Diszkrét matematika 2.C szakirány

1. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy

Komputeralgebra Tanszék

2016. ősz

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ hármast (irányítatlan) gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi \colon E \to \{\{v, v'\} \,|\, v, v' \in V\}$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és φ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A φ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezetlen párt rendel.

Elnevezés

$v \in \varphi(e)$ esetén e illeszkedik v-re, illetve v végpontja e-nek.

Megjegyzés

Az illeszkedési leképezés meghatározza az $I \subset E \times V$ illeszkedési relációt: $(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e)$.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot véges gráfnak nevezzük, egyébként végtelen gráfnak.
$E = \emptyset$ esetén üres gráfról beszélünk.

Megjegyzés

Az informatikában elsősorban a véges gráfok játszanak szerepet, így a továbbiakban mi is véges gráfokkal foglalkozunk.

Definíció

Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt hurokélnek nevezzük.
Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' párhuzamos élek.
Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Az $e \neq e'$ élek szomszédosak, ha van olyan $v \in V$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v \in \varphi(e')$ egyszerre teljesül. A $v \neq v'$ csúcsok szomszédosak, ha van olyan $e \in E$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v' \in \varphi(e)$ egyszerre teljesül.

Definíció

A v csúcs fokszámán (vagy fokán) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.
Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

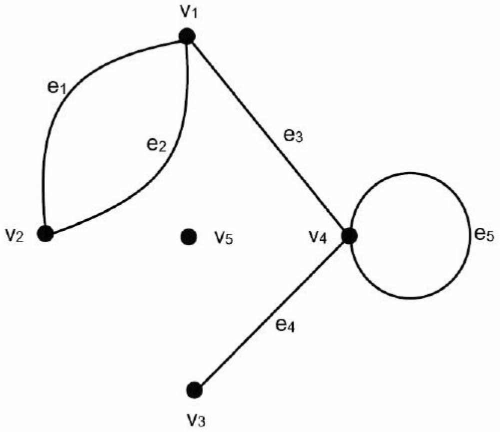
Definíció

Ha $d(v) = 0$, akkor v-t izolált csúcsnak nevezzük.

Definíció

Ha egy gráf minden csúcsának a foka n, akkor azt n-reguláris gráfnak hívjuk. Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamely n-re n-reguláris.

Példa



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$\varphi = \{(e_1, \{v_1, v_2\}), (e_2, \{v_1, v_2\}), (e_3, \{v_1, v_4\}), (e_4, \{v_3, v_4\}), (e_5, \{v_4\})\}$

A fokszámösszeg

Állítás

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás

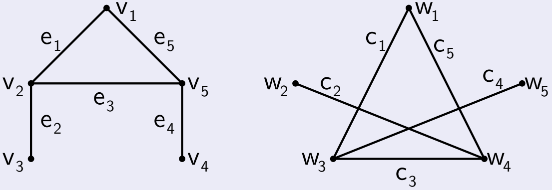
Élszám szerinti teljes indukció: $|E| = 0$ esetén mindkét oldal 0. Tfh. $|E| = n$ esetén igaz az állítás. Ha adott egy gráf, amelynek $n+1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt újra hozzávéve a gráfhoz az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok izomorfak, ha léteznek $f : E \to E'$ és $g : V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re e pontosan akkor illeszkedik v-re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$-re.

Példa



Megfelelő f és g bijekciók:

$f = \{(e_1, c_5), (e_2, c_2), (e_3, c_3), (e_4, c_4), (e_5, c_1)\}$

$g = \{(v_1, w_1), (v_2, w_4), (v_3, w_2), (v_4, w_5), (v_5, w_3)\}$

Gráfok alapfogalmai

Példa

Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcs szomszédos, akkor teljes gráfról beszélünk.
Teljes gráfok esetén, ha a csúcsok halmazai között létezik bijektív leképezés, akkor a két teljes gráf a csúcsok és élek elnevezésétől eltekintve megegyezik. Ebben az értelemben beszélünk bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén az n csúcsú teljes gráfról.

Megjegyzés

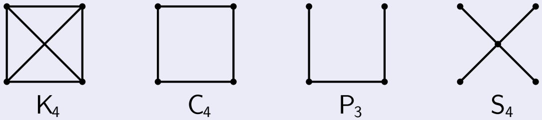
Az n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ éle van, és K_n-nel jelöljük.

További példák

Definíció

A C_n ciklus csúcsai egy szabályos n-szög csúcspontjai, és pontosan a szomszédos csúcspontoknak megfelelő csúcsok szomszédosak.
A P_n ösvény C_{n+1}-ből valamely él törlésével adódik.
Az S_n csillagban egy szabályos n-szög csúcspontjainak és középpontjának megfelelő csúcsok közül a középpontnak megfelelő csúcs szomszédos az összes többivel.

Példák



Gráfok alapfogalmai

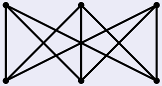
Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfot **páros gráfnak** nevezzük, ha V-nek létezik V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja V'-nek, másik végpontja pedig V''-nek eleme.

Definíció

Azt az egyszerű páros gráfot, amelyben $|V'| = m$, $|V''| = n$ és minden V'-beli csúcs minden V''-beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$-nel jelöljük.

Példa



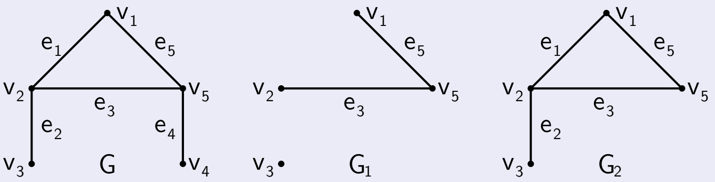
$K_{3,3}$

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf részgráfjának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\varphi' \subset \varphi$. Ekkor G-t a G' szupergráfjának hívjuk. Ha a G' részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott feszített (vagy telített) részgráfnak nevezzük.

Példa



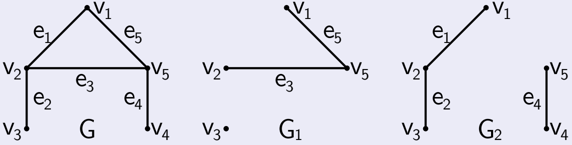
G-nek G_1 részgráfja, de nem feszített részgráfja, míg G_2 feszített részgráfja.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó **komplementerén** a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

Példa



G_2 a G_1 gráf G-re vonatkozó komplementere.

Megjegyzés

Ha G' egyszerű gráf, és külön nem mondjuk, akkor a V'-beli csúcspontokkal rendelkező teljes gráfra vonatkozó komplementert értjük G' komplementere alatt.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ részgráfot értjük.

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyek illeszkednek valamely V'-beli csúcsra. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ részgráfot értjük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad 1 \leq m \leq n$.

A séta hossza a benne szereplő élek száma (n).
Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt sétáról beszélünk, különben nyílt sétáról.

Definíció

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor vonalnak nevezzük.
Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor útnak nevezzük.

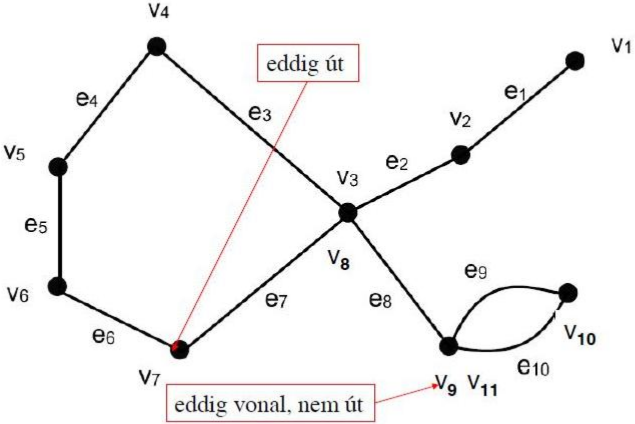
Megjegyzés

Egy út mindig vonal.
A nulla hosszú séták mind utak, és egyetlen csúcsból állnak.
Egy egy hosszú séta pontosan akkor út, ha a benne szereplő él nem hurokél.

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt vonalat körnek nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

Példa



út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_6, e_6, v_7$;
vonal, de nem út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_8, e_8, v_9$;
kör: $v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_8 (= v_3)$.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

A $G = (\varphi, E, V)$ gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet út v-ből v'-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy komponense.

Megjegyzés

Bármely él két végpontja azonos osztályba tartozik (Miért?), így a gráf minden éle hozzátartozik egy komponenshez.

Megjegyzés

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.