Analízis II.

Előadás jegyzet

11. óra.

A jegyzetet Umann Kristóf készítette Dr. Szili László előadásán. (2016. november 28.)
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

1. Információk

– Kint vannak a honlapon a zh témakörei.

– kis zh-ból **nincs**, azaz NINCS javítás vagy pótlás. Méltányolható esetben nyilván lehet ezalól kivétel, ez ügyben az ember a gyakvezzel beszéljen először.

– Megajánlott vizsgajegyhez kell gyakorlati jegy, azonban ez megszerezhető gyakuv-n is, így ha az elméleti része a ZH-nak sikeres volt, de a gyakorlati része nem, akkor még mindig lehetséges a megajánlott vizsgajegy megszerzése.

– a bizonyításokra a zh-n **4 pont**ot lehet legfeljebb szerezni. Ha

  - A tétel kimondása rossz, a bizonyítás 0 pont.
  - A bizonyítás pontosságától, minőségétől függően lehet 1 és 4 pont között szerezni pontokat, ha a kimondás helyett.

  A megajánlott vizsgajegyhez legalább **5 pont** kell.

– hogyha az első zh-n a tételbizonyítás 4 pontos volt, elég a tételkimondás is a másodikon.

2. Határozott integrál (hat. int.)

Motiváció: Síkidom területe. Középiskolában megadtunk egy egységnégyzetet, ennek területét megadtuk együtt, és minden más síkidomot ennek függvényében felírni. Ebből kiindulva megpróbáltuk a téglalap, parallelogramma terület meghatározni, parallelogramma megfelezésével meg tudtuk kapni a háromszög területét, és háromszögekből sok érdekes síkidomot tudtuk alkotni.
Azonban a kör területének meghatározásakor csak megjegyeztük, hogy az $r^2 \cdot \pi$, de azt nem, hogy miért.

Hogyan tudjuk az analízis módszereivel meghatározni egy síkidom területét?

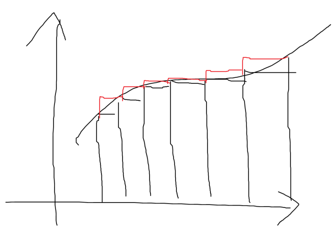
Problémáink:

– terület fogalma

– terület kiszámítása

Ez fog elvezetni minket a határozott integrálhoz.

Természetes ötlet: próbáljuk meg ezt a síkidomot közelíteni valamilyen ismert síkidommal! Mondjuk azt, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, és $f \geq 0$.



1. ábra. Paintben csináltam, dont hate.

Az ábrán látható, hogy valamilyen felosztásokkal igyekszünk közelíteni a függvényhez: a fekete téglalapokkal alulról, a pirosakkal felülről (un. beírt és körülírt téglalapokkal). Mennél sűrűbbre vesszük a felosztást, annál közelebb érünk a függvényhez!

2.1. A határozott integrál elemzése

Egyenlőre ilen függvényekre:

2.1.1. Definíció. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b.$

$$K[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \quad \text{korlátos.}\}$$

2.1.2. Definíció. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b; \quad n \in \mathbb{N}$. Az $[a,b]$ intervallum egy felosztása:

$$\tau := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b], \quad \text{ha} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Jel: $\mathcal{F}[a,b]$: az $[a,b]$ felosztásainak halmaza.

2.1.3. Definíció. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor a τ_2 a τ_1 egy **finomítása**.

2.1.4. Definíció. $f \in K[a,b], \quad \tau \in \mathcal{F}[a,b]$.

$$s(f;\tau) := \sum \left(\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i)$$

Ezt nevezzük az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összegnek.

$$S(f;\tau) := \sum \left(\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i)$$

Ezt nevezzük az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összegnek.

2.1.5. Megjegyzés. $s(f,\tau)$ a beírt, $S(f;\tau)$ a körülírt téglalapok területének összege.

Figyeljük meg, hogy geometriai fogalmakra egyáltalán nem volt szükségünk! Mi fog történni ezekkel, ha finomítjuk a felosztást?

2.1.6. Tétel. $f \in K[a,b], \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$.

1. Ha $\tau_1 \subset \tau_2$ (τ_2 felosztás finomabb τ_1-nél) $\Rightarrow$ $\begin{cases} s(f;\tau_1) \leq s(f;\tau_2) \\ S(f;\tau_1) \geq S(f;\tau_2) \end{cases}$

2. $\forall \tau_1, \tau_2 \quad \Rightarrow \quad s(f;\tau_1) \leq S(f;\tau_2)$.

2.1.7. Megjegyzés. Hogyan tudnánk bebizonyítani? ha véges sok pont van, sima teljes indukció elég lenne.

2.1.8. Megjegyzés. 1-hez: ábrás cucc, nem volt időm megrajzolni.
2-höz: $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$ és alkalmazható 1-et.

Bizonyítás:

1. $$\{s(f;\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \quad \text{felülről korlátos.}$$
   $$\exists \sup\{s(f;\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b] =: I_*(f) < +\infty\}$$
   Az f függvény Darboux-féle alsó integrálja.

2. $$\{S(f;\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \quad \text{alulról korlátos.}$$
   $$\exists \inf\{S(f;\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b] =: I^*(f) < +\infty\}$$
   Az f függvény Darboux-féle felső integrálja.

2.1.9. Tétel. (triviális megállapítás)

$$\forall f \in K[a,b], \quad \exists I_*(f), I^*(f) \quad \text{és} \quad I_*(f) \leq I^*(f).$$

2.1.10. Definíció. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt **Riemann-intergálható** $[a,b]$-n ($f \in R[a,b]$), ha

$$I_*(f) = I^*(f).$$

Ezt a számot az f függvény $[a,b]$-n vett Riemann-integráljának nevezzük, és így jelöljük:

$$\int_a^b f \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ez sok kérdést vet fel:

- Milyen függvények integrálhatóak?
- Hogyan lehet egyáltalán ezt kiszámolni?
- Mi a fenére lehet alkalmazni?

2.1.11. Példa. Nem integrálható az alábbi függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

$f \notin R[0{,}1], \quad$ ui. $I_*(f) = 0, \quad I^*(f) = 1.$

2.1.12. Definíció. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad f : [a,b]\mathbb{R}, \quad f \geq 0$. Az

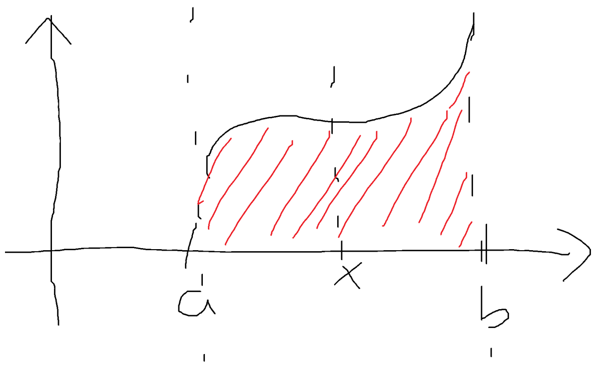
$$A := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidomnak van területe, ha $f \in R[a,b]$. Ekkor:

$$t(A) := \int_a^b f$$

valós számot a síkidom **terület**ének nevezzük.

2.1.13. Megjegyzés. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \geq 0$



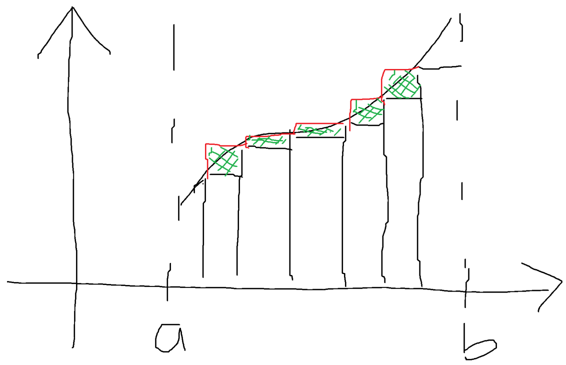
2. ábra. Paintben csináltam, dont hate.

2.2. Ekvivalens átfogalmazások

2.2.1. Definíció. $f \in K[a,b], \quad \tau \in \mathcal{F}[a,b]$.

$$\Omega(f;\tau) := \quad S(f;\tau) - s(f;\tau)$$

az f függvény τ-hoz tartozó **oszcillációs összeg**e.



3. ábra. Paintben csináltam, dont hate. Akkor mondjuk, hogy valaminek van területe, ha a zöld rész tetszőlegesen kicsi lehet.

2.2.2. Megjegyzés.

2.2.3. Tétel.

$$f \in R[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b], \\ \Omega(f;\tau) < \varepsilon \\ \text{(az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsi lehet)} \end{array}$$

Bizonyítás:

$\boxed{\Rightarrow:}$

$$I_*(f) = I^*(f) =: I$$

$\varepsilon > 0$ tetszőleges, szuprémum definíciójából:

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \leq I$$

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b], \quad I < S(f;\tau_1) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Legyen $\boxed{\tau := \tau_1 \cup \tau_2}$.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_1) \leq s(f;\tau) \leq S(f;\tau) \leq S(f;\tau_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$

$$\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \Omega(f;\tau) < \varepsilon$$

$$\Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau) \geq I^*(f) - I_*(f) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad I^*(f) - I_*(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad I^*(f) = I_*(f) \Rightarrow \quad f \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

2.2.4. Definíció. $f \in K[a,b]$; $\quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$.

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_{n-1}): \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0,1,\ldots,n-1)$$

$$\sigma(f;\tau,\xi) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

az f függvény a τ-hoz és a ξ közbülső helyekhez tartozó **Riemann-féle közelítő összeg**e.

2.2.5. Definíció. A $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ **felosztás finomsága**:

$$\max\{|x_{k+1} - x_k| \ : \ k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

2.2.6. Tétel.

$$f \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b f = I$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{és} \quad \forall \xi \quad \text{közbülső hely esetén:} \quad |\sigma(f;\tau;\xi) - I| < \varepsilon.$$

biz nélkül.