Programtervező Informatikus BSC Szak, Analízis2 , gyakorló feladatok a 2. zárthelyi dolgozathoz,2014.11.25.

1. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értéke mellett lesz deriválható az

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sqrt{1-x} + b \cdot \sin x + 2, & \text{ha } x \le 0; \\ a \cdot e^x + b \cdot \text{ch} x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény a teljes valós számhalmazon ? Ezen esetekben adja meg az f' függvényt.

2. Hol deriválható az alábbi függvény ? Ahol igen ott adjuk meg $f'(x)$-et !

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

3. Tekintsük az $f(x) = 2x - \text{arctg}(x), \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

i) Írja fel a függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjában.

ii) Bizonyítsa be, hogy f invertálható, az inverze deriválható és számolja ki az $(f^{-1})'\Big(2 - \dfrac{\pi}{4}\Big)$ deriváltat.

4. Tekintsük az $f(x) := \arcsin\sqrt{1-x^2} + \text{tg}(\cos(\pi x)), \quad (x \in (0;1))$ függvényt.

a) Igazolja, hogy f invertálható. Számítsa ki $f(1/2)$-et.

b) Határozza meg az f^{-1} deriváltját a $\pi/3$ helyen.

5. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan differenciálható f függvény, amelyre :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $\forall x \in (0;\pi) : f\Big(\text{ctg}(x) + \text{arcctg}(x) + \dfrac{1}{x}\Big) = x^3 + \cos(x)$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $\forall x \in \mathbb{R} : f^3(x) + f^2(x) + f(x) + 2 = e^x + 5\sin(x)$. Mennyi $f'(0)$ értéke ?

6. Számítsa ki a következő határértékeket, ha léteznek :

$$a) \lim_{x \to +\infty} \Big(x \cdot \text{arctg}\frac{1}{x}\Big); \quad b) \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad c) \lim_{x \to 1} \Big(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\Big);$$

$$d) \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\text{tg}\sqrt{x}}; \quad e) \lim_{x \to 0+0} (3^x + 5^x - 1)^{1/\sin x}.$$

7. Bizonyítsa be, hogy : $\quad \forall\ 0 < a < b < +\infty : \dfrac{2ab - 2a^2}{1+b^4} < \text{arctg}(b^2) - \text{arctg}(a^2) < \dfrac{2b^2 - 2ab}{1+a^4}$.

8. Bizonyítsa be, hogy :

a) $\forall x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{4}\Big]$ esetén : $\text{tg} x - 1 \ge 2x - \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\forall x \in (0, +\infty)$ esetén : $x \cdot \text{arctg} x > \ln(1+x^2)$.

9. Adja meg a következő függvény értékkészletét : $f(x) := \text{arctg}\dfrac{x-1}{x+1} - \text{arctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

10. a) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}, \Big(x > -\dfrac{1}{2}\Big)$ függvény másodfokú Taylor polinomját az $a = 0$ pont körül, és adjon felső becslést az $\Big|\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} - \Big(1 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{9}x^2\Big)\Big|$ eltérésre, ha $x \in \Big[0; \dfrac{1}{4}\Big]$.

b) Határozza meg az $f(x) = \ln(1 + \sin x), \quad (x \in (-\pi/2; \pi/2))$ függvény másodfokú Taylor polinomját az $a = 0$ pont körül, és adjon felső becslést az $\Big|f(x) - T_2 f(x)\Big|$ eltérésre, ha $x \in \Big[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\Big]$, ahol $T_2 f$ jelöli a kérdéses másodrendű Taylor polinomot.

11. a) Határozza meg, az $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}, \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény lokális szélsőértékeit.

b) Határozza meg az f abszolút szélsőértékeit a $\Big[-\dfrac{1}{2}; 1\Big]$ halmazon.

12. Határozza meg az $f(x) := x^2 \cdot \sqrt{4x+1}, \ (x > -1/4)$ függvény lokális szélsőértékeit. Adja meg az f függvény minimumát és maximumát a $[-1/6; 2]$ intervallumon.

13. Határozza meg, egy $R > 0$ adott sugarú gömbbe írt hengerek közül azt, amelyiknek legnagyobb a térfogata.

14. Végezzen teljes tárgyalást, majd ábrázolja grafikusan az alábbi függvényeket :

$$a) f(x) = e^{1/x} - x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \quad b) f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}); \quad c) f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (x > 0).$$