# Analízis II.

## Előadás jegyzet

2. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. szeptember 20.)
Külön köszönet jár Csonka Szilviának a képek elkészítésért, és Solymosi Zsófiának a jegyzet javításáért.

Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

# 1. Folytatás.

**1.0.1. Emlékeztető.** $[a, b]$-n folytonos függvények tulajdonságai.

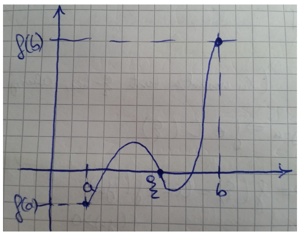
**1.0.2. Tétel.** (Bolzano)
Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, továbbá

$$\left.\begin{array}{r}\text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ f(a)\cdot f(b) < 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = 0.$$

(a két végpontban különböző előjellel)

**1.0.3. Megjegyzés.** $f(a) \cdot f(b) < 0$ azt jelenti hogy különöző pontokban a fv különöző értékeket vesz fel.

Szemléletesen:




1. ábra.

*Bizonyítás:* (Bolzano-féle felezési eljárás)
Tegyük fel, hogy $f(a) < 0, \quad f(b) > 0$. Legyen $[x_0, y_0] := [a, b]$.

Felezzük meg az intervallumot! Legyen $z_0 := \frac{a+b}{2}$. 3 eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0 \checkmark$
2. $f(z_0) > 0$ esetén $[x_1, y_1] := [a, z_0]$.
3. $f(z_0) < 0$ esetén $[x_1, y_1] := [z_0, b]$.

Megfelezzük $[x_1, y_1]$-et. Itt is 3 eset lehetséges. (...) Folytatjuk az eljárást.

Az eljárás közben vagy találunk véges sok lépésben olyan $\xi$-t melyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Amennyiben nem, $\exists [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, melyre teljesül hogy

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
2. $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
3. $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Cantor-féle közösrész tételből következik hogy ezeket az intervallumoknak van közös pontja ha $n \in \mathbb{N}$, azaz:

$$\underset{\text{tétel}}{\overset{\text{Cantor}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n], \quad x_n \nearrow \xi, \quad y_n \searrow \xi. \quad \text{(monoton tartanak } \xi\text{-hez)}$$

$f$ folytonos $[a, b]$-n $\quad \Rightarrow \quad f \in C\{\xi\} \quad \underset{\text{elv}}{\overset{\text{átviteli}}{\Longrightarrow}} \quad \lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n))$ Ha

1. $f(x_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(x_n)) \leq 0$
2. $f(y_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(f(x_n)) \geq 0$

Tehát:

$$\underbrace{f(\xi) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\xi) \geq 0}_{\Downarrow}$$
$$f(\xi) = 0$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

**1.0.4. Megjegyzés.** A tétellel az $f(x)$ egyenlet közelítő megoldását lehet előállítani.

**1.0.5. Tétel.** (Bolzano-Darboux)
Ha

$$\left.\begin{array}{l} f : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{folyt. } [a, b]\text{-n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f \text{ minden } f(a) \text{ és } f(b) \text{ közötti értékeket felvesz.}$$

**1.0.6. Megjegyzés.** Ez azt jelenti: ha (pl.) $f(a) < f(b)$,

$$\forall c \in (f(a), f(b)) \quad \text{ponthoz} \quad \exists \xi \in [a, b], \quad f(\xi) = c.$$

*Bizonyítás:*
A

$$\varphi(x) := f(x) - c \quad (x \in [a, b])$$

fv.-re alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

**1.0.7. Definíció.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ fv. *Darboux-tulajdonságú $I$-n*, ha $\forall a, b \in I, \quad a < b$ esetén az $f$ minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz.

**1.0.8. Tétel.** $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos az $I$-n, $\Rightarrow f$ Darboux tulajdonságú $I$-n.

*biz nélkül.*

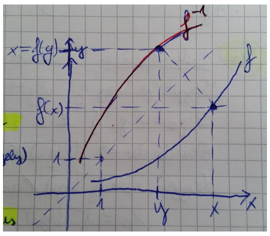
**1.0.9. Megjegyzés.** Létezik Darboux tulajdonságú nem folytonos függvény.

**1.0.10. Tétel.** (intervallum folytonos képe intervallum.)
$I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $I$-n. Ekkor $\mathcal{R}_f$ is intervallum.

*biz nélkül.*

## 1.1. Az inverz folytonossága.

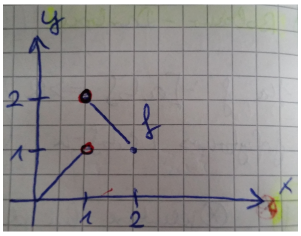
**1.1.1. Emlékeztető.** Függvény tulajdonsága, inverze:



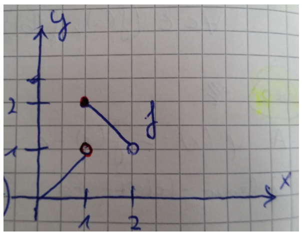

2. ábra. $f$ és $f^{-1}$ képe az $y = x$ egyenesre szimmetrikus.

**1.1.2. Megjegyzés.** $f$ folytonossága nem „öröklődik” $f^{-1}$-re.

**1.1.3. Példa.**




$$f(x) := \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 3 - x & 1 < x \le 2 \end{cases}$$




$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

3. ábra.

Ekkor:

- $f$ folytonos: $\mathcal{D}_f = [0{,}2)\setminus\{1\}$
- $\exists f^{-1}$; $\quad \mathcal{D}_{f^{-1}} = [0{,}2]$
- $f^{-1} \notin C\{1\}$

Azonban: Ha $\mathcal{D}_f$ egy $[a,b]$-n értelmezett korlátos és zárt intervallum, és $f$ folytonos függvény $\Rightarrow$ $f^{-1}$ is folytonos.

**1.1.4. Tétel.** Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{r} \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f\text{-en.}$$

*Bizonyítás:* Indirekt, tegyük fel hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a,b]$ nem folytonos, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f, : \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

Átviteli elv $\Rightarrow$ $\exists (y_n) \subset \mathcal{R}_f \quad \lim(y_n) = y_0,$ DE $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n), \quad \text{azaz} \quad f(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$x_0 := f^{-1}(y_0), \quad \text{azaz} \quad f(x_0) = y_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Így:

$$\lim(x_n) \neq x_0. \tag{1}$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\exists \delta > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N} \mid x_n - x_0 \ge \delta\} \quad \text{végtelen halmaz.}$$

Az $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat $\overset{\text{Bolz-Weier}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (x_{\nu_n})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x} := \lim(x_{\nu_n}) \in [a,b]$. (indirekt módon lehetett bizonyítani)

$$\left.\begin{array}{r} f \in C\{\overline{x}\} \\ x_{\nu_n} \to \overline{x} \end{array}\right\} \overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\Longrightarrow}} \underbrace{f(x_{\nu_n})}_{y_{\nu_n}} \longrightarrow f(\overline{x}) \quad (\text{emiatt: } 1)$$

Viszont:

$$y_n \to y_0, \quad y_{\nu_n} \to y_0 (= f(x_0))$$

Ez pedig ellentmondás. ■

**1.1.5. Tétel.** Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{r} \text{folytonos } [a,b]\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f \text{ szig. mon. növekvő vagy csökkenő.}$$

*biz nélkül.*

**1.1.6. Tétel.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum,

$$\left.\begin{array}{r} f : I \to \mathbb{R} \quad \text{folytonos} \quad I\text{-n} \\ \exists f^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_f \text{ is intervallum, és } f^{-1} \text{ folytonos } \mathcal{D}_f\text{-en.}$$

*biz nélkül.*

## 1.2. Szakadási helyek.

**1.2.1. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f$ pont *szakadási hely*, ha $f \notin C\{a\}$.

**1.2.2. Definíció.** A szakadási helyek osztályozása:
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f$

1. $a$ megszüntethető szakadási hely, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges, és} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

   (jobb és bal oldali határértéke is létezik)

2. $a$ elsőfokú szakadási hely, ha

$$\exists \lim_{a+0} f, \quad \exists \lim_{a-0} f \quad \text{végesek, és} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f$$

3. Másodfajú szakadási hely az összes többi eset.