Analízis 3.
Programtervező informatikus szak
B és C szakirány

Gyakorlatanyagok

Emlékeztető az integrálszámításra

A továbbiakban I-vel mindig az $\mathbb{R}$ számhalmaz valamely *nyílt intervallumát* jelöljük.

■ A határozatlan integrál (primitív függvények)

• A $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek $F : I \to \mathbb{R}$ egy **primitív függvénye**, ha F deriválható az I intervallumon és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

• *Szükséges feltétel primitív függvény létezésére*: Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon.

• Például az

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) \qquad \big(x \in (-1, 1)\big)$$

függvénynek *nincs* primitív függvénye, mert f nem Darboux-tulajdonságú a $(-1, 1)$ intervallumon.

• *Elégséges feltétel primitív függvény létezésére*: Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

• Nyilvánvaló, hogy ha F a f függvénynek egy primitív függvénye, akkor minden c valós szám esetén $F(x)+c$ $(x \in I)$ is primitív függvénye f-nek. Mivel intervallumon értelmezett függvényekről van szó, ezért az állítás megfordítása is igaz: f primitív függvényei csak konstansban különböznek egymástól. (Ez az állítás nem igaz, ha f értelmezési tartománya *nem intervallum*.)

• A $f : I \to \mathbb{R}$ függvény összes primitív függvényeinek a halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük és az

$$\int f \quad \text{vagy az} \quad \int f(x)\, dx$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. A fentiek alapján tehát

$$\int f = \int f(x)\, dx = \big\{F + c \mid F \text{ egy primitív függvénye } f\text{-nek},\ c \in \mathbb{R}\big\}.$$

A továbbiakban a következő egyszerűsített jelölést fogjuk használni:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

• Ha f-nek F egy primitív függvénye, akkor bármely rögzített $x_0 \in I$ esetén az $F(x) - F(x_0)$ $(x \in I)$ függvény f-nek az x_0 *pontban eltűnő* primitív függvénye. Ezt így jelöljük:

$$\int\limits_{x_0} f \quad \text{vagy} \quad \int\limits_{x_0} f(x)\, dx.$$

■ A határozott integrál

• Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_* f$, ill. $I^* f$ az f függvény Darboux-féle alsó, illetve felső integrálja. Ekkor f **(Riemann-) integrálható** az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_* f = I^* f$. Ezt a számot az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **határozott integráljának** nevezzük.

• Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

• Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a, b] \subset R[a, b]$, de $C[a, b] \neq R[a, b]$.

• Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy **primitív függvénye az** $[a, b]$ **intervallumon**, ha F folytonos $[a, b]$-n, $F \in D\{x\}$ minden $x \in (a, b)$ esetén és $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a, b)\big)$.

• **A Newton–Leibniz-tétel:** Ha $f \in R[a, b]$ és f-nek létezik primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

1. gyakorlat

Primitív függvény, határozatlan integrál

Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények *összes* primitív függvényét:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in (-\infty, 0)\big)$.

2. Határozza meg az f függvény egy primitív függvényét, ha

(a) $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := 2x + 5(1 - x^2)^{-1/2} \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$,

(c) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \dfrac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x}\, dx \quad \big(x \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\big)$.

3. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx, \ I := \mathbb{R}^+$,

(b) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx, \ I := \mathbb{R}^+$.

4. Keresse meg azt a f függvényt, amelyre

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(1) = 0, \ f'(2) = 0.$$

5. Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{3 + 2x^2}\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x - 2}\, dx, \quad I := (2, +\infty)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x}\, dx, \quad I := \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx, \quad I := (0, \pi)$.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \left(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx,\ I := (-1, 1),$

(b) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{2x-3}\, dx, \quad I := \left(\tfrac{3}{2}, +\infty\right).$

2. Keresse meg azt a f függvényt, amelyre

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad (x > -1), \quad f(0) = 2.$$

3. Az integrandus „alkalmas" átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),$

(b) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx, \quad I := \mathbb{R}.$

■ Gyakorló feladatok

Számolja ki az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\, dx \quad \left(x \in \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$

2. $\displaystyle\int 5^{2-3x}\, dx \quad \left(x \in \mathbb{R}\right),$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx \quad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right).$

$\boxed{\text{2. gyakorlat}}$

Az első helyettesítési szabály

Az első helyettesítési szabály: Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$ és tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_g \subset J$. Ha az $f : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

A sorra kerülő feladattípusok a fenti állítás speciális eseteiként is felfoghatók.

■ Feladatok

1. $\int \frac{f'}{f}$ **alakú integrálok:**

(a)

Ezt az állítást felhasználva számítsa ki az alábbi integrálokat:

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx \quad \big(x \in (1, +\infty)\big)$.

2. $\int f^\alpha \cdot f'$ **alakú integrálok:**

(a)

Ezt az állítást felhasználva számítsa ki az alábbi integrálokat:

(b) $\displaystyle\int x^2(2x^3+4)^{2017}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}}\, dx \ \big(x \in \big(0, \tfrac{\pi}{2}\big)\big)$.

3. $\int f(ax+b)\, dx$ **alakú integrálok (lineáris helyettesítés)**:

(a)

Ezt az állítást felhasználva számítsa ki az alábbi integrálokat:

(b) $\displaystyle\int \sqrt[4]{1-3x}\, dx \quad \big(x < \tfrac{1}{3}\big)$, (c) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\, dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

4. $\boldsymbol{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx}$ **alakú integrálok:**

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int (6x+2)\sin(3x^2+2x-1)\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}^+\big).$

■ Házi feladatok

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

1. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int x^2 \sqrt[3]{6x^3+4}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{5+4x^2}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)..$

■ Gyakorló feladatok

Számolja ki az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\, dx \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big),$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big).$

4. Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(c) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

$\boxed{\text{3. gyakorlat}}$

Parciális integrálás.
A második helyettesítési szabály

Parciális integrálás: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy, $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

A második helyettesítési szabály: Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

(Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x = g(t)$ *helyettesítést alkalmazzuk.*)

■ Feladatok

1. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$, (b) $\displaystyle\int x^2 \sin 3x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \ln x\,dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$, (e) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} 3x\,dx, \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

2. Állítsa elő helyettesítéses integrálással a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$, (b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

3. Oldja meg az előző feladatokat parciális integrálással is.

Megoldás. (a) Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

következésképpen

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \qquad (|x| < 1). \blacksquare$$

■ Házi feladatok

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

1. $\displaystyle\int (x^2+1)\cos x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int \operatorname{arc}\sin x\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big).$

■ Gyakorló feladatok

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}^+\big),$

2. $\displaystyle\int x \ln^2 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}^+\big),$

3. $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

4. $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

5. $\displaystyle\int \cos\big(\ln x\big)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}^+\big),$

6. $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

7. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. és 5. gyakorlat

Racionális függvények integrálása. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

■ Feladatok

• Racionális függvények integrálása

1. Alaptípusok:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \qquad \big(x \in (\alpha,+\infty),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 1,2,\dots\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

2. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(3x-2)^7}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,dx.$

3. Parciális törtekre bontással számítsa ki a következő határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-2)(x+4)}\,dx, \quad I := (-4,2);$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx, \quad I := (-1,+\infty);$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{x^3+x}\,dx, \quad I := (0,+\infty).$

• Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

4. $\boldsymbol{\int S\,(e^x)\;dx}$ **alakú integrálok**, ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t = e^x$$

helyettesítést, azaz az $x = \ln t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális függvény integráljára vezetjük vissza.

Ezt felhasználva számítsa ki az

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$$

határozott integrált.

5. $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right) \boldsymbol{dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ezekben a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Pontosabban: legyen

$$t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

A $x = g(t)$ helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből x-et kifejezzük, majd a második helyettesítési szabályt alkalmazzuk.

Ezt felhasználva számítsa ki az

$$\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \qquad \left(x > \tfrac{3}{2}\right)$$

határozatlan integrált.

6. $\int \boldsymbol{R}\left(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}\right) \boldsymbol{dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

helyettesítést, azaz az $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazzuk.

Ezt felhasználva számítsa ki az

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad \big(x \in (0, 2\pi)\big)$$

határozatlan integrált.

■ Házi feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat:

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx \qquad \big(x\in(0,+\infty)\big).$

5. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \qquad \big(x\in(-\pi,\pi)\big).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő integrált:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big).$$

2. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big)$$

integrált kétféleképpen:

(a) Alkalmazza a $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ helyettesítést.

(b) Szorozza meg az integrálandó függvényt $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x}}=1$-gyel.

Megjegyzés. Határozatlan integrálokra különböző módszerekkel (formai szempontból) különböző képleteket kaphatunk. Az előző feladatban az (a) eljárással az adódik, hogy

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+c \qquad \big(x\in(-1,1)\big),$$

a (b)-ben jelzett „trükkel" pedig

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \mathrm{arc\,sin}\;x-\sqrt{1-x^2}+c \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

A *Mathematica* programcsomag a következő eredményt adja:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\,\mathrm{arc\,sin}\sqrt{\frac{1+x}{2}}-\sqrt{1-x^2}+c \qquad \big(x\in(-1,1)\big).\ ■$$

3. Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx \qquad \big(x\in(0,+\infty)\big)$$

integrált azzal az észrevétellel, hogy

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (x>0).$$

Megoldás. Ha $x>0$, akkor

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{x+1}\right)'\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2} dx = 2\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2} + c. \ \blacksquare$$

4. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big)$$

integrált kétféleképpen:

(a) Alkalmazza a $t=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}$ helyettesítést.

(b) Szorozza meg az integrálandó függvényt 1-gyel, majd integráljon parciálisan.

5. Számítsa ki az

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad \big(x\in(0,2\pi)\big)$$

integrált az integrandus alábbi „alkalmas” átalakításaival:

(a) Szorozza meg az integrálandó függvényt $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=1$-gyel.

(b) Térjen át félszögekre.

Útmutatás. (a)

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1+\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{1}{\sin^2 x} + \cos x\cdot\sin^{-2} x + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(b)

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+2\,\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\big(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\big)-\big(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\big)} = \\ = \frac{1}{2\,\sin^2\frac{x}{2}} + 2\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \ \blacksquare$$

6. Az integrandus „alkalmas” átalakításával számítsa ki a következő intergrált:

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \qquad \big(x \in (-\pi, \pi)\big).$$

Útmutatás. Ha $x \in (-\pi, \pi)$, akkor

$$\frac{\cos x}{1+\cos x} = 1 - \frac{1}{1+\cos x} = 1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}. \ \blacksquare$$

7. Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

integrált.

(*Ötlet*: Alkalmazza a

$$2\,\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$$

azonosságot.)

8. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

Ennek felhasználásával határozza meg a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$, (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

6. gyakorlat

A határozott integrál és alkalmazásai

Feladatok

1. Számítsa ki az

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

határozott integrált.

2. Számolja ki az $y = x-1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x+6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét.

3. Határozza meg az $y = x^3$, az $x^2+y^2 = 2$ egyenletű görbék és az x-tengely által közrezárt, az első síknegyedbe eső korlátos síkrész területét.

4. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

5. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \quad (2 \le x \le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát.

6. Határozza meg az

$$f(x) := \sin^2 x \quad \big(x \in [0,\pi]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

$\boxed{\text{7. gyakorlat}}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-típusú függvények folytonossága és határértéke

■ Feladatok

1. Határozza meg és szemléltesse az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

(a) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 \le 1\big)$,

(b) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.

2. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)), \end{cases}$$

akkor

(a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos,

(b) minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos,

(c) f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy az f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

4. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x\to 0} \big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$, (b) $\exists \lim\limits_{y\to 0} \big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$,

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

5. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x-2y)$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$,

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

■ Házi feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big)$,

(b) $\exists \displaystyle\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$,

(c) $\nexists \displaystyle\lim_{(0,0)} f$.

2. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

■ Gyakorló feladatok

1. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

2. Folytonosak-e az alábbi függvények?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

8. és 9. gyakorlat

Parciális deriváltak. Iránymenti deriváltak. Totális derivált.

■ Feladatok

1. Határozza meg az $f(x,y) := x^3 e^{y^2}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x,y) := (2,1)$ pontban.

2. Melyik $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek:

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + x^3/3 \ \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)?$$

3. Legyen

(a) $f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (1,2)$;

(b) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (1,2)$.

A definíció alapján lássa be, hogy az f függvény (totálisan) deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

4. Legyen

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a := (1;1)$$

és e az x-tengely pozitív ágával α szöget bezáró egységvektor.

(a) Határozza meg a definíció alapján a $\partial_e f(a)$ iránymenti deriváltat.

(b) Ellenőrizze a kapott eredményt az $f'(a)$ segítségével.

(c) Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?

5. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f *nem differenciálható* $(0,0)$-ban.

6. Tekintse az

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \big(x^2+y^2 > 0\big) \\ 0 & (x = y = 0) \end{cases}$$

függvényt.

(a) Határozza meg a $\partial_1 f, \partial_2 f$ parciális deriváltfüggvényeket.

(b) Lássa be, hogy a fenti parciális deriváltak nem folytonosak a $(0,0)$ pontban.

(c) Mutassa meg, $f \in D\{(0,0)\}$.

7. Mutassa meg, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F \in D$ és

$$f(x,y) := y \cdot F(x^2 - y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2 \cdot \partial_x f(x,y) + xy \cdot \partial_y f(x,y) = x \cdot f(x,y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

■ Házi feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

az $(x,y) = (1,0)$ pontban.

2. Legyen

(a) $f(x,y) := x^3 + xy \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (2,3);$

(b) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + xy \\ y^2 - 2x^2 \end{bmatrix} \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (-1,1).$

A definíció alapján lássa be, hogy az f függvény deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ mátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

3. Legyen

$$f(x,y) := e^x \cdot y + x \cdot \cos y \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a := (0;1) \text{ és } u = (1; -\sqrt{3}).$$

Határozza meg a definíció alapján a $\partial_e f(a)$ iránymenti deriváltat, ahol e az u irányú egységvektor. Lássa be, hogy $f \in D\{a\}$ és ellenőrizze a kapott iránymenti deriváltat az $f'(a)$ segítségével.

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1 \partial_2 f(0,0)$ és a $\partial_2 \partial_1 f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban.

2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D^3$ és

$$F(x, y, z) := f(xyz) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Bizonyítsa be, hogy alkalmas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel

$$\partial_{123} F(x, y, z) = g(xyz) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

3. Legyen $u := (1; -1)$ és $v = (3; 3)$. Határozza meg a $\partial_1 f(1, 2)$ és a $\partial_2 f(1, 2)$ parciális deriváltakat, ha $\partial_{e_u} f(1, 2) = 6\sqrt{2}$ és $\partial_{e_v} f(1, 2) = -2\sqrt{2}$, ahol e_u és e_v az u illetve v irányú egységvektorok.

4. Legyen

$$A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 1 \;\text{ vagy }\; x^2 + (y+1)^2 < 1\big\},$$
$$B := \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A \cup B}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0, 0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0, 0)$ pontban.

5. Mutassa meg, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \text{ és } y = x^2 \\ 0, & \text{egyéb } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ pontban} \end{cases}$$

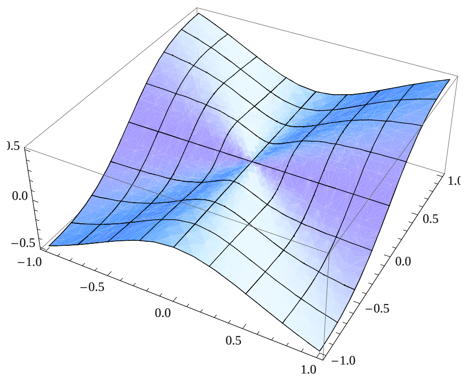
képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0, 0)$ pontban deriválható minden irányban, de ott totálisan nem deriválható, mert még csak nem is folytonos a $(0, 0)$ pontban.

6. Megadható a $(0, 0)$ pontban olyan *folytonos* függvény is, amelyik *minden irányban deriválható*, de totálisan *nem deriválható* az origóban. Ilyen függvényre egy példa az

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény.

A függvény képét az alábbi ábrán szemléltetjük:



10. gyakorlat

Taylor-polinom, Taylor-formula

Feladatok

1. Mutassa meg, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D\big(K(a)\big)$ függvény a ponthoz tartozó elsőfokú Taylor-polinomja a következő alakban írható fel:

$$\big(T_{1,a}f\big)(x) = \big(T_{1,a}f\big)(a+h) := f(a) + \langle f'(a), h\rangle$$
$$(x = a + h \in \mathbb{R}^n).$$

2. Mutassa meg, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\big(K(a)\big)$ függvény a ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomja a következő alakban írható fel:

$$\big(T_{2,a}f\big)(x) = \big(T_{2,a}f\big)(a+h) := f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle f''(a)h, h\rangle$$
$$(x = a + h \in \mathbb{R}^n).$$

3. Írja fel az

$$f(x,y) := x^y + y^2 \cdot \cos(x-1) \quad ((x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R})$$

függvény $a = (1,3)$ ponthoz tartozó másodrendű Taylor polinomját.

4. Írja fel az

$$f(x,y) := 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényt $(x-1)^k(y+2)^\ell$ $(k, \ell \in \mathbb{N})$ típusú szorzatok lineáris kombinációjaként.

Gyakorló feladatok

1. Írja fel a következő függvények másodfokú Taylor-polinomját.

(a) $f(x,y) := \dfrac{x}{y}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ az $a := (1,1)$ pontban,

(b) $f(x,y) := e^x \sin y$ $\big((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ az $a := (0,0)$ pontban,

(c) $f(x,y) := x^2 \cdot e^{x+y} + (y+1)^3 \cdot \cos x$ $\big((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ az $a := (0,1)$ pontban.

2. A másodrendű *Taylor-formula* segítségével adjon közelítő formulát $\sin \dfrac{x}{1+y}$ kiszámítására az $a := (-\pi, 2)$ pont valamely környezetéből vett (x,y) esetén.

3. Becsülje meg az

$$(1+x)^k(1+y)^l \approx 1 + kx + ly$$

közelítés hibáját, ha $k, l \in \mathbb{N}$ és $x, y \in [0,1]$.

4. Legyen az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény m-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Mutassa meg, hogy a $T_{m,a}f$ az egyetlen a legfeljebb m-edfokú, n-változós polinomok között, amelyre teljesül, hogy $\big(T_{m,a}f\big)(a) = f(a)$ és

$$\partial_{i_1 i_2 \dots i_k}\big(T_{m,a}f\big)(a) = \partial_{i_1 i_2 \dots i_k} f(a)$$

minden $k \le m$ és $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$ esetén.

11. gyakorlat

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-típusú függvények szélsőértékei

■ Feladatok

1. (2×2-es mátrixokra a Sylvester-féle kritérium.) Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mutassa meg, hogy a $Q(h) := \langle Ah, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$ ($h = [h_1\ h_2]^T \in \mathbb{R}^2$) kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix

- pozitív definit $\iff$ $a > 0$ és $\det A > 0$;
- negatív definit $\iff$ $a < 0$ és $\det A > 0$;
- indefinit $\iff$ $\det A < 0$.

2. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\{a\}$, $f'(a) = 0$ és

$$f''(a) = H(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Mutassa meg, hogy ha

(a) $A > 0$ és $\det H(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma van;

(b) $A < 0$ és $\det H(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális maximuma van;

(c) $\det H(a) < 0$, akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke (az a pont nyeregpont).

3. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

4. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékeit;

(b) az $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 2x\big\}$ halmazon az abszolút szélsőértékeit.

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

2. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

3. Határozza meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x,y) := y(2x-3) \quad ((x,y) \in A)$, ahol a A halmaz az $y = x^2$ egyenletű parabola, az x-tengely és az $x = 2$ egyenes által határolt zárt síkrész;

(b) $f(x,y) := x^2 - y^2 - x \quad ((x,y) \in B)$, ahol a B halmaz az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör és a koordinátatengelyek által határolt zárt síkrész az első síknegyben;

(c) $f(x,y) := x^3 - 3x^2 - y^2 \quad (x \geq -1, x - 1 \leq y \leq 4)$.