# Analízis 2.

## 1. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Tantárgyi követelmények: http://numanal.inf.elte.hu/~weisz/oktanyagok/Kov_An.pdf

### Folytonos függvények

**Definíció:** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Pl:

$$f(x) = \begin{cases} x : & x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \in C(0) \\ -x : & x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f \notin C(0), a \neq 0 \end{cases}$$

Jelölés: $f \in C(a)$ folytonos az $a$ pontban.

**Tétel:** Folytonosság és határérték kapcsolata

Ha $a \in D_f \cap D'_f$, akkor:

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a)$$

Bizonyítás: Lásd az előző definíciót. ■

**Definíció:** $a \in D_f$ izolált pont, ha $\exists K(a)$, hogy $K(a) \cap D_f = \{a\}$

*Állítás:* Ha $a \in D_f$, akkor $a \in D'_f$ vagy izolált pont.

Bizonyítás: Triviális ■

**Tétel:** Ha $a \in D_f$ izolált, akkor $f \in C(a)$

Bizonyítás: Triviális ■

**Tétel:** Hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciahalmaz belsejében.

Bizonyítás: $\exists R \geq 0 :$ a hatványsor konvergens az $(a - R, a + R)$ intervallumon. Ezen kívül divergens, $x = a - R$, vagy $x = a + R$?

Hatványsor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - a)^n$$

Valamint tanultuk korábban, hogy:

$$\exists \lim_x f = f(x), \text{ ha } x \in (a - R, a + R) \quad ■$$

**Következmény:** Az $exp, sin, cos, sh, ch$ függyvények folytonosak $\mathbb{R}$-en.

**Tétel:** Folytonosságra vonatkozó átviteli elv

Tfh. $a \in D_f$, ekkor:

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to D_f, \lim(x_n) = a : \quad \lim(f(x_n)) = f(a)$$

Bizonyítás: Ha $a \in D_f$, akkor előző + a tavalyi határértékre vonatkozó átviteli elv. Különben $a$ izolált pont. Ekkor mindkét oldal igaz. ■

**Tétel:**

- Ha $f, g \in C(a)$, akkor $f + g \in C(a), \lambda f \in C(a), \lambda \in \mathbb{R}, f \cdot g \in C(a)$. Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C(a)$.
- $g \in C(a), f \in C(g(a)), R_g \subset D_f$, akkor $f \circ g \in C(a)$.

Bizonyítás: $(x_n) : \mathbb{N} \to D_f, \lim(x_n) = a, \quad f, g \in C(a) \Rightarrow \lim(f(x_n)) = f(a), \lim(g(x_n)) = g(a)$
$\Rightarrow \lim(f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a) \Rightarrow f + g \in C(a)$ ■

**Definíció:** $f$ folytonos $A$-n, ha $f \in C(a) \quad (\forall a \in A)$

## Korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvények

Ezután $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

**Definíció:** Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik abszolút maximuma (minimuma), ha

$\exists \alpha \in [a, b], \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(\alpha) \quad (f(x) \geq f(\alpha))$
Ahol $\alpha$ az abszolút maximum (minimum) hely.

**Tétel:** Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f$ korlátos.
Bizonyítás: $f$ korlátos, ha $\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \leq K$
Indirekt: Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz
$\Rightarrow \forall K > 0, \exists x \in [a, b] : |f(x)| > K$. Legyen a $K = n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$
$\Rightarrow x_n \in [a, b] \Rightarrow (x_n)$ korlátos $\Rightarrow$ Bolzano - Weierstrass tétel miatt
$\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozat $\Rightarrow \lim(x_{n_k}) =: \alpha$. Ekkor $\alpha \in [a, b]$
hiszen, ha $\alpha \notin [a, b]$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : [a, b] \cap K_\varepsilon(\alpha) = \emptyset$
$\Rightarrow \exists k_0, \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in K_\varepsilon(\alpha)$, viszont ez ellentmondás.
$x_{n_k} \in [a, b] \Rightarrow \alpha \in [a, b] \Rightarrow f \in C(\alpha)$
Alkalmazzuk az átviteli elvet, $\lim(x_{n_k}) = \alpha \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ konvergens.
$\Rightarrow (f(x_{n_k}))$ korlátos. És így ellentmondásra juttotunk, hiszen:
$|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ nem korlátos. ■

**Tétel:** (Weierstrass-tétel) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f$-nek létezik abszolút maximuma és minimuma is.
Bizonyítás: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor korlátos
$\Rightarrow M :=\sup\{f(x),\text{ha } x \in [a, b]\}$, $m :=\inf\{f(x),\text{ha } x \in [a, b]\}$, $M, m \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall n \geq 1$-re, $\exists x \in [a, b] : M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M$
$\Rightarrow \lim f(x_n) = M \Rightarrow (x_n)$ korlátos.
$\Rightarrow \exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozat$\Rightarrow \lim x_{n_k} = \alpha, \alpha \in [a, b] \Rightarrow$ átviteli elv, $f \in C(\alpha)$
$\Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$.
**De!** $\lim f(x_n) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(\alpha)$
$m$ -re hasonló. ■

# Analízis 2.

## 2. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

**Tétel:** Bolzano: Tfh. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ akkor $\exists x \in [a,b] : f(x) = 0$

Bizonyítás: Legyen $[x_0, y_0] = [a,b]$ és tfh. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$

Legyen $z_0 := \frac{x_0+y_0}{2}$, ekkor 3 eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$ ✓
2. $f(z_0) < 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$
3. $f(z_0) > 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$

Ezt az eljárást folytatva véges sok lépésben kapunk $\xi$-t amelyre $f(\xi) = 0$, ha nem akkor kapunk egy $([x_n, y_n])$ intervallum sorozatot, amelyre a következők igazak:

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$
2. $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0$
3. $y_n - x_n = \frac{y_0-x_0}{2^n}$

A Cantor-tétel miatt

$$\exists \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n] \text{ Mivel } y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ ,ezért } \exists!\, \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n]$$

Továbbá $0 \leq \xi - x_n \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(x_n) = \xi}$ ,és $\quad y_n - \xi \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(y_n) = \xi}$

Tudjuk, hogy $f(x_n) < 0$ és $\lim(x_n) = \xi$ és $f \in C(\xi)$ ,ezért az átviteli elv miatt
$\lim f(x_n) = f(\xi) \Rightarrow f(\xi) \leq 0$

Hasonlóan $f(y_n) > 0, \quad \lim(y_n) = \xi \Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$
itt: $f(y_n) > 0$ ezért $f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ ■

Következmény: (Bolzano), Tfh. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos.
Ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall c \in (f(a), f(b)) : \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = c$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = f(x) - c$, ekkor

$g(a) = f(a) - c < 0$ és $g(b) = f(b) - c > 0 \Rightarrow$ előző tétel alapja

$\exists \xi \in [a,b] : g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - c = 0$ ■

**Definíció:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függyvény Darboux tulajdonságú, ha
$\forall x_1 < x_2, \quad (x_1, x_2 \in [a,b]), \quad f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall c \in (f(x_2), f(x_1)) \quad \exists \xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = c$

**Tétel:** Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függyvény folytonos, akkor Darboux tulajdonságú.

**Tétel:** Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függyvény folytonos, ekkor $R_f$ intervallum.

Bizonyítás: Legyen $M := sup\{f(x) | x \in I\}$ és $m := inf\{f(x) | x \in I\}$

Igazoljuk, hogy $(m, M) \subset R_F$ Legyen $y_0 \in (m, M)$ tetszőleges.

Igazoljuk, hogy $y_0 \in R_f \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) < y_0 < f(x_2)$

Tekintsük az $f : [x_2, x_1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. A Bolzano-következmény miatt

$c = y_0$-ra is $\exists \xi \in [x_2, x_1] : f(\xi) = y_0 \Rightarrow y_0 \in R_f \Rightarrow (m, M) \subset R_f$
$\Rightarrow R_f = [(m, M)]$ vagy nyitott vagy zárt. ■

## Egyenletes folytonosság

$f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subset \mathbb{R})$ folytonos, azaz $f \in C(A) \Leftrightarrow \forall x \in A : f \in C(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in A : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in A : |y - x| < \delta, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Megjegyzés: $\delta$ függ $\varepsilon$-tól és $x$-től.

Példa: 1, $f(x) = x \quad (x \in [0, +\infty])$ Legyen $\delta := \varepsilon$, ekkor
Ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon$ $\delta$ itt nem függ $x$-től.

2, $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0{,}1]$ Tfh. $x < y \quad y - x < \delta \Rightarrow y < x + \delta$
Ekkor $f(x) - f(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{x+\delta-x}{x(x+\delta)} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} < \varepsilon$
Itt $\delta$ függ az $x$-től, kül. bal oldal $\to \infty$

Ha $\delta$ nem függ $x$-től: egyenletesen folytonos.

**Definíció:** $f : A \to \mathbb{R}$ függyvény egyneletesen folytonos, ha
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

**Tétel:** $f : A \to \mathbb{R}$

1. Ha $f$ egyenletesen folytonos $\Rightarrow$ folytonos.
2. Ha $f$ folytonos $\not\Rightarrow$ egyenletesen folytonos.

Bizonyítás:

1. Triviális.
2. $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0{,}1]$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos, azaz:
   Igazoljuk, hogy $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in A : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
   Feltehető, hogy $\delta = \frac{1}{n}$ azaz:
   $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+, \exists x_n, y_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad (A = (0{,}1])$
   Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$
   $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ és $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2}$ ■

**Tétel:** (Heine): Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f$ egyenletesen folytonos.

Bizonyítás: (Indirekt) Tfh. $f$ nem egyenletesen folytonos.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Legyen $\delta = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot $\Rightarrow (x_n)$ korlátos.
Bolzano-Weierstrass kiv. tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, azaz:
$\lim(x_{n_k}) =: \alpha, \quad \alpha \in [a, b]$
**De!** $|y_{n_k} - \alpha| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - \alpha| \to 0$ azaz $\lim(y_{n_k}) = \alpha$
$f \in C(\alpha)$ átviteli elv miatt
$\lim(f(x_{n_k})) = f(\alpha)$ és $\lim(f(y_{n_k})) = f(\alpha) \Rightarrow \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$
viszont ez ellentmondás, azzal, hogy $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ ■

# Analízis 2.

## 3. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

## Inverzfüggvény folytonossága

**Tétel:** Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor $f^{-1}$ is folytonos.

Bizonyítás: 1. lépés: $f^{-1}$ $\exists$ Indirekt.

Tfh. $f^{-1}$ nem folytonos. $\Rightarrow \exists y_0 \in R_f, f^{-1} \notin C(y_0) \Rightarrow$ átviteli elv.

$\exists y_n \in R_f, \lim(y_n) = y_0\colon \lim(f^{-1}(y_n)) \neq f^{-1}(y_0)$

Legyen $x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim(x_n) \neq x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0\colon \{n : |x_n - x_0| \geq \delta\}$ végtelen.

Legyen $n_k$ indexsorozat, hogy: $|x_{n_k} - x_0| \geq \delta$

$(x_{n_k}) : \mathbb{N} \to [a,b] \Rightarrow (x_{n_k})$ korlátos. $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozat.

$(x_{n_k})' : \quad \lim(x_{n_k})' := \alpha$ **De!** $|(x_{n_k})' - x_0| \geq \delta \Rightarrow |\alpha - x_0| \geq \delta \Rightarrow \alpha \neq x_0$

2. lépés: $f \in C(\alpha) \quad \alpha \in [a,b]$

átviteli elv $\Rightarrow \lim \underbrace{f(x_{n_k})'}_{(y_{n_k})'} = f(\alpha) \Rightarrow \lim(y_{n_k})' = f(\alpha)$

**De!** $\lim(y_{n_k})' = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(\alpha) = f(x_0) \quad f$ injektív. $\Rightarrow \alpha = x_0$ Ez ellentmondás. ■

**Tétel:** $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos.

Bizonyítás: Legyen $y_0 \in R_f$ tetszőleges, igazoljuk, hogy $f^{-1} \in C(y_0)$.

Legyen $x_0 = f^{-1}(y_0)$ és $[a,b]$ olyan intervallum, hogy: $x_0 \in [a,b]$ és $[a,b] \in I$

Ekkor az előző tétel miatt: $(f|[a,b])^{-1}$ folytonos. **De!** $(f|[a,b])^{-1} = f^{-1}|_J$

ahol $J := f[a,b]$ intervallummal. Ekkor $y_0 \in J$ belsejében $\Rightarrow f^{-1} \in C(y_0)$ ■

**Tétel:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f$ szig. mon.

Bizonyítás: Ha $f(a) < f(b)$, ekkor $f$ szig. mon. nő

**1.** Igazoljuk, hogy $f(a) = min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ és $f(b) = max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Csak az elsőt. Indirekten, Tfh:

$f(a) > minf$ ($<$ nem lehet) Weierstrass-tétel $\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = minf \quad \alpha \neq a, b$

Tekintsük az $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ függvényt. A Bolzano-tétel miatt $c = f(a) \in (f(\alpha), f(b))$-hoz is

$\exists \xi \in [\alpha, b] : f(a) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow a = \xi$ Ellentmondás.

**2.** Igazoljuk, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in [a,b])$

Indirekt, Tfh: $f(x_1) > f(x_2)$

Ekkor $f(x_1) \in (f(x_2), f(b))$ Tekintsük az $f : [x_2, b] \to \mathbb{R}$ függvényt.

$c = f(x_1)$-hez is $\exists \xi \in (x_2, b) : f(x_1) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow x_1 = \xi$ Ellentmondás.

## Szakadási helyek

**Definíció:** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in D_f$ pontban:

1. Szakadási helye van, ha $f \notin C(a)$
2. Megszüntethető szakadása van, ha
$$\exists \lim_a f \quad \text{véges, és} \quad \lim_a f \neq f(a)$$
3. Elsőfajú szakadása van, ha
$$\exists \lim_{a+0} f, \quad \exists \lim_{a-0} f \quad \text{végesek, és} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f$$
4. Másodfajú szakadás az összes többi esetben.

Pl: **1.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

$f \in C(a), a \neq 0$ Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Megszüntethető szakadás

$$\text{Legyen } \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f} \in C(0)$. Ezért megszüntethető szakadás.

**2.**

$$f(x) = signx \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

$f \in C(a), a \neq 0$

$$1 = \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f = -1 \Rightarrow \text{Elsőfajú szakadás.}$$

**3.**

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f \notin C(0)$ de $f \in C(a), a \neq 0$

$$\nexists \lim_{a+0} f, \lim_{a-0} f \Rightarrow \text{Másodfajú szakadás.}$$

**Tétel:** Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton és $\alpha \in (a, b)$, akkor

1. $f \in C(\alpha)$

   vagy

2. Elsőfajú szakadása van

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\exists \lim\limits_{\alpha-0} f, \lim\limits_{\alpha+0} f$ és $\lim\limits_{\alpha-0} f < f(\alpha) \leq \lim\limits_{\alpha+0} f$

Ha $\lim\limits_{\alpha-0} f = \lim\limits_{\alpha+0} f \Rightarrow f \in C(\alpha)$

Ha $\lim\limits_{\alpha-0} f \neq \lim\limits_{\alpha+0} f \Rightarrow$ elsőfajú szakadása van. ■

## Nevezetes függvények

1. Gyökfüggyvény
   Legyen $f(x) = x^n, \quad x \in [0, +\infty), n \in \mathbb{N}_+$, ekkor $f$ szig. mon. nő és folytonos
   $\Rightarrow$ az inverze is folytonos (az előző tételek alapján).
   **Definíció:** $\sqrt[n]{\ } := f^{-1}$. Az $n$-edik gyökfüggvény.

2. Logaritmusfüggyvény
   **Tétel:** Az $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ szig. mon. nő folytonos és $\mathbb{R}_{exp} = \mathbb{R}_+$
   Bizonyítás: Biz. nélkül
   $\Rightarrow ln := exp^{-1}$ fgv. is szig. mon. nő és folytonos.
   **Definíció:** $ln := exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

3. $a$ alapú exp. és logaritmikus függvények

   **Definíció:** $exp_a(x) = exp(x \cdot ln(a)) = a^x$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$

   Az $a$ alapú exp. fgv.

   Megj: $a^x = exp(ln(a^x)) = exp(x \cdot ln(a))$

   Ekkor az exp. fgv. szig. mon. nő, ha $a > 1$

   fogy, ha $0 < a < 1$

   konstans, ha $a = 1$

   **Definíció:** $\log_a = (exp_a)^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad (a > 0, a \neq 1)$

4. $\alpha$ kitevőjű hatványfüggvény

   **Definíció:** $x^\alpha := exp(\alpha \cdot ln(x)) \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty)$

   Megj: $x^\alpha = exp(ln(x^\alpha)) = exp(\alpha \cdot ln(x))$

## Differenciálszámítás

**Definíció:** $a \in A \subset \mathbb{R}$ az $A$ belső pontja, ha $\exists K(a) \subset A$ Jelölés: int $A$

Megj:

– határérték: $a \in D'_f$

– folytonosság: $a \in D_f$

– derivál: $a \in intD_f$

**Definíció:** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható (differenciálható) az $a \in intD_f$ pontban, ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ határérték. $f'(a)$ a derivált. Jelölés: $f \in D(a)$

Pl:

**1.** $f(x) = c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{c - c}{h}}_{0} = 0 \Rightarrow f'(a) = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

**2.** $f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+)$

$n = 1: \quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a + h - a}{h} = 1 \Rightarrow f'(a) = 1, \quad a \in \mathbb{R}$

$n > 1: \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \lim_{h \to 0} \frac{(a + h - a)((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2} \cdot a + ... + a^{n-1})}{h} =$$

$= n \cdot a^{n-1}, \quad f'(a) = n \cdot a^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R}$

**3.** Abszolút érték függyvény. $\quad f(x) = |x|$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & : \quad h > 0 \\ -1 & : \quad h < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists \lim \qquad f \notin D(0)$

# Analízis 2.

## 4. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

**Pl:** $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad$ Legyen $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-(a+h)}{(a+h)\cdot a \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a\cdot(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

**Tétel:** (A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása)

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f \quad$ Ekkor

$f \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$

Ekkor $A = f'(a)$

Megj: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \quad$ hiszen $x = a+h$

Bizonyítás: "$\Rightarrow$"

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = A \Rightarrow \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A}_{\varepsilon(x)} = 0$

$\Rightarrow f(x) - f(a) - A(x-a) = \varepsilon(x)(x-a)$

"$\Leftarrow$" Tfh.

$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A = \varepsilon(x) \to 0 \quad x \to a$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{D}(a)$ és $f'(a) = A \quad \blacksquare$

**Definíció:** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontban van érintője, ha $f \in \mathcal{D}(a)$.
Az érintő meredeksége $f'(a)$, egyenlete: $l(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

**Tétel:** Deriválhatóság és folytonosság kapcsolata

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f$, ekkor

i, $f \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow f \in C(a)$

ii, $\qquad \not\Leftarrow$

Bizonyítás:

**i,** $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \to 0 \quad x \to a$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow f \in C(a)$, hiszen $a \in int\mathcal{D}_f \Rightarrow a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$

**ii,** $f(x) = |x| \quad f \in C(a)$ de $f \notin \mathcal{D}(a) \quad \blacksquare$

**Definíció:** Legyen $A := \{a \in int\mathcal{D}_f, f \in \mathcal{D}(a)\}$ és $f' : A \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a)$
Ekkor az $f'$ függvényt az $f$ derivált függvényének nevezzük.

**Pl:** $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

1. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$
2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $f(x) = |x| \Rightarrow f \notin \mathcal{D}(0)$
4. $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
6. $\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

**Tétel:** (Algebrai műveletek deriváltakkal)

Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor:

**i,** $f + g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

**ii,** $\lambda f \in \mathcal{D}(a)$ és $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

**iii,** $f \cdot g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

**iv,** Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(a)$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{(f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a))}{g^2(a)}$

Bizonyítás:

**i,** $a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) = int\mathcal{D}_{f+g}$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

$\Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

**ii,** $\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lambda \cdot f'(a)$

**iii,** $\lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(a) + g(x) \cdot f(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad (x \to a)$$

$\Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

**iv,** Először igazoljuk, hogy $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \underbrace{(-\frac{1}{g(x) \cdot g(a)})}_{\to \frac{-1}{g^2(a)}} \cdot \underbrace{(\frac{g(x) - g(a)}{x-a})}_{\to g'(a)} \longrightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad (x \to a)$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})'(a) = (f \cdot \frac{1}{g})'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot (\frac{1}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \quad \blacksquare$$

Megj: **i,** $P(x) = Q_n \cdot x^n + Q_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + Q_1 \cdot x + Q_0$

$\Rightarrow P'(x) = n \cdot Q_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot Q_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + Q_1$

**ii,** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ is deriválható, ha $Q(a) \neq 0$

**iii,** $(tg)'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2(x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad$ ha $\cos x \neq 0$

**Tétel:** Összetett függyvény deriváltja

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R_g \subset D_f, g \in \mathcal{D}(a), f \in \mathcal{D}(g(a))$, ekkor

$f \circ g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Bizonyítás:

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow a \in int\mathcal{D}_g \Rightarrow int\mathcal{D}_{f\circ g}$

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{a} \varepsilon_1 = 0$ és $g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \quad (x \in D_f)$

$f \in \mathcal{D}(g(a)) \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0$ és $f(y) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (y - g(a)) + \varepsilon_2(y) \cdot (y - g(a))$

Legyen $y = g(x)$

$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (g(x) - g(a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) =$

$= f'(g(a)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) =$

$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot (x-a) + (x-a) \cdot \underbrace{(f'(g(a)) \cdot \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot g'(a) + \varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(g(x)))}_{\varepsilon(x)}$

$\varepsilon_1 \to 0, \quad (x \to a)$

$g(x) \to g(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(g(x)) = \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a} \varepsilon = 0$

$\Rightarrow (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad \blacksquare$

**Pl:**$h(x) = (3x^2 + 2x + c)^{2017}$

$f(u) = u^{2017}, \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 6$

$\Rightarrow h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2017 \cdot (3x^2 + 2x + 6)^{2016} \cdot (6x + 2)$

## Inverz függvény deriváltja

**Tétel:** Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, szig. mon. növő és folytonos függvény.

Ha $\xi \in (a, b), f \in \mathcal{D}(\xi)$ és $f'(\xi) \neq 0$, akkor

$(f^{-1}) \in \mathcal{D}(\eta)$ és $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$, ahol $\eta = f(\xi)$

Bizonyítás: $\quad f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow R_f$ intervallum.

$f$ szig. mon. növő $\Rightarrow R_f$ nyílt intervallum $\Rightarrow \eta \in intR_f \qquad f^{-1} : R_f \to D_f$

$$\lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (x \to \xi)$$

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \xi = f^{-1}(\eta)$

Ui. $x \to \xi$, mert $y \to \eta$ : $\quad f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos $\Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta)$

$\Rightarrow x \to \xi$

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} = \frac{1}{f'(\xi)} \quad \blacksquare$$

# Analízis 2.

## 5. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Megj: $f(\xi) = \eta$

meredeksége: $f'(\xi) = m$

egyenlete: $y = mx + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{m} \to$ meredeksége: $\frac{1}{m}$

$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{m} = \frac{1}{f'(\xi)}$

**Hatványsor deriváltja**

**Tétel:** Legyen $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad x \in K_R(a)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}(x_0) \quad \forall x_0 \in K_R(a)$ és

$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0-a)^{n-1}$, ahol $x_0 \in K_R(a)$

Bizonyítás: 1. lépés: Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens $\forall 0 < r < R$

Legyen $0 < r < r' < R$ és $x = a + r'$

$x$-ben konvergens a hatványsor $\Rightarrow \sum_{n=0} \alpha_n(r')^n$ konvergens $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n(r')^n = 0 \Rightarrow (\alpha_n(r')^n)$ korlátos

$\Rightarrow \exists M > 0 : |\alpha_n(r')^n| \leq M \Rightarrow |\alpha_n| \leq \frac{M}{(r')^n} \Rightarrow \sum_{n=0} |n \cdot \alpha_n \cdot r^n| \leq M \cdot \sum_{n=0} n \cdot (\frac{r}{r'})^n$

ez konvergens, hiszen a gyökkritérium miatt

$\sqrt[n]{n \cdot (\frac{r}{r'})^n} = \sqrt[n]{n} \cdot (\frac{r}{r'}) \to (\frac{r}{r'}) < 1 \Rightarrow \sum_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens

$\Rightarrow \sum_{n=1} n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}$ is abszolút konvergens $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \sum_{n=N+1}^{\infty} |n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$

2. lépés:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x_0-a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n(x_0-a)^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n(x-a)^n - \alpha_n(x_0-a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{N} n \cdot \alpha_n(x_0-a)^{n-1} \right|}_{(I)} + \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} \right|}_{(II)} +$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot \alpha_n(x_0-a)^{n-1} \right|}_{(III)} = (I) + (II) + (III)$$

Tfh. $|x_0 - a| < r < R$

Mivel $x \to x_0$ ezért feltehető, hogy $|x-a| < r \Rightarrow (III) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot |\alpha_n| \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(II) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| \frac{((x-a)-(x_0-a))((x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + ... + (x_0-a)^{n-1})}{x-x_0} \right| =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| (x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + ... + (x_0-a)^{n-1} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(I) \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \left| \underbrace{\frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} - n \cdot (x_0-a)^{n-1}}_{\to 0, \text{ ha } x \to x_0} \right|$$

$g(x) = (x-a)^n \Rightarrow$ a tört határértéke $\quad g'(x_0) = n \cdot (x_0-a)^{n-1} \quad (x \to x_0)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, (I) < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (\text{ ha } |x-x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow \lim \left| \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| = 0$$

$$f \in \mathcal{D}(x_0) \text{ és } f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0-a)^{n-1} \quad \blacksquare$$

**Elemi függvények deriváltja**

1. exp $\quad exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = exp(x) \quad (x \in \mathbb{R})$
   $exp' = exp$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
   Hasonlóan $\cos' x = -\sin x, \quad ch'x = shx, \quad sh'x = chx$
3. $\ln = \exp^{-1}, \quad \exp \xi = \eta \Rightarrow$
   $\ln'(\eta) = \frac{1}{\exp' \xi} = \frac{1}{\exp \xi} = \frac{1}{\eta} \quad (\eta > 0)$
4. $a^x = exp_a(x), \quad a > 0$
   $exp'_a(x) = (exp(x \cdot \ln a))' = exp(x \cdot \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$
5. $\log_a = (exp_a)^{-1}, \quad exp_a(\xi) = \eta \quad (a > 0, a \neq 1)$
   $\log'_a(\eta) = \frac{1}{exp'_a(\xi)} = \frac{1}{a^{\xi} \cdot \ln a} = \frac{1}{\eta \cdot \ln a} \quad (\eta > 0, a > 0, a \neq 1)$
6. $f(x) = x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$
   $(x^{\alpha})' = (exp(\alpha \cdot \ln x))' = exp(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
7. $F(x) = f(x)^{g(x)} = exp(\ln\big(f(x)^{g(x)}\big)) = exp(g(x) \cdot \ln \cdot f(x)) =$
   $= exp(g(x) \cdot \ln \cdot f(x)) \cdot (g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x))$

**Egyoldali derivált**

$f(x) = |x| \quad f \notin \mathcal{D}(0)$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

**Definíció:** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{D}_f$ és $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$

Ekkor: $f$ jobbról deriválható $a$-ban, ha

$f_+{}'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték létezik és véges.

Hasonló az $f_-{}'(a)$ definíciója.

**<u>Tétel</u>:** $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in int\mathcal{D}_f$ Ekkor:

$f \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow {f_+}'(a)$ és ${f_-}'(a)$ léteznek és egyenlőek.

**<u>Többször deriválható függyvények</u>**

**Definíció:** $f$ kétszer deriválható $a$-ban, ha $\exists K(a)$, hogy $f \in \mathcal{D}(K(a))$ és $f' \in \mathcal{D}(a)$

Jelölés: $f''(a) = (f')'(a), \quad (f \in \mathcal{D}^2(a))$

**Definíció:** Az $f$ függvény $(n+1)$-szer differenciálható $a$-ban, ha

$\exists K(a)$, hogy $f \in \mathcal{D}^n(K(a))$ és $f^{(n)} \in \mathcal{D}(a)$

Jelölés: $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a), \quad (f \in \mathcal{D}^{n+1})(a)$
$f^{(0)} = f$

**Definíció:** $f$ végtelenszer deriválható $a$-ban, ha $\forall n \in \mathbb{N} : f \in \mathcal{D}^n(a)$

**<u>Tétel</u>:** (Leibniz)

$$f, g \in \mathcal{D}^n(a) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}^n(a) \text{ és } (f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

<u>Bizonyítás:</u> Teljes indukcióval

<u>$n = 0:$</u> $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

<u>$n = 1:$</u> $(f \cdot g)'(a) = 1 \cdot f(a) \cdot g'(a) + 1 \cdot f'(a) \cdot g(a)$

Folytatás Hf.

**<u>Tétel</u>:** Tfh. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k, \quad x \in K_R(a)$

Ekkor: $f \in \mathcal{D}^n(x_0) \quad n \in \mathbb{N}$ és

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-n+1) \cdot (x_0 - a)^{k-n} \quad (x_0 \in K_R(a))$$

Továbbá: $f^{(n)}(a) = \alpha_n \cdot n!$

<u>Bizonyítás:</u> Hf. Teljes indukcióval.

# Analízis 2.

## 6. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Előző előadás vége: a hatványsor végtelenszer deriválható.

Következmény: $\exp, \cos, \sin, ch, sh \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$

**Definíció:** Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $c \in int\mathcal{D}_f$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists K(c) \subset \mathcal{D}_f, \forall x \in K(c) : f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c))$

**Tétel:** (Elsőrendű szükséges feltétel)

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}(c)$ és $f$-nek lokális szélső értéke van $c$-ben $\Rightarrow f'(c) = 0$

Bizonyítás: Tfh. $f$-nek lokális minimuma van $c$-ben

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(c), \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D_f$

$$\exists \lim_{x \to c+0} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} \geq 0 \text{ és } \exists \lim_{x \to c-0} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to c} \tfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \underbrace{\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\leq 0} \Rightarrow f'(c) = 0 \quad \blacksquare$$

Megj: A feltétel nem elégséges, hiszen: $f(x) = x^3, \quad f'(0) = 3x^2|_{x=0}$

Jelölés: $f \in C[a, b]$ $f$ folytonos $[a, b]$-n, $\quad f \in \mathcal{D}(a, b)$ $f$ deriválható $(a, b)$-n

## Középérték-tételek

### 1. Rolle-tétel

**Tétel:** Tfh. $f \in C[a, b]$ és $f \in \mathcal{D}(a, b)$

Ha $f(a) = f(b)$, ekkor $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Bizonyítás: $f \in C[a, b] \Rightarrow$ Weierstrass-tétel miatt

$\Rightarrow \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f =: m$ és $\exists \beta \in [a, b] : f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f =: M$

1. lépés: Tfh. $m = M \Rightarrow f = m \quad ([a, b]\text{-n})$, a függvény konstans $\Rightarrow f' = 0 \quad [a, b]$-n

2. lépés: $m \neq M$ és $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow m = f(\alpha) \Rightarrow \alpha \neq a, b \Rightarrow \alpha \in (a, b)$

$\Rightarrow \alpha$-ban lokális minimum van. $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$

3. lépés: Tfh. $m \neq M$ és $m = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow M \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \beta \neq a, b \Rightarrow \beta \in (a, b) \Rightarrow \beta$-ban lokális maximum van $\Rightarrow f'(\beta) = 0 \quad \blacksquare$

Megj: Ha $c$-ben abszolút szélső érték van és $c$ belső pont, akkor $c$-ben lokális szélső érték is van.

### 2. Cauchy-tétel

**Tétel:** Tfh. $f, g \in C[a, b]$, $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$ és $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$

Ekkor: $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bizonyítás: $g(b) \neq g(a)$, hiszen különben $\exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$

Válasszuk meg $\lambda$-t úgy, hogy az $F := f - \lambda g$ függvényre alkalmazhassuk a Rolle-tételt

$F \in C[a, b], F \in \mathcal{D}(a, b), F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$\Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \blacksquare$

Megj: Ha $f(a) = f(b)$, akkor visszakapjuk a Rolle tételt.

**3. Lagrange-tétel**

**Tétel:** Tfh. $f \in C[a,b], f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \neq 0$ Így alkalmazható rá a Cauchy-tétel ■

Következmény:

**i,** $f \in \mathcal{D}(a,b)$ és $f' = 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f = c \quad (a,b)$-n

**ii,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$ és $f' = g' \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f = g + c \quad (a,b)$-n $\quad (c \in \mathbb{R})$

Bizonyítás: **i,** Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ :

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

**ii,** Alkalmazzuk az **i,**-t az $f - g$ függvényre.

## Monotonitás

**Tétel:** Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

**i,** $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton nő $(a,b)$-n

**ii,** $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton fogy $(a,b)$-n

**iii,** $f' > 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton nő $(a,b)$-n

**iv,** $f' < 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy $(a,b)$-n

Bizonyítás:

**i,** Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ :

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő.

**ii,** Ugyanígy

**iii,** A Lagrange tétel után $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$ :

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

**iv,** Ugyanígy. ■

Megj: **i,** $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (x \neq 0)$

$\not\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy, hiszen a 0-ban nincs értelmezve.

$\Rightarrow$ Az előző tételben fontos az intervallum.

**ii,** Az előző tételben a **iii,** nem fordítható meg, azaz $f \uparrow \not\Rightarrow f' > 0$ **Pl:** $f(x) = x^3$

**Tétel:** (A monotonitásra vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

**i,** $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton nő $(a,b)$-n

**ii,** $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton fogy $(a,b)$-n

**iii,** $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton nő $(a,b)$-n

**iv,** $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton fogy $(a,b)$-n

Bizonyítás: **i,** "$\Rightarrow$"✓ "$\Leftarrow$" Tfh. $f$ monoton nő és legyen $\xi \in (a,b)$ tetszőleges

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \geq 0 & , \text{ha } x \geq \xi \\ \geq 0 & , \text{ha } x < \xi \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

**ii,** Hasonló

**iii,** "$\Rightarrow$" $f' \geq 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

Indirekten Tfh. $f$ nem szigorú monoton

$\Rightarrow \exists c, d : f(c) = f(d) \Rightarrow f = f(c) \quad (c, d)$-n $\Rightarrow f' = 0 \quad (c, d)$-n, ez ellentmondás

$\Rightarrow f$ szigorú monoton nő.

"$\Leftarrow$" $f$ szigorú monoton nő $\Rightarrow f$ monoton nő. $\Rightarrow f' \geq 0$ Indirekten:

Tfh. $\exists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0 \quad (c, d)$-n$\Rightarrow f$ konstans $(c, d)$-n $\Rightarrow f$ nem szigorú monoton nő

És így ellentmondásra jutottunk $\Rightarrow \nexists (c, d) : f' = 0 \quad (c, d)$-n

**iv,** Hasonló $\blacksquare$

**Tétel:** (Elsőrendű elégséges feltétel)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a, b), c \in (a, b)$ és $f'(c) = 0$
Ha $f'$ előjelet vált $c$-ben, akkor lokális szélső értéke van $c$-ben.
Ha $f'$ negatívból pozitívba megy akkor lokális minimum.
Ha $f'$ pozitívból negatívba megy akkor lokális maximum.

Bizonyítás: Tfh. $f'$ negatívból pozitívba megy.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : f' \leq 0 \quad (c - \delta, c)$-n $\quad \Rightarrow f \searrow \quad (c - \delta, c)$-n

$f' \geq 0 \quad (c, c + \delta)$-n $\quad \Rightarrow f \nearrow \quad (c, c + \delta)$-n

$\Rightarrow f$-nek lokális minimuma van $c$-ben. $\blacksquare$

Megj: A feltétel nem szükséges

**Pl:**

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin \dfrac{1}{x}) & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

**Tétel:** (Másodrendű elégséges feltétel)

Tfh. $f \in \mathcal{D}(a, b), c \in (a, b), f'(c) = 0, f \in \mathcal{D}^2(c)$

Ha $f''(c) \neq 0$, ekkor $c$-ben lokális szélső értéke van.

Ha $f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokális minimum

Ha $f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokális maximum

Bizonyítás: Tfh. $f''(c) > 0 \Rightarrow f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \backslash \{c\}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) \quad$ és $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$

$\Rightarrow f'$ előjelet vált $c$-ben (negatívból pozitívba) $\Rightarrow f$-nek lokális minimuma van. $\blacksquare$

**Pl:** $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2$

Megj: **i,** Ha $f''(c) = 0$, akkor lokális lehet.

**ii,** $\exists$ magasabb rendű feltétel is.

# Analízis 2.

## 7. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

### Határértékek

**Kritikus esetek:** $(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty - \infty)$

**Tétel:** (L'Hospital szabály $\frac{0}{0}$ alakra)

Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b), \quad (-\infty \le a < b < \infty)$

**ii,** $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

**iii,** $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$

**iv,** $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall \xi \in (a, x_0) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $f(a) = g(a) = 0$ és legyen $x \in (a, x_0)$ tetszőleges, ekkor $f, g \in C[a,x]$ és $f, g \in \mathcal{D}(a,x)$

$\Rightarrow$ a Cauchy-középértéktétel miatt: $\exists \xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall x \in (a, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$

**ii,** Tfh. $a = -\infty$ Visszavezetjük **i,**-re

Legyen $F(y) := f(b + 1 - \frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$ és

$G(y) := g(b + 1 - \frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$

$y < 1 \Rightarrow b + 1 - \frac{1}{y} < b \Rightarrow f$ és $g$ értelmezve van a $(b + 1 - \frac{1}{y})$ pontban.

$\lim\limits_{0+0} F = \lim\limits_{y \to 0+0} f(b + 1 - \frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} f = 0$

$\lim\limits_{0+0} G = \lim\limits_{-\infty} g = 0$ Ha $\exists \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$, ekkor

$\lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{y \to 0+0} \frac{f}{g}(b + 1 - \frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g}$

$F'(y) = f'(b + 1 - \frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2}$

$G'(y) = g'(b + 1 - \frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2} \neq 0 \qquad y \in (0,1)$

$\lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} = \lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'}$ Alkalmazható **i,** $F$ és $G$-re

$\Rightarrow \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g} = \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$ és $\lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'}$ ■

**Tétel:** (L'Hospital szabály $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b), \quad (-\infty \leq a < b < \infty)$

**ii,** $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

**iii,** $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = \infty$

**iv,** $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty, A \in \mathbb{R}$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall \xi \in (a, x_0) : \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $x \in (a, x_0)$ és alkalmazzuk a Cauchy középérték-tételt az $[x, x_0]$ intervallumra

$\Rightarrow \exists \xi \in (x, x_0) : \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ Felthető, hogy $f > 0 \quad (a, x_0)$-n, hiszen $\lim\limits_{a} f = \infty$

Hasonlóan $g > 0 \quad (a, x_0)$-n.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}}_{T(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot T(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \lim\limits_{a+0} (T-1) = 0$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A) \quad \Rightarrow \quad A - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ korlátos.}$$

$$\Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$$

**ii,** $a \neq -\infty, A = \infty$ Láttuk:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot T(x)$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : T(x) > \dfrac{1}{2}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in K_\varepsilon(\infty) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1) : \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \infty = A$$

**iii,** $a \neq -\infty, A = -\infty$ Hasonló **ii,**-hez

**iv,** $a = -\infty$ Visszavezetjük az előzőre mint az előző tétel **ii,** részében. ■

Megj: **i,** A tétel igaz baloldali és mindkét oldali határértékre is.

**ii,** Lehet, hogy többször kell alkalmazni.

**iii,** A többi kritikus eset visszavezethető erre a két esetre.

**Pl:** $0 \cdot \infty, \quad f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$

Alkalmazásaikra példák

**Pl: i,** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

**ii,** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{chx - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{shx + \sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{chx + \cos x}{2} = 1$

**iii,** $\lim\limits_{x\to 0+0} x^n \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{-n \cdot x^{-n-1}} = \lim\limits_{x\to 0+0} -\frac{x^n}{n} = 0$

**iv,** $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\cdot \ln x} = 1$

## Taylor-sorok

Eml: Tfh. a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen

$f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n, \quad x \in K_R(a), \quad$ Ekkor: $f \in \mathcal{D}^{\infty}(x)$ és

$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \alpha_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (x-a)^{n-k} \quad (x \in K_R(a))$ és $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

**Definíció: i,** Ha $f \in \mathcal{D}^{\infty}(a)$, ekkor a $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ sort, az $f$ függyvény Taylor sorának nevezzük.

**ii,** Ha $f \in \mathcal{D}^{(n)}(a)$, akkor $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ az $f$-nek $n$-edik Taylor polinomja Jel: $T_n f(x)$

Problémák:

**i,** Konvergens-e a Taylor sor?

Ha igen, az összeg $= f$-el?

Állítás: Ha $f$-nek $\exists$ hatványsora, akkor ez a Taylor sor is.

**Pl:i,** $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x > -1, \quad a = 0$

$f(0) = 1, \quad f'(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f'(0) = -1$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f''(0) = 2$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-n-1}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!$

A Taylor sor: $\sum\limits_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum\limits_{n=0} (-1)^n \cdot x^n = \sum\limits_{n=0} (-x)^n$

ez konvergens $\Leftrightarrow |x| < 1, \quad$ ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad |x| < 1$

# Analízis 2.

## 8. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Előző előadás utolsó részének folyatatása

$f \rightsquigarrow \sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

**Pl: ii,**

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} : & x \neq 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$$

$a = 0 \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad k = 0{,}1, ...$

Taylor sora: $0 + 0 + ... + f(x) = f(x)$

**Tétel:** (Taylor formula Lagrange maradéktaggal)

Ha $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(K(a))$, akkor $\forall x \in K(a), \exists \xi \in (a,x) \cup (x,a) :$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Bizonyítás: Legyen $F(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$F(a) = f(a) - f(a) = 0$

$F'(x) = f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}$

$\Rightarrow F'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

$F''(x) = f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (k-1)(x-a)^{k-2}$

$F''(a) = f''(a) - f''(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{(n)}(a) = 0, \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

Legyen $G(x) = (x-a)^{(n+1)} \Rightarrow G(a) = 0$

$G'(x) = (n+1)(x-a)^n \Rightarrow G'(a) = 0, ..., G''(a) = 0$

$\Rightarrow G^{(n)}(a) = 0, \quad G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Alkalmazzuk a Cauchy középértéktételt: $\exists$ ilyen $\xi_1, \xi_2 ... \xi_{n+1}$

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{(n+1)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = ... =$$

$$= \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Legyen $\xi = \xi_{n+1}$ ■

Megj: $n = 0 : \exists \xi : f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$ Lagrange középérték tétel miatt.

**Tétel:** Tfh. $f \in \mathcal{D}^{\infty}(K(a))$ és $sup\{\left|f^{(n)}(x)\right| \quad n \in \mathbb{N}, x \in K(a)\} = M$ és $M < \infty$

Ekkor: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K(a))$

Bizonyítás: $\exists \xi \in (a,x) : \left| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right| \leq$

$\leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ ■

**Pl:** $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)} = \sin x, \quad ... \quad a = 0$

$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1 \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

## Konvexitás, Konkávitás

**Definíció:** Az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény:

**i,** konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

**ii,** szigorúan konvex, ha $<$

**iii,** konkáv, ha $\ge$

**iv,** szigorúan konkáv, ha $>$

**Pl:** Az $f(x) = \alpha x + \beta$ függvény konvex és konkáv is.

**Tétel:** $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ és $\forall x \in (x_1, x_2)$ :

$f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

Bizonyítás nélkül.

**Tétel:** (2. átfogalmazás)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow \forall r,s,t \in (a,b), r < s < t : \frac{f(s)-f(r)}{s-r} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$

Bizonyítás: Az előző tételben behelyettesítjük az alábbi értékeket: $s = x, t = x_2, r = x_1$

$f(s) \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \cdot (s - r) + f(r) \quad \blacksquare$

**Tétel:** $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

**i,** Ha $f \in \mathcal{D}(a,b)$, akkor

**a,** $f$ konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow \quad (a,b)$-n

**b,** $f$ szigorúan konvex $\Leftrightarrow f' \uparrow \quad (a,b)$-n

**ii,** Ha $f \in \mathcal{D}^2(a,b)$, akkor

**a,** $f$ konvex $\Leftrightarrow f'' \ge 0 \quad (a,b)$-n

**b,** $f$ szigorúan konvex $\Leftarrow f'' > 0 \quad (a,b)$-n

$\not\Rightarrow$ **Pl:** $f(x) = x^4$

Bizonyítás: Elég **i,**-t bizonyítani

**a,** "$\Rightarrow$" Tfh. $f$ konvex

Legyen $x_1 < x_2$ tetszőleges és $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$

$$\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2}$$

$\lim\limits_{y_1 \to x_1+0} \frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} = f'(x_1)$ és $\lim\limits_{y_2 \to x_2-0} \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2} = f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) \le f'(x_2) \Rightarrow f' \nearrow$

"$\Leftarrow$" Tfh. $f' \nearrow$ Elég:

$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, x \in (x_1,x_2) : f(x) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

Azaz $r(x) := f(x) - (\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)) \le 0 \quad \Rightarrow \quad r(x_1) = 0, \quad r(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ Rolle középértéktétel miatt: $\exists \xi \in (x_1, x_2) : r'(\xi) = 0$

$r'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \nearrow$

$\Rightarrow r' \le 0 \quad (x_1, \xi)$-n $\quad \Rightarrow r \searrow \quad (x_1, \xi)$-n és

$r' \ge 0 \quad (\xi, x_2)$-n $\quad \Rightarrow r \nearrow \quad (\xi, x_2)$-n

$\Rightarrow r \le 0 \quad (x_1, x_2)$-n

**b,** Hasonló $\blacksquare$

**Definíció:** $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b), f\in\mathcal{D}(x_0)$

$x_0$ infelxiós pontja $f$-nek, ha $l(x) := f(x) - (\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{érintő}})$ szigorúan előjelet vált

azaz $\exists\delta>0, l(x)<0, \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ és $l(x)>0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ vagy fordítva

**<u>Tétel</u>:** $f\in\mathcal{D}(a,b), x_0\in(a,b)$ Ha $\exists\delta>0, f$ szigorúan konvex $(x_0-\delta,x_0)$-n és $f$ szigorúan konkáv $(x_0,x_0+\delta)$-n, akkor $x_0$ inflexiós pont.

<u>Bizonyítás:</u> $f$ szigorúan konvex $\Rightarrow f'\uparrow \quad (x_0-\delta,x_0)$-n

$f$ szigorúan konkáv $\Rightarrow f'\downarrow \quad (x_0,x_0+\delta)$-n

$l'(x)=f'(x)-f'(x_0)\Rightarrow l'(x_0)=0$

$$\left.\begin{array}{llllll} l'\uparrow & (x_0-\delta,x_0)\text{-n} & \Rightarrow & l'<0 \quad (x_0-\delta,x_0)\text{-n} & \Rightarrow & l\downarrow(x_0-\delta,x_0)\text{-n} \\ l'\downarrow & (x_0,x_0+\delta)\text{-n} & \Rightarrow & l'<0 \quad (x_0,x_0+\delta)\text{-n} & \Rightarrow & l\downarrow(x_0,x_0+\delta)\text{-n} \end{array}\right\}\Rightarrow l\downarrow \quad (x_0-\delta,x_0+\delta)\text{-n}$$

**De!** $l(x_0)=0\Rightarrow l>0 \quad (x_0-\delta,x_0)$ és $l<0 \quad (x_0,x_0+\delta)$ ■

**<u>Tétel</u>:** $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b)$

**i,** Ha $f$ kétszer folytonosan deriválható és $x_0$ inflexiós pont, ekkor $f''(x_0)=0$

**ii,** Ha $f$ háromszor folytonosan deriválható és $f''(x_0)=0$ és $f'''(x_0)\neq 0$, ekkor $x_0$ inflexiós pont.

<u>Bizonyítás:</u> **i,** Indirekten Tfh. $f''(x_0)\neq 0$, pl: $f''(x_0)>0$

$f''$ folytonos $\Rightarrow \exists K(x_0): f''>0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula

$$n=1:\exists\xi:\underbrace{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}_{l(x)}=\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow l$ nem vált előjelet $\Rightarrow x_0$ nem inflexiós pont.

**ii,** Tfh. $f'''(x_0)>0\Rightarrow\exists K(x_0): f'''>0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula $n=2:$

$$\exists\xi: l(x)=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\tfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2)=\underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}_{>0}\cdot(x-x_0)^3 \quad x\in K(x_0)$$

A jobb oldal szigorúan előjelet vált $\Rightarrow$ $x_0$ inflexiós pont. ■

# Analízis 2.

## 9. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

**Tétel:** Tfh. $f : (a,b) \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}^{(n)}(c), c \in (a,b)$

$f'(c) = 0 = f''(c) = ... = f^{(n-1)}(c), \quad f^{(n)}(c) \neq 0$ Ekkor:

**i,** $c$-ben lokális szélső értéke van $\Leftrightarrow n$ páros

**ii,** Ha $f$ $n$-szer folytonosan deriválható, akkor $c$-ben inflexiós pont van $\Leftrightarrow n$ páratlan.

Bizonyítás nélkül.

## Integrált

2 féle integrált lehet:

- Határozatlan integrált (primitív függvény)
- Határozott integrált

Határozatlan integrált

Kérdés: $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ekkor $\exists$-e: $F : I \to \mathbb{R}, F' = f$

**Pl:** $f(x) = x^4 + x^2, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Megj: A függvények mindig intervallumon vannak értelmezve.

**Definíció:** $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$

Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az $f$ primitív függvénye, ha $F \in \mathcal{D}(I)$ és $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$

Kérdések:

- $\exists$-e primitív függvény?
- Ha igen, akkor hány $\exists$?
- Primitív függvény meghatározása

**Tétel:** (Szükséges feltétel)

Ha $I$ intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek $\exists$ primitív függvénye, akkor $f$ Darboux tulajdonságú, azaz $\forall a, b \in I, a < b, \forall c \in (f(a), f(b)), \exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = c$

Bizonyítás: Tfh. $f(a) < f(b)$, legyen $f_1 = f - c$, $f_1$-nek is $\exists$ primitív függvénye, mégpedig $F_1(x) = F(x) - cx$, ahol $F$ az $f$ primitív függvénye, hiszen $F_1'(x) = F'(x) - c = f(x) - c = f_1(x)$

Ekkor: $F_1'(a) = f_1(a) = f(a) - c < 0$

$F_1'(b) = f_1(b) = f(b) - c > 0$

$\Rightarrow F_1'(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{F_1(x) - F_1(a)}{x - a} = f_1(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a+\delta) : \frac{F_1(x) - F_1(a)}{x-a} < 0$

itt $x - a > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a+\delta) : F_1(x) < F_1(a)$

$F_1'(b) = \lim\limits_{x \to b-0} \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} = f_1(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in (b-\delta, b) : \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x-b} > 0$

$x - b < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (b-\delta, b) : F_1(x) < F_1(b) \quad \Rightarrow F_1 \in \mathcal{D}(I) \Rightarrow F_1 \in C[a,b]$

A Weierstrass-tétel miatt $F_1$-nek $\exists$ abszolút minimuma, azaz $\exists \xi \in [a,b] : F_1(\xi) = \min\limits_{[a,b]} F_1$

$\xi \neq a, \xi \neq b \Rightarrow \xi \in (a,b) \Rightarrow \xi$-ben lokális minimum $\Rightarrow F_1'(\xi) = 0 \Rightarrow f_1(\xi) = f(\xi) - c = 0 \quad \blacksquare$

**Pl:** $f(x) = signx \quad \nexists$ primitív függvény, mert nem Darboux tulajdonságú

**Tétel:** (Elégséges feltétel)

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists$ primitív függvény

Bizonyítás később

**Tétel:** (Primitív függvények száma) $\quad f : I \to \mathbb{R}$

**i,** Ha $F$ primitív függvény, akkor $F + c$ is az, ahol $c \in \mathbb{R}$

**ii,** Ha $F_1$ és $F_2$ is primitív függvény, akkor $\exists c \in \mathbb{R} : F_1 = F_2 + c$

Bizonyítás: **i,** $(F + c)' = F' = f$

**ii,** $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \quad I\text{-n} \quad \Rightarrow F_1 - F_2 = c \quad c \in \mathbb{R}$ ■

**Definíció:** Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye $F$, akkor legyen:

$$\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Neve határozatlan integrál

Egyszerűsített jelölés: $\int f = F + c \quad c \in \mathbb{R}$ vagy $\int f(x)dx = F(x) + c$

**Pl: i,** $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c \quad x \in \mathbb{R}$

**ii,** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \quad x \in \mathbb{R}$

**iii,** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**Definíció:** $\int\limits_{x_0} f$ jelöli azt az egyetlen $F$ primitív függvényt, amelyre $F(x_0) = 0$

Neve: $x_0$-ban eltűnő primitív függvény

**Pl:** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x - 1$

Primitív függvények meghatározása

**Pl: i,** $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, x > 0$

**ii,**

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + c : & x > 0 \\ \ln|x| + c \quad : & x < 0 \end{cases}$$

**Tétel:** (Műveletek) $\quad f, g : I \to \mathbb{R}$

$\exists \int f, \int g \quad$ Ekkor

$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$

$\int\limits_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_{x_0} f + \beta \int\limits_{x_0} g \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bizonyítás: elég a másodikat, legyen a jobb oldal $H$

Ekkor $H(x_0) = 0, \quad H' = \alpha f + \beta g \Rightarrow H$ egyenlő a baloldallal is ■

**Pl:**polinom: $\int a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c$

**Tétel:** (Hatványsor)

A $\sum \alpha_n (x - a)^n, x \in K_R(a), R > 0$, hatványsor primitív függvénye:

$\sum\limits_{n=0} \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c, \quad x \in K_R(a)$

Bizonyítás nélkül (a hatványsor deriválhatóságából kijön)

**Tétel:** (Parciális integrálás) Tfh. $f,g : I \to \mathbb{R}, f,g \in \mathcal{D}(I)$

Ha $\exists f' \cdot g$ primitív függvénye, akkor $\exists f \cdot g'$ primitív függvénye, és

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$ és $\int\limits_{x_0} f \cdot g' = f \cdot g - f(x_0) \cdot g(x_0) - \int\limits_{x_0} f' \cdot g$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$

$\Rightarrow H(x_0) = 0$ és $H' = (f \cdot g)' - (\int\limits_{x_0} f' \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f' \cdot g = f \cdot g' \Rightarrow H$ a baloldal is $\blacksquare$

Megj: $\int\limits_{x_0} f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) - \int\limits_{x_0} f'(x) \cdot g(x)dx$

**Pl: i,** $f = x \quad g' = e^x \quad g(x) = e^x$

$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

**ii,** $\int \ln x dx = \int \ln 1 \cdot x dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - x + c \quad x > 0$

**Tétel:** (1. helyettesítéses szabály)

$g : I \to J, g \in \mathcal{D}(I), f : J \to \mathbb{R}, I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum

Ha $\exists f$-nek primitív függvénye, akkor

$\int f \circ g \cdot g' = (\int f) \circ g$ és

$\int\limits_{t_0} f \circ g \cdot g' = (\int\limits_{g(t_0)} f) \circ g$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$

$\Rightarrow H(t_0) = (\int\limits_{g(t_0)} f) \circ g(t_0) = 0$ és $H' = (\int\limits_{g(t_0)} f)' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g' \Rightarrow H$ a bal oldal is. $\blacksquare$

**Pl: i,** $\int x(1+x^2)^{2017}dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{2017}dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{2018}}{2018} + c$

$g(x) = 1 + x^2 \qquad f(u) = u^{2017} \qquad \int f = \frac{u^{2018}}{2018}$

**ii,** $\int \frac{g'}{g} = \ln g + c, \quad g > 0$

$f(u) = \frac{1}{u}, \quad f \circ g \cdot g' = \frac{1}{g} \cdot g'$

**iii,** $\int g^\alpha \cdot g' dx = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$

$f(u) = u^\alpha \qquad f \circ g \cdot g' = g^\alpha \cdot g'$

**Tétel:** (2. helyettesítéses szabály)

Tfh. $g : I \to J$ bijekció, $g \in \mathcal{D}(I), \quad g'(x) \neq 0, \quad x \in I, \quad f : I \to J$

Ha $\exists f \circ g \cdot g'$ primitív függvény, ekkor:

$\int f = (\int f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$ és $\int\limits_{x_0} f = (\int\limits_{x_0} f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$

Bizonyítás: A jobb oldal legyen $H$, azaz:

$H(x) = (\int\limits_{x_0} f \circ g \cdot g') \circ (g^{-1}(x)) \Rightarrow H(x_0) = 0$ és $H'(x) = (\int f \circ g \cdot g')' \cdot (g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) =$

$= (f \circ g \cdot g') \cdot (g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f \circ g(g^{-1}(x)) \cdot \cancel{g'(g^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1}(x))}} = f(x) \Rightarrow H$ a bal oldal is $\blacksquare$

Megj: $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)}$

**Pl:** $\int \sqrt{1-x^2}dx \quad x \in (-1{,}1) \quad x = \sin t$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t} \cdot \cos t dt|_{t=\arcsin x}$

# Analízis 2.

## 10. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Múlt heti példa folytatása:

**Pl:** $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt \mid_{t=arcsinx} = \int \cos^2 t dt \mid_{t=arcsinx} = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \mid_{t=arcsinx} =$

$x = \sin t \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad x' = \frac{dx}{dt} = \cos t \quad (\cos t \geq 0)$

$= \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) \mid_{t=arcsinx} + c = \frac{1}{2}(arcsinx + x\sqrt{1-x^2}) + c$

$\cos 2t = \cos^2 t - \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} = 2\cos^2 t - 1 \qquad \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

**Definíció:** Legyen $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$
$f_4(x) = \ln x, (x > 0) \quad f_5(x) = \sin x, (x \in \mathbb{R}) \quad f_6(x) = arcsinx, x \in ([-1,1])$

$f$ elemi függvény, ha előáll az előző 6 függvény a 4 algebrai művelet, a leszűkítés, a kompozíció és az inverz véges sokszori alkalmazásával

**Tétel:** Elemi függvény deriváltja elemi

**Tétel:** (Elemi függvénynek $\exists$ primitív függvénye)

Bizonyítás: Az elemi függvény folytonos ■

Megj: De nem biztos, hogy a primitív függvény elemi függvény is

**Pl:** Nem elemi függvények:

$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int e^{-x^2}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx, \int \sqrt{1+x^3}dx$

**Pl:** $(x > 0) \quad \int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...}{x}dx = \int \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...dx = \ln x + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + ...$

## Határozott integrál

*Motiváció:* Síkidomok területe

**Definíció:** $K[a,b]$ jelöli az $[a,b]$ korlátos zárt intervallumon a korlátos függvényeket

**Definíció:** A $\tau = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ halmaz felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, ha

$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad$ Jelölés: $F[a,b]$

**Definíció:** $\tau_2$ finomabb felbontás mint $\tau_1$, ha $\tau_2 \supset \tau_1$

**Definíció:** $f \in K[a,b], \tau \in F[a,b]$

**i,** $s(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ ez az alsó közelítő összeg

**ii,** $S(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ ez a felső közelítő összeg

**Tétel:** $f \in K[a,b], \tau_1, \tau_2 \in F[a,b]$, Ekkor:

**i,** Ha $\tau_2 \supset \tau_1$, akkor $s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2)$ és $S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$

**ii,** $s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$

Bizonyítás: **i,** Ha $\tau_2 \supset \tau_1$, ekkor feltehető, hogy $\tau_2 = \tau_1 \cup \{x'\}$ $\quad x' \in [x_{k-1}, x_k]$

$s(f,\tau_1) \rightsquigarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x' - x_{k-1}) + \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x') \leq$

$\leq \inf\limits_{[x_{k-1},x']} f \cdot (x' - x_{k-1}) + \inf\limits_{[x',x_k]} f \cdot (x_k - x') \rightsquigarrow s(f,\tau_2)$ $\quad$ (a többi összeadandó ugyanaz)

$\Rightarrow s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2)$

Hasonló: $S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$

**ii,** $\tau_1$ és $\tau_2$ tetszőleges, legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau) \leq S(f,\tau) \leq S(f,\tau_2)$ ∎

Következmény: Az alsó közelítő összegek felülről korlátosak.

A felső közelítő összegek alulról korlátosak.

**Definíció:** $f \in K[a,b]$

**i,** $I_* f := \sup\limits_{\tau \in F[a,b]} s(f,\tau)$ $\quad$ a Darboux féle alsó integrál

**ii,** $I^* f := \inf\limits_{\tau \in F[a,b]} S(f,\tau)$ $\quad$ a Darboux féle felső integrál

Következmény: $I_* f \leq I^* f$

Bizonyítás: $s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$ ∎

**Definíció:** $f \in K[a,b]$ függvénynek $\exists$ határozott integrálja, vagy Riemann integrálható, ha $I_* f = I^* f$

Jelölés: $f \in R[a,b]$

$I_* f = I^* f = If = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx$

Kérdés:

- Milyen függvény Riemann integrálható?
- Hogy számoljuk ki?

**Pl:** $x \in [0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \notin R[0,1], \quad s(f,\tau) = 0, \quad S(f,\tau) = 1$

**Tétel:** Ha $f \in C[a,b]$, akkor $f \in R[a,b]$

Bizonyítás: Lásd később

**Definíció:** $f \geq 0, \quad f \in R[a,b]$ $\quad$ Legyen $A := \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$

$A$ területe $t(A) = \int\limits_a^b f$

**Definíció:** $\Omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$ $\quad$ oszcillációs összeg

**Tétel:** (szükséges és elégséges feltétel)

$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in F[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

Bizonyítás: "$\Leftarrow$" Tfh. $\varepsilon$-hoz $\exists \tau : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

$I^* f - I_* f < \varepsilon, \quad \varepsilon$ tetszőleges

$\Rightarrow I^* f = I_* f$

"$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 \in F[a,b] : If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq If$

Hasonlóan: $\exists \tau_2 \in F[a,b] : If \leq S(f,\tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow$

$If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq \underline{s(f,\tau)} \leq If \leq \underline{S(f,\tau)} \leq S(f,\tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon \quad \blacksquare$

**Tétel:**

$f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = I \Leftrightarrow \exists \tau_n : \lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I$

Bizonyítás: "$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a,b]$ :

Előző bizonyítás vége: legyen $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}, \quad \tau = \tau_n$

$$\underbrace{I - \frac{1}{n}}_{\to I} \leq \underbrace{s(f,\tau_n)}_{\to I} \leq \underbrace{S(f,\tau_n)}_{\to I} < \underbrace{I + \frac{1}{n}}_{\to I}$$

"$\Leftarrow$" Tfh. $\lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I \Rightarrow I_* f = I^* f = I \quad \blacksquare$

**Pl:** $f(x) = x^2, \quad x \in [0,1]$ Legyen $x_0 = 0, x_i = \frac{i}{n}$

$$S(f,\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$s(f,\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

**Definíció:** $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ahol

$\tau \in F[a,b], \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$

$\xi_1 \in [x_0, x_1], ..., \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ a Riemann féle közelítő összeg

Jelölés: $|\tau| = \max\limits_{i=1,...,n} |x_i - x_{i-1}|$

**Tétel:** $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim \sigma(f,\tau,\xi) = I$ és $\int\limits_a^b f = I$

azaz $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \tau, |\tau| < \delta, \forall \xi : |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$

# Analízis 2.

## 11. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

**Tétel:** (Műveletek integrálokkal)

Tfh. $f, g \in R[a,b]$ Ekkor:

**i,** $f+g \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

**ii,** $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**iii,** $f \cdot g \in R[a,b]$

**iv,** Ha $|g(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in [a,b]$, akkor $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

Bizonyítás: Legyen $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in F[a,b]$,

$F_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad f_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \quad G_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} g \quad g_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} g$

**i,** $f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i + g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq F_i + G_i \qquad / \cdot (x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq S(f+g,\tau) \leq S(f,\tau) + S(g,\tau)$

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in F[a,b]$ tetszőleges és $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \leq s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq S(f+g,\tau) \leq$

$\leq S(f,\tau) + S(g,\tau) \leq S(f,\tau_1) + S(g,\tau_2) \quad / \cdot \sup\limits_{\tau_1}, \inf\limits_{\tau_1}, \sup\limits_{\tau_2}, \inf\limits_{\tau_2}$

$\Rightarrow I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g),$ Mivel $I_*(f) = I^*(f)$ (ugyanez $g$-re)

$\Rightarrow I_*(f+g) = I^*(f+g)$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

**ii,** Tfh. $\lambda \geq 0 \Rightarrow s(\lambda f, \tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \qquad (\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} \lambda f = \lambda \cdot \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$ Hasonlóan: $S(\lambda f, \tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

Tfh. $\lambda < 0$

$s(\lambda f, \tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$ és $S(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

**iii,** Oszcillációs összeggel: Tfh. $f, g \geq 0 \quad [a,b]$-n

$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i \cdot g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq F_i \cdot G_i$

$\Omega(f \cdot g, \tau) = \sum\limits_{i=1}^n (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - F_i \cdot g_i + F_i \cdot g_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n F_i (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum\limits_{i=1}^n g_i (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$f \in R[a,b] \Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow F_i \leq M$ és $g_i \leq M \quad \forall i = 1, ..., n$

$\Rightarrow \Omega(f \cdot g, \tau) \leq M \cdot \Omega(g, \tau) + M \cdot \Omega(f, \tau)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 : \Omega(g, \tau_1) < \varepsilon$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_2 : \Omega(f, \tau_2) < \varepsilon$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow \Omega(g, \tau) \leq \Omega(g, \tau_1) < \varepsilon$ Hasonlóan: $\Omega(f, \tau) \leq \Omega(f, \tau_2) < \varepsilon$

$\Rightarrow \Omega(f \cdot g, \tau) < 2\varepsilon M \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

Ha $f$ és $g$ tetszőleges, akkor legyen $m_f := \inf\limits_{[a,b]} f, \quad m_g := \inf\limits_{[a,b]} g \Rightarrow \underbrace{f - m_f}_{\in R[a,b]} \geq 0, \quad \underbrace{g - m_g}_{\in R[a,b]} \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{(f - m_f)(g - m_g)}_{\in R[a,b]} = f \cdot g \underbrace{-g \cdot m_f - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a,b]} \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

**iv,** Elég: $\frac{1}{g} \in R[a, b]$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2} \Rightarrow \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

$\Rightarrow \Omega(\frac{1}{g}, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{m^2} \Omega(g, \tau)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau, \Omega(g, \tau) < \varepsilon \Rightarrow \Omega(\frac{1}{g}, \tau) \leq \frac{\varepsilon}{m^2}$ ■

<u>**Tétel**</u>**:** Legyen $c \in [a, b]$, ekkor:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c]$ és $f \in R[c, b]$ Ekkor: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

<u>Bizonyítás nélkül</u>

**Definíció:** $\int\limits_a^b f = 0, \quad a > b : \int\limits_a^b f = -\int\limits_a^b f$

<u>**Tétel**</u>**:** $f \in R[A, B], \quad a, b, c \in [A, B]$ Ekkor: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

<u>**Tétel**</u>**:** Ha $f \in C[a, b]$, ekkor $f \in R[a, b]$

<u>Bizonyítás:</u> Ha $f \in C[a, b] \Rightarrow$ Heine tétel miatt $f$ egyenletesen folytonos, azaz

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Legyen $\tau \in F[a, b]$ olyan, hogy $|\tau| < \delta$

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|}_{< \varepsilon} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \cdot (b - a)$$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$ ■

<u>**Tétel**</u>**:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, ekkor $f \in R[a, b]$

<u>Bizonyítás:</u> Hasonlóan Tfh. $f \nearrow$

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Tfh. $|\tau| < \delta \Rightarrow \Omega(f, \tau) \leq \delta \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$

Ha a $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \Rightarrow f \in R[a, b]$ ■

<u>**Tétel**</u>**:** $f$ értékeit véges sok pontban megváltoztatom ($\tilde{f}$),

ha $f \in R[a, b]$, akkor $\tilde{f} \in R[a, b]$ és $\int\limits_a^b \tilde{f} = \int\limits_a^b f$

**Definíció:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos, ha $\exists \tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in F[a,b]$, hogy $f \in C(x_{i-1}, x_i)$ és $\exists \lim\limits_{x_i+0} f, \exists \lim\limits_{x_i-0} f$ és végesek $i = 1, ..., n$

**Tétel:** Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos, akkor $f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f$

Bizonyítás: $f \in C(x_{i-1}, x_i) \Rightarrow f \in R[x_{i-1}, x_i]$ ■

**Tétel:** $f, g \in R[a,b]$

**i,** Ha $f \geq 0$, akkor $\int\limits_a^b f \geq 0$

**ii,** Ha $f \geq g$, akkor $\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: **i,** $f \geq 0 \Rightarrow s(f,\tau) \geq 0 \Rightarrow I_*(f) = \int\limits_a^b f \geq 0$

**ii,** $f - g \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b (f-g) \geq 0$ ■

**Tétel:** Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$ és $-\left|\int f\right| \leq \left|\int f\right| \leq \int |f|$

Bizonyítás: $\Omega(|f|,\tau) = \sum\limits_{i=1}^n (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} |f| - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} |f|) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n \sup\limits_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} ||f(y)| - |f(x)|| \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sup\limits_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(y) - f(x)| \cdot (x_i - x_{i-1}) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

$\Rightarrow |f| \in R[a,b]$ ■

# Analízis 2.

## 12. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Megj előző előadás végéhez: $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$

$$\not\Leftarrow$$

**Pl:** $x \in [0{,}1]$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \notin R[0{,}1]$, de $|f| = 1 \in R[0{,}1]$

**Tétel:** (1. középértéktétel)

Tfh. $f, g \in R[a,b], g \geq 0, m := \inf f$ és $M := \sup f$, ekkor: $\quad m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: $\quad m \leq f \leq M \Rightarrow m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$

$\Rightarrow \int\limits_a^b m \cdot g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq \int\limits_a^b M \cdot g \Rightarrow m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g \quad \blacksquare$

**Tétel:** (2. középértéktétel)

Tfh. $g \in R[a,b], g \geq 0, f \in C[a,b]$, ekkor: $\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g$

Bizonyítás: $\quad$ Előző tétel miatt: $m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g$

$\Rightarrow \exists c \in [m, M] : \int\limits_a^b f \cdot g = c \cdot \int\limits_a^b g$

$f \in C[a,b] \Rightarrow m$ az abszolút minimum és $M$ az abszolút maximum a Weierstrass-tétel miatt
$\Rightarrow M$-et és $m$-et is felveszi $f$ értékként $\Rightarrow$ Bolzano-tétel miatt minden közbülső értéket is felvesz, így $c$-t is $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : c = f(\xi) \quad \blacksquare$

**Tétel:** (Newton-Leibniz formula)

Ha $f \in R[a,b]$ és $f$-nek $\exists F$ primitív függvénye, akkor: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Jelölés: $\big[F\big]_a^b$

Bizonyítás: $\quad$ Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\} \in F[a,b]$

$\Rightarrow F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + ... + F(x_1) - F(x_0) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$ Alkalmazzuk a Lagrange középértéktételt az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon

$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] : F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) \leq S(f,\tau) \quad$ /sup a bal oldalon és inf a jobb oldalon

$\Rightarrow I_* f \leq F(b) - F(a) \leq I^* f \qquad$ Mivel $I_* f = I^* f = \int\limits_a^b f \Rightarrow F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f \quad \blacksquare$

**Pl: i,** $\int\limits_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

**ii,** Félkör területe: $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1{,}1]$

$$T = \int\limits_{-1}^{1} f = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Megj: Egyik feltétel sem hagyható el, pl:

**i,** $\exists f \in R[a,b]$, de $\nexists$ primitív függvény

$f(x) = sign(x) \quad x \in [-1{,}1]$

$f$ szakaszonként folytonos $\Rightarrow f \in R[-1{,}1]$, de $\nexists$ primitív függvény, mert nem Darboux-tulajdonságú

**ii,** $\exists f : [a,b] \to \mathbb{R}, \exists F$ primitív függvény, de $f \notin R[a,b]$ (nehéz)

**Definíció:** Ha $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$, akkor: $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f \quad (x \in [a,b])$ az $f$ integrál függvénye

**Tétel:** (A differenciál- és integrálszámítás alaptétele)

Legyen $f \in R[a,b], x_0 \in [a,b], F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f \quad (x \in [a,b])$, ekkor:

**i,** $F \in C[a,b]$

**ii,** Ha $f \in C(d)$, akkor $F \in D(d)$ és $F'(d) = f(d) \quad (d \in [a,b])$

Bizonyítás: **i,** $f \in R[a,b] \Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow \exists M : |f| \leq M$

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_2} f - \int\limits_{x_0}^{x_1} f\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} |f|\right| \leq M \cdot |x_2 - x_1| \Rightarrow x_2 \to x_1 \Rightarrow F(x_2) \to F(x_1)$$

$\Rightarrow F \in C(x_1) \quad x_1$ tetszőleges

**ii,** Igazolni kell, hogy $f(d) = F'(d) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(d+h) - F(d)}{h}$, azaz $\lim\limits_{h\to 0} \left|\dfrac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d)\right| = 0$

$$\left|\frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d)\right| = \left|\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} f(t)dt - f(d)\right| = \left|\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} f(t) - f(d)dt\right| \leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} |f(t) - f(d)|dt$$

$f \in C(d) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [a,b], |t-d| < \delta : |f(t) - f(d)| < \varepsilon$

Legyen $|h| < \delta \Rightarrow |t - d| \leq |h| < \delta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |h| < \delta : \left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \left|\frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d)\right| = 0 \quad \blacksquare$$

Megj: Ha $d = a$ vagy $d = b$, akkor jobb vagy bal oldali deriváltról van szó

Következmény: Ha $f \in C[a,b]$, akkor $F \in \mathcal{D}[a,b]$ és $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$

Következmény: Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\exists$ primitív függvénye

**Tétel:** (Parciális integrálás)

Ha $f, g \in \mathcal{D}[a,b]$ és $f', g' \in R[a,b]$, akkor $\int\limits_{a}^{b} f' \cdot g = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_{a}^{b} f \cdot g'$

Bizonyítás: $f' \cdot g + f \cdot g'$ primitív függvénye $f \cdot g$

$$\Rightarrow \int\limits_{a}^{b} f' \cdot g + f \cdot g' = \left[f \cdot g\right]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) \quad \blacksquare$$

**Tétel:** (Helyettesítés)

Tfh. $f \in R[a,b], g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ differenciálható bijekció és $g' \neq 0$, ekkor: $\int\limits_a^b f = \int\limits_\alpha^\beta f \circ g \cdot g'$

Bizonyítás: $f$-nek $\exists$ primitív függvénye: $(\int\limits_\alpha f \circ g \cdot g') \circ g^{-1}$

$$\int\limits_a^b f = \left[ (\int\limits_\alpha f \circ g \cdot g') \circ g^{-1} \right]_a^b = \int\limits_\alpha^\beta f \circ g \cdot g' \quad \blacksquare$$

**Alkalmazás**

1. Terület: $T(H) = \int\limits_a^b f, \quad f \geq 0$
2. Ívhossz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \gamma = \{(x, f(x)), x \in [a,b]\}$ az $f$ grafikonja

   $\tau \in F[a,b] : l(\gamma, \tau) =$ töröttvonal hossza

   $l(\gamma) = \sup\limits_{\tau \in F[a,b]} l(\gamma, \tau)$ a $\gamma$ ívhossza

   **Tétel:** Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható, ekkor $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
3. Térfogat $f \geq 0 \quad H := \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ forgástest

   **Tétel:** $V(H) = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2 \quad (f \in R[a,b])$
4. Felszín:

   **Tétel:** Ha $f$ folytonosan differenciálható, akkor: $F(H) = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$