Diszkrét matematika 2.C szakirány

3. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/∼nagy

Komputeralgebra Tanszék

2016. ősz

Feszítőfa

Definíció

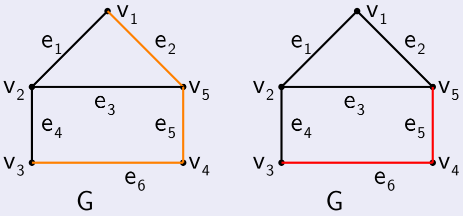
Legyen $G = (\varphi, E, V)$, $v, v' \in V$ és $E' \subset E$. Azt mondjuk, hogy E' elvágja a v és v' csúcsokat, ha minden v-ből v'-be menő út tartalmaz E'-beli élet.
Ha léteznek olyan csúcsok, amelyeket E' elvág, akkor E'-t elvágó élhalmaznak nevezzük.

Definíció

Ha egy elvágó élhalmaznak nincs olyan valódi részhalmaza, amely maga is elvágó élhalmaz, akkor vágásnak nevezzük.

Feszítőfa

Példa



$\{e_2, e_5, e_6\}$ elvágó élhalmaz, mert elvágja v_4-et és v_2-t, hiszen mindhárom v_4 kezdőpontú és v_2 végpontú útban van olyan él, ami eleme:

v_4, e_6, v_3, e_4, v_2,

v_4, e_5, v_5, e_3, v_2,

$v_4, e_5, v_5, e_2, v_1, e_1, v_2$.

Ugyanakkor nem vágás, mert $\{e_5, e_6\}$ olyan valódi részhalmaza, ami szintén elvágó.

Utóbbi vágás, hiszen sem $\{e_5\}$, sem $\{e_6\}$, sem $\emptyset$ nem elvágó élhalmaz.

Feszítőfa

Állítás

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|V| - 1$ különböző vágás.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Jelöljük E'-vel F éleinek halmazát, E''-vel pedig G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. Ekkor E'' nem elvágó halmaz (Miért?), de tetszőleges $e \in E'$ esetén $E'' \cup \{e\}$ már az (Miért?). Legyen E_e az a vágás, amit $E'' \cup \{e\}$ tartalmaz (Miért van ilyen?). E_e tartalmazza e-t (Miért?), de $e \neq e' \in E'$ esetén nem tartalmazza e' -t, így kaptunk $|V| - 1$ különböző vágást.

Megjegyzés

Ebben az esetben is előfordulhat, hogy a becslés nem pontos.

Erdő, feszítőerdő

Definíció

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.
Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, feszítőerdőnek nevezzük.

Állítás

Tetszőleges gráfnak létezik feszítőerdeje.

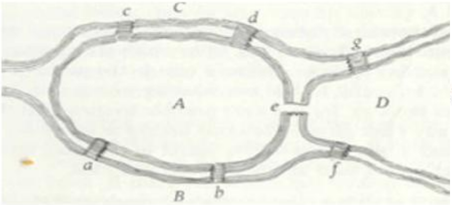
Állítás

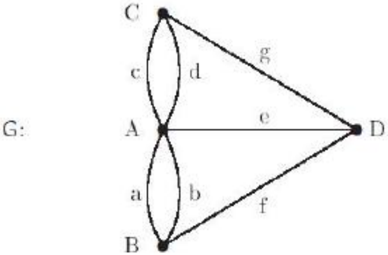
Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

Megjegyzés

A nem összefüggő gráfoknál az erdők, illetve feszítőerdők azt a szerepet töltik be, mint összefüggő gráfok esetén a fák, illetve feszítőfák.

Euler-vonal





Definíció

Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf minden éle szerepel, Euler-vonalnak nevezzük.

Megjegyzés

Mivel vonalban nincs élismétlődés, ezért egy Euler-vonal a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Euler-vonal

Állítás

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros.

Bizonyítás

$\Rightarrow$: Legyen a zárt Euler-vonal a következő:
$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_0$.
A vonal kezdő- és végpontját leszámítva egy csúcs minden előfordulása esetén a mellette lévő két különböző él 2-vel járul hozzá a fokszámához. A kezdő- és végpont ugyanaz, ezért ennek is páros lesz a foka.

Euler-vonal

Bizonyítás

$\Leftarrow$: a bizonyítás konstruktív. Induljunk ki egy élt nem tartalmazó zárt vonalból (v). Ha az eddig kapott zárt vonalban nem minden él szerepel, akkor az összefüggőség miatt van olyan csúcs (v'), amelyre illeszkedő élek közül nem szerepel mindegyik. Induljunk el ebből a csúcsból egy fel nem használt élen, és haladjunk tovább mindig fel nem használt éleken. Mivel minden csúcsra páros sok fel nem használt él illeszkedik, a továbbhaladás csak akkor nem lehetséges, ha visszaértünk v'-be. Ha most az eredeti vonalon elmegyünk v-ből v'-be, az új vonalon körbemegyünk, majd az eredeti vonalon haladunk tovább, akkor az eredeti vonalnál hosszabb zárt vonalat kapunk, így ezt az eljárást ismételve véges sok lépésben megkapunk egy Euler-vonalat.

Hamilton-út/kör

Definíció

Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-útnak nevezzük.
Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-körnek nevezzük.

Megjegyzés

Mivel útban nincs csúcsismétlődés, ezért egy Hamilton-út a gráf minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

Tétel (Dirac)

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ gráfra $|V| > 2$, és minden csúcsának a foka legalább $|V|/2$, akkor van Hamilton-köre.

Bizonyítás

NB.

Címkézett gráfok

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, C_e és C_v halmazok az élcímkék, illetve csúcscímkék halmaza, továbbá $c_e : E \to C_e$ és $c_v : V \to C_v$ leképezések az élcímkézés, illetve csúcscímkézés. Ekkor a $(\varphi, E, V, c_e, C_e, c_v, C_v)$ hetest címkézett gráfnak nevezzük.

Definíció

Élcímkézett, illetve csúcscímkézett gráfról beszélünk, ha csak élcímkék és élcímkézés, illetve csak csúcscímkék és csúcscímkézés adott.

Megjegyzés

Címkézett gráf helyett a színezett gráf elnevezés is használatos.

Címkézett gráfok

Definíció

$C_e = \mathbb{R}$, illetve $C_v = \mathbb{R}$ esetén élsúlyozásról és élsúlyozott gráfról, illetve csúcssúlyozásról és csúcssúlyozott gráfról beszélünk, és a jelölésből C_e-t, illetve C_v-t elhagyjuk.

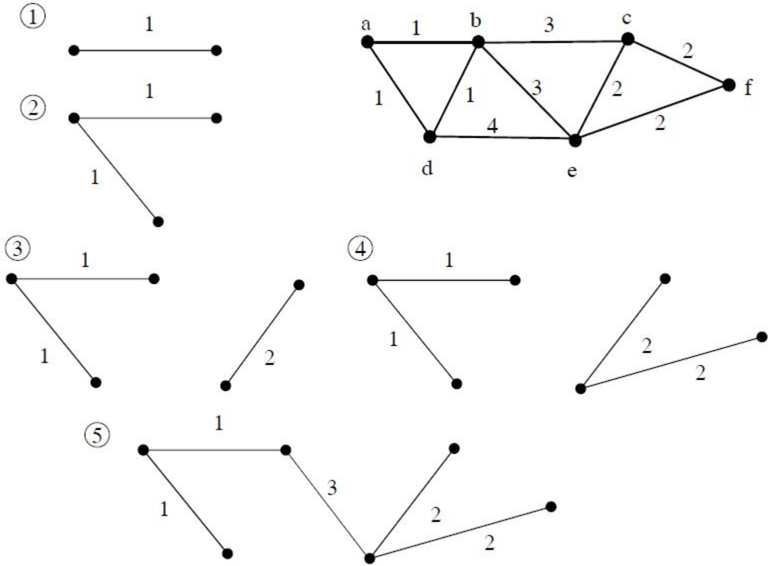
Definíció

Egy $G = (\varphi, E, V, w)$ élsúlyozott gráfban az $E' \subset E$ élhalmaz súlya $\sum_{e \in E'} w(e)$.

Algoritmus(Kruskal)

Egy élsúlyozott gráf esetén az összes csúcsot tartalmazó üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük hozzá a minimális súlyú olyan élt, amivel nem keletkezik kör.

Példa



Címkézett gráfok

Tétel

A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

Bizonyítás

Elég összefüggő gráfra bizonyítani (Miért?).
Összefüggő gráf esetén az algoritmus nyilván feszítőfát eredményez (Miért?).
Indirekt tfh. van az algoritmus által meghatározott F feszítőfánál kisebb súlyú feszítőfája a gráfnak. Ha több ilyen van, akkor F' legyen az a minimális súlyú, amelyiknek a legtöbb közös éle van F-fel. Legyen e' olyan éle F'-nek, ami nem éle F-nek. (Miért van ilyen?) Az F-hez e' hozzávételével kapott gráfban van egy K kör (Miért?). Ezen kör tetszőleges e élére $w(e) \leq w(e')$ (Miért?). Az F'-ből az e' törlésével kapott gráf nem összefüggő (Miért?), és pontosan 2 komponense van (Miért?). A K-nak van olyan éle (e''), aminek a végpontjai az F'-ből az e' törlésével kapott gráf különböző komponenseiben vannak (Miért?).

Címkézett gráfok

Biz.folyt.

Tekintsük azt a gráfot, amit F'-ből az e' törlésével és az e'' hozzávételével kapunk. Az így kapott gráf is feszítőfa (Miért?), és $w(e'') < w(e')$ esetén kisebb súlyú, mint F', míg $w(e'') = w(e')$ esetén ugyanakkora súlyú, de több közös éle van F-fel. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Definíció

Egy algoritmust **mohó algoritmusnak** nevezünk, ha minden lépésben az adódó lehetőségek közül az adott lépésben legkedvezőbbek egyikét választja.

Megjegyzés

A Kruskal-algoritmus egy mohó algoritmus.

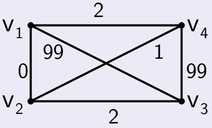
Címkézett gráfok

Megjegyzés

A mohó algoritmus nem mindig optimális.

Példa

Keressünk minimális összsúlyú Hamilton-kört a következő gráfban.



Irányított gráfok

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ hármast irányított gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\psi \colon E \to V \times V$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és ψ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A ψ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezett párt rendel.

Elnevezés

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v kezdőpontja, v' pedig végpontja e-nek.

Definíció

Bármely $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfból kapható egy $G' = (\varphi, E, V)$ irányítatlan gráf úgy, hogy $\psi(e) = (v, v')$ esetén $\varphi(e)$-t $\{v, v'\}$-nek definiáljuk.
Ekkor azt mondjuk, hogy G a G' egy irányítása.

Irányított gráfok

Megjegyzés

Az irányítatlan gráfokra definiált fogalmakat használni fogjuk irányított gráfok esetén is, mégpedig a megfelelő irányítatlan gráfra értve.

Definíció

Ha $e \neq e'$ esetén $\psi(e) = \psi(e')$, akkor e és e' szigorúan párhuzamos élek.

Definíció

Azon élek számát, amiknek a v csúcs kezdőpontja, v kifokának nevezzük, és $deg^+(v)$-vel vagy $d^+(v)$-vel jelöljük.
Azon élek számát, amiknek a v csúcs végpontja, v befokának nevezzük, és $deg^-(v)$-vel vagy $d^-(v)$-vel jelöljük.
Ha egy csúcs kifoka 0, akkor nyelőnek, ha a befoka 0, akkor forrásnak nevezzük.

Irányított gráfok

Állítás

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfra

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ és $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfok izomorfak, ha léteznek $f : E \to E'$ és $g : V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re v pontosan akkor kezdőpontja e-nek, ha $g(v)$ kezdőpontja $f(e)$-nek, és v pontosan akkor végpontja e-nek, ha $g(v)$ végpontja $f(e)$-nek.

Irányított gráfok

Definíció

A $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfot a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf irányított részgráfjának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\psi' \subset \psi$. Ekkor G-t a G' irányított szupergráfjának hívjuk.
Ha a G' irányított részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek kezdőpontjai és végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott feszített irányított (vagy telített irányított) részgráfnak nevezzük.

Definíció

Ha $G' = (\psi', E', V')$ irányított részgráfja a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó komplementerén a $(\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

Irányított gráfok

Definíció

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ irányított részgráfot értjük.

Definíció

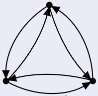
Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyeknek kezdőpontja vagy végpontja valamely V'-beli csúcs. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ irányított részgráfot értjük.

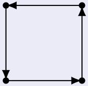
Irányított gráfok

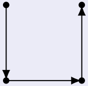
Definíció

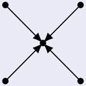
A $\overrightarrow{C_n}$ irányított ciklus a C_n ciklus olyan irányítása, melyben az élek irányítása azonos (minden csúcs befoka és kifoka is 1).
A $\overrightarrow{P_n}$ irányított ösvény $\overrightarrow{C_{n+1}}$-ból valamely él törlésével adódik.
Az $\overrightarrow{S_n}$ irányított csillag az S_n csillag olyan irányítása, melyben a középső csúcs nyelő, az összes többi pedig forrás.
Adott csúcshalmaznál az irányított teljes gráfban tetszőleges v és v' különböző csúcsokhoz található pontosan egy olyan él, aminek v a kezdőpontja és v' a végpontja. $\overrightarrow{K_n}$ nem K_n irányítása, sőt nem is egyszerű gráf, ha $n > 1$.

Példák


$\overrightarrow{K_3}$


$\overrightarrow{C_4}$


$\overrightarrow{P_3}$


$\overrightarrow{S_4}$

Irányított gráfok

Definíció

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot irányított sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\psi(e_m) = (v_{m-1}, v_m) \quad 1 \leq m \leq n$.

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt irányított sétáról beszélünk, különben nyílt irányított sétáról.

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor irányított vonalnak nevezzük.
Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt irányított vonalról.

Irányított gráfok

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor irányított útnak nevezzük.

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt irányított vonalat irányított körnek nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként az irányított vonal pontjai különböznek.

Definíció

Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsából bármely csúcsába vezet irányított út.

Irányított gráfok

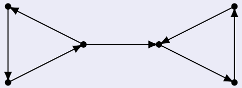
A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet irányított út v-ből v'-be, és v'-ből is vezet irányított út v-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített irányított részgráf az irányított gráf egy erős komponense.

Megjegyzés

Az irányítatlan gráfokkal ellentétben nem feltétlenül tartozik az irányított gráf minden éle valamely erős komponenshez.



Megjegyzés

Nyilván egy irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen erős komponense van.

Irányított gráfok

Definíció

Az irányított fa olyan irányított gráf, amely fa, és van egy csúcsa, amelynek befoka 0, továbbá az összes többi csúcs befoka 1.
Azt a csúcsot, amelynek befoka 0 gyökérnek nevezzük. Az olyan csúcs, aminek a kifoka 0 a levél.

Állítás

A gyökérből bármely adott csúcsba vezető egyetlen út egyben irányított út is.

Bizonyítás

Az út hossza szerinti TI: ha az út hossza $n = 1$, akkor azért lesz irányított út, mert a gyökér befoka 0. Tfh. $n = k$-ra teljesül az állítás. Vegyünk egy olyan v csúcsot, amibe vezető út hossza $k + 1$. Az útból elhagyva v-t és a rá illeszkedő e élt egy k hosszú utat kapunk, amiről az indukciós feltevés értelmében tudjuk, hogy ir. út. v nem lehet e kezdőpontja, mert akkor az e-re illeszkedő másik csúcs befoka legalább 2 lenne.

Irányított gráfok

Definíció

A gyökérből egy adott csúcsba vezető út hosszát a csúcs **szintjének** hívjuk.
A csúcsok szintjeinek maximumát az irányított fa **magasságának** nevezzük.

Definíció

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v' a v **gyereke**, illetve v a v' **szülője**.
Ha két csúcsnak ugyanaz a szülője, akkor **testvéreknek** hívjuk őket.

Definíció

Bármely v csúcsra tekinthetjük azon csúcsok halmazát, amelyekhez vezet irányított út v-ből. Ezen csúcsok által meghatározott feszített irányított részgráfot (amely irányított fa, és v a gyökere) v-ben gyökerező **irányított részfának** nevezzük.