# Diszkrét matematika I. középszint

7. előadás

Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2014. ősz

# Kombinatorika

Kombinatorika fő célja:

- véges halmazok elemeinek elrendezése;
- elrendezések különböző lehetőségeinek megszámlálása.

Példák:

- Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.
- Minimálisan hány ember esetén lesz legalább két embernek ugyanazon a napon a születésnapja?
- Minimálisan hány ember esetén lesz legalább egy ember, aki januárban született?
- Mennyi a lehetséges rendszámok / telefonszámok / IP címek száma?
- Legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan nyerjünk a lottón / totón?

# Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani egy elemet $\mathcal{A}$-ból vagy $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Számuk: $n + m$.

## Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 + 2 = 5$.

# Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani elemet $\mathcal{A}$-ból és $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\
\hline
a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_m) \\
a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_n & (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \ldots & (a_n, b_m)
\end{array}$$

Számuk: $n \cdot m$.

## Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 \cdot 2 = 6$.

# Permutáció

## Tétel

Legyen $\mathcal{A}$ egy $n$ elemű halmaz. Ekkor az $\mathcal{A}$ elemeinek lehetséges sorrendje: $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ($n$ faktoriális). Itt $0! = 1$.

## Példa

Reggelire a
$2$ különböző szendvicset $2! = 2 \cdot 1 = 2$ -féle sorrendben lehet megenni.
$3$ különböző szendvicset $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben lehet megenni.
$4$ különböző szendvicset $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben lehet megenni.

A $200$ fős évfolyam $200! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$-féle sorrendben írhatja alá a jelenléti ívet.

## Bizonyítás

Az $n$ elemből az első helyre $n$-féleképpen választhatunk, a második helyre $n-1$-féleképpen választhatunk, ...
Így az össze lehetőségek száma $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. $\square$

# Ismétléses permutáció

## Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 2 darab 4-es, 3 darab 5-ös született. Hány sorrendben írhatjuk le az eredményeket?

## Megoldás

Ha figyelembe vesszük a hallgatókat is: $(2+3)! = 5!$ lehetséges sorrend van.

Ha a hallgatókat nem tüntetjük fel, egy lehetséges sorrendet többször is figyelembe vettünk:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | ... |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | |

Az 5-ösöket $3! = 6$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Hasonlóan a 4-eseket $2! = 2$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Összes lehetőség: $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10$.

# Ismétléses permutáció

## Tétel

$k_1$ darab első típusú, $k_2$ második típusú, ..., $k_m$ $m$-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek ismétléses permutációinak nevezzük, és számuk $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

## Bizonyítás

Ha minden elem között különbséget teszünk: $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!$ lehetséges sorrend létezik.
Ha az $i$-edik típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_i!$ egyforma van.
Ha az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$ egyforma van. Így ekkor a lehetséges sorrendek száma: $\dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$. $\square$

# Variáció

## Példa

Az egyetemen 10 tárgyunk van, ezek közül 3-at szeretnénk hétfőre tenni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

## Megoldás

Hétfőn az első óránk 10-féle lehet. A második 9-féle, a harmadik 8-féle lehet.
Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8$-féleképpen tehetjük meg.

## Tétel

Adott egy $n$ elemű $\mathcal{A}$ halmaz. Ekkor $k$ elemet $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$-féleképpen választhatunk ki.

## Bizonyítás

Az $\mathcal{A}$ halmazból először $n$-féleképpen választhatunk, második esetben $(n-1)$, ..., $k$-adik esetben $n-k+1$-féleképpen választhatunk. $\square$

# Ismétléses variáció

## Példa

A 0, 1, 2 számjegyekből hány legfeljebb kétjegyű szám képezhető?

## Megoldás

Az első helyiértékre 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{c} \sqcup 0 \\ \sqcup 1 \\ \sqcup 2 \end{array}$$

A második helyiértékre szintén 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{ccc} 00 & 10 & 20 \\ 01 & 11 & 21 \\ 02 & 12 & 22 \end{array}$$

Összesen:

$$\overset{\sqcup}{3} \cdot \overset{\sqcup}{3} = 9$$

# Ismétléses variáció

## Tétel

Egy $n$ elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ${}^{i}V_n^k = n^k$ darab $k$ hosszú sorozat készíthető.

## Bizonyítás

A sorozat első elemét $n$-féleképpen választhatjuk, a második elemét $n$-féleképpen választhatjuk, ... $\square$

## Példa

Egy totószelvényt ($13 + 1$ helyre $1$, $2$ vagy $x$ kerülhet) $3^{14} = 4\,782\,969$-féleképpen lehet kitölteni.

Mennyi egy $n$ elemű halmaz összes részhalmazainak száma?
Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden részhalmaz megfelel egy $n$ hosszú $0-1$ sorozatnak: ha a sorozat $i$-edik eleme $1$, akkor $a_i$ benne van a részhalmazban.
$\emptyset \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0)$, $\{a_1, a_3\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\mathcal{A} \leftrightarrow (1, 1, \ldots, 1)$
Hány $n$ hosszú $0-1$ sorozat van: $2^n$.

# Kombináció

## Tétel

Egy $n$ elemű $\mathcal{A}$ halmaznak a $k$ elemű részhalmazainak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

## Bizonyítás

Először válasszunk $\mathcal{A}$ elemei közül $k$ darabot a sorrendet figyelembevéve. Ezt $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg. Ha a sorrendtől eltekintünk, akkor az előző leszámlálásnál minden $k$ elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a $k$ elemű részhalmazok számát. $\square$

## Példa

Egy lottószelvény ($90$ számból $5$) lehetséges kitöltéseinek száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

# Ismétléses kombináció

## Tétel

Egy $n$ elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ha $k$-szor választhatunk úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk, akkor a lehetséges választások száma

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

## Bizonyítás

Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}.$$

Ekkor a sorozatban $k$ darab $1$-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab $0$ van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből $k$-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ darab van. □

# Ismétléses kombináció

## Példa

5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni.
Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
Itt $n = 5$, $k = 8$:

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495.$$

Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával?

Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból 5-ször választunk (sorrend nem számít, egy elemet többször is választhatunk). Ismétléses kombináció $n = 6$, $k = 5$ választással:

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

# Összefoglaló

**Ismétlés nélküli permutáció** $n!$, $n$ elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

**Ismétléses permutáció** $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az $i$ típusú elemet $k_i$-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

**Ismétlés nélküli variáció** $n!/(n-k)!$, $n$ elemből $k$-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

**Ismétléses variáció** $n^k$, $n$ elemből $k$-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

**Ismétlés nélküli kombináció** $\binom{n}{k}$, $n$ elemből $k$-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

**Ismétléses kombináció** $\binom{n+k-1}{k}$, $n$ elemből $k$-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

# Binomiális tétel

## Tétel

Adott $x, y$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

## Bizonyítás

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$$

Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^k y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor az $n$ tényezőből $k$ darab $x$-et választunk. $\square$

## Definíció

Az $\binom{n}{k}$ alakú számokat ($n, k \in \mathbb{N}$) binomiális együtthatónak nevezzük.

# Binomiális együttható

## Tétel

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

## Bizonyítás

$\binom{n}{k}$ azon $n$ hosszú $0-1$ sorozatok száma, melyben $k$ darab $1$-es van.

1. Az $n$ hosszú $0-1$ sorozatok közül azok száma, melyek $k$ darab $1$-est tartalmaznak megegyezik azok számával, melyek $n-k$ darab $1$-est tartalmaznak.
2. Azon $n$ hosszú $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja $1$: $\binom{n-1}{k-1}$.
   Azon $n$ hosszú $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja $0$: $\binom{n-1}{k}$.

$\square$

# Binomiális együttható

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}: \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

| $n$ | $\binom{n}{k}$ | $(x+y)^n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $1$ |
| 1 | 1 1 | $x+y$ |
| 2 | 1 2 1 | $x^2+2xy+y^2$ |
| 3 | 1 3 3 1 | $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ |
| 4 | 1 4 6 4 1 | $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 | $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$ |

# Polinomiális tétel

## Példa

Mennyi lesz?

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$. $(x+y+z)^3 = \ldots$

## Tétel

$r,\ n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_r!} x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{i_r}.$$

## Bizonyítás

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n =$

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)(x_1+x_2+\ldots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\ldots+x_r)$.

Az $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_r^{i_r}$ együtthatója:

$$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1}}{i_r} =$$

$$\frac{n!}{i_1!(n-i_1)!}\,\frac{(n-i_1)!}{i_2!(n-i_1-i_2)!}\cdots\frac{(n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1})!}{i_r!(n-i_1-\ldots-i_{r-1}-i_r)!} = \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_r!} \qquad \square$$

# Polinomiális tétel

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_r!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r}$$

$$(x+y+z)^3 = \ldots$$

| $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!}$ | $(x+y+z)^3 =$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | $\frac{3!}{3!0!0!} = 1$ | $x^3$ |
| 2 | 1 | 0 | $\frac{3!}{2!1!0!} = 3$ | $+3x^2y$ |
| 2 | 0 | 1 | $\frac{3!}{2!0!1!} = 3$ | $+3x^2z$ |
| 1 | 2 | 0 | $\frac{3!}{1!2!0!} = 3$ | $+3xy^2$ |
| 1 | 1 | 1 | $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$ | $+6xyz$ |
| 1 | 0 | 2 | $\frac{3!}{1!0!2!} = 3$ | $+3xz^2$ |
| 0 | 3 | 0 | $\frac{3!}{0!3!0!} = 1$ | $+y^3$ |
| 0 | 2 | 1 | $\frac{3!}{0!2!1!} = 3$ | $+3y^2z$ |
| 0 | 1 | 2 | $\frac{3!}{0!1!2!} = 3$ | $+3yz^2$ |
| 0 | 0 | 3 | $\frac{3!}{0!0!3!} = 1$ | $+z^3$ |

# Skatulya-elv

## Skatulya-elv

Ha $n$ darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

## Példa

Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.

Az $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazból bárhogyan választunk ki ötöt, akkor lesz közülük kettő, melyek összege $9$.

Tekintsük az $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ halmazokat. Ekkor a kiválasztott öt elem közül lesz kettő, melyek azonos halmazban lesznek, így összegük $9$.

# Szita módszer

Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Az 1000-nél kisebb számok

| | | |
|---|---|---|
| összes | $999$ | $999$ |
| 2-vel osztható | $\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$ | $-499$ |
| 3-mal osztható | $\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$ | $-333$ |
| 5-tel osztható | $\left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$ | $-199$ |
| $2 \cdot 3$-mal osztható | $\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor = 166$ | $+166$ |
| $2 \cdot 5$-tel osztható | $\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor = 99$ | $+99$ |
| $3 \cdot 5$-tel osztható | $\left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor = 66$ | $+66$ |
| $2 \cdot 3 \cdot 5$-tel osztható | $\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor = 33$ | $-33$ |
| | | $= 266$ |

# Szita módszer

## Tétel

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \dots$$

## Példa

Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Először: Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely osztható 2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel?

$A_1 = \{1 \le n \le 999 : 2|n\} \to |A_1| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor$;
$A_2 = \{1 \le n \le 999 : 3|n\} \to |A_2| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor$;
$A_3 = \{1 \le n \le 999 : 5|n\} \to |A_3| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor$.
Hasonlóan $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor$,
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor$.
2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:

$$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor.$$

# Általános szita formula

## Tétel

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ az $A$ véges halmaz részhalmazai, $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Legyenek

$$S = \sum_{x \in A} f(x);$$

$$S_r = \sum_{0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} \sum_{x \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}} f(x);$$

$$S_0 = \sum_{x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i} f(x).$$

Ekkor $S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 \pm \ldots (-1)^n S_n$.

## Példa

$A = \{1, 2, \ldots, 999\}$, $A_1 = \{n :\ 1 \leq n < 1000, 2 \mid n\}$,
$A_2 = \{n :\ 1 \leq n < 1000, 3 \mid n\}$, $A_3 = \{n :\ 1 \leq n < 1000, 5 \mid n\}$,
$f(x) = 1$.
$S_0$: 2-vel, 3-mal, 5-tel nem osztható 1000-nél kisebb számok száma.

# Általános szita formula bizonyítása

$$S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 \pm \ldots (-1)^n S_n:$$
$$S_0 = \sum_{x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i} f(x), \quad S = \sum_{x \in A} f(x)$$
$$S_r = \sum_{0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} \sum_{x \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}} f(x)$$

## Bizonyítás

Ha $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, akkor $f(x)$ mindkét oldalon egyszer szerepel.
Ha $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, legyenek $A_{j_1}, \ldots, A_{j_t}$ azon részhalmazok, melyeknek $x$ eleme. Ekkor $f(x)$ a bal oldalon nem szerepel. Jobb oldalon a

$$\sum_{0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{x \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}} f(x)$$

összegben szerepel, ha $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{j_1, \ldots, j_t\}$. Ilyen $r$ elemű indexhalmaz $\binom{t}{r}$ darab van. Így $f(x)$ együtthatója

$\sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r} (-1)^r = 0$ (Biz.: gyakorlaton). $\square$