10. Gyakorlatra

I. Órai anyag

8. gyak. 3. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékeit, valamint abszolút szélsőértékeit az $A \subset D_f$ halmazon, ha

c)

$$f(x) := 2x + \frac{200}{x} \quad (0 < x < +\infty) \text{ és } A = D_f$$

1.) lokális szélsőérték

$f \in D(0,+\infty)$, $f'(x) = 2 + \left(\frac{-200}{x^2}\right) = 2 - \frac{200}{x^2}$

$f' \in C(0;+\infty)$

<u>zérushelyei:</u> $f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = 0 \iff 2 = \frac{200}{x^2} \iff x^2 = 100$ ha $x = 10$

tehát a zérushelyei: $+10$ (mj: $-10 \notin (0,+\infty)$)

Tehát következő intervallumokon nem vált előjelet:

x	$(0;10)$	10	$(10;+\infty)$
f	↓	lokális min.	↑
f'	$-$	0	$+$

<u>Előjelek vizsgálata adott intervallumokon:</u>

$(0;10)$: $f(1) = 2 - \frac{200}{1^2} = -198 < 0$

$(10;+\infty)$: $f(20) = 2 - \frac{200}{20} = 2 - \frac{200}{400} = \frac{3}{2} > 0$

<u>Tehát:</u>

- Lokális minimum: $f(10) = 2 \cdot 10 + \frac{200}{10} = 40$
- Lokális maximum: nincs

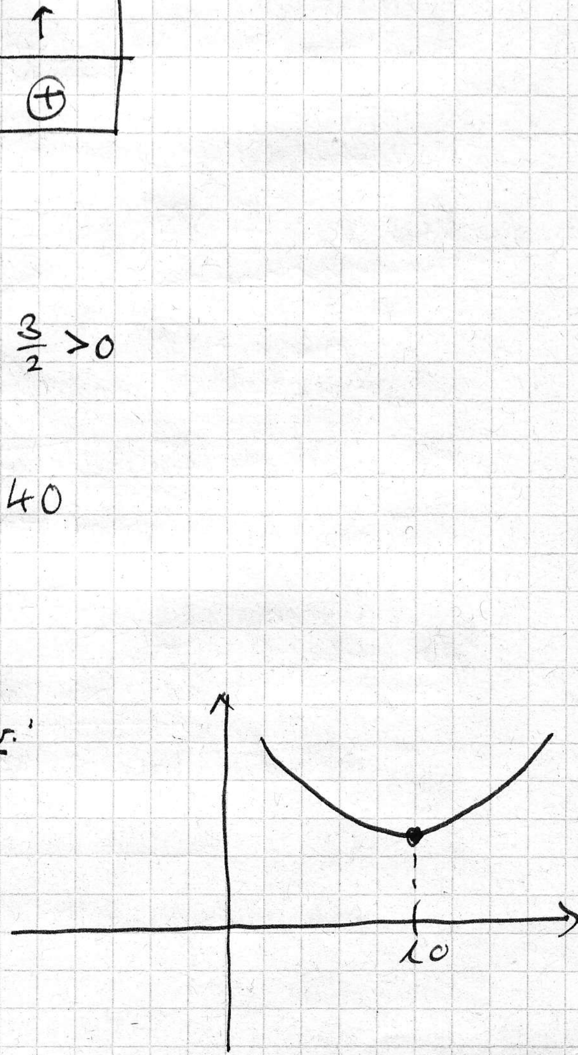
2.) abszolút szélsőérték

<u>Abszolút minimum</u>

a függvény csökken, majd nő

$\Rightarrow f(10) = 40$ abszolút min. is

f ábr.:



Abszolút maximum

Függvény korlátossága felülről

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{2x}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{200}{x}}_{\to 0} = +\infty$$

műveleti tételek alapján

Tehát: • f felülről nem korlátos

• így abszolút maximumot nem is kell keresnünk

↳ mivel ∄ abszolult maximum

Mj.: Így is lehetett volna:

$$\lim_{0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \underbrace{2x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{200}{x}}_{\to +\infty} = +\infty$$

Mivel csak jobbról nézhetjük hiszen a fv. csak $(0;+\infty)$-ben van értelmezve.

$\boxed{\text{Emlékeztető}}$

Logaritmus használata

$2^x = 83 \qquad 2^x = 64$

$x = \log_2 83 \Rightarrow$ középiskolában. csalás: erről fogalmunk sincs

$y \to \log_2 y$: ezt az analízis eszközeivel közelíthetjük, vizsgálhatjuk

Arc sin

$\sin x = 0,73$

- nem tudjuk kiszámolni
- helyette közelítjük egy függvénnyel

$\nexists \sin^{-1}$ mivel a sin periodikus

- vizsgáljuk $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

→ itt már csak egyszer veszi fel minden értékét

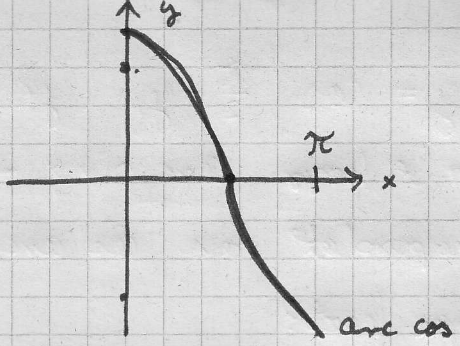
- tehát: $\boxed{\arcsin := \left(\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}}$

- így vizsgálhatjuk: $x_1 = \arcsin 0,73 + k\cdot 2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$x_2 = \pi - \arcsin 0,73 + k\cdot 2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

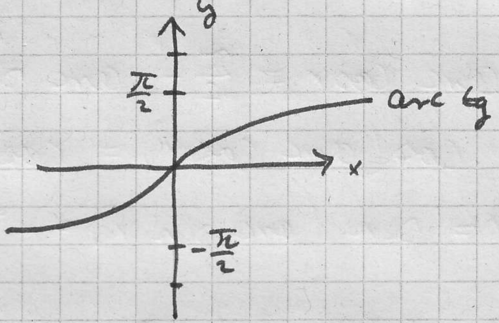
Arc cos

$$\text{arc cos} := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$



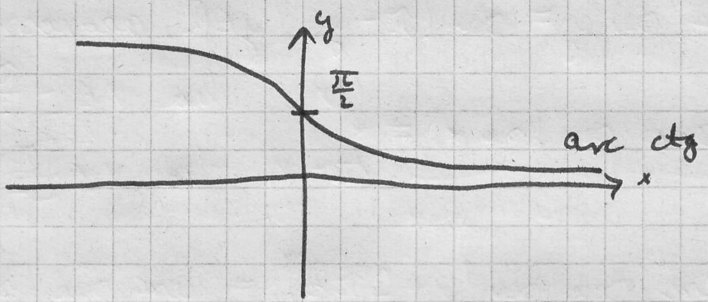
Arc tg

$$\text{arc tg} := \left(\text{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$$



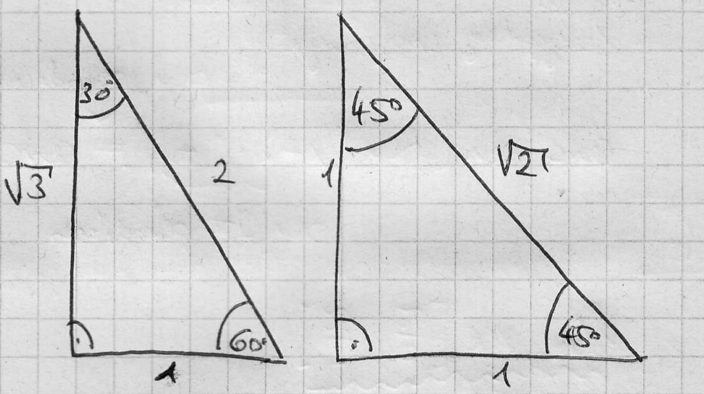
Arc ctg

$$\text{arc ctg} := \left(\text{ctg}\big|_{(0;\pi)}\right)^{-1}$$



Emlékeztető: Nevezetes szögek

	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



1. Számítsa ki az alábbi függvényeket

(a) $\text{arc sin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

(b) $\text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

(c) $\text{arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$

(d) $\text{arc ctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

2. A $\text{ctg}\,y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $\left(y \in (0,\pi)\right)$ azonosság felhasználásával biz. be, hogy $\text{arc tg}\,x + \text{arc ctg}\,x = \frac{\pi}{2}$

Átrendezés: $\text{arc tg}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,x$

Tehát: $\text{tg}\left(\text{arc tg}\,x\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,x\right) \iff x = \text{ctg}\left(\text{arc ctg}\,x\right) = x$

$\boxed{2.}$ A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság ~~felh~~ felhasználásával bizonyítsa be, hogy $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(x \in [-1,1])$

Milyen kapcsolat van az arc sin és az arc cos függvények grafikonjai közt?

Átrendezés: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

~~Behelyettesítés~~: $\cos(\arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$

$$x = \sin(\arcsin x) = x \checkmark$$

$\boxed{4.}$ A $\sin y = \sin(\pi - y)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával mutassa meg, hogy

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \pi - x, & \text{ha } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi k)) = \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$$

Ennek ~~felhasználása~~ felhasználásával ábrázolja az $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ függvény grafikonját.

$$\arcsin(\sin(x + \underbrace{k \cdot 2\pi}_{\sin\ 2\pi \text{ periodikus}})) \overset{\text{sin periodicitása miatt}}{=} \arcsin(\sin x)$$

Ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

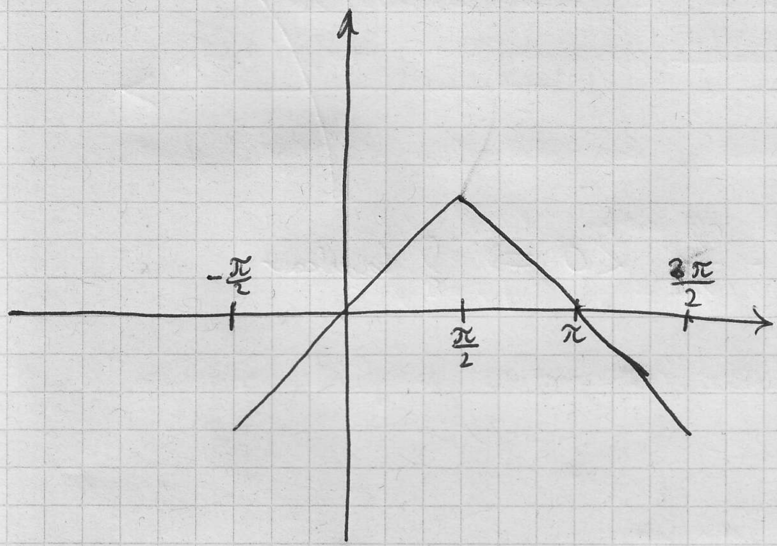
$$\underbrace{\sin x = (\sin x)\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}}_{\text{arc sin ennek az inverze, ~~tehát~~}} \qquad \arcsin(\sin x) = x$$

Ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\sin x = \sin(\pi - x) = \underbrace{\sin y \quad \left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)}_{\text{ennek inverze arc sin x értéke}}$$

$$\arcsin(\sin(\pi - x)) = \underline{\pi - x}$$

$x \mapsto \arcsin(\sin x)$



Következmény:

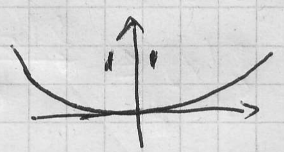
$\sin x = y \quad y \in [-1, 1]$ megvalósítása:

$x_1 = \arcsin y + 2k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

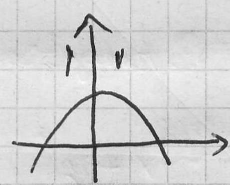
$x_2 = (\pi - \arcsin y) + 2k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

Emlékeztető

Konvexitás: Ha $f \in D^2(a,b)$ és $f'' > 0 \Rightarrow f$ konvex



Konkávitás: Ha $f \in D^2(a,b)$ és $f'' < 0 \Rightarrow f$ konkáv



5. Vizsgálja meg konvexitás és konkávitás szempontjából a köv. függvényeket:

ⓐ $f(x) = e^x$ (exp. függvény)

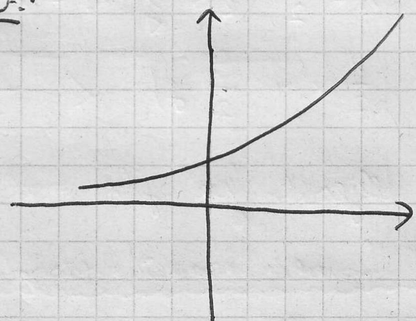
$f \in D(\mathbb{R})$

$f'(x) = (e^x)' = e^x > 0 \Rightarrow f \uparrow$

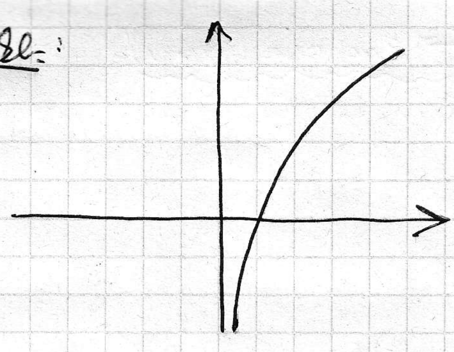
$f' \in D(\mathbb{R})$

$f''(x) = (e^x)' = e^x > 0 \Rightarrow f$ konvex

Kl.:



ⓑ $f(x) = \ln x \quad (x>0) \quad (\ln$ fv.$)$ Ábr.:



$f \in D(\mathbb{R}^+)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \underset{x>0}{\overset{\uparrow}{>}} 0 \Rightarrow \cancel{f(x)}\ f \uparrow$

$f' \in D(\mathbb{R}^+)$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' \underset{\text{hatvány der.}}{\overset{\uparrow}{=}} (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ konkáv

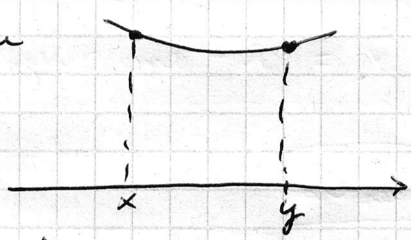
Emlékeztető

f konvex:

• $f: I \to \mathbb{R} \quad (I \subset \mathbb{R}$ intervallum$)$

$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda) y)}_{\text{függvénygörbe}} \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{szakasz egy adott pontja}} \quad (\forall \lambda \in [0,1])$$

MJ: ha a kifejezésben "≤" helyett "<" áll akkor f szig. konvex I-n



• $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon:

$\forall a,b \in I,\ a<b$ esetén

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad (\forall x \in (a,b))$$

6. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

ⓐ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2} \quad (1<n \in \mathbb{N};\ x,y>0$ és $x \neq y)$

Tudjuk: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad (\forall \lambda \in [0,1])$ ha f szig. konvex

Most: $\lambda = \frac{1}{2}$ és $f(x) = x^n$

Tehát: $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^n < \frac{x^n}{2} + \frac{y^n}{2}$

teljesül ha $f(x) = x^n$ szigorúan konvex.

$f(x)=x^n$ konvexitásának vizsgálata:

$f'(x) = n x^{n-1} \quad (n-1>0)$

$f''(x) = (n x^{n-1})' = \underbrace{n\cdot(n-1)}_{>0} \cdot \underbrace{x^{n-2}}_{>0} > 0 \Rightarrow f$ szigorúan konvex

Tehát mivel $f(x) = x^n$ fv. szig. konvex az egyenlőtlenség teljesül.

(b) $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x+e^y}{2}$ $\quad (x, y \in \mathbb{R}$ és $x \neq y)$

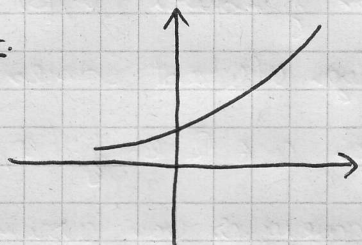
Tudjuk: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $(\forall \lambda \in [0;1])$ ha f szig. konvex

Most: $\lambda = \frac{1}{2}$; $f(x) = e^x$

Tehát $e^{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)} < \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y$ ha f szigorúan konvex

$f(x) = e^x$ szigorúan konvexitásának vizsgálata

Ill.



$f'(x) = (e^x)' = e^x > 0 \implies f \uparrow$

$f''(x) = (e^x)' = e^x > 0 \implies f$ szig. konvex

Tehát mivel $f(x) = e^x$ fv. szig. konvex, az egyenlőtlenség teljesül.

II. Elméleti kérdések

1.) Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$

$$f \in D\{a\} \iff \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : D_f \to \mathbb{R}, \ \lim_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in D_f) \end{cases}$$

Ekkor $A = f'(a)$

2) Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvény szigorú monoton csökkenésével kapcsolatban?

Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$.

Ekkor ha $f' < 0$ (a,b)-n $\implies f \downarrow [a,b]$-n.

3) Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Legyen } a,b \in \mathbb{R},\ a<b \text{ és } f:(a,b)\to\mathbb{R}. \\ \text{Tegyük fel hogy } f \in D(a,b) \text{ és} \\ \text{ha egy } c \in (a,b)\text{-ben} \\ \bullet\ f'(c) = 0 \\ \bullet\ f' \ c\text{-ben előjelet vált} \\ \bullet\ f' \text{ negatívból pozitívba megy át } c \text{ pontban} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} c \in (a,b) \text{ pont az } f \text{ fv-nek} \\ \text{lokális minimumhelye} \end{array}$$

4.) Mi a konkáv függvény definíciója?

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\forall\, a,b \in I,\ a<b$ esetén $f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ $(\forall x \in (a,b))$.

5.) Jellemezze egy függvény konvexitását a második derivált segítségével.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, ~~és~~ és tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha,\beta)$.

Ekkor f konvex (α,β)-n $\iff f''(x) \geq 0$ $(\forall x \in (\alpha,\beta))$.

6.) Milyen állítást ismer a $(-\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f:(a,-\infty) \to \mathbb{R}$.

f függvénynek van aszimptotája $(-\infty)$-ben, ha

$$\exists\, l(x) = Ax+b \ (x \in \mathbb{R}) : \lim_{x \to -\infty} (f(x) - l(x)) = 0.$$

Ekkor $l(x) = Ax+b$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes az f függvény aszimptotája ~~a~~ $(-\infty)$-ben.

II. Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2} < x\ln x + y\ln y \qquad (x,y>0)$$

$$\cancel{\iff (x+y)\ln(x+y) - (x+y)\ln(2) < x\ln x + y\ln y}$$

Tudjuk: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $(\forall \lambda \in [0,1])$ ha f szig. konvex.

Most: $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \cancel{\ln x}\ x \cdot \ln x$

Tehát:

$$\cancel{(y+x)\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\right) <}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\cdot x\cdot\ln x + \frac{1}{2}\cdot y\cdot\ln y \qquad /\cdot 2$$

$$(x+y)\cdot\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x\ln x + y\ln y \quad \text{ha } f \text{ szig. konvex.}$$

$f(x) = x\ln x$ szig. konvexitásának vizsgálata

$$f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + x \underset{(x>0)}{>} 0 \Rightarrow f\uparrow$$

$$f''(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + 1 \underset{(x>0)}{>} 0 \Rightarrow f \text{ szigorúan konvex}$$