1. Gráfok alapfogalmai

Irányítatlan gráf fogalma
A G = (φ , E, V) hármast *irányítatlan gráfnak* nevezzük, ha E, V halmazok, V ≠ Ø ∧ V ∩ E = Ø ∧ φ: E → {{v,v'} | v,v' ∈ V}. E az élek halmaza, V a csúcsok halmaza és φ az illeszkedési leképezés. A φ leképezés E ∀ eleméhez egy V-beli rendezetlen párt rendel.

„Illeszkedik" és „végpontja" fogalmak
v ∈ φ(e) esetén e *illeszkedik* v-re, illetve v *végpontja* e-nek.

Illeszkedési reláció
Az illeszkedési leképezés meghatározza az I ⊂ E × V *illeszkedési relációt*:

$$(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e).$$

Véges/Végtelen gráf
Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot *véges gráfnak* nevezzük, egyébként *végtelennek* mondjuk.

Üres gráf
Ha E = ∅, akkor *üres gráfról* beszélünk.

Szomszédos él/csúcs fogalma
Az e ≠ e' *élek szomszédosak*, ha ∃ v ∈ V, melyre v ∈ φ(e) ∧ v ∈ φ(e') egyszerre teljesül. A v ≠ v' *csúcsok szomszédosak*, ha ∃ e ∈ E, melyre v ∈ φ(e) ∧ v' ∈ φ(e) egyszerre teljesül.

Fokszám
A v csúcs *fokszámán* a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva. Jelölése d(v) vagy deg(v).

Izolált csúcs
Ha d(v) = 0, akkor v egy *izolált csúcs*.

N-reguláris gráf
Ha egy gráf ∀ csúcsának a foka **n**, akkor azt ***n**-reguláris* gráfnak hívjuk.

Reguláris gráf
Egy gráfot *regulárisnak* nevezünk, ha valamely **n**-re **n**-reguláris.

Mit mondhatunk irányítatlan gráfban a fokszámok összegéről? Bizonyítás!
A G = (φ , E, V) gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Bizonyítás

Élszám szerinti teljes indukció: $|E| = 0$ esetén mindkét oldal 0. Tfh. $|E| = n$ esetén igaz az állítás. Ha adott egy gráf, amelynek $n + 1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt újra hozzávéve a gráfhoz az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.

Mikor nevezünk két irányítatlan gráfot izomorfnak?

A G = (φ, E, V) és G' = (φ', E', V') gráfok izomorfak, ha ∃ f:E→E' és g:V→V' bijektív leképezések, hogy ∀ **e** ∈ E-re és **v** ∈ V-re **e** pontosan akkor illeszkedik **v**-re, ha f(**e**) illeszkedik g(**v**)-re.

Teljes gráf

Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcs szomszédos, akkor *teljes gráfról* beszélünk.

Mit mondhatunk a teljes gráf élszámáról? Bizonyítás!

Az **n** csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2}$ = **n**(**n**-1)/2 éle van, és K_n-nel jelöljük.

Számolhatunk így is:Minden pontból n–1 él indul ki, ez n(n–1) él, de így minden élt kétszer számolunk, tehát az élek száma ennek a fele.

Mit jelent a C_n, P_n, S_n rövidítések?

- C_n ciklus csúcsai egy szabályos **n**-szög csúcspontjai és pontosan a szomszédos csúcsokpontoknak megfelelő csúcsok szomszédosak.
- P_n ösvény C_{n+1}-ből valamely él törlésével adódik.
- S_n csillagban egy szabályos **n**-szög csúcspontjainak és középpontjának megfelelő csúcsok közül a középpontnak megfelelő csúcs szomszédos az összes többivel.

Páros gráf

A G = (φ, E, V) gráfot *páros gráfnak* nevezzük, ha V-nek ∃ V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy ∀ él egyik végpontja V'-nek, másik végpontja pedig V''-nek eleme.

Mit jelent a $K_{m,n}$ rövidítés?

Azt az egyszerű gráfot, melyben |V'| = m, |V''| = n és ∀ V'-beli csúcs ∀ V''-beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$ -nel jelöljük.

Részgráf

A G' = (φ', E', V') gráfot a G = (φ, E, V) gráf *részgráfjának* nevezzük, ha E' ⊂ E, V' ⊂ V és φ' ⊂ φ. Ekkor G-t a G' szupergráfjának hívjuk.

Feszített részgráf

Ha a G' részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott *feszített részgráfnak* nevezzük.

Irányítatlan gráf komplementere
Ha G' = (φ', E', V') részgráfja a G = (φ, E, V) gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó *komplementerén* a $(\varphi|_{E \setminus E'}$, E\E', V) gráfot értjük.

Az élek/csúcsok törlésével kapott gráf
Ha G = (φ, E, V) egy gráf és E' ⊂ E, akkor G-ből az *E' részhalmaz törlésével kapott gráfon* a G' = (φ|E\E', E\E', V) részgráfot értjük.

Ha G = (φ, E, V) egy gráf és V' ⊂ V, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, melyek illeszkednek valamely V'-beli csúcsra. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott gráfon a G' = (φ|E\E', E\E', V\V') részgráfot értjük.

Séta fogalma
Legyen G = (φ, E, V) egy gráf. A $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$ sorozatot *sétának* nevezzük v_0-ból v_n-be, ha $v_j \in V$ $(0 \leq j \leq n)$, $e_k \in E$ $(1 \leq k \leq n)$, $\varphi(e_i)=\{v_{i-1}, v_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$.

Hogyan definiáljuk a séta hosszát?
A *séta hossza* a benne szereplő élek száma.

Mikor nevezünk egy sétát zártnak/nyíltnak?
Ha $v_0=v_n$, akkor *zárt sétáról* beszélünk, különben *nyílt sétának* mondjuk.

Vonal fogalma
Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor *vonalnak* nevezzük. Beszélhetünk nyílt illetve zárt vonalról.

Út fogalma
Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor *útnak* nevezzük.

Kör fogalma
Egy legalább egy hosszú zárt vonalat *körnek* nevezünk, ha a kezdő- és végpont megegyezik, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

Mit állíthatunk a séta és út kapcsolatáról? Bizonyítás!
Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v-t v'-vel összekötő utat kapunk.

Bizonyítás

Legyen az állításban szereplő séta a következő:

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v'.$$

Ha valamely $i < j$ esetén $v_i = v_j$, akkor töröljük az

$$e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \ldots, v_{j-1}, e_j, v_j$$

részt, és ismételjük ezt, amíg van csúcsismétlődés. Ha már nincs, akkor utat kaptunk, és mivel minden lépésben csökken a séta hossza, ezért az eljárás véges sok lépésben véget ér.

Összefüggőség fogalma
Egy gráfot *összefüggőnek* nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

Komponens fogalma! Bizonyítsd be hogy ez a reláció ekvivalencia reláció!
A G = (φ, E, V) gráf esetén V elemeire vezessük be a ~ relációt: v ~ v' ⇔ G-ben vezet út v-ből v'-be. A ~ reláció ekvivalencia reláció, így meghatároz egy osztályozást V-n. A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy *komponense*.

Ekvivalencia reláció = Egyszerre tranzitív, szimmetrikus és reflexív.

- a $\sim$ reláció reflexív, azaz minden $a \in A$ esetén $a \sim a$ teljesül,
- a $\sim$ reláció szimmetrikus, azaz minden $a, b \in A$ esetén ha $a \sim b$ teljesül, akkor $b \sim a$ is teljesül,
- a $\sim$ reláció tranzitív, azaz minden $a, b, c \in A$ esetén ha $a \sim b$ és $b \sim c$ teljesül, akkor $a \sim c$ is teljesül.

BIZONYÍTÁS: A reflexivitás és a szimmetria triviális. Csak a tranzitivitást kell belátnunk. Legyen $(p, e_0, p_1, e_1, \dots, q)$ a p-t és q-t összekötő, $(q, f_0, q_1, f_1, \dots, r)$ a q-t és r-et összekötő út. Legyen p_i a legkisebb indexű p, amely előfordul a q-k között. Mondjuk $p_i = q_j$. Ekkor a $(p, e_0, p_1, e_1, \dots, p_i, f_j, q_{j+1}, \dots, r)$ egy p-t és r-et összekötő út. □

Mi a kapcsolat egy gráf komponenseinek a száma és az összefüggősége között?
Egy G gráf összefüggő ⇔ ∀ csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, vagyis egyetlen komponense van G-nek.

2. Fák

Fa fogalma
Egy gráfot *fának* nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Három ekvivalens állítás a fa definíciójára. Bizonyítás!
Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

- G fa.
- G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő.
- Ha v és v' G különböző csúcsai, akkor pontosan egy út van v-ből v'-be.
- G-nek nincsen köre, de bármilyen új él hozzá vételével kapott gráf már tartalmaz kört.

Bizonyítás

$(1) \Rightarrow (2)$

G összefüggősége következik a fa definíciójából. Az állítás másik részét indirekten bizonyítjuk.

Tfh. létezik egy olyan e él (a végpontjai legyenek v és v') a gráfban, aminek a törlésével kapott gráf összefüggő. Ekkor létezne út v-ből v'-be, amit kiegészítve a törölt éllel és a megfelelő csúccsal egy kört kapnánk: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Legalább egy út létezik az összefüggőség miatt. Indirekten bizonyítjuk, hogy nem létezhet két különöző út:

Tfh. 2 út is létezik a különböző v és v' csúcsok között, legyenek ezek: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ és $v, e'_1, v'_1, e'_2, \ldots, v'_{m-1}, e'_m, v'$. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $v_k \neq v'_k$. (Miért létezik ilyen?) Az e_k élt törölve összefüggő gráfot kapunk, mert a v_{k-1}, e_k, v_k séta helyettesíthető a $v_{k-1}, e'_k, v'_k, \ldots, e'_m, v', e_n, v_{n-1}, e_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_k$ sétával.

Bizonyítás

$(3) \Rightarrow (4)$

Annak a bizonyítása, hogy nincs kör a gráfban indirekt:

tfh. létezik kör: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$. Ekkor v_1 és v között két különböző út is van: $v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$ illetve v_1, e_1, v.

Ha a hozzávett e él hurokél, és a v csúcsra illeszkedik, akkor v, e, v kör lesz. Ha a hozzávett e él a különböző v és v' csúcsokra illeszkedik, akkor a köztük lévő utat megfelelően kiegészítve kapunk kört: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

$(4) \Rightarrow (1)$

Az, hogy G-nek nincs köre triviálisan teljesül. Kell, hogy G összefüggő, vagyis tetszőleges v és v' csúcsa között van út. Vegyük a gráfhoz a v-re és v'-re illeszkedő e élet. Az így keletkező körben szerepel e (Miért?): $v', e, v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$. Ekkor $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ út lesz v és v' között.

Mit mondhatunk körmentes gráfban az elsőfokú csúcsokról? Bizonyítás !

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G-nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás

A G-beli utak között van maximális hosszúságú (hiszen G véges), és a hossza legalább 1, így a végpontjai különbözőek. Megmutatjuk, hogy ezek elsőfokúak. Legyen az említett út: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Ha lenne az e_1-től különböző v_0-ra illeszkedő e él, annak másik végpontja (v') nem lehet az útban szereplő csúcsoktól különböző, mert akkor $v', e, v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ út hossza nagyobb lenne, mint a maximális út hossza. Ha viszont e másik végpontja az út valamely v_k csúcsa, akkor $v_k, e, v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ kör lenne, ami szintén ellentmondás.

Szükséges és elégséges feltétel arra, hogy egy véges egyszerű gráf fa, amelyben szerepel az élek száma. Bizonyítás !

- G fa.
- G-ben nincs kör, és n-1 éle van.
- G összefüggő, és n-1 éle van.

Bizonyítás

$n = 1$ esetén az állítás triviális. (Miért?)
$(1) \Rightarrow (2)$: n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú G fát. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott gráf, G' nyilván körmentes. Összefüggő is lesz, hiszen v egy G-beli útnak csak kezdő- vagy végpontja lehet, így a G' tetszőleges v' és v'' csúcsa közti G-beli út nem tartalmazhatja sem v-t, sem a rá illeszkedő élt, így G'-beli út is lesz egyben. Tehát G' fa, ezért alkalmazva az indukciós feltevést $k - 1$ éle van, és így G-nek k éle van.

Bizonyítás

$(2) \Rightarrow (3)$: n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú körmentes G gráfot, aminek k éle van. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott G' gráf az indukciós feltevés miatt összefüggő, tehát tetszőleges v' és v'' csúcsa között vezet út G'-ben, ami tekinthető G-beli útnak is. G' tetszőleges csúcsa és v közötti utat úgy kaphatunk, hogy az adott csúcs és a v-vel szomszédos csúcs közötti utat kiegészítjük az elhagyott éllel és v-vel.
$(3) \Rightarrow (1)$: Ha a feltételnek eleget tevő gráfban van kör, akkor az abban szereplő tetszőleges él elhagyásával összefüggő gráfot kapunk. (Miért?) Folytassuk az élek törlését, amíg már nincs több kör a kapott gráfban, tehát fa lesz. Ha k élt hagytunk el, akkor a kapott gráfnak $n - 1 - k$ éle van, ugyanakkor az $(1) \Rightarrow (2)$ rész miatt a kapott fának $n - 1$ éle van, így $k = 0$, tehát a gráfunkban nem volt kör, így fa.

3. Feszítőfa, Euler-vonal, Hamilton-kör

Feszítőfa fogalma
A G gráf egy F részfáját a *feszítőfájának* nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával és fa.

Mikor létezik feszítőfája egy gráfnak? Bizonyítás !
Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Bizonyítás

Amíg van kör a gráfban, hagyjuk el annak egy élét. A kapott gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben fát kapunk.

Mit mondhatunk összefüggő gráfban a körök számáról? Bizonyítás !
Egy G = (φ, E, V) összefüggő véges gráfban ∃ legalább |E| - |V| + 1 kör, amelyek élhalmaza különböző.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Ennek $|V|-1$ éle van. Jelöljük E'-vel G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. $e \in E'$-t hozzávéve F-hez keletkezik egy K_e kör (Miért?), ami kör G-ben. A K_e kör tartalmazza e-t (Miért?), és $e \neq e' \in E'$ esetén $K_{e'}$ nem tartalmazza e-t. Így kapunk $|E|-|V|+1$ kört, amiknek az élhalmaza különbözik.

Mikor mondjuk, hogy E’ elvágja a v és v’ csúcsokat?
Legyen G = (φ, E, V), v,v’ ∊ V és E’ ⊂ E. Azt mondjuk, hogy E’ *elvágja* a v és v’ csúcsokat, ha ∀ v-ből v’-be menő út tartalmaz E’-beli élet.

Elvágó élhalmaz fogalma
Ha ∃ csúcsok, amelyeket E’ elvág, akkor E’-t *elvágó élhalmaznak* nevezzük.

Vágás fogalma
Ha egy elvágó halmaznak ∄ valódi részhalmaza, amely maga is elvágó halmaz, akkor *vágásnak* nevezzük.

Összefüggő gráfban lévő vágások száma! Bizonyítás !
Egy G = (φ,

E, V) összefüggő véges gráfban ∃ legalább |V|-1 különböző vágás.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Jelöljük E'-vel F éleinek halmazát, E''-vel pedig G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. Ekkor E'' nem elvágó halmaz (Miért?), de tetszőleges $e \in E'$ esetén $E'' \cup \{e\}$ már az (Miért?). Legyen E_e az a vágás, amit $E'' \cup \{e\}$ tartalmaz (Miért van ilyen?). E_e tartalmazza e-t (Miért?), de $e \neq e' \in E'$ esetén nem tartalmazza e' -t, így kaptunk $|V| - 1$ különböző vágást.

Erdő fogalma
Egy körmentes gráfot *erdőnek* nevezünk.

Feszítőerdő fogalma
Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, *feszítőerdőnek* nevezzük.

Erdő élszáma
Egy véges *erdő éleinek száma* a csúcsainak és komponenseinek számának a különbsége.

Euler-vonal fogalma
Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf $\forall$ éle szerepel, *Euler-vonalnak* nevezzük.

Mit állíthatunk összefüggő gráfban zárt Euler-vonal létezésével kapcsolatban? Bizonyítás !
Összefüggő gráfban $\exists$ zárt Euler-vonal $\Leftrightarrow$ $\forall$ csúcs foka páros.

Bizonyítás

$\Rightarrow$: Legyen a zárt Euler-vonal a következő:
$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_0$.
A vonal kezdő- és végpontját leszámítva egy csúcs minden előfordulása esetén a mellette lévő két különböző él 2-vel járul hozzá a fokszámához. A kezdő- és végpont ugyanaz, ezért ennek is páros lesz a foka.

Bizonyítás

$\Leftarrow$: a bizonyítás konstruktív. Induljunk ki egy élt nem tartalmazó zárt vonalból (v). Ha az eddig kapott zárt vonalban nem minden él szerepel, akkor az összefüggőség miatt van olyan csúcs (v'), amelyre illeszkedő élek közül nem szerepel mindegyik. Induljunk el ebből a csúcsból egy fel nem használt élen, és haladjunk tovább mindig fel nem használt éleken. Mivel minden csúcsra páros sok fel nem használt él illeszkedik, a továbbhaladás csak akkor nem lehetséges, ha visszaértünk v'-be. Ha most az eredeti vonalon elmegyünk v-ből v'-be, az új vonalon körbemegyünk, majd az eredeti vonalon haladunk tovább, akkor az eredeti vonalnál hosszabb zárt vonalat kapunk, így ezt az eljárást ismételve véges sok lépésben megkapunk egy Euler-vonalat.

Hamilton-út/kör fogalma

- Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel *Hamilton-útnak* nevezzük.
- Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa *szerepel Hamilton-körnek* nevezzük.

Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ gráfra $|V| > 2 \wedge \forall$ csúcs foka legalább $|V|/2 \Rightarrow \exists$ Hamilton-köre.

4. Címkézett gráfok

Címkézett gráf

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, C_e és C_v halmazok az élcímkék, illetve a csúcscímkék halmaza, továbbá $c_e:E\to C_e$ és $c_v:V\to C_v$ leképezések az élcímkézés, illetve a csúcscímkézés. Ekkor a $(\varphi, E, V, c_e, C_e, c_v, C_v)$ hetest *címkézett gráfnak* nevezzük.

Élcímkézett/csúcscímkézett gráf fogalma

Élcímkézett, illetve *csúcscímkézett gráfról* beszélünk, ha csak élcímkék és élcímkézés, illetve csúcscímkék és csúcscímkézés adott.

Élsúlyozás/csúcssúlyozás fogalma

$C_e = \mathbb{R}$, illetve $C_v = \mathbb{R}$ esetén *élsúlyozásról* és *elsúlyozott gráfról*, illetve *csúcssúlyozásról* és *csúcssúlyozott gráfról* beszélünk, a jelölésből C_e-t illetve C_v-t elhagyjuk.

Élhalmaz súlya

Egy $G = (\varphi, E, V, w)$ élsúlyozott gráfban az $E' \subset E$ *élhalmaz súlya* $\sum_{e\in E'} w(e)$.

Kruskal-algoritmus és a rá vonatkozó tétel! Bizonyítás !

- Egy élsúlyozott gráf esetén az összes csúcsot tartalmazó üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük hozzá a minimális súlyú élt, amivel nem keletkezik kör.

- A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

Bizonyítás

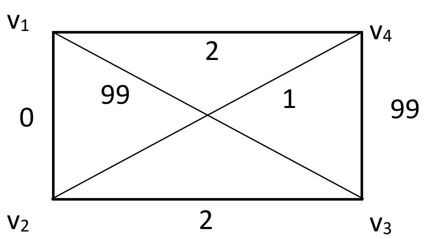
Elég összefüggő gráfra bizonyítani (Miért?).
Összefüggő gráf esetén az algoritmus nyilván feszítőfát eredményez (Miért?).
Indirekt tfh. van az algoritmus által meghatározott F feszítőfánál kisebb súlyú feszítőfája a gráfnak. Ha több ilyen van, akkor F' legyen az a minimális súlyú, amelyiknek a legtöbb közös éle van F-fel. Legyen e' olyan éle F'-nek, ami nem éle F-nek. (Miért van ilyen?) Az F-hez e' hozzávételével kapott gráfban van egy K kör (Miért?). Ezen kör tetszőleges e élére $w(e) \leq w(e')$ (Miért?). Az F'-ből az e' törlésével kapott gráf nem összefüggő (Miért?), és pontosan 2 komponense van (Miért?). A K-nak van olyan éle (e''), aminek a végpontjai az F'-ből az e' törlésével kapott gráf különböző komponenseiben vannak (Miért?).

Biz.folyt.

Tekintsük azt a gráfot, amit F'-ből az e' törlésével és az e'' hozzávételével kapunk. Az így kapott gráf is feszítőfa (Miért?), és $w(e'') < w(e')$ esetén kisebb súlyú, mint F', míg $w(e'') = w(e')$ esetén ugyanakkora súlyú, de több közös éle van F-fel. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Mohó algoritmus fogalma
Egy algoritmust *mohó algoritmusnak* nevezünk, ha minden lépésben az adódó lehetőségek közül az adott lépésben legkedvezőbbek egyikét választja.

A *mohó algoritmus* nem mindig optimális.



5. Síkgráfok, színezés, gráfok ábrázolása

Mikor nevezünk egy gráfot síkgráfnak?
Egy G gráfot *síkgráfnak* nevezünk, ha az felrajzolható a síkra anélkül, hogy az éleinek a csúcspontokon kívül lennének közös pontjai.

Mit értünk egy gráf síkbeli reprezentációja alatt?

Egy síkgráf egy síkbeli felrajzolását a *gráf síkbeli reprezentációjának* nevezzük.

Hogyan definiáljuk a síkgráf tartományát?
A G gráf egy síkbeli reprezentációja esetén *tartománynak* nevezzük az élek által határolt síkidomot. Ez nem feltétlenül korlátos, ilyenkor *külső tartományról* beszélünk, egyébként pedig *belső tartományról*.

Euler-formula síkgráfokra vonatkozóan
Egy G = (φ, E, V) összefüggő síkgráf tetszőleges síkbeli reprezentációját tekintve, melyre **t** jelöli a tartományok számát, teljesül a következő összefüggés:

$$|E| + 2 = |V| + \mathbf{t}.$$

Bizonyítás (vázlat)

Ha a gráfban van kör, annak egy élét törölve az általa elválasztott két tartomány egyesül, így a tartományok és élek száma is (vagyis az egyenlet mindkét oldala) 1-gyel csökken. Az eljárás ismétlésével fát kapunk, aminek 1 tartománya van, így teljesül rá az összefüggés (Miért?).

Síkgráf élszáma
Ha a G = (φ, E, V) egyszerű, összefüggő síkgráfra |V| ≥ 3, akkor

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Bizonyítás

$|V| = 3$ esetén 2 ilyen gráf van: P_2 és C_3, amelyekre teljesül az állítás. $|V| > 3$ esetén legalább 3 éle van a gráfnak (Miért?). Mivel G egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja, ezért a tartományok határán végigszámolva az éleket az így kapott érték legalább $3t$. Mivel minden él legfeljebb két tartományt választ el, ezért $3t \leq 2|E|$. Az Euler-formulát használva $3(|E| + 2 - |V|) \leq 2|E|$, amiből kapjuk az állítást.

Mit mondhatunk síkgráfban a minimális fokszámú csúcs fokáról?
Ha G = (φ, E, V) egyszerű, összefüggő síkgráf, akkor

$$\delta = \min_{v \in V} d(v) \leq 5.$$

Bizonyítás

Feltehető, hogy $|V| \geq 3$ (Miért?).
Indirekt tfh. $\delta \geq 6$. Ekkor $6|V| \leq 2|E|$ (Miért?), továbbá az előző állítást használva $2|E| \leq 6|V| - 12$, vagyis $6|V| \leq 6|V| - 12$, ami ellentmondás.

Példa nem síkba rajzolható gráfra.

Állítás

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

Bizonyítás

Indirekt tfh. $K_{3,3}$ síkgráf, és jelöljük t-vel a síkbeli reprezentációiban a tartományok számát. Ekkor $|E| = 9$ és $|V| = 6$ miatt az Euler-formula alapján $t = 5$. Mivel egyszerű, páros gráf, így minden tartomány határa legalább 4 élt tartalmaz (Miért?), és minden él legfeljebb két tartomány határán van, ezért $4t \leq 2|E|$, amiből $20 \leq 18$ adódik, ami ellentmondás.

Állítás

K_5 nem síkgráf.

Bizonyítás

Indirekt tfh. K_5 síkgráf. $|E| = 10$ és $|V| = 5$, így az élszámra vonatkozó becslés alapján $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, ami ellentmondás.

Topologikusan izomorf gráfok fogalma

A G és G' gráfokat *topologikusan izomorfnak* nevezzük, ha az alábbi lépést, illetve a fordítottját alkalmazva, véges sok lépésben az egyikből a másikkal izomorf gráfot kapunk: egy másodfokú csúcsot törlünk, és a szomszédjait összekötjük egy éllel.

Kuratowski tétele síkgráfokkal kapcsolatban

Egy egyszerű gráf pontosan akkor síkgráf, ha nincs olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

Négyszíntétel

Minden síkgráf 4 színnel színezhető.

Jólszínezés fogalma

Egy gráf egy csúcsszínezését *jólszínezésnek* nevezzük, ha a szomszédos csúcsok színe különböző.

Kromatikus szám

Egy gráf *kromatikus száma* az a legkisebb **n** természetes szám, amelyre jólszínezhető **n** színnel.

Irányított és irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa
Ha egy G = (ψ, E, V) irányított gráf élei $e_1, e_2, \dots, e_n$, csúcsai pedig $v_1, v_2, \dots, v_m$, akkor az alábbi *illeszkedési mátrix* egyértelműen megadja a gráfot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ha } e_j - \text{nek } v_i \text{ kezdőpontja} \\ -1, \text{ha } e_j \text{ nem hurokél, és } v_i \text{ a végpontja} \\ 0, \text{egyébként} \end{cases}$$

A megfelelő *irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa* az $|a_{ij}|$ elemekből áll.

Irányított és irányítatlan gráf csúcsmátrixa
A G *irányított gráf csúcsmátrixában* legyen b_{ij} a v_i kezdőpontú és v_j végpontú élek száma. A megfelelő irányítatlan gráf csúcsmátrixának elemeire:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{a } v_i\text{-re illeszkedő hurokélek száma, ha } i = j \\ \text{a } v_i\text{-re és } v_j\text{-re is illeszkedő élek száma, egyébként} \end{cases}$$

Prüfer-kód algoritmusa
Legyen adott egy F = (φ, E, V, w) csúcscímkézett fa, az egyes csúcsok címkéi 1 és **n** közötti különböző egész számok, ahol **n** = |V|. Töröljük az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút, és írjuk fel ennek szomszédjának a számát. A kapott fára folytassuk az eljárást, amíg már csak egy csúcs marad, mégpedig az **n** címkéjű. A sorozat **n** – 1-edik tagja szükségképpen **n**, ezért ez elhagyható. A kapott **n** – 2 hosszú sorozat az F fa Prüfer-kódja.

Fa megadása Prüfer-kódból
Legyen a Prüfer-kód $p_1 p_2 \dots p_{n-2} p_{n-1}$ = **n**. Legyen a kódban nem szereplő legkisebb sorszám s_1. Ha s_i-t már meghatároztuk, akkor legyen s_{i+1} az a legkisebb sorszám, amely különbözik az alábbiaktól:
$s_1, s_2, \dots, s_i$; $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}$ = **n**. Ilyennek mindig lennie kell, mert n lehetőségből legfeljebb **n** – 1 számút nem engedünk meg. Az **n** csúcsot tartalmazó üres gráfból kiindulva ∀ i-re (1 ≤ i ≤ **n** – 1) megrajzoljuk az si és pi csúcsokra illeszkedő élt.

6. Irányított gráfok

Irányított gráf fogalma
A G = (ψ, E, V) hármast *irányított gráfnak* nevezzük, ha E, V halmazok, V ≠ ∅,
V ∩ E = ∅ és ψ:E→V×V.

Ekkor E az élek halmaza, V a csúcsok halmaza és ψ az illeszkedési leképezés.
A ψ leképezés E ∀ eleméhez egy V-beli rendezett párt rendel.

Kezdőpont és végpont fogalma
ψ(**e**) = (v,v’) esetén azt mondjuk, hogy v *kezdőpontja*, v’ pedig *végpontja* **e**-nek.

Hogyan kaphatunk irányított gráfból irányítatlant?
Bármely G = (ψ, E, V) irányított gráfból kapható egy G’ = (φ, E, V) irányítatlan gráf úgy, hogy ψ(e) = (v,v’) esetén φ(e)-t {v,v’}-nek definiáljuk.

Irányítás fogalma
Ha a G' irányítatlan gráfot egy G irányított gráfból kaptuk, akkor azt mondjuk, hogy G a G' egy *irányítása*.

Szigorúan párhuzamos élek fogalma
Ha **e** ≠ **e**' esetén ψ(**e**) = ψ(**e**'), akkor **e** és **e**' *szigorúan párhuzamos élek*.

Kifok és befok fogalma
- Azon élek számát, amiknek a **v** csúcs kezdőpontja, **v** *kifokának* nevezzük és deg^+(**v**)-vel vagy d^+(**v**)-vel jelöljül.
- Azon élek számát, amiknek a **v** csúcs végpontja, **v** *befokának* nevezzük és deg^-(**v**)-vel vagy d-(**v**)$^-$vel jelöljük.

Nyelő és forrás fogalma
Ha egy csúcs kifoka 0, akkor *nyelőnek*, ha a befoka 0, akkor *forrásnak* nevezzük.

Mit mondhatunk a fokszám összegről irányított gráfban? Bizonyítás !
A G = (ψ, E, V) irányított gráfra

$$\sum_{v\in V} d^+(v) = \sum_{v\in V} d^-(v) = |E|.$$

Nem találtam hozzá bizonyítást , de elég konnyűnek néz ki!

Mikor nevezünk két irányított gráfot izomorfnak?
A G = (ψ, E, V) és G' = (ψ', E', V') irányított gráfok *izomorfak*, ha ∃ f:E→E' és g:V→V' bijektív leképezések, hogy ∀ **e** ∈ E-re és **v** ∈ V-re **v** kezdőpontja **e**-nek ⇔ g(**v**) kezdőpontja f(**e**)-nek, és **v** végpontja **e**-nek ⇔ g(**v**) végpontja f(**e**)-nek.

Mit jelentenek a $\vec{C}_n$, $\vec{P}_n$, $\vec{S}_n$, $\vec{K}_n$ rövidítések?
- $\vec{C}_n$ irányított ciklus, a C_n ciklus olyan irányítása, melyben az élek irányítása azonos.
- Az $\vec{P}_n$ irányított örvény $\vec{C}_{n+1}$ -ból valamely él törlésével adódik.
- Az $\vec{S}_n$ irányított csillag az S_n csillag olyan irányítása, melyben a középső csúcs nyelő, az összes többi pedig forrás.
- Adott csúcshalmaznál az irányított teljes gráfban tetszőleges **v** és **v**' különböző csúcsokhoz található pontosan egy olyan él, aminek **v** a kezdőpontja és **v**' a végpontja. $\vec{K}_n$ nem K_n irányítása, sőt nem is egyszerű gráf, ha **n** > 1.

Irányított részgráf
A G' = (ψ', E', V') irányított gráfot a G = (ψ, E, V) irányított gráf *irányított részgráfjának* nevezzük, ha E' ⊂ E, V' ⊂ V és ψ' ⊂ ψ. Ekkor G-t a G' irányított szupergráfjának nevezzük.

Feszített irányított részgráf
Ha a G' irányított részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek kezdőpontjai és végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott *feszített részgráfjának* nevezzük.

Irányított gráf komplementere

Ha G' = (ψ', E', V') irányított részgráfja a G = (ψ, E, V) irányított gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó *komplementerén* a ($\psi|_{E\setminus E'}$, E\E', V) gráfot értjük.

Az élek/csúcsok törlése irányított gráf esetén

- Ha G = (ψ, E, V) egy irányított gráf, és E' $\subset$ E, akkor a G-ből az *E' élhalmaz törlésével kapott irányított gráfon* a G' = ($\psi|_{E\setminus E'}$, E\E', V) irányított részgráfot értjük.
- Ha G = (ψ, E, V) egy irányított gráf, és V' $\subset$ V, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyeknek kezdőpontja vagy végpontja valamely V'-beli csúcs. A G-ből *V' csúcshalmaz törlésével kapott irányított gráfon* a G' = ($\psi|_{E\setminus E'}$, E\E', V\V') irányított részgráfot értjük.

Irányított séta

Legyen G = (ψ, E, V) egy irányított gráf. A

$$v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$$

sorozatot *irányított sétának* nevezzük v_0-ból v_n-be, ha $v_j \in V$ $(0 \le j \le n)$, $e_k \in E$ $(1 \le k \le n)$ és $\psi(e_i) = (v_{i-1},v_i)$ $(1 \le i \le n)$.

Zárt és nyílt irányított séta

Ha egy irányított sétában $v_0 = v_n$, akkor *zárt irányított sétáról* beszélünk, különben *nyílt irányított sétáról*.

Irányított vonal

Ha az irányított sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor *irányított vonalnak* nevezzük. Beszélhetünk *zárt vagy nyílt irányított vonalról*.

Irányított út

Ha az irányított sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkkor *irányított útnak* nevezzük.

Irányított kör

Egy legalább egy hosszú zárt irányított vonalat *irányított körnek* nevezünk, ha a kezdő- és végpont megegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

Erősen összefüggő gráf fogalma

Egy irányított gráfot *erősen összefüggőnek* nevezünk, ha bármely csúcsából bármely csúcsába vezet irányított út.

Erős komponens fogalma! Bizonyítás !

A G = (ψ, E, V) irányított gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: v $\sim$ v' $\Leftrightarrow$ G-ben vezet irányított út v-ből v'-be, és v'-ből is vezet irányított út v-be.

A $\sim$ ekvivalencia reláció $\Rightarrow$ meghatároz egy osztályozást V halmazon. A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített irányított részgráf az irányítot gráf erős *komponense*.

Bizonyítás az irányitatlan gráfoshoz hasonló !

Irányított fa fogalma

Az *irányított fa* olyan irányított gráf, amely fa és van egy csúcsa, melynek befoka 0, továbbá az összes többi csúcs befoka 1.

Gyökér fogalma
Irányított fában azt a csúcsot, melynek befoka 0, *gyökérnek* nevezzük.

Levél fogalma
Irányított fában az olyan csúcsot, aminek kifoka 0, *levélnek* nevezzük.

Mit mondhatunk irányított gráfban a gyökérből induló utakról?
A gyökérből bármely adott csúcsba vezető egyetlen út egyben irányított út is.

Bizonyítás

Az út hossza szerinti TI: ha az út hossza $n = 1$, akkor azért lesz irányított út, mert a gyökér befoka 0. Tfh. $n = k$-ra teljesül az állítás. Vegyünk egy olyan v csúcsot, amibe vezető út hossza $k+1$. Az útból elhagyva v-t és a rá illeszkedő e élt egy k hosszú utat kapunk, amiről az indukciós feltevés értelmében tudjuk, hogy ir. út. v nem lehet e kezdőpontja, mert akkor az e-re illeszkedő másik csúcs befoka legalább 2 lenne.

Szint fogalma
A gyökérből egy adott csúcsba vezető út hosszát a csúcs *szintjének* nevezzük.

Magasság fogalma
A csúcsok szintjeinek a maximumát az irányított fa *magasságának* nevezzük.

Gyerek/szülő/testvér fogalma
ψ(e) = (v,v') esetén azt mondjuk, hogy v' a v *gyereke*, illetve v a v' *szülője*. Ha két csúcsnak ugyanaz a szülője, akkor *testvéreknek* hívjuk őket.

Irányított részfa fogalma
Bármely **v** csúcsra tekinthetjük azon csúcsok halmazát, amelyekhez vezet irányított út **v**-ből. Ezen csúcsok által meghatározott feszített irányított részgráfot (amely irányított fa, és **v** a gyökere) **v**-ben gyökerező *irányított részfának* nevezzük.

Dijkstra algoritmus
A G = (ψ, E, V, w) élsúlyozott irányított gráfról tegyük fel, hogy az élsúlyok pozitívak, s ∈ V és T ⊂ V.

$\boxed{1.}$ Legyen S = ∅, H = {**s**} és d(**s**) = 0, minden más **v** csúcsra legyen d(**v**)=∞.

$\boxed{2.}$ Ha T ⊂ S vagy H = ∅, akkor az algoritmus véget ér.

$\boxed{3.}$ Legyen **t** ∈ H egy olyan csúcs, amelyre d(**t**) minimális. Tegyük át **t**-t S-be és minden **e** élre, amely **t**-ből **v** ∈ V\S-be vezet, ha d(**t**) + w(**e**) < d(**v**), akkor legyen d(**v**) = d(**t**) + w(**e**), és ha **v** ∉ H, tegyük át **v**-t H-ba. Menjünk $\boxed{2.}$-re.

Tétel

A Dijkstra-algoritmus a csúcshalmazon értelmez egy $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amely $t \in T$ esetén az adott s csúcsból a t csúcsba vezető irányított séták súlyainak a minimuma (∞, ha nincs ilyen séta).

Bizonyítás

Az S elemszáma szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy:

1. minden $t \in S$-re $f(t)$ az s csúcsból a t csúcsba vezető irányított séták súlyainak minimuma;
2. ha $v \in H$, akkor minden olyan s-ből v-be vezető irányított sétának, amelynek v-n kívül minden csúcsa S-ben van a súlya legalább $f(v)$.

Inicializálás után ezek nyilvánvalóak.
Tegyük fel, hogy (3)-ban $t \in H$-t választottuk, és tekintsünk egy tetszőleges s-ből t-be vezető irányított sétát, aminek a súlya W, továbbá legyen t' a séta első olyan csúcsa, amely nincs S-ben. A séta s-ből t'-ig vivő részének W' súlyára $W' \leq W$ (Miért?), az indukciós feltevés második része szerint $f(t') \leq W'$, és mivel t-t választottuk $f(t) \leq f(t')$, így $f(t) \leq W$, amivel az állítás első részét beláttuk.

Biz.folyt.

Miután (3)-ban az $f(v)$ értékeket megváltoztattuk, tekintsünk egy s-ből v-be vezető sétát, aminek csak az utolsó csúcsa nincs S-ben, legyen t' az utolsó előtti csúcsa, e pedig az utolsó éle. Mivel $t' \in S$, az s-től t'-ig vezető részséta súlya legalább $f(t')$, így a teljes séta súlya legalább $f(t') + w(e)$, és amikor t'-t bevettük S-be legfeljebb ennyire állítottuk $d(v)$ értékét, azóta pedig csak csökkenhetett.