Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2016. január 4. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Írja fel a szorzásra vonatkozó Moivre-azonosságot.

2. Írja fel az implikáció igazságtáblázatát.

3. Szimmetrikus-e az üres halmaz mint reláció az egész számok halmazán?

4. Hányféle dobogó lehet egy 10 versenyzős futószámban (holtverseny nincs)?

5. Húzza alá a megoldható kongruenciákat: $3x \equiv 4 \pmod 5$; $30x \equiv 4 \pmod 5$; $14x \equiv 4 \pmod{10}$; $10x \equiv 1 \pmod{129}$

6. Mondja ki a számelmélet alaptételét.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Írja fel a negyedik egységgyököket *trigonometrikus* alakban.

2. Definiálja a részbenrendezést.

3. Igaz-e, hogy ha f injektív és g szürjektív, akkor $f \circ g$ bijektív? Indokoljon.

4. Definiálja a disztributivitást, és mutasson példát.

5. Bontsa fel a zárójelet a binomiális tétel segítségével: $(x-y)^5$.

6. Hány olyan 7 hosszú sorozat képezhető a latin ábécé 26 eleméből, melyben csupa különböző betű szerepel (nem kell kiszámolni a konkrét számot, elég csak a képlet)?

7. Hogyan definiáljuk az Euler-féle ϕ függvényt?

8. Hogy szól az Euler–Fermat-tétel?

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondjon ki és bizonyítson be a halmazok komplementerének tulajdonságai közül 5-öt.

2. Mondja ki és igazolja az ismétlés nélküli kombinációk számáról szóló állítást.

3. Mondja ki és igazolja a számelmélet alaptételét (prímfelbontás létezése és egyértelműsége).

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

1. Melyek azok 0 és 10 közti egészek melyek felírhatók két (nem feltétlenül különböző) négyzetszám összegeként, vagyis $x^2 + y^2$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$?

2. Igazoljuk, hogy egy $4k + 3$ alakú egész szám sosem írható fel $x^2 + y^2$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$.

3. Az alábbi három pontban azt fogjuk belátni, hogy a két négyzetszám összegeként felírható egészek halmaza zárt a szorzásra: pl. $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, és $65 = 5 \cdot 13 = 1^2 + 8^2$. Gauss-egésznek nevezzük azon komplex számokat, melyeknek valós és képzetes része is egész. Igazoljuk, hogy egy Gauss-egésznek a konjugáltjával vett szorzata (vagyis az abszolút értékének a négyzete) egy olyan („sima” valós) egész szám, mely előáll két négyzetszám összegeként.

4. Legyen $z = a + bi$, $w = c + di$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Írjuk fel Gauss-egészként a zw szorzatot, majd az előző pont alapján írjuk fel két négyzetszám összegeként ennek abszolút értékének négyzetét, vagyis az $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ egészet.

5. Írjuk fel két négyzetszám összegeként 41-et, 53-at, majd a szorzatukat, 2173-at is.