Analízis 2.

7. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Határértékek

Kritikus esetek: $(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty - \infty)$

Tétel: (L'Hospital szabály $\frac{0}{0}$ alakra)

Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b), \quad (-\infty \leq a < b < \infty)$

ii, $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

iii, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$

iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall\xi \in (a, x_0) : \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $f(a) = g(a) = 0$ és legyen $x \in (a, x_0)$ tetszőleges, ekkor $f, g \in C[a,x]$ és $f, g \in \mathcal{D}(a,x)$

$\Rightarrow$ a Cauchy-középértéktétel miatt: $\exists\xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall x \in (a, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$

ii, Tfh. $a = -\infty$ Visszavezetjük **i,**-re

Legyen $F(y) := f(b + 1 - \frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$ és

$G(y) := g(b + 1 - \frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$

$y < 1 \Rightarrow b + 1 - \frac{1}{y} < b \Rightarrow f$ és g értelmezve van a $(b + 1 - \frac{1}{y})$ pontban.

$\lim\limits_{0+0} F = \lim\limits_{y\to 0+0} f(b + 1 - \frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} f = 0$

$\lim\limits_{0+0} G = \lim\limits_{-\infty} g = 0$ Ha $\exists \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$, ekkor

$\lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{y\to 0+0} \frac{f}{g}(b + 1 - \frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g}$

$F'(y) = f'(b + 1 - \frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2}$

$G'(y) = g'(b + 1 - \frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2} \neq 0 \qquad y \in (0,1)$

$\lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} = \lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'}$ Alkalmazható **i,** F és G-re

$\Rightarrow \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g} = \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$ és $\lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'}$ ■

Tétel: (L'Hospital szabály $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b), \quad (-\infty \leq a < b < \infty)$

ii, $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

iii, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = \infty$

iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty, A \in \mathbb{R}$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall \xi \in (a, x_0) : \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $x \in (a, x_0)$ és alkalmazzuk a Cauchy középérték-tételt az $[x, x_0]$ intervallumra

$\Rightarrow \exists \xi \in (x, x_0) : \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ Feltehető, hogy $f > 0 \quad (a, x_0)$-n, hiszen $\lim\limits_{a} f = \infty$

Hasonlóan $g > 0 \quad (a, x_0)$-n.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}}_{T(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot T(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \lim\limits_{a+0} (T-1) = 0$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A) \quad \Rightarrow \quad A - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ korlátos.}$$

$$\Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$$

ii, $a \neq -\infty, A = \infty$ Láttuk:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot T(x)$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : T(x) > \dfrac{1}{2}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in K_\varepsilon(\infty) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \infty = A$$

iii, $a \neq -\infty, A = -\infty$ Hasonló **ii,**-hez

iv, $a = -\infty$ Visszavezetjük az előzőre mint az előző tétel **ii,** részében. ■

Megj: **i,** A tétel igaz baloldali és mindkét oldali határértékre is.

ii, Lehet, hogy többször kell alkalmazni.

iii, A többi kritikus eset visszavezethető erre a két esetre.

Pl: $0 \cdot \infty, \quad f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$

Alkalmazásaikra példák

Pl: i, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

ii, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{chx - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{shx + \sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{chx + \cos x}{2} = 1$

iii, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^n \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x^{-1}}{-n \cdot x^{-n-1}} = \lim\limits_{x \to 0+0} -\frac{x^n}{n} = 0$

iv, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x = \lim\limits_{x \to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x \to 0+0} e^{x \cdot \ln x} = 1$

Taylor-sorok

Eml: Tfh. a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen

$f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n, \quad x \in K_R(a), \quad$ Ekkor: $f \in \mathcal{D}^{\infty}(x)$ és

$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \alpha_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (x-a)^{n-k} \quad (x \in K_R(a))$ és $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Definíció: i, Ha $f \in \mathcal{D}^{\infty}(a)$, ekkor a $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ sort, az f függgyvény Taylor sorának nevezzük.

ii, Ha $f \in \mathcal{D}^{(n)}(a)$, akkor $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ az f-nek n-edik Taylor polinomja Jel: $T_n f(x)$

Problémák:

i, Konvergens-e a Taylor sor?

Ha igen, az összeg $= f$-el?

Állítás: Ha f-nek $\exists$ hatványsora, akkor ez a Taylor sor is.

Pl:i, $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x > -1, \quad a = 0$

$f(0) = 1, \quad f'(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f'(0) = -1$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f''(0) = 2$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-n-1}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!$

A Taylor sor: $\sum\limits_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum\limits_{n=0} (-1)^n \cdot x^n = \sum\limits_{n=0} (-x)^n$

ez konvergens $\Leftrightarrow |x| < 1$, ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad |x| < 1$