Diszkrét Matematika 1.
Első zárthelyi dolgozat

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 90 perc. Minden feladat 10 pontot ér, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50.

1. Számítsa ki algebrai alakban a következőket:

   a. $(2+i)(3+2i)$;
   b. $(-7+i)^2$;
   c. $(1+2i)(2+i)$;
   d. $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}$;
   e. $(1-i)^8$.

2. A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki a z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyre $w^3=z$.

$$z=\frac{(1+1\sqrt{3}i)^{12}}{(-1+i)^{18}}$$

3. Hol találhatók a komplex számsíkon azon pontok, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek? Készítsünk ábrát, írjuk le a geometriai alakzatot szavakkal, és adjunk meg legalább egy konkrét számpéldát.

   a. $z=\overline{z}$.
   b. $z=|z|$.
   c. $|z-2+i|\geq 3$.
   d. $|z|=|-iz^2|$.

4. Legyen $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\mathbb{Z}$, az egész számok halmaza. Az alábbiak közül melyek igazak minden C halmaz esetén? Indokoljunk vagy adjunk ellenpéldát. Az a) 2 pontot, a többi 4-4 pontot ér.

   a. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
   b. $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.
   c. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.

5. Az alábbi R, illetve S relációkról döntsük el, hogy rendelkeznek-e a reflexív, szimmetrikus, tranzitív, illetve antiszimmetrikus tulajdonsággal az X, illetve Y halmazon. Számítsuk ki az $R\circ S$ és $S\circ R$ relációkat is: adjuk meg rendezett párok halmazaként.

   a. $R=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, $X=\{1,2,3,4,5\}$.
   b. $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},|x-y|=2\}$, $Y=\mathbb{N}$.

6. Választható az alábbi két feladat közül. A választást tüntessük fel a beadott lapon.
   6F: Legyen $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{6,7,8,9\}$. Adjon meg egy-egy olyan $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényt, melyekre

   a. $f(A)\subseteq B$.
   b. $f(A)\cap B=\emptyset$.
   c. $\forall x\in A: f(x)^2\in B$.
   d. $f(A\cup B)\neq f(A)\Delta f(B)$.
   e. $f^{-1}(B)$ kételemű

   6R:

   a. Legyen $R\subseteq A\times A$ tranzitív és reflexív reláció! Igazolja, hogy $R\circ R=R$!
   b. Bizonyítsa be, hogy minden reláció, amely egyszerre tranzitív és irreflexív is, az szigorúan antiszimmetrikus is!