Analízis 2.

3. Előadás jegyzet

A jegyzetet BAUER BENCE készítette DR. WEISZ FERENC előadása alapján.

Inverzfüggvény folytonossága

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor f^{-1} is folytonos.
Bizonyítás: 1. lépés: f^{-1} $\exists$ Indirekt.
Tfh. f^{-1} nem folytonos. $\Rightarrow \exists y_0 \in R_f, f^{-1} \notin C(y_0) \Rightarrow$ átviteli elv.
$\exists y_n \in R_f, \lim(y_n) = y_0 \colon \lim(f^{-1}(y_n)) \neq f^{-1}(y_0)$
Legyen $x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim(x_n) \neq x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \colon \{n : |x_n - x_0| \geq \delta\}$ végtelen.
Legyen n_k indexsorozat, hogy: $|x_{n_k} - x_0| \geq \delta$
$(x_{n_k}) : \mathbb{N} \to [a, b] \Rightarrow (x_{n_k})$ korlátos. $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozat.
$(x_{n_k})' : \quad \lim(x_{n_k})' := \alpha$ **De!** $|(x_{n_k})' - x_0| \geq \delta \Rightarrow |\alpha - x_0| \geq \delta \Rightarrow \alpha \neq x_0$
2. lépés: $f \in C(\alpha) \quad \alpha \in [a, b]$
átviteli elv $\Rightarrow \lim \underbrace{f(x_{n_k})'}_{(y_{n_k})'} = f(\alpha) \Rightarrow \lim(y_{n_k})' = f(\alpha)$

De! $\lim(y_{n_k})' = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(\alpha) = f(x_0) \quad f$ injektív. $\Rightarrow \alpha = x_0$ Ez ellentmondás. ■

Tétel: $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos.
Bizonyítás: Legyen $y_0 \in R_f$ tetszőleges, igazoljuk, hogy $f^{-1} \in C(y_0)$.
Legyen $x_0 = f^{-1}(y_0)$ és $[a, b]$ olyan intervallum, hogy: $x_0 \in [a, b]$ és $[a, b] \in I$
Ekkor az előző tétel miatt: $(f|[a, b])^{-1}$ folytonos. **De!** $(f|[a, b])^{-1} = f^{-1}|_J$
ahol $J := f[a, b]$ intervallummal. Ekkor $y_0 \in J$ belsejében $\Rightarrow f^{-1} \in C(y_0)$ ■

Tétel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f$ szig. mon.
Bizonyítás: Ha $f(a) < f(b)$, ekkor f szig. mon. nő
1. Igazoljuk, hogy $f(a) = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ és $f(b) = max\{f(x) : x \in [a, b]\}$
Csak az elsőt. Indirekten, Tfh:
$f(a) > minf$ ($<$ nem lehet) Weierstrass-tétel $\Rightarrow \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = minf \quad \alpha \neq a, b$
Tekintsük az $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ függvényt. A Bolzano-tétel miatt $c = f(a) \in (f(\alpha), f(b))$-hoz is
$\exists \xi \in [\alpha, b] : f(a) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow a = \xi$ Ellentmondás.
2. Igazoljuk, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in [a, b])$
Indirekt, Tfh: $f(x_1) > f(x_2)$
Ekkor $f(x_1) \in (f(x_2), f(b))$ Tekintsük az $f : [x_2, b] \to \mathbb{R}$ függvényt.
$c = f(x_1)$-hez is $\exists \xi \in (x_2, b) : f(x_1) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow x_1 = \xi$ Ellentmondás.

Szakadási helyek

Definíció: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in D_f$ pontban:

1. Szakadási helye van, ha $f \notin C(a)$
2. Megszüntethető szakadása van, ha
$$\exists \lim_a f \quad \text{véges, és} \quad \lim_a f \neq f(a)$$
3. Elsőfajú szakadása van, ha
$$\exists \lim_{a+0} f, \quad \exists \lim_{a-0} f \quad \text{végesek, és} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f$$
4. Másodfajú szakadás az összes többi esetben.

Pl: **1.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

$f \in C(a), a \neq 0$ Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Megszüntethető szakadás

$$\text{Legyen } \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f} \in C(0)$. Ezért megszüntethető szakadás.

2.

$$f(x) = signx \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

$f \in C(a), a \neq 0$

$$1 = \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f = -1 \Rightarrow \text{Elsőfajú szakadás.}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f \notin C(0)$ de $f \in C(a), a \neq 0$

$$\nexists \lim_{a+0} f, \lim_{a-0} f \Rightarrow \text{Másodfajú szakadás.}$$

Tétel: Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton és $\alpha \in (a, b)$, akkor

1. $f \in C(\alpha)$

   vagy

2. Elsőfajú szakadása van

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\exists \lim\limits_{\alpha-0} f, \lim\limits_{\alpha+0} f$ és $\lim\limits_{\alpha-0} f < f(\alpha) \leq \lim\limits_{\alpha+0} f$

Ha $\lim\limits_{\alpha-0} f = \lim\limits_{\alpha+0} f \Rightarrow f \in C(\alpha)$

Ha $\lim\limits_{\alpha-0} f \neq \lim\limits_{\alpha+0} f \Rightarrow$ elsőfajú szakadása van. ■

Nevezetes függvények

1. Gyökfüggvény
   Legyen $f(x) = x^n, \quad x \in [0, +\infty), n \in \mathbb{N}_+$, ekkor f szig. mon. nő és folytonos
   $\Rightarrow$ az inverze is folytonos (az előző tételek alapján).
   Definíció: $\sqrt[n]{\ } := f^{-1}$. Az n-edik gyökfüggvény.

2. Logaritmusfüggvény
   Tétel: Az $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ szig. mon. nő folytonos és $\mathbb{R}_{exp} = \mathbb{R}_+$
   Bizonyítás: Biz. nélkül
   $\Rightarrow ln := exp^{-1}$ fgv. is szig. mon. nő és folytonos.
   Definíció: $ln := exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

3. a alapú exp. és logaritmikus függvények

   Definíció: $exp_a(x) = exp(x \cdot ln(a)) = a^x$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$

   Az a alapú exp. fgv.

   Megj: $a^x = exp(ln(a^x)) = exp(x \cdot ln(a))$

   Ekkor az exp. fgv. szig. mon. nő, ha $a > 1$

   fogy, ha $0 < a < 1$

   konstans, ha $a = 1$

   Definíció: $\log_a = (exp_a)^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad (a > 0, a \neq 1)$

4. α kitevőjű hatványfüggvény

   Definíció: $x^\alpha := exp(\alpha \cdot ln(x)) \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty)$

   Megj: $x^\alpha = exp(ln(x^\alpha)) = exp(\alpha \cdot ln(x))$

Differenciálszámítás

Definíció: $a \in A \subset \mathbb{R}$ az A belső pontja, ha $\exists K(a) \subset A$ Jelölés: int A

Megj:

- határérték: $a \in D'_f$
- folytonosság: $a \in D_f$
- derivál: $a \in intD_f$

Definíció: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható (differenciálható) az $a \in intD_f$ pontban, ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ határérték. $f'(a)$ a derivált. Jelölés: $f \in D(a)$

Pl:

1. $f(x) = c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{c-c}{h}}_{0} = 0 \Rightarrow f'(a) = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+)$

$$n = 1: \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1 \Rightarrow f'(a) = 1, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$n > 1: \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \lim_{h \to 0} \frac{(a+h-a)((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2} \cdot a + ... + a^{n-1})}{h} =$$

$$= n \cdot a^{n-1}, \quad f'(a) = n \cdot a^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R}$$

3. Abszolút érték függyvény. $f(x) = |x|$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & : \quad h > 0 \\ -1 & : \quad h < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists \lim \qquad f \notin D(0)$