A 2. zh témakörei

Analízis 2.

2016. november

1. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az* $f(x) := x + e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény invertálható,* $f^{-1} \in D^2$, *és számítsa ki* $\left(f^{-1}\right)''(1)$*-et.*

Megoldás. Az f függvény deriválható $\mathbb{R}$-en, $f'(x) = 1 + e^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$; f tehát szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, következésképpen invertálható. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján f^{-1} minden $y\ (= f(x)) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\ (= \mathcal{R}_f)$ pontban deriválható és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)(y) \qquad (y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}),$$

azaz

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Mivel $f'(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ezért az összetett függvény deriválási szabálya alapján az $\left(f^{-1}\right)'$ függvény deriválható, és

$$\Big(\left(f^{-1}\right)'\Big)' = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)' = -\frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^2} \cdot \left(f' \circ f^{-1}\right)' =$$

$$= -\frac{\left(f'' \circ f^{-1}\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^2} = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^3}.$$

f^{-1} tehát kétszer deriválható minden $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(y = f(x))$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)''(y) = \Big(\left(f^{-1}\right)'\Big)'(y) = \left(-\frac{f'' \circ f^{-1}}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^3}\right)(y) = -\frac{f''\big(f^{-1}(y)\big)}{\Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^3} = -\frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^3}.$$

Az $y = f(x) = x + e^x$ egyenletből x nem fejezhető ki explicit módon, ezért $x = f^{-1}(y)$-ra explicit képlet nem adható meg. A feladat azonban csak az $y = 1$ pontban kérdezi $\left(f^{-1}\right)''$-t. Nem nehéz *észrevenni*, hogy az

$$(1 =)\, y = x + e^x\, (= f(x))$$

egyenletnek $x = 0$ egy megoldása, és f szigorú monotonitása miatt ez az egyetlen megoldás. Ezért

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = -\frac{f''(0)}{\big(f'(0)\big)^3} = -\frac{\left(e^x\right)_{x=0}}{\left(1 + e^x\right)^3_{x=0}} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}. \ \blacksquare$$

2. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

(a) *lokális szélsőértékeit,*
(b) *abszolút szélsőértékeit a* $[-1, 5]$ *halmazon.*

Megoldás. Mivel f polinom, ezért $f \in D^\infty(\mathbb{R})$.

(a) Lokális szélsőértékek.

Elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1),$$

ezért f stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek: $x_1 = -2$ és $x_2 = 1$.

Elsőrendű elégséges feltétel. f' másodfokú polinom.

Az $x_1 = -2$ pontban f' előjelet vált, pozitívból negatívba megy át, ezért itt f-nek lokális maximumhelye van, és a lokális maximuma $f(-2) = 21$.

Az $x_2 = 1$ pontban f' előjelet vált, negatívból pozitívba megy át, ezért itt f-nek lokális minimumhelye van, és a lokális minimuma $f(1) = -6$.

(b) Abszolút szélsőértékek. Az f függvény polinom ezért folytonos a korlátos és zárt $[-1, 5]$ intervallumon. Weierstrass tétele miatt van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Az abszolút szélsőértékhelyek az intervallum belsejében – vagyis a $(-1, 5)$ intervallumban – vannak (az ilyen helyek nyilván egyúttal lokális szélsőértékhelyek is) vagy pedig az intervallum végpontjaiban.

A lokális szélsőértékhelyek közül csak $x_2 = 1 \in (-1, 5)$, ezért ebben az intervallumban ez az egyetlen lokális szélsőértékhely, mégpedig lokális minimumhely és $f(1) = -6$.

A végpontokban $f(-1) = 14$ és $f(5) = 266$, ezért a függvény *abszolút minimumhelye* az 1 pont, az *abszolút minimuma* pedig $f(1) = -6$. Az *abszolút maximumhelye* az 5 pont, az *abszolút maximuma* pedig $f(5) = 266$. ■

3. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := x + 2 - \frac{4x}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban (akárhányszor is!) deriválható és

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{1 + x^2} + \frac{8x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(1 + x^2)^2}.$$

A további vizsgálatokhoz a számlálót (ami egy másodfokúra visszavezethető kifejezés) szorzatra bontjuk. Legyen $a := x^2$. Ekkor

$$x^4 + 6x^2 - 3 = a^2 + 6a - 3 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a két gyöke:

$$a_1 = 2\sqrt{3} - 3 \qquad \text{és} \qquad a_2 = -(2\sqrt{3} + 3),$$

ezért

$$a^2 + 6a - 3 = (a - a_1)(a - a_2),$$

tehát

$$x^4 + 6x^2 - 3 = \big(x^2 - (2\sqrt{3} - 3)\big)\big(x^2 + (2\sqrt{3} + 3)\big).$$

Így

$$f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(1 + x^2)^2} = \frac{\big(x^2 - (2\sqrt{3} - 3)\big)\big(x^2 + (2\sqrt{3} + 3)\big)}{(1 + x^2)^2}.$$

Monotonitási intervallumok: f' fenti alakjából a derivált előjelviszonyai már könnyen leolvasható. Legyen

$$x_1 := \sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

Ekkor

$f'(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -x_1)$, ezért $f \uparrow$ a $(-\infty, -x_1)$ intervallumon;

$f'(x) < 0$, ha $x \in (-x_1, x_1)$, ezért $f \downarrow$ a $(-x_1, x_1)$ intervallumon;

$f'(x) > 0$, ha $x \in (x_1, +\infty)$, ezért $f \uparrow$ az $(x_1, +\infty)$ intervallumon.

Lokális szélsőértékek: A fentiekből következik, hogy

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ha} \quad x = -x_1 \quad \text{vagy} \quad x = x_1.$$

Csak ezekben a pontokban lehetnek lokális szélsőértékek. Az elsőrendű elégséges feltételt alkalmazva azt kapjuk, hogy
az f függvénynek $(-x_1)$-ben *lokális maximuma*, x_1-ben pedig *lokális minimuma* van.

Konvexitási intervallumok, inflexió:

$$f''(x) = (-4)\cdot(-1)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{16x}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2\cdot(-2)\cdot 2x}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{24x}{(1+x^2)^2} - \frac{32x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(3-x^2)}{(1+x^2)^3},$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \sqrt{3} =: x_2,\ x = -\sqrt{3} = -x_2.$$

Világos, hogy $x_1 = \sqrt{2\sqrt{3}-3} < \sqrt{3} = x_2$.

f'' előjelviszonyai:

$f''(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -x_2)$, ezért f konvex a $(-\infty, -x_2)$ intervallumon;

$f''(x) < 0$, ha $x \in (-x_2, 0)$, ezért f konkáv a $(-x_2, 0)$ intervallumon;

$f''(x) > 0$, ha $x \in (0, x_2)$, ezért f konvex a $(0, x_2)$ intervallumon;

$f''(x) < 0$, ha $x \in (x_2, +\infty)$, ezért f konkáv az (x_2, ∞) intervallumon.

A $-x_2 = -\sqrt{3}$, az $x_0 = 0$ és az $x_2 = \sqrt{3}$ pont tehát inflexiós pont.

A határértékeket $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2}\right) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -\infty.$$

Aszimptoták:

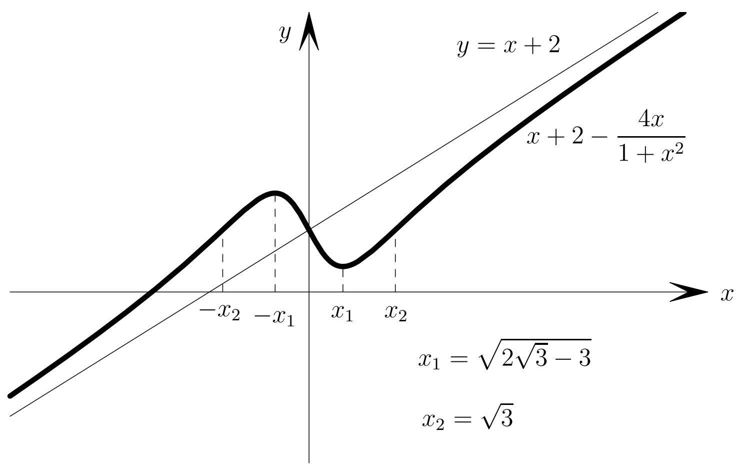
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} + 1 - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 = A = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = 2 = B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - 1\cdot x)$$

és ez azt jelenti, hogy az $y = 1\cdot x + 2 = x + 2$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben is.

Az eddigieket összefoglalva az f függvény képe:



4. feladat. *Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az*

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Mivel $f(x) > 0$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén, ezért f grafikonja az első- és a második síknegyedben van.

Az f függvény akárhányszor (is) deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}, \qquad f''(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^4} e^{\frac{1}{1-x}}.$$

$f'(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ *intervallumon*, ezért itt f szigorúan monoton növekedő;
$f'(x) > 0$ az $(1, +\infty)$ *intervallumon* is, ezért f ezen is szigorúan monoton növekedő.
Az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke, mert $f'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f$ pontban.

$f''(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konvex;
$f''(x) > 0$ az $(1, \frac{3}{2})$ intervallumon is, ezért a függvény ezen is szigorúan konvex;
$f''(x) < 0$ a $(\frac{3}{2}, +\infty)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konkáv, és az $x = \frac{3}{2}$ inflexiós pont.

A határértékeket $(\pm\infty)$-ben és az 1 pontban kell megvizsgálni:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0-0} e^y = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0+0} e^y = 1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty.$$

Aszimptoták:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 0;$$

és

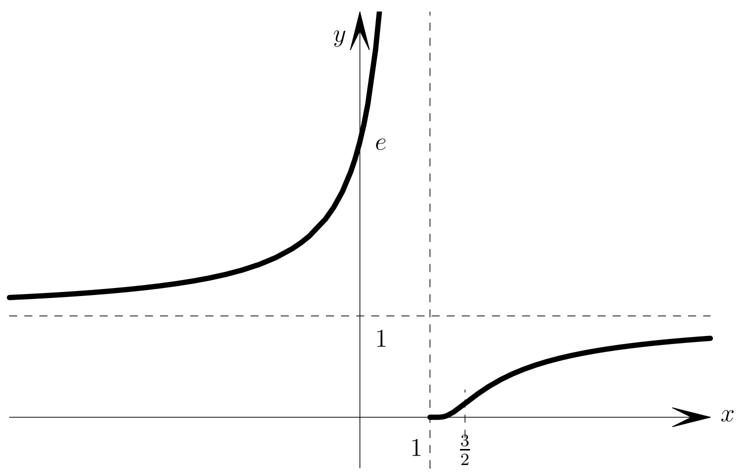
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0\cdot x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 0\cdot x) = 1,$$

és ez azt jelenti, hogy az $y = 0 \cdot x + 1 = 1$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben is.

Az $x = 1$ helyen jobbról a görbe érintője az x tengely, mert $x \to 1+0$ esetén $f'(x) \to 0$:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = \text{(L'Hospital)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{e^y} = 0.$$

Az eddigieket összefoglalva az f függvény képe:



5. feladat. *Döntse el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek. Ha igen, akkor számítsa is ki azokat.*

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}$.

Megoldás. (a) Mivel $\frac{1}{x}>0$, ha $x>0$, ezért

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\left(e^{\ln\frac{1}{x}}\right)^{\sin x}=e^{(-\ln x)\cdot\sin x}\qquad (x>0).$$

Először a kitevő határértékét vizsgáljuk:

$$\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)=+\infty\qquad\text{és}\qquad\lim_{x\to 0+0}\sin x=\sin 0=0,$$

ezért $0\cdot(+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó; a L'Hospital szabály most alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)\cdot\sin x=\lim_{x\to 0+0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=$$

$\left(\frac{+\infty}{+\infty}\text{ típusú kritikus határérték, a L'Hospital szabály most is alkalmazható}\right)$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{-\dfrac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\cos x}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ és $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\cos x}=0$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\cos x}=0.$$

A kitevő határérték tehát

$$\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)\cdot\sin x=0.$$

Mivel az *exponenciális függvény folytonos a* 0 *pontban* és $e^0=1$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0}e^{(-\ln x)\cdot\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(-\ln x)\cdot\sin x}=e^0=1=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

(b) $\frac{-16}{0}$ típusú határértékről van szó. A nevező pozitív és negatív is lehet (v.ö. $\frac{1}{x}$-szel a 0-ban!); ezért a L'Hospital szabály *most nem alkalmazható.*

Először átalakítjuk a kifejezést:

$$\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}=\frac{(x+7)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\frac{x+7}{x+3}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to -3+0}\frac{x+7}{x+3}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to -3-0}\frac{x+7}{x+3}=-\infty,$$

ezért a szóban forgó határérték nem létezik. ■

6. feladat. *Írja fel az* $f(x):=(x+1)^2\ln(x+1)$ $(x>-1)$ *függvények a* 0 *pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a* $[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]$ *intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

Megoldás. Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ pontban

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1} = (x+1)\big(2\ln(x+1)+1\big),\\
f''(x) &= \big(2\ln(x+1)+1\big) + (x+1)\cdot\frac{2}{x+1} = 2\ln(x+1)+3,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x+1},\\
f^4(x) &= -\frac{2}{(x+1)^2};
\end{aligned}$$

ezért

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 3, \qquad f'''(0) = 2.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$\big(T_{3,0}f\big)(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal: minden $x \in \big[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\big]$ ponthoz létezik olyan 0 és x közötti ξ (tehát $|\xi| \le |x| \le \frac{1}{10}$), hogy

$$\big|f(x) - \big(T_{3,0}f\big)(x)\big| = \left|\frac{f^4(\xi)}{4!}x^4\right| = \frac{\frac{2}{(1+\xi)^2}}{4!}|x|^4 \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{(\xi+1)^2} \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{\big(\frac{9}{10}\big)^2} = \frac{10^{-2}}{12\cdot 81}.$$

Ezért

$$\left|(x+1)^2\ln(x+1) - \big(x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\big)\right| \le \frac{10^{-2}}{12\cdot 81},$$

ha $-\frac{1}{10} \le x \le \frac{1}{10}$. ■