4. előadás

2016. október 3.

Emlékeztető:

- A derivált motivációja, szemléletes jelentése.

A derivált fogalma

A deriváltat először az értelmezési tartomány **belső pontjaiban** értelmezzük.

Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A ***halmaz belső pontja****, ha*

$$\exists\, K(a), \quad \textit{hogy} \quad K(a) \subset A.$$

Jelölje

$$\operatorname{int} A := \big\{ a \in A \mid a \quad \textit{belső pontja} \quad A\textit{-nak} \big\}$$

az A *halmaz* ***belső pontjainak a halmazát.***

Példák:

(a) Ha $A = [0,1]$, akkor $\operatorname{int} A = (0,1)$.

(b) Ha $A = (5,6]$, akkor $\operatorname{int} A = (5,6)$.

(c) Ha $A = \{2; 3; 4\}$, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***differenciálható*** (*vagy* ***deriválható***), *ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ *szimbólummal jelöljük, és az* f *függvény a* ***pontbeli deriváltjának*** (*vagy* ***differenciálhányadosának***) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölése: $f \in D\{a\}$.

Megjegyzések.

1^o A fenti definícióban szereplő határértéket az $x = a + h$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2^o Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\triangle_a f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$

függvényt az f függvény a ponthoz tartozó **különbségihányados-függvényének** vagy **differenciahányados-függvényének** nevezzük.

3^o A derivált definíciójában 0/0-típusú kritikus határértékről van szó. ■

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

Tétel. (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.)
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$*. Ekkor*

$1^o \quad f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\},$

$2^o \qquad\qquad \not\Longleftarrow \,.$

Bizonyítás.
1^o $f \in D\{a\} \implies$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\mathrm{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \mathrm{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto \frac{\mathrm{abs}\,(x)-\mathrm{abs}\,(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x>0 \\ -1, & \text{ha } x<0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

• Egyoldali deriváltak

A most vizsgált példában a 0 pontbeli különbségihányados-függvénynek nincs ugyan határértéke a 0 pontban, de létezik a jobb- és bal oldali határértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvénynek a 0 pontban van *jobb- és bal oldali deriváltja.*

Célszerű bevezetni tehát a derivált fogalmának a féloldali variánsait.

Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $a \in \mathcal{D}_f$ *és tegyük fel, hogy* $\exists\, \delta > 0$ *úgy, hogy* $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$*. Ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \textit{határérték,}$$

akkor azt mondjuk, hogy f *az* a ***pontban jobbról deriválható****, és a fenti határértéket az* f *függvény a* ***pontbeli jobb oldali deriváltjának*** *nevezzük és az* $f'_+(a)$ *szimbólummal jelöljük.*

Megjegyzések.

1^o Analóg módon értelmezzük az $f'_-(a)$ szimbólummal jelölt **bal oldali deriváltat**.

2^o Nyilvánvaló, hogy $f \in D\{a\} \iff \exists\, f'_+(a),\ \exists\, f'_-(a)$ és $f'_+(a) = f'_-(a)\,(= f'(a))$. ■

• Deriváltfüggvény

Megjegyzés. Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Az alkalmazásokban legtöbbször olyan függvények szerepelnek, amelyek valamely halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket. ■

Definíció. *Ha* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$, *akkor az*

$$\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f ***deriváltfüggvényének*** (*vagy* ***differenciálhányados-függvényének***) *nevezzük, és az* f' *szimbólummal jelöljük.*

Néhány elemi függvény deriváltja

1. Konstans függvények. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és a deriváltja 0, azaz

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \text{vagy} \qquad \boxed{\big(c\big)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \ \blacksquare$$

2. Hatványfüggvények. Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható, és a deriváltja nx^{n-1}, azaz

$$\boxed{\big(x^n\big)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\text{(az } a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big) \text{ azonosság miatt)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. $\blacksquare$

3. Az abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban nem deriválható, azaz $\operatorname{abs} \notin D\{0\}$. (v.ö. a függvény grafikonjának ott töréspontja van).

Bizonyítás. Volt. $\blacksquare$

4. A reciprokfüggvény, azaz az

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvény tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \ \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ **A négyzetgyök függvény**, azaz az

$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (x \in [0, +\infty)).$$

függvény minden $x \in (0, +\infty)\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban deriválható és

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(x \in (0, +\infty)\right)}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ pontban

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

a négyzetgyök függvény folytonossága alapján. ■

Megjegyzés. Az $x = 0$ pontban a függvénynek csak a **jobb oldali** deriválhatóságát vizsgálhatjuk:

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

A különbségihányados-függvényének a 0 pontban tehát létezik a jobb oldali határértéke, azonban az **nem véges**, ezért a négyzetgyökfüggvény a 0 **pontban jobbról nem deriválható**. ■

$\boxed{6.a}$ **A szinuszfüggvény** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x := \left(\sin x\right)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \sin h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h + 1} = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

ezért

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x. \ ■$$

$\boxed{6.b}$ **A koszinuszfüggvény** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és

$$\boxed{\cos' x := \left(\cos x\right)' = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ pontban az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= -\sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x. \ ■$$

A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása: lineáris közelítés. Az érintő fogalma

Megjegyzés. Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvénnyel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő", de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx+b$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető" elsőfokú polinommal.* ■

Tétel. (Lineáris közelítés.)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \ \lim\limits_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0.$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

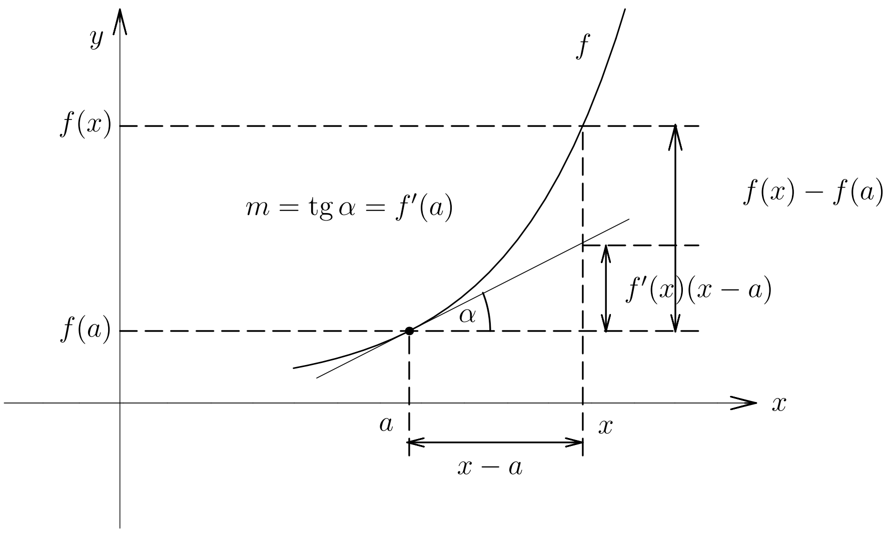
$$f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

Szemléletes jelentés:



Megjegyzések.

1^o A függvényértékek megváltozása

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

A jobb oldalon álló első tag egy lineáris függvény, a második tag pedig a $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ feltétel miatt az elsőhöz képest „kicsi”. Az f függvény a **pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény megváltozása az a pont környezetében„jól” közelíthető lineáris függvénnyel.**

2^o Az $f(x) - f(a)$ megváltozás első tagját (vagyis az $x \mapsto f'(a)(x-a)$ lineáris függvényt) az a helyhez tartozó megváltozás **fő részének** vagy **differenciáljának** nevezzük. Azt a tényt, hogy ez a tag a második taghoz képest „kicsi” gyakran az

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki.

3^o A deriválhatóság előzőkben igazolt ekvivalens átfogalmazásának a jelentősége többek között abban áll, hogy ha a differenciálhatóság fogalmát ki akarjuk terjeszteni más – nem feltétlenül valós változós vagy valós értékű – függvényekre, akkor a definícióval analóg értelmezésre nem mindig van lehetőség, míg a lineáris közelítéssel az általánosítás gyakran problémamentes. ■

• Érintő

Megjegyzés. A középiskolai tanulmányaink során megismerkedtünk néhány síkbeli görbe (kör, parabola) érintőjének a fogalmával.

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ ponton és a meredeksége $f'(a)$. ■

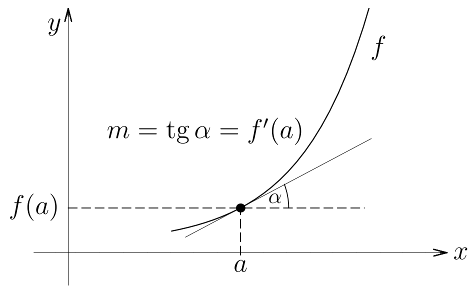
Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban **van érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli **érintőjén** az*

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

• $f'(a)$ szemléletes jelentése:
a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének a meredeksége,

• $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték **véges**, ezért az érintő **nem** párhuzamos az y-tengellyel.



Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója *ekvivalens* a középiskolában geometriai úton megadott definícióval. ■