11. Gyakorlatra

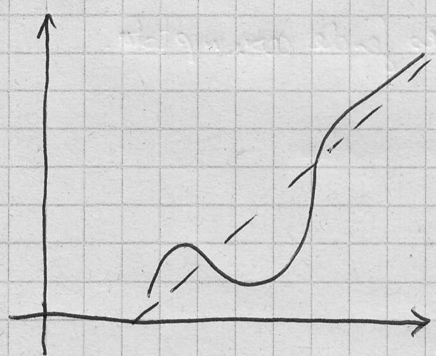
I. Órai anyag

Emlékeztető

Aszimptota ($\pm\infty$-ben)

- csak akkor vizsgálható, ha ÉT torlódási pontja $\pm\infty$-ben van
- ha $\exists$ aszimptotája $\Rightarrow$ szemléletesen $\exists$ olyan egyenes, melyre a fv. grafikonja rásimul

Szemléletesen:



Ml: $f(x) \approx Ax + b$ ha x nagy

$$\frac{f(x)}{x} \approx A + \underbrace{\frac{B}{x}}_{\approx 0}$$

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

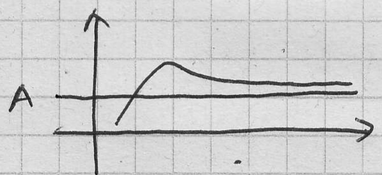
$Ax+b$ alapú aszimptotát keresünk.

$Ax+b$ alapú aszimptota keresése:

1. lépés: "egyenes aszimptota" létezésének vizsgálata

Ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow y = A$ egyenes aszimptota

Különben: 2. lépés



2. lépés: "ferde aszimptota" létezésének vizsgálata

- Ha nincs olyan $\mathbb{R}$-beli szám, amelyhez a fv. közelít.

Ha $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow B = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - Ax)$

és $y = Ax + B$ aszimptota.

Különben nincs aszimptota

8. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) = x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$

1.) egyenes aszimptota keresése

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 + x^3 = \underline{+\infty} \Rightarrow \text{nincs egyenes aszimptota}$$

2.) ferde aszimptota keresése

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^4}{x} = \underline{+\infty} \Rightarrow \text{nincs ferde aszimptota.}$$

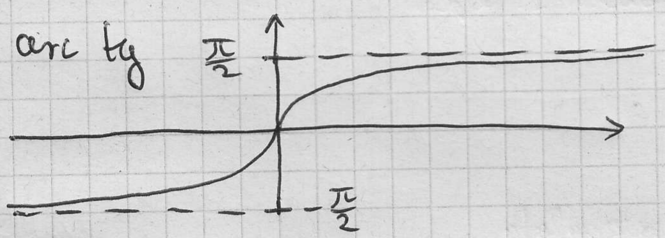
Tehát a függvénynek nincs aszimptotája.

(b) $f(x) := x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$

1.) egyenes aszimptota keresése (vagy vízszintes)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\infty + 2\frac{\pi}{2} = \pi - \infty = -\infty$$

$\Rightarrow$ nincs vízszintes aszimptota



2.) ferde aszimptota keresése

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{\overbrace{2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}^{2\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{-\infty}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - 0 = 1 =: A$$

$$B = \lim_{x\to\infty} f(x) - Ax = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x - 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x - x =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -2 \operatorname{arc\,tg} x = +2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

$\Longrightarrow$ $y = Ax + B = x + \pi$ ferde aszimptota

$\boxed{\text{Emlékeztető}}$ Teljes függvényvizsgálat

1.] Értelmezési tartomány meghatározása ($D_f = ?$)

- Hol folytonos? Szakadási pontok
- Ekkor/ban meghatározhatjuk még (de nem muszáj):
  - tengelymetszet
    - $\rightarrow$ y tengelyt $f(0)$ értéknél metszi
    - $\rightarrow$ x tengelyt $f(x) = 0$ helyen metszi
  - páros / páratlan -e a függvény? (MJ.: legtöbb esetben egyik sem)
    - $\rightarrow$ páros $\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$
    - $\rightarrow$ páratlan $\Longleftrightarrow$ $-f(x) = f(-x)$
  - periodikus -e a fv.? $\rightarrow$ periodikus $\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(x \alpha p)$ $\forall x \in D_f$

2.] Derivált vizsgálata: monotonitás, szélső érték

- $f \in D$?
- f' felírása, előjelet válthat: zérushelyen & szakadási helyen

3.] Második derivált vizsgálata: konvexitás

- $f' \in D$?
- f'' felírása, előjeleinek vizsgálata

4.] Határértékek

- szakadási helyeken
- értelmezési tartomány végpontjaiban

5.] Aszimptoták $\pm\infty$-ben

- ha $\pm\infty$-ben határérték nem értelmezhető, ennek sincs értelme

6.] Ábrázolás: $R_f = ?$

10 Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az $f(x) := e^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény grafikonját (az ún. Gauss-görbe).

1] ÉT meghatározása

$\cancel{f \in (\mathbb{R})}$ $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow$ nincs szakadási hely

$D_f = \mathbb{R}$

tengelymetszetek

$f(x) = e^{-x^2} > 0 \Rightarrow$ nem metszi x tengelyt

$f(0) = 1$ -nél metszi y tengelyt

paritás

$f(-x) = e^{-(-x^2)} = f(x) \Rightarrow$ fv. páros

$\Rightarrow$ mivel f páros $\rightarrow$ elég $[0, +\infty)$-ben vizsgálni

2] Derivált vizsgálata (monotonitás)

$f \in D(\mathbb{R})$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' \underset{\uparrow}{=} e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$$

(összetett fv. deriváltja)

f' zérushelyei: $-2x \underbrace{e^{-x^2}}_{>0} = 0$

$\Updownarrow$

$-2x = 0$

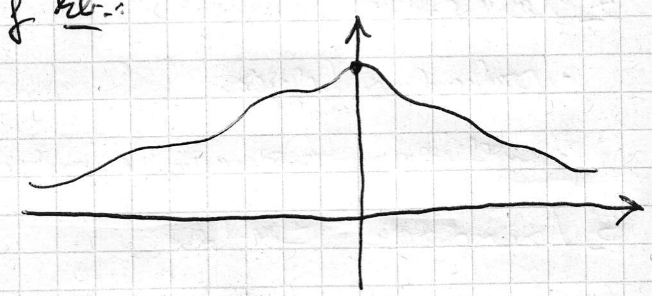
$\Updownarrow$

$x = 0$

Tehát:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f	$\uparrow$	lokális max.	$\downarrow$
f'	$\oplus$	0	$\ominus$

f kb.:



Előjelvizsgálat (f'):

$(-\infty, 0)$: $f'(-1) = -2(-1) \cdot e^{-(-1)^2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$

$(0, +\infty)$: $f'(1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$

3] Második derivált vizsgálata (konvexitás)

$f' \in D$

$$f''(x) = \left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szorzat deriváltja}}}{=} (-2)\cdot e^{-x^2} + (-2x)\cdot \underbrace{e^{-x^2}\cdot(-2x)}_{\text{fv. kompozíció deriv.}} =$$

$$= e^{-x^2}\cdot\left(-2+4x^2\right) = \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}\left(4x^2-2\right)$$

f'' zérushelyei: $\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}(4x^2-2) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2-2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tehát:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
f	$\smile$		$\frown$		$\smile$
f''	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$

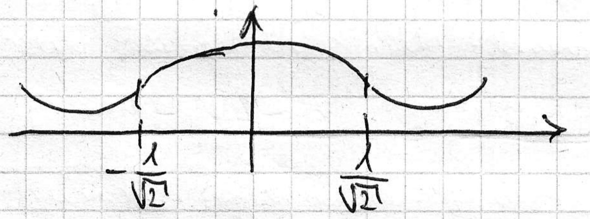
Előjelvizsgálat (f''):

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f''(-1) = e^{-1}(4-2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \oplus$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f''(0) = e^{0}(0-2) = -2 < 0 \Rightarrow \ominus$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$: $f''(1) = e^{-1}(4-2) = \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \oplus$

f kb.:



4] Határérték (mivel nincsenek szakadási helyek, ÉT végpontjaiban, azaz: $\pm\infty$-ben)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

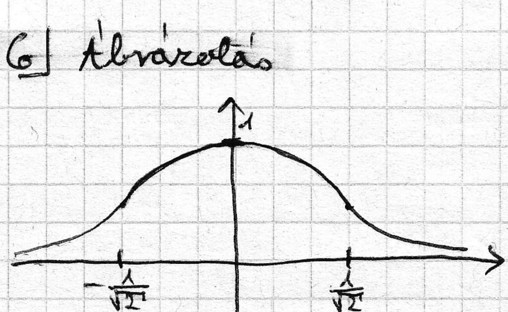
5.] Aszimptota

$+\infty$-ben: $y=0$

$-\infty$-ben: $y=0$

(mivel a határértékekből kiderült már)

6] Ábrázolás



$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$R_f = (0;1]$

(mivel páros)

$\boxed{11}$ Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \text{ fv. grafikonját.}$$

1| ÉT meghatározása

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \Rightarrow$ szakadási helyek: $-1, 1$

tengelymetszés

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1} = 0 \Longleftrightarrow x^3+x=0 \Leftrightarrow x(\underbrace{x^2+1}_{>0}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$$

(tört csak úgy lehet 0, ha számlálója 0)

$\Rightarrow x=0$-nál metszi x tengelyt

$f(0)=0$-nál metszi y tengelyt

paritás

$$f(-x) = \frac{-x^3-x}{x^2-1} = -\frac{x^3+x}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f \text{ páratlan}$$

2| Derivált vizsgálata (monotonitás)

$$f \in D(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3+x}{x^2-1}\right)' \underset{\uparrow}{=} \frac{(3x^2+1)(x^2-1)-(x^3+x)(2x-0)}{(x^2-1)^2} =$$

hányados deriv.

$$= \frac{3x^4-3x^2+x^2-1-2x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f' \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

Zérushelyek:

$$f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x^4-4x^2-1=0$$

$$x^2_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 \neq 2-\sqrt{5} < 0 \Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{5}$$

Tehát: $x_1 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$ $\quad x_2 = +\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Tehát:

x	$(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}})$	$(-\sqrt{2+\sqrt{5}}, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \sqrt{2+\sqrt{5}})$	$(\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
f'	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$

lokális max   lokális min.

Előjelvizsgálat (f') (Mj: használjuk ki, hogy f páratlan $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$)

$$(-1,1): f''(0) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 < 0$$

$$(1, \sqrt{2+\sqrt{5}}): f''(2) = \frac{16-16-1}{(4-1)^2} = -\frac{1}{9} < 0$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty): f''(3) = \frac{81-36-1}{(9-1)^2} = \frac{44}{64} > 0$$

a többi intervallum előjelét az f páratlan tulajdonságát felhasználva következtetjük ki

3) Második derivált vizsgálata (konvexitás)

$f' \in D(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$

$$f''(x) = \left(\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hányados} \\ \text{deriváltja}}}{=} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2 - (x^4-4x^2-1)(2(x^2-1))\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{egyszerűsítés} \\ x^2-1\text{-el}}}{=} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x - 4x^5 + 16x^3 + 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$$

Zérushelyek:

$$f''(x) = \frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3+12x = 0 \Leftrightarrow x\underbrace{(4x^2+12)}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$$

Tehát:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f''	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Előjelvizsgálat:

$$(0,1): f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+6}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^3} = \ldots < 0$$

$$(-1, \infty): f''(2) = \frac{32+24}{(4-1)^3} = > 0$$

továbbiakat fv. páratlansága alapján

4] Határérték

Szakadási helyeken:

1-ben:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3+x}{x^2-1} \underset{x>1}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3-x}{x^2-1} \underset{x<1}{=} -\infty$$

−1-ben:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^3+x}{x^2-1} \underset{x>-1}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^3+x}{x^2-1} \underset{x<-1}{=} -\infty$$

ÉT végpontjaiban:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty$$

5] Aszimptota

1] határérték számításával láthattuk, hogy nincs egyenes aszimptota

2] ferde aszimptota keresése

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x}{(x^2-1)x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

$$B = \lim_{x\to +\infty} f(x) - Ax = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x}{(x^2-1)} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x-x(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x-x^3+x}{x^2-1} = 0$$

Tehát az aszimptota $+\infty$-ben: $y = x+0$ $(=Ax+B)$

6] Ábrázolás ?

$$f\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,3}+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1}$$

$$f\left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)=\frac{\left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)^{3}-\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,3}+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1}$$

$$R_f=\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,3}+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1}\,;\,-\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,3}+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1}\right]$$

$\cancel{f(x)=}$

II Elméleti kérdések

1) Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital szabályt.

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- $f, g \in D(a,b)$; $-\infty \le a < b \le +\infty$
- $g \ne 0$, $g' \ne 0$ (a,b)-n
- $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$
- $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$

Mj: Sokszor a deriváltak határértékét könnyebb kiszámítani, mint a fv-ét.

2) Írja le a $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ esetre vonatkozó L'Hospital szabályt.

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- $f, g \in D(a,b)$; $-\infty \le a < b \le +\infty$
- $g \ne 0$, $g' \ne 0$ (a,b)-n
- $\lim\limits_{a+0} f = +\infty$; $\lim\limits_{a+0} g = -\infty$
- $\exists \lim \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$

3) Fogalmazza meg a hatványsor összegfüggvényének a deriválására vonatkozó tétel

Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Ha $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor konvergenciasugara: $R > 0$

- Legyen $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in K_R(a))$ az összegfüggvény

$\Rightarrow \forall x \in K_R(a)$: $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, \alpha_n (x-a)^{n-1}$ $(x \in K_R(a))$

4) Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \dots)$

Ha $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor

- konvergenciasugara: $R > 0$
- Legyen $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in K_R(a))$ összegfüggvénye

$\Rightarrow f \in D^{\infty}(K_R(a))$ és $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n = 0, 1, \dots)$

5.) Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

Ha $f \in D^{\infty}\{a\}$: $\displaystyle\sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$

az f függvény (a)-hoz tartozó Taylor-sora.

6.) Mi a Taylor-polinom definíciója?

Ha $f \in D^{n}\{a\}$;

$$T_{n,a}(f;x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

az f függvény (a)-hoz tartozó n-edik Taylor-polinomja.

7.) Fogalmazza meg a Taylor-formula Lagrange maradéktaggal néven tanult tételt

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor:

$\forall x \in K(a)$-hoz $\exists\, \xi \in (a,x)$ vagy (x,a):

$$f(x) - T_{n,a}(f,x) = \frac{f^{(n+1)}\xi}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

8.) Milyen elégséges feltételt ismer arra, hogy egy függvény Taylor-sora előállítja a fv.-t?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- $f \in D^{\infty}(K(a))$
- $M := \sup\{|f^{(n)}(x)| \mid \forall x \in K(a);\ \forall n \in \mathbb{N}\} < +\infty$

f-et a Taylor-sora előállítja K(a)-n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K_R(a))$$