz. Legyen $-\infty \le a < b < +\infty$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(a,b)$, $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a,b))$, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ és tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

44. Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Válasz. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in k_R(a)\big).$$

Ekkor $f \in D^\infty\big(k_R(a)\big)$ és

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \big(n = 0, 1, 2, \ldots\big).$$

45. Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \in D^\infty\{a\}$. Ekkor a

$$\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó *Taylor-sorának* nevezzük.

46. Fogalmazza meg a *Taylor-formula Lagrange maradéktaggal* néven tanult tételt.

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor $\forall\, x \in K(a)$ ponthoz $\exists\, \xi \in (a,x)$ (ha $a < x$) vagy $\exists\, \xi \in (x,a)$ (ha $x < a$), hogy

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

• Elemi függvények

47. Értelmezze az ln függvényt.

Válasz. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ leképezés bijekció. Ennek az inverze az $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ logaritmus függvény.

48. Mi a definíciója az a^x $\big(a, x \in \mathbb{R}, a > 0\big)$ hatványnak?

Válasz. $a^x := \exp(x \ln a)$.

49. Szemléltesse az $\exp_a$ függvények grafikonjait.

50. Definiálja az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvényeket.

51. Szemléltesse az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvények grafikonjait.

52. Definiálja a π számot.

Válasz. A cos függvénynek a $[0,2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0,2]$-nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos\xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot: $\pi := 2\xi$.

53. Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?

Válasz. A sin és a cos függvények 2π-szerint periodikusak függvények, és 2π a legkisebb periódusuk.

54. Értelmezze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

55. Értelmezze az $\operatorname{arc\,cos}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

56. Értelmezze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

57. Értelmezze az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

• A határozatlan integrál (primitív függvények)

58. Definiálja a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. A $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

59. Milyen *elégséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

60. Milyen *szükséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Válasz. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon.

61. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye.

Válasz. $f(x) := \operatorname{sign}(x)\ \big(x \in (-1,1)\big)$.

62. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye. A f *függvény határozatlan integrálja* a következő függvényhalmaz:

$$\int f := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

63. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

64. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

Válasz. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a),\ R > 0\big).$$

Ekkor f-nek van primitív függvénye és

$$F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

a f függvény egy primitív függvénye.

65. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy, $f, g \in D(I)$ és $f'g$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor fg'-nek is van primitív függvénye és

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

66. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $f : J \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek van primitív függvénye, akkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek is van primitív függvénye és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \Big(\int f\Big) \circ g.$$

67. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

Válasz. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor f-nek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

• A határozott integrál

68. Definiálja intervallum egy felosztását.

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

69. Mit jelent egy felosztás finomítása?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

70. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := \inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

71. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

72. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $s(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $s(f, \tau_1) \le s(f, \tau_2)$.

73. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $S(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő felső közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $S(f, \tau_1) \ge S(f, \tau_2)$.

74. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó, ill. felső közelítő összeg, akkor $s(f, \tau_1) \le S(f, \tau_2)$.

75. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik a szuprémuma. Az

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

76. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\}$ halmaz alulról korlátos, ezért létezik az infimuma. Az

$$I^*(f) := \inf\big\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

77. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ekkor f *Riemann-integrálható* az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_* f = I^* f$.

78. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ha $I_* f = I^* f$, akkor az f függvény határozott (vagy Riemann-)integrálja az $I_* f = I^* f$ valós szám.

79. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.

Válasz. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

80. Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó, ill. felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege.

81. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $\Omega(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó oszcillációs összege. Ekkor

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \;\; \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

82. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f \in R[a, b]$ függvény értékét *véges sok* pontban tetszőlegesn megváltoztatjuk, akkor az így kapott $\tilde{f}$ függvény is Riemann-integrálható és $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b \tilde{f}$.

83. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

Válasz. Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $fg \in R[a, b]$.

84. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

Válasz. Legyen $f, g \in R[a, b]$ tetszőleges és tegyük fel, hogy valamilyen $m > 0$ számmal $|g(x)| \geq m \quad (x \in [a, b])$. Ekkor $\frac{f}{g} \in R[a, b]$.

85. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $c \in (a,b)$ egy tetszőleges pont. Ekkor

$$f \in R[a,c], \quad f \in R[c,b], \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

86. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a,b] \subset R[a,b]$, de $C[a,b] \neq R[a,b]$.

87. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha f monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a,b]$.

88. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Válasz. Ha $f, g \in R[a,b]$ és $f \le g$, akkor $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

89. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

90. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Válasz. Legyen $f, g \in R[a,b]$, $g \ge 0$, $M = \sup \mathcal{R}_f$ és $m = \inf \mathcal{R}_f$. Ekkor

$$m \int_a^b g \le \int_a^b fg \le M \int_a^b g.$$

Ha még $f \in C[a,b]$ is teljesül, akkor $\exists\, \xi \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

91. Fogalmazza meg a Cauchy–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget.

Válasz. Ha f és g integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor fg is integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

92. Definiálja az $[a,b]$ intervallumon a primitív függvényt.

Válasz. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha F folytonos $[a,b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a,b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

93. Hogyan szól a *Newton–Leibniz-tétel?*

Válasz. Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek létezik primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

94. Definiálja az integrálfüggvényt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$ függvényt a f függvény *integrálfüggvényének* nevezzük.

95. Írja le az integrálfüggvénnyel kapcsolatban tanult tételt.

Válasz. Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$. Ekkor

1^o a F integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-n;

2^o ha $d \in (a,b)$ és f folytonos d-ben, akkor F differenciálható d-ben és $F'(d) = f(d)$.