Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2015. január 5. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Definiálja a komplex abszolút érték fogalmát. Írjon fel 5 olyan komplex számot algebrai alakban, melyek abszolút értéke 5.

2. Definiálja binér reláció értelmezési tartományát (domain). Mi az alábbi reláció értelmezési tartománya: $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$?

3. Húzza alá az asszociatívakat a következő (binér) műveletek közül (az alaphalmaz ay egész számok halmaza): $(a, b) \mapsto a + b$; $(a, b) \mapsto a - b$; $(a, b) \mapsto ab$; $(a, b) \mapsto \max(a, b)$. (Itt $\max(a, b)$ az a és b számok maximumát jelöli.)

4. Hány 3 elemű részhalmaza van egy k elemű halmaznak?

5. Legalább hány számot kell kiválasztani a 10-nél kisebb természetes számok közül, hogy biztosan legyen köztük olyan, amely osztója a 18-nak?

6. Definiálja a legnagyobb (kitüntetett) közös osztó fogalmát a természetes számok körében.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Definiálja a komplex egységgyök fogalmát, és sorolja fel a negyedik egységgyököket.

2. Mikor nevezünk tranzitívnak egy relációt?

3. Definiálja részbenrendezésnél a minimális, illetve legkisebb elem fogalmát.

4. Adjon meg egy olyan $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, mely nem injektív, de szürjektív.

5. Írja fel a szita formulát.

6. Mondja ki az ismétléses variációk számára vonatkozó tételt.

7. Definiálja a maradékosztály és a redukált maradékosztály fogalmát.

8. Mondja ki Eukleidész tételét.

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondja ki és bizonyítsa a relációkompozíció asszociativitására vonatkozó tételt.
2. Mondja ki és igazolja az ismétléses kombinációk számára vonatkozó tételt.
3. Mondja ki és igazolja az Euler–Fermat-tételt.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

1. Vezessünk be két új fogalmat: a természetes számok halmazán értelmezett háromváltozós (vagy ternér) műveleten egy $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt értünk. Hívjuk f-et triszociatívnak, ha minden a, b, c, d, e természetes szám esetén $f(f(a, b, c), d, e) = f(a, b, f(c, d, e))$. Igazoljuk, hogy az $f : (a, b, c) \mapsto a + b + c$ ternér művelet triszociatív.
2. Triszociatív-e $f : (a, b, c) \mapsto a + b - c$?
3. Triszociatív-e $f : (a, b, c) \mapsto a - b + c$?
4. Triszociatív-e $f : (a, b, c) \mapsto a^{(b^c)}$?
5. Igaz-e, hogy ha $\circ$ egy binér asszociatív művelet, és az $f : (a, b, c) \mapsto a \circ b \circ c$ ternér művelet triszociatív, akkor $\circ$ kommutatív?