Diszkrét matematika 2.C szakirány

10. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2016. tavasz

Lineáris kódok

Megjegyzés

Egy szó súlya megegyezik a 0-tól vett távolságával:
$w(u) = d(u, (0, 0, \dots, 0))$.

Állítás

Ha K lineáris kód, akkor $d(K) = w(K)$.

Bizonyítás

$d(u, v) = w(u - v)$, és mivel K linearitása miatt $u, v \in K$ esetén $u - v \in K$, ezért a minimumok is megegyeznek (Miért?).

Lineáris kódok

Lineáris kód esetén a kódolás elvégezhető mátrixszorzással.

Definíció

Legyen $G : \mathbb{F}_q^k \to \mathbb{F}_q^n$ egy teljes rangú lineáris leképzés, illetve $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_q^{n\times k}$ a hozzá tartozó mátrix. $K = \mathrm{Im}(G)$ esetén $\mathbf{G}$-t a K kód generátormátrixának nevezzük.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nk} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Lineáris kódok

Példa

1) A (*) kód egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) A háromszori ismétlés kódjának egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Példa folyt.

3) A paritásbites kód egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Definíció

Egy $[n, k, d]_q$ kódnak $\mathbf{H} \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times n}$ mátrix az ellenőrző mátrixa, ha $\mathbf{H}v = 0 \iff v$ kódszó.

Megjegyzés

A $\mathbf{G}$ mátrixhoz tartozó kódolásnak $\mathbf{H}$ pontosan akkor ellenőrző mátrixa, ha $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}) = \mathrm{Im}(\mathbf{G})$

Példa

1) A (*) kód egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Példa folyt.

2) A háromszori ismétlés kódjának egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) A paritásbites kód egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Definíció

Ha a kódszavak első k betűje megfelel az eredeti kódolandó szónak, akkor szisztematikus kódolásról beszélünk.
Ekkor az első k karakter az üzenetszegmens, az utolsó $n-k$ pedig a paritásszegmens.

Példa

1) A háromszori ismétlés kódja:

$$(\underbrace{a}_{\text{üz.sz.}}, \underbrace{a, a}_{\text{par.sz.}})$$

2) A paritásbites kód:

$$(\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}}_{\text{üz.sz.}}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} b_j}_{\text{par.sz.}})$$

Lineáris kódok

Megjegyzés

Szisztematikus kódolás esetén könnyen tudunk dekódolni: a paritásszegmens elhagyásával megkapjuk a kódolandó szót.

Megjegyzés

Egy szisztematikus kód generátormátrixa speciális alakú:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{I}_k \in \mathbb{F}_q^{k \times k}$ az egységmátrix, továbbá $\mathbf{P} \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times k}$.

Lineáris kódok

Állítás

Legyen $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_q^{n\times k}$ egy szisztematikus kód generátormátrixa:
$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$. Ekkor $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}$ ellenőrző mátrixa a kódnak.

Bizonyítás

$\mathbf{H} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = -\mathbf{P} + \mathbf{P} = \mathbf{0} \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times k}$

$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (-\mathbf{P})_{il} \cdot (\mathbf{I}_k)_{lj} + \sum_{l=1}^{n-k} (\mathbf{I}_{n-k})_{il} \cdot (\mathbf{P})_{lj} = -p_{ij} + p_{ij} = 0$.
Tehát bármely u kódolandó szóra $\mathbf{H}(\mathbf{G}u) = (\mathbf{HG})u = \mathbf{0}u = \underline{0}$,
vagyis $\mathrm{Im}(\mathbf{G}) \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{H})$, amiből $\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H}))$.
$\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) = k$ és $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H})) \leq k$ miatt viszont
$\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) \geq \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H}))$ is teljesül, így $\mathrm{Im}(\mathbf{G}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{H})$.

Példa

Ld. korábban.

Lineáris kódok

A kód távolsága leolvasható az ellenőrző mátrixból.

Állítás

Legyen $\mathbf{H}$ egy $[n, k]$ kód ellenőrző mátrixa. A $\mathbf{H}$-nak pontosan akkor van l darab lineárisan összefüggő oszlopa, ha van olyan kódszó, aminek a súlya legfeljebb l.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \underline{h_1} & \underline{h_2} & \cdots & \underline{h_n} \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow$

Ekkor $\sum_{j=1}^{l} u_j \cdot \underline{h_{l_j}} = \underline{0}$. Tekintsük azt a vektort, aminek az l_j-edik koordinátája u_j, a többi pedig 0. Ez egyrészt kódszó lesz (Miért?), másrészt a súlya legfeljebb l.

$\Longleftarrow$

Legyen $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ az a kódszó, aminek a súlya l. Ekkor $\mathbf{H}$-nak az $\underline{u}$ nem-nulla koordinátáinak megfelelő oszlopai lineárisan összefüggőek.

Lineáris kódok

Következmény

A kód távolsága a legkisebb pozitív egész l, amire létezik az ellenőrző mátrixnak l darab lineárisan összefüggő oszlopa.

Példa

A (*) kód esetén:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egyik oszlopvektor sem a nullvektor, így nincs 1 darab lineárisan összefüggő oszlop.
Egyik oszlopvektor sem többszöröse egy másiknak, így nincs 2 darab lineárisan összefüggő oszlop.
Az 1., 3. és 5. oszlopok lineárisan összefüggőek, így a kód távolsága 3.

Lineáris kódok

A $\mathbf{H}$ ellenőrző mátrix segítségével dekódolni is lehet.

Definíció

Adott $\underline{v} \in \mathbb{F}_q^n$ esetén az $\underline{s} = \mathbf{H}\underline{v} \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ vektort szindrómának nevezzük.

Megjegyzés

A $\underline{v}$ pontosan akkor kódszó, ha $\underline{s} = \underline{0}$.

Definíció

Legyen $\underline{c}$ a kódszó, $\underline{v}$ a vett szó. Az $\underline{e} = \underline{v} - \underline{c}$ a hibavektor.

Állítás

$\mathbf{H}\underline{v} = \mathbf{H}\underline{e}$.

Bizonyítás

$\mathbf{H}\underline{v} = \mathbf{H}(\underline{c} + \underline{e}) = \mathbf{H}\underline{c} + \mathbf{H}\underline{e} = \underline{0} + \mathbf{H}\underline{e} = \mathbf{H}\underline{e}$

Lineáris kódok

A dekódolás elve: $\underline{v}$-ből kiszámítjuk a $\mathbf{H}\underline{v}$ szindrómát, ami alapján megbecsüljük az $\underline{e}$ hibavektort, majd meghatározzuk $\underline{c}$-t a $\underline{c} = \underline{v} - \underline{e}$ képlet segítségével.

Definíció

Valamely $\underline{e}$ hibavektorhoz tartozó mellékosztály az $\{\underline{e} + \underline{c} : c \text{ kódszó}\}$ halmaz.

Megjegyzés

Az $\underline{e} = \underline{0}$-hoz tartozó mellékosztály a kód.

Állítás

Az azonos mellékosztályban lévő szavak szindrómája megegyezik.

Lineáris kódok

Definíció

Minden $\underline{s}$ szindróma esetén legyen $\underline{e_s}$ az a minimális súlyú szó, melynek $\underline{s}$ a szindrómája. Ez az $\underline{s}$ szindrómához tartozó mellékosztály-vezető, a mellékosztály elemei $\underline{e_s} + \underline{c}$ alakúak, ahol $\underline{c} \in K$ kódszó.

Szindrómadekódolás

Adott $\underline{v}$ esetén tekintsük az $\underline{s} = \mathbf{H}\underline{v}$ szindrómát, és az $\underline{e_s}$ mellékosztály-vezetőt. Dekódoljuk $\underline{v}$-t $\underline{c} = \underline{v} - \underline{e_s}$-nek.

Állítás

Legyen $\underline{c}$ a kódszó, $\underline{v} = \underline{c} + \underline{e}$ a vett szó, ahol $\underline{e}$ a hiba, és $w(\underline{e}) < d/2$, ahol d a kód távolsága. Ekkor a szindrómadekódolás a minimális távolságú dekódolásnak felel meg.

Lineáris kódok

Bizonyítás

Egyrészt a korábbi állítás alapján $\underline{s} = \mathbf{H}\underline{v} = \mathbf{H}\underline{e}$, másrészt $\underline{e_s}$ definíciója miatt $\underline{s} = \mathbf{H}\underline{e_s}$. Ezért $\underline{e}$ és $\underline{e_s}$ ugyanabban a mellékosztályban van, továbbá $w(\underline{e_s}) \leq w(\underline{e})$.

$w(\underline{e} - \underline{e_s}) = d(\underline{e}, \underline{e_s}) \leq d(\underline{e}, \underline{0}) + d(\underline{0}, \underline{e_s}) = w(\underline{e}) + w(\underline{e_s}) < d$.

De $\mathbf{H}(\underline{e} - \underline{e_s}) = \underline{0}$ miatt $\underline{e} - \underline{e_s}$ kódszó (Miért?), így $\underline{e} = \underline{e_s}$.

Példa

Tekintsük a $(*)$ kódot.

$\underline{v} = (1, 1, 0, 1, 1)^T$ esetén $\mathbf{H}\underline{v} = \underline{0}$, így $\underline{v}$ kódszó.

$\underline{v} = (1, 1, 0, 0, 1)^T$ esetén $\mathbf{H}\underline{v} = (0, 1, 0)^T = \underline{s}$.

Mi az $\underline{s}$-hez tartozó mellékosztály-vezető?

A $(0, 0, 0, 1, 0)^T$ súlya 1, és a szindrómája a keresett $(0, 1, 0)^T$, így ez lesz a mellékosztály-vezető.

$\underline{c} = \underline{v} - \underline{e_s} = (1, 1, 0, 0, 1)^T - (0, 0, 0, 1, 0)^T = (1, 1, 0, 1, 1)^T$