1. zárthelyi

Analízis 3. BSc, B és C szakirány

1. feladat. *Számítsa ki a következő integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int_{10}^{66} \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\, dx,$ $\boxed{8 \text{ pont}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\sin x}\, dx \quad \big(x\in(0,\pi)\big),$ $\boxed{8 \text{ pont}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{\left(x^2+1\right)^{2020}}\, dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big).$ $\boxed{6 \text{ pont}}$

Megoldás.

(a) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. A $t=\sqrt[3]{x-2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$t=\sqrt[3]{x-2},\quad x>10,\ t>2 \implies x=t^3+2=: g(t)\ (t>2) \implies$$
$$g'(t)=3t^2>0 \ \ (t>2) \implies g\uparrow \ \ (2,+\infty)\text{-en} \implies \exists\, g^{-1}.$$

A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály alapján: ha $x>10$ és $t>2$, akkor

$$\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\, dx = \int \frac{1}{t^3+2-t-2}\cdot 3t^2\, dt = \frac{3}{2}\cdot\int\frac{2t}{t^2-1}\, dt = (f'/f \ \ \text{típus}) =$$

$$=\frac{3}{2}\cdot \ln\big(t^2-1\big)+c_{\big|t=\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2}\cdot\ln\Big((x-2)^{2/3}-1\Big)+c.$$

A Newton–Leibniz-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$\underbrace{\int_{10}^{66}\frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\, dx} = \frac{3}{2}\cdot\Big[\ln\Big((x-2)^{2/3}-1\Big)\Big]_{10}^{66} =$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\Big(\ln\big(64^{2/3}-1\big)-\ln\big(8^{2/3}-1\big)\Big) = \frac{3}{2}\cdot\big(\ln 15-\ln 3\big) = \underbrace{\frac{3}{2}\cdot\ln 5}. \ \blacksquare$$

(b) A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2},\quad x\in(0,\pi),\ t\in(0,+\infty) \implies x=2\cdot\operatorname{arc\,tg} t =: g(t)\ \big(t\in(0,+\infty)\big) \implies$$
$$g'(t)=\frac{2}{1+t^2}>0\ \big(t\in(0,+\infty)\big) \implies g\uparrow \ \ (0,+\infty)\text{-en} \implies \exists\, g^{-1};$$
$$\sin x = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

A második helyettesítési szabály alapján: Ha $x\in\big(0,\pi\big)$, akkor $t\in(0,+\infty)$ és

$$\int\frac{1}{3+2\sin x}\, dx = \int\frac{1}{3+2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int\frac{2}{3t^2+4t+3}\, dt = \frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2+\frac{4}{3}t+1}\, dt =$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\big(t+\frac{2}{3}\big)^2-\frac{4}{9}+1}\, dt = \frac{2}{3}\int\frac{1}{\big(t+\frac{2}{3}\big)^2+\frac{5}{9}}\, dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}\int\frac{1}{\Big(\frac{3}{\sqrt5}\big(t+\frac{2}{3}\big)\Big)^2+1}\, dt =$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{3}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{\sqrt5}\Big(t+\frac{2}{3}\Big)\right)+c_{\big|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

ezért

$$\int\frac{1}{3+2\sin x}\, dx = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{\sqrt5}\cdot\Big(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\Big)\right)+c \quad \big(x\in(0,\pi)\big). \ \blacksquare$$

(c) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \frac{x^5 - x}{\left(x^2+1\right)^{2020}}\,dx = \int \frac{x\left(x^4-1\right)}{\left(x^2+1\right)^{2020}}\,dx = \int \frac{x \cdot \left[\left(x^2+1\right)^2 - 2\left(x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^{2020}} =$$

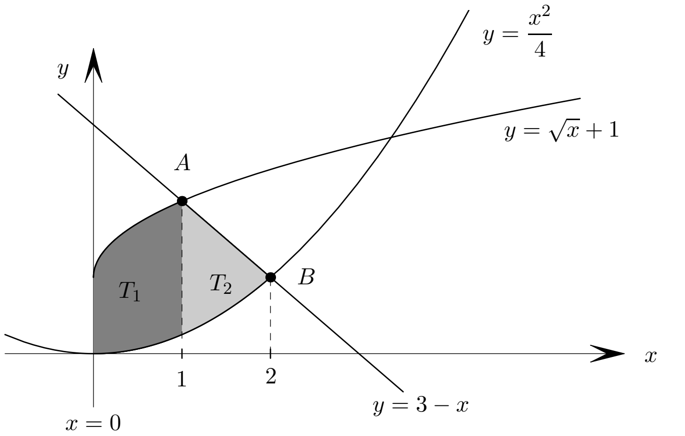
$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}\,dx - \int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^{2019}}\,dx = (f' \cdot f^{\alpha} \ \text{ típus}) =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 2017} \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{2017}} + \frac{1}{2018} \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{2018}} + c. \ \blacksquare$$

2. feladat. *Határozza meg annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $x = 0$ egyenletű egyenes, valamint az $y = \sqrt{x} + 1$, $y = 3 - x$ és az $y = \dfrac{x^2}{4}$ egyenletű görbék határolnak.*

$\boxed{\text{8 pont}}$

Megoldás. Az ábra:



A metszéspontok:

A:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 - x \\ y &= \sqrt{x} + 1 \end{aligned}\right\} \implies \sqrt{x} + 1 = 3 - x \implies \sqrt{x} = 2 - x \implies x^2 - 5x + 4 = 0 \implies$$

$$\implies (x-1)(x-4) = 0 \overset{y > 0}{\implies} x = 1, \quad y = 2, \quad \text{ezért} \quad A(1,2).$$

B:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 - x \\ y &= \frac{x^2}{4} \end{aligned}\right\} \implies \frac{x^2}{4} = 3 - x \implies x^2 = 12 - 4x \implies x^2 + 4x - 12 = 0 \implies$$

$$\implies (x+6)(x-2) = 0 \overset{x > 0}{\implies} x = 2, \quad y = 1, \quad \text{ezért} \quad B(2,1).$$

A terület:

$$T_1 = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + 1\right) dx - \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + x - \frac{x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{19}{12},$$

$$T_2 = \frac{2+1}{2} \cdot 1 - \int_1^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{3}{2} - \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{8}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12},$$

ezért

$$T = T_1 + T_2 = \frac{19}{12} + \frac{11}{12} = \frac{5}{2}. \ \blacksquare$$

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x\,y\,(x-y)}{x^2+y^2}, & \textit{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \textit{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Folytonos-e az f függvény az origóban?* $\boxed{\text{5 pont}}$

(b) *Létezik-e a*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_1}$$

határérték? $\boxed{\text{5 pont}}$

Megoldás.

(a) A sejtés: az f függvény folytonos az origóban.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x,y)-(0,0)\|_1 < \delta \text{ esetén} \\ \big|f(x,y) - f(0,0)\big| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor

$$\big|f(x,y)-f(0,0)\big| = \left|\frac{x\,y\,(x-y)}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x\,y|\cdot|x-y|}{x^2+y^2} \le \frac{\dfrac{x^2+y^2}{2}\cdot|x-y|}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{|x-y|}{2} \le \frac{|x|+|y|}{2} \le \frac{\|(x,y)\|_1}{2} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennáll, ha a $(*)$-ban $\delta \in (0, 2\varepsilon)$, ezért $f \in C\{(0,0)\}$.

(b) Legyen

$$F(x,y) := \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_1} = \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = \frac{x\,y\,(x-y)}{\big(x^2+y^2\big)\cdot\big(|x|+|y|\big)} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big).$$

Itt az origó kis környezetében a számláló és a nevező azonos nagyságrendben kicsi, ezért a **sejtés** az, hogy a szóban forgó **határérték nem létezik**.

Ennek **bizonyításához** elegendő két olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó sorozatot találni, amelyekre a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Tekintsük az $y = x$, illetve az $y = 2x$ egyenes mentén az

$$\big(x_n, y_n\big) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \text{illetve az} \quad \big(u_n, v_n\big) := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \qquad \big(n \in \mathbb{N}^+\big)$$

sorozatokat. Mivel mindegyik koordinátasorozat nullasorozat, ezért a fenti sorozatok az origóhoz konvergálnak bármelyik $\mathbb{R}^2$-beli norma esetén.

Az F függvény számlálója alapján világos, hogy $F(x_n, y_n) = 0$ $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}^+\big)$, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n, y_n) = 0.$$

Másrészt

$$F\big(u_n, v_n\big) = \frac{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{-1}{n}}{\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\right)} = -\frac{2}{15} \qquad \big(\forall\, n \in \mathbb{N}^+\big),$$

így

$$0 = \lim_{n\to+\infty} F(x_n, y_n) \ne \lim_{n\to+\infty} F(u_n, v_n) = -\frac{2}{15},$$

és ez azt jenti, hogy a kérdezett határérték nem létezik. ■