Diszkrét Matematika 1.
Első zárthelyi dolgozat

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 90 perc. Minden feladat 10 pontot ér, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50.

1. Számítsa ki algebrai alakban a következőket (a, illetve b nullától különböző valós számokat jelölnek):

   a. $(2+i)^2$;

   b. $(a+3i)(b-2ai)$;

   c. $(1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i)$;

   d. $1/(a+bi)+1/(a-bi)$;

   e. i^{2013}.

2. A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki a z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyre $w^4 = z$.

$$z = \frac{(2+2\sqrt{3}i)^{24}}{(-1+i)^{90}}$$

3. Adjon meg 2-2 komplex számot, melyre teljesül a megadott feltétel.

   a. $z^3 = z^7$.
   b. $\overline{z} = z$.
   c. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + 2$.
   d. $|z| = iz^2$.
   e. $\overline{z} = iz^2$.

4. Legyen $A = \mathbb{N}$, $B = 2\mathbb{Z}$, a páros számok halmaza. Döntsük el, létezhet-e olyan C halmaz, melyre teljesülnek az alábbiak (az 5 feltétel külön-külön), illetve, ha van ilyen C, adjunk is példát rá.

   a. $A \cap B = C \cup A$.
   b. $A \cup B = C \cup B$.
   c. $A \cup B = C \Delta B$.
   d. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cup B) \setminus C$.
   e. $A \cap B \cap C = A \Delta B \Delta C$.

5. Adjunk meg egy-egy konkrét relációt (alaphalmazzal együtt), mely

   a. reflexív, szimmetrikus és tranzitív,
   b. nem reflexív, nem irreflexív, de tranzitív,
   c. nem tranzitív, nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus,
   d. trichotom, nem tranzitív, de önmagával vett kompozíciója már tranzitív,
   e. megegyezik a saját inverzével és irreflexív.

6. Legyen A, illetve B a valós számok tetszőleges nemüres részhalmazai, f, g pedig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Az alábbi állítások közül melyek igazak minden f és A esetén? Amelyik igaz, bizonyítsuk, amelyik hamis, ott mutassunk ellenpéldát.

   a. $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$
   b. $f^{-1}(f(A)) = A$.
   c. $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$.