Megoldások (A csoport)

2011/12/2 Formális nyelvek és automaták évfolyamzárthelyi

1. feladat: Építsen az $m = xyxxyx$ mintához *KMP automatát*, majd döntse el, hogy az $u = xyxyxxxyxyxxyxx$ szóban megtalálható-e a minta az automata működésének az u bemeneten történő bemutatásával (azaz töltse ki az alábbi táblázatot, az első cellába az automata kezdőállapota kerüljön)!

Megoldás:

		x	y
$\rightarrow$	0	1	0
	1	1	2
	2	3	0
	3	4	2
	4	1	5
	5	6	0
$\leftarrow$	6	6	6

	x	y	x	y	x	x	x	y	x	y	x	x	y	x	x
0	1	2	3	2	3	4	1	2	3	2	3	4	5	6	6

2. feladat: Hozza 3-as normálformára az alábbi G nyelvtant (grammatikát), majd készítsen a tanult algoritmussal olyan *véges determinisztikus automatát* a nyelvtanhoz, mely a G által generált nyelvet ismeri fel! $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B\}, \mathcal{P}, S \rangle$, ahol a $\mathcal{P}$ szabályrendszer a következő:

$$S \rightarrow abS \mid aA$$
$$A \rightarrow cS \mid a \mid B$$
$$B \rightarrow bB \mid cc \mid \varepsilon$$

Megoldás:

Láncmentesítés:

$$S \rightarrow abS \mid aA$$
$$A \rightarrow cS \mid a \mid bB \mid cc \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow bB \mid cc \mid \varepsilon$$

Hosszredukció (+ univerzális ε szabály):

$$S \rightarrow aZ \mid aA \qquad Z \rightarrow bS$$
$$A \rightarrow cS \mid aF \mid bB \mid cY \mid \varepsilon \qquad Y \rightarrow cF$$
$$B \rightarrow bB \mid cY \mid \varepsilon \qquad F \rightarrow \varepsilon$$

NDA:

		a	b	c
$\rightarrow$	S	$\{A, Z\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	A	$\{F\}$	$\{B\}$	$\{S, Y\}$
$\leftarrow$	B	$\{\}$	$\{B\}$	$\{Y\}$
	Z	$\{\}$	$\{S\}$	$\{\}$
	Y	$\{\}$	$\{\}$	$\{F\}$
$\leftarrow$	F	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

VDA:

		a	b	c
$\rightarrow$	$\{S\}$	$\{A, Z\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A, Z\}$	$\{F\}$	$\{B, S\}$	$\{S, Y\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{F\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{B, S\}$	$\{A, Z\}$	$\{B\}$	$\{Y\}$
	$\{S, Y\}$	$\{A, Z\}$	$\{\}$	$\{F\}$
$\leftarrow$	$\{B\}$	$\{\}$	$\{B\}$	$\{Y\}$
	$\{Y\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{F\}$

3. feladat: Készítse el az alábbi $\mathcal{A}$ véges determinisztikus automata *minimális automatáját* a tanult algoritmus alapján (összefüggővé alakítás, redukció)!
$\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2, q_6, q_7\} \rangle$, a δ állapotátmenet függvény táblázattal:

		a	b
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_2
$\leftarrow$	q_1	q_2	q_4
$\leftarrow$	q_2	q_4	q_1
	q_3	q_4	q_9
	q_4	q_5	q_5
	q_5	q_6	q_7
$\leftarrow$	q_6	q_7	q_8
$\leftarrow$	q_7	q_8	q_6
	q_8	q_0	q_0
	q_9	q_3	q_0

Megoldás: $H_0 = \{q_0\}$, $H_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$, $H_2 = \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$, $H_3 = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_5\}$, $H_4 = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7\}$, $H_5 = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$, $H_6 = H_5$. Elhagyható q_3, q_9.

$\overset{0}{\sim}$: $\{q_1, q_2, q_6, q_7\}(=: F), \{q_0, q_4, q_5, q_8\}(=: N)$;

	a	b
q_1	F	N
q_2	N	F
q_6	F	N
q_7	N	F

	a	b
q_0	F	F
q_4	N	N
q_5	F	F
q_8	N	N

$\overset{1}{\sim}$: $\{q_1, q_6\}(=: A), \{q_2, q_7\}(=: B), \{q_0, q_5\}(=: C), \{q_4, q_8\}(=: D)$;

	a	b
q_1	B	D
q_6	B	D

	a	b
q_2	D	A
q_7	D	A

	a	b
q_0	A	B
q_5	A	B

	0	1
q_4	C	C
q_8	C	C

$\overset{2}{\sim} = \overset{1}{\sim} = \sim$, tehát a minimális automata:

		a	b
$\rightarrow$	C	A	B
	D	C	C
$\leftarrow$	A	B	D
$\leftarrow$	B	D	A

4. feladat: A *CYK–algoritmus* segítségével döntse el, hogy az *ababab* szó levezethető-e a $G = \langle\{a, b\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S\rangle$ nyelvtanban, ahol a $\mathcal{P}$ szabályrendszer a következő:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow AA \,|\, BB \,|\, b \\
&A \rightarrow SC \,|\, CC \,|\, b \\
&B \rightarrow SB \,|\, a \\
&C \rightarrow AA \,|\, AB
\end{aligned}
$$

Megoldás:

$\{S, C\}$					
$\{A, B\}$	$\{S, C\}$				
$\{\}$	$\{S, A\}$	$\{\}$			
$\{S\}$	$\{\}$	$\{S\}$	$\{\}$		
$\{\}$	$\{B, C\}$	$\{\}$	$\{B, C\}$	$\{\}$	
$\{B\}$	$\{S, A\}$	$\{B\}$	$\{S, A\}$	$\{B\}$	$\{S, A\}$
a	b	a	b	a	b

Mivel $S \in H_{1,6}$, ezért $ababab \in L(G)$.

5. feladat: Legyen $L = \{a^i b^j \,|\, i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \leq j + 1\}$. Bizonyítsuk be, hogy $L \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$!

Megoldások:

$L \in \mathcal{L}_2$ bizonyításához megadjuk a nyelvet kettes típusú nyelvleíró eszközzel, pl (vagylagosan)

– környezetfüggetlen nyelvtannal: $S \rightarrow ASb \,|\, A$, $A \rightarrow a \,|\, \varepsilon$,

– EBNF-fel: $<L> ::= \{a\}_0^1 <L> b \,|\, \{a\}_0^1$ (Más jelöléssel: $\langle L\rangle ::= a_0^1 \langle L\rangle b \,|\, a_0^1$)

– egy vermes, üres veremmel elfogadó automatával:

$(S, a, \#) \rightarrow (S, a\#)$, $(S, a, a) \rightarrow (S, aa)$, $(S, \varepsilon, a) \rightarrow (V, \varepsilon)$,
$(V, b, a) \rightarrow (V, \varepsilon)$, $(V, b, \#) \rightarrow (V, \#)$, $(V, \varepsilon, \#) \rightarrow (V, \varepsilon)$

$L \notin \mathcal{L}_3$ bizonyításához a Myhill-Nerode tétel szerint elég belátni, hogy végtelen sok maradéknyelve van. Ez utóbbi állítás pedig következik abból, hogy az $\{L_{a^i} \,|\, i \in \mathbb{N}_+\}$ maradéknyelv halmaz végtelen, aminek elégséges feltétele, hogy $i < k$ esetén $L_{a^i} \neq L_{a^k}$. Ez viszont közvetlenül adódik abból, hogy $i < k$ esetén $b^{i-1} \in L_{a^i}$, de $b^{i-1} \notin L_{a^k}$. A $b^{i-1} \in L_{a^i}$ pedig a maradéknyelv fogalma alapján következik az $a^i b^{i-1} \in L$ állításból, ami nyilvánvaló $i \leq (i-1) + 1$ alapján. Hasonlóan, $b^{i-1} \notin L_{a^k}$ a maradéknyelv fogalma alapján következik az $a^k b^{i-1} \notin L$ állításból, ami nyilvánvaló $k > (i-1) + 1$, azaz $k > i$ alapján.

$L \notin \mathcal{L}_3$ a "Kis" Bar-Hillel lemmából is következik. Tegyük fel ugyanis, hogy $L \in \mathcal{L}_3$ és tekintsük az $a^i b^{i-1} \in L$ szót! Ha i elég nagy, akkor a lemma szerint az a^i prefixben van nemüres, beiterálható részszó. Ez a^k alakú, ahol $k > 0$. A második iteráltat tekintve $a^{i+k} b^{i-1} \in L$, ahonnét L definíciója szerint $i + k \leq (i-1) + 1$. Innét az egyenlőtlenség mindkét oldalából i-t kivonva $k \leq 0$ adódik, ami ellentmond a $k > 0$ állításnak.