Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2016. január 25. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Definiálja a komplex abszolút érték fogalmát. Írjon fel 5 olyan komplex számot algebrai alakban, melyek abszolút értéke 5.

2. Definiálja binér reláció értelmezési tartományát (domain). Mi az alábbi reláció értelmezési tartománya: $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$?

3. Húzza alá az asszociatívakat a következő (binér) műveletek közül (az alaphalmaz ay egész számok halmaza): $(a, b) \mapsto a + b$; $(a, b) \mapsto a - b$; $(a, b) \mapsto ab$; $(a, b) \mapsto \max(a, b)$. (Itt $\max(a, b)$ az a és b számok maximumát jelöli.)

4. Hány 3 elemű részhalmaza van egy k elemű halmaznak?

5. Legalább hány számot kell kiválasztani a 10-nél kisebb természetes számok közül, hogy biztosan legyen köztük olyan, amely osztója a 18-nak?

6. Definiálja a legnagyobb (kitüntetett) közös osztó fogalmát a természetes számok körében.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Definiálja a komplex egységgyök fogalmát, és sorolja fel a negyedik egységgyököket.

2. Mikor nevezünk tranzitívnak egy relációt?

3. Definiálja részbenrendezésnél a minimális, illetve legkisebb elem fogalmát.

4. Adjon meg egy olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, mely nem injektív, de szürjektív.

5. Írja fel a (logikai) szita formulát.

6. Mondja ki az ismétléses variációk számára vonatkozó tételt.

7. Definiálja a maradékosztály és a redukált maradékosztály fogalmát.

8. Mondja ki Eukleidész tételét.

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondja ki és bizonyítsa a relációkompozíció asszociativitására vonatkozó tételt.
2. Mondja ki és igazolja az ismétléses kombinációk számára vonatkozó tételt.
3. Mondja ki és igazolja az egészek körében felbonthatatlanság és a prímtulajdonság egybeeséséről szóló tételt.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

A binomiális tétel segítségével beláttuk, hogy $n \leq 1$ esetén $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots$, illetve azt, hogy $0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots$. A két egyenletet összeadva látható, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorának minden második elemének összege, vagyis $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$.

Az alábbiakban levezetünk egy képletet a Pascal háromszög minden negyedik elemének összegére, vagyis a $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$ összegre.

1. Legyen k egész szám. Igazoljuk, hogy ha k osztható 4-gyel, akkor $i^0 + i^k + i^{2k} + i^{3k} = 1$.
2. Legyen k egész szám. Igazoljuk, hogy ha k nem osztható 4-gyel, akkor $i^0 + i^k + i^{2k} + i^{3k} = 0$.
3. Írjuk fel a binomiális tétel segítségével az $S_k = (1 + i^k)^n$ összegeket a $k = 0, 1, 2, 3$ értékekre (az i^k alak helyett a konkrét értékkel dolgozzunk).
4. Felhasználva az első két pontot, az $S_0 + S_1 + S_2 + S_3$ összeg vizsgálatával adjunk képletet az $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$ összegre.
5. Milyen n értékekre lesz igaz, hogy $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = 2^{n-2}$?