Diszkrét Matematika 1. Írásbeli vizsga, 2016. január 18. (90 perc)

NÉV:
NEPTUN kód:
(Leendő) szakirány:

1. Alapvető fontosságú fogalmak

A következő hat kérdésre 1-1 pont kapható. Ebből legalább 4 pontot kell szerezni.

1. Írja fel a szorzásra vonatkozó Moivre-azonosságot.

2. Mik a kvantorok, és mi a jelentésük?

3. Adjunk meg (rendezett párok halmazaként) három tranzitív relációt az $\{1, 2, 3\}$ alaphalmazon.

4. Hányféle dobás lehetséges 4 teljesen egyforma dobókockával?

5. Húzza alá a megoldható kongruenciákat: $21x \equiv 7 \pmod 1)4$; $30x \equiv 4 \pmod 5$; $11x \equiv 4 \pmod{10}$; $4132x \equiv 1 \pmod{4133}$.

6. Mikor mondjuk az egészek körében, hogy két szám kongruens egymással modulo m?

2. Definíciók, tételkimondások

A következő nyolc kérdésre 1-1 pont kapható.

1. Írja fel a negyedik egységgyököket *trigonometrikus* alakban.

2. Definiálja a részbenrendezést.

3. Adjon meg egy olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, mely szürjektív, de nem injektív.

4. Definiálja a disztributivitást, és mutasson példát.

5. Bontsa fel a zárójelet a binomiális tétel segítségével: $(2x - 3)^5$.

6. Hány olyan 7 hosszú sorozat képezhető a latin ábécé 26 eleméből, melyben csupa különböző betű szerepel (nem kell kiszámolni a konkrét számot, elég csak a képlet)?

7. Hogyan definiáljuk az Euler-féle φ függvényt?

8. Mi a 47^{1281} utolsó két számjegye tízes számrendszerben?

3. Bizonyítások

A következő három bizonyításra 3-3 pont kapható. Ebből legalább 3 pontot el kell érni (tételkimondásért nem jár pont). Az összpontszám alapján a ponthatárok: 10-től 2-es, 14-től 3-as, 18-tól szóbelizhet a 4-es, illetve 5-ös osztályzatért.

1. Mondjon ki és bizonyítson be a halmazok komplementerének tulajdonságai közül 5-öt.
2. Mondja ki és igazolja az ismétlés nélküli kombinációk számáról szóló állítást.
3. Mondjon ki és igazoljon az oszthatóság tulajdonságai közül 8-at a természetes számok körében.

4. Szóbeli kiváltását lehetővé tevő opcionális tétel

Ez a feladat maximálisan 5 pontot ér. Ha ebből legalább 3 pont megvan, és az összpontszám eléri a 20, illetve 24 pontot, akkor 4-es, illetve 5-ös érdemjegyet ajánlunk.

Legyen X az $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmaza. Ez részbenrendezett halmaz a „részhalmaza" relációval (legkisebb eleme az üres halmaz). Legyen $Y = \mathbb{N}$, ezen az „osztója" relációt tekintve szintén egy részbenrendezést kapunk ($a \preccurlyeq b$, ha a osztója b-nek).

1. Mi Y legkisebb eleme?
2. Legyen $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$ a prímszámok sorozata. Tekintsük a következő $f\colon X \to Y$ leképezést: $f(A) = \prod_{k \in A} p_k$. Mennyi lesz $f(\{0,1,2\})$, illetve $f(\{1,3,5\})$?
3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív függvény-e f? Indokoljunk.
4. Igaz-e, hogy f monoton növő, illetve szigorúan monoton növő?
5. Legyen A egy n elemű halmaz. Hány eleme van az $\{y \in Y \mid y \preccurlyeq f(A)\}$ halmaznak?