Analízis 2.

1. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Tantárgyi követelmények: http://numanal.inf.elte.hu/~weisz/oktanyagok/Kov_An.pdf

Folytonos függvények

Definíció: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Pl:

$$f(x) = \begin{cases} x : & x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \in C(0) \\ -x : & x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f \notin C(0), a \neq 0 \end{cases}$$

Jelölés: $f \in C(a)$ folytonos az a pontban.

Tétel: Folytonosság és határérték kapcsolata

Ha $a \in D_f \cap D'_f$, akkor:

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a)$$

Bizonyítás: Lásd az előző definíciót. ∎

Definíció: $a \in D_f$ izolált pont, ha $\exists K(a)$, hogy $K(a) \cap D_f = \{a\}$

Állítás: Ha $a \in D_f$, akkor $a \in D'_f$ vagy izolált pont.

Bizonyítás: Triviális ∎

Tétel: Ha $a \in D_f$ izolált, akkor $f \in C(a)$

Bizonyítás: Triviális ∎

Tétel: Hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciahalmaz belsejében.

Bizonyítás: $\exists R \geq 0 :$ a hatványsor konvergens az $(a-R, a+R)$ intervallumon.

Ezen kívül divergens, $x = a - R$, vagy $x = a + R$?

Hatványsor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n$$

Valamint tanultuk korábban, hogy:

$$\exists \lim_x f = f(x), \text{ ha } x \in (a-R, a+R) \quad ∎$$

Következmény: Az exp, sin, cos, sh, ch függyvények folytonosak $\mathbb{R}$-en.

Tétel: Folytonosságra vonatkozó átviteli elv

Tfh. $a \in D_f$, ekkor:

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to D_f, \lim(x_n) = a : \quad \lim(f(x_n)) = f(a)$$

Bizonyítás: Ha $a \in D_f$, akkor előző + a tavalyi határértékre vonatkozó átviteli elv. Különben a izolált pont. Ekkor mindkét oldal igaz. ∎

Tétel:

- Ha $f, g \in C(a)$, akkor $f + g \in C(a), \lambda f \in C(a), \lambda \in \mathbb{R}, f \cdot g \in C(a)$. Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C(a)$.
- $g \in C(a), f \in C(g(a)), R_g \subset D_f$, akkor $f \circ g \in C(a)$.

Bizonyítás: $(x_n) : \mathbb{N} \to D_f, \lim(x_n) = a, \quad f, g \in C(a) \Rightarrow \lim(f(x_n)) = f(a), \lim(g(x_n)) = g(a)$
$\Rightarrow \lim(f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a) \Rightarrow f + g \in C(a)$ ■

Definíció: f folytonos A-n, ha $f \in C(a) \quad (\forall a \in A)$

Korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvények

Ezután $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Definíció: Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik abszolút maximuma (minimuma), ha

$\exists \alpha \in [a, b], \forall x \in [a, b] : f(x) \le f(\alpha) \quad (f(x) \ge f(\alpha))$
Ahol α az abszolút maximum (minimum) hely.

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f korlátos.
Bizonyítás: f korlátos, ha $\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \le K$
Indirekt: Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz
$\Rightarrow \forall K > 0, \exists x \in [a, b] : |f(x)| > K$. Legyen a $K = n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$
$\Rightarrow x_n \in [a, b] \Rightarrow (x_n)$ korlátos $\Rightarrow$ Bolzano - Weierstrass tétel miatt
$\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat $\Rightarrow \lim(x_{n_k}) =: \alpha$. Ekkor $\alpha \in [a, b]$
hiszen, ha $\alpha \notin [a, b]$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : [a, b] \cap K_\varepsilon(\alpha) = \emptyset$
$\Rightarrow \exists k_0, \forall k \ge k_0 : x_{n_k} \in K_\varepsilon(\alpha)$, viszont ez ellentmondás.
$x_{n_k} \in [a, b] \Rightarrow \alpha \in [a, b] \Rightarrow f \in C(\alpha)$
Alkalmazzuk az átviteli elvet, $\lim(x_{n_k}) = \alpha \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ konvergens.
$\Rightarrow (f(x_{n_k}))$ korlátos. És így ellentmondásra juttotunk, hiszen:
$|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ nem korlátos. ■

Tétel: (Weierstrass-tétel) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f-nek létezik abszolút maximuma és minimuma is.
Bizonyítás: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor korlátos
$\Rightarrow M :=\sup\{f(x), \text{ha } x \in [a, b]\}$, $m :=\inf\{f(x), \text{ha } x \in [a, b]\}$, $M, m \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall n \ge 1$-re, $\exists x \in [a, b] : M - \frac{1}{n} < f(x) \le M$
$\Rightarrow \lim f(x_n) = M \Rightarrow (x_n)$ korlátos.
$\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat$\Rightarrow \lim x_{n_k} = \alpha, \alpha \in [a, b] \Rightarrow$ átviteli elv, $f \in C(\alpha)$
$\Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$.
De! $\lim f(x_n) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(\alpha)$
m -re hasonló. ■