Diszkrét matematika I. középszint

4. előadás

Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2014. ősz

Függvények

Definíció

Egy f relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Példa

- $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ reláció függvény: $f(x) = x^2$.
- Az $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ inverz reláció nem függvény: $(4, 2), (4, -2) \in f^{-1}$.
- Legyen F_n a Fibonacci sorozat: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
  Ekkor az $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció függvény, n helyen az értéke $F(n) = F_n$.

Függvények

Definíció

Az $f \subset X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli. Ha $\mathrm{dmn}(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

Megjegyzés

Ha $f : X \to Y$, akkor $\mathrm{dmn}(f) = X$ és $\mathrm{rng}(f) \subset Y$.

Példa

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de nem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$.

Függvények

Definíció

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $f(x) = y \wedge f(x') = y \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\operatorname{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés Egy f függvény pontosan akkor injektív, ha f^{-1} reláció függvény.

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, és nem szürjektív: $f(-1) = f(1)$, $\operatorname{rng}(f) = \mathbb{R}_0^+$.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, de szürjektív.
- Az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Megjegyzés

Az, hogy egy $f : X \to Y$ függvény szürjektív-e, függ Y-tól. Ha $Y \subsetneq Y'$, akkor $f \subset X \times Y \subset X \times Y'$, így az $f : X \to Y'$ függvény biztos nem szürjektív.

Függvények

Definíció

Az $f : X \to X$ bijektív függvényt permutációnak nevezzük.

Példa

- Ha $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor az $X \to X$ permutációk száma $n!$: az $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy ismétlés nélküli permutációja.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ a valós számok egy permutációja.
- Az $f(x) = x^3$ függvény nem permutációja $\mathbb{C}$-nek: legyen ε primitív harmadik egységgyök, ekkor $f(\varepsilon) = f(1)$, de $\varepsilon \neq 1$.

Függvények

Legyen $E_n \subset \mathbb{C}$ az n-edik egységgyökök halmaza: $E_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.
Rendnél szerepelt: $z^k = z^l \Leftrightarrow o(z)|k - l$.

Állítás

Ekkor az $f : x \mapsto x^k$ függvény pontosan akkor bijekció, ha $(n, k) = 1$.

Bizonyítás

Ha $(n, k) = d > 1$, akkor f nem injektív: ha ε primitív n-edik egységgyök, akkor $f\left(\varepsilon^{n/d}\right) = f(1) = 1$, u.i. $\left(\varepsilon^{n/d}\right)^d = \varepsilon^n = 1$, de $\varepsilon^{n/d} \neq 1$.

Ha $(n, k) = 1$, f injektív: ha ε primitív n-edik egységgyök, és
$f\left(\varepsilon^i\right) = f\left(\varepsilon^j\right) \iff \varepsilon^{ik} = \varepsilon^{jk} \Leftrightarrow n \mid k(i-j) \iff n \mid i - j \Leftrightarrow \varepsilon^i = \varepsilon^j$.

Mivel $f : E_n \to E_n$ injektív, ezért E_n végessége miatt bijektív is. $\square$

Függvények kompozíciója

Emlékeztető
Relációk kompozíciója $R \circ S = \{(x,y) | \exists z : (x,z) \in S, (z,y) \in R\}$.
Függvény Az f reláció függvény, ha $(x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Tétel

1. Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.
2. Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.
3. Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ szürjektívek, akkor $g \circ f : X \to Z$ is szürjektív.

Bizonyítás

1. Legyen $(x,y) \in g \circ f$, $(x,y') \in g \circ f$:
   $\exists z : (x,z) \in f, (z,y) \in g$, $\exists z' : (x,z') \in f, (z',y') \in g$.
   Mivel f függény $z = z'$, mivel g függvény $y = y'$.
2. Legyen $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Legyen $f(x) = y, f(x') = y'$, így $g(y) = g(y')$. Mivel g injektív: $y = y'$. Mivel f injektív: $x = x'$.
3. HF. □

Monoton függvények

Definíció

Legyenek X, Y részbenrendezett halmazok. Az $f : X \to Y$ függvény

1. monoton növekedő, ha $x, y \in X$, $x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$;
2. szigorúan monoton növekedő, ha $x, y \in X$, $x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$;
3. monoton csökkenő, ha $x, y \in X$, $x \preceq y \Rightarrow f(x) \succeq f(y)$;
4. szigorúan monoton csökkenő, ha $x, y \in X$, $x \prec y \Rightarrow f(x) \succ f(y)$.

Példa

- Legyen $X = \mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x) = x$; $g(x) = x^3$ szigorúan monoton növekedő függvények.
- Legyen X az $\{a, b, c\}$ hatványhalmaza a részhalmaza részbenrendezéssel.
  Ekkor az $f(A) = A \setminus \{a\}$ monoton növekedő: $A \subset B \Rightarrow A \setminus \{a\} \subset B \setminus \{a\}$;
  A $g(A) = \overline{A}$ szigorúan monoton csökkenő: $A \subsetneq B \Rightarrow \overline{A} \supsetneq \overline{B}$.

Monoton függvények

Megjegyzés

- Ha X, Y rendezett halmazok, akkor egy szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény injektív is: Ha $x \neq y \Rightarrow x \prec y$ vagy $x \succ y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$ vagy $f(x) \succ f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- Ha X, Y rendezett halmazok, és f szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény, akkor f^{-1} szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény:
  Mivel f injektív, f^{-1} is függvény.
  Ha $f(x) \prec f(y)$, akkor nem lehet $x \succeq y$.

Példa

Legyen $X = \mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ szigorúan monoton növekedő függvény.

Műveletek

Definíció

Egy X halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $* : X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.
Egy X halmazon értelmezett unér (egyváltozós) művelet egy $* : X \to X$ függvény.

Példa

- $\mathbb{C}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér, $z \mapsto -z$ (ellentett) unér művelet.
- $\mathbb{C}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $\mathrm{dmn}(\div) \neq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér, az $x \mapsto 1/x$ (reciprok) unér művelet.
- $\mathbb{C}$ halmazon a 0 illetve 1 konstans kijelölése nullér művelet.

Műveletek

Egy véges halmazon bármely binér művelet megadható a műveleti táblájával.

$\wedge$	I	H
I	I	H
H	H	H

$\vee$	I	H
I	I	I
H	I	H

XOR	I	H
I	H	I
H	I	H

$\neg$	I	H
	H	I

Definíció (Műveletek függvényekkel)

Legyen X tetszőleges halmaz, Y halmaz a $*$ művelettel, $f, g : X \to Y$ függvények. Ekkor

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x).$$

Példa

$(\sin + \cos)(x) = \sin x + \cos x$

Műveleti tulajdonságok

Definíció

A $* : X \times X \to X$ művelet
asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;
kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

Példa

- $\mathbb{C}$-n az $+$ ill. a $\cdot$ műveletek asszociatívak, kommutatívak.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete asszociatív: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete nem kommutatív: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$: $x^2 + 1 = (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.
- Az osztás nem asszociatív: $\dfrac{a}{bc} = (a \div b) \div c \neq a \div (b \div c) = \dfrac{ac}{b}$.

Művelettartó leképezések

Definíció

Legyen X halmaz a $*$ művelettel, Y a $\circ$ művelettel. Az $f : X \to Y$ függvény művelettartó, ha $\forall x, y \in X$ esetén

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Példa

- Legyen $X = \mathbb{R}$ az $+$ művelettel, $Y = \mathbb{R}^+$ a $\cdot$ művelettel. Ekkor az $x \mapsto a^x$ művelettartó: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- Legyen $X = Y = \mathbb{C}$ az $+$ művelettel. Ekkor a $z \mapsto \overline{z}$ művelettartó: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.