Formális nyelvek - 11.

Csuhaj Varjú Erzsébet

Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék
Informatikai Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem
H-1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c

E-mail: csuhaj@inf.elte.hu

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához meg tudunk adni egy olyan A veremautomatát, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyításvázlat

Legyen $G = (N, T, P, S)$ Chomsky normálformájú grammatika. Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor P tartalmazza az $S \to \varepsilon$ szabályt, de ebben az esetben S ne forduljon elő egyetlen szabály jobboldalán sem. Megkonstruálunk egy A veremautomatát, amelyre $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat

Legyen $A = (N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\})$, ahol

$$Q = (\bigcup_{X \in N} q_X) \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$z_0 q_0 \to z_0 q_S \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

$z_0 q_0 a \to z_0 q_X \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to a \in P$,

$Z q_Y a \to Z Y q_X \in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}, Y \in N, X \to a \in P$ esetén,

$Z q_Y \to q_X \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to ZY \in P$,

$z_0 q_S \to q_h \in M_\delta$.

Megjegyezzük, hogy ezek az átmenetek lényegében a G invertált szabályai.

Bizonyításvázlat - folytatás

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra. Az A konstrukciója alapján $u = \varepsilon$ kell, hogy teljesüljön, illetve, pontosabban

$$z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* z_0 q_S \Longrightarrow_A q_h,$$

kell, hogy fennálljon.

Ha $w = \varepsilon$, akkor az első lépés $z_0 q_0 \Longrightarrow_A z_0 q_S$ és így $S \to \varepsilon \in P$. Egyébként

$$z_0 q_0 w \Longrightarrow_A z_0 q_X v \Longrightarrow_A^* z_0 q_S \Longrightarrow_A q_h,$$

ahol $w = av$ valamely $a \in T$ inputszimbólumra, $v \in T^*$ és $X \to a \in P$. Könnyen megmutathatjuk, hogy a

$z_0 q_0 w \Longrightarrow_A^* z_0 q_S$ redukcióból az $S \Longrightarrow_G^* w$ levezetés következik.

Nevezetesen, minden 2,3 vagy 4 típusú átmenetnek van a P szabályrendszerben megfelelője, így meg tudjuk konstruálni a megfelelő levezetést G-ben. Azaz, $L(A) \subseteq L(G)$. A fordított irányú tartalmazást, $L(G) \subseteq L(A)$-t, hasonlóan könnyen igazolni tudjuk.

Tétel

Minden A veremautomatához meg tudunk adni egy környezetfüggetlen G grammatikát úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \emptyset)$ veremautomata.

Definiáljuk a $G = (N, T, P, S)$ grammatikát úgy, hogy N elemei (q, x, p) alakú rendezett hármasok, ahol $q, p \in Q$ és $x \in Z$. Bevezetjük az S új szimbólumot és legyen $N = Q \times Z \times Q \cup \{S\}$.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

1. Legyen $S \to (q_0, z_0, p) \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.

2. Ha $xqa \to y_1 \dots y_m p_m \in M_\delta$, ahol $a \in (T \cup \{\varepsilon\})$, akkor minden $p_0, p_1, \dots, p_{m-1} \in Q$ állapotsorozatra legyen
$$(q, x, p_0) \to a(p_m, y_m, p_{m-1}) \dots (p_1, y_1, p_0)$$
szabály P-ben. Az $m = 0$, azaz, az $xqa \to p \in M_\delta$ esetben legyen $(q, x, p_0) \to a \in P$.

3. A P szabályhalmaz ne tartalmazzon további szabályt.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Bizonyításához megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $(q, x, p) \Longrightarrow^* u$ levezetés G-ben, akkor $xqu \Longrightarrow^* p$ redukció A-ban.

A bizonyítást a $(q, x, p) \Longrightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egy lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \to p \in M_\delta$.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $(q, x, p) \Longrightarrow_G^* u$ levezetés $n+1$ lépésből.

Akkor a levezetés alakja

$$(q, x, p_0) \Longrightarrow a(p_m, y_m, p_{m-1}) \ldots (p_1, y_1, p_0) \Longrightarrow_G^* u,$$

ahonnan az adódik, hogy léteznek olyan $u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1 \in T^*$ szavak, amelyekre $u = au_m u_{m-1} \ldots u_1$ és $(p_i, y_i, p_{i-1}) \Longrightarrow_G^* u_i$ $1 \leq i \leq m$.

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Longrightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Longrightarrow_A y_1 \ldots y_m p_m.$$

Így

$xqu = xqau_m \ldots u_1 \Longrightarrow_A y_1 \ldots y_m p_m u_m \ldots u_1 \Longrightarrow_A^* y_1 \ldots y_{m-1} p_{m-1} u_{m-1} \ldots u_1 \Longrightarrow_A^* p_0 = p.$

Bizonyításvázlat - folytatás:

Így, ha $u \in L(G)$, akkor van olyan $p \in Q$, amelyre

$$S \Longrightarrow_G (q_0, z_0, p) \Longrightarrow_G^* u,$$

ahonnan

$$z_q q_0 u \Longrightarrow_A^* p,$$

azaz, $u \in N(A)$ adódik.

Bizonyításvázlat - folytatás:

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához megmutatjuk, hogy a

$$xqu \Longrightarrow_A^* p$$

redukcióból a

$$(q, x, p) \Longrightarrow_G^* u$$

levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \to p \in M_\delta$, ahonnan $(q, x, p) \to a \in P$.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Egynél több lépés esetén az $xqu \Longrightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Longrightarrow_A y_1 \dots y_m p_m v \Longrightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

Vizsgáljuk meg ezt a redukciót azután a lépés utánig, amikor az y_{m-1} szimbólum a verem tetején levő szimbólum.

Ekkor van olyan $u_m \in T^*$, amelyre $v = u_m v_1$ és $y_m p_m u_m \Longrightarrow_A^* p_{m-1}$ valamely p_{m-1} állapotra és így

$$xqu \Longrightarrow_A y_1 \dots y_m p_m u_m v_1 \Longrightarrow_A^* y_1 \dots y_{m-1} p_{m-1} v_1$$

.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan $u_{m-1}, \ldots, u_1$ szavak, hogy

$$u = a u_m u_{m-1} \ldots u_1$$

és

$$y_i p_i u_i \Longrightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \ldots m.$$

Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$(p_i, y_i, p_{i-1}) \Longrightarrow_G^* u_i \text{ ha } i = 1, \ldots m$$

és a G grammatika definíciója alapján

$$(q, x, p) \Longrightarrow_G a(p_m, y_m, p_{m-1}) \ldots (p_1, y_1, p)$$

teljesül, ahonnan $(q, x, p) \Longrightarrow_G^* u$ következik.

Bizonyításvázlat - folytatás:

Így, ha $u \in N(A)$, akkor $z_0 q_0 u \Longrightarrow_A^* p$ valamely p állapotra, és így

$$S \Longrightarrow_G (q_0, z_0, p) \Longrightarrow_G^* u,$$

azaz, $N(A) \subseteq L(G)$.

Korollárium

Minden A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$.

Korollárium

Minden A veremautomatához meg tudunk adni egy G környezetfüggetlen grammatikát úgy, hogy $L(A) = L(G)$.