Diszkrét matematika II. feladatok

1. Csoportelmélet

1. Melyik csoport az alábbiak közül, és ha nem, milyen feltételek teljesülnek:
a) a természetes számok az összeadással; **b)** a páros számok az összeadással; **c)** a páratlan számok a szorzással; **d)** egészek a kivonással; **e)** páros számok a szorzással; **f)** 7 többszörösei az összeadással; **g)** racionális számok az összeadással; **h)** racionális számok a szorzással; **i)** nem nulla racionális számok a szorzással; **j)** $\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \{1,2\}\}$ az összeadással.

2. Melyik félcsoport, illetve csoport az alábbiak közül:
a) $(\mathbb{Z}, \circ)$, ha $a \circ b = (a+b)/2, (a, b \in \mathbb{Z})$; **b)** $(\mathbb{Q}, \circ)$, ha $a \circ b = (a+b)/2, (a, b \in \mathbb{Q})$; **c)** $(\mathbb{R}$, osztás); **d)** $(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, osztás); **e)** a 8-adik komplex egységgyökök a szorzással; **f)** az n-edik egységgyökök halmaza a szorzással, ahol n rögzített pozitív egész; **g)** az n-edik egységgyökök halmaza a szorzással, ahol n befutja a pozitív egész számokat; **h)** $(\mathbb{R}, \circ)$, ha $x \circ y = ax + by, (a, b, x, y \in \mathbb{Q})$ és a, b rögzítettek.

3. Legyen $(G, \cdot)$ csoport, $u \in G$ rögzített elem. Definiáljunk G-n egy új $\circ$ műveletet $a \circ b := a \cdot u \cdot b$ segítségével. Csoport lesz-e $(G, \circ)$?

4. Egész számok körében definiáljuk az $m \star n = m + n - mn$ műveletet. Mutassuk meg, hogy egységelemes félcsoportot kapunk! Mely elemeknek van inverze?

5. Melyik igaz? **(a)** ha egy csoport rendje véges, akkor minden eleme véges rendű; **(b)** ha egy csoport minden eleme véges rendű, akkor a csoport rendje is véges.

6. Lássuk be, hogy ha egy csoport minden elemének inverze önmaga, akkor a csoport kommutatív.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $(G, \cdot)$ csoport minden a, b elempárjára $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, akkor a csoport kommutatív.

8. Írjuk fel a modulo 7 összeadás és szorzás műveleti tábláját. Mennyi a 3 rendje a két struktúrában?

9. **a)** A 8-adik komplex egységgyökök szorzással alkotott csoportjában határozzuk meg a csoport rendjét és az egyes elemek rendjét; **b)** Ciklikus-e ez a csoport?

10. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban a és a^{-1} rendje egyenlő!

11. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban a és $b^{-1} \cdot a \cdot b$ rendje egyenlő!

12. Legyen $(G, \cdot)$ véges, páros rendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan az egységelemtől különböző eleme, amelynek az inverze önmaga.

13. Egy multiplikatív csoport c elemére $c^{100} = e$ és $c^{1999} = e$. Határozzuk meg c-t.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $(G, \cdot)$ csoportnak van az egységelemtől különböző véges rendű eleme, akkor van prímrendű eleme is.

    A D_n diédercsoport a síknak egy szabályos n oldalú sokszögét önmagába vivő egybevágósági transzformációkból áll, művelet a transzformációk egymás utáni végrehajtása. Ha φ a $2\pi/n$-nel való forgatást, τ pedig egy szimmetriatengelyre való tükrözést jelöl, akkor D_n elemei

$$\{e, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \tau, \tau\varphi, \tau\varphi^2, \ldots, \tau\varphi^{n-1}\}.$$

    A számolás szabályai:

$$\varphi^n = \tau^2 = e, \quad \varphi^k \tau = \tau \varphi^{n-k}.$$

    Belátható, hogy D_n a fenti művelettel csoportot alkot.

15. Írjuk fel D_2 és D_3 műveleti tábláját. Határozzuk meg a két csoport részcsoportjait és a részcsoportok rendjét.

16. A D_5 diédercsoport minden részhalmazára határozd meg az általa generált részcsoportot.

17. Bizonyítsd be, hogy az m-edik egységgyökök multiplikatív csoportja izomorf $\mathbb{Z}_m$ additív csoportjával.

18. Legyen $(G, \cdot)$ csoport és $H \leq G$. Mutasd meg, hogy rögzített $g \in G$ esetén $g^{-1}Hg \leq G$

19. Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport és $H = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$ azoknak a G-beli elemeknek a halmaza, amelyek minden más elemmel felcserélhetők. Mutasd meg, hogy $H \leq G$. (Ezt nevezik a csoport centrumának.)

20. Mutasd meg, hogy $\mathbb{Q}^+$ a szorzással a $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$, illetve $\mathbb{C}^*$ részcsoportja. Mennyi lesz a részcsoport indexe az egyes esetekben?

21. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}_5$ nemnulla elemei a szorzásra negyedrendű ciklikus csoportot alkotnak.

22. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}_9$ szorzásra invertálható elemei a szorzással hatodrendű ciklikus csoportot alkotnak.

23. Normálosztó-e **a)** $\mathbb{Z}$-ben $3\mathbb{Z}$; **b)** D_6-ban a 120°-os forgatás által generált részcsoport; **c)** D_6-ban a 180°-os forgatás és egy tükrözés által generált részcsoport.

24. Mutasd meg, hogy izomorfak a következők:
a) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ és $(\mathbb{Z}_n, +)$; **b)** $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{R}, +)$; **c)** $(\mathbb{C}^*/\mathbb{T}, \cdot)$ és $(\mathbb{R}^+, \cdot)$;
d) $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+, \cdot)$ és $(\mathbb{T}, \cdot)$; **e)** $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \cdot)$ és $(\mathbb{T}, \cdot)$; **f)** $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

25. Keresd meg, hogy az alábbi csoportok közül melyek izomorfak: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_3^*, \mathbb{Z}_5^*, \mathbb{Z}_8^*, \mathbb{Z}_{12}^*, S_2, A_3, D_3, D_4, Q$?

2. Gyűrűk, testek

1. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:
a) egész számok az összeadásra és szorzásra nézve; **b)** a páros számok az összeadásra és szorzásra nézve;
c) adott n egész szám többszörösei az összeadásra és szorzásra nézve (az $n = 0$ esetet külön nézzük meg);
d) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve; **e)** $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve;
f) $n \times n$-es egész elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve;
g) $n \times n$-es valós elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve;
h) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ a modulo m tekintett maradékosztályok a maradékosztály összeadásra és szorzásra.

2. Jelöljön $(S, +)$ egy Abel-csoportot. Definiáljuk a $\circ$ műveletet a következő módon: $a \circ b = 0$, ahol 0 az $(S, +)$ egységeleme. Bizonyítsuk be, hogy az $(S, +, \circ)$ struktúra gyűrű! (Ezt nevezzük zérógyűrűnek.)

3. Testet alkotnak-e a modulo $2m$ maradékosztályok közül a párosak (tehát ez: $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \ldots, \overline{2m-2}\}$) a maradékosztályok közötti összeadásra és szorzásra, ha **a)** 2m = 10; **b)** 2m = 20?

4. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:
a) $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve;
b) A $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett valós függvények a függvények pontotnkénti összeadására és szorzására nézve;
c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra.

5. Bizonyítsd be, hogy $2\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$-nek részgyűrűje! Ideál-e?

6. Melyek $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ részgyűrűi? Van-e köztük ideál?

7. Tekintsük a racionális számok $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gyűrűjét. Bizonyítsuk be, hogy a páros egészek a racionális számok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják, de nem ideálját!

8. Lássuk be, hogy a páros számok $(2\mathbb{Z})$ az egészek részgyűrűjét, sőt ideálját alkotják! Határozzuk meg a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ maradékosztály gyűrűt!

9. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}_{12}$-nek a 0,3,6,9 osztályai egy részgyűrűt alkotnak. Ideál, illetve főideál-e? Ha ideál, akkor a faktrogyűrű test-e?

10. Döntsd el, hogy a Gauss-egészek gyűrűjében az alábbi halmazok ideált alkotnak-e, és ha igen, határozd meg a faktorgyűrűt: **a)** $\mathbb{Z}$; **b)** $2\mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z}$; **c)** $4\mathbb{Z} + 6i\mathbb{Z}$.

11. Legyen $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ és $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$. Mutasd meg, hogy I ideál R-ben! Hány elemű az R/I faktorgyűrű?

12. Az következő faktorgyűrűk közül melyek izomorfak: $\mathbb{Z}_4/(\tilde{0}), \mathbb{Z}_8/(\tilde{4}), \mathbb{Z}_{16}/(\tilde{4}), 2\mathbb{Z}_{16}/(\tilde{8}), \mathbb{Z}/(4), 4\mathbb{Z}/(16)$?