A parciális törtekre bontás módszere (vázlat)

Legyen $f(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\})$. Tegyük fel továbbá, hogy $deg\,P < deg\,Q$. (Ha ez nem teljesül, akkor polinomosztással leválasztva a "polinomiális egész" részt, marad egy az itteni feltételnek eleget tevő racionális törtfüggvény. Ez utóbbira alkalmazzuk a soron következő felbontási tételt.)

1. lépés : Adjuk meg a nevező gyöktényezős alakját ($\mathbb{R}$ felett), azaz

$$Q(x) = A \cdot (x-\alpha_1)^{n_1} \cdot (x-\alpha_2)^{n_2} \cdots (x-\alpha_s)^{n_s} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1} \cdot (x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{m_2} \cdots (x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{m_k},$$

ahol $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, továbbá $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ $(\forall\, i = 1,2,\ldots,s; j = 1,2,\ldots,k)$. A kitevőkben szereplő multiplicitást jelző n_i, m_j $(\forall\, i = 1,2,\ldots,s; j = 1,2,\ldots,k)$ számok pedig pozitív egész számok, melyek összege kiadja a Q polinom fokszámát.

2. lépés : A parciális törtekre bontás tétele értelmében egyértelműen léteznek olyan A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} valós együtthatók, amelyekkel érvényes a következő felbontás :

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \\
&+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{A_{s1}}{x-\alpha_s} + \frac{A_{s2}}{(x-\alpha_s)^2} + \cdots + \frac{A_{sn_s}}{(x-\alpha_s)^{n_s}} + \\
&+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}} + \\
&+ \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+\beta_2 x+\gamma_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^2} + \cdots + \frac{B_{2m_2}x + C_{2m_2}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{m_2}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{B_{k1}x + C_{k1}}{x^2+\beta_k x+\gamma_k} + \frac{B_{k2}x + C_{k2}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^2} + \cdots + \frac{B_{km_k}x + C_{km_k}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{m_k}}.
\end{aligned}$$

3. lépés : Meghatározni a fenti felbontásban szereplő A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} együtthatókat. Például a nevezőkkel végigszorozva kapunk két polinomot és az azonos fokszámú tagok együtthatói meg kell egyezzenek egymással. Ezeket felírva kapunk egy egyenletrendszert, melyből adódnak a keresett számok.

Példák : Az alábbi racionális törtfüggvények esetében írjuk fel a résztörtekre bontást, anélkül, hogy kiszámolnánk az együtthatókat :

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x+3)^3} =$$

$$\frac{x-1}{x^4+x^3+x^2} =$$

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} =$$

$$\frac{x^4+1}{(x^2+9)(x^2-x+1)^3} =$$

$$\frac{2x+4}{x^3-1} =$$

$$\frac{2x+4}{(x-2)^2\cdot(2x^2+9x-5)} =$$

$$\frac{(x-3)^3}{(x^2-x+7)^3} =$$

$$\frac{1}{1+x^4} =$$