Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2015. decmber 17. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Adja meg egy általános $a + bi$ algebrai alakú (nem nulla) komplex szám reciprokának képletét algebrai alakban, illetve konkrétan a $2 - 3i$ szám reciprokát.

2. Írja fel az implikáció igazságtáblázatát.

3. Adja meg az összes olyan $X \subseteq \{1, 2\}$ halmazt, melyre az $R = \{(a, b) \mid a, b \in X, a \leq b\}$ reláció tranzitív.

4. Hány különböző 5 hosszú sorozat képezhető 3 darab A, 2 darab B és 2 darab C betű felhasználásával?

5. Húzza alá a megoldható kongruenciákat: $3x \equiv 2 \pmod 5$; $22x \equiv 4 \pmod 3$3; $14x \equiv 4 \pmod{10}$; $11x \equiv 1 \pmod{111}$

6. Definiálja a felbonthatatlan szám fogalmát a természetes számok körében.

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Mondja ki a halmazunió 3 tulajdonságát.

2. Mikor nevezünk trichotomnak egy relációt?

3. Definiálja a felső korlát fogalmát.

4. Mikor nevezünk szigorúan monoton növőnek egy $f : X \to Y$ függvényt? Milyen X, Y halmazok esetén beszélhetünk erről?

5. Hányféleképpen oszthatunk ki 10 darab 100 Ft-ost 3 ember között, ha az emberek különbözőek, és csak az számít, ki mennyi pénzt kapott (az összes pénzt kiosztjuk, és lehet olyan is, hogy valaki egyáltalán nem kap).

6. Hogyan tudjuk a logikai szita segítségével három véges halmaz uniójának elemszámát megbecsülni?

7. Mikor mondjuk az egészek körében, hogy a és b kongruensek modulo m? Hogy jelöljük?

8. Mit nevezünk redukált maradékrendszernek modulo m? Adjon példát az $m = 10$ esetben.

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondja ki és bizonyítsa be a komplex n-edik gyökvonásról szóló állítást (Moivre-képlet).
2. Mondja ki és igazolja a binomiális tételt.
3. Mondja ki az Euler–Fermat-tételt, majd igazolja is.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

1. Mik azon x egészek, melyekre $x \equiv 5 \pmod 6$ és $x \equiv 7 \pmod{10}$?
2. Mik azon x egészek, melyekre $x \equiv 5 \pmod 6$ és $x \equiv 8 \pmod{10}$?
3. Milyen e, f egészekre oldható meg az $x \equiv e \pmod 6$ és $x \equiv f \pmod{10}$ kongruenciarendszer?
4. Ha az előző pontban van megoldás, akkor a megoldások halmaza egy maradékosztályt alkot-e valamilyen modulus szerint?
5. A fenti pontok mintájára fogalmazza meg a kínai maradéktétel általánosított változatát két modulus esetére olyankor, amikor a modulusok nem feltétlenül relatív prímek.