Analízis II
Előadás jegyzet
1. óra

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadásán. (2017. május 29.)
Külön köszönet jár CSONKA Szilviának a képek elkészítésért.

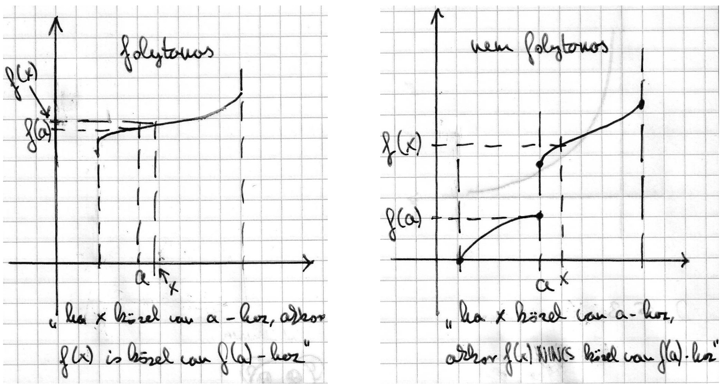
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Követelményrendszer:

– Heti rendszeres számonkérés
– megajánlott
– kötelező előadásra járás (12:15kor kezdés)
– gyakorlati jegy kell (aminek anyaga már a honlapon kint van)

2. Függvények folytonossága

2.1. Szemléletes jelentése:



1. ábra. Nem folytonos, "ha $x \sim a$-hoz akkor $f(x)$ nincs közel $f(a)$-hoz".

2.1.1. Megjegyzés. Hasonló probléma: fv. határértéke (végesben vett véges h.é.)

$$a, A \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}'_f$$

$$\lim_a f = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \\ 0 < |x-a| < \sigma \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$$

azaz, ha „$x \sim a$, akkor $f(x) \sim A$.

2.2. Pontbéli folytonosság

2.2.1. Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad |x-a| < \delta, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

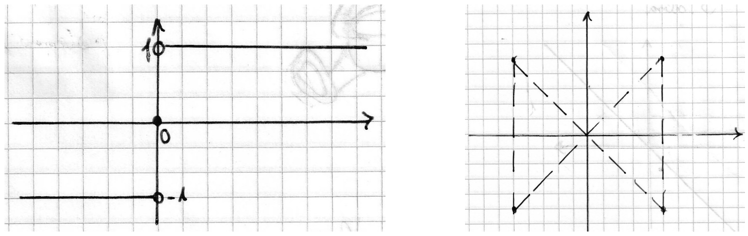
Jelölése: $f \in C(a)$.

2.2.2. Megjegyzés.

1. Csak ÉT-beli pontban ért. a folytonosság

2. Személetes jelentése „ha $x \sim a \Rightarrow f(x) \sim f(a)$"

2.2.3. Példa. $f(x) := \text{sign(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$



2. ábra. sign(x) és a Dirichlet függvény

$f \notin C\{0\}, \quad$ ui. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists |x| < \delta : \quad |f(x) - 0| \geq \varepsilon.$

2.2.4. Példa. Dirichlet fv. $f(x) = \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ -x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$ Ekkor: $\begin{cases} f \in C\{0\} \\ f \notin C\{a\} \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \end{cases}$

2.2.5. Tétel. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ izolált pont (azaz $\exists K(a) : K(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$) $\quad \Rightarrow \quad f \in C\{a\}$
Biz: ✓ ■

2.2.6. Tétel. (A folyt. és határérték kapcsolata)
Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor

$$f \in C\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a).$$

Biz: ✓ ■

2.2.7. Tétel. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden

1. pontjában folytonos
2. Az $\exp, \sin, \cos$, sh, ch, $\forall \mathbb{R}$-beli pontban folytonos. ■

2.2.8. Tétel. (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad a \in \mathcal{D}_f$.

$$f \in C\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \quad \lim(x_n) = a$$

esetén

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

Bizonyítás:

– Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor ✓

– Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}'_f \Rightarrow a$ izolált pont. ■

2.2.9. Tétel. (Műveletek és folytonosság)
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f, g \in C\{a\}$. Ekkor

1. $\lambda f, \quad f + g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0) \quad \in C\{a\}. \quad (\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges)
2. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f, \quad g \in C\{a\}, \quad f \in C\{g(a)\} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \in C\{a\}$

Bizonyítás: Műveleti tételek. ■

2.3. Egyoldali folytonosság

2.3.1. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Az f függvény jobbról folytonos a-ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad a \leq x < a + \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

2.3.2. Megjegyzés. Balról folyt. hasonló

2.3.3. Tétel. $f \in C\{a\} \Leftrightarrow$ ha jobbról és balról is folytonos.

2.4. Halmazon folytonos függvények.

2.4.1. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad A \subset \mathcal{D}_f$. Az f fv. folytonos az A halmazon, ha

$$\forall a \in A \quad \text{esetén} \quad f\big|_A \in C\{a\}.$$

Jelölése: $f \in C(A)$

2.4.2. Megjegyzés. Müvelete tételek halmazon folytonos függvényekre is érvényesek.

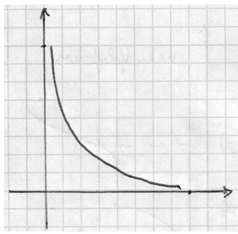
2.5. Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

(végig: $-\infty < a < b < +\infty$, un. kompakt intervallum)

2.5.1. Tétel. ($[a, b]$ folytonos függvény korlátos)

Tegyük fel, hogy $\left.\begin{array}{c} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f$ korlátos.

2.5.2. Megjegyzés.



3. ábra. Folytonos, de nem korlátos!

Bizonyítás: f korlátos, ha

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b]: \quad |f(x)| \leq K$$

Indirekt: Tegyük fel, hogy nem korlátos, azaz,

$$\begin{aligned} &\forall K > 0, \quad \exists x \in [a, b]: \quad |f(x)| > K \\ &\Rightarrow \forall n = 1{,}2 \quad \exists x_n \in [a, b], \quad |f(x_n)| \geq n \end{aligned} \tag{1}$$

Tehát: $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (x_{n_k})$ konv. részsorozat.
Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k})$$

Ekkor: $\alpha \in [a, b]$.
(Indirekt: Tegyük fel, hogy $\alpha \notin [a, b] \quad \Rightarrow \quad \exists K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$.
$\alpha := \lim(x_{n_k}) \quad \Rightarrow \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqq k_0, \quad x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, ui. $x_{n_k} \in [a, b]$).

Az f folytonos $[a, b]$-n $\Rightarrow$

$$f \in C\{\alpha\} \quad \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad x_{n_k} \to \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x_{n_k}) \to f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad (f(x_{n_k})) \quad \text{korlátos, mert konv.}$$

Ez ellentmond 1-nek. $\blacksquare$

2.5.3. Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv-nek van *abszolút* (vagy *globális*) *maximuma*, ha

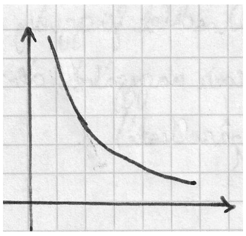
$$\exists \alpha \in \mathcal{D}_f : \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad f(x) \leqq f(\alpha)$$

α: *absz. maximum hely*
$f(\alpha)$: a fv. *absz. maximuma.*

2.5.4. Megjegyzés. Abszolút minimum hasonló.

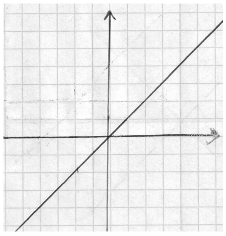
2.5.5. Megjegyzés. Abszolút szélső érték: abszolút max. vagy abszolút min.

2.5.6. Példa. $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \in (0{,}1))$



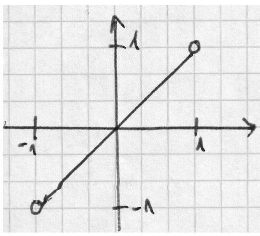
4. ábra. Folytonos, NINCS szélső értéke.

2.5.7. Példa. $f(x) = x$



5. ábra. Folytonos, NINCS szélső értéke.

2.5.8. Példa.



6. ábra. Nem folytonos, nincs szélső értéke.

2.5.9. Megjegyzés. Azonban: $[a,b]$-n folytonos fv-nek van absz. sz.é.-e.

2.5.10. Tétel. (Weierstrass)
Tegyük fel, hogy:

$$\left.\begin{array}{r} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f\text{-nek } \exists \text{ absz. szélsőértéke, azaz} \quad \exists \alpha,\beta,\in[a,b]: \\ f(x)\le f(\alpha) \\ f(\beta)\le f(x) \end{array} \qquad (x\in[a,b])$$

Biz: f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow f$ korlátos.
Ekkor:

$$\exists \sup\{f(x) \mid x\in[a,b]\} =: M \in \mathbb{R}$$
$$\exists \inf\{f(x) \mid x\in[a,b]\} =: m \in \mathbb{R}$$

Igazoljuk: $\exists \alpha \in [a,b]: \quad f(\alpha) = M$.

$$M \sup \quad \Rightarrow \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \exists y_n \in \mathcal{R}_f: \quad M - \frac{1}{n} < y_n \le M \tag{2}$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \quad \Rightarrow \quad \exists x_n \in [a,b]: \quad f(x_n) = y_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.
Legyen $\lim(x_{n_k}) =: \alpha \in [a,b]$ (indirekt)

$$f \text{ folyt. } [a,b]\text{-n} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{\alpha\} \quad \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad \lim \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha)$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_{n_k} = f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad M = f(\alpha)$$

Ez ellentmondás. (lásd: 2) $\blacksquare$