# Diszkrét matematika 2.C szakirány

4. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/∼nagy

Komputeralgebra Tanszék

2016. tavasz

# Irányított gráfok

## Algoritmus (Dijkstra)

A $G = (\psi, E, V, w)$ élsúlyozott irányított gráfról tegyük fel, hogy az élsúlyok pozitívak, $s \in V$ és $T \subset V$.

(1) Legyen $S = \emptyset$, $H = \{s\}$ és $f(s) = 0$; minden más $v$ csúcsra legyen $f(v) = \infty$.

(2) Ha $T \subset S$ vagy $H = \emptyset$, akkor az algoritmus véget ér.

(3) Legyen $t \in H$ egy olyan csúcs, amelyre $f(t)$ minimális. Tegyük át $t$-t $S$-be, és minden $e$ élre, amely $t$-ből $v \in V \setminus S$-be vezet, ha $f(t) + w(e) < f(v)$, akkor legyen $f(v) = f(t) + w(e)$, és ha $v \notin H$, tegyük át $v$-t $H$-ba. Menjünk (2)-re.

## Tétel

A Dijkstra-algoritmus a csúcshalmazon értelmez egy $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amely $t \in T$ esetén az adott $s$ csúcsból a $t$ csúcsba vezető irányított séták súlyainak a minimuma ($\infty$, ha nincs ilyen séta).

# Irányított gráfok

## Bizonyítás

Az $S$ elemszáma szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy:

1. minden $t \in S$-re $f(t)$ az $s$ csúcsból a $t$ csúcsba vezető irányított séták súlyainak minimuma;
2. ha $v \in H$, akkor minden olyan $s$-ből $v$-be vezető irányított sétának, amelynek $v$-n kívül minden csúcsa $S$-ben van a súlya legalább $f(v)$.

Inicializálás után ezek nyilvánvalóak.
Tegyük fel, hogy (3)-ban $t \in H$-t választottuk, és tekintsünk egy tetszőleges $s$-ből $t$-be vezető irányított sétát, aminek a súlya $W$, továbbá legyen $t'$ a séta első olyan csúcsa, amely nincs $S$-ben. A séta $s$-ből $t'$-ig vivő részének $W'$ súlyára $W' \leq W$ (Miért?), az indukciós feltevés második része szerint $f(t') \leq W'$, és mivel $t$-t választottuk $f(t) \leq f(t')$, így $f(t) \leq W$, amivel az állítás első részét beláttuk.

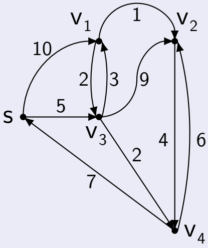
# Irányított gráfok

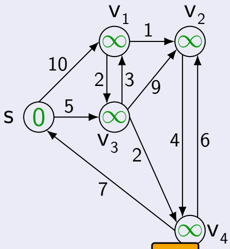
## Biz.folyt.

Miután (3)-ban az $f(v)$ értékeket megváltoztattuk, tekintsünk egy $s$-ből $v$-be vezető sétát, aminek csak az utolsó csúcsa nincs $S$-ben, legyen $t'$ az utolsó előtti csúcsa, $e$ pedig az utolsó éle. Mivel $t' \in S$, az $s$-től $t'$-ig vezető részséta súlya legalább $f(t')$, így a teljes séta súlya legalább $f(t') + w(e)$, és amikor $t'$-t bevettük $S$-be legfeljebb ennyire állítottuk $d(v)$ értékét, azóta pedig csak csökkenhetett.

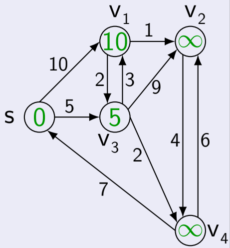
# Irányított gráfok

## Példa



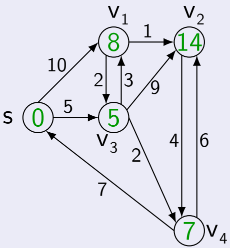

$S = \emptyset, H = \{s\}$



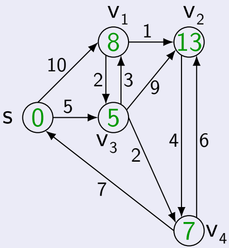

$S = \{s\}, H = \{v_1, v_3\}$

# Irányított gráfok

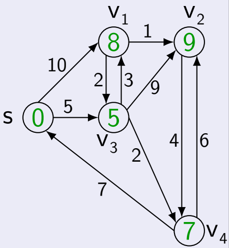
## Példa




$S = \{s, v_3\}$
$H = \{v_1, v_2, v_4\}$




$S = \{s, v_3, v_4\}$
$H = \{v_1, v_2\}$




$S = \{s, v_3, v_4, v_1\}$
$H = \{v_2\}$

# Síkgráfok

## Definíció

Egy $G$ gráfot síkgráfnak nevezünk, ha az felrajzolható a síkra anélkül, hogy az éleinek a csúcspontokon kívül lennének közös pontjai. Egy ilyen felrajzolását a $G$ gráf síkbeli reprezentációjának is nevezzük.

## Megjegyzés

Nem minden gráf ilyen, ellenben minden gráf $\mathbb{R}^3$-ben lerajzolható.

## Definíció

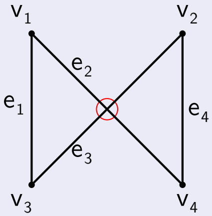
A $G$ gráf egy síkbeli reprezentációja esetén tartománynak nevezzük az élek által határolt síkidomot. Ez nem feltétlenül korlátos, ilyenkor külső tartományról beszélünk, egyébként pedig belső tartományról.

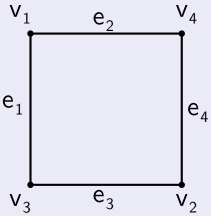
## Megjegyzés

Egy belső tartomány valamely másik reprezentációban lehet külső tartomány is, de a tartományok száma nem függ a reprezentációtól.

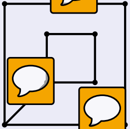
# Síkgráfok

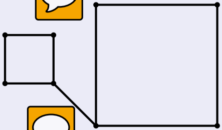
## Példa




## Példa





# Síkgráfok

## Tétel (Euler-formula)

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő síkgráf tetszőleges síkbeli reprezentációját tekintve, melyre $t$ jelöli a tartományok számát, teljesül a következő összefüggés.

$$|E| + 2 = |V| + t$$

## Bizonyítás (vázlat)

Ha a gráfban van kör, annak egy élét törölve az általa elválasztott két tartomány egyesül, így a tartományok és élek száma is (vagyis az egyenlet mindkét oldala) 1-gyel csökken. Az eljárás ismétlésével fát kapunk, aminek 1 tartománya van, így teljesül rá az összefüggés (Miért?).

# Síkgráfok

## Állítás

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű, összefüggő síkgráfra $|V| \geq 3$, akkor

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

## Bizonyítás

$|V| = 3$ esetén 2 ilyen gráf van: $P_2$ és $C_3$, amelyekre teljesül az állítás. $|V| > 3$ esetén legalább 3 éle van a gráfnak (Miért?). Mivel $G$ egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja, ezért a tartományok határán végigszámolva az éleket az így kapott érték legalább $3t$. Mivel minden él legfeljebb két tartományt választ el, ezért $3t \leq 2|E|$. Az Euler-formulát használva $3(|E| + 2 - |V|) \leq 2|E|$, amiből kapjuk az állítást.

## Megjegyzés

A becslés nem összefüggő síkgráfok esetén is teljesül, hiszen élek hozzávételével összefüggő síkgráfot kaphatunk.

# Síkgráfok

## Állítás

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű síkgráf, akkor

$$\delta = \min_{v \in V} d(v) \leq 5.$$

## Bizonyítás

Feltehető, hogy $|V| \geq 3$ (Miért?).
Indirekt tfh. $\delta \geq 6$. Ekkor $6|V| \leq 2|E|$ (Miért?), továbbá az előző állítást használva $2|E| \leq 6|V| - 12$, vagyis $6|V| \leq 6|V| - 12$, ami ellentmondás.

# Síkgráfok

## Állítás

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

## Bizonyítás

Indirekt tfh. $K_{3,3}$ síkgráf, és jelöljük $t$-vel a síkbeli reprezentációiban a tartományok számát. Ekkor $|E| = 9$ és $|V| = 6$ miatt az Euler-formula alapján $t = 5$. Mivel egyszerű, páros gráf, így minden tartomány határa legalább 4 élt tartalmaz (Miért?), és minden él legfeljebb két tartomány határán van, ezért $4t \leq 2|E|$, amiből $20 \leq 18$ adódik, ami ellentmondás.

## Állítás

$K_5$ nem síkgráf.

## Bizonyítás

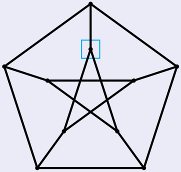
Indirekt tfh. $K_5$ síkgráf. $|E| = 10$ és $|V| = 5$, így az élszámra vonatkozó becslés alapján $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, ami ellentmondás.

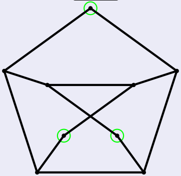
# Síkgráfok

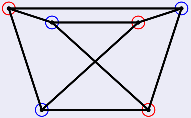
## Definíció

A $G$ és $G'$ gráfokat topologikusan izomorfnak nevezzük, ha az alábbi lépést, illetve a fordítottját alkalmazva, véges sok lépésben az egyikből a másikkal izomorf gráfot kaphatunk: egy másodfokú csúcsot törlünk, és a szomszédjait összekötjük egy éllel.

## Példa







## Tétel (Kuratowski) (NB)

Egy egyszerű gráf pontosan akkor síkgráf, ha nincs olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf $K_5$-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

# Gráfok színezése

Szeretnénk egy térképet kiszínezni úgy, hogy a szomszédos régiók különböző színűek legyenek.
A probléma megközelítése gráfokkal: a régióknak felelnek meg a csúcsok.
Két csúcs szomszédos, ha a megfelelő régióknak van közös határvonala.
A térképnek megfelelő gráf síkgráf lesz.

## Tétel (Négyszíntétel) (NB)

Minden síkgráf 4 színnel színezhető.

## Megjegyzés

1976-ban bizonyította Appel és Haken. Ez volt az első nevezetes sejtés, aminek a bizonyításához számítógépet is használtak. 1936 lehetséges ellenpéldát ellenőriztek, 1200 órán keresztül futott a program.

# Gráfok színezése

## Definíció

Egy gráf egy csúcsszínezését jólszínezésnek nevezzük, ha a szomszédos csúcsok színe különböző.

## Definíció

Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb $n$ természetes szám, amelyre jólszínezhető $n$ színnel.

## Megjegyzés

A kromatikus szám pontosan akkor 1, ha nincs éle a gráfnak, és ha 2 a kromatikus szám, akkor a gráf páros. A síkgráfok kromatikus száma legfeljebb 4.

# Gráfok mátrixai

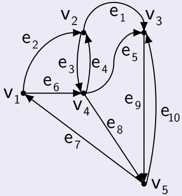
## Definíció

Ha egy $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf élei $e_1, e_2, \ldots, e_n$, csúcsai pedig $v_1, v_2, \ldots, v_m$, akkor az alábbi illeszkedési mátrix (vagy élmátrix) egyértelműen megadja a gráfot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } e_j\text{-nek } v_i \text{ kezdőpontja;} \\ -1 & \text{, ha } e_j \text{ nem hurokél, és } v_i \text{ a végpontja;} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A megfelelő irányítatlan gráf élmátrixa az $|a_{ij}|$ elemekből áll.

## Példa




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

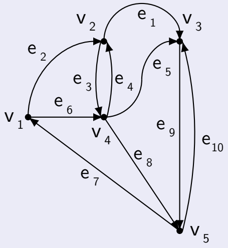
# Gráfok mátrixai

## Definíció

A $G$ irányított gráf csúcsmátrixában legyen $b_{ij}$ a $v_i$ kezdőpontú és $v_j$ végpontú élek száma.
A megfelelő irányítatlan gráf csúcsmátrixának elemeire:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{a } v_i\text{-re illeszkedő hurokélek száma} & \text{, ha } i = j; \\ \text{a } v_i\text{-re és } v_j\text{-re is illeszkedő élek száma} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

## Példa



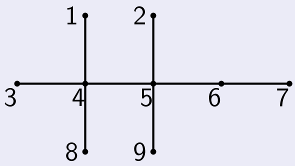

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Prüfer-kód

## Definíció

Legyen adott egy $F = (\varphi, E, V, w)$ csúcscímkézett fa, az egyes csúcsok címkéi $1$ és $n$ közötti különböző egész számok, ahol $n = |V|$. Töröljük az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút, és írjuk fel ennek szomszédjának a számát. A kapott fára (Miért fa?) folytassuk az eljárást, amíg már csak egy csúcs marad, mégpedig az $n$ címkéjű (Miért?). A sorozat $n-1$-edig tagja szükségképpen $n$, ezért ez elhagyható.
A kapott $n-2$ hosszú sorozat az $F$ fa **Prüfer-kódja**.

## Példa




A Prüfer-kód: 4546545(9).

# Prüfer-kód

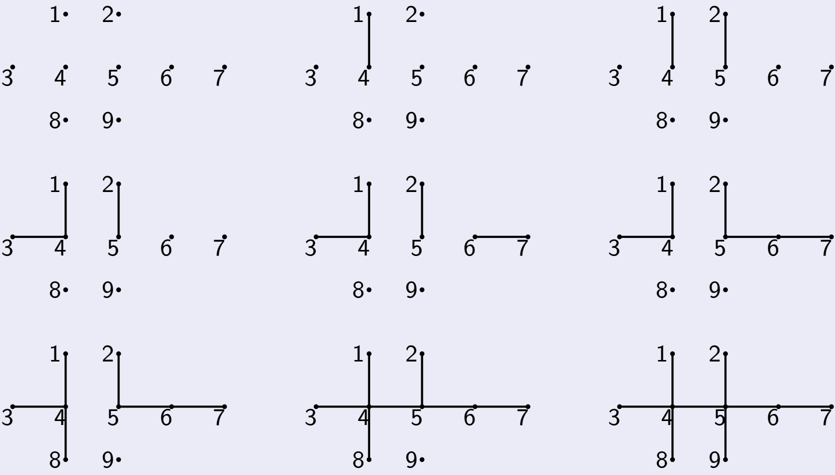
## Algoritmus (Prüfer-kódból fa készítése)

Legyen a Prüfer-kód $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Legyen a kódban nem szereplő legkisebb sorszám $s_1$. Ha $s_i$-t már meghatároztuk, akkor legyen $s_{i+1}$ az a legkisebb sorszám, amely különbözik az alábbiaktól: $s_1, s_2, \dots, s_i; p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Ilyennek mindig lennie kell, mert $n$ lehetőségből legfeljebb $n-1$ számút nem engedünk meg. Az $n$ csúcsot tartalmazó üres gráfból kiindulva minden $i$-re $(1 \leq i \leq n-1)$ megrajzoljuk az $s_i$ és $p_i$ csúcsokra illeszkedő élt.

# Prüfer-kód

45465459 1;5465459 12;465459 123;65459 1237;5459 12376;459 123768;59 1237684;9

## Példa



# Műveletek

## Definíció

Egy $X$ halmazon értelmezett művelet alatt egy $* : X^n \to X$ függvényt értünk.
Egy $X$ halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $* : X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.

## Példa

- $\mathbb{C}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér művelet.
- $\mathbb{C}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $\mathrm{dmn}(\div) \neq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér művelet.

# Műveleti tulajdonságok

## Definíció

A $* : X \times X \to X$ művelet
asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;
kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

## Példa

- $\mathbb{C}$-n az $+$ ill. a $\cdot$ műveletek asszociatívak, kommutatívak.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete asszociatív:
  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete nem kommutatív:
  $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$:
  $x^2 + 1 = (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.
- A kivonás az egész számok halmazán nem asszociatív:
  $-1 = (1 - 1) - 1 \neq 1 - (1 - 1) = 1$.

# Algebrai struktúrák

## Definíció

A $(H; M)$ pár algebrai struktúra, ha $H$ egy halmaz, $M$ pedig $H$-n értelmezett műveletek halmaza.
Az egy binér műveletes struktúrát grupoidnak nevezzük.

## Példa

- $(\mathbb{N}; +)$ algebrai struktúra, mert természetes számok összege természetes szám (ld. Diszkrét matematika 1.), és grupoid is.
- $(\mathbb{N}; -)$ nem algebrai struktúra, mert például $0 - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$.
- $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ algebrai struktúra, mert egész számok összege és szorzata egész szám (ld. Diszkrét matematika 1.), de nem grupoid.
- $(\mathbb{Z}_m; +, \cdot)$ algebrai struktúra (ld. Diszkrét matematika 1.), nem grupoid.

# Félcsoportok

## Definíció

A $(G;*)$ grupoid félcsoport, ha $*$ asszociatív $G$-n.
Ha létezik $s \in G$: $\forall g \in G : s * g = g * s = g$,
akkor az $s$ semleges elem (egységelem), $(G;*)$ pedig semleges elemes félcsoport (egységelemes félcsoport, monoid).

## Példa

- $\mathbb{N}$ az $+$ művelettel egységelemes félcsoport $n = 0$ egységelemmel.
- $\mathbb{Q}$ a $\cdot$ művelettel egységelemes félcsoport $n = 1$ egységelemmel.
- $\mathbb{C}^{k \times k}$ a mátrixszorzással egységelemes félcsoport az egységmátrixszal mint egységelemmel.

# Csoportok

## Definíció

Legyen $(G;*)$ egy egységelemes félcsoport $e$ egységelemmel. A $g \in G$ elem inverze a $g^{-1} \in G$ elem, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
Ha minden $g \in G$ elemnek létezik inverze, akkor $(G;*)$ csoport.
Ha ezen felül $*$ kommutatív is, akkor $(G;*)$ Abel-csoport.

## Példa

- $\mathbb{Q}$ az $+$ művelettel, a $0$ egységelemmel.
- $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a $\cdot$ művelettel, az $1$ egységelemmel.
- $\{M \in \mathbb{C}^{k \times k} : \det M \neq 0\}$ a mátrixszorzással, és az egységmátrixszal mint egységelemmel.
- $X \to X$ bijektív függvények a kompozícióval, és az $id_X : x \mapsto x$ identikus leképzéssel mint egységelemmel.