Analízis II.

Előadás jegyzet

5. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. október 11.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Deriválási szabályok.

1.0.1. Megjegyzés.

– A deriválhatóság a definícióból nem egyszerű.
– Néhány ismert egyszerű függvény deriváltja + deriválási szabályok megkönnyítik a derivált kiszámolását.

1.0.2. Tétel. (Algebrai műveletek és a derivált kapcsolata)
Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f, g \in D\{a\}, \quad a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$.
Ekkor:

1. $cf \in D\{a\}$ és $(cf)'(a) = c \cdot f'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$
2. $f + g \in D\{a\}$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3. $f, g \in D\{a\}$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. ha még $g(a) \neq 0 \Rightarrow$
$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

1.0.3. Megjegyzés. Szavakkal is érdemes megfogalmazni: Első tényező deriváltja a második tényezővel, plusz az első tényező szorozva a második tényező deriváltjával.

Bizonyítás: Közös ötlet: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$-t behozni.

$\boxed{3.}$ Szorzat:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \overset{-f(a)\cdot g(x)}{\underset{+f(a)\cdot g(x)}{=}} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x\to a} f(a)} \cdot g(x) + f(a)\underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x\to a} g'(a)}$$

$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \quad \Rightarrow \quad$ mivel folytonos, és $\quad x \to a$, Ui.: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\} \quad \blacksquare$

$\boxed{4.}$

1. Igazoljuk: $\quad a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

   Valóban: $g \in D\{a\} \quad \Rightarrow \quad g \in C\{a\}$, de $g(a) \neq 0 \quad \Rightarrow$
$$\exists K(a) : \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a))$$
   $\Rightarrow a \in \operatorname{int}D_{\frac{f}{g}}$.

2. $$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)}{x - a} = \frac{1}{g(a) - g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} \overset{-f(a)g(a)}{\underset{+f(a)g(a)}{=}}$$
$$\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x\to a} f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x\to a} g'(a)} \right)$$
   $g(x) \xrightarrow{x\to a} g(a) \neq 0$, mert $g \in C\{a\}$. $\quad \blacksquare$

1.0.4. Tétel. (Az összetett függvény deriválása)
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f \\ g \in D\{a\} \\ f \in D\{g(a)\} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} f \circ g \in D\{a\}, \\ (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \end{array}$$

Bizonyítás: Ötlet: lin.köz. (csak szóbelin!) A bizonyítás megtalálható a hivatalos EA jegyzetben. ∎

2. Inverz deriválása.

Szemléletesen:

1. ábra.

2.0.1. Tétel. (Az inverz függvény deriválása)
Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} \text{szig. mon. és folytonos } (\alpha,\beta)\text{-n} \\ \text{egy} a \in (\alpha,\beta)\text{-ban } f \in D\{a\} \\ f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f\{-1\} \in D\{b\}, \text{ ahol } b := f(a) \text{ és} \\ (f^{-1})^{-1}(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))} \end{array}$$

Bizonyítás: Csak szóbalin. ∎

2.0.2. Megjegyzés. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szig mon és folyt (α, β)-n:
Tegyük fel, hogy $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
$(f(x) = y) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}$ mindenütt deriválható

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (\forall y)$$

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f \circ f^{-1}}}$$

2.0.3. Tétel. (Hatványsorok összegfüggvényének deriválása)
Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha_n \in \mathbb{R}(n = 0,1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara (R) pozitív.
Legyen:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$$

az összegfüggvény.
Ekkor $\forall x \in K_R(a)$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$f'(x) = \sum_{\boxed{n=1}}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \quad (x \in K_R(a))$$

Bizonyítás: **NE LESZ KÉRDEZVE!** ∎

2.0.4. Példa. sin fv.

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \cos x \quad ∎$$

3. Néhány elemi fv. deriváltja. (folytatás)

3.0.1. Példa. Polinomfüggvény:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n, \ldots a_n \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0)$$

Ekkor:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad P \in D\{a\} \quad \text{és}$$
$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

3.0.2. Példa. tan függvény:
$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos}$; $\quad \mathrm{tg}x := \mathrm{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

Később jellemezzük.

$\forall x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}}: \quad \mathrm{tg} \in D\{x\} \quad$ és

$$\mathrm{tg}'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}'x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}})}$$

3.0.3. Példa. Kotangens fv.
$\mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}$

$$\boxed{\mathrm{ctg}'x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}})}$$

3.0.4. Példa. Az exp függvény:
$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp \in D\{x\}$

$$\exp' x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)' = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \exp x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}}$$

3.0.5. Megjegyzés. Deriváltja önmaga.

3.0.6. Példa. Az ln függvény
$\ln := (\exp)^{-1}$

$$\forall x > 0 \quad \ln \in D\{x\} \quad \text{és}$$

$$\boxed{\ln' x = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, +\infty))}$$

3.0.7. Példa. Az $\exp_a$ függvény: $\quad (a^x = e^{x \cdot \ln a})\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a \in D\{a\}$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (x \in \mathbb{R})}$$

3.0.8. Példa. $\log_a$ függvény, $0 < a$ és $a \neq 1$

$$\forall c \in (0, +\infty), \quad \log_a \in D\{x\}$$

$$\boxed{\log_a' x = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x \in (0, +\infty))}$$

3.0.9. Példa. Hatványfüggvény: $\quad \alpha > 0\ h_\alpha := x^\alpha \quad (x \in (0, +\infty))$

$$\forall x > 0, h_\alpha \in D\{x\} \quad \text{és}$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (x \in (0, +\infty))}$$

3.0.10. Példa. WTF?!!

3.0.11. Példa. Hiperbolikus függvények: th:= $\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ - tangenshiperbolikusz függvény
cth:= $\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$ - kotangenshiperbolikusz függvény.