Az 1. zárthelyi témakörei

Analízis 3. BSc, B és C szakirány

1. feladat. *Számítsa ki a következő határozott integrálokat:*

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Megoldás. (a) A nevező diszkriminánsa $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$, ezért nincs valós gyöke. Az integrandus folytonos $\mathbb{R}$-en, és a primitív függvénye:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - 2\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\ln(1^2-1+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{2\cdot 1-1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\ln(0^2-0+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{2\cdot 0-1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(b) A nevező diszkriminánsa $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1>0$, ezért két valós gyöke van, és

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1).$$

Az integrandust most parciális törtek összegére bontjuk. Mivel

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x-A-2\,B}{(x-2)(x-1)},$$

ezért $A+B=1$ és $-A-2\,B=0$, azaz $A=2$ és $B=-1$.

Az integrálási határokat figyelembe véve az integrandus primitív függvényét a $(2,+\infty)$ intervallumon számítjuk ki:

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx = 2\,\ln(x-2) - \ln(x-1) + c \qquad (x>2).$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \big[2\,\ln(x-2)-\ln(x-1)\big]_3^4 =$$

$$= \big(2\,\ln 2 - \ln 3\big) - \big(2\,\ln 1 - \ln 2\big) = \ln\frac{8}{3}.\ \blacksquare$$

2. feladat. *Számítsa ki a következő integrált*

$$\int e^{-x}\cos^2 x\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Megoldás. A $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$ azonosság alapján

$$\int e^{-x}\cos^2 x\,dx = \int e^{-x}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx.$$

Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\cos 2x -$$

$$-2\Big[-e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx\Big] = -e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x - 4\int e^{-x}\cos 2x\,dx.$$

Az utolsó tagot a bal oldalra átvive, majd az egyenletet rendezve az adódik, hogy

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x + \frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x + c \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$\int e^{-x}\cos^2 x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{1}{10}e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x + c \qquad (x\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$$

3. feladat. *Határozza meg az*

$$\int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

integrált.

Megoldás. Először az integrandus egy primitív függvényét számítjuk ki. Alkalmazzuk a

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\frac{1}{x}}, \qquad 1\le x\le 3,\quad \tfrac{2}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{2}$$

helyettesítést, azaz tekintsük az

$$x=\frac{1}{t^2-1}=g(t) \qquad \big(t\in\big(\tfrac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{2}\big)=:I$$

helyettesítő függvényt. g nyilván szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon, deriválható és $g'(t)=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}$ $(t\in I)$, ezért a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt alkalmazhatjuk:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2-1}+1\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}} =$$

$$=-2\int\frac{1}{t^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}} = 2\cdot\frac{1}{t}\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}} + c = 2\sqrt{\frac{x}{x+1}}+c$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \left[2\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right]_1^3 = 2\sqrt{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

4. feladat. *Számítsa ki a következő integrált*

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \qquad \big(x\in(0,\pi)\big).$$

Megoldás. A primitív függvény meghatározásához a

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t = g(t)\ (t \in (0, +\infty)); \quad g'(t) = \frac{2}{1+t^2}, \quad g \uparrow,$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

helyettesítést alkalmazzuk:

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Mivel

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2-(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} - 1,$$

ezért

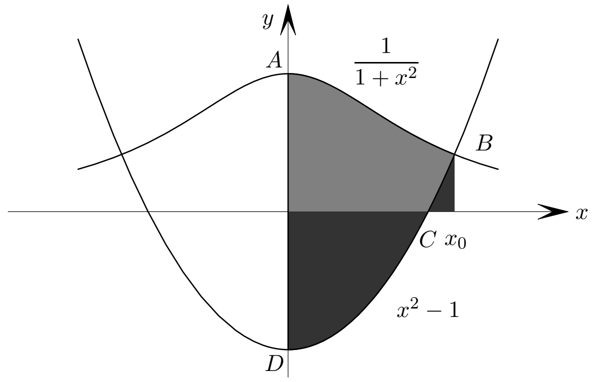
$$\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{arctg} t - t + c.$$

Így

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c \qquad \big(x \in (0,\pi)\big). \ \blacksquare$$

5. feladat. *Ábrázolja az* $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ *és az* $y = x^2 - 1$ *egyenletű görbék által határolt korlátos tartományt, majd számítsa ki e síkidom területét.*

Megoldás. Az $y = \frac{1}{1+x^2}$ egyenletű görbe az $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, az $y = x^2 - 1$ egyenletű görbe pedig a $g(x) := x^2 - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonja. Mivel f és g páros függvények, ezért a szóban forgó síkidom az y-tengelyre szimmetrikus. Elég tehát az A, B, C és D pontok által meghatározott síkidom T területét kiszámolni.



A B pont x_0 abszcisszája az $\frac{1}{1+x^2} = x^2 - 1$ egyenlet alapján $x_0 = \sqrt[4]{2}$ és $C = (1, 0)$.

Mivel

$$T = \int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_1^{\sqrt[4]{2}} (x^2-1)\,dx - \int_0^1 (x^2-1)\,dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^{\sqrt[4]{2}} (x^2-1)\,dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^{\sqrt[4]{2}} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^{\sqrt[4]{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} - \frac{\sqrt[4]{8}}{3}.$$

ezért a kérdezett síkidom területe

$$2T = 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} - \frac{\sqrt[4]{8}}{3}\right). \ \blacksquare$$