Diszkrét Matematika 1.
Első zárthelyi dolgozat

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 90 perc. Minden feladat 10 pontot ér, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50.

1. Számítsa ki algebrai alakban a következőket (a, illetve b nullától különböző valós számokat jelölnek):

   a. $(2+i)^2$;
   b. $(a+3i)(b-ai)$;
   c. $(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)$;
   d. $1/(a+bi)+1/(a-bi)$;
   e. i^{2014}.

2. A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki a z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyre $w^3 = z$.

$$z = \frac{(2+2\sqrt{3}i)^{10}}{(-1+i)^{83}}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében. Az a) rész 1 pontot, minden további részfeladat 0 és 3 közötti pontot ér: minden jó z megoldás egy pont, minden rossz -1 pont, és ha negatív jönne ki: 0, ha 3-nál nagyobb, akkor 3 a részfeladat értéke. A megoldásokat algebrai alakban kérjük.

   a. $z+1 = iz$.
   b. $16z^3 = 1/z$.
   c. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)+2$.
   d. $|z| = |-2iz^2|$.

4. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \mathbb{Z}$, az egész számok halmaza. Döntsük el, létezhet-e olyan C halmaz, melyre teljesülnek az alábbiak (az 5 feltétel külön-külön), illetve, ha van ilyen C, adjunk is példát rá. Az a) 1 pontot, a többi 3-3 pontot ér.

   a. $A\Delta C = B$.
   b. $A\cup B = C\cap B$.
   c. $A\cup B = C\Delta B$.
   d. $(A\setminus B)\setminus C = (A\cup B)\setminus C$.

5. Az alábbi R relációkról döntsük el, hogy rendelkeznek-e a reflexív, szimmetrikus, illetve tranzitív tulajdonsággal az X halmazon. Számítsuk ki az $R\circ R$ relációt is: adjuk meg rendezett párok halmazaként. Adjuk meg továbbá az $R(\{1,2\})$ halmazt.

   a. $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(2,1),(3,2),(4,3),(5,5)\}$, $X = \{1,2,3,4,5\}$.
   b. $R = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{N}, x\neq y\}$, $X = \mathbb{N}$.

6. Választható az alábbi két feladat közül. A választást tüntessük fel a beadott lapon.
   6F: Legyenek A, illetve B a valós számok tetszőleges nemüres részhalmazai, f,g pedig $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények. Az alábbi állítások közül melyek igazak minden f és A,B esetén? Amelyik igaz, bizonyítsuk, amelyik hamis, ott mutassunk ellenpéldát. Igazak-e az egyes állítások, ha a függvényekről tudjuk, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek? Indokoljunk vagy adjunk ellenpéldát ebben a 3 speciális esetben is.

   a. $f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)$
   b. $f^{-1}(f(A)) = A$.

   6R: Mutassunk példát olyan R relációra, mely trichotom, de nem tranzitív, $R\circ R$ még mindig nem tranzitív, de $R\circ R\circ R$ már tranzitív.