Mintateszt

A válaszok között mindig pontosan egy helyes van. Karikázza be a helyes válasz betűjelét! (i) - igaz állítás, (h) - hamis állítás

1. Legyen V tetszőleges ábécé és legyen $L \subseteq V^*$.

(i) (h) Minden $u \in V^*$ szónak van valódi részszava.

(i) (h) $L^4 = \{uuuu \mid u \in L\}$.

(i) (h) $L^0 = \{\varepsilon\}$ akkor és csak akkor, ha $L = \{\varepsilon\}$.

2. Legyen V tetszőleges ábécé és legyenek $L, L_1, L_2, L_3 \subseteq V^*$ tetszőleges nyelvek.

(i) (h) $(L_1 \cup L_2)L_3 = L_1L_3 \cup L_2L_3$.

(i) (h) $L_1^* \subseteq L_1^*L_2^*$.

(i) (h) $L^* \cap (\bar{L})^* = \emptyset$.

3. Tekintsük az $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1$ nyelvosztályokat (a Chomsky–féle osztályozás szerint).

(i) (h) Ha $L \in \mathcal{L}_2$, akkor $L^* \in \mathcal{L}_2$

(i) (h) $\mathcal{L}_2$ zárt a metszet műveletére nézve.

(i) (h) $\mathcal{L}_1$ nem minden reguláris műveletre nézve zárt.

4. Legyenek R és Q tetszőleges reguláris kifejezések a V ábécé felett.

(i) (h) Ekkor $Q + R^* \cdot Q$ ugyanazt a nyelvet jelöli, mint $((Q) + (R))^* \cdot (Q)$.

(i) (h) Van olyan végtelen nyelv, amely nem adható meg reguláris kifejezéssel.

(i) (h) Minden véges nyelv megadható reguláris kifejezéssel.

5. Legyen $G = (N, T, P, S)$ tetszőleges 3–típusú grammatika.

(i) (h) Ekkor G minden szabálya vagy $A \to uB$ vagy $A \to u$ alakú ahol $A, B \in N$ és $u \in T^+$.

(i) (h) Ekkor G 1–típusú grammatika is.

(i) (h) Ekkor, ha G 3–as normálformában adott, akkor egyben Chomsky normálformájú környezetfüggetlen grammatika is.

6. Legyen $G = (N, T, P, S)$ tetszőleges környezetfüggetlen grammatika.

(i) (h) Ekkor G–nek van legalább egy hasznos nemterminálisa.

(i) (h) Ekkor minden $A \in N$ nemterminálisra teljesül, hogy G–ben létezik legalább egy $A \Longrightarrow_G^* u$ levezetés, ahol $u \in T^*$.

(i) (h) Ekkor G–nek minden nemterminálisa vagy aktív, vagy elérhető.

7. Döntse el az alábbi állítás igaz vagy hamis voltát!

(i) (h) Minden Kuroda normálformájú grammatika hossz–nemcsökkentő.

(i) (h) Legyen $G = (N, T, P, S)$ tetszőleges hossz–nemcsökkentő grammatika. Ekkor az általa generált nyelv környezetfüggő.

(i) (h) Minden környezetfüggetlen nyelv egyben környezetfüggő nyelv is.

8. Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ tetszőleges determinisztikus véges automata.

(i) (h) Ekkor Q minden eleme elérhető a q_0 állapotból.

(i) (h) Ekkor $\delta : Q \times T \to Q$.

(i) (h) Ekkor A–hoz megadható olyan A' determinisztikus véges automata, amelyre $L(A) = L(A')$ és A' állapotszáma minimáis.

9. Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ tetszőleges nemdeterminisztikus véges automata.

(i) (h) Ekkor Q_0 legalább kételemű halmaz.

(i) (h) Ekkor A–hoz megadható olyan A' determinisztikus véges automata, amelyre $L(A) = L(A')$ teljesül.

(i) (h) $L(A)$ reguláris nyelv.

10. Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ tetszőleges veremautomata.

(i) (h) Ekkor az A által elfogadott nyelv 2–típusú.

(i) (h) Ekkor $\delta : (Z \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times T \to 2^{Z^* \times Q}$.

(i) (h) Ekkor $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to 2^{Z^* \times Q}$ és $\delta(z, q, x)$ véges halmaz, ahol $z \in Z$, $q \in Q$, $x \in (T \cup \{\varepsilon\})$.

Megoldás:

1. (h) (h) (h)	**6.** (h) (h) (h)
2. (i) (i) (h)	**7.** (i) (i) (i)
3. (i) (h) (h)	**8.** (h) (i) (i)
4. (h) (i) (i)	**9.** (h) (i) (i)
5. (h) (h) (h)	**10.** (i) (h) (i)

Minta feladatsor

1. feladat

(a) Milyen alakúak egy Kuroda normálformájú hossz–nemcsökkentő grammatika szabályai?

Egy hossz–nemcsökkentő $G = (N, T, P, S)$ grammatikát Kuroda normálformájúnak mondunk, ha minden egyes szabálya

(a) vagy $A \to a$,

(b) vagy $A \to B$,

(c) vagy $A \to BC$

(d) vagy $AB \to CD$

alakú, ahol $a \in T$ és $A, B, C, D \in N$.

(b) Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy tetszőleges környezetfüggetlen grammatika. Ismertesse, hogyan határozza meg G azon nemterminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat: $U_1 = \{X \mid X \to \varepsilon \in P\}$, $U_{i+1} = U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}, i \geq 1$. Az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots,$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_k = U_j$ minden $j \geq k$-ra. Legyen $U = U_k$. Ekkor azonnal látható, hogy $X \Longrightarrow_G^* \varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $X \in U$.

(c) Legyen $G = (N,\ T,\ P,\ S)$, ahol $N = \{S,\ X,\ Y,\ Z\}$, $T = \{a,\ b, c\}$ és $P = \{S \to XYZ, S \to ZX, X \to ZYZ, X \to \varepsilon, X \to bZ, X \to a, Y \to b, Z \to c, Z \to \varepsilon\}$. Az előbbiek alapján határozza meg G azon nemterminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!

Az előbbiek alapján: $U_1 = \{X, Z\}$, $U_2 = \{X, Z\} \cup \{S\} = U$.

2. feladat

(a) Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ determinisztikus véges automata és legyen $p, r \in Q$. Mikor mondjuk, hogy p és r **nem** megkülönböztethető állapotok?

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ determinisztikus véges automata. Definiáljunk egy R relációt a Q állapothalmazon úgy, hogy pRq, ha minden egyes $x \in T^*$ input szóra fennáll, hogy $px \Longrightarrow_A^* r$ akkor és csak akkor, ha $qx \Longrightarrow_A^* r'$ valamely $r, r' \in F$ állapotokra. ($r = r'$ lehetséges).

Azt mondjuk, hogy p és q megkülönböztethetők, ha van olyan $x \in T^*$, amelyre vagy $px \Longrightarrow_A^* r, r \in F$, vagy $qx \Longrightarrow_A^* r', r' \in F$, de mindkét redukció egyszerre nem áll fenn. Egyébként p és q nem megkülönböztethetők.

Ha p és q nem megkülönböztethetők, akkor $\delta(p,a) = s$ és $\delta(q,a) = t$ sem megkülönböztethetők egyetlen $a \in T$-re sem.

(Ha $\delta(p,a) = s$ és $\delta(q,a) = t$ megkülönböztethetők $x \in T^*$–re, akkor megkülönböztethetők ax-re is.)

(b) Legyen $A = (Q, T, \delta, \{q_0\}, F)$ nemdeterminisztikus véges automata. Ismertesse, hogyan konstruálna meg egy G reguláris grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$! (Adja meg az N és P halmazokat!)

Definiáljuk a $G = (N, T, P, S)$ grammatikát úgy, hogy $N = Q \cup \{S\}$ és legyen

(a) $p \to a \in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \to p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra,

(b) $p \to qa \in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \to p \in M_\delta$,

(c) $S \to p \in P$ akkor és csak akkor, ha $p \in F$,

(d) $S \to \varepsilon \in P$ akkor és csak akkor, ha $Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

(c) Legyen $A = (Q, T, \delta, \{q_0\}, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_0, q_2\}$, valamint

$$\delta(q_0, a) = \{q_0\}, \quad \delta(q_0, b) = \{q_1\}, \quad \delta(q_0, c) = \{q_1\},$$
$$\delta(q_1, a) = \{q_1\}, \quad \delta(q_1, b) = \{q_0\}, \quad \delta(q_1, c) = \{q_2\}.$$

Az előbbiek alapján adjon meg egy G reguláris grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$!

A $G = (N, T, P, S)$ grammatika az előbbiek alapján a következő: $N = Q \cup \{S\}$, $S \notin Q$, $P = \{q_0 \to q_0 a, q_1 \to q_0 b, q_1 \to q_0 c, q_1 \to q_1 a, q_0 \to q_1 b, q_2 \to q_1 c, q_0 \to a, q_1 \to b, q_1 \to c, S \to q_0, S \to q_2, S \to \varepsilon\}$.

3. feladat

(a) Adja meg a veremautomata által elfogadó állapottal elfogadott nyelv fogalmát!

Az $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, veremautomata által (elfogadó állapottal) elfogadott nyelv

$$L(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* up, \text{ ahol } u \in Z^*, p \in F\}.$$

(b) Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$.

Konstruáljon egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet és ismertesse ezen veremautomata működését!

Legyen $A = (\{z_0, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, z_0, q_0, \emptyset)$ ahol

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(z_0, q_0, a) = (z_0, q_0), \\
(2) & \delta(z_0, q_0, b) = (bz_0, q_1), \\
(3) & \delta(b, q_1, b) = (bb, q_1), \\
(4) & \delta(b, q_1, c) = (\varepsilon, q_2), \\
(5) & \delta(b, q_2, c) = (\varepsilon, q_2), \\
(6) & \delta(z_0, q_2, \varepsilon) = (\varepsilon, q_2).
\end{array}
$$

A veremautomata az (1) átmenet használatával $m \geq 1$ számú a betűt olvas el egymás után. Az első b betű elolvasása után állapotát q_1-re cseréli és egy b betűt helyez el a veremben a verem tetejére írva (2). Ezután vagy további b betűket olvas el, marad a q_1 állapotban és minden egyes b betű elolvasása után egy b betűt ír a verembe (3), vagy egy c betűt olvas el, állapotát a q_2 állapotra cseréli, és törli a verem tetején levő c betűt (4). Munkáját akkor tudja befejezni, ha a veremből minden c betűt törölt és a verem tetején levő szimbólum z_0 (6), de ez csak akkor lehetséges, ha pontosan annyi c betűt olvas el a q_2 állapotban, mint ahány b betű van a veremben (4),(5). Tehát A az L nyelv minden szavát és csak azokat ismeri fel.

4. feladat

Bizonyítsa be, hogy bármely környezetfüggetlen grammatikáról eldönthető, hogy az általa generált nyelv üres–e vagy sem!

Legyen $G = (N, T, P, S)$ könyezetfüggetlen grammatika. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G ε–mentes. Legyen n a G nemterminális szimbólumainak száma. Tegyük fel, hogy létezik egy $S \Longrightarrow_G^* u$ levezetés G–ben, ahol $u \in T^*$. Tekintsük az ezen levezetéshez tartozó levezetési fát. Ha a leghosszabb út hossza ebben a levezetési fában nagyobb, mint n, akkor van olyan v szó $L(G)$–ben, amelynek a levezetési fájában a leghosszabb út hossza nem nagyobb, mint n. Ez nyilvánvaló, hiszen ha az út hossza nagyobb, mint n, akkor legalább egy nemterminális szimbólum legalább kétszer fordul elő ezen az úton.

Tekintsünk két azonos címkéjű csúcsot az úton és helyettesítsük a fa gyökeréhez közelebb eső csúcshoz tartozó részfát a másik csúcshoz tartozó részfával. Akkor továbbra is terminális szót kapunk. Megismételve ezt az eljárást annyiszor, ahányszor szükséges, addig csökkenthetjük az út hosszát, amíg legfeljebb n hosszúságú utat kapunk.

Ebből következően, ha $L(G)$ nem üres, akkor léteznie kell egy szónak a nyelvben, amelyhez tartozó levezetési fában a leghosszabb út nem hosszabb, mint n.

Minthogy azokat a levezetési fákat, amelyekre az igaz, meg tudjuk határozni, a kérdést el tudjuk dönteni.