Diszkrét matematika 2, beugró kérdések

1. Gráfok alapfogalmai

1. Definiáld az irányítatlan gráf fogalmát!

A $G = (\varphi, E, V)$ hármast (irányítatlan) gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi\colon E \to \{\{v, v'\} \mid v, v' \in V\}$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és φ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A φ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezetlen párt rendel.

2. Definiáld az "illeszkedik" és a "végpontja" fogalmakat!

$v \in \varphi(e)$ esetén e illeszkedik v-re, illetve v végpontja e-nek.

3. Definiáld az illeszkedési relációt!

Az illeszkedési leképezés meghatározza az $I \subset E \times V$ illeszkedési relációt: $(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e)$.

4. Definiáld a véges/végtelen gráf fogalmát!

Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot véges gráfnak nevezzük, egyébként végtelen gráfnak.
$E = \emptyset$ esetén üres gráfról beszélünk.

5. Definiáld a párhuzamos él fogalmát!

Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' párhuzamos élek.

6. Definiáld az egyszerű gráf fogalmát!

Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

7. Definiáld a szomszédos él/csúcs fogalmát!

Az $e \neq e'$ élek szomszédosak, ha van olyan $v \in V$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v \in \varphi(e')$ egyszerre teljesül. A $v \neq v'$ csúcsok szomszédosak, ha van olyan $e \in E$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v' \in \varphi(e)$ egyszerre teljesül.

8. Definiáld gráfban a fokszám fogalmát!

A v csúcs fokszámán (vagy fokán) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.
Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

9. Definiáld az izolált csúcs fogalmát!

Ha $d(v) = 0$, akkor v-t izolált csúcsnak nevezzük.

10. Definiáld az n-reguláris gráf fogalmát. Reguláris gráf fogalmát!

Ha egy gráf minden csúcsának a foka n, akkor azt n-reguláris gráfnak hívjuk. Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamely n-re n-reguláris.

11. Mit mondhatunk irányítatlan gráfban a fokszámok összegéről?

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

12. Mikor nevezünk két irányítatlan gráfot izomorfnak?

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok izomorfak, ha léteznek $f : E \to E'$ és $g : V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re e pontosan akkor illeszkedik v-re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$-re.

13. Definiáld a teljes gráf fogalmát!

Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcs szomszédos, akkor teljes gráfról beszélünk.

14. Mit mondhatunk teljes gráf élszámáról!

Az n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ éle van, és K_n-nel jelöljük.

15. Mit jelentenek a C_n, P_n, S_n röviditések?

A C_n ciklus csúcsai egy szabályos n-szög csúcspontjai, és pontosan a szomszédos csúcspontoknak megfelelő csúcsok szomszédosak.
A P_n ösvény C_{n+1}-ből valamely él törlésével adódik.
Az S_n csillagban egy szabályos n-szög csúcspontjainak és középpontjának megfelelő csúcsok közül a középpontnak megfelelő csúcs szomszédos az összes többivel.

16. Definiáld a páros gráf fogalmát!

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfot páros gráfnak nevezzük, ha V-nek létezik V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja V'-nek, másik végpontja pedig V''-nek eleme.

17. Mit jelent a $K_{m,n}$ rövidítés?

Azt az egyszerű páros gráfot, amelyben $|V'| = m$, $|V''| = n$ és minden V'-beli csúcs minden V''-beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$-nel jelöljük.

18. Definiáld a részgráf fogalmát!

A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf részgráfjának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\varphi' \subset \varphi$. Ekkor G-t a G' szupergráfjának hívjuk.

19. Definiáld a feszített/telített részgráf fogalmát!

Ha a G' részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott feszített (vagy telített) részgráfnak nevezzük.

20. Definiáld irányítatlan gráf komplementerének a fogalmát!

Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó komplementerén a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

21. Definiáld az élek/csúcsok törlésével kapott gráfot!

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ részgráfot értjük.

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyek illeszkednek valamely V'-beli csúcsra. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ részgráfot értjük.

22. Definiáld a séta fogalmát!

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad 1 \leq m \leq n$.

23. Hogyan definiáljuk a séta hosszát?

A séta hossza a benne szereplő élek száma (n).

24. Mikor nevezünk egy sétát zártnak/nyíltnak?

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt sétáról beszélünk, különben nyílt sétáról.

25. Definiáld a vonal fogalmát!

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor vonalnak nevezzük. Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

26. Definiáld az út fogalmát!

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor útnak nevezzük.

27. Definiáld a kör fogalmát!

Egy legalább egy hosszú zárt vonalat körnek nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

28. Mit állíthatunk séta és út kapcsolatáról?

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v-t v'-vel összekötő utat kapunk.

29. Definiáld az összefüggőség fogalmát!

Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

30. Definiáld a komponens fogalmát!

A $G = (\varphi, E, V)$ gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet út v-ből v'-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy komponense.

31. Mi a kapcsolat egy gráf komponensei száma és az összefüggősége között?

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

2. Fák

32. Definiáld a fa fogalmát!

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

33. Add meg 3 ekvivalens jellemzését egy fának!

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

(1) G fa;

(2) G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő;

(3) ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan 1 út van v-ből v'-be;

(4) G-nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.

34. Mit mondhatunk körmentes gráfokban az elsőfokú csúcsokról?

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G-nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

35. Fogalmazz meg 2 olyan szükséges és elégséges feltétel arra, hogy egy véges egyszerű gráf fa, amelyben szerepel az élek száma!

G-ben nincs kör, és $n - 1$ éle van;

G összefüggő, és $n - 1$ éle van.

3. Feszítőfa, Euler-vonal, Hamilton-kör

36. Definiáld a feszítőfa fogalmát!

A G gráf egy F részgráfját a feszítőfájának nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, és fa.

37. Mikor létezik feszítőfája egy gráfnak?

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

38. Mit mondhatunk összefüggő gráfban a körök számáról?

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

39. Mikor mondjuk, hogy E elvágja a v és v' csúcsokat?

Legyen $G = (\varphi, E, V)$, $v, v' \in V$ és $E' \subset E$. Azt mondjuk, hogy E' elvágja a v és v' csúcsokat, ha minden v-ből v'-be menő út tartalmaz E'-beli élet.

40. Definiáld az elvágó élhalmaz fogalmát!

Ha léteznek olyan csúcsok, amelyeket E' elvág, akkor E'-t elvágó élhalmaznak nevezzük.

41. Definiáld a vágás fogalmát!

Ha egy elvágó élhalmaznak nincs olyan valódi részhalmaza, amely maga is elvágó élhalmaz, akkor vágásnak nevezzük.

42. Mit mondhatunk összefüggő gráfban a vágások számáról?

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|V| - 1$ különböző vágás.

43. Definiáld az erdő fogalmát!

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.

44. Definiáld a feszítőerdő fogalmát!

Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, feszítőerdőnek nevezzük.

45. Mit mondhatunk erdő élszámáról?

Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

46. Definiáld az Euler-vonal fogalmát!

Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf minden éle szerepel, Euler-vonalnak nevezzük.

47. Mit állíthatunk összefüggő gráfban zárt Euler-vonal létezésével kapcsolatban?

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros.

48. Definiáld a Hamilton kör/út fogalmát!

Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-útnak nevezzük.
Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-körnek nevezzük.

49. Adj meg egy elégséges feltételt Hamilton-kör létezéséről!

Tétel (Dirac)

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ gráfra $|V| > 2$, és minden csúcsának a foka legalább $|V|/2$, akkor van Hamilton-köre.

4. Címkézett gráfok

50. Definiáld a címkézett gráf, élcímkézett /csúcscímkézett gráf fogalmát!

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, C_e és C_v halmazok az élcímkék, illetve csúcscímkék halmaza, továbbá $c_e : E \to C_e$ és $c_v : V \to C_v$ leképezések az élcímkézés, illetve csúcscímkézés. Ekkor a $(\varphi, E, V, c_e, C_e, c_v, C_v)$ hetest címkézett gráfnak nevezzük.

Élcímkézett, illetve csúcscímkézett gráfról beszélünk, ha csak élcímkék és élcímkézés, illetve csak csúcscímkék és csúcscímkézés adott.

51. Definiáld az élsúlyozás/ csúcssúlyozás fogalmát!

$C_e = \mathbb{R}$, illetve $C_v = \mathbb{R}$ esetén élsúlyozásról és élsúlyozott gráfról, illetve csúcssúlyozásról és csúcssúlyozott gráfról beszélünk, és a jelölésből C_e-t, illetve C_v-t elhagyjuk.

52. Definiáld élhalmaz súlyát!

Egy $G = (\varphi, E, V, w)$ élsúlyozott gráfban az $E' \subset E$ élhalmaz súlya $\sum_{e \in E'} w(e)$.

53. Ismertesd a Kruskal-algortimust, és a rá vonatkozó tételt!

Algoritmus(Kruskal)

Egy élsúlyozott gráf esetén az összes csúcsot tartalmazó üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük hozzá a minimális súlyú olyan élt, amivel nem keletkezik kör.

Tétel

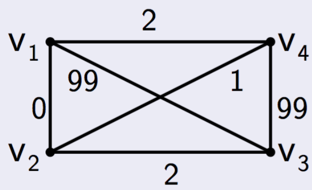
A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

54. Definiáld a mohó algoritmus fogalmát, adj példát, amikor nem ad optimális megoldást!

Egy algoritmust mohó algoritmusnak nevezünk, ha minden lépésben az adódó lehetőségek közül az adott lépésben legkedvezőbbek egyikét választja.

Példa

Keressünk minimális összsúlyú Hamilton-kört a következő gráfban.



5. Síkba rajzolható gráfok, gráfok színezése, gráfok ábrázolása

55. Mikor nevezünk egy gráfot síkbarajzolhatónak?

Egy G gráfot síkgráfnak nevezünk, ha az felrajzolható a síkra anélkül, hogy az éleinek a csúcspontokon kívül lennének közös pontjai.

56. Mit értünk egy gráf síkbeli reprezentációja alatt?

Egy ilyen felrajzolását a G gráf síkbeli reprezentációjának is nevezzük.

57. Hogyan definiáljuk síkgráf tartományát?

A G gráf egy síkbeli reprezentációja esetén tartománynak nevezzük az élek által határolt síkidomot. Ez nem feltétlenül korlátos, ilyenkor külső tartományról beszélünk, egyébként pedig belső tartományról.

58. Hogyan szól Euler tétele síkbarajzolható gráfokról?

Tétel (Euler-formula)

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő síkgráf tetszőleges síkbeli reprezentációját tekintve, melyre t jelöli a tartományok számát, teljesül a következő összefüggés.

$$|E| + 2 = |V| + t$$

59. Mit mondhatunk síkgráf élszámáról?

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű, összefüggő síkgráfra $|V| \geq 3$, akkor

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

60. Mit mondhatunk síkgráfban a minimális fokszámú csúcs fokáról?

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű síkgráf, akkor

$$\delta = \min_{v \in V} d(v) \leq 5.$$

61. Adj példát nem síkbarajzolható gráfra!

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

62. Mikor nevezünk két gráfot topologikusan izomorfnak?

A G és G' gráfokat topologikusan izomorfnak nevezzük, ha az alábbi lépést, illetve a fordítottját alkalmazva, véges sok lépésben az egyikből a másikkal izomorf gráfot kaphatunk: egy másodfokú csúcsot törlünk, és a szomszédjait összekötjük egy éllel.

63. Hogyan szól Kuratowski tétele síkgráfokkal kapcsolatban?

Tétel (Kuratowski) (NB)

Egy egyszerű gráf pontosan akkor síkgráf, ha nincs olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

64. Hogyan szól a négyszíntétel?

Tétel (Négyszíntétel) (NB)

Minden síkgráf 4 színnel színezhető.

65. Mit nevezünk jólszínezésnek?

Egy gráf egy csúcsszínezését jólszínezésnek nevezzük, ha a szomszédos csúcsok színe különböző.

66. Mi a kromatikus szám definíciója?

Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb n természetes szám, amelyre jólszínezhető n színnel.

67. Definiáld az irányított, és az irányítatlan gráf illeszkedési mátrixát!

Ha egy $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf élei $e_1, e_2, \ldots, e_n$, csúcsai pedig $v_1, v_2, \ldots, v_m$, akkor az alábbi illeszkedési mátrix (vagy élmátrix) egyértelműen megadja a gráfot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } e_j\text{-nek } v_i \text{ kezdőpontja;} \\ -1 & \text{, ha } e_j \text{ nem hurokél, és } v_i \text{ a végpontja;} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A megfelelő irányítatlan gráf élmátrixa az $|a_{ij}|$ elemekből áll.

68. Definiáld az irányított, és az irányítatlan gráf csúcsmátrixát!

A G irányított gráf csúcsmátrixában legyen b_{ij} a v_i kezdőpontú és v_j végpontú élek száma.
A megfelelő irányítatlan gráf csúcsmátrixának elemeire:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{a } v_i\text{-re illeszkedő hurokélek száma} & \text{, ha } i = j; \\ \text{a } v_i\text{-re és } v_j\text{-re is illeszkedő élek száma} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

69. Hogyan határozzuk meg egy fa Prüfer-kódját?

Legyen adott egy $F = (\varphi, E, V, w)$ csúcscímkézett fa, az egyes csúcsok címkéi 1 és n közötti különböző egész számok, ahol $n = |V|$. Töröljük az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút, és írjuk fel ennek szomszédjának a számát. A kapott fára (Miért fa?) folytassuk az eljárást, amíg már csak egy csúcs marad, mégpedig az n címkéjű (Miért?). A sorozat $n-1$-edig tagja szükségképpen n, ezért ez elhagyható.
A kapott $n-2$ hosszú sorozat az F fa Prüfer-kódja.

70. Hogyan adható meg egy fa a Prüfer-kódjából?

Legyen a Prüfer-kód $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Legyen a kódban nem szereplő legkisebb sorszám s_1. Ha s_i-t már meghatároztuk, akkor legyen s_{i+1} az a legkisebb sorszám, amely különbözik az alábbiaktól: $s_1, s_2, \ldots, s_i; p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Ilyennek mindig lennie kell, mert n lehetőségből legfeljebb $n-1$ számút nem engedünk meg. Az n csúcsot tartalmazó üres gráfból kiindulva minden i-re $(1 \leq i \leq n-1)$ megrajzoljuk az s_i és p_i csúcsokra illeszkedő élt.

6. Irányított gráfok

71. Definiáld az irányított gráf fogalmát!

A $G = (\psi, E, V)$ hármast irányított gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\psi \colon E \to V \times V$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és ψ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A ψ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezett párt rendel.

72. Definiáld a “kezdőpontja” és a “végpontja” fogalmakat!

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v kezdőpontja, v' pedig végpontja e-nek.

73. Hogyan kaphatunk irányított gráfból irányítatlant?

Bármely $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfból kapható egy $G' = (\varphi, E, V)$ irányítatlan gráf úgy, hogy $\psi(e) = (v, v')$ esetén $\varphi(e)$-t $\{v, v'\}$-nek definiáljuk.

74. Definiáld az irányítás fogalmát!

Ekkor azt mondjuk, hogy G a G' egy irányítása.

75. Definiáld a szigorúan párhuzamos élek fogalmát!

Ha $e \neq e'$ esetén $\psi(e) = \psi(e')$, akkor e és e' szigorúan párhuzamos élek.

76. Definiáld a kifok/befok fogalmát!

Azon élek számát, amiknek a v csúcs kezdőpontja, v kifokának nevezzük, és $deg^+(v)$-vel vagy $d^+(v)$-vel jelöljük.
Azon élek számát, amiknek a v csúcs végpontja, v befokának nevezzük, és $deg^-(v)$-vel vagy $d^-(v)$-vel jelöljük.

77. Definiáld a nyelő/forrás fogalmát!

Ha egy csúcs kifoka 0, akkor nyelőnek, ha a befoka 0, akkor forrásnak nevezzük.

78. Mit mondhatunk a fokszámösszegekről irányított gráfban?

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfra

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

79. Mikor nevezünk két irányított gráfot izomorfnak?

A $G = (\psi, E, V)$ és $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfok izomorfak, ha léteznek $f\colon E \to E'$ és $g\colon V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re v pontosan akkor kezdőpontja e-nek, ha $g(v)$ kezdőpontja $f(e)$-nek, és v pontosan akkor végpontja e-nek, ha $g(v)$ végpontja $f(e)$-nek.

80. Mit jelentenek a C_n→, P_n→, S_n→, K_n→ rövidítések?

A $\overrightarrow{C_n}$ irányított ciklus a C_n ciklus olyan irányítása, melyben az élek irányítása azonos (minden csúcs befoka és kifoka is 1).
A $\overrightarrow{P_n}$ irányított ösvény $\overrightarrow{C_{n+1}}$-ból valamely él törlésével adódik.
Az $\overrightarrow{S_n}$ irányított csillag az S_n csillag olyan irányítása, melyben a középső csúcs nyelő, az összes többi pedig forrás.
Adott csúcshalmaznál az irányított teljes gráfban tetszőleges v és v' különböző csúcsokhoz található pontosan egy olyan él, aminek v a kezdőpontja és v' a végpontja. $\overrightarrow{K_n}$ nem K_n irányítása, sőt nem is egyszerű gráf, ha $n > 1$.

81. Definiáld az irányított részgráf fogalmát!

A $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfot a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf irányított részgráfjának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\psi' \subset \psi$. Ekkor G-t a G' irányított szupergráfjának hívjuk.

82. Definiáld a feszített/telített részgráf fogalmát!

Ha a G' irányított részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek kezdőpontjai és végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott feszített irányított (vagy telített irányított) részgráfnak nevezzük.

83. Definiáld irányított gráf komplementerét!

Ha $G' = (\psi', E', V')$ irányított részgráfja a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó komplementerén a $(\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

84. Definiáld az élek/csúcsok törlését irányított gráf esetén!

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyeknek kezdőpontja vagy végpontja valamely V'-beli csúcs. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ irányított részgráfot értjük.

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ irányított részgráfot értjük.

85. Definiáld az irányított séta fogalmát!

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot irányított sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\psi(e_m) = (v_{m-1}, v_m) \quad 1 \leq m \leq n$.

86. Definiáld a zárt/nyílt irányított séta fogalmát!

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt irányított sétáról beszélünk, különben nyílt irányított sétáról.

87. Definiáld az irányított vonal fogalmát!

Ha az irányított sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor irányított vonalnak nevezzük.
Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt irányított vonalról.

88. Definiáld az irányított út fogalmát!

Ha az irányított sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor irányított útnak nevezzük.

89. Definiáld az irányított kör fogalmát!

Egy legalább egy hosszú zárt irányított vonalat irányított körnek nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként az irányított vonal pontjai különböznek.

90. Definiáld az erősen összefüggő gráf fogalmát!

Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsából bármely csúcsába vezet irányított út.

91. Definiáld az erős komponens fogalmát!

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet irányított út v-ből v'-be, és v'-ből is vezet irányított út v-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített irányított részgráf az irányított gráf egy erős komponense.

92. Definiáld az irányított fa fogalmát!

Az irányított fa olyan irányított gráf, amely fa, és van egy csúcsa, amelynek befoka 0, továbbá az összes többi csúcs befoka 1.

93/94. Definiáld a gyökér/levél fogalmát irányított fában!

Azt a csúcsot, amelynek befoka 0 gyökérnek nevezzük. Az olyan csúcs, aminek a kifoka 0 a levél.

95. Mit mondhatunk irányított fában a gyökérből induló utakról?

A gyökérből bármely adott csúcsba vezető egyetlen út egyben irányított út is.

96. Definiáld a szint fogalmát irányított fában!

A gyökérből egy adott csúcsba vezető út hosszát a csúcs szintjének hívjuk.

97. Definiáld a magasság fogalmát irányított fában!

A csúcsok szintjeinek maximumát az irányított fa magasságának nevezzük.

98. Definiáld a gyerek/szülő/testvér fogalmát irányított fában!

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v' a v gyereke, illetve v a v' szülője.
Ha két csúcsnak ugyanaz a szülője, akkor testvéreknek hívjuk őket.

99. Definiáld az irányított részfa fogalmát!

Bármely v csúcsra tekinthetjük azon csúcsok halmazát, amelyekhez vezet irányított út v-ből. Ezen csúcsok által meghatározott feszített irányított részgráfot (amely irányított fa, és v a gyökere) v-ben gyökerező irányított részfának nevezzük.

100. Ismertesd Dijkstra algoritmusát, és a rá vonatkozó tételt!

Tétel

A Dijkstra-algoritmus a csúcshalmazon értelmez egy $f: V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amely $t \in T$ esetén az adott s csúcsból a t csúcsba vezető irányított séták súlyainak a minimuma (∞, ha nincs ilyen séta).

Algoritmus (Dijkstra)

A $G = (\psi, E, V, w)$ élsúlyozott irányított gráfról tegyük fel, hogy az élsúlyok pozitívak, $s \in V$ és $T \subset V$.

(1) Legyen $S = \emptyset$, $H = \{s\}$ és $f(s) = 0$; minden más v csúcsra legyen $f(v) = \infty$

(2) Ha $T \subset S$ vagy $H = \emptyset$, akkor az algoritmus véget ér.

(3) Legyen $t \in H$ egy olyan csúcs, amelyre $f(t)$ minimális. Tegyük át t-t S-be, és minden e élre, amely t-ből $v \in V \setminus S$-be vezet, ha $f(t) + w(e) < f(v)$, akkor legyen $f(v) = f(t) + w(e)$, és ha $v \notin H$, tegyük át v-t H-ba. Menjünk (2)-re.