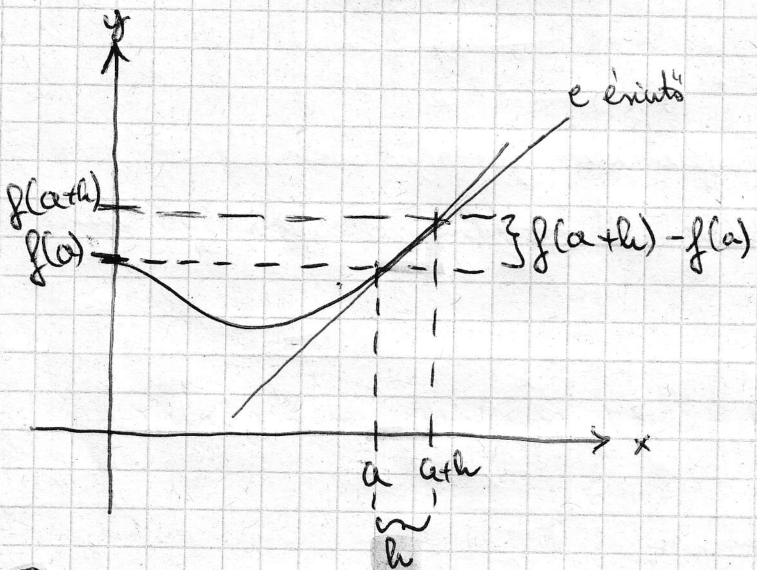
6. Gyakorlatra

I. Órai anyag

Emlékeztető

① Differenciálhatóság (/deriválhatóság)

Jegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$, akkor $f \in D\{a\}$, ha $\exists$ és véges $\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\text{ez mindig } \frac{0}{0} \text{ típusú kritikus határérték}}$ és $f'(a)$ az utóbbi határérték.



e meredeksége: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$\Longleftrightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Mf $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$

$\boxed{1.}$ A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$ és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

ⓐ $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $(x > -1)$, $a := 3$;

Megvizsgáljuk, hogy létezik-e $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2 - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}(x-3)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gyöktelenítés}}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1} \cdot (x-3)} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \to 3} \frac{4 - x - 1}{2\sqrt{x+1}(x+3)(2 + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{2\sqrt{x+1}\,(x-3)\,(2+\sqrt{x+1})} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{2\sqrt{x+1}\,\cancel{(x-3)}\,(2+\sqrt{x+1})} =$$

$3-x=-(x-3)$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 3} \frac{-1}{2\sqrt{x+1}\,(2+\sqrt{x+1})} =$$

egyszerűsítve

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{-1}{2\underbrace{\sqrt{3+1}}_{2}\,(2+\underbrace{\sqrt{3+1}}_{2})} = -\frac{1}{16} = f'(3) \Rightarrow f \in D\{3\}$$

műveleti tételek miatt

$\Rightarrow$ Tehát a függvény a pontban deriválható, mivel a határértéke létezik és véges, és akkor mellesleg ez nem más, mint a derivált: $f'(3) = -\frac{1}{16}$

(b) $f(x) := \frac{x+2}{x^2-9}$ $\quad (\pm 3 \neq x \in \mathbb{R})$, $a := -1$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} - \frac{-1+2}{(-1)^2-9}}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} - \left(\frac{1}{-8}\right)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} + \frac{1}{8}}{x+1} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to -1} \frac{\frac{8(x+2)+(x^2-9)}{8(x^2-9)}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{8(x+2)+(x^2-9)}{8(x^2-9)(x+1)} =$$

közös nevezőre hozva a számlálót

$$= \lim_{x\to -1} \frac{8x+16+x^2-9}{8(x^2-9)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{x^2+8x+7}{8(x^2-9)(x+1)}}_{\frac{0}{0}\text{ típusú határérték}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(x+7)\cancel{(x+1)}}{8(x^2-9)\cancel{(x+1)}} =$$

$\frac{0}{0}$ típusú határérték
↳ erre számítottunk (lásd. emlékeztető)

szorzattá alakítás

(Szorzattá alakítás (számlálót ~~nevezőt~~)

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{-8 \pm 6}{2} \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 7 \end{matrix} \right.$$
)

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+7}{8(x^2-9)} \underset{\uparrow}{=} \frac{-1+7}{8((-1)^2-9)} = \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32} = f'(-1)$$

ez már nem kritikus ☺

műveleti tételekkel

$\Rightarrow$ Tehát a függvény a pontban deriválható, mivel létezik határértéke és ez véges, és akkor ez nem más, mint a derivált: $f'(-1) = -\frac{3}{32}$

$\boxed{\text{Emlékeztető}}$

(D) Derivált-függvény ↱ f deriválható D_f $\forall$ pontjában

Jegyük fel, hogy $\overbrace{f\in D(D_f)}$,

$$f' : x \to f'(x) \quad (x\in D_f)$$

derivált-függvénynek nevezzük.

(ebbe a függvénybe bármely ~~x~~ $a\in D_f$ pontot ~~fel~~ behelyettesítjük megkapjuk ~~$f'(x)$-et~~ $f'(a)$-t)

(Pl) $f(x)=c \quad (c\in\mathbb{R})$

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{c-c}{y-x}=\lim_{y\to x}0=\underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ konstans függvény deriváltja 0.

Elemi függvények ~~deriváltfüg~~ derivált-függvényei

$f(x)$	$c\in\mathbb{R}$	x	x^{α}	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	0	1	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	e^x	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

x^α: $\alpha\neq 0$; $\sin x$, $\cos x$: hatványsorral be lehet látni; $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$: következmény

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{hányados}\\ \text{deriváltja}\\ \text{(lásd. műv. tételek)}}}{=} \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(T) Műveleti tételek

$f,g\in$ ~~$D\{a\}$~~ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f,g\in D\{a\}$, $a\in \operatorname{int}(D_f\cap D_g)$. Ekkor:

2.) $f+g\in D\{a\}$ és $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

1.) $c\cdot f\in D\{a\}$ és $(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a) \quad (c\in\mathbb{R})$

3.) $fg\in D\{a\}$ és $(fg)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$

4.) ha $g(a)\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}\in D\{a\}$ és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$

① Kompozíció deriváltja:

$a \in \text{int}\, D_g$ és $g(a) \in \text{int}\, D_f$

$\underbrace{(f\circ g)'(a)}_{[f(g(a))]'} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ formálisan: $(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'(a)$

$\boxed{2.}$ Gyakorolja a mechanikus deriválást:

ⓐ $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$

$$f'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{műveleti} \\ \text{tételek}}}{=} (x^3)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' - \left(\frac{1}{5x^5}\right)'$$

Deriválás tagonként:

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = (-2)\,x^{-3} \left(= -\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5x^5}\right)' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{5}\cdot\left(x^{-5}\right)' = \frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot\left(x^{-6}\right) = -x^{-6} \left(= -\frac{1}{x^6}\right)$$

~~konstanssal~~ ~~[illegible]~~
műveleti tételek

Tehát:

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 - 2x^{-3} + x^{-6}}_{\text{ZH-ban is elég csak eddig rendezni}} \left(= 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right)$$

$\Rightarrow$ tetszőleges $x \neq 0$ esetén megmondja a derivált értéket

↳ praktikusabb, mint definíció alapján határozni meg a deriváltat egy pontban

ⓑ $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt{x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x^1\cdot x^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{7}{4}}} =$

$= x^{\frac{7}{8}} \left[= \left(x\left(x(x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)' = \frac{7}{8}\cdot x^{-\frac{1}{8}} \underbrace{\left(= \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)}_{\text{egyébként felesleges így is felírni, ZH-ban sem kell majd}}$$

ⓒ $f(x) := x^2 \cdot \sin x$

$$f'(x) = (x^2 \cdot \sin x)' \underset{\uparrow}{=} (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = \underline{\underline{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x}}$$

műveleti tétel (szorzat deriváltja)

ⓓ $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-x-2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x^2-x-2}\right)' \underset{\uparrow}{=} \frac{(x^2+3)'(x^2-x-2) - (x^2+3)(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2} =$$

műv tétel: (hányadosfüggvény deriv.)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\frac{2x\,(x^2-x-2) - (x^2-3)\,(x-1)}{(x^2-x-2)^2}}}$$

műveleti tételekkel deriválgatunk

ezt itt még rendezgethetjük, de a deriválást már befejeztük

↳ $\left[\begin{array}{l} (x^2+3)' = (x^2)' + 3' = 2x + 0 = \underline{\underline{2x}} \\ (x^2-x-2) = (x^2)' - (x)' - (2)' = 2x - 1 - 0 = 2x-1 \end{array}\right]$

$\boxed{3.}$ Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határozza meg $f'(x)$-et, ha

ⓐ $f(x) = \operatorname{tg}(5x^2+3x)$

$$(\underset{f}{\operatorname{tg}}\ \underbrace{(5x^2+3x)}_{g})' \underset{\uparrow}{=} \overbrace{\frac{1}{\cos^2(5x^2+3x)}}^{f'(g(a))} \cdot \overbrace{(5x^2+3x)'}^{g'(a)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(5x^2+3x)} \cdot (10x+3)}}$$

kompozíció deriváltja

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'(a)$$

ⓑ $f(x) := \sin \underbrace{\dfrac{x^2+1}{x+3}}$

kompozíció: sinusba behelyettesítünk egy másik fv-t, ezt akarjuk deriválni

$$f'(x) = \left(\sin\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompozíció} \\ \text{deriváltja}}}{=} \cos\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)' =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{függvények} \\ \text{hányadosának} \\ \text{deriváltja}}}{=} \cos\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{(x^2+1)' \cdot (x+3) - (x^2+1) \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} =$$

$$= \cos\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{2x \cdot (x+3) - (x^2+1) \cdot (1+0)}{(x+3)^2}$$

Mj.: ZH-ban nem kell ennél tovább rendezni: a deriválás kész

↳ majd ha dolgozni kell vele rendezzük, de most még nem kell ☺

Ⓒ $f(x) := \sqrt{x^3+2x+1}$

→ valamit $\frac{1}{2}$-re emeltünk

$$\left(\sqrt{x^3+2x+1}\right)' = \left(\big(\overbrace{x^3+2x+1}^{g}\big)^{\frac{1}{2}}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompozíció} \\ \text{deriváltja}}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(x^3+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^3+2x+1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+2)$$

II. Elméleti kérdések

1.) Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in D\{a\}$, $a \in \text{int}(D_f \cap D_g)$.

Ekkor $fg \in D\{a\}$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

2.) Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in D\{a\}$, $a \in \text{int}(D_f \cap D_g)$.

Ekkor ha $g(a) \neq 0$ akkor $\frac{f}{g} \in D_g\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

3.) Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és

$$\left.\begin{array}{l} R_g \subset D_f \\ g \in D\{a\} \\ f \in D\{g(a)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \circ g \in D\{a\} \text{ és} \\ (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \end{array}$$

külső fv. belső fv.

4.) Írja fel az $\exp_a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a>0$) függvény deriváltját valamely helyen.

~~$\forall x$~~

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp_a \in D\{x\}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (a^x = e^x \cdot \ln a)$

5.) Írja fel a $\log_a$ ($a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$) függvény deriváltját valamely helyen.

$\forall x \in (0, +\infty)$, $\log_a \in D\{x\}$

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a} \quad (x \in (0, +\infty))$$

III. Házi feladatok

$\boxed{1.}$ A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

$$f(x) := \frac{x^2-3}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := -1$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{x^2-3}{x^2+1} - \frac{(-1)^2-3}{(-1)^2+1}}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{x^2-3}{x^2+1} + 1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\frac{x^2-3+x^2+1}{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2-2}{(x^2+1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2\overbrace{(x^2-1)}^{(x+1)(x-1)}}{(x^2+1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2(x-1)}{(x^2+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{műveleti} \\ \text{tételekkel}}}{=} \frac{2(-1-1)}{((-1)^2+1)} = -\frac{4}{2} = -2$$

$\Rightarrow$ Tehát a függvény deriválható a pontban, mivel a határértéke létezik és véges, és ekkor ez a deriváltja is egyben: $f'(-1) = -2$