Diszkrét matematika I. középszint

3. előadás

Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2014. ősz

Relációk

A relációk

- a függvényfogalom általánosításai;
  - ,,hagyományos'' függvények pontos definiálása;
  - ,,többértékű függvények''
- kapcsolatot ír le
  - $=$, $<$, $\leq$, oszthatóság, ...

Rendezett pár

Adott $x \neq y$ és (x, y) rendezett pár esetén számít a sorrend:

- $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $(x, y) \neq (y, x)$.

Definíció

Az (x, y) rendezett párt a $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazzal definiáljuk.
Az (x, y) rendezett pár esetén a x az első, az y a második koordináta.

Definíció

Az X, Y halmazok Descartes-szorzatán az

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Binér relációk

Adott X, Y halmazok esetén az $R \subset X \times Y$ halmazokat binér (kétváltozós) relációknak nevezzük.
Ha R binér reláció, akkor gyakran $(x, y) \in R$ helyett xRy-t írunk.

Példa

1. $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ az egyenlőség reláció.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \mid y\}$ az osztója reláció.
3. $\mathcal{F}$ halmazrendszer esetén az $\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subset Y\}$ a tartalmazás reláció.
4. Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén a függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

Definíció

Ha valamely X, Y halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között.
Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció).

Relációk értelmezési tartománya, értékkészlete

Ha R reláció X és Y között ($R \subset X \times Y$) és $X \subset X'$, $Y \subset Y'$, akkor R reláció X' és Y' között is!

Definíció

Az $R \subset X \times Y$ reláció értelmezési tartománya a

$$\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in R\},$$

értékkészlete

$$\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y | \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

1. Ha $R = \{(x, 1/x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
2. Ha $R = \{(1/x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Relációk kitejesztése, leszűkítése, inverze

Definíció

Egy R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (megszorításának) nevezzük, ha $S \subset R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való leszűkítése (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Példa

Legyen $R = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(\sqrt{x}, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.
Ekkor R az S kiterjesztése, S az R leszűkítése, $S = R|_{\mathbb{R}_0^+}$
(ahol $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok halmaza).

Definíció

Egy R binér reláció inverze az $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Példa

$R^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy binér reláció, A egy halmaz. Az A halmaz képe az $R(A) = \{y \in Y | \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, vagyis a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

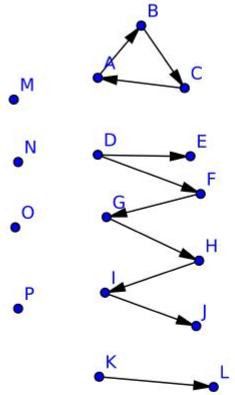
Példa

Legyen $R = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

- $R(\{9\}) = \{-3, +3\}$ (vagy röviden $R(9) = \{-3, +3\}$),
- $S(9) = \{+3\}$.

Példa

Legyen R reláció az $X = \{A, B, C, \ldots, P\}$ halmazon, és legyen $T \to T'$, ha $(T, T') \in R$.



- $\mathrm{dmn}(R) = \{A, B, C, D, F, G, H, I, K\}$.
- $\mathrm{rng}(R) = \{A, B, C, E, F, G, H, I, J, L\}$.
- $R|_{\{A,B,C,D\}} = \{(A, B), (B, C), (C, A), (D, E), (D, F)\}$.

Kompozíció

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”:

Példa

Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
$S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

Ekkor

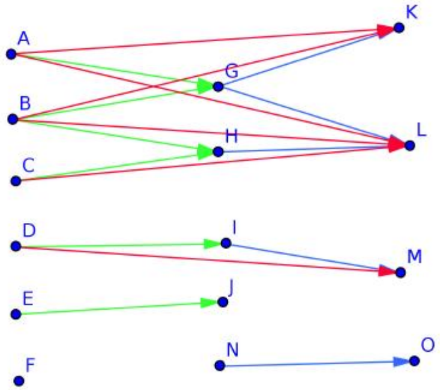
$$\begin{aligned} R_{\sin} \circ S_{\log} &= \{(x, y) | \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$

Kompozíció

$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}$

Példa

Legyen S, R két reláció, és tekintsük a $T = R \circ S$ kompozíciót:



Példa

Adott cég esetén legyenek A ,B, . . . , J az alkalmazottak. A cég két projekten dolgozik: BANK, JÁTÉK.

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
programozó	C, D, E
tesztelő	F, G, H
HR	I
tech. dolgozó	J

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F	2014.12.31.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, H	2015.01.31.

Legyen B a beosztás reláció: például A B menedzser.
P a projekt reláció: például A P BANK
H a határidő reláció: például BANK H 2014.12.31.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK).
- Kik a tesztelők? B^{-1}(tesztelő).
- Mi a BANK projekt határideje? H(BANK).
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$.
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}$(tesztelő).

Kompozíció

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}$$

Állítás

Legyen R, S, T binér reláció. Ekkor

1. Ha $\mathrm{rng}(S) \supset \mathrm{dmn}(R)$, akkor $\mathrm{rng}(R \circ S) = \mathrm{rng}(R)$.
2. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ (a kompozíció asszociatív).
3. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás

1. $\mathrm{rng}(R) = \{y | \; \exists z : \; (z, y) \in R\}$. Mivel $\mathrm{rng}(S) \supset \mathrm{dmn}(R)$, ezért minden $(z, y) \in R$ esetén $\exists x : (x, z) \in S$, így $(x, y) \in R \circ S$.
2. $R \circ (S \circ T) = \{(w, z) | \exists y : (w, y) \in S \circ T, (y, z) \in R\} = \{(w, z) | \exists y \exists x : (w, x) \in T, (x, y) \in S, (y, z) \in R\} = (R \circ S) \circ T$.
3. $(R \circ S)^{-1} = \{(y, x) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\} = \{(y, x) | \exists z : (z, x) \in S^{-1}, (y, z) \in R^{-1}\} = S^{-1} \circ R^{-1}$. □

Relációk tulajdonságai

Példa

Relációk: $=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subset$, $T = \{(x,y):\ x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < 1\}$.

Definíció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

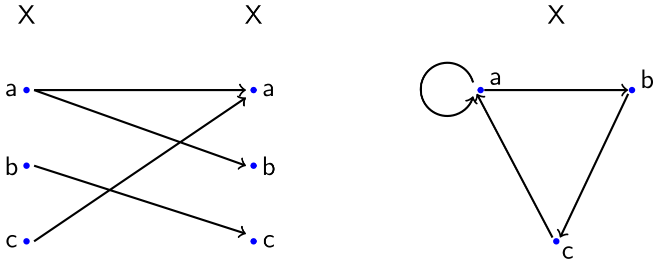
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subset$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;($=$, $\leq$, $\subset$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$; ($=$, $\leq$, $|$, $\subset$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő). ($\leq$)

Relációk tulajdonságai

A reflexív, trichotóm, dichotóm tulajdonságok nem csak a relációtól függnek, hanem az alaphalmaztól is:

Az $\{(x,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$-en értelmezett reláció reflexív, de mint $\mathbb{C}$-n értelmezett reláció nem reflexív.

Példa

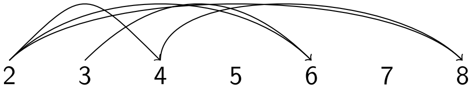


tranzitív	X	szigorúan antiszimmetrikus	X	trichotóm	X
szimmetrikus	X	reflexív	X	dichotóm	X
antiszimmetrikus	✓	irreflexív	X		

Relációk gráfja

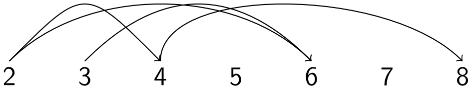
A relációk gráfját egyszerűsíthetjük:

- Ha egy reláció reflexív, akkor a hurokéleket nem rajzoljuk.



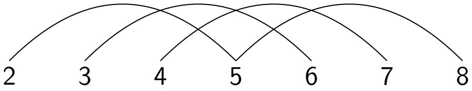
osztója reláció

- Ha egy reláció tranzitív, akkor elhagyjuk az olyan éleket, amelyek létezése a tranzitivitás miatt a már berajzolt élekből következik.



osztója reláció

- Ha egy reláció szimmetrikus, akkor irányított élek helyett csak éleket (vonalakat) rajzolunk.



$\equiv$ mod3

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Definíció

Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** mondjuk, ha reflexív, szimmetrikus, tranzitív.

Példa

1. $=$; 2. $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$.

Definíció

Az X részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszerét az X **osztályozásának** nevezzük, ha $\mathcal{O}$ páronként diszjunkt nem-üres halmazokból álló halmazrendszer és $\cup\mathcal{O} = X$.

Példa

1. $\mathbb{R}$ egy osztályozása: $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathbb{C}$ egy osztályozása: $\{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\}$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az $\overline{x} = \{y \in X : y \sim x\}$ $(x \in X)$, ekvivalenciaosztályok X-nek egy osztályozását adják, ezt az osztályozást $X/\sim$ -mal jelöljük.

Bizonyítás

Legyen $\sim$ egy X-beli ekvivalenciareláció. Azt kell megmutatni, hogy $X/\sim = \{\overline{x} : x \in X\}$ az X egy osztályozását adja.

- Mivel $\sim$ reflexív, így $x \in \overline{x} \Rightarrow \bigcup_x \overline{x} = X$.
- Különböző ekvivalenciaosztályok páronként diszjunktak. Tfh $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, legyen $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. Mivel $z \in \overline{x} \Rightarrow z \sim x$, ahonnan a szimmetria miatt $x \sim z$. Hasonlóan $z \in \overline{y} \Rightarrow z \sim y$. A tranzitivitás miatt $x \sim z \sim y \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x \in \overline{y}$. Hasonlóan $y \in \overline{x} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$. $\square$

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmazon bármely $\mathcal{O}$ osztályozás esetén az $R = \bigcup\{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$ reláció ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó ekvivalenciaosztályok halmaza $\mathcal{O}$.

Bizonyítás

- R reflexív: legyen az x osztálya Y: $x \in Y \in \mathcal{O}$. Ekkor $(x,x) \in Y \times Y$.
- R szimmetrikus: legyen az $(x,y) \in R$. Ekkor $x,y \in Y$ valamely Y osztályra, speciálisan $(y,x) \in Y \times Y$.
- R tranzitív: hasonlóan legyen $(x,y),(y,z) \in R$, ezért $x,y \in Y$, $y,z \in Y'$. Mivel az osztályok páronként diszjunktak, így $Y = Y'$, speciálisan $z \in Y$, azaz $(x,z) \in Y \times Y$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Az ekvivalenciarelációk illetve osztályozások kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Példa

- $= \longleftrightarrow \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
- $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \longleftrightarrow \{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\}$.

Példa

- A síkon két egyenes legyen $\sim$ szerint relációban, ha párhuzamosak. Ekkor az osztályok az irány fogalomát adják.
- A síkon két szakasz legyen $\sim$ szerint relációban, ha egybevágóak. Ekkor az osztályok a hossz fogalomát adják.
- Két egész számpár esetén $(r, s) \sim (p, q)$ $(s, q \neq 0)$, ha $r \cdot q = p \cdot s$. Ekkor az osztályok a racionális számok halmaza.

Részbenrendezés, rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, $\ldots$)
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

Ha egy részbenrendezés esetén bármely két elem összehasonlítható, akkor az rendezés.

Példa

- $\mathbb{R}$-en a $\leq$ reláció rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ vagy $y \leq x$.
- $\mathbb{N}$-en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés: $4 \nmid 5$, $5 \nmid 4$.
- Az X halmaz összes részhalmazán a $\subset$ reláció részbenrendezés $X = \{a, b, c\}$, $\{a\} \not\subset \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subset \{a\}$.

Szigorú és gyenge reláció

Definíció

Az X-beli R relációhoz tartozó szigorú reláció, az az S reláció, melyre $xSy \iff xRy \wedge x \neq y$.
Az X-beli R relációhoz tartozó gyenge reláció, az a T reláció, melyre $xTy \iff xRy \vee x = y$.

Másképpen megfogalmazva:
$S = R \setminus \mathbb{I}_X$, $T = R \cup \mathbb{I}_X$, ahol $\mathbb{I}_X = \{(x,x) : x \in X\}$.

Példa

- $\leq$ relációhoz tartozó szigorú reláció: $<$.
- $\subset$ relációhoz tartozó szigorú reláció: $\subsetneq$.
- osztója relációhoz tartozó szigorú reláció: valódi osztója.

Szigorú és gyenge rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett tranzitív és irreflexív relációt szigorú részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $<$, $\prec$, ...)

Megjegyzések

- A tranzitivitásból és az irreflexivitásból következik a szigorú antiszimmetria: ha $x \prec y$ és $y \prec x$ tranzitivitás miatt $x \prec x$, ami ellentmondás.
- Egy részbenrendezés relációnak szigorú változata szigorú részbenrendezés, és fordítva: $\prec = \preceq \setminus \mathbb{I}_X$, $\preceq = \prec \cup \mathbb{I}_X$.

Állítás

Ha a $\preceq$ reláció rendezés, akkor $\prec$ trichotóm, és fordítva.

Bizonyítás

Kell: $x = y$, $x \prec y$ és $y \prec x$ egyszerre nem teljesülhet. Ha $x = y$, akkor igaz az állítás. Továbbá $x \prec y$ és $y \prec x$ sem teljesülhet egyszerre.

Intervallumok

Definíció

Legyen X egy részbenrendezett halmaz. Ha $x \preceq z$ és $z \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy z az x és y közé esik, ha $x \prec z$ és $z \prec y$, akkor azt mondjuk, hogy z szigorúan az x és y közé esik. Az összes ilyen elem halmazát $[x, y]$, ill. (x, y) jelöli. A $[x, y)$, ill. $(x, y]$ jelölések definíciója analóg.

Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval.
Ekkor $[\{a\}, \{a, b, c\}] = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$;
$(\{a\}, \{a, b, c\}) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}\big\}$.

Legyen X a pozitív egész számok halmaza az osztója relációval.
Ekkor $[2, 12] = \{2, 4, 6, 12\}$;
$(2, 12) = \{4, 6\}$.

Intervallumok

Definíció

Ha $x \prec y$, de nem létezik szigorúan x és y közé eső elem, akkor x közvetlenül megelőzi y-t.

Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval. Ekkor az $\{a\}$ közvetlenül megelőzi $\{a, b\}$-t, illetve $\{a, c\}$-t.

Legyen X a pozitív egész számok halmaza az osztója relációval. Ekkor 2 közvetlenül megelőzi a 4, 6, 10, 14 elemeket.

Definíció

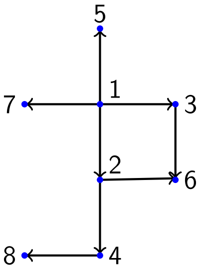
Az $\{y \in X : y < x\}$ részhalmazt az x elemhez tartozó kezdőszeletnek nevezzük.

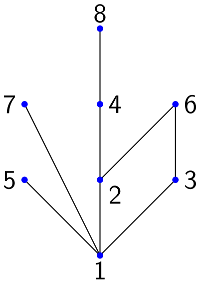
Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval. Ekkor az $\{a, b\}$ elemhez tartozó kezdőszelet: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

Részbenrendezések Hasse-diagramja

Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon (x, y) párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x közvetlenül megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.





Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

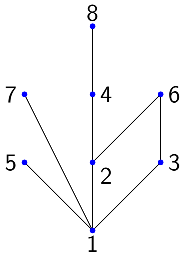
Definíció

Az X részbenrendezett halmaz
legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \preceq y$;
legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \preceq x$;
minimális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ y \preceq x$;
maximális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ x \preceq y$.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatóságra:

legkisebb elem: 1,
legnagyobb elem: nincs,
minimális elem: 1,
maximális elemek: 5, 6, 7, 8.



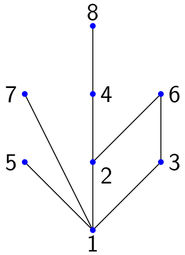
Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Megjegyzések

- Minimális és maximális elemből több is lehet.
- Ha a halmaz rendezett, akkor a minimális és legkisebb elem, továbbá a maximális és legnagyobb elem egybeesik.
- Ha X-nek létezik egyértelmű minimális, ill. maximális eleme, akkor azt $\min X$, ill. $\max X$ jelöli.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatóságra:



$\min X = 1$,

$\max X$ nincs.

Korlátok

Definíció

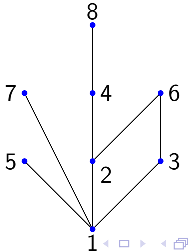
Egy X részbenrendezett halmaz x eleme az Y részhalmaz
alsó korlátja, ha $\forall y \in Y : x \preceq y$;
felső korlátja, ha $\forall y \in Y : y \preceq x$.
Ha az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor ez az Y **infimuma**: $\inf Y$, ha a felső korlátok halmazában van legkisebb elem, akkor ez az Y **supremuma**: $\sup Y$.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ az oszthatóságra:

$\{1, 2, 3\}$ alsó korlátja: 1,
felső korlátja: 6,
infimuma: 1,
supremuma: 6.

$\{2, 3, 4\}$ alsó korlátja: 1,
felső korlátja: nincs,
infimuma: 1,
supremuma: nincs.



Korlátok

Definíció

Ha az X részbenrendezett halmaz bármely nem üres, felülről korlátos részhalmazának van supremuma, akkor felső határ tulajdonságúnak nevezzük, ha bármely nem üres, alulról korlátos részhalmazának van infimuma, akkor X-et alsó határ tulajdonságúnak nevezzük.

Példa

- A pozitív egész számok halmaza az oszthatóságra nézve alsó, és felső határ tulajdonságú:
  Ha $Y = \{a_1, a_2, \dots\}$, akkor $\inf Y = lnko(a_1, a_2, \dots)$, felső határa $lkkt(a_1, a_2, \dots)$.
- A racionális számok halmaza a szokásos rendezésre nézve sem alsó, sem felső határ tulajdonságú:
  $Y = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq \sqrt{2}\}$ halmaznak van felső korlátja (pl.: 1000, 999, 2, $1,42$, ...), de nincs (racionális) supremuma (a supremum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ lenne).