Analízis 2.

11. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Tétel: (Műveletek integrálokkal)

Tfh. $f, g \in R[a,b]$ Ekkor:

i, $f+g \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

ii, $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f \quad \lambda \in \mathbb{R}$

iii, $f \cdot g \in R[a,b]$

iv, Ha $|g(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in [a,b]$, akkor $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

Bizonyítás: Legyen $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in F[a,b]$,

$F_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad f_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \quad G_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} g \quad g_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} g$

i, $f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i + g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq F_i + G_i \qquad / \cdot (x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq S(f+g,\tau) \leq S(f,\tau) + S(g,\tau)$

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in F[a,b]$ tetszőleges és $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \leq s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq S(f+g,\tau) \leq$

$\leq S(f,\tau) + S(g,\tau) \leq S(f,\tau_1) + S(g,\tau_2) \quad / \cdot \sup\limits_{\tau_1}, \inf\limits_{\tau_1}, \sup\limits_{\tau_2}, \inf\limits_{\tau_2}$

$\Rightarrow I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g)$, Mivel $I_*(f) = I^*(f)$ (ugyanez g-re)

$\Rightarrow I_*(f+g) = I^*(f+g)$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

ii, Tfh. $\lambda \geq 0 \Rightarrow s(\lambda f, \tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \qquad (\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} \lambda f = \lambda \cdot \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$ Hasonlóan: $S(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

Tfh. $\lambda < 0$

$s(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$ és $S(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

iii, Oszcillációs összeggel: Tfh. $f, g \geq 0 \quad [a,b]$-n

$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i \cdot g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq F_i \cdot G_i$

$\Omega(f \cdot g, \tau) = \sum\limits_{i=1}^n (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - F_i \cdot g_i + F_i \cdot g_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n F_i (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum\limits_{i=1}^n g_i (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$f \in R[a,b] \Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow F_i \leq M$ és $g_i \leq M \quad \forall i = 1, ..., n$

$\Rightarrow \Omega(f\cdot g,\tau)\leq M\cdot\Omega(g,\tau)+M\cdot\Omega(f,\tau)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\tau_1:\Omega(g,\tau_1)<\varepsilon$ és $\forall\varepsilon>0,\exists\tau_2:\Omega(f,\tau_2)<\varepsilon$

Legyen $\tau=\tau_1\cup\tau_2\Rightarrow\Omega(g,\tau)\leq\Omega(g,\tau_1)<\varepsilon$ Hasonlóan: $\Omega(f,\tau)\leq\Omega(f,\tau_2)<\varepsilon$

$\Rightarrow\Omega(f\cdot g,\tau)<2\varepsilon M\Rightarrow f\cdot g\in R[a,b]$

Ha f és g tetszőleges, akkor legyen $m_f:=\inf\limits_{[a,b]}f$, $m_g:=\inf\limits_{[a,b]}g\Rightarrow\underbrace{f-m_f}_{\in R[a,b]}\geq 0$, $\underbrace{g-m_g}_{\in R[a,b]}\geq 0$

$\Rightarrow\underbrace{(f-m_f)(g-m_g)}_{\in R[a,b]}=f\cdot g\underbrace{-g\cdot m_f-f\cdot m_g+m_f\cdot m_g}_{\in R[a,b]}\Rightarrow f\cdot g\in R[a,b]$

iv, Elég: $\frac{1}{g}\in R[a,b]$

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}=\frac{g(y)-g(x)}{g(x)\cdot g(y)}\leq\frac{|g(y)-g(x)|}{|g(x)\cdot g(y)|}\leq\frac{G_i-g_i}{m^2}\Rightarrow\sup_{[x_{i-1},x_i]}\frac{1}{g}-\inf_{[x_{i-1},x_i]}\frac{1}{g}\leq\frac{G_i-g_i}{m^2}$$

$\Rightarrow\Omega(\frac{1}{g},\tau)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}\frac{1}{g}-\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}\frac{1}{g})\cdot(x_i-x_{i-1})\leq\frac{1}{m^2}\Omega(g,\tau)$

$\forall\varepsilon>0,\exists\tau,\Omega(g,\tau)<\varepsilon\Rightarrow\Omega(\frac{1}{g},\tau)\leq\frac{\varepsilon}{m^2}$ ■

Tétel: Legyen $c\in[a,b]$, ekkor:

$f\in R[a,b]\Leftrightarrow f\in R[a,c]$ és $f\in R[c,b]$ Ekkor: $\int\limits_a^b f=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f$

Bizonyítás nélkül

Definíció: $\int\limits_a^b f=0$, $a>b:\int\limits_a^b f=-\int\limits_a^b f$

Tétel: $f\in R[A,B]$, $a,b,c\in[A,B]$ Ekkor: $\int\limits_a^b f=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f$

Tétel: Ha $f\in C[a,b]$, ekkor $f\in R[a,b]$

Bizonyítás: Ha $f\in C[a,b]\Rightarrow$ Heine tétel miatt f egyenletesen folytonos, azaz

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta:|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Legyen $\tau\in F[a,b]$ olyan, hogy $|\tau|<\delta$

$$\Omega(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n}(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|}_{<\varepsilon}\cdot(x_i-x_{i-1})\leq\varepsilon\cdot(b-a)$$

$\Rightarrow f\in R[a,b]$ ■

Tétel: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton, ekkor $f\in R[a,b]$

Bizonyítás: Hasonlóan Tfh. $f\nearrow$

$$\Omega(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n}(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f)\cdot(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot(x_i-x_{i-1})$$

Tfh. $|\tau|<\delta\Rightarrow\Omega(f,\tau)\leq\delta\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\delta\cdot(f(b)-f(a))<\varepsilon$

Ha a $\delta<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\Rightarrow f\in R[a,b]$ ■

Tétel: f értékeit véges sok pontban megváltoztatom ($\tilde{f}$),

ha $f\in R[a,b]$, akkor $\tilde{f}\in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b\tilde{f}=\int\limits_a^b f$

Definíció: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos, ha $\exists \tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in F[a,b]$, hogy $f \in C(x_{i-1}, x_i)$ és $\exists \lim\limits_{x_i+0} f, \exists \lim\limits_{x_i-0} f$ és végesek $i = 1, ..., n$

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos, akkor $f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f$

Bizonyítás: $f \in C(x_{i-1}, x_i) \Rightarrow f \in R[x_{i-1}, x_i]$ ■

Tétel: $f, g \in R[a,b]$

i, Ha $f \geq 0$, akkor $\int\limits_a^b f \geq 0$

ii, Ha $f \geq g$, akkor $\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: **i,** $f \geq 0 \Rightarrow s(f,\tau) \geq 0 \Rightarrow I_*(f) = \int\limits_a^b f \geq 0$

ii, $f - g \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b (f-g) \geq 0$ ■

Tétel: Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $-\left|\int f\right| \leq \left|\int f\right| \leq \int |f|$

Bizonyítás: $\Omega(|f|, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} |f| - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} |f|) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} ||f(y)| - |f(x)|| \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sup\limits_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(y) - f(x)| \cdot (x_i - x_{i-1}) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

$\Rightarrow |f| \in R[a,b]$ ■