# Formális nyelvek - 10.

**Csuhaj Varjú Erzsébet**

Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék
Informatikai Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem
H-1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c

E-mail: csuhaj@inf.elte.hu

## Veremautomata

A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.

A verem esetében az új adat mindig a már meglevő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.

A verem kezelési technikája ún. FILO (first-in-last-out).

# Definíció

A veremautomata egy rendezett hetes

$$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F),$$

ahol

- $Z$ a veremszimbólumok véges halmaza,
- $Q$ az állapotok véges halmaza,
- $T$ az inputszimbólumok véges halmaza,
- $\delta$ leképezése a $Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\})$ halmaznak $Z^* \times Q$ véges részhalmazaiba, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti (kezdő) állapot,
- $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok halmaza.

## Definíció

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ veremautomata.

A veremautomata konfigurációja alatt egy $uq$ alakú szót értünk, ahol $u \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot.

A kezdeti konfiguráció $z_0 q_0$.

**Megjegyzés:** Ha $u = x_1 \ldots x_n$, ahol $x_i \in Z$, $1 \le i \le n$, akkor a verem tetején levő szimbólum $x_n$.

## Közvetlen lépés a veremautomatában

Tegyük fel, hogy az $A$ veremautomata olvasófeje az $a$ inputszimbólumon áll, a veremautomata (a véges kontroll) $q$ állapotban van, valamint a verem tetején levő szimbólum $z$.

Legyen $\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \ldots, (u_n, r_n)\}$, ahol $u_i \in Z^*$ és $r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Akkor $A$ következő állapota valamely $r_i$ lesz és egyidejűleg $z$-t helyettesíti az $u_i$ szóval, továbbá az olvasófej egy cellával jobbra lép az input szalagon.

Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. $\varepsilon$-átmenet ($\varepsilon$-lépés) hajtható végre.

## Szó elfogadása a veremautomatában

Ha az input szalag a $w \in T^*$ szót tartalmazza és a $z_0 q_0$ kezdeti konfigurációból kiindulva és lépések sorozatát végrehajtva az $A$ veremautomata egy $up$ konfigurációba ér, ahol $p$ elfogadó állapot, akkor azt mondjuk, hogy $A$ elfogadta a $w$ szót.

## Definíció

Az $A$ veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ szót a $\beta \in Z^*QT^*$ szóra redukálja egy lépésben, amelyet $\alpha \Longrightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z$,$q, p \in Q$, $a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Az $A$ veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ szót a $\beta \in Z^*QT^*$ szóra redukálja, amelyet $\alpha \Longrightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Z^*QT^*$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_n$, és $\alpha_i \Longrightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$.

## Definíció

Az $A$ veremautomata által (elfogadó állapottal) elfogadott nyelv

$$L(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* up, \text{ ahol } u \in Z^*, p \in F\}.$$

## Megjegyzés

A $\delta$ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt $M_\delta$-val jelöljük. Tehát

1. $zqa \to up \in M_\delta$ hacsak $(u,p) \in \delta(z,q,a)$,

2. $zq \to up \in M_\delta$ hacsak $(u,p) \in \delta(z,q,\varepsilon)$

## Példa

Legyen $L = \{a^n b^n \mid n \geq 2\}$. Az $L$ nyelvet elfogadó veremautomata átmenetei a következők (csak azokat az átmeneteket tüntetjük fel, amelyek nemüresek):

$$
\begin{aligned}
(z_0 a, q_0,) &\in \delta(z_0, q_0, a), \\
(aa, q_0) &\in \delta(a, q_0, a), \\
(\varepsilon, q_1) &\in \delta(a, q_0, b), \\
(\varepsilon, q_1) &\in \delta(a, q_1, b), \\
(\varepsilon, q_2) &\in \delta(a, q_1, b), \\
(\varepsilon, q_2) &\in \delta(z_0, q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

## Definíció

Az $A = (Z, Q, T, M, z_0, q_0, F)$ veremautomatát determinisztikusnak mondjuk, ha minden $(z, q) \in Z \times Q$ pár esetén

1. vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $M(z, q, \varepsilon) = \emptyset$, vagy

2. $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

## Megjegyzés

A determinisztikus veremautomata elfogadó (felismerő) ereje kisebb, mint a (nemdeterminisztikus) veremautomatáé.

**Példanyelvek:**

$$L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Míg az $L_1$ nyelvet el lehet fogadni determinisztikus veremautomatával, addig a másodikat nem, $L_2$-t csak nemdeterminisztikus veremautomatával lehet elfogadni.

**Definíció**

Az $N(A)$ nyelvet az $A$ veremautomata üres veremmel fogadja el, ha

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Vegyük észre, hogyha a verem üres, az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (Ezért van szükségünk a $z_0$ kezdeti veremszimbólumra.)

## Lemma

Bármely $A$ veremautomatához meg tudunk adni egy $A'$ veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

# Bizonyításvázlat

Legyen

$$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$$

veremautomata. Az

$$A' = (Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_h\}, \delta', z'_0, q'_0, \emptyset)$$

veremautomatát a következőképpen definiáljuk: $z'_0 \notin Z$, $q'_0, q'_h \notin Q$, $\delta'$-re pedig teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned}
\delta'(z'_0, q'_0, \varepsilon) &= \{(z'_0 z_0, q_0)\}, \\
\delta'(z, q, a) = \delta(z, q, a), z &\in Z, q \in Q, a \in T, \\
\delta(z, q, \varepsilon) \subseteq \delta'(z, q, \varepsilon), z &\in Z, q \in Q, \\
(\varepsilon, q'_h) \in \delta'(z, q, \varepsilon), z \in Z \cup \{z'_0\}, q &\in F \cup \{q'_h\}.
\end{aligned}$$

$A'$ szimulálja $A$ működését; a $z'_0 \neq z_0$ veremszimbólum azért szükséges, hogy $A'$ nem fogadhasson el olyan $u$ szót, amely kiüríti az $A$ automata vermét.

## Bizonyításvázlat - folytatás

Legyen $w \in L(A)$. Akkor

$$z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* uq,$$

valamely $u \in Z^*$ veremszimbólum-sorozatra és $q \in F$ elfogadó állapotra. De akkor

$$z_0' q_0' w \Longrightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w \Longrightarrow_{A'}^* z_0' uq \Longrightarrow_{A'}^* q_h'$$

is fennáll, ahonnan $w \in N(A')$ következik.

## Bizonyításvázlat - folytatás

Legyen $w \in N(A')$. Akkor

$$z_0' q_0' w \Longrightarrow^*_{A'} q$$

valamely $q \in Q \cup \{q_0', q_h'\}$ állapotra.

A konstrukció alapján az első lépés $z_0' q_0' w \Longrightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0$. Mivel a $z_0'$ szimbólum csak valamely $(\varepsilon, q_h') \in \delta'(z_0', q, \varepsilon)$ átmenetet alkalmazó lépéssel törölhető a veremből, ezért lennie kell olyan $q \in F$ elfogadó állapotnak és $u \in Z^*$ szónak, amelyre

$$z_0' z_0 q_0 w \Longrightarrow^*_{A'} z_0' u q \Longrightarrow^*_{A'} q_h'$$

teljesül, ahol $z_0 q_0 w \Longrightarrow^*_A uq$. Azaz, $w \in L(A)$.

## Lemma

Bármely $A$ veremautomatához meg tudunk adni egy $A'$ veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

# Bizonyításvázlat

Legyen

$$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \emptyset)$$

veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az $A'$ veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen

$$A' = (Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_f'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{q_f'\}),$$

ahol $z_0' \notin Z$, $q_0', q_f' \notin Q$ és

$$\begin{aligned} \delta'(z_0', q_0', \varepsilon) &= \{(z_0' z_0, q_0)\}, \\ \delta'(z, q, a) = \delta(z, q, a), z \in Z, q \in Q, a &\in (T \cup \{\varepsilon\}), \\ \delta'(z_0', q, \varepsilon) &= \{(z_0', q_f')\}, q \in Q. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy valahányszor $A$ kiüríti a vermét, akkor $A'$ elfogadó állapotba kerül, továbbá $A'$ csak ebben az esetben kerül elfogadó állapotba. Így a $L(A') = N(A)$ teljesül.