Diszkrét matematika I. feladatok

1. Teljes indukció

Teljes indukcióval bizonyítsd be az alábbi összefüggéseket:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
4. $1 \cdot 2 \cdots m + 2 \cdot 3 \cdots (m+1) + \cdots + n(n+1) \cdots (n+m-1) = \dfrac{n(n+1) \cdots (n+m)}{m+1}$.
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
6. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{n-1}{n}$.
7. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
8. $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$.
9. $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.
10. $\dfrac{n}{2} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$.

Adj zárt formulát a következő összegekre:

11. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.
12. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$.
13. $1^2 - 2^2 + 3^2 \cdots + (-1)^{n-1} n^2$.
14. $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

2. Logikai alapok

1. Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x), E(x), O(x)$, illetve $D(x, y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve hogy x osztója y-nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Tagadjuk a formulákat formálisan, illetve köznyelvileg. Melyik rövidíthető $\exists!$ használatával?

   a) $P(7)$; **b)** $(E(2) \wedge P(2))$; **c)** $(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x)))$; **d)** $(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6)))$;
   e) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x)))$; **f)** $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y)))))$;
   g) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y)))))$; **h)** $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))))$;
   i) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(\neg x = y \wedge E(y) \wedge P(y)))))))$.

2. Jelölje $N(), E(), H()$, illetve $B()$ azt, hogy ma süt a nap, ma esik az eső, ma havazik, illetve hogy tegnap borult volt az ég. Fordítsuk le magyar nyelvre (az üres zárójelek nincsenek kiírva):

   a) $(N \Rightarrow \neg(E \wedge H))$; **b)** $(B \Leftrightarrow N)$; **c)** $(B \wedge (N \vee E))$; **d)** $((B \Rightarrow E) \vee N)$;
   e) $(N \Leftrightarrow ((E \wedge \neg H) \vee B))$; **f)** $((N \Leftrightarrow E) \wedge (\neg H \vee B))$.

3. Jelölje $N(x), F(x)$, illetve $G(x,y)$ rendre azt, hogy x nő, férfi, illetve x gyermeke y-nak. Ezek segítségével definiáld formulával a következő kapcsolatokat: x az y-nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, unokaöccse, unokahúga.

4. Jelölje $H(x,y)$ azt, hogy x és y házastársak. Ennek, valamint az előző feladat predikátumai segítségével definiáld a következő kapcsolatokat: x y-nak férje, felesége, sógóra, sógórnője, apósa, anyósa, veje, menye.

5. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L,F)$ azt, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Formalizáljuk pontosan az alábbi "gyorsírással" felírt formulákat. Döntsük el, hogy melyik következik a másikból. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, akkor a másik is.)
   $\exists L \forall F\ T(L,F)$, $\quad \forall F \exists L\ T(L,F)$, $\quad \exists F \forall L\ T(L,F)$, $\quad \forall L \exists F\ T(L,F)$, $\quad \forall L \forall F\ T(L,F)$,
   $\exists L \exists F\ T(L,F)$, $\quad \neg\exists L \exists F\ T(L,F)$, $\quad \forall F \exists L\ \neg T(L,F)$, $\quad \forall L \exists F\ \neg T(L,F)$, $\quad \forall L \forall F\ \neg T(L,F)$.

3. Halmazok

1. Legyen $A = \{p(x) \text{ polinom gyökei}\}$, $B = \{q(x) \text{ polinom gyökei}\}$ és $r(x) = p(x)q(x)$. Hogyan fejezhetjük ki az $r(x)$ polinom gyökeit A-val és B-vel?

2. Melyik az az $s(x)$ polinom, melynek gyökei D halmazára $D = A \cap B$, ahol A és B az előző feladatban szereplő halmazok?

3. Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:
   $A \cap B \neq \emptyset$, $\quad A \cap C = \emptyset$, $\quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset$.

4. Bizonyítsd be, hogy $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$.

5. Adj meg olyan halmazrendszert, mely diszjunkt de nem páronként diszjunkt. Van-e olyan halmazrendszer, mely páronként diszjunkt de nem diszjunkt?

6. Legyen $\mathcal{A} = \{\{a,b,c\}, \{a,d,e\}, \{a,f\}\}$. Mi lesz $\cup\mathcal{A}$ és $\cap\mathcal{A}$?

7. Határozd meg a $\{\{x \in \mathbb{R} : |x| < y\} : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ halmazrendszer unióját és metszetét. Mi a helyzet, ha $y \in \mathbb{N}$, illetve $y \in \mathbb{Z}$?

8. Igazoljuk, hogy $A \triangle \emptyset = A$, $\quad A \triangle A = \emptyset$, $\quad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, $\quad A \triangle (A \triangle B) = B$.

9. Fejezzük ki a $\triangle$ és $\cap$ segítségével a következőket: $A \setminus B$ és $A \cup B$.

10. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

11. Bizonyítsuk be, hogy
    a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\quad$ **b)** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; $\quad$ **c)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; $\quad$ **d)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

12. Állapítsd meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:
    $(A \cup B) \setminus A = B$; $\quad (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; $\quad (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

13. Bizonyítsd be a következő összefüggést: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

14. Egyszerűsítsd amennyire lehet a következőket: $\overline{A \cup (B \cap (C \cup \overline{D}))}$, $\quad \overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})}$.

15. Írd fel a hatványhalmazt egy-egy 0,1,2, illetve 3-elemű halmazra.

4. Relációk, függvények

4.1. Fogalmak

Rendezett pár Az (x, y) *rendezett pár* fogalmát úgy szeretnénk definiálni, hogy $(x, y) = (u, v)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $x = u$ és $y = v$. (ezt formálisan így jelöljük: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$). Az (x, y) rendezett pár első koordinátája x, a második y.

Descartes-szorzat Az X, Y halmazok *Descartes-szorzat*án az alábbi halmazt értjük:
$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Binér relációk Egy halmazt *binér reláció*nak nevezünk (vagy kétváltozós relációnak), ha minden eleme rendezett pár. Ha R egy binér reláció, akkor $(x, y) \in R$ helyett gyakran ezt írjuk: xRy, szavakkal x és y között fennáll az R reláció.

Legyen most $X = Y$, valamint R egy binér reláció $X \times X$-en. Azt mondjuk, hogy R
-*tranzitív*, ha minden x, y, z-re xRy és yRz esetén xRz teljesül (pl. $<, \leq$);
-*szimmetrikus*, ha minden x, y-ra xRy esetén yRx teljesül (pl. $=$);
-*antiszimmetrikus*, ha minden x, y-ra xRy és yRx esetén $x = y$ (pl. $\leq$);
-*reflexív*, ha minden x-re xRx teljesül (pl. $=$);
-*trichotom*, ha minden x, y esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (pl. $<$).
R *részben rendezés*, ha tranzitív, antiszimmetrikus és reflexív.

1. Az $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra harározd meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $\mathbf{R}(A)$, illetve $\mathbf{R}^{-1}(A)$ egyelemű?

2. Írd fel intervallumokkal az $x \mapsto |x|$ leképezésnél az alábbi halmazok teljes inverz képét: $[-1, 2],]1, 4[, [-1, 2[$.

3. Legyen az $\mathbf{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció olyan, hogy $n\mathbf{R}m (n, m \in \mathbb{N})$ igaz, ha n és m közös prímosztóinak a száma páros. Vizsgáljuk meg $\mathbf{R}$ tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).

4. Keressünk olyan relációt, amely
   a) reflexív, de nem tranzitív; **b)** antiszimmetrikus és reflexív; **c)** antiszimmetrikus és nem tranzitív;
   d) nem reflexív, nem tranzitív; **e)** nem tranzitív, de trichotóm;
   f) semmi (nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm).

5. Adj példát olyan relációra, amely
   a) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív; **b)** reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus;
   c) tranzitív és szimmetrikus, de nem reflexív.

6. Az emberek halmazán tekintve milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az apja, szülője, anyja, testvére, féltestvére, gyermeke, nagyszülője, unokája, nagyapja, nagyanyja, anyai nagyszülője, egyenesági leszármazottja, egyenesági rokona relációk?

7. Definiáljunk $\mathbb{Z}$-n két relációt az alábbi módon, és vizsgáljuk $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_2$ tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).
   a) $x\mathbf{R}_1y$, ha $x^2 + y^2$ osztható 2-vel; **b)** $x\mathbf{R}_2y$, ha $x^2 - y^2$ osztható 2-vel.

8. Mutasd meg, hogy ha ϱ és σ szimmetrikus relációk S-en akkor a következők ekvivalensek:
   a) $\varrho \circ \sigma$ szimmetrikus **b)** $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$

9. Határozd meg az $\mathbf{S} \circ \mathbf{R}$ és $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ szorzatot, ha
   a) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2x\}$;
   b) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y^3 = x\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \tan x\}$;
   c) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : y = \sin x\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y + 1/y = x\}$;
   d) $\mathbf{R} = \mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$; **e)** $\mathbf{R} = \mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}$;
   f) $\mathbf{R} = \mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ : x \text{ osztja } y-\text{t, de } x \neq y\}$;
   g) K és L két körlap a P síkban és $\mathbf{R} = \{(x, y) \in P \times P : x = y \text{ vagy } x, y \in K\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in P \times P : x = y \text{ vagy } x, y \in L\}$.

10. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en definiáljunk egy $\mathbf{R}$ relációt a következőképpen: $(m_1, n_1)\mathbf{R}(m_2, n_2)$, ha $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ részbenrendezés.

11. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban az $\mathbf{R}$ relációval az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ részben rendezett halmaz minden nemüres részhalmazának van minimális eleme. Hogyan kereshetjük meg?

12. Mutasd meg, hogy ha egy részbenrendezett halmazban $x < y$ és $y \leq z$, akkor $x < z$.

13. Bizonyítsd be, hogy egy részbenrendezett halmaz bármely nem üres részhalmazának bármely alsó korlátja kisebb vagy egyenlő bármely felső korlátjánál.

14. Tekintsük az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazon az "osztója" részbenrendezést. A megfelelő szigorú relációt írjuk fel párok halmazaként. Keressünk intervallumokat, részhalmazokra alsó és felső korlátokat, infimumot, szuprémumot.

15. Legyen $H \subset \mathbb{R}$. A H halmaz milyen tulajdonságát fejezik ki a következő formulák:
a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ (x < y)$; **b)** $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in H\ (x < y)$; **c)** $\forall x \in H\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x < y)$; **d)** $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (x < y)$

Függvény A *függvény* (vagy leképezés) egy olyan f reláció, melyre, ha $(x, y) \in f$ és $(x, y') \in f$, akkor $y = y'$. Magyarul minden x-hez legfeljebb egy olyan y létezik, melyre $(x, y) \in f$. Az y elemet az f függvény x helyen felvett értékének nevezzük és a szokásos módon jelöljük: $f(x) = y$ (esetleg $f : x \mapsto y$).

Az f függvényt *injektív*nek (magyarul *kölcsönösen egyértelmű*nek) nevezzük, ha $f(x) = y$ és $f(x') = y$ esetén $x = x'$. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy különböző elemek képe különböző.

Egy $f : X \mapsto Y$ függvényt *szürjektív*nek nevezünk, ha minden $y \in Y$ elemhez létezik egy $x \in X$, hogy $f(x) = y$, magyarul az egész Y előáll az f képeként.

Ha f injektív és szürjektív is, akkor *bijektív*nek mondjuk.

16. Adj példát olyan függvényre, amely
a) $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le, de nem injektív; **b)** $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le és injektív; **c)** $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le, de nem injektív; **d)** $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le és injektív; **e)** $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le; **f)** $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le, de egyik elem képe sem saját maga.

17. Legyen $A = \{$a nem negatív egészek$\}, B = \{$páros számok$\}$. Konstruálj bijektív leképezést az A és B halmazok között.

18. Konstruáljunk bijektív leképezést két tetszőleges síkbeli szakasz között.

19. Függvény-e a következő reláció? $\mathbf{R} \subseteq A \times A$, ahol $A = \{$ a síkbeli egyenesek$\}$; $a\mathbf{R}b$, ha a és b egyenesek által bezárt (a kisebb) szög $60°$: Vizsgáljuk a fenti reláció tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus).

20. Legyen $A = \{$olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített $m > 0$ számmal$\}$, $B = \{y : y > 0, y$ valós$\}$. Definiáljuk az $\mathbf{R} \subseteq A \times B$ relációt a következőképpen: $a\mathbf{R}b, a \in A, b \in B$, ha az a háromszög területe b. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

21. Legyenek $f : X \to Y, g : Y \to Z$ leképezések. Mutasd meg, hogy
a) ha f, g injektív, akkor $f \circ g$ injektív; **b)** ha f, g szürjektív, akkor $f \circ g$ szürjektív; **c)** ha f, g bijektív, akkor $f \circ g$ bijektív.

22. Határozd meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsd el, hogy függvény-e és hogy az inverze függvény-e:
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, x < y < 2x\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adott számok;
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(1 - x^2) = x - 1\}$; **c)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x - 1)/(1 - x^2)\}$;
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$; **e)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1 + y^2, y > 0\}$;
f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y < 0\}$; **g)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$; **h)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(\lfloor x \rfloor - 2) = 1\}$;
i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - \lfloor x \rfloor\}$; **j)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lfloor x^2 \rfloor\}$; **k)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$;
l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4, 0 < x < 2\}$.

23. Mutasd meg, hogy $Y^X = \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $Y = \emptyset$ és $X \neq \emptyset$.

24. Határozd meg X^Y összes elemét, ha X-nek, illetve Y-nak nulla, egy, kettő illetve három eleme van. Melyek lesznek invertálhatóak?

5. Komplex számok

5.1. Fogalmak

Új jel: i, amire igaz: $i^2 = -1$.

Minden z komplex szám a következő alakba írható: $z = a + i \cdot b$, ezt nevezzük z *algebrai alak*jának. a-t a *komplex* szám *valós részének*, b-t pedig a *képzetes részé*nek nevezzük. A z *konjugáltja* a $\bar{z} = a - i \cdot b$ komplex szám. Egy z komplex szám *abszolút érték*e a $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ szám.

Komplex számok *trigonometrikus alak*ja: $z = |z| \cdot (cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor a $-\pi < \alpha \leq \pi$ szöget z *argumentum*ának nevezzük.

Komplex számok szorzása. Legyen $z = |z| \cdot (cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$ és $w = |w| \cdot (cos\beta + i \cdot sin\beta)$. Ekkor könnyen belátható, hogy $z \cdot w = |z \cdot w| \cdot (cos(\alpha + \beta) + i \cdot sin(\alpha + \beta))$. Ebből következik, hogy minden nem nulla z komplex és minden n természetes számra $z^n = |z|^n \cdot (cos(n\alpha) + i \cdot sin(n\alpha))$.

1. Fejezd ki algebrai alakban a következő számokat:
a) $(3 + i)(2 + 3i)$; **b)** $(1 - 2i)(5 + i)$; **c)** $(2 - 5i)^2$; **d)** $(1 - i)^3$.

2. Írd a lehető legegyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:
a) i^3; **b)** i^5; **c)**i^8; **d)** $\frac{1}{i^2}$; **e)** $\frac{1}{i}$; **f)** $\frac{1}{i^3}$.

3. A következő számokat fejezd ki algebrai alakban:
a) $\frac{3 + 4i}{1 - 2i}$; **b)** $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$; **c)**$\frac{1}{(1 + i)^2}$; **d)** $\frac{1}{(2 - i)(1 + 2i)}$; **e)** $\frac{1}{2 + 3i} + \frac{1}{2 - 3i}$; **f)** $\frac{1}{3 + i} + \frac{1}{1 + 7i}$.

4. Add meg az a és b valós számok értékét, ha:
a) $(a + bi)(2 - i) = a + 3i$; **b)** $(a + i)(1 + bi) = 3b + ai$.

5. Legyen $\frac{5}{x + yi} + \frac{2}{1 + 3i} = 1$, ahol x és y valós számok. Add meg x és y értékét!

6. Add meg a következő számokat trigonometrikus alakban:
a) $\sqrt{3} + i$; **b)** $1 - i$; **c)** $4i$; **d)** -3; **e)** $\frac{10}{\sqrt{3} - i}$; **f)** $\frac{2 + 3i}{5 + i}$; **g)** $3 - 4i$; **h)** $-2 + i$.

7. Számítsd ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával: **a)** $\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$; **b)** $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$.

8. Add meg a $-7 - 24i$ komplex szám négyzetgyökeit algebrai alakban.

9. Vonjunk négyzetgyököt a következő számokból: **a)** $3 - 4i$; **b)** $2i$; **c)** $8 + 6i$.

10. Oldd meg a következő másodfokú egyenletet: $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$.

11. Számold ki a $z = -16 \cdot \sqrt{3} + 16i$ szám ötödik gyökeit!

12. Vonj harmadik gyököt **a)** 1- ből; **b)** $2 + 2i$-ből.

13. Vonj negyedik gyököt a következő számból: $\frac{-4}{(2 + i)^3}$.

14. Bizonyítsd be a komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.

15. Ábrázoljuk a $z = 2 + i$ komplex számot a Gauss-számsíkon vektorral. Adjuk meg algebrai alakban és ábrázoljuk ugyanezen az ábrán a következőket: $-z$; $\overline{z}$; $-\overline{z}$; iz; $-iz$.

16. Mi a geometriai jelentése a következőknek:
a) $|z_1 - z_2|$; **b)** i-vel való szorzás ; **c)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$-vel való szorzás; **d)** $\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$-nel való szorzás.

17. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeknek megfelelő komplex számokra
a) $|z| = 2\Re(z)$; **b)** $\left|\frac{z - 3i}{z + i}\right| \geq 1$; **c)** $z = \frac{1}{\overline{z}}$; **d)** $z = -\frac{1}{\overline{z}}$; **e)** $|z| = iz$; **e)** $|z - i| < 1$; **f)** $2 < |z| \leq 3$;
g) $|z - 1| < 1$ és $\Re(z) > 0$; **h)** $|z - 1| = 2|z - 2 + 1|$.

18. A $z = x + yi$ komplex számnak a Gauss számsíkon feleltessük meg a Z pontot. Tudjuk, hogy a $\frac{z - 2i}{z + 4}$ komplex szám valós része zérus. Bizonyítsuk be, hogy Z mértani helye egy körön van rajta. Keressük meg a kör középpontját, és mutassuk meg, hogy a sugara $\sqrt{5}$.

19. Bizonyítsd be, hogy egy p kvaternióra $|\Re(p)| \leq |p|, |\Im(p)| \leq |p|$ és $\|p| \leq |\Re(p)| + |\Im(p)|$.

20. Ha $p = 1 + i + j + k$ és $q = k$ kvaterniók, határozd meg a $\overline{p}, p^2, 1/p, q(1/p)$ és $(1/p)q$ kvaterniókat.

21. Mutasd meg, hogy ha q tetszőleges kvaternió, akkor $q - iqi - jqj - kqk = 4\Re(q)$.

6. Elemi kombinatorika

1. Az összes lehetséges módon kitöltünk TOTÓ-szelvényeket. Hány szelvényt töltöttünk ki?

2. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér és 40 zöld golyó van, ezekből húzunk. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy
a) fehér; **b)** 3 különböző színű; **c)** 3 azonos színű; **d)** 5 azonos színű; **e)** 15 azonos színű; **f)** két egymás utáni zöld húzás legyen?

3. Egy futóversenyen 25-en indulnak. Hányféle sorrendben érhetnek célba (ha mondjuk nincs holtverseny és mindenki célbaér)?

4. Mekkora az a minimális osztálylétszám, ahol biztosan teljesül, hogy
a) van négy diák, aki ugyanabban a hónapban született; **b)** minden hónapban van 3-3 születésnap?

5. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható nyolccal?

6. Mutasd meg, hogy a $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 100\pi$ számok között van olyan, amelyik nincs messzebb a legközelebbi egésztől, mint $1/101$. Általánosítsd az állítást.

7. Bizonyítsd be, hogy bármely $m \in \mathbb{N}^+$ -hoz van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy tízes számrendszerben mn minden számjegye 0 vagy 1.

8. Hány TOTÓ-t kell kitöltenünk ahhoz, hogy legyen olyan szelvényünk, amin legalább 5 találatunk van?

9. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, .., 20\}$ halmaznak? Hány részhalmazára teljesül, hogy
a) az 1 benne van; **b)** 1 és 2 is benne van; **c)** 1, vagy 2 benne van?

10. Hány hatjegyű számra igaz, hogy
a) a szomszédos számjegyei különböznek; **b)** minden jegye különböző; **c)** pontosan egy jegye 0, **d)** van 0 a jegyei között?

11. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, melyben az 1 és a 2 nem lehetnek szomszédosak?

12. Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?

13. Az $(a + b)^{22}$ kifejtésében mi az együtthatója az $a^{14}b^8$-nak, valamint az $a^{17}b^5$-nek?

14. Hány út vezet a 3×10-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak fel, jobbra, vagy jobbra-fel átlósan léphetünk?

15. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken p darab, a másikon q darab pont. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?

16. Jelöljük C_k^n-val az $x^{n-k}y^k$ együtthatóját az $(x+y)^n$ kifejezésben! Ezen számokból készül a **Pascal-háromszög**. Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit! Mit kapunk? Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit most váltakozó előjellel! Most mit kapunk?

17. Hány nullára végződik a $11^{100} - 1$ szám?

18. Mutasd meg, hogy megadható két különböző természetes szám, n és k úgy, hogy $2^n - 2^k$ osztható legyen 711-gyel!

19. Egy bolha ugrál az egyenes egész pontjain jobbra-balra, másodpercenként egyet. Ha az origóból indul és egy percig ugrál, hányféleképpen tud eljutni a +24 pontba?

20. Hányféleképpen lehet felbontani, ha a sorrend számít
a) a 100-at 7 pozitív egész szám összegére; **b)** a 200-at 12 természetes szám összegére; **c)** a 12-t olyan összegre, melyben csak 1 és 2 szerepel?

21. Hány olyan szám van összesen (akárhányjegyű lehet), melyben a számjegyek balról jobbra olvasva **a)** szigorúan monoton növekedve; **b)** szigorúan monoton csökkenve követik egymást?

22. Egy osztály 30 tanulója közül a matekot 12, a matekot és a fizikát 5, a fizikát 14, a matekot és a kémiát 4, a kémiát 13, a fizikát és a kémiát 7, mindhármat 3 szereti. Hányan vannak, akik semelyiket nem kedvelik?

23. Bizonyítsd be, hogy **a)**) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$; **b)** $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \cdots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}$.

24. Egy 25 fős osztályban küldöttséget választanak, mely 6 főből áll, majd ezen hat emberből egy-egy igazgatót és titkárt választanak. Hányféleképpen történhet ez, ha egy ember csak egy tisztséget viselhet?

25. Hozd minél egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}$.

26. Hányféleképpen lehet n darab egyforintos érmét szétosztani k ember között szétosztani? És ha mindenki kap biztosan legalább egy forintot?

27. A cukrászdában ötféle süteményt árulnak: lúdlábat, gesztenyés kockát, dobostortát, minyont és fatörzset. Mindegyikből van még legalább 20. Hányféleképpen ehetünk meg hármat, ha **a**) számít a sorrend, **b**) nem?

28. Hány 100-nál kisebb természetes szám van, mely 2,3 és 5 egyikével sem osztható? És hány olyan 1000-nél kisebb, mely 2,3,5 és 7 egyikével sem osztható?

    Szita formula: adott egy A halmaz és annak n részhalmaza: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ekkor A azon elemeinek száma, melyek egyik A_i-ben sincsenek benne, $|A|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap\cdots\cap A_n|$.

29. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni úgy, hogy minden rekeszben, amelyikben van golyó, pontosan 6 darab van és **a)** a golyók egyformák; **b)** a golyók különbözőek, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét; **c)** a golyók különbözőek, de a rekeszben nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét?

30. Egy 2x12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2x1-es dominókkal (melyeket vízszintesen és függőlegesen tehetünk le)?

31. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. Hány különböző leosztás van? Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?

32. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

33. Artúr király Kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?

7. Számelmélet

1. Állapítsd meg, milyen maradékot adnak a természetes számok négyzetei 3-mal és 5-tel osztva.

2. Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb p prímnek van 6-tal osztható szomszédja?

3. Bizonyítsd be, hogy n^5-5n^3+4n osztható 120-szal. (n tetszőleges egész szám.)

4. Bizonyítsd be, hogy $665|3^{6n}-2^{6n}$.

5. Bizonyítsd be, hogy öt egymást követő egész szám négyzetének az összege nem négyzetszám.

6. Bizonyítsuk be, hogy 30 osztója az $mn(m^4-n^4)$ számnak, bármilyen m,n egész szám esetén.

7. A szultán 100 cellájában száz rab raboskodik. A szultán leküldi egymás után 100 emberét. A k-adik alkalommal leküldött ember minden k-adik cella zárján állít egyet, ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja. Kezdetben minden cella zárva volt. Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?

8. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy n természetes számnak ugyanannyi páros osztója legyen, mint ahány páratlan?

9. Az euklideszi algoritmussal számítsd ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és add meg a legkisebb közös többszörösüket is.
   a) $a=86, b=31$; **b)** $a=139, b=102$; **c)** $a=255, b=111$; **d)** $a=332, b=88$.

10. Oldd meg az alábbi diofantikus egyenleteket:
    a) $172x+62y=38$; **b)** $82x+22y=34$; **c)** $450x+86y=100$; **d)** $125x+45y=-20$.

11. Oldd meg az alábbi kongruenciákat:
    a) $21x\equiv 14 \pmod{35}$; **b)** $172x\equiv 6 \pmod{62}$; **c)** $3x\equiv 8 \pmod{13}$; **d)** $12x\equiv 9 \pmod{18}$.

12. Keresd meg a következő egyenletek egész megoldásait kongruenciák felhasználásával: **a)** $84x+37y=2$; **b)** $41x+30y=3$.

13. Bontsd fel 463-at két természetes szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 14-gyel, a másik 23-mal. Oldjuk meg a feladatot kongruenciák segítségével.

14. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$5x \equiv 3 \pmod 7$
$3x \equiv 7 \pmod 8$.

15. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$x \equiv 2 \pmod 3$
$x \equiv 3 \pmod 4$
$x \equiv 1 \pmod 5$.

16. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$4x \equiv 2 \pmod 3$
$3x \equiv 2 \pmod 7$
$9x \equiv 7 \pmod{11}$.