3. és 4. gyakorlat

Függvények folytonossága

Szükséges definíciók és tételek

- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.
- Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?
- Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?
- Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?
- Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt.
- Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?
- Mit jelent az, hogy egy függvény jobbról folytonos egy pontban?
- Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?
- Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?
- Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?
- Fogalmazza meg a *Bolzano–Darboux-tételt.*
- Mit jelent az, hogy egy függvény *Darboux-tulajdonságú*?
- Mi a kapcsolat a Darboux-tulajdonság és a folytonosság között?
- Mit tud mondani az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ inverz függvényének a folytonosságáról?
- Milyen állítást ismer *tetszőleges intervallumon* értelmezett függvény inverzének a folytonosságáról?
- Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.
- Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.
- Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Feladatok

1. Mit jelent az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *nem* folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban?

2. Jelölje r egy egységnyi tömegű testnek a Föld középpontjától vett távolságát. A Föld gravitációs tere által a testre gyakorolt erő

$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3}, & r < R, \\ \dfrac{GM}{r^2}, & r \geq R, \end{cases}$$

ahol M a Föld tömege, R a Föld sugara, G pedig a gravitációs állandó. Folytonosan függ-e a gravitációs erő az r távolságtól?

3. Határozza meg, hogy mely pontokban *nem* folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

függvény. Döntse el, hogy ezekben a pontokban vajon folytonos-e jobbról, illetve balról.

4. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor az a pontnak létezik olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

5. Értelmezhető-e az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ függvény úgy, hogy *mindenütt* folytonos legyen?

6. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & \text{ha } x \in (-\infty, 4) \\ \alpha x + 20, & \text{ha } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

függvény?

7. Határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \\ 0, & \text{ha } x = 2 \text{ vagy } x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

8. Igazolja, hogy az

$$\ln x = e^x - 3$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, 2)$ intervallumban.

9. Mutassa meg, hogy az

$$e^x = 2 - x$$

egyenletnek van legalább egy megoldása.

■ Házi feladatok

1. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1, & \text{ha } x \le 1 \\ -x + 3, & \text{ha } 1 < x; \end{cases}$$

függvény?

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ 0, & \text{ha } x = -1 \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

3. Igazolja, hogy az

$$x^2 = \sqrt{x+1}$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, 2)$ intervallumban.

4. Mutassa meg, hogy az

$$x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$$

egyenletnek van legalább egy megoldása.

■ Gyakorló feladatok

1. Az f valós-valós függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonossága ekvivalens-e a következővel

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ és } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon?$$

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát:

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-7}{|x-7|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 7; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+64}{x+4}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \\ \alpha, & \text{ha } x = -4; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 9; \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

3. Értelmezze az alábbi függvényeket a 0 pontban úgy, hogy ott folytonosak legyenek:

(a) $f(x) := \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}),$

(b) $f(x) := \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

4. Igazolja, hogy a következő egyenleteknek van legalább egy megoldása az I intervallumban, ha

(a) $x^2 - 3x + 1 = 0, \quad I = (0, 1);$ (b) $\cos x = x, \quad I = (0, 2).$

5. Legyen f és g valós-valós függvény.

(a) Lehet-e az $f + g, fg, f/g$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ha az f és a g függvénynek az a pont szakadási helye?

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek pedig szakadása van az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos a-ban?

6. Egy tibeti szerzetes egy nap reggel 7-kor elindul a kolostorból a szokott ösvényen a hegy tetején lévő szentélybe, ahova este 7-kor meg is érkezik. Másnap reggel 7-kor visszaindul ugyanazon az ösvényen a kolostorba, és este 7-kor visszaérkezik. Bizonyítsa be, hogy van olyan pont az ösvényen, amelyiken mindkét nap ugyanabban az időben haladt át.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény határértéke mind $+\infty$-ben, mind pedig $-\infty$-ben $+\infty$. Igazolja, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma.

8. Igazolja, hogy az $f(x) := (1 + x^2)\operatorname{sign} x \ (x \in \mathbb{R})$ szakadásos függvénynek az inverze folytonos.

9. Mutassa meg, hogy a *Riemann-függvény* (l. az 5. oldalt) az irracionális pontokban folytonos, de a racionális helyeken szakadása van.