

# Analízis II.

## Első ZH tételkidolgozás

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadása alapján. (2017. május 29.)

Tantárgyi honlap: [http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2\\_BSc\\_2016/index\\_An2\\_2016.htm](http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm)

Általános tudnivalók: [http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2\\_BSc\\_2016/Zh1-tudni.pdf](http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Zh1-tudni.pdf)

Követelményrendszer: [http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2\\_BSc\\_2016/Kov\\_An2\\_2016.pdf](http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Kov_An2_2016.pdf)

ZH témakörei: [http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2\\_BSc\\_2016/An2\\_1\\_zh\\_temakork\\_2016.pdf](http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/An2_1_zh_temakork_2016.pdf)

### 1. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Tegyük fel, hogy 
$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ korlátos.}$$

**Bizonyítás:**  $f$  korlátos, ha

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \leq K$$

Indirekt: Tegyük fel, hogy nem korlátos, azaz,

$$\begin{aligned} & \forall K > 0, \quad \exists x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K \\ & \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \quad \exists x_n \in [a, b], \quad |f(x_n)| \geq n \end{aligned} \quad (1)$$

Tehát:  $(x_n) \subset [a, b]$  korlátos sorozat  $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{B-W kiv.}}$   $\exists (x_{n_k})$  konv. részsorozat.

Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k})$$

Ekkor:  $\alpha \in [a, b]$ .

(Indirekt: Tegyük fel, hogy  $\alpha \notin [a, b] \Rightarrow \exists K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$ .

$\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_0, \quad x_{n_k} \in K(\alpha)$ . Ez ellentmondás, ui.  $x_{n_k} \in [a, b]$ ).

Az  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n  $\Rightarrow$

$$f \in C\{\alpha\} \xrightarrow{\text{átviteli elv}} x_{n_k} \rightarrow \alpha \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k})) \text{ korlátos, mert konv.}$$

Ez ellentmond **1**-nek. ■

### 2. A Weierstrass-tétel.

Tegyük fel, hogy:

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\text{-nek } \exists \text{ absz. szélsőértéke, azaz } \exists \alpha, \beta \in [a, b] : \\ f(x) \leq f(\alpha) \\ f(\beta) \leq f(x) \end{array} \quad (x \in [a, b])$$

**Bizonyítás:**  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n  $\Rightarrow f$  korlátos.

Ekkor:

$$\exists \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: m \in \mathbb{R}$$

Igazoljuk:  $\exists \alpha \in [a, b] : \quad f(\alpha) = M$ .

$$M \sup \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : \quad f(x_n) = y_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Az  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$  korlátos sorozat  $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{B-W kiv.}} \exists (x_{n_k})$  konvergens részsorozata.

Legyen  $\lim(x_{n_k}) =: \alpha \in [a, b]$  (indirekt belátható)

$$f \text{ folyt. } [a, b]\text{-n} \Rightarrow f \in C\{\alpha\} \xrightarrow{\text{átviteli elv}} \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{n_k}) = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (y_{n_k}) = f(\alpha) \Rightarrow M = f(\alpha)$$

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

### 3. A Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , továbbá

$$\left. \begin{array}{l} \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0.$$

**Bizonyítás:** (Bolzano-féle felezési eljárás)

Tegyük fel, hogy  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Legyen  $[x_0, y_0] := [a, b]$ .

Felezzük meg az intervallumot! Legyen  $z_0 := \frac{a+b}{2}$ . 3 eset lehetséges:

- a)  $f(z_0) = 0 \checkmark$
- b)  $f(z_0) > 0$  esetén  $[x_1, y_1] := [a, z_0]$ .
- c)  $f(z_0) < 0$  esetén  $[x_1, y_1] := [z_0, b]$ .

Megfelezzük  $[x_1, y_1]$ -et. Itt is 3 eset lehetséges. (...) Folytatjuk az eljárást.

Az eljárás közben vagy találunk véges sok lépésben olyan  $\xi$ -t melyre  $f(\xi) = 0$ , vagy nem. Amennyiben nem,  $\exists [x_n, y_n] \ (n \in \mathbb{N})$  intervallumsorozat, melyre teljesül hogy

- a)  $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ (\forall n \in \mathbb{N})$
- b)  $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$
- c)  $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$

Cantor-féle közsorész tételből következik hogy ezeknek az intervallumoknak van közös pontja, ha  $n \in \mathbb{N}$ , azaz:

$$\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Cantor}} \exists \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n], \quad x_n \nearrow \xi, \quad y_n \searrow \xi. \quad (\text{monoton tartanak } \xi\text{-hez})$$

$$f \text{ folytonos } [a, b]\text{-n} \Rightarrow f \in C\{\xi\} \xrightarrow[\text{elv}]{\text{átviteli}} \lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n)) \text{ Ha}$$

- a)  $f(x_n) < 0 \Rightarrow \lim(f(x_n)) \leq 0$
- b)  $f(y_n) > 0 \Rightarrow \lim(f(y_n)) \geq 0$

Tehát:

$$\underbrace{f(\xi) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\xi) \geq 0}_{\Downarrow} f(\xi) = 0$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

### 4. Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel

Tegyük fel, hogy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f\text{-en.}$$

**Bizonyítás:** Indirekt, tegyük fel hogy  $f^{-1} : \mathcal{R}_f \rightarrow [a, b]$  nem folytonos, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f : f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

Átviteli elv  $\Rightarrow \exists (y_n) \subset \mathcal{R}_f \quad \lim(y_n) = y_0, \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n), \quad \text{azaz} \quad f(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$x_0 := f^{-1}(y_0), \quad \text{azaz} \quad f(x_0) = y_0.$$

Így:

$$\lim(x_n) \neq x_0. \quad (2)$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\exists \delta > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \geq \delta\} \quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az  $(x_n) \subset [a, b]$  korlátos sorozat  $\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Bolz-Weier}} \exists (x_{\nu_n})$  konvergens részsorozata.

Legyen  $\bar{x} := \lim(x_{\nu_n}) \in [a, b]$ . (indirekt módon lehetett bizonyítani)

$$\left. \begin{array}{l} f \in C\{\bar{x}\} \\ x_{\nu_n} \rightarrow \bar{x} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{elv}]{\text{átviteli}} \underbrace{f(x_{\nu_n})}_{y_{\nu_n}} \rightarrow f(\bar{x}) \quad (\text{emiatt: } \color{red}{2})$$

Viszont:

$$y_n \rightarrow y_0, \quad y_{\nu_n} \rightarrow y_0 (= f(x_0))$$

Ez pedig ellentmondás. ■

## 5. A folytonosság és a derivált kapcsolata.

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ .

$$a) \quad f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{a\}.$$

$$b) \quad f \in D\{a\} \quad \not\Rightarrow \quad f \in C\{a\}.$$

**Bizonyítás:**

$\Rightarrow$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

$\not\Rightarrow$

$\text{abs} \notin D\{0\} :$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{abs} \notin D\{0\}. \quad \blacksquare$$

## 6. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{int } \mathcal{D}_f$

$$f \in D\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \end{cases}$$

$$A = f'(a).$$

*Bizonyítás:*

$\Rightarrow$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right)}_{=:\varepsilon(x)} = 0$$

Így:  $\lim_a \varepsilon = 0$ , és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \checkmark$$

$\Leftarrow$  Tegyük fel, hogy  $\exists A \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 :$

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \xrightarrow{x \neq a} \quad \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} = \underbrace{A + \varepsilon(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} A}$$

$$\Rightarrow f'(a) = A \quad \blacksquare$$

## 7. A szorzatfüggvény deriválása.

Tegyük fel, hogy  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ .

Ekkor:

$$f, g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

**Bizonyítás:**

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \quad \begin{array}{l} -f(a)g(x) \\ +f(a)g(x) \end{array} \quad \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} \cdot g(x) + f(a) \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} g'(a)}$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) \Rightarrow \text{mivel folytonos, és } x \rightarrow a, \text{ Ui.: } g \in D\{a\} \Rightarrow g \in C\{a\} \quad \blacksquare$$

## 8. A hányadosfüggvény deriválása.

Tegyük fel, hogy  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad g(a) \neq 0$ .

Ekkor:

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

**Bizonyítás:** Közös ötlet:  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  és  $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ -t behozni.

a) Igazoljuk:  $a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$ .

Valóban:  $g \in D\{a\} \Rightarrow g \in C\{a\}$ , de  $g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\exists K(a) : \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a))$$

$$\Rightarrow a \in \text{int } \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{1}{g(a) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} \quad \begin{array}{l} -f(a)g(a) \\ +f(a)g(a) \end{array} \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} g'(a)} \right) \end{aligned}$$

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) \neq 0$ , mert  $g \in C\{a\}$ .  $\blacksquare$  Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész. (előadáson ennyi hangzott el)

## 9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , és

$$\left. \begin{array}{l} f \in D\{a\} \quad a \in \text{int } \mathcal{D}_f \\ f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélső értéke van} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

**Bizonyítás:** Lokális maximumra: Tekintsük

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

törtet. Ha  $x > a$

$$\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \leq 0 \quad f \in D\{a\} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

Ha  $x < a$

$$\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \geq 0$$

$$f \in D\{a\} \Rightarrow f'(a) \geq 0 \text{ Tehát: } f'(a) \leq 0 \text{ és } f'(a) \geq 0 \Rightarrow f'(a) = 0. \blacksquare$$

#### 10. A Rolle-féle középértéktétel.

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \xi \in (a, b) \\ f'(\xi) = 0 \end{array}$$

**Bizonyítás:**  $f \in C[a, b] \xrightarrow[\text{tétel}]{\text{Weier.}}$   $\exists \alpha, \beta \in [a, b] :$

$$f(\alpha) := \min_{[a, b]} f := m$$

$$f(\beta) := \max_{[a, b]} f := M$$

$$a) \text{ eset: } f \equiv \text{áll. } (m = M) \Rightarrow f' \equiv 0$$

$$b) \text{ eset: } f \not\equiv \text{áll.} \Rightarrow m \neq M \text{ és } m < M$$

Ha  $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \alpha \in (a, b)$  Ekkor  $f(\alpha)$ : abszolút minimum és  $f(\alpha)$  lokális minimum is.

$$f'(\alpha) = 0, \quad \xi = \alpha \text{ „jó”}$$

Ha  $m = f(a) = f(b)$  ■ Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész. (előadáson ennyi hangzott el)

#### 11. A Lagrange-féle középértéktétel.

$$\left. \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b) \\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}$$

**Bizonyítás:** A szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Legyen:

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

$F$ -re a Rolle feltételei teljesülnek (ellenőrizni kell!)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \blacksquare$$