Analízis 3. (B és C szakirány)

Kidolgozott elméleti kérdéssor

A kidolgozást Tóta Dávid készítette Dr. Weisz Ferenc kérdéssora alapján, a dokumentum végén feltüntetett források segítségével. Jelen fájl ekkor lett frissítve: 2018. szeptember 16.

A legfrissebb verzió elérhető itt: http://people.inf.elte.hu/totadavid95/Analizis3/Anal3_def.pdf

Kéretik a félév végéig minden vasárnap este ellenőrizni a fenti linket, a folyamatos frissítés és a hibajavítások végett.
Fontos, hogy ez **nem egy hivatalos, tanárok által lektorált és elfogadott kidolgozás**! A készítők, bár a legjobb tudásuk és szándékuk szerint jártak el, **nem vállalnak felelősséget** az itt leírtak helyességéért, következésképpen azért sem, ha valaki emiatt pontot veszít valamilyen számonkérésen.

1. Definiálja a primitív függvényt.

Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha F folytonos $[a,b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a,b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$.

2. Adjon meg olyan függvényt, amelynek *nincs* primitív függvénye.

$f(x) = sin(x)$ $(x \in (-1{,}1))$

3. Definiálja az egy adott pontban eltűnő primitív függvény fogalmát.

$\int_{x_0} f$ jelöli azt az egyetlen F primitív függvényt, amelyre $F(x_0) = 0$.

4. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel.

Ha I intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek $\exists$ primitív függvénye, akkor f Darboux tulajdonságú.

5. Milyen elégséges feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

6. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye F, akkor legyen $\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ neve az, hogy határozatlan integrál.

7. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye, és $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

8. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

A $\sum \alpha_n (x-a)^n$, $x \in K_R(a)$, $R > 0$ hatványsor primitív függvénye:

$$\sum_{n=0} \alpha_n \frac{(x-a)^n + 1}{n+1} + c, x \in K_R(a).$$

9. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?

Tegyük fel, hogy $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(I)$.Ha $\exists$ $f'g$ primitív függvénye és $\int f * g' = f * g - \int f' * g$ és $\int_{x_0} f * g' = f * g - f(x_0)g(x_0) - \int_{(x_0)} f' * g$, akkor $\exists$ fg' primitív függvénye.

10. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

Legyen $g : I \to J$, $g \in D(I)$, $f : J \to \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ha $\exists$ f-nek primitív függvénye, akkor

$$\int f \circ g * g' = \left(\int f\right) \circ g \text{ és } \int_{t_0} f \circ g * g' = \left(\int_{(g(t_0))} f\right) \circ g.$$

11. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$, $g'(x) \neq 0$, $x \in I$. Ha $\exists f \circ g * g' : J \to \mathbb{R}$ primitív függvény, akkor:

$$\int f = \left(\int f \circ g * g'\right) \circ g^{-}1 \text{ és } \int_{x_0} f = \left(\int_{x_0} f \circ g * g'\right) \circ g^{-}1.$$

12. Adjon meg legalább három olyan függvényt, amelyiknek a primitív függvénye nem elemi függvény.

$$\int \frac{sin(x)}{x}$$
$$\int \frac{cos(x)}{x}$$
$$\int e^{-x^2} dx$$

13. Definiálja az intervallum egy felosztását.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

14. Mit jelent egy felosztás finomítása?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

15. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := inf\{f(x)|x_i \leq x \leq x_{i+1}(i = 0,1, ..., n-1)\}$. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

16. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := sup\{f(x)|x_i \leq x \leq x_{i+1}(i = 0,1, ..., n-1)\}$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

17. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1), s(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2)$.

18. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $S(f, \tau_1), S(f, \tau_2)$ a megfelelő felső közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $s(f, \tau_1) \geq s(f, \tau_2)$.

19. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1), S(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó, valamint felső közelítő összegek, akkor $s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2)$.

20. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $F([a, b])$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) | \tau \in F([a, b])\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik szuprémuma. Az

$$I_*(f) := sup\{s(f, \tau) | \tau \in F([a, b])\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

21. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $F([a, b])$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) | \tau \in F([a, b)]\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik infimuma. Az

$$I_*(f) := inf\{S(f, \tau) | \tau \in F([a, b])\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

A kidolgozáshoz az alábbi anyagok lettek felhasználva:

- Dr. Weisz Ferenc kérdéssora Link
- Umann Kristóf LaTeX dokumentumai kiindulási alapnak Link
- Dr. Szili László Analízis 2 kidolgozása Link
- Szánthó József kidolgozásai Link
- Lanka Máté kidolgozása Link

Továbbá köszönet illeti a következő személyeket is az általuk nyújtott segítségért: Zatureczki Marcell, Tűri Erik, Mosi Zoltán