**Vizsgakérdések**
**Analízis 2. (BSc)**
**Programtervező informatikus szak**
**A, B és C szakirány**
*2016-2017. tanév 1. félév*

- **Folytonosság**

**1.** Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

**Válasz.** Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

**2.** Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

**Válasz.** Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

**3.** Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

**Válasz.** Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

**4.** Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

**Válasz.** $f \in C\{a\} \iff \forall\, (x_n): \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

**5.** Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt.

**Válasz.** Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C\{a\}$.

**6.** Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

**Válasz.** $g \in C\{a\},\ f \in C\{g(a)\} \Longrightarrow f \circ g \in C\{a\}$.

**7.** Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor $f$ korlátos $[a, b]$-n.

**8.** Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

**Válasz.** Tegyük fel, hogy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $f$-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

**9.** Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

**Válasz.** Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$). Ha $f$ a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

**10.** Mit jelent az, hogy egy $f$ függvény *Darboux-tulajdonságú*?

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú $I$-n*, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $f$ függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

**11.** Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

**Válasz.** Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f$ minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\exists\, \xi \in (a, b) : \quad f(\xi) = c$.

**12.** Milyen állításokat ismer az inverz függvény folytonosságáról?

**Válasz.** Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ függvény *folytonos* és *invertálható*. Ekkor $f$ inverze folytonos.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *folytonos* és *invertálható* $I$-n. Ekkor $\mathcal{R}_f$ intervallum és az $f$ függvény inverze folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ intervallumon.

**13.** Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ függvény *folytonos* és *invertálható*. Mit mondhatunk ekkor az $f$ függvényről?

**Válasz.** Ekkor $f$ szigorúan monoton függvény.

**14.** Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

**Válasz.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{és ez véges, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

**15.** Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

**Válasz.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

**16.** Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

**Válasz.** Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az $f$ függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.

- **Differenciálszámítás**

**17.** Mikor mondja, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

**Válasz.** Ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor:

$$f \in D\{a\} \iff \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{és ez a határérték véges.}$$

**18.** Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

**Válasz.** $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

**19.** Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

**Válasz.** $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

**20.** Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

**Válasz.** $f, g \in D\{a\} \implies fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

**21.** Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

**Válasz.** $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \implies \frac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

**22.** Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

**Válasz.** Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

**23.** Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

**Válasz.** Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény $(\alpha, \beta)$-n, és egy $a \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D\{a\}$, továbbá $f'(a) \neq 0$. Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, ahol $b := f(a)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

**24.** Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

**Válasz.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor $R$ konvergenciasugara pozitív, és jelölje $f$ az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban az $f$ függvény differenciálható és a deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott sor összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1}.$$

Röviden fogalmazva: Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

**25.** Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

**Válasz.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f \in D\big(K_\delta(a)\big)$ és $f' \in D\{a\}$.

**26.** Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó *Leibniz-tételt.*

**Válasz.** Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f, g \in D^n\{a\}$, akkor $fg \in D^n\{a\}$ és

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

**27.** Mondja ki a *Rolle-tételt.*

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b) :$ $f'(\xi) = 0$.

**28.** Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktételt.*

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a,b], f, g \in D(a,b)$ és $g'(x) \neq 0$, $(x \in (a,b))$. Ekkor $\exists\, \xi \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

**29.** Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} =$ $f'(\xi)$.

**30.** Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

**Válasz.** Az $f$ függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális minimuma van, ha

$$\exists\, K(c): \quad f(c) \leq f(x) \qquad \big(x \in K(c) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

**31.** Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?

**Válasz.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$, hogy $K_\delta(c) \subset \mathcal{D}_f$, $f(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (c-\delta, c)$ és $f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (c, c+\delta)$ vagy fordítva.

**32.** Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?

**Válasz.** Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az $f$ függvénynek $c$-ben lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

**33.** Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?

**Válasz.** Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$ és $f'$ a $c \in (a,b)$ pontban előjelet vált, akkor az $f$ függvénynek $c$-ben lokális szélsőértéke van.

**34.** Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.

**Válasz.** Ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{c\}$, $(c \in (a,b))$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor az $f$ függvénynek $c$-ben lokális minimuma van.

**35.** Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?

**Válasz.** Ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$ $\big(a,b \in \mathbb{R}, a < b\big)$ és $f' > 0$ az $(a,b)$ intervallumon, akkor $f$ szigorúan monoton növekedő $[a,b]$-n.

**36.** Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?

**Válasz.** Ha $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$ $\big(a,b \in \mathbb{R}, a < b\big)$, akkor

$$f \;\text{ monoton növekedő }\; [a,b]\text{-n} \iff f' \geq 0 \;\; [a,b]\text{-n}.$$

**37.** Mi a konvex függvény definíciója?

**Válasz.** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a,b \in I,\; a < b \;\text{ esetén}$$

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

**38.** Jellemezze egy függvény konvexitását egyenlőtlenséggel.

**Válasz.** Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex $I$-n, ha

$$\forall\, a,b \in I,\; a < b \;\text{ és }\; \forall\, \lambda \in (0,1) \;\text{ esetén}$$

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

**39.** Jellemezze egy függvény konvexitását a differenciahányados segítségével.

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Ekkor $f$ konvex $I$-n $\iff$ $\forall\, c \in I$ esetén a $\triangle_c f(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $(x \in I \setminus \{c\})$ függvény monoton növekedő.

**40.** Jellemezze egy függvény konvexitását az első derivált segítségével.

**Válasz.** Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D$. Ekkor

$$f \;\text{ konvex } [a,b]\text{-n} \iff f' \;\text{ monoton növekedő } [a,b]\text{-n}.$$

**41.** Jellemezze egy függvény *konkávitását* a második derivált segítségével.

**Válasz.** Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D^2$. Ekkor

$$f \;\text{ konkáv } [a,b]\text{-n} \iff f'' \leq 0 \;\; [a,b]\text{-n}.$$

**42.** Mi az inflexiós pont definíciója?

**Válasz.** Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha,\beta)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in (\alpha,\beta)$ pont az $f$ függvénynek inflexiós pontja, ha

$$\exists\, \delta > 0 : \quad f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n} \quad \text{vagy} \quad \text{fordítva}.$$

**43.** Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*

**Válasz.** Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(a, b)$, $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ és tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

**44.** Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

**Válasz.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x - a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor $R$ konvergenciasugara pozitív, és jelölje $f$ az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x - a)^n \qquad \big(x \in k_R(a)\big).$$

Ekkor $f \in D^\infty\big(k_R(a)\big)$ és

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \big(n = 0, 1, 2, \ldots\big).$$

**45.** Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?

**Válasz.** Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \in D^\infty\{a\}$. Ekkor a

$$\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az $f$ függvény $a$-hoz tartozó *Taylor-sorának* nevezzük.

**46.** Fogalmazza meg a *Taylor-formula Lagrange maradéktaggal* néven tanult tételt.

**Válasz.** Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor $\forall\ x \in K(a)$ ponthoz $\exists\ \xi \in (a, x)$ (ha $a < x$) vagy $\exists\ \xi \in (x, a)$ (ha $x < a$), hogy

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}.$$

## • Elemi függvények

**47.** Értelmezze az ln függvényt.

**Válasz.** Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ leképezés bijekció. Ennek az inverze az $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ logaritmus függvény.

**48.** Mi a definíciója az $a^x$ $\big(a, x \in \mathbb{R}, a > 0\big)$ hatványnak?

**Válasz.** $a^x := \exp(x \ln a)$.

**49.** Szemléltesse az $\exp_a$ függvények grafikonjait.

**50.** Definiálja az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvényeket.

**51.** Szemléltesse az $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványfüggvények grafikonjait.

**52.** Definiálja a $\pi$ számot.

**Válasz.** A cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$-nek pontosan egy $\xi$ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a $\xi$ számnak a kétszereseként értelmezzük a $\pi$ számot: $\pi := 2\xi$.

**53.** Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?

**Válasz.** A sin és a cos függvények $2\pi$-szerint periodikusak függvények, és $2\pi$ a legkisebb periódusuk.

**54.** Értelmezze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

**55.** Értelmezze az $\operatorname{arc\,cos}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

**56.** Értelmezze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

**57.** Értelmezze az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvényt, és vázolja a grafikonját.

## • A határozatlan integrál (primitív függvények)

**58.** Definiálja a primitív függvényt.

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. A $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

**59.** Milyen *elégséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

**Válasz.** Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $f$-nek létezik primitív függvénye.

**60.** Milyen *szükséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?

**Válasz.** Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor $f$ Darboux-tulajdonságú az $I$ intervallumon.

**61.** Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye.

**Válasz.** $f(x) := \operatorname{sign}(x)$ $\big(x \in (-1, 1)\big)$.

**62.** Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye. A $f$ *függvény határozatlan integrálja* a következő függvényhalmaz:

$$\int f := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

**63.** Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

**64.** Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

**Válasz.** Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a),\ R>0\big).$$

Ekkor $f$-nek van primitív függvénye és

$$F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

a $f$ függvény egy primitív függvénye.

**65.** Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?

**Válasz.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy, $f, g \in D(I)$ és $f'g$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor $fg'$-nek is van primitív függvénye és

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

**66.** Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

**Válasz.** Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $f : J \to \mathbb{R}$. Ha az $f$ függvénynek van primitív függvénye, akkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek is van primitív függvénye és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \Big(\int f\Big) \circ g.$$

**67.** Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

**Válasz.** Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor $f$-nek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

## • A határozott integrál

**68.** Definiálja intervallum egy felosztását.

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

**69.** Mit jelent egy felosztás finomítása?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor $\tau_2$ finomítása $\tau_1$-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

**70.** Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := \inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó alsó közelítő összege.

**71.** Mi a felső közelítő összeg definíciója?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} \quad (i = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó felső közelítő összege.

**72.** Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $s(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó közelítő összegek és $\tau_2$ finomítása $\tau_1$-nek, akkor $s(f, \tau_1) \le s(f, \tau_2)$.

**73.** Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $S(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő felső közelítő összegek és $\tau_2$ finomítása $\tau_1$-nek, akkor $S(f, \tau_1) \ge S(f, \tau_2)$.

**74.** Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1)$, $S(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó, ill. felső közelítő összeg, akkor $s(f, \tau_1) \le S(f, \tau_2)$.

**75.** Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}\big([a, b]\big)\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik a szuprémuma. Az

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az $f$ függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

**76.** Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}[a, b]$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\}$ halmaz alulról korlátos, ezért létezik az infimuma. Az

$$I^*(f) := \inf\big\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\big\}$$

számot az $f$ függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

**77.** Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az $f$ függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ekkor $f$ *Riemann-integrálható* az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_* f = I^* f$.

**78.** Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az $f$ függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ha $I_* f = I^* f$, akkor az $f$ függvény határozott (vagy Riemann-)integrálja az $I_* f = I^* f$ valós szám.

**79.** Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.

**Válasz.** Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

**80.** Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó alsó, ill. felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az $f$ függvény $\tau$ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege.

**81.** Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $\Omega(f, \tau)$ az $f$ függvény $\tau$-hoz tartozó oszcillációs összege. Ekkor

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \ \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

**82.** Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?

**Válasz.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f \in R[a, b]$ függvény értékét *véges sok* pontban tetszőlegesn megváltoztatjuk, akkor az így kapott $\tilde{f}$ függvény is Riemann-integrálható és $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

**83.** Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

**Válasz.** Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $fg \in R[a, b]$.

**84.** Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

**Válasz.** Legyen $f, g \in R[a, b]$ tetszőleges és tegyük fel, hogy valamilyen $m > 0$ számmal $|g(x)| \geq m \quad (x \in [a, b])$. Ekkor $\frac{f}{g} \in R[a, b]$.

**85.** Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

**Válasz.** Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $c \in (a,b)$ egy tetszőleges pont. Ekkor

$$f \in R[a,c], \quad f \in R[c,b], \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**86.** Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

**Válasz.** Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a,b] \subset R[a,b]$, de $C[a,b] \neq R[a,b]$.

**87.** Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

**Válasz.** Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha $f$ monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a,b]$.

**88.** Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

**Válasz.** Ha $f,g \in R[a,b]$ és $f \leq g$, akkor $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

**89.** Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

**Válasz.** Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

**90.** Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

**Válasz.** Legyen $f,g \in R[a,b]$, $g \geq 0$, $M = \sup \mathcal{R}_f$ és $m = \inf \mathcal{R}_f$. Ekkor

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Ha még $f \in C[a,b]$ is teljesül, akkor $\exists\ \xi \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

**91.** Fogalmazza meg a Cauchy–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget.

**Válasz.** Ha $f$ és $g$ integrálhatóak $[a,b]$-n, akkor $fg$ is integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

**92.** Definiálja az $[a,b]$ intervallumon a primitív függvényt.

**Válasz.** Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F$ folytonos $[a,b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a,b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

**93.** Hogyan szól a *Newton–Leibniz-tétel?*

**Válasz.** Ha $f \in R[a,b]$ és $f$-nek létezik primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$, ahol $F$ a $f$ függvény egy primitív függvénye.

**94.** Definiálja az integrálfüggvényt.

**Válasz.** Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$ függvényt a $f$ függvény *integrálfüggvényének* nevezzük.

**95.** Írja le az integrálfüggvénnyel kapcsolatban tanult tételt.

**Válasz.** Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$. Ekkor

$1^o$ a $F$ integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-n;

$2^o$ ha $d \in (a,b)$ és $f$ folytonos $d$-ben, akkor $F$ differenciálható $d$-ben és $F'(d) = f(d)$.

# Analízis II.
## Első ZH tételkidolgozás

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadása alapján. (2016. október 23.)

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm
Általános tudnivalók: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Zh1-tudni.pdf
Követelményrendszer: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Kov_An2_2016.pdf
ZH témakörei: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/An2_1_zh_temakork_2016.pdf

1. **Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.**

   Tegyük fel, hogy $\left.\begin{array}{c} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f$ korlátos.

   **Bizonyítás:** $f$ korlátos, ha
   $$\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \le K$$
   Indirekt: Tegyük fel, hogy nem korlátos, azaz,
   $$\begin{aligned} \forall K > 0, \quad \exists x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K \\ \Rightarrow \forall n = 1{,}2 \ldots \quad \exists x_n \in [a, b], \quad |f(x_n)| \ge n \end{aligned} \tag{1}$$
   Tehát: $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}} \exists (x_{n_k})$ konv. részsorozat.

   Legyen
   $$\alpha := \lim(x_{n_k})$$
   Ekkor: $\alpha \in [a, b]$.

   (Indirekt: Tegyük fel, hogy $\alpha \notin [a, b] \quad \Rightarrow \quad \exists K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$.
   $\alpha := \lim(x_{n_k}) \quad \Rightarrow \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqq k_0, \quad x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, ui. $x_{n_k} \in [a, b]$).

   Az $f$ folytonos $[a, b]$-n $\Rightarrow$
   $$f \in C\{\alpha\} \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad x_{n_k} \to \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x_{n_k}) \to f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad (f(x_{n_k})) \quad \text{korlátos, mert konv.}$$
   Ez ellentmond 1-nek. ■

2. **A Weierstrass-tétel.**

   Tegyük fel, hogy:
   $$\left.\begin{array}{c} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f\text{-nek } \exists \text{ absz. szélsőértéke, azaz} \quad \exists \alpha, \beta, \in [a, b] : \\ f(x) \le f(\alpha) \\ f(\beta) \le f(x) \end{array} \qquad (x \in [a, b])$$
   **Bizonyítás:** $f$ folytonos $[a, b]$-n $\Rightarrow f$ korlátos.

   Ekkor:
   $$\begin{aligned} \exists \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: M \in \mathbb{R} \\ \exists \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
   Igazoljuk: $\exists \alpha \in [a, b] : \quad f(\alpha) = M$.
   $$M \sup \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \le M$$
   Viszont:
   $$y_n \in \mathcal{R}_f \quad \Rightarrow \quad \exists x_n \in [a, b] : \quad f(x_n) = y_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\lim(x_{n_k}) =: \alpha \in [a,b]$ (indirekt belátható)

$$f \text{ folyt. } [a,b]\text{-n} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{\alpha\} \quad \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad \lim_{x\to+\infty}(x_{n_k}) = \alpha, \quad \lim_{x\to+\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha)$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_{n_k} = f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad M = f(\alpha)$$

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

3. **A Bolzano-tétel.**

Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, továbbá

$$\left.\begin{array}{r} \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists \xi \in [a,b] : \quad f(\xi) = 0.$$

**Bizonyítás:** (Bolzano-féle felezési eljárás)

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$ Legyen $[x_0, y_0] := [a,b]$.

Felezzük meg az intervallumot! Legyen $z_0 := \frac{a+b}{2}$. 3 eset lehetséges:

*a)* $f(z_0) = 0$✓

*b)* $f(z_0) > 0$ esetén $[x_1, y_1] := [a, z_0]$.

*c)* $f(z_0) < 0$ esetén $[x_1, y_1] := [z_0, b]$.

Megfelezzük $[x_1, y_1]$-et. Itt is 3 eset lehetséges. (...) Folytatjuk az eljárást.

Az eljárás közben vagy találunk véges sok lépésben olyan $\xi$-t melyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Amennyiben nem, $\exists[x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, melyre teljesül hogy

*a)* $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

*b)* $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

*c)* $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Cantor-féle közösrész tételből következik hogy ezeket az intervallumoknak van közös pontja ha $n \in \mathbb{N}$, azaz:

$$\overset{\text{Cantor}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n], \quad x_n \nearrow \xi, \quad y_n \searrow \xi. \quad \text{(monoton tartanak } \xi\text{-hez)}$$

$f$ folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow$ $f \in C\{\xi\}$ $\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}}$ $\lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n))$ Ha

*a)* $f(x_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(x_n)) \leq 0$

*b)* $f(y_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(x_n)) \geq 0$

Tehát:

$$\underbrace{f(\xi) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\xi) \geq 0}$$
$$\Downarrow$$
$$f(\xi) = 0$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

4. **Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel**

Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{r} \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f\text{-en.}$$

**Bizonyítás:** Indirekt, tegyük fel hogy $f^{-1}:\mathcal{R}_f\to[a,b]$ nem folytonos, azaz

$$\exists y_0\in\mathcal{R}_f,:\quad f^{-1}\notin C\{y_0\}.$$

Átviteli elv $\quad\Rightarrow\quad \exists(y_n)\subset\mathcal{R}_f\quad \lim(y_n)=y_0,\quad$ DE $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}f^{-1}(y_n)\neq f^{-1}(y_0)$.

Legyen

$$x_n:=f^{-1}(y_n),\qquad \text{azaz}\quad f(x_n)=y_n\quad \forall n\in\mathbb{N},$$
$$x_0:=f^{-1}(y_0),\qquad \text{azaz}\quad f(x_0)=y_0.$$

Így:

$$\lim(x_n)\neq x_0. \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\exists\delta>0:\quad \{n\in\mathbb{N}\ :\ |x_n-x_0|\geq\delta\}\quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az $(x_n)\subset[a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolz-Weier}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists(x_{\nu_n})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\quad\overline{x}:=\lim(x_{\nu_n})\in[a,b]$. (indirekt módon lehetett bizonyítani)

$$\left.\begin{array}{r} f\in C\{\overline{x}\}\\ x_{\nu_n}\to\overline{x}\end{array}\right\}\ \overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}}\ \underbrace{f(x_{\nu_n})}_{y_{\nu_n}}\longrightarrow f(\overline{x})\quad (\text{emiatt: } 2)$$

Viszont:

$$y_n\to y_0,\quad y_{\nu_n}\to y_0(=f(x_0))$$

Ez pedig ellentmondás. ■

5. **A folytonosság és a derivált kapcsolata.**

Tegyük fel, hogy $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$.

*a)* $f\in D\{a\}\quad\Rightarrow\quad f\in C\{a\}$.

*b)* $f\in D\{a\}\quad\not\Leftarrow\quad f\in C\{a\}$.

**Bizonyítás:**

$\boxed{\Rightarrow}$

$$f\in D\{a\}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)=f'(a)\cdot 0=0\quad ■$$

$\boxed{\not\Leftarrow}$ abs$\notin D\{0\}$ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \nexists\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x}\quad\Rightarrow\quad \text{abs}\notin \mathrm{D}\{0\}.\quad ■$$

6. **A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.**

Tegyük fel, hogy $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$

$$f\in D\{a\}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\quad \exists A\in\mathbb{R}\quad \text{és}\quad \exists\varepsilon:\quad \mathcal{D}_f\to\mathbb{R},\quad \lim\limits_a\varepsilon=0\\ f(x)-f(a)=A(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\quad (x\in\mathcal{D}_f)\end{cases}$$

$A=F'(a)$.

*Bizonyítás:*

$\boxed{\Rightarrow}$

$$f\in D\{a\}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)}_{=:\varepsilon(x)}=0$$

Így: $\lim_a \varepsilon = 0$, és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)\checkmark$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon: \ \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$:

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \overset{x \neq a}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} = \underbrace{A + \varepsilon(x)}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} A}$$

$$\Rightarrow f'(a) = A \quad \blacksquare$$

7. **A szorzatfüggvény deriválása.**

Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in D\{a\}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$.

Ekkor:

$$f, g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

**Bizonyítás:**

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \overset{-f(a)\cdot g(x)}{\underset{+f(a)\cdot g(x)}{=}} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)} \cdot g(x) + f(a) \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} g'(a)}$$

$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \quad \Rightarrow \quad$ mivel folytonos, és $x \to a$, Ui.: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\}$ $\blacksquare$

8. **A hányadosfüggvény deriválása.**

Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in D\{a\}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$, $g(a) \neq 0$.

Ekkor:

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

**Bizonyítás:** Közös ötlet: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ és $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$-t behozni.

*a)* Igazoljuk: $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\}$, de $g(a) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\exists K(a): \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a))$$

$\Rightarrow a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

*b)*

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)}{x-a} = \frac{1}{g(a)\cdot g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} \overset{-f(a)g(a)}{\underset{+f(a)g(a)}{=}}$$

$$\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left( \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} g'(a)} \right)$$

$g(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \neq 0$, mert $g \in C\{a\}$. $\blacksquare$

9. **A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.**

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és

$$\left.\begin{array}{r} f \in D\{a\} \quad a \in \operatorname{int} D_f \\ f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélső értéke van} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0$$

**Bizonyítás:** Lokális maximumra: Tekintsük

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

törtet. Ha $x > a$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{>0}} \leq 0 \quad \overset{f\in D\{a\}}{\Rightarrow} \quad \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

Ha $x < a$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{<0}} \geq 0$$

$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) \geq 0$ Tehát: $f'(a) \leq 0$ és $f'(a) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0.$ ■

10. **A Rolle-féle középértéktétel.**

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=0 \end{array}$$

**Bizonyítás:** $f \in C[a,b] \quad \underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Weier.}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \alpha\beta \in [a,b]:$

$$f(\alpha) := \min_{[a,b]} f := m$$

$$f(\beta) := \max_{[a,b]} f := M$$

*a)* eset: $f \equiv$ áll. $(m = M) \quad \Rightarrow \quad f' \equiv 0$

*b)* eset: $f \not\equiv$ áll. $\quad \Rightarrow \quad m \neq M$ és $m < M$

Ha $m \not\equiv f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \alpha \in (a,b)$ Ekkor $f(\alpha)$: abszolút minimum és $f(\alpha)$ lokális minimum is.

$$f'(\alpha) = 0, \quad \xi = \alpha \quad \text{„jó”}$$

Ha $m = f(a) = f(b)$ ■ Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész.

11. **A Lagrange-féle középértéktétel.**

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$$

**Bizonyítás:** A szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Legyen:

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a,b])$$

$F$-re a Rolle feltételei teljesülnek (ellenőrizni kell!)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b): \quad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad ■$$

# Analízis II.
## 2. zh tételkidolgozás

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadása alapján. (2016. december 16.)

1. **A konvexitás ekvivalens átfogalmazása egyenlőtlenséggel.**

**Tétel.** *Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex $I$-n, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ \ a < b \ \ \textit{és}\ \ \forall\, \lambda \in (0,1) \ \ \textit{esetén}$$
$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

**Megjegyzés.** Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

**Bizonyítás.** Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a,b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b = x < \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Másrészt az $(a,b)$ intervallum minden eleme előálll $\lambda a + (1-\lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a,b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b-x}{b-a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b-x}{b-a} \cdot a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az $f$ függvény konvex az $I$ intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I,\ a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \qquad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big([\lambda a + (1-\lambda)b - a]\big) + f(a) =$$
$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\big[(1-\lambda)(b-a)\big] + f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

2. **A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.**

**Tétel.** *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$.*

$1^o$ *Az $f$ függvény konvex [szigorúan konvex] $(\alpha,\beta)$-n $\iff$ az $f'$ függvény $\nearrow$ $[\uparrow]$.*

$2^o$ *Az $f$ függvény konkáv [szigorúan konkáv] $(\alpha,\beta)$-n $\iff$ az $f'$ függvény $\searrow$ $[\downarrow]$.*

**Bizonyítás.** A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az $f$ függvény konvex az $(\alpha,\beta)$ intervallumon, azaz

$$\forall\, a, b \in (\alpha,\beta),\ \ a < b \ \ \text{esetén}$$
$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a,b)\big).$$

Ebből következik, hogy a $\triangle_a f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta) \setminus \{a\}$ halmazon, ezért

$$\triangle_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall\, x < b,\ \ x \ne a \ \text{esetén.}$$

Mivel $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \triangle_a f(x)$, ezért

$$(*) \qquad f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hasonlóan, a $\triangle_b f$ függvény $\nearrow$ az $(\alpha,\beta)\setminus\{b\}$ halmazon, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \triangle_b f(a) \le \triangle_b f(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \quad \forall\, a<x,\ x\ne b \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} \triangle_b f(x)$, ezért

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b).$$

Így $(*)$ alapján azt kapjuk, hogy $f'(a)\le f'(b)$. Mivel ez minden $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$-re igaz, ezért $f'$ monoton növekedő az $(\alpha,\beta)$ intervallumon.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $f'$ monoton növekedő $(\alpha,\beta)$-n. Legyen $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$ és $x\in(a,b)$ tetszőleges. $f$-re a Lagrange-féle középértéktételt először az $[a,x]$, majd az $[x,b]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists\,\xi_1\in(a,x):\quad f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{és} \quad \exists\,\xi_2\in(x,b):\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Mivel $\xi_1<\xi_2$ és $f'\ \nearrow$, ezért $f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$. Így

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{[f(b)-f(a)]-[f(x)-f(a)]}{b-x} \iff$$

$$\iff [f(x)-f(a)]\cdot[(b-x)+(x-a)] \le [f(b)-f(a)]\cdot(x-a) \iff f(x)\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Ez az egyenlőtlenség minden $a,b\in(\alpha,\beta)$, $a<b$ és $x\in(a,b)$ esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy az $f$ függvény konvex az $(\alpha,\beta)$ intervallumon. ■

## 3. A $\pi$ szám bevezetését megalapozó állítás

**Tétel.** *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* $\xi$ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi=0$ *egyenlőség. Ennek a* $\xi$ *számnak a kétszereseként* ***értelmezzük a*** $\pi$ ***számot****:*

$$\pi := 2\xi.$$

**Bizonyítás.** A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos\in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\frac{2^{10}}{10!}+\frac{2^{12}}{12!}-\cdots = 1-2+\frac{2}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7\cdot 8}\right)-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{2^2}{11\cdot 12}\right)-\cdots <$$

$$< (\text{a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak}) < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\,\xi\in[0,2]$: $\cos\xi = 0$.

A $\xi$ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos\downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégséges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\cdots > 0 \quad (x\in(0,2))$$

egyenlőtlenség következménye. ■

4. **A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.**

**Tétel.** (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)
*Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b),\ \big(-\infty \le a < b < +\infty\big), \\ \bullet\ g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0 \quad \big(x \in (a,b)\big), \\ \bullet\ \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0, \\ \bullet\ \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ határérték.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \text{és} \\ \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$$

**Bizonyítás.** 1. eset: $a > -\infty$ (véges).

Legyen

$$A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Azt kell igazolni, hogy

(#) $$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \text{ esetén } \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

(∗) $$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \ \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a,b) \text{ esetén } \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az $f$ és a $g$ függvényt az $a$ pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a.a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az $f$ és a $g$ függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez } (*) \text{ miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A (#) állítást tehát bebizonyítottuk, és az azt jelenti, hogy a $\lim_{a+0} \frac{f}{g}$ határérték létezik, és

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

2. eset: $a = -\infty$. Nem bizonyítjuk. ■

5. **A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.**

**Tétel.** (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.) *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, *és tegyük fel, hogy* $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. *Ekkor*

$$\forall x \in K(a) \ \text{ ponthoz } \exists \xi \ \text{ a és } x \text{ között:}$$

$$f(x) - T_{n,a}(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Bizonyítás.** A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{n,a}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big) \qquad (x \in K(a)).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0, \\ F''(a) &= f''(a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0, \\ &\vdots \\ F^{(n)}(a) &= 0, \\ F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad (x \in K(a)). \end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned} G(x) &:= (x-a)^{n+1} && \Longrightarrow & G(a) &= 0, \\ G'(x) &= (n+1)(x-a)^n && \Longrightarrow & G'(a) &= 0, \\ G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} && \Longrightarrow & G''(a) &= 0, \\ &\vdots && & &\vdots \\ G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) && \Longrightarrow & G^{(n)}(a) &= 0, \\ G^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$, és tegyük fel, hogy például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az $F$ és a $G$ függvényekre az $[a,x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists\, \xi_1 \in (a,x): \quad \frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a Cauchy-féle középértéktételt az $F'$ és a $G'$ függvényekre az $[a,\xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \xi_2 \in (a,\xi_1): \quad \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet $n$-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists\, \xi_{n+1} \in (a,\xi_n): \quad \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_{n,a}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)} = (n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.$$

A $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

6. **A $\sqrt{1-x^2}$ $\quad (x \in (-1{,}1))$ primitív függvényeinek előállítása.**

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c \quad (x \in (-1{,}1), \quad c \in \mathbb{R})}$$

*Megoldás:*

Alkalmazzuk az $x = \sin t = g(t) \quad (x \in (-1{,}1)), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítést:

$$g'(t) = \cos t > 0 \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \exists g^{-1}; \quad t := \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t>0} \cdot \cos t\,dt \underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{\overset{\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t}{=}} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x + x \cdot \cos(\arcsin x)}{2} + c$$

$$\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\substack{=:\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\alpha = x}}) = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c. \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

7. **Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.**

Tegyük fel, hogy $f[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor:

$$f \in R[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b], \quad \Omega(f;\tau) < \varepsilon \\ \text{(az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsi lehet)} \end{array}$$

*Bizonyítás:*

$\boxed{\Rightarrow:}$

$$I_*(f) = I^*(f) =: I$$

$\varepsilon > 0$ tetszőleges, szuprémum definíciójából:

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \le I$$

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I < S(f;\tau_2) \le I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Legyen $\boxed{\tau := \tau_1 \cup \tau_2}$.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \le s(f;\tau) \le S(f;\tau) \le S(f;\tau_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ $\varepsilon > 0$-hoz $\quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \Omega(f;\tau) < \varepsilon$ :

$$\Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) \ge I^*(f) - I_*(f) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad I^*(f) - I_*(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad I^*(f) = I_*(f) \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

8. **Monoton függvény integrálható.**

Ha $f \in K[a,b]$ ÉS monoton $\quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]$.

*Bizonyítás:* (oszcillációs összegekkel) Legyen $f$ (például) $\nearrow$ $[a,b]$-n.

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{tetszőleges}$$

$$\inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: m := f(x_i)$$
$$\sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\} =: M := f(x_{i+1})$$

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)}^{\ge 0}\overbrace{(x_{i+1}-x_i)}^{\ge 0} \le \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)$$

– teleszkópikus!

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) \le ||\tau|| \cdot (f(b)-f(a))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \quad ||\tau|| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

9. **A Newton-Leibniz tétel.**

Tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} f \in R[a,b] \\ f\text{-nek van primitív függvénye} \quad [a,b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol $F$ az $f$ egy primitív függvénye.

*Bizonyítás:* Legyen $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges.

$$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_0) \overset{\text{TRÜKK}}{=} \big(F(x_n)-F(x_{n-1})\big)+\big(F(x_{n-1})-F(x_{n-2})\big)+\ldots+\big(F(x_1)-F(x_0)\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

Tegyünk egy apróbb megállapítást: $F$-re $[x_i, x_{i+1}]$-en a Lagrange középérték tétel:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) \overset{F'=f}{=} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Folytatván a bizonyítást:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$
$$\Downarrow$$
$$s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le S(f,\tau) \quad \text{inf}$$

$\forall\tau$-ra sup $\quad\Rightarrow$

$$I_*(f) \le F(b) - F(a) \le I^*(f)$$

$$f \in R[a,b] \quad \Rightarrow \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f = \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

10. **Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás.**

> Tegyük fel hogy $f \in R[a,b]$, $\quad x_0 \in [a,b]$,
> $$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]).$$
> Ekkor az $F$ függvény folytonos $[a,b]$-n.

*Bizonyítás:* $c \in [a,b]$ tetszőleges, $\quad x \in [a,b]$, $\quad$ és pl. $x > c$.

$$|F(x) - F(c)| = \left|\int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{c} f\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f + \int_{c}^{x_0} f\right| = \left|\int_{c}^{x} f(t)\,dt\right| \overset{x>0}{\leq} \int_{c}^{x} |f(t)|\,dt \leq$$

$$\overset{M:=\sup_{[a,b]}|f|<+\infty}{\leq} M \cdot \int_{c}^{x} 1\,dt = M|x-c|$$

$$0 \leq |F(x) - F(c)| \leq M|x-c| \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c} |F(x) - F(c)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c} F(x) - F(c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to c} F(x) = F(c) \quad \Rightarrow \quad F \in C\{c\} \overset{c \text{ tetszőleges}}{\Rightarrow} F \in C[a,b]. \quad \blacksquare$$

11. **Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás.**

> Tegyük fel hogy $f \in R[a,b]$, $\quad x_0 \in [a,b]$,
> $$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]).$$
> Ha $f \in C\{d\}$ $\quad (d \in (a,b))$, akkor az $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$.

*Bizonyítás:* Tegyük fel hogy $d \in (a,b)$ és $f \in C\{d\}$.

Igazoljuk:

$$F \in D\{d\} \quad \text{és} \quad f(d) = F'(d) := \lim_{h\to 0} \frac{F(d+h) - F(d)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \left(f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \left|f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h}\right| = 0,$$

azaz $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall |h| < \delta : \quad \left|f(d) - \dfrac{F(d+h) - F(d)}{h}\right| < \varepsilon. \quad (*)$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott:

$$\left|f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h}\right| = \left|f(d) - \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f\right)\right| = \left|f(d) - \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{d+h} f + \int_{d}^{x_0} f\right)\right| =$$

$$\left|f(d) - \frac{1}{h}\int_{d}^{d+h} f(t)\,dt\right| \overset{f(d)=\frac{1}{h}\int_d^{d+h} f(d)\,dt}{=} \left|\frac{1}{h}\int_{d}^{d+h} f(d) - f(t)\,dt\right| \overset{h>0}{\leq} \frac{1}{h}\int_{d}^{d+h} |f(d) - f(t)|\,dt.$$

Mivel $f \in C\{d\} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon$-hoz $\exists \delta > 0 \quad \forall |t-d| < \delta : \quad |f(d) - f(t)| < \varepsilon$.

Ha $h > 0$, $\quad (0 < h < \delta)$ és $t \in [d, d+h] \quad \Rightarrow$

$$\left|f(d) - \frac{F(d+h) - F(d)}{h}\right| \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \underbrace{\int_{d}^{d+h} 1\,dt}_{=h} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (*). \quad \blacksquare$$