Analízis II.
Első ZH tételkidolgozás

A jegyzetet UMANN Kristóf készítette Dr. SZILI László előadása alapján. (2017. január 14.)

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm
Általános tudnivalók: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Zh1-tudni.pdf
Követelményrendszer: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/Kov_An2_2016.pdf
ZH témakörei: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/An2_1_zh_temakork_2016.pdf

1. **Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.**

   Tegyük fel, hogy $\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f$ korlátos.

   Bizonyítás: f korlátos, ha
   $$\exists K>0, \quad \forall x\in[a,b]: \quad |f(x)|\le K$$
   Indirekt: Tegyük fel, hogy nem korlátos, azaz,
   $$\begin{aligned} &\forall K>0, \quad \exists x\in[a,b]: \quad |f(x)|>K \\ \Rightarrow\ &\forall n=1,2\ldots \quad \exists x_n\in[a,b], \quad |f(x_n)|\ge n \end{aligned} \tag{1}$$
   Tehát: $(x_n)\subset[a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists(x_{n_k})$ konv. részsorozat.

   Legyen
   $$\alpha:=\lim(x_{n_k})$$
   Ekkor: $\alpha\in[a,b]$.

   (Indirekt: Tegyük fel, hogy $\alpha\notin[a,b] \quad\Rightarrow\quad \exists K(\alpha)\cap[a,b]=\emptyset$.
   $\alpha:=\lim(x_{n_k}) \quad\Rightarrow\quad \exists k_0\in\mathbb{N}, \quad \forall k\geqq k_0, \quad x_{n_k}\in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, ui. $x_{n_k}\in[a,b]$).

   Az f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow$
   $$f\in C\{\alpha\} \quad \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad x_{n_k}\to\alpha \quad\Rightarrow\quad f(x_{n_k})\to f(\alpha) \quad\Rightarrow\quad (f(x_{n_k})) \quad \text{korlátos, mert konv.}$$
   Ez ellentmond 1-nek. ■

2. **A Weierstrass-tétel.**

   Tegyük fel, hogy:
   $$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ \text{folytonos } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f\text{-nek } \exists \text{ absz. szélsőértéke, azaz} \quad \exists\alpha,\beta,\in[a,b]: \\ f(x)\le f(\alpha) \\ f(\beta)\le f(x) \end{array} \qquad (x\in[a,b])$$
   Bizonyítás: f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow f$ korlátos.

   Ekkor:
   $$\begin{aligned} &\exists\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=:M\in\mathbb{R} \\ &\exists\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=:m\in\mathbb{R} \end{aligned}$$
   Igazoljuk: $\exists\alpha\in[a,b]: \quad f(\alpha)=M$.
   $$M\sup \quad\Rightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \exists y_n\in\mathcal{R}_f: \quad M-\frac{1}{n}<y_n\le M$$
   Viszont:
   $$y_n\in\mathcal{R}_f \quad\Rightarrow\quad \exists x_n\in[a,b]: \quad f(x_n)=y_n, \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

Az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{B-W kiv.}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\lim(x_{n_k}) =: \alpha \in [a,b]$ (indirekt belátható)

$$f \text{ folyt. } [a,b]\text{-n} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{\alpha\} \quad \overset{\text{átviteli elv}}{\Rightarrow} \quad \lim_{k\to+\infty}(x_{n_k}) = \alpha, \quad \lim_{k\to+\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha)$$

$$\lim_{k\to+\infty}(y_{n_k}) = f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad M = f(\alpha)$$

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

3. **A Bolzano-tétel.**

Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, továbbá

$$\left.\begin{array}{c}\text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ f(a)\cdot f(b) < 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = 0.$$

Bizonyítás: (Bolzano-féle felezési eljárás)

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$ Legyen $[x_0, y_0] := [a,b]$.

Felezzük meg az intervallumot! Legyen $z_0 := \frac{a+b}{2}$. 3 eset lehetséges:

a) $f(z_0) = 0 \checkmark$

b) $f(z_0) > 0$ esetén $[x_1, y_1] := [a, z_0]$.

c) $f(z_0) < 0$ esetén $[x_1, y_1] := [z_0, b]$.

Megfelezzük $[x_1, y_1]$-et. Itt is 3 eset lehetséges. $(\ldots)$ Folytatjuk az eljárást.

Az eljárás közben vagy találunk véges sok lépésben olyan ξ-t melyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Amennyiben nem, $\exists [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, melyre teljesül hogy

a) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

c) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Cantor-féle közösrész tételből következik hogy ezeknek az intervallumoknak van közös pontja, ha $n \in \mathbb{N}$, azaz:

$$\overset{\text{Cantor}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n], \quad x_n \nearrow \xi, \quad y_n \searrow \xi. \quad \text{(monoton tartanak } \xi\text{-hez)}$$

f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow$ $f \in C\{\xi\}$ $\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}}$ $\lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n))$ Ha

a) $f(x_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(x_n)) \leq 0$

b) $f(y_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(y_n)) \geq 0$

Tehát:

$$\underbrace{f(\xi) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\xi) \geq 0}$$
$$\Downarrow$$
$$f(\xi) = 0$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

4. **Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel**

Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{c}\text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ \exists f^{-1}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f\text{-en.}$$

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel hogy $f^{-1}: \mathcal{R}_f \to [a,b]$ nem folytonos, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f : \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

Átviteli elv $\quad \Rightarrow \quad \exists (y_n) \subset \mathcal{R}_f \quad \lim(y_n) = y_0, \quad$ DE $\quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n), \quad \text{azaz} \quad f(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$x_0 := f^{-1}(y_0), \quad \text{azaz} \quad f(x_0) = y_0.$$

Így:

$$\lim(x_n) \neq x_0. \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\exists \delta > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N} \;:\; |x_n - x_0| \geq \delta\} \quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat $\xRightarrow[\text{tétel}]{\text{Bolz-Weier}}$ $\exists (x_{\nu_n})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\quad \overline{x} := \lim(x_{\nu_n}) \in [a,b]$. (indirekt módon lehetett bizonyítani)

$$\left.\begin{array}{l} f \in C\{\overline{x}\} \\ x_{\nu_n} \to \overline{x} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{elv}]{\text{átviteli}} \underbrace{f(x_{\nu_n})}_{y_{\nu_n}} \longrightarrow f(\overline{x}) \quad (\text{emiatt: } 2)$$

Viszont:

$$y_n \to y_0, \quad y_{\nu_n} \to y_0 (= f(x_0))$$

Ez pedig ellentmondás. $\blacksquare$

5. **A folytonosság és a derivált kapcsolata.**

   Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

   a) $f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f \in C\{a\}$.

   b) $f \in D\{a\} \quad \not\Leftarrow \quad f \in C\{a\}$.

   Bizonyítás:

   $\boxed{\Rightarrow}$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

   $\boxed{\not\Leftarrow}$ abs$\notin D\{0\}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{abs} \notin \mathrm{D}\{0\}. \quad \blacksquare$$

6. **A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel.**

   Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$

$$f \in D\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \quad \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0 \\ f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \end{cases}$$

   $A = f'(a)$.

   Bizonyítás:

   $\boxed{\Rightarrow}$

$$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right)}_{=:\varepsilon(x)} = 0$$

Így: $\lim_a \varepsilon = 0$, és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \checkmark$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon: \quad \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad \lim_a \varepsilon = 0:$

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \overset{x \neq a}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} = \underbrace{A + \varepsilon(x)}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} A}$$

$$\Rightarrow f'(a) = A \quad \blacksquare$$

7. **A szorzatfüggvény deriválása.**

Tegyük fel, hogy $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$.

Ekkor:

$$f, g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Bizonyítás:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \underset{+f(a)\cdot g(x)}{\overset{-f(a)\cdot g(x)}{=}} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} \cdot g(x) + f(a) \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} g'(a)}$$

$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \quad \Rightarrow \quad$ mivel folytonos, és $x \to a$, Ui.: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\}$ $\blacksquare$

8. **A hányadosfüggvény deriválása.**

Tegyük fel, hogy $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad g(a) \neq 0$.

Ekkor:

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Bizonyítás: Közös ötlet: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ és $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$-t behozni.

a) Igazoljuk: $\quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\}$, de $g(a) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\exists K(a): \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a))$$

$\Rightarrow a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

b)

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)}{x-a} = \frac{1}{g(a) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x-a} \underset{+f(a)g(a)}{\overset{-f(a)g(a)}{=}}$$

$$\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\overset{x\to a}{\longrightarrow} g'(a)} \right)$$

$g(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \neq 0$, mert $g \in C\{a\}$. $\blacksquare$ Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész. (előadáson ennyi hangzott el)

9. **A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.**

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és

$$\left.\begin{array}{c} f \in D\{a\} \quad a \in \operatorname{int} D_f \\ f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélső értéke van} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0$$

Bizonyítás: Lokális maximumra: Tekintsük

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

törtet. Ha $x>a$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{>0}} \leq 0 \quad \overset{f\in D\{a\}}{\Rightarrow} \quad \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

Ha $x<a$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{<0}} \geq 0$$

$f \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad f'(a) \geq 0$ Tehát: $f'(a) \leq 0$ és $f'(a) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0.$ ■

10. **A Rolle-féle középértéktétel.**

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=0 \end{array}$$

Bizonyítás: $f\in C[a,b] \quad \underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Weier.}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \alpha,\beta\in[a,b]:$

$$f(\alpha) := \min_{[a,b]} f := m$$

$$f(\beta) := \max_{[a,b]} f := M$$

a) eset: $f \equiv$ áll. $(m=M) \quad \Rightarrow \quad f' \equiv 0$

b) eset: $f \not\equiv$ áll. $\quad \Rightarrow \quad m \neq M$ és $m < M$

Ha $m \not\equiv f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \alpha\in(a,b)$ Ekkor $f(\alpha)$: abszolút minimum és $f(\alpha)$ lokális minimum is.

$$f'(\alpha)=0, \quad \xi=\alpha \quad \text{„jó”}$$

Ha $m=f(a)=f(b)$ ■ Lehetséges, hogy itt hiányzik egy kis rész. (előadáson ennyi hangzott el)

11. **A Lagrange-féle középértéktétel.**

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C[a,b] \\ f\in D(a,b) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\xi\in(a,b) \\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$$

Bizonyítás: A szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

Legyen:

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x\in[a,b])$$

F-re a Rolle feltételei teljesülnek (ellenőrizni kell!)

$$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b): \quad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad ■$$