Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2016. január 21. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Mennyi i abszolút értéke és argumentuma? Írja fel az i szám trigonometrikus alakját.

2. Adja meg az „és”, a „vagy” és a „kizáró vagy” igazságtáblázatát.

3. Mikor nevezünk ekvivalenciarelációnak egy binér relációt?

4. Hányféleképpen lehet a latin ábécé 26 betűjéből 4 hosszú sorozatokat képezni?

5. Bontsa fel a zárójelet: $(x + 3y)^4$.

6. Hány pozitív osztója van a 2^5, illetve a 2^{100} számoknak?

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Mik az i harmadik gyökei? Adja meg őket trigonometrikus alakban.
2. Lehet-e egy reláció az egészek halmazán egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus?
3. Mikor nevezünk egy részbenrendezést (teljes) rendezésnek?
4. Definiálja az asszociativitást.
5. Hány k-adosztályú ismétléses kombinációja van egy n elemű halmaznak?
6. Hogy szól a szita formula 3 halmazra?
7. Definiálja az asszociáltság fogalmát.
8. Definiálja a redukált maradékrendszer fogalmát.

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondja ki és bizonyítsa a relációk inverzére vonatkozó állítást.
2. Mondja ki és igazolja a binomiális tételt.
3. Mondja ki és igazolja a logikai szitát.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

Legyen p egy 2-nél nagyobb prímszám. Egy a egész számot kvadratikus maradéknak neveznek modulo p, ha létezik olyan x egész, melyre $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Ellenkező esetben kvadratikus nemmaradéknak hívjuk.

1. Soroljuk fel a kvadratikus maradékokat 0 és p között (a határokat is beleértve) a $p = 3$, $p = 5$ és $p = 7$ esetben.
2. Igazoljuk, hogy ha a kvadratikus maradék modulo p és $a \equiv a' \pmod{p}$, akkor a' is kvadratikus maradék. (Vagyis a tulajdonság csak a maradékosztályon múlik.)
3. Igazoljuk, hogy kvadratikus maradékok szorzata, illetve nemnulla kvadratikus maradékok reciproka is kvadratikus maradék.
4. Mit kapunk, ha egy kvadratikus nemmaradékot és egy kvadratikus maradékot összeszorzunk?
5. Igazoljuk, hogy a nemnulla maradékosztályoknak pont a fele lesz kvadratikus maradék.