Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2015. január 8. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Adja meg egy általános $a + bi$ algebrai alakú (nem nulla) szám reciprokának képletét algebrai alakban, illetve konkrétan a $3 - 4i$ szám reciprokát.

2. Sorolja fel a kvantorokat és jelentésüket.

3. Antiszimmetrikus-e az „osztója" reláció a természetes, illetve az egész számok halmazán?

4. Hány különböző 5 hosszú sorozat képezhető 2 darab A, 1 darab B és 2 darab C betű felhasználásával?

5. Húzza alá a megoldható kongruenciákat: $3x \equiv 4 \pmod 5$; $30x \equiv 4 \pmod 5$; $14x \equiv 4 \pmod{10}$; $13x \equiv 1 \pmod{1299}$

6. Definiálja a felbonthatatlan szám fogalmát a természetes számok körében.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Mondja ki a szorzásra és az osztásra vonatkozó Moivre-azonosságokat.

2. Mikor nevezünk trichotomnak egy relációt?

3. Definiálja a felső határ (szuprémum) fogalmát.

4. Mikor nevezünk szigorúan monoton növőnek egy $f : X \to Y$ függvényt? Milyen X, Y halmazok esetén beszélhetünk erről?

5. Hányféle különböző dobás lehetséges 10 dobókockával, ha a kockákat nem tudjuk megkülönböztetni (nem kell konkrét szám, csak a képlet)?

6. Írja fel a Pascal-háromszög első 8 sorát.

7. Mikor mondjuk az egészek körében, hogy a és b kongruensek modulo m? Hogy jelöljük?

8. Ismertesse az euklideszi algoritmus alapváltozatát.

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondja ki és bizonyítsa be a komplex n-edik gyökvonásról szóló állítást (Moivre-képlet).
2. Mondja ki és igazolja a binomiális tételt.
3. Bizonyítsa be, hogy az egészek körében a prímtulajdonság és a felbonthatatlanság ekvivalens.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

1. Azon $a + bi$ alakú komplex számok halmazát, melyeknél a is, b is egész, Gauss-egészeknek nevezzük, és G-vel jelöljük. Hasonlóan az egészekhez, azt mondjuk, hogy a osztója b-nek (jele: $a \mid b$), ha $\exists c \in G : ac = b$. Ha a, b nem nulla, akkor ez azt jelenti, hogy a komplex b/a hányados G eleme. Igaz-e, hogy $(1 + i) \mid (7 + i)$?
2. Húzza alá azon Gauss-egészeket, melyek oszthatók $(1 + i)$-vel: $4 + 3i$, $5 - 2i$, $2 + 6i$, $7 + 2i$.
3. Igaz-e, hogy egy $a+bi$ Gauss-egészről pusztán $a+b$ ismeretében eldönthető, hogy osztható-e $(1+i)$-vel? Indokoljuk a választ: igennél mondjuk meg, hogyan, nem esetén mutassunk ellenpéldát.
4. Az egész számoknál látottak mintájára definiáljuk a modulo $(1 + i)$ vett kongruenciát a Gauss-egészek körében.
5. Határozzuk meg a megoldásait a Gauss-egészek körében: $(3 + 2i)x \equiv 5 \pmod{(1 + i)}$.