# Analízis II.
## Előadás jegyzet
6. óra.

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadásán. (2016. október 17.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

# 1. Információk.

Szili honlapján lesz:
- mai előadás
- zh témakörök
- bizonyítással kért tételek listája
- definíciók és tételek listája
- beosztás

ZH jövő héten várható.

# 2. Magasabb rendű deriváltak.

**2.0.1. Emlékeztető.** Rekurzió (indukció).

**2.0.2. Definíció.** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{int} \mathcal{D}_f$. $f$ **kétszer deriválható** $a$ pontban, (jel: $f \in D^2\{a\}$), ha:

$$\bullet \exists r > 0 : \quad f \in D(K_r(a))$$
$$\bullet f' \in D\{a\}$$

Ekkor:

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az $f$ függvény második deriváltja $a$-ban.

**Második derivált függvény:**

$$f'' : \{x \in \operatorname{int} D_f \mid f \in D^2\{x\}\} \ni x \to f''(x)$$

Jelölés:

$$f^{(1)}(a) := f'(a), \quad f^{(1)} := f'$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a), \quad f^{(2)} := f''$$
$$f^{(0)}(a) := f(a), \quad f^{(0)} := f$$

Tovább: indukcióval tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re: $\quad f \in D^{n-1}\{a\}; \quad f^{(n)}$

**2.0.3. Definíció.** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a \in \operatorname{int} D_f$, és tegyük fel, hogy $n = 2{,}3\ldots$-re $\quad \exists f^{(n-1)}$ $\quad (n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Az $f$ $n$**-szer deriválható** $a$-ban (jel: $f \in D^n\{a\}$), ha

$$\exists r > 0 : \quad f \in D^{n-1}(K_r(a)) \tag{1}$$
$$f^{(n-1)} \in D\{a\} \tag{2}$$

Ekkor:

$$f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$$

az $f$ $n$-edik deriváltja $a$-ban. ($n$-edik deriváltfüggvény hasonlóan)

**2.0.4. Definíció.** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a \in \operatorname{int} D_f$

$$f \in D^\infty\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad f \in D^n\{a\}$$

## 2.1. Műveletek

**2.1.1. Tétel.** $n \in \mathbb{N}, \quad f, g \in D^n\{a\}$, akkor

1. $f + g \in D^n\{a\} \quad$ és $\quad (f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$
2. $f \cdot g \in D^n\{a\} \quad$ és $\quad (f \cdot g)^{(a)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$

## 2.2. Lokális szélső érték és a derivált kapcsolata.

**2.2.1. Megjegyzés.** Kapcsolat van a függvény (lokális és globális) tulajdonságai és a derivált között

**2.2.2. Emlékeztető.** Abszolút szélső értékek: lokális változatai

**2.2.3. Definíció.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma** van, ha

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f, \quad \forall x \in K(a): \quad f(x) \leq f(a).$$

$a$: **Lokális maximum hely**, $\quad f(a)$: $f$ **Lokális maximuma.**

Hasonlóan lehet a lokális minimumot is definiálni.

**Lokális szélső érték:** Lokális maximum / minimum.

**2.2.4. Megjegyzés.** Abszolút szélső érték $\quad \longleftrightarrow \quad$ lokális szélső érték.
Ez a kapcsolat meggondolandó.

**2.2.5. Tétel.** (szükséges feltétel a lokális szélső értékre)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és

$$\left.\begin{array}{r} f \in D\{a\} \quad a \in \operatorname{int} D_f \\ f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélső értéke van} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0$$

*Bizonyítás:* Lokális maximumra: Tekintsük

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

törtet. Ha $x > a$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{>0}} \leq 0 \quad \overset{f \in D\{a\}}{\Rightarrow} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

Ha $x < a$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{<0}} \geq 0$$

$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) \geq 0$ Tehát: $f'(a) \leq 0 \quad$ és $\quad f'(a) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0. \quad \blacksquare$

**2.2.6. Megjegyzés.** Szükséges, de nem elégséges

1. ábra

**2.2.7. Definíció.** $f$-nek $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ **stacionárius** pontja, ha $f \in D\{a\}, \quad$ és $\quad f'(a) = 0$

**2.2.8. Megjegyzés.**

*2. ábra*

# 3. Középértékek.

**3.0.1. Tétel.** (Rolle)

$$\left.\begin{array}{r} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} \xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=0 \end{array}$$

*Bizonyítás:* $f \in C[a,b] \quad \overset{\text{Weier.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}} \quad \exists\alpha\beta\in[a,b]:$

$$f(\alpha) := \min_{[a,b]} f =: m$$

$$f(\beta) := \max_{[a,b]} f := M$$

1. eset: $f \equiv$ áll. $(m = M) \quad\Rightarrow\quad f' \equiv 0$
2. eset: $f \not\equiv$ áll. $\quad\Rightarrow\quad m \neq M$ és $m < M$

Ha $m \not\equiv f(a) = f(b) \quad\Rightarrow\quad \alpha \in (a,b)$ Ekkor $\alpha$: abszolút minimum ér $\alpha$ lokális minimum is.

$$f'(\alpha)=0, \quad \xi=\alpha \quad \text{„jó”}$$

Ha $m = f(a) = f(b)$ ■

Szemléletesen:

*3. ábra*

**3.0.2. Tétel.** (Lagrange)

$$\left.\begin{array}{r} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} \exists\xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$$

Szemléletesen:

*4. ábra*

*Bizonyítás:* A szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

Legyen:

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x\in[a,b])$$

$F$-re a Rolle feltételei teljesülnek (ellenőrizni kell!)

$$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b): \quad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad ■$$

**3.0.3. Tétel.** (Cauchy)

$$\left.\begin{array}{rc} & f,g\in C[a,b] \\ f,g:[a,b]\to\mathbb{R} & f,g\in D(a,b) \\ & g'(x)\neq 0 \quad (\forall x\in(a,b)) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} \exists\xi\in(a,b): \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \end{array}$$

*Bizonyítás nem lesz kérdezve.*

Következmény:

**3.0.4. Tétel.** (A deriváltak egyenlősége)

1. Ha $f\in D(a,b): \quad f'\equiv 0(a,b)$-n $\quad\Leftrightarrow\quad f \equiv$ áll. $(a,b)-n.$
2. Ha $f,g \in D(a,b)$

$$f'\equiv g' \quad (a,b)\text{-n} \quad\Leftrightarrow\quad \exists c\in\mathbb{R}: \quad f(x)=g(x)+c \quad (x\in(a,b))$$

*Bizonyítása meggondolandó.*

# 4. A monotonitás és a deriválás kapcsolata.

**4.0.1. Tétel.** (Elégséges feltételek)
Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$, $\quad f \in D(a,b)$

1. *a)* $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\quad \Rightarrow f \nearrow [a,b]$-n
   *b)* $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\quad \Rightarrow f \searrow [a,b]$-n
2. *a)* $f' > 0 \quad (a,b)$-n> $\quad \Rightarrow \quad f \uparrow [a,b]$-n.
   *b)* $f' < 0 \quad (a,b)$-n> $\quad \Rightarrow \quad f \downarrow [a,b]$-n.

*Bizonyítás:* Lagrange-hátértékék. ■

**4.0.2. Megjegyzés.** A derivált előjeléből $\longrightarrow$ mon.

**4.0.3. Megjegyzés.** Lényeges, hogy **intervallumon** értelmezzük a függvényt.

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

és nem szig mon.

**4.0.4. Megjegyzés.** Pl.: $f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$

$$\text{szig mon} \quad \Leftarrow \quad \text{nem igaz.}$$

**4.0.5. Tétel.** (szükséges és elégséges feltétel monotonitásra)
Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$, $\quad f \in D(a,b)$. Ekkor:

1. *a)* $f \nearrow \quad [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f' \geq 0 \quad (a,b)$-n.
   *b)* $f \searrow \quad [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f' \leq 0 \quad (a,b)$-n.
2. *a)* $f \uparrow \quad [a,b]\text{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f' \geq 0 \quad (a,b)\text{-n.} \\ \nexists (c,d) \subset (a,b) : f' \equiv 0 (c,d)\text{-n} \end{cases}$

   *b)* $f \downarrow \quad [a,b]\text{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f' \leq 0 \quad (a,b)\text{-n.} \\ \nexists (c,d) \subset (a,b) : f' \equiv 0 (c,d)\text{-n} \end{cases}$

# 5. A lokálos szélső érték elégséges feltétele.

**5.0.1. Tétel.** (Elsőrendű)
$f \in D(a,b)$. Ha egy $c \in (a,b)$-ben

$$\left.\begin{array}{r} f'(c) = 0 \\ f' \ c\text{-ben előjelet vált} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (a) & c \text{ lokális minimum hely.} \\ (b) & \text{lokális maximum hely.} \end{array}$$

**5.0.2. Tétel.** (Másodrendű)
Tegyük fel, hogy $f \in D^2\{c\}$, és

$$\left.\begin{array}{r} f'(c) = 0 \\ f''(c) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} c \text{ lokális szélső hely, ha:} \\ f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad c \text{ lokális minium hely} \\ f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad c \text{ lokális maximum hely} \end{array}$$

**5.0.3. Megjegyzés.** $f''(c) = 0$ esetén bármi lehet

*5. ábra*

**5.0.4. Megjegyzés.** Magasabb rendű elégséges feltétel is megfogalmazható.