Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2016. január 14. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Írja fel az alábbi három komplex számot trigonometrikus alakban: i, -7, $-2+2i$.

2. Mikor nevezünk egy $f : A \to B$ függvényt szürjektívnek? Szürjektív-e az $f(x) = -x + 4$ függvény, ha $A = B = \mathbb{Z}$?

3. Húzza alá a kommutatívakat a következő (binér) műveletek közül (az alaphalmaz az egész számok halmaza): $(a, b) \mapsto a+b$; $(a, b) \mapsto a-b$; $(a, b) \mapsto ab$; $(a, b) \mapsto \max(a, b)$. (Itt $\max(a, b)$ az a és b számok maximumát jelöli.)

4. Hányféle sorrendben lehet leírni egy k elemű halmaz elemeit?

5. Hogyan szól a logikai szita három halmaz uniójának elemszámára?

6. Soroljon fel 5 tulajdonságot a természetes számok körében az „osztója” relációra.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Definiálja a komplex egységgyök fogalmát, és sorolja fel a negyedik egységgyököket (algebrai alakban).

2. Mikor nevezünk tranzitívnak egy relációt?

3. Definiálja részbenrendezésnél a maximális, illetve legnagyobb elem fogalmát. Következik-e valamelyik a másikból?

4. Adjon meg egy olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, mely nem szürjektív, de injektív.

5. Írja fel a polinomiális tételt.

6. Mondja ki az ismétléses variációk számára vonatkozó tételt.

7. Definiálja a maradékosztály és a redukált maradékosztály fogalmát.

8. Ismertesse az Euler-féle φ függvény kiszámítására vonatkozó képletet (a prímfelbontásból, precízebben a kanonikus alakból kiindulva).

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Igazolja, hogy relációk kompozíciója asszociatív.
2. Mondja ki és igazolja az ismétléses permutációk számára vonatkozó tételt.
3. Mondja ki és igazolja az Euler–Fermat-tételt.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

1. Kommutatív, illetve asszociatív-e az egész számok halmazán az $f : (a, b) \mapsto a + b - 1$ művelet?
2. Asszociatív-e az egész számok halmazán a $g : (a, b) \mapsto ab + a + b$ művelet?
3. Asszociatív-e az egész számok halmazán az $(a, b) \mapsto ab + 2a + 2b$ művelet?
4. Milyen k konstansokra lesz asszociatív az $(a, b) \mapsto ab + 2a + 2b + k$ művelet az egészek halmazán?
5. Igaz-e, hogy a g művelet disztributív f-re?