Analízis 2. – Bizonyítások – 2017/2018. tavasz

1-15: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_kereszt_2018_tavasz/An2_ea_1-9_2016.pdf
16-17: http://people.inf.elte.hu/szelethus/LaTeX/anal2/kidolgozasok/2zh_anal2/2zh_anal2.pdf

1. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos

Tétel. ($[a,b]$-n folytonos függvény korlátos.)

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Tegyük fel, hogy az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \textit{ függvény}\\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n}\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad f \textit{ korlátos } [a,b]\textit{-n.}$$

Bizonyítás. f korlátos, ha

$$\exists\, K>0: \quad \forall\, x\in[a,b] \ \text{ esetén } \ |f(x)|\le K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy f nem korlátos, azaz

$$\forall\, K>0\text{-hoz } \ \exists\, x\in[a,b]: \quad |f(x)|>K.$$

A $K=n\in\mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\text{-hez } \ \exists\, x_n\in[a,b]: \quad |f(x_n)|\ge n.$$

Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n)\subset[a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolzano–Weierstrass}}{\underset{\text{kiválasztási tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\,(x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Ekkor: $\alpha\in[a,b]$. (Ezt indirekt módon igazoljuk: Ha $\alpha\notin[a,b] \Rightarrow \exists\, K(\alpha): \ K(\alpha)\cap[a,b]=\emptyset$. De $\alpha:=\lim(x_{n_k}) \ \Rightarrow \ \exists k_0\in\mathbb{N}, \ \ \forall k\geqq k_0, \ \ x_{n_k}\in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, mivel $x_{n_k}\in[a,b]$).

Az f függvény folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow f\in C\{\alpha\} \overset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$

$$\lim\big(x_{n_k}\big)=\alpha \ \text{ miatt } \ \lim\big(f(x_{n_k})\big)=f(\alpha).$$

Ez azt jelenti, hogy $\big(f(x_{n_k})\big)$ korlátos sorozat, ami ellentmondás. ■

2. A Weierstrass-tétel.

Weierstrass-tétel.

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Ha az } f:[a,b]\to\mathbb{R} \textit{ függvény}\\ \textit{folytonos } [a,b]\textit{-n}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}f\textit{-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz}\\ \exists\,\alpha,\beta\in[a,b]:\\ f(\beta)\le f(x)\le f(\alpha)\quad(\forall\,x\in[a,b]).\end{array}.$$

Bizonyítás. f folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow$ f korlátos $[a,b]$-n. Ezért

$$\exists \sup\{f(x) \mid x\in[a,b]\} =: M\in\mathbb{R},$$
$$\exists \inf\{f(x) \mid x\in[a,b]\} =: m\in\mathbb{R}.$$

Igazoljuk: az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists\,\alpha\in[a,b]: f(\alpha)=M$.

A szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \exists\,y_n\in\mathcal{R}_f:\quad M-\frac{1}{n}<y_n\le M.$$

Viszont:

$$y_n\in\mathcal{R}_f \quad\Longrightarrow\quad \exists\,x_n\in[a,b]:\ f(x_n)=y_n \quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n):\mathbb{N}\to[a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az (x_n) sorozatnak létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje α ennek a határértékét, azaz legyen

(∗) $$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha\in[a,b]$.

f folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow$ $f\in C\{\alpha\} \overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}}$

$$(*)\text{ miatt}\quad \lim_{k\to+\infty}\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}}=f(\alpha).$$

Mivel

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})=y_{n_k}\le M\quad(\text{minden } k\text{-ra}),$$

ezért $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}=M$, ami azt jelenti, hogy az $f(\alpha)=M$ egyenlőség valóban fennáll.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

3. A Bolzano-tétel.

Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a, b]$*-n,*
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

(f *a két végpontban különböző előjelű)*

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in (a, b)$, *ami gyöke az* f *függvénynek, azaz* $f(\xi) = 0.$

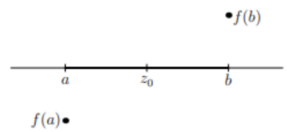
Bizonyítás. (A Bolzano-féle felezési eljárással.)

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen

$$[x_0, y_0] := [a, b]$$



Az intervallumot megfelezzük. Legyen

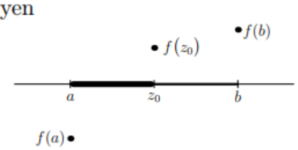
$$z_0 := \frac{a+b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ gyöke az egyenletnek.

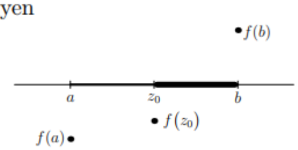
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [a, z_0]$$



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen

$$[x_1, y_1] := [z_0, b]$$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

$\vdots$

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben

$\exists\ [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

A Cantor-féle közösrész tételből és (iii)-ből következik, hogy az intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ, azaz

$$\text{egyértelműen } \exists\, \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért

$$\lim\big(f(x_n)\big) = f(\xi) = \lim\big(f(y_n)\big).$$

De (ii)-ből

$$\lim\big(f(x_n)\big) \le 0 \le \lim\big(f(y_n)\big),$$

azaz $f(\xi) \le 0$ és $f(\xi) \ge 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

4. Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel.

Tétel. (Az inverz függvény folytonossága.)

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*
- *folytonos* $[a, b]$*-n,*
- $\exists\, f^{-1}$

$\Longrightarrow$ *az* f^{-1} *függvény folytonos a* $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ *halmazon.*

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a, b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists\, y_0 \in \mathcal{R}_f, \quad \text{hogy} \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\Longrightarrow \exists\, (y_n) \subset \mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim(y_n) = y_0, \quad \text{DE} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$\begin{aligned} x_n &:= f^{-1}(y_n) \quad (\text{azaz } f(x_n) = y_n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}), \\ x_0 &:= f^{-1}(y_0) \quad (\text{azaz } f(x_0) = y_0). \end{aligned}$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n) \neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\, \delta > 0, \quad \text{hogy az} \quad \big\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| \geq \delta\big\} \text{ halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n) \subset [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists\, (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x} := \lim(x_{n_k})$. Indirekt úton belátható, hogy $\overline{x} \in [a, b]$.

$(*)$-ból következik, hogy az (x_{n_k}) részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle) \qquad \overline{x} \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\overline{x}\}$ és $\lim(x_{n_k}) = \overline{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim\Big(f(x_{n_k})\Big) = \lim(y_{n_k}) = f(\overline{x}).$$

Az (y_n) (vagyis az $(f(x_n))$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim(y_{n_k}) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f(\overline{x}) = f(x_0)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\overline{x} = x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval. ■

5. A folytonosság és a derivált kapcsolata.

Tétel. (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

1^o $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$,

2^o $\qquad \not\Longleftarrow$.

Bizonyítás.
1^o $f \in D\{a\} \implies$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\operatorname{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \operatorname{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\operatorname{abs}(x) - \operatorname{abs}(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

6. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.

Tétel. (Lineáris közelítés.)
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in D\{a\} \iff \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \lim_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Az A *szám az* f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontbeli deriváltja, vagyis* $A = f'(a)$.

Bizonyítás.
$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right) = 0.$
Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $\lim_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha } x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

7. A szorzatfüggvény deriválása.

Tétel. (Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor

3^o $f \cdot g \in D\{a\}$ *és* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \quad (x \in \mathcal{D}_{fg} \setminus \{a\}).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} =$$
$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $fg \in D\{a\}$ és

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

8. A hányadosfüggvény deriválása.

Tétel. (Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor

4^o *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a)) \qquad \implies \qquad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

Az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\frac{f}{g}} \setminus \{a\}\right).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g \in C\{a\} \implies \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a) \neq 0$. Ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{g(a) \lim_{x \to a} g(x)} \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) =$$
$$= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{f}{g} \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy } f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ és} \\ \bullet\ f \in D\{a\} \textit{ valamilyen } a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f\textit{-ben} \\ \bullet\ f\textit{-nek } a\textit{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array}\right\} \implies f'(a) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont *lokális maximumhelye* az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists\, r > 0: \quad \forall\, x \in (a - r, a + r) \text{ esetén } f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \le 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a $(*)$ alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \ge 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \le 0$ és $f'(a) \ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha a *lokális minimumhelye* az f függvénynek. ■

10. A Rolle-féle közértéktétel.

Tétel. (A Rolle-féle középértéktétel.)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Legyen } a, b \in \mathbb{R},\ a < b. \textit{ Tegyük fel,} \\ \textit{hogy } f : [a, b] \to \mathbb{R} \textit{ és} \\ \quad \bullet\ f \in C[a, b], \\ \quad \bullet\ f \in D(a, b), \\ \quad \bullet\ f(a) = f(b). \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a, b), \textit{ hogy} \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$$

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a, b]$, ezért Weierstrass tételéből következik, hogy

$$\exists\, \alpha,\ \beta \in [a, b]: \qquad f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

<u>1. eset: $m = M$.</u> Ekkor f állandó (a, b)-n, így tetszőleges $\xi \in (a, b)$ pontban $f'(\xi) = 0$.

<u>2. eset: $m \ne M$</u>, tehát $m < M$.

Ha $m \ne f(a) = f(b)$, akkor az α abszolút minimumhely az (a, b) intervallumban van. Világos, hogy α egyúttal lokális minimumhelye is az f függvénynek. A feltételeink alapján $f \in D\{\alpha\}$, ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\alpha) = 0$. A tétel állítása tehát a $\xi := \alpha \in (a, b)$ választással teljesül.

Ha $m = f(a) = f(b) < M$, akkor a β abszolút maximumhely van az (a, b) intervallumban, és ez egyúttal lokális maximumhely is, tehát $f'(\beta) = 0$. Ebben az esetben tétel állítása tehát a $\xi := \beta \in (a, b)$ választással teljesül. ■

11. A Lagrange-féle közértéktétel.

Tétel. (A Lagrange-féle középértéktétel.)
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Tegyük fel, hogy* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *és*
- $f \in C[a,b]$,
- $f \in D(a,b)$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$, *hogy* $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bizonyítás. Az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \qquad (x \in [a,b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.
Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a,b]$-n és deriválhatók (a,b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a)\right) = 0,$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül.

A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \blacksquare$$

12. A konvexitás ekvivalens definíciója.

Tétel. *Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I-n, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ a < b \ \text{ és } \ \forall\, \lambda \in (0,1) \ \text{ esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a,b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b = x < \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Másrészt az (a,b) intervallum minden eleme előáll $\lambda a + (1-\lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a,b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b-x}{b-a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b-x}{b-a} \cdot a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I$, $a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big(\big[\lambda a + (1-\lambda)b - a\big]\big) + f(a) =$$
$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big[(1-\lambda)(b-a)\big] + f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. $\blacksquare$

13. A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b),\ (-\infty \le a < b < +\infty), \\ \bullet\ g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0 \ \ (x \in (a,b)), \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ határérték.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} \quad \text{és} \\ \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Bizonyítás. $\boxed{\text{1. eset: } a > -\infty \text{ (véges).}}$

Legyen

$$A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Azt kell igazolni, hogy

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \text{ esetén } \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \text{ esetén } \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a.a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez } (*) \text{ miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk, és az azt jelenti, hogy a $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

$\boxed{\text{2. eset: } a = -\infty.}$ Nem bizonyítjuk. ■

14. A π szám bevezetését megalapozó állítás.

Tétel. *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* ξ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* ξ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** π ***számot:***

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \cdots = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11\cdot 12}\right) - \cdots <$$
$$< (\text{a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak}) < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\, \xi \in [0,2]$: $\cos\xi = 0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos\downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0 \quad (x \in (0,2))$$

egyenlőtlenség következménye. ■

15. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Tétel. (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.) *Legyen* $n \in \mathbb{N}$*, és tegyük fel, hogy* $f \in D^{n+1}(K(a))$. *Ekkor*

$$\forall x \in K(a) \ \text{ ponthoz } \ \exists \xi \ \text{ a és x között}:$$

$$f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) \qquad (x \in K(a)).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0, \\ F''(a) &= f''(a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0, \\ &\ \vdots \\ F^{(n)}(a) &= 0, \\ F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad (x \in K(a)). \end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned} G(x) &:= (x-a)^{n+1} && \Longrightarrow && G(a) = 0, \\ G'(x) &= (n+1)(x-a)^n && \Longrightarrow && G'(a) = 0, \\ G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} && \Longrightarrow && G''(a) = 0, \\ &\ \vdots && && \vdots \\ G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) && \Longrightarrow && G^{(n)}(a) = 0, \\ G^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$, és tegyük fel, hogy például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists \xi_1 \in (a,x): \quad \frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a Cauchy-féle középértéktételt az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\exists \xi_2 \in (a,\xi_1): \quad \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists \xi_{n+1} \in (a,\xi_n): \quad \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_{n,a}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)} = (n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

A $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

16. A $\sqrt{1-x^2}$ $(x \in (-1,1))$ primitív függvényeinek előállítása.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c \quad (x \in (-1,1), \quad c \in \mathbb{R})$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az $x = \sin t = g(t) \quad (x \in (-1,1)), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítést:

$$g'(t) = \cos t > 0 \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \exists g^{-1}; \quad t := \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t>0} \cdot \cos t\,dt \overset{\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t}{\underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=}} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x + x \cdot \cos(\arcsin x)}{2} + c$$

$$\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\substack{=:\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \alpha = x}}) = \pm\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c. \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

17. . A Newton–Leibniz-tétel.

Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} f \in R[a,b] \\ f\text{-nek van primitív függvénye} \quad [a,b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol F az f egy primitív függvénye.

Bizonyítás: Legyen $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges.

$$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_0) \overset{\text{TRÜKK}}{=} \big(F(x_n)-F(x_{n-1})\big)+\big(F(x_{n-1})-F(x_{n-2})\big)+\ldots+\big(F(x_1)-F(x_0)\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

Tegyünk egy apróbb megállapítást: F-re $[x_i, x_{i+1}]$-en a Lagrange középérték tétel:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \overset{F'=f}{=} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Folytatván a bizonyítást:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le S(f,\tau) \quad \inf$$

$\forall \tau$-ra sup $\quad \Rightarrow$

$$I_*(f) \le F(b) - F(a) \le I^*(f)$$

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f = \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$