Diszkrét matematika II. feladatok

1. Gráfelmélet

1. Rajzold le az összes, páronként nem izomorf 3, 4, illetve 5 csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő, illetve reguláris van közöttük?

2. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?

3. Van-e olyan társaság, ahol minden embernek különböző számú ismerőse van?

4. Van-e olyan 9-pontú gráf (tetszőleges, illetve egyszerű), melyben a pontok foka rendre
   a)7,7,7,6,6,6,5,5,5; **b)** 6,6,5,4,4,3,2,2,1?

5. És olyan 8-pontú egyszerű, melyben a fokszámok 6,6,6,6,3,3,2,2?

6. Hány olyan, páronként nem izomorf gráf van, amelyben
   a) két-két masod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, másfokszám nem fordul elő;
   b) három-három másod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, másfokszám nem fordul el?

7. Mutasd meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!

8. * Rajzold le a következő gráfot! Egy kör kerületén vegyünk fel öt pontot! A gráf csúcsai a pontok által meghatározott $\binom{5}{2}$ húr lesz. Két csúcsot akkor kötünk össze a gráfban, ha a nekik megfelelő húroknak nincs közös végpontjuk. Ezt hívják Petersen-gráfnak. Milyen C_n gráfok részgráfjai a Petersen-gráfnak?

9. Hány olyan 3, illetve 4 csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?

10. Rajzolj a komplementerével izomorf 5, illetve 6 csúcsú gráfot.

11. Mutasd meg, hogy tetszőleges páratlan hosszúságú zárt séta tartalmaz kört. Igaz-e ez páros hosszúságúra?

12. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör!

13. Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

14. Mutasd meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!

15. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsd be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, hogy egyik sem játszott a másik kettővel.

16. Mutasd meg, hogy ha egy $2n$-pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n-1$-fokú pontokat is megengedünk?

17. Igaz-e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő?

18. Rajzold le az összes (páronkánt nem izomorf) 3,4 és 5 csúcsú fát.

19. Igaz-e, hogy **(a)** minden legalább kétpontú fában van elsőfokú pont; **(b)** minden n-pontú fának $n-1$ éle van; **(c)** egy gráf pontosan akkor fa, ha bármely két pontja között pontosan egy út vezet;
    (d) minden, legalább 3-csúcsú fában van elvágó csúcs?

20. Hány olyan 8 csúcsú fa van, amiben pontosan 2 db harmadfokú csúcs van?

21. Jelöljük egy fa elsőfokú pontjanak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutasd meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c+2$.

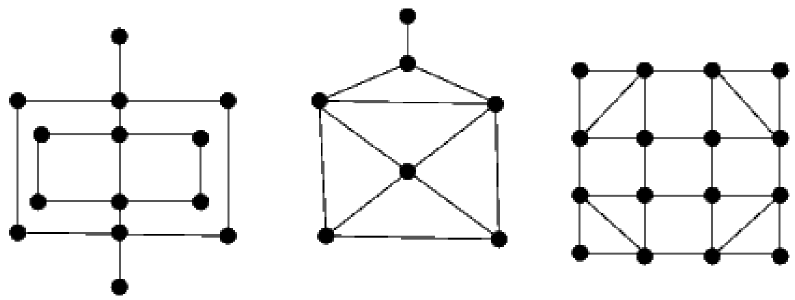
22. Igazold, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!

23. Mutasd meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!

24. Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

25. * Az n hosszúságú 0-1 sorozatok legyenek egy gráf csúcsai. A gráfban két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a megfelelő sorozatok pontosan egy helyen különböznek. Rajzold fel a gráfokat $n = 2$ és 3 esetén. Legalább hány élet kell a gréfból törölni, hogy ne legyen a maradékban kör?

26. Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (=van-e Euler vonala/köre)?

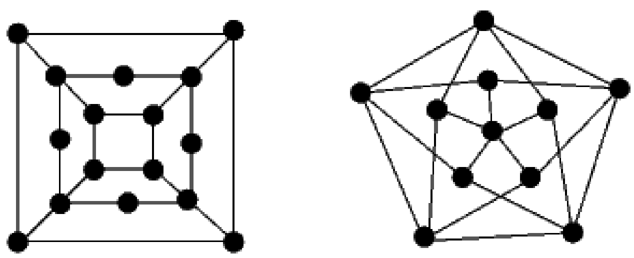


27. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van Euler-kör, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

28. Igazold, hogy minden összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Igaz-e ez zárt sétára?

29. * Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!

30. Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton köre (útja)?



31. Bejárható-e a 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

32. Mutasd meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör.

33. Mutasd meg, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen csúcsát, a maradékban már lesz.

34. Mutasd meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor bárhogy töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő.

35. * Bizonyítsd be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!

36. * Bizonyítsd be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből valamelyik élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!

37. * Legyen $n \geq 3$ pozitív egész, és G egy n pontú egyszerű, összefüggő gráf. Bizonyítsd be, hogy ha G minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre!

38. Mutasd meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz, hogy **(a)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört; **(b)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.

39. Egy hotelba 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!

40. * Jellemezd véges halmazokon az ekvivalencia-relációk gráfjait.

41. * Bizonyítsd be, hogy bármely véges, hurokmentes gráf irányítható úgy, hogy a keletkező gráf nem tartalmaz irányított kört.

42. Melyik gráfot tudod lerajzolni úgy, hogy az élei ne messék egymást:

    (a) egy kocka éleinek hálózata; **(b)** teljes n-szög $n = 3, 4, 5, ..$; **(c)** „három-ház-három-kút": páros gráf 3-3 ponttal (házak, kutak), minden ház összekötve minden kúttal; **(d)** a Petersen-gráf.

43. Hány éle van egy n-pontú síkgráfnak, ha minden lapja (a végtelen lap is) háromszög?

44. Mutasd meg, hogy egy $n \geq 3$ pontú síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet!

45. Bizonyítsd be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor vagy G, vagy a komplementere nem síkbarajzolható!

46. Rajzolj egy olyan 8-pontú síkgráfot, aminek a komplementere is síkgráf!

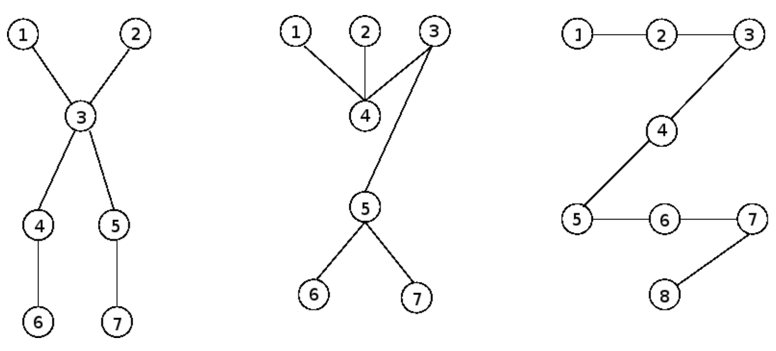
47. Mutasd meg, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

48. Legfeljebb hány éle lehet egy síkbarajzolható gráfnak, ha minden köre legalább k hosszú?

49. Egy nemzetközi konferencián öt különböző ország egy-egy résztvevője ül. Bizonyítsd be, hogy van közöttük legalább kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

50. * Mutasd meg, hogy egy síkbarajzolható gráf lapjai pontosan akkor színezhetőek két színnel úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek, ha a gráfnak van Euler-körsétája!

51. Mi az alábbi fák Prüfer kódja?



52. Egy 4 levelű teljes bináris fa csúcsait címkézzük a gyökértől kezdve szintenként lefelé növekvő sorrendben. Mi lesz ennek a fának a Prüfer kódja?

53. * Rajzolj olyan fát, melynek a Prüfer kódja: **(a)** 111...1; **(b)** 11342; **(c)** 12345; **(d)** 54321