Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f korlátos $[a, b]$-n.

Bizonyítás. f korlátos, ha

$$\exists\, K > 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \text{ esetén } |f(x)| \le K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy f nem korlátos, azaz

$$\forall\, K > 0\text{-hoz } \exists\, x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K.$$

A $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists\, x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| \ge n.$$

Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolzano–Weierstrass}}{\underset{\text{kiválasztási tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, (x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Ekkor: $\alpha \in [a, b]$. (Ezt indirekt módon igazoljuk: Ha $\alpha \notin [a, b] \Rightarrow \exists\, K(\alpha)$: $K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$. De $\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geqq k_0$, $x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, mivel $x_{n_k} \in [a, b]$).

Az f függvény folytonos $[a, b]$-n $\Longrightarrow f \in C\{\alpha\} \overset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$

$$\lim\big(x_{n_k}\big) = \alpha \text{ miatt } \lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha).$$

Ez azt jelenti, hogy $\big(f(x_{n_k})\big)$ korlátos sorozat, ami ellentmondás. ■

A Weierstrass-tétel

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

Bizonyítás. f folytonos $[a, b]$-n $\implies$ f korlátos $[a, b]$-n. Ezért

$$\exists \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: M \in \mathbb{R},$$
$$\exists \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} =: m \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk: az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists\, \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = M$.

A szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \le M.$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \quad \implies \quad \exists\, x_n \in [a, b] : \ f(x_n) = y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az (x_n) sorozatnak létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje α ennek a határértékét, azaz legyen

$$(*) \qquad \alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha \in [a, b]$.

f folytonos $[a, b]$-n $\implies$ $f \in C\{\alpha\}$ $\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\implies}}$

$$(*) \text{ miatt } \lim_{k \to +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha).$$

Mivel

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \le M \quad (\text{minden } k\text{-ra}),$$

ezért $\lim\limits_{k \to +\infty} y_{n_k} = M$, ami azt jelenti, hogy az $f(\alpha) = M$ egyenlőség valóban fennáll.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

A Bolzano-tétel

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

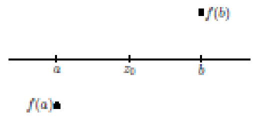
Bizonyítás. (A Bolzano-féle felezési eljárással.)

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen

$[x_0, y_0] := [a, b]$



Az intervallumot megfelezzük. Legyen

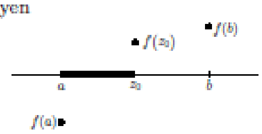
$$z_0 := \frac{a+b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ gyöke az egyenletnek.

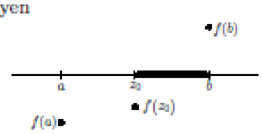
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen

$[x_1, y_1] := [a, z_0]$



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen

$[x_1, y_1] := [z_0, b]$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

$\vdots$

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben

$\exists\, [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

A Cantor-féle közösrész tételből és (iii)-ből következik, hogy az intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ, azaz

$$\text{egyértelműen } \exists\, \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért

$$\lim\bigl(f(x_n)\bigr) = f(\xi) = \lim\bigl(f(y_n)\bigr).$$

De (ii)-ből

$$\lim\bigl(f(x_n)\bigr) \le 0 \le \lim\bigl(f(y_n)\bigr),$$

azaz $f(\xi) \le 0$ és $f(\xi) \ge 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

Megjegyzés. Az eljárással az $f(x) = 0$ **egyenlet közelítő megoldásait** is elő lehet állítani. ■

Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és invertálható. Ekkor az f^{-1} inverz függvény folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a, b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists\, y_0 \in \mathcal{R}_f, \quad \text{hogy} \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\Longrightarrow \exists\,(y_n) \subset \mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim(y_n) = y_0, \quad \text{DE} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$\begin{aligned} x_n &:= f^{-1}(y_n) \quad (\text{azaz } f(x_n) = y_n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),\\ x_0 &:= f^{-1}(y_0) \quad (\text{azaz } f(x_0) = y_0). \end{aligned}$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n) \neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\,\delta > 0, \quad \text{hogy az} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| \geq \delta\} \text{ halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n) \subset [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists\,(x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x} := \lim(x_{n_k})$. Indirekt úton belátható, hogy $\overline{x} \in [a, b]$.

$(*)$-ból következik, hogy az (x_{n_k}) részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle) \qquad \overline{x} \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\overline{x}\}$ és $\lim(x_{n_k}) = \overline{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim\Big(f(x_{n_k})\Big) = \lim(y_{n_k}) = f(\overline{x}).$$

Az (y_n) (vagyis az $(f(x_n))$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim(y_{n_k}) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f(\overline{x}) = f(x_0)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\overline{x} = x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval. ■

A folytonosság és a derivált kapcsolata

Válasz. $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$, de fordítva nem igaz, pl. az $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$.

Bizonyítás.

1^o $f \in D\{a\} \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\text{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \text{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto \frac{\text{abs}\,(x)-\text{abs}\,(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x>0 \\ -1, & \text{ha } x<0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris közelítéssel

Válasz. $f \in D\{a\} \iff \exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0.$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

A szorzatfüggvény deriválása

Válasz. $f, g \in D\{a\} \implies fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad \big(x \in \mathcal{D}_{fg} \setminus \{a\}\big).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $fg \in D\{a\}$ és

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

A hányadosfüggvény deriválása

Válasz. $f, g \in D\{a\}, g(a) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**
Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.
Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a)) \qquad \implies \qquad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

27

Az $\dfrac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\frac{f}{g}} \setminus \{a\}\right).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g \in C\{a\} \implies \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a) \neq 0$. Ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{g(a)\lim\limits_{x\to a} g(x)}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)}\left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \ \blacksquare$$

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel

Válasz. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{c\}$ és az f függvénynek a c pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont *lokális maximumhelye* az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists\, r > 0 : \quad \forall\, x \in (a - r, a + r) \quad \text{esetén } f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \le 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt a $(*)$ alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \ge 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \le 0$ és $f'(a) \ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha a *lokális minimumhelye* az f függvénynek. ■

A Rolle-féle középértéktétel

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a,b], f \in D(a,b), f(a) = f(b)$, akkor $\exists\, \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a,b]$, ezért Weierstrass tételéből következik, hogy

$$\exists\, \alpha,\, \beta \in [a,b] : \qquad f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

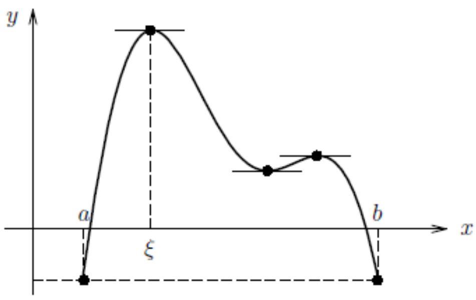
1. eset: $m = M$. Ekkor f állandó (a,b)-n, így tetszőleges $\xi \in (a,b)$ pontban $f'(\xi) = 0$.

2. eset: $m \neq M$, tehát $m < M$.

Ha $m \neq f(a) = f(b)$, akkor az α abszolút minimumhely az (a,b) intervallumban van. Világos, hogy α egyúttal lokális minimumhelye is az f függvénynek. A feltételeink alapján $f \in D\{\alpha\}$, ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\alpha) = 0$. A tétel állítása tehát a $\xi := \alpha \in (a,b)$ választással teljesül.

Ha $m = f(a) = f(b) < M$, akkor a β abszolút maximumhely van az (a,b) intervallumban, és ez egyúttal lokális maximumhely is, tehát $f'(\beta) = 0$. Ebben az esetben tétel állítása tehát a $\xi := \beta \in (a,b)$ választással teljesül. ■

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x-tengellyel:



A Lagrange-féle középértéktétel

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha $f \in C[a, b], f \in D(a, b)$, akkor

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(\xi).$$

Bizonyítás. Az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.
Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a, b]$-n és deriválhatók (a, b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right) = 0,$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül.

A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$