Analízis 2.

10. Előadás jegyzet

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

Múlt heti példa folytatása:

Pl: $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt \mid_{t=arcsinx} = \int \cos^2 t dt \mid_{t=arcsinx} = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt \mid_{t=arcsinx} =$

$x = \sin t \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad x' = \frac{dx}{dt} = \cos t \quad (\cos t \geq 0)$

$= \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) \mid_{t=arcsinx} + c = \frac{1}{2}(arcsinx + x\sqrt{1-x^2}) + c$

$\cos 2t = \cos^2 t - \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} = 2\cos^2 t - 1 \qquad \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

Definíció: Legyen $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$
$f_4(x) = \ln x, (x > 0) \quad f_5(x) = \sin x, (x \in \mathbb{R}) \quad f_6(x) = arcsinx, x \in ([-1,1])$

f elemi függvény, ha előáll az előző 6 függvény a 4 algebrai művelet, a leszűkítés, a kompozíció és az inverz véges sokszori alkalmazásával

Tétel: Elemi függvény deriváltja elemi

Tétel: (Elemi függvénynek $\exists$ primitív függvénye)

Bizonyítás: Az elemi függvény folytonos ■

Megj: De nem biztos, hogy a primitív függvény elemi függvény is

Pl: Nem elemi függvények:

$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int e^{-x^2}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx, \int \sqrt{1+x^3}dx$

Pl: $(x > 0) \quad \int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...}{x}dx = \int \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...dx = \ln x + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + ...$

Határozott integrál

Motiváció: Síkidomok területe

Definíció: $K[a,b]$ jelöli az $[a,b]$ korlátos zárt intervallumon a korlátos függvényeket

Definíció: A $\tau = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ halmaz felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, ha

$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad$ Jelölés: $F[a,b]$

Definíció: τ_2 finomabb felbontás mint τ_1, ha $\tau_2 \supset \tau_1$

Definíció: $f \in K[a,b], \tau \in F[a,b]$

i, $s(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ ez az alsó közelítő összeg

ii, $S(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ ez a felső közelítő összeg

Tétel: $f \in K[a,b], \tau_1, \tau_2 \in F[a,b]$, Ekkor:

i, Ha $\tau_2 \supset \tau_1$, akkor $s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2)$ és $S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$

ii, $s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$

Bizonyítás: **i,** Ha $\tau_2 \supset \tau_1$, ekkor feltehető, hogy $\tau_2 = \tau_1 \cup \{x'\}$ $x' \in [x_{k-1}, x_k]$

$$s(f,\tau_1) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x' - x_{k-1}) + \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x') \leq$$

$$\leq \inf_{[x_{k-1},x']} f \cdot (x' - x_{k-1}) + \inf_{[x',x_k]} f \cdot (x_k - x') \rightsquigarrow s(f,\tau_2) \qquad \text{(a többi összeadandó ugyanaz)}$$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2)$

Hasonló: $S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$

ii, τ_1 és τ_2 tetszőleges, legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau) \leq S(f,\tau) \leq S(f,\tau_2)$ ■

Következmény: Az alsó közelítő összegek felülről korlátosak.

A felső közelítő összegek alulról korlátosak.

Definíció: $f \in K[a,b]$

i, $I_* f := \sup_{\tau \in F[a,b]} s(f,\tau)$ a Darboux féle alsó integrál

ii, $I^* f := \inf_{\tau \in F[a,b]} S(f,\tau)$ a Darboux féle felső integrál

Következmény: $I_* f \leq I^* f$

Bizonyítás: $s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$ ■

Definíció: $f \in K[a,b]$ függvénynek $\exists$ határozott integrálja, vagy Riemann integrálható, ha $I_* f = I^* f$

Jelölés: $f \in R[a,b]$

$$I_* f = I^* f = If = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$$

Kérdés:

- Milyen függvény Riemann integrálható?
- Hogy számoljuk ki?

Pl: $x \in [0{,}1]$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \notin R[0{,}1]$, $s(f,\tau) = 0$, $S(f,\tau) = 1$

Tétel: Ha $f \in C[a,b]$, akkor $f \in R[a,b]$

Bizonyítás: Lásd később

Definíció: $f \geq 0$, $f \in R[a,b]$ Legyen $A := \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$

A területe $t(A) = \int_a^b f$

Definíció: $\Omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$ oszcillációs összeg

Tétel: (szükséges és elégséges feltétel)

$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in F[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

Bizonyítás: "$\Leftarrow$" Tfh. ε-hoz $\exists \tau : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$

$I^* f - I_* f < \varepsilon$, ε tetszőleges

$\Rightarrow I^* f = I_* f$

"$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\tau_1 \in F[a,b] : If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq If$

Hasonlóan: $\exists\tau_2 \in F[a,b] : If \leq S(f,\tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow$

$If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq \underline{s(f,\tau)} \leq If \leq \underline{S(f,\tau)} \leq S(f,\tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon \quad \blacksquare$

<u>Tétel</u>:

$f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = I \Leftrightarrow \exists\tau_n : \lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I$

<u>Bizonyítás</u>: "$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a,b]$:

Előző bizonyítás vége: legyen $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}, \quad \tau = \tau_n$

$$\underbrace{I - \frac{1}{n}}_{\to I} \leq \underbrace{s(f,\tau_n)}_{\to I} \leq \underbrace{S(f,\tau_n)}_{\to I} < \underbrace{I + \frac{1}{n}}_{\to I}$$

"$\Leftarrow$" Tfh. $\lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I \Rightarrow I_* f = I^* f = I \quad \blacksquare$

Pl: $f(x) = x^2, \quad x \in [0,1]$ Legyen $x_0 = 0, x_i = \frac{i}{n}$

$$S(f,\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$s(f,\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Definíció: $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ahol

$\tau \in F[a,b], \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$

$\xi_1 \in [x_0,x_1], ..., \xi_n \in [x_{n-1},x_n]$ a Riemann féle közelítő összeg

Jelölés: $|\tau| = \max\limits_{i=1,...,n} |x_i - x_{i-1}|$

<u>Tétel</u>: $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim \sigma(f,\tau,\xi) = I$ és $\int\limits_a^b f = I$

azaz $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\tau, |\tau| < \delta, \forall\xi : |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$