Diszkrét matematika I. középszint

2. előadás

Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2014. ősz

Matematikai logika

A logika a helyes következtetés tudománya.
Alkalmazási területek:

- matematika;
- informatika;
- mesterséges intelligencia;
- ...

Példa
Minden bogár rovar.
tagadás: Van olyan bogár, ami nem rovar.
Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár.
tagadás: ?

Axiomatikus módszer

A tudományok a valóság egy részének modellezésével foglalkoznak.
Axiomatikus módszer: közismert, nem definiált fogalmakból (alapfogalmakból) és bizonyos feltevésekből (axiómákból) a logika szabályai szerint milyen következtetéseket vonunk le (milyen tételeket bizonyítunk).

Példa

Euklidészi geometria

Alapfogalmak

- pont,
- egyenes,
- sík.

Axiómák

- párhuzamossági axióma,
- ...

Az axiomatikus módszer előnye: elég ellenőrizni az axiómák teljesülését.

Predikátumok

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő definiálatlan alapfogalom, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik: igaz($I, \uparrow$), hamis ($H, \downarrow$) és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Példa

$M()$:Minden jogász hazudik.	0-változós, értéke: I.
$Sz(x)$: x egy szám.	1-változós, értéke: Sz(1)=I, SZ(h)=H.
$E(x)$: x egy egyenes.	1-változós.
$P(x)$: x egy pont.	1-változós.
$I(x,y)$: x illeszkedik y-ra.	2-változós.
$F(x,y)$: x az y férje.	2-változós.
$Gy(x,y,z)$: x az y és z gyermeke.	3-változós.

Logikai jelek

A predikátumokat logikai jelekkel tudjuk összekötni:
Tagadás, jele: $\neg A$.

És, jele: $A \wedge B$

Vagy (megengedő), jele: $A \vee B$.

Ha..., akkor... (implikáció), jele: $A \Rightarrow B$.

Ekvivalencia, jele: $A \Leftrightarrow B$.

Igazságtáblázat

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	H	I	H	H	I	I

Logikai jelek

A köznyelvben a **vagy** háromféle értelemmel bírhat:

Megengedő **vagy** ,,Átok reá ki gyávaságból **vagy** lomhaságból elmarad,. . . "

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

Kizáró **vagy**: ,,**Vagy** bolondok vagyunk és elveszünk egy szálig, **vagy** ez a mi hitünk valóságra válik."

$A \oplus B$	I	H
I	H	I
H	I	H

Összeférhetetlen **vagy**: ,,Iszik **vagy** vezet!"

$A \| B$	I	H
I	H	I
H	I	I

Logikai jelek

Az implikáció ($A \Rightarrow B$) csak logikai összefüggést jelent és nem okozatit!

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Példa

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow$ kedd van

Hamis állításból minden következik:

Példa

$2 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -2$

Adott logikai jel, más módon is kifejezhető:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Kvantorok

Kvantorok

$\exists$ egzisztenciális kvantor: ,,létezik", ,,van olyan".
$\forall$ univerzális kvantor: ,,minden".

Példa
$V(x)$: x veréb.
$M(x)$: x madár.

Minden veréb madár. $\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))$.

Van olyan madár, ami veréb. $\exists x(M(x) \wedge V(x))$.

Minden veréb madár, de nem minden madár veréb.

$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x)))$.

Formulák

A formulák predikátumokból és logikai jelekből alkotott „mondatok”.

Definíció(Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, ún. elemi formulák.
- Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$,$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$,$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x \mathcal{A})$ és $(\forall x \mathcal{A})$ is formulák.

Példa

Minden veréb madár, de nem minden madár veréb.

$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x)))$.

Ez egy formula.

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatóak.

Zárt/ nyitott formulák

Definíció

Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x \mathcal{A})$ és $(\forall x \mathcal{A})$ formulákban az x változó minden előfordulása az $\mathcal{A}$ formulában a kvantor hatáskörében van.
Ha egy formulában a változó adott előfordulása egy kvantor hatáskörében van, akkor az előfordulás kötött, egyébként szabad.
Ha egy formulában a változónak van szabad előfordulása, akkor a változó szabad változó, egyébként kötött változó.
Ha egy formulának van szabad változója, akkor nyitott formula, egyébként zárt formula.

Példa
$Gy(x,y)$: x gyereke y-nak.
$\exists y \; Gy(x,y)$: x-nek létezik szülője.

Zárt/nyitott formulák

Példa

$E(x)$: x egy egyenes.

$P(x)$: x egy pont.

$I(x,y)$: x illeszkedik y-ra.

$E(x), P(x), I(x,y)$ (elemi) nyitott formulák.

$\mathcal{A}(x,y)$ legyen $E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y)$!

Az x egyenes illeszkedik az y pontra.

$\mathcal{B}(x,y)$ legyen $P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)$! Az x és y pontok különbözőek.

$\mathcal{C}(x)$ legyen $\exists y\,(E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y))$!

Van olyan y pont, ami illeszkedik az x egyenesre.

Itt x szabad y kötött változó.

$\mathcal{D}()$ legyen $\forall x\,(E(x) \Rightarrow \exists y\,(E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y)))$

Minden x egyenes esetén, van olyan y pont, ami illeszkedik az x egyenesre.

Itt x, y kötött változó.

Halmazok

Halmazelméletben az alapvető fogalmak predikátumok, nem definiáljuk őket:

- A **halmaz** (rendszer, osztály, összesség,...) elemeinek gondolati burka.
- $x \in \mathcal{A}$, ha az x eleme az $\mathcal{A}$ halmaznak.

A halmazok alapvető tulajdonságai axiómák, nem bizonyítjuk őket.
Példa:

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

- Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.
- Egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme.

Halmazok

Részhalmazok

Definíció

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak: $A \subset B$, ha $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Ha $A \subset B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz. HF)

1. $\forall A \quad A \subset A$ (reflexivitás).
2. $\forall A, B, C \quad (A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (tranzitivitás).
3. $\forall A, B \quad (A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$ (antiszimmetria).

Halmazok egyenlősége egy további tulajdonságot is teljesít:
3'. $\forall A, B \quad A = B \Rightarrow B = A$ (szimmetria).

Halmazok

Definíció

A halmaz és $\mathcal{F}(x)$ formula esetén $\{x \in A : \mathcal{F}(x)\} = \{x \in A | \mathcal{F}(x)\}$ halmaz elemei pontosan azon elemei A-nak, melyre $\mathcal{F}(x)$ igaz.

Példa

- $\{z \in \mathbb{C} : Im\ z = 0\}$: valós számok halmaza.
- $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} \quad z^n = 1\}$: komplex egységgyökök halmaza.

Halmazok

Speciális halmazok

Üres halmaz Annak a halmaznak, melynek nincs eleme a jele: $\emptyset$. A meghatározottsági axióma alapján ez egyértelmű.
$\forall A \quad A$ halmaz $\Rightarrow \emptyset \subset A$

Halmaz megadása elemei felsorolásával. Annak a halmaznak, melynek csak az a elem az eleme a jelölése: $\{a\}$. Annak a halmaznak, melynek az a és b az eleme a jelölése: $\{a, b\}$,...

Speciálisan $\emptyset = \{\}$, illetve, ha $a = b$, akkor $\{a\} = \{a, b\} = \{b\}$.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az A és B halmazok **uniója**: $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B elemeit tartalmazza.
Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cup\mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ az a halmaz, mely az $\mathcal{A}$ összes elemének elemét tartalmazza.
Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{n : n \equiv 0 \mod 2\} \cup \{n : n \equiv 1 \mod 2\} = \mathbb{Z}$

Rövidebben, ha $\overline{a} = \{n : n \equiv a \mod m\}$, akkor

- $m = 2$ esetén $\overline{0} \cup \overline{1} = \mathbb{Z}$

Általában

- $\cup\{\overline{a} : a \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\} = \cup_{a=0}^{m-1} \overline{a} = \mathbb{Z}$

Műveletek halmazokkal

Az unió tulajdonságai

Állítás

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
4. $A \cup A = A$ (idempotencia)
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bizonyítás

- 1. Egy x pontosan akkor eleme mindkét oldalnak, ha $x \in A$
- 2. Egy x pontosan akkor eleme mindkét oldalnak, ha $x \in A$ vagy $x \in B$
- 3-as, 4-es hasonló
- 5. $\Rightarrow$: $A \subset B \Rightarrow A \cup B \subset B$, de $A \cup B \supset B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.
  $\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az A és B halmazok metszete: $A \cap B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B közös elemeit tartalmazza: $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$.
Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer)! Ekkor $\cap\mathcal{A} = \cap\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cap_{A\in\mathcal{A}} A$ a következő halmaz

$$\cap\mathcal{A} = \{x : \forall A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$.
- Ha $E_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ az n-edik egységgyökök halmaza, akkor
    - $E_2 \cap E_4 = E_2$
    - $E_6 \cap E_8 = E_2$
    - $E_n \cap E_m = E_{(n,m)}$
    - $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 = \{1\}$

Műveletek halmazokkal

Definíció

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer és $\cap\mathcal{A} = \emptyset$, akkor $\mathcal{A}$ diszjunkt, illetve $\mathcal{A}$ elemei diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer és $\mathcal{A}$ bármely két eleme diszjunkt, akkor $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak.

Példa

- Az $\{1, 2\}$ és $\{3, 4\}$ halmazok diszjunktak.
- Az $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ és $\{1, 3\}$ halmazok diszjunktak, de nem páronként diszjunktak.
- Az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ és $\{5, 6\}$ halmazok páronként diszjunktak.

Műveletek halmazokkal

A metszet tulajdonságai

Állítás (Biz. HF)

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
4. $A \cap A = A$ (idempotencia)
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Műveletek halmazokkal

Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai

Állítás

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bizonyítás

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$.
   Így x pontosan akkor eleme a bal oldalnak, ha $x \in A \wedge x \in B$ vagy $x \in A \wedge x \in C$ azaz $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. HF. hasonló

Különbség, komplementer

Definíció

Az A és B halmazok különbsége az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Definíció

Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subset X$ részhalmaz esetén az A halmaz komplementere az $\overline{A} = A' = X \setminus A$.

Komplementer tulajdonságai

Állítás (Biz. HF)

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = X$;
3. $\overline{X} = \emptyset$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5. $A \cup \overline{A} = X$;
6. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

A 7. és 8. összefüggések az ún. de Morgan szabályok.

Szimmetrikus differencia

Definíció

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája az
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Állítás (Biz. HF)

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Hatványhalmaz

Definíció

Ha A egy halmaz, akkor azt a halmazrendszert, melynek elemei az A halmaz összes részhalmaza, az A hatványhalmazának mondjuk és 2^A-val jelöljük.

- $A = \emptyset, 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $A = \{a\}, 2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $A = \{a, b\}, 2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Állítás (Biz. HF)

$|2^A| = 2^{|A|}$