2014

Formális nyelvek és automaták

GYAKORLÓ FELADATOK - VÁZLAT

A MEGOLDÁSOK TARTALMAZHATNAK HIBÁKAT.

1. *Melyik halmaz abc a következő halmazok közül: Ø; { a, b }?*
   a. ∅ : V* abc, mivel V* = {v|v∈V+}∪{ε}
   b. { a, b } : ábécé
2. *Legyen V abc és legyen L nyelv V felett. Adja meg az ¬L es L^{-1} nyelvek definícióját!*
   Legyen V1 = {a, b} és legyen L1 = $\{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$, L2 = $\{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$.
   Adja meg az ¬L1 és az $L2^{-1}$ nyelveket!
   a. ¬L : L*-ra halmazművelet: **¬L = V* - L** ¬L1 = V* - $\{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$
   b. L^{-1} : nyelv megfordítása: **$L^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in L\}$** $L2^{-1} = \{b^{2n}a^{3n} \mid n \geq 0\}$
3. *Legyen V = {a, b, c} abc es legyenek L1 = {a, b, c}, L2 = {aa, b, aba} nyelvek. Határozza meg az L1 ∪ L2, L1 ∩ L2, L1 − L2, L2 − L1, (¬L1)∗ nyelveket!*
   a. L1∪L2 = {a,b,c,aa,aba}
   b. L1∩L2 = {b}
   c. L1−L2 = {a,c}
   d. L2−L1 = {aa,aba}
   e. (¬L1)∗ = ({a,b,c}*-{a,b,c})*
4. *Mikor nevezünk egy szót részszónak? Legyen w = aaaabbbccccd. Részszó-e az abcd szó?*
   a. V abc-ben u, v, x, y szavak; u v részszava, ha v=xuy (valódi részszó, ha v!= u és u!= ε)
   b. w = aaaabbbccccd -> abcd NEM részszó
5. *Mikor nevezünk egy szót egy másik szó valódi részszavának? Adja meg a következő szavak valódi részszavait: aabbcc, abababa, ε.*
   a. aabbcc: {ab,bb,bc,abb,abbc,bbc,aa,cc,aabbc,abbcc}
   b. abababa: {ab,ba,aba,bab,ababab,bababa,ababa,baba,abab}
   c. ε : nincs neki részszava
6. *Mit nevezünk egy L nyelv i-edik hatványának, ahol i ≥ 0: Adja meg az L1 = {ε, a} és az L2 = {a, b, ab} nyelvek i-edik hatványait az i = 0, i =2, i = 3 esetekben!*
   a. $L1^1$ = {ε, a} : L^0={ ε }; L^2= L1L1 = {ε, a}{ε, a} = { ε, a, aa}
   b. $L2^1$ = {a, b, ab} : L^0={ ε }; L^2= L2L2 = {aa, ab, aab, ba, bb, bab, aba,abb,abab}
7. *Legyen L egy nyelv. Mikor igazak a következő állítások: L∗= Ø, L+= Ø, L∗= {ε}, L+= {ε}?*
   a. L∗= ∅ soha mert ε∈L*
   b. L+= ∅ ha L = ∅
   c. L∗= {ε} ha L = ∅ vagy L = {ε}
   d. L+= {ε} L = {ε}
8. *Adjon példát olyan nyelvre, amelyre L∗= L teljesül!*
   a. L = {ε} vagy L = {a}
9. *Legyenek L1, L2, L3, L nyelvek. Igazak-e a következő állítások?*
   a. L1(L2 ∪ L3) = L1L2 ∪ L1L3 **IGAZ**
   b. L1(L2 ∩ L3) = L1L2 ∩ L1L3 **HAMIS** (pl: L2={a}, L3={aa}, L1={a, ε})
10. *Legyen G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika. Adja meg az N, T, P, S paraméterek jelentését! (*lsd: kidolgozás)
11. *Mikor mondjuk, hogy egy G = (N, T, P, S) generatív grammatika 1-típusú?*

   környezet függő: P ∀ szabálya u1Au2→u1vu2; u1,u2∈(N∪T)* és A∈N és v!= ε, kivéve S → ε

12. *Legyen G = (N, T, P, S) generatív grammatika, ahol N = {S, A}, T = {a} és P = {S → ε, A → ε, S → SA, S → AA, AA → a}. Melyik az a legkisebb i, i ∈ {0, 1, 2, 3}, amelyre teljesül, hogy G i-típusú?*
    a. 0. típusú
13. *Legyen G = (N, T, P, S) generatív grammatika, ahol N = {S, A}, T = {a} és P = {S → ε, A → ε, S → AA, AA → ε}. Melyik az a legkisebb i, i ∈ {0, 1, 2, 3}, amelyre teljesül, hogy G i-típusú? Melyik az a legkisebb j, amelyre teljesül, hogy L(G) j-típusú, ahol j ∈ {0, 1, 2, 3}.*

    2. típusú (környezet független)
14. *Adja meg a generatív grammatika definícióját! Legyen G = (N, T, P, S), ahol N = {S, A}, T = {a} és P = {S → ε, A → ε, S → AA, aa → ε}. Generatív grammatika-e G?*

    NEM az. aa → ε nem szabály.
15. *Legyen G = (N, T, P, S) reguláris grammatika, valamint legyen u ∈ (N ∪T)∗. Mikor mondjuk, hogy u levezethető S-ből? Legfeljebb hány nem terminális szimbólumot tartalmazhat u?*

    pontosan 1.
16. *Legyen G = (N, T, P, S) generatív grammatika, valamint legyen u, v ∈(N ∪ T)*. Mikor mondjuk, hogy a v szó közvetlenül levezethető (egy lépésben levezethető) az u szóból a G grammatikában? Legalább hány nem terminális szimbólumot tartalmaz u?*

    Legalább **egy.** Ha reguláris, akkor pontosan 1.
17. *Legyen G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika, valamint legyen u ∈ (N ∪ T)*. Mikor mondjuk, hogy u k lépésben, ahol k = 5 levezethető S-ből?*

    Ha léteznek u1,u2,u3,u4,u5∈(NUT)*, akkor S=>u1=>u2=>u3=>u4=>u5.
18. *Mely műveletek alkotják együttesen a reguláris műveleteket a következő műveletek közül:* ***unió****, metszet,* ***konkatenáció****,* **∗***, tükrözés (megfordítás)?*
19. *Legyenek G1 = (N1, T1, P1, S1) és G2 = (N2, T2, P2, S2) reguláris grammatikák. Írja le röviden, hogyan konstruálna meg egy olyan G3 = (N3, T3, P3, S3) reguláris grammatikát, amely a következő nyelveket generálja:*
    a. L(G1) ∪ L(G2), Pu={S0->S1, S0->S2}UP1UP2 és (N1∩N2=∅)
    b. L(G1)L(G2), Pc={A->uB|A->uB∈P1}U{A->uS2|A->u∈P1}UP2 és (N1∩N2=∅)
    c. (L(G1))∗
20. *Legyenek G1 = (N1, T1, P1, S1) és G2 = (N2, T2, P2, S2) környezetfüggetlen grammatikák. írja le röviden, hogyan konstruálna meg egy olyan G3 = (N3, T3, P3, S3) környezetfüggetlen grammatikát, amely a következő nyelveket generálja:*
    a. L(G1) ∪ L(G2), Pu={S0->S1,S0->S2}UP1UP2 és (N1∩N2=∅)
    b. L(G1)L(G2), Pc={S0->S1S2}UP1UP2 és (N1∩N2=∅)
    c. (L(G1))∗
21. *Legyenek G1 = (N1, T1, P1, S1) és G2 = (N2, T2, P2, S2) 1-típusú grammatikák. Írja le röviden, hogyan konstruálna meg egy olyan G3 = (N3, T3, P3, S3) 1-típusú grammatikát, amely a következő nyelveket generálja: L(G1) ∪ L(G2),L(G1)L(G2),(L(G1))∗*
22. *Legyen G = (N, T, P, S)* ***környezetfüggetlen*** *grammatika és legyen ε ∈L(G). Ismertesse röviden, hogy határozná meg G azon nem terminálisait, amelyekből levezethető az üres szó!*

    Meghatározzuk az U (valódi részhalmaza N) elemeit. Legyen U1={A|A→ ε , A∈N}, ... [uj:ui része ui+1];

    $U_i = \cup^{U_{i-1}}$ { B |B→α, α ∈U*i-1}, i = 2…n (U*:több is lehet regulárissal)

    Mivel N-ben véges számú elem van, így van olyan 1<=k<=n, Uk=Un, ekkor legyen U=Uk

23. *Legyen G = (N, T, P, S), ahol N = {S, A, B, C }, T = {a, b} és P = {S → ABB, S → b, A → CC, A → ε, A → B, A → a, B → ab, B →A, C → ε}. Határozza meg G azon nem terminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!*

Nem terminálisok halmaza melyekből levezethető ε:

U1={A,C};**U2**=U1∪{B};**U3**=U2∪{S}={A,C,B,S} = **U**

24. *Legyen G = (N, T, P, S)* ***reguláris*** *grammatika és legyen ε ∈ L(G). Ismertesse röviden, hogy határozná meg G azon nem terminálisait, amelyekből levezethető az üres szó!*

Meghatározzuk az U (valódi részhalmaza N) elemeit. Legyen U1={A|A→ ε , A∈N}, … [uj:ui része ui+1];

Ui = U_{i-1}∪{ B |B→α, α∈U*i-1}, ***α∈N***

i = 2…n (U*:több is lehet regulárissal)

Mivel N-ben véges számú elem van, így van olyan 1<=k<=n, Uk=Un, ekkor legyen U=Uk

25. Legyen G = (N, T, P, S), ahol N = {S, A, B, C }, T = {a, b} és P = {S → A, S → b, A → C, A → ε, A → B, A → a, B → a, B → A, C →ε}. Határozza meg G azon nem terminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!

a.

26. *Legyen G = (N, T, P, S)* ***környezetfüggetlen*** *grammatika és legyen A ∈N. Ismertesse röviden, hogyan határozná meg azokat a B ∈ N nem terminálisakat, amelyekre B = ⇒∗A teljesül!*

Meghatározzuk a H(A)={A} halmazt:

H0(A)={A};**H1(A)**={B|B→A, B∈N} U H0(A); … **Hi(A)**=Hi-1(A)U{C|C→D, D∈N }

i=1…n. Amíg **Hi(A)** része Hi+1(A).

Mivel a nem terminálisak száma n, ezért létezik 0≤k≤n, Hk(A)=Hk+1(A) és Hk(A)=H(A)

27. *Legyen G = (N, T, P, S), ahol N = {S, A, B, C }, T = {a, b} és P = {S → AB, S → b, A → C, A → B, A → a, B → a, B → A, C → A}. Láncmentesítse a G grammatikát!*

H0(A)={A};H1(A)={B,C} U H0(A)=H(A);

Új szabály: P={S → AB, S → b, A → a, B → a, ***C → a***}

28. *Mikor nevezünk egy G környezetfüggetlen grammatikát* ***redukáltnak****?*

G=(N,T,P,S) redukált, ha ∀ nem terminálisa **aktív** és **elérhető**.

29. *Legyen G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika, amelynek minden nem terminálisa vagy elérhető, vagy aktív. Redukált-e a G grammatika?*

Nem redukált, mindkettő tulajdonságnak teljesülni kell.

BIZ.: **R0**={S}; **R1**={A|S→uAv, u,v ∈ (NUT)*, A∈N} U R0;

Ri = Ri-1 U {B|A→αBβ; α,β ∈ (NUT)*, B∈ N}

∃k : Rk = Rk+1, és akkor Rk=R (Ri része Ri+1, i=1…n)

30. *Ismertesse, hogyan határozná meg egy G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika* ***elérhető*** *nem terminálisainak halmazát!*

Elérhető: ∃S=>*uAv, u,v(NUT)*

31. Ismertesse, hogyan határozná meg egy G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika **aktív** nem terminálisainak halmazát!

Aktív: A ∈N, ha ∃A=>*w, w∈T*;

32. Ismertesse, hogyan határozná meg egy G = (N, T, P, S) reguláris grammatika **elérhető** nem terminálisainak halmazát!

Elérhető: ∃S=>*uA, u∈T*

33. Ismertesse, hogyan határozná meg egy G = (N, T, P, S) reguláris grammatika **aktív** nem terminálisainak halmazát!

    Aktív: A ∈N, ha ∃A=>*w, w∈T*;

34. *Legyen G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika, amelynek egyetlen nem terminálisa sem aktív. Mit tudunk mondani az L(G) nyelvről?*

    L(G) ÜRES

35. *Legyen G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika és legyen L(G) ≠∅. **Aktív** nem terminális-e S?*

    Aktív, mert belőle levezethető terminális szó.

36. *Legyen G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika. Ismertesse, hogyan konstruálna meg G-ből kiindulva egy G-vel azonos nyelvet generáló G' Chomsky normálformájú környezetfüggetlen grammatikát!*

    Feltételezzük, hogy G ε mentes. (Ha nem, akkor konstuálunk egy G''-t mire L(G)=L(G'') és G''-ben S-> ε szabály) Grammatika szabályok: A->a, A->BC alakúak, ahol A,B,C elemei N-nek, A elemet T

    Lépések:

    a) ∀A->X1,…,Xn (n>=1) szabályra új szabály: A->X1,…,Xn : Xi∈T, ahol Xi helyére Yi-t írjuk, Yi ∈N és beírjuk Yi->xi, szabályt (<u>álterminális</u>)
    b) hosszredukció: A->X1, A->X1X2, ha n>=2 új szabályt vezetünk be: A->X1Z1, Z1->X2Z2, Zn-2 -> Xn-1 Xn
    c) lánctalanítás (S->A->C->CCC helyett A->CCC) Az új szabályhalmaz ∀ esetben A⇒∗B és B->alfa fennáll, tartalmazni fogja az A->alfa szabályt és ∀ láncszabályt, amely az A⇒∗B levezetésben szerepelt kitöröljük

37. *Legyen G = (N, T, P, S), ahol N = {S, A, B}, T = {a, b} és legyen P = {S → AbA, S → a, A → BB, B → A, A → aa, B → b}. Adjon meg egy G-vel azonos nyelvet generáló G' környezetfüggetlen grammatikát, amely Chomsky normálformájú!*

    a. hosszredukció

        P1 = {S → A**B**'A, S → a, A → BB, B → A, A →A'A', A'→a, B → b}
        P2 = { S →AC, C → **B**'A, S → a, A → BB, B → A, A →A'A', A'→a, B → b}
        P3 = { S →AC, C → **B**'A, S → a, A → BB, B →BB, B → A, A →A'A', A'→a, B → b}

38. Milyen típusú és milyen nyelvet generál?

    a. G=({S},{a},{S-> ε}, S) 1-es
    b. G=({S, A},{a},{A->a}, S) üres

1.Feladat / A

1. Legyen V egy ábécé és legyen $u \in V^+$. Mit értünk az u szó i-edik hatványán, ahol $i \geq 0$?
2. Legyen V ábécé és legyen $L \subseteq V^*$! Definiálja az $L+$ és az L^{-} nyelveket!
3. Legyen V ábécé és legyen u ∈ V+. Mikor mondjuk, hogy a v ∈ V∗ szó részszava az u szónak?
4. Sorolja fel azokat a nyelvekre vonatkozó műveleteket, amelyeket együttesen reguláris műveleteknek nevezünk! Legyen L egy V ábécé feletti nyelv. Mit értünk az L+ nyelv alatt?

5. Sorolja fel azokat a nyelvekre vonatkozó műveleteket, amelyeket együttesen reguláris műveleteknek nevezünk!
6. Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V*$! Definiálja az L nyelv V ábécére vonatkozó komplemensét! Legyen V = {a, b} és legyen L = {ab, ε}. Igaz-e, hogy bab ∈ L∗? Fennállnak-e a bab $\in \overline{L}$ és az ab $\in \overline{L}$ tartalmazások?
7. Legyen V egy ábécé és legyen u ∈ V+. Mikor mondjuk, hogy egy v szó valódi részszava az u szónak? Mit értünk az u szó fordítottja (tükörképe) alatt?
8. Legyen V ábécé és legyen L nyelv V felett. Adja meg az L és L^{-1} nyelvek definícióját!
9. Legyen *V* egy ábécé és *L* 1, *L* 2 nyelvek *V* felett. Definiálja az *L* 1, *L* 2 nyelvek konkatenáltját!

1.Feladat / B

(b) Jelöljenek *L*, *L* 1, *L* 2, és *L* 3 egy *V* ábécé feletti nyelveket. Mikor teljesülnek a következő egyenlőségek?

i.	$V* = L \cup \overline{L}$	mindig
ii.	$L+ \cup L^0 = L*$	mindig
iii.	$L* \cap \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$	mindig
iv.	L1(L2L3) = (L1L2)L3	mindig (asszociatív)
v.	L1∅ = ∅L1,	mindig
vi.	L∗\L0 = L+	mindig
vii.	$L^0 = L*$	ha L = ∅ vagy {ε}
viii.	L1(L2∪L3) = L1L2∪L1L3	mindig
ix.	L1(L2∩L3) = L1L2∪L1L3	nem igaz
x.	L1(L2∩L3) = L1L2∩L1L3	nem igaz
xi.	L∗∅ = ∅	mindig
xii.	L+∅ = ∅	mindig
xiii.	L+ = L∗	ha L = {ε}
xiv.	L∗ = ∅,	SOHA (ε∈L*)
xv.	L∗ = {ε}	ha L = {ε}
xvi.	L1 ∪ L2 = {ε}	ha L = {ε} vagy ∅
xvii.	(L1∗)L2 = ∅	ha L1 vagy L2 = ∅
(i)	L+∪{ε} = L∗	mindig
(ii)	L+ = {ε}	ha L = {ε}
(iii)	L1 ∪ L2 = ∅	ha mindkettő üres
(iv)	L1L2 = ∅	ha egyik üres

(b) Mely összefüggések igazak az alábbi nyelvekre? Karikázzon be minden igaz állítást!

• ∅L = ∅	**igaz**
• L ∪ {ε} = L	**hamis**, pl: bármely olyan nyelv, amiben nincs ε
• L1 ∩ (L2 ∩ L3) = (L1 ∩ L2) ∩ L3	**igaz**
• L∗ − {ε} = L+, ha ε!∈L	**igaz**
• $(L^{-1})^i = (L^i)^{-1}$, ha $i \geq 0$	**igaz**
• L1 ∪ L2 = L2 ∪ L1	**igaz**
• L1(L2L3) = (L1L2)L3	**igaz**
• L∗ − {ε} = L+	**igaz**
• ¬(L∗) = (¬L)∗	**hamis**

(i)	$L1 = \{a^{3n} \mid n > 0\}$ és $L2 = (aaa)*$.	**$L1 \subseteq L2$**	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(ii)	$L1 = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$ és $L2 = b*a*$.	**$L1 \subseteq L2$**	**$L2 \subseteq L1$**	**egyenlők**	egyik sem
(iii)	$L1 = \{u \mid u \in \{a, b\}*\}$ és $L2 = (b*a*)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	**egyenlők**	egyik sem
(iv)	$L1 = \{a^{2n+1} \mid n > 0\}$ és $L2 = (aa)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	**egyik sem**
(v)	$L1 = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$ és $L2 = (aa)*(bb)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(vi)	$L1 = \{u \mid u \in \{a, b\}+\}$ és $L2 = (a*b*)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(vii)	$L1 = \{a^{3n}aaa \mid n \geq 0\}$ és $L2 = (aaa)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(viii)	$L1 = \{b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$ és $L2 = b*a*b*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(ix)	$L1 = \{u \mid u \in \{a, b\}*\}$ és $L2 = (a*b*)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	**egyenlők**	egyik sem
(x)	$L1 = \{a^{2n} \mid n > 0\}$ és $L2 = (aa)*$.	**$L1 \subseteq L2$**	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(xi)	$L1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ és $L2 = a*b*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem
(xii)	$L1 = \{u \mid u \in \{a, b\}*\}$ és $L2 = (a*b*)*$.	$L1 \subseteq L2$	$L2 \subseteq L1$	egyenlők	egyik sem

Bizonyítsa be, hogy minden G = (N, T, P, S) környezetfüggetlen grammatika és minden u ∈ T* szó esetében eldönthető, hogy u benne van-e a G grammatika által generált nyelvben!

Bizonyítsa b e, hogy bármely *G* = (*N*, *T*, *P*, *S*) környezetfüggő grammatikáról és *u* ∈ *T*+ szóról eldönthető, hogy *u* benne van-e a *G* által generált nyelvben vagy sem.

Minden környezetfüggő G= (N, T, P, S) grammatika és minden u∈T∗ szó esetén eldönthető, hogy G-ben u levezethető-e vagy sem. Ha u=ε, akkor a válasz triviális. Ha u∈T+ , akkor tekintsük az összes olyan véges S=u0, u1, u2,..., un=u sorozatot, ahol ui∈(N∪T)+ és |ui| ≤ |ui+1| teljesül 0≤i≤n− 1-re , valamint ui!=uj, hacsak i!=j. Azon v∈(N∪T)+ szavak száma, amelyekre |v| ≤ |u| fennáll, véges, ezért a fenti sorozatok száma is véges. Ezért szisztematikusan elő tudjuk az összes ilyen sorozatot állítani és le tudjuk ellenőrizni, hogy ui⇒ui+1, 0≤i≤n−1 teljesül-e vagy sem. Ha van ilyen sorozat, akkor u∈L(G). (A legrövidebb levezetésben nincs szóismétlés.)

Mutassa meg, hogy a környezetfüggetlen nyelvek osztálya **zárt** a reguláris nyelvekkel való **metszésre** nézve!

A környezetfüggetlen nyelvek osztálya zárt a reguláris nyelvekkel való metszetre nézve.
Legyen L egy tetszőleges környezetfüggetlen nyelv (L∈ L2) és legyen L′ (L′ ∈ L3) reguláris nyelv. Megmutatjuk, hogy L∩L′ környezetfüggetlen. Először is, tegyük fel, hogy ε/∈L és az L nyelvet a G= (N, T, P, S) Chomsky-NF-ú grammatika, az L′ nyelvet pedig a G′=(N′, T′, P′, S′), a megelőzőekben ismertetett normálformájú grammatika generálja. (folyt: ….. 5. EA, 14.oldal)

Bizonyítsa be, hogy a környezetfüggő nyelvek osztálya **zárt** a **konkatenáció** műveletére! (2.EA)

Legyen S0∈/(N∪N′) és Gc= (N∪N′ ∪ {S0}, T∪T′ , P∪P′ ∪ {S0→SS′ }, S0).
(a) Ha ε/∈LL’, akkor Gc-t az előzőeknek megfelelően konstruáljuk meg.
(b) Ha ε∈LL’, akkor először vegyük az L1=L−{ε} és L2=L’−{ε} nyelveket, és konstruáljuk meg Gc-t a fenti módon. Az LL’ nyelv megegyezik a következő nyelvek valamelyikével: L1L2∪L2, L1L2∪L1, L1L2∪L1∪L2∪{ε}, attól függően, hogy ε∈L és ε /∈L′ , vagy fordítva, vagy ε mindkét nyelv eleme. Mindegyik esetben LL′ ∈ L1következik abból, hogyL1L2∈ L1 és L1 zárt az unió műveletére nézve.

Bizonyítsa b e, hogy minden hossz-nemcsökkentő grammatika környezetfüggő nyelvet generál!

EgyG= (N, T, P, S) 0-típusú grammatikát hossz-nemcsökkentőnek mondunk, ha bármely u→v∈P szabályra |u| ≤ |v| teljesül. **TÉTEL:** Minden hossz-nemcsökkentő grammatika környezetfüggő nyelvet generál.

Legyen G= (N, T, P, S) egy tetszőleges hossz-nemcsökkentő grammatika. Tegyük fel, hogy terminális szimbólum csak A→a alakú szabályban szerepel a P szabályhalmazban, ahol A nem terminális és a terminális. Legyen u→v olyan szabály P-ben, amelyre |u| ≥2 és u→v alakja legyen X1X2...Xm→Y1Y2...Yn, n≥m≥2.Akkor az előbbi megjegyzés alapján Xi, Yj∈N,1≤i≤m,1≤j≤n. Helyettesítsünk minden X1X2...Xm→Y1Y2...Yn alakú szabályt a következő szabályhalmazzal, ahol Zi!∈N, 1≤i≤m,új, a szabályhoz bevezetett nem terminálisok. (Különböző szabályokhoz páronként diszjunkt új nem terminálishalmazokat vezetünk be.) Könnyen látható, hogy így minden egyes hossz-nemcsökkentő szabályt helyettesíthetünk környezetfüggő szabályok halmazával úgy, hogy a generált nyelv nem változik.

Mondja ki és bizonyítsa be a **Bar-Hillel** lemmát! (4. EA)

Minden L környezetfüggetlen nyelvhez meg tudunk adni két p és q természetes számot úgy, hogy minden olyan szó L-ben, amely hosszabb, mint p uxwyz alakú, ahol |xwy| ≤q, xy ≠ ε, és minden ux^i wy^i v szó is benne van az L nyelvben mindeni≥0 egész számra (u, x, w, y, v∈ T∗).

Következmény: Léteznek nem környezetfüggetlen mondatszerkezetű nyelvek. Pl: L= {$a^nb^nc^n$ |n≥1}.

Bizonyítsa be, hogy bármely környezetfüggetlen grammatikáról eldönthető, hogy az általa generált nyelv üres-e vagy sem.

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G ε-mentes. Legyen n a G nemterminális szimbólumainak száma. Tegyük fel, hogy létezik egy $S \Rightarrow_{*G} u$ levezetés G-ben, ahol $u \in T*$. Tekintsük az ezen levezetéshez tartozó levezetési fát. Ha a leghosszabb út hossza ebben a levezetési fában nagyobb, mint n, akkor van olyan v szó $L(G)$-ben, amely levezetési fájában a leghosszabb út hossza nem nagyobb, mint n. Ez nyilvánvaló, hiszen ha az út hossza nagyobb, mint n, akkor legalább egy nem terminális szimbólum legalább kétszer fordul elő ezen az úton. Tekintsünk két azonos címkéjű csúcsot az úton és helyettesítsük a fa gyökeréhez közelebb eső csúcshoz tartozó részfát a másik csúcshoz tartozó részfával. Akkor továbbra is terminális szót kapunk. Megismételve ezt az eljárást annyiszor, ahányszor szükséges, addig csökkenthetjük az út hosszát, amíg legfeljebb n hosszúságú utat kapunk. Ebből következően, ha $L(G)$ nem üres, akkor léteznie kell egy szónak a nyelvben, amelyhez tartozó levezetési fában a leghosszabb út nem hosszabb, mint n. Minthogy azokat a levezetési fákat, amelyekre az igaz, meg tudjuk határozni, a kérdést el tudjuk dönteni.

Figyelem!!! Ezek valószínűleg rossz megoldások

Legyen A = (Z, Q,T, δ, z0, q0, F), ahol Q = {q0, q1, q2}, Z = {z0, a}, T = {a, b}, F = {q1, q2}

(1) δ(ε, q0, a) = (a, q0),
(2) δ(ε, q0, ε) = (ε, q1),
(3) δ(a, q0, b) = (ε, q2),
(4) δ(a, q1, ε) = (ε, q1),
(5) δ(a, q2, b) = (ε, q2),
(6) δ(a, q2, ε) = (ε, q2)

A megoldás szerint: L(A) = {a^n b^m | n ≥ m} Ez hogy tud egymás után több 'a'-t olvasni? Az első 'a' után bekerül egy 'a' a verembe, q0 állapotba kerülök. Viszont δ(a, q0, a) nincs.

Az (1) szabály ismételt felhasználásával (az nem vesz ki semmit a veremből, amennyiben ez üres veremre vonatkozik abban az esetben tényleg nem jó) pakolja be az 'a'-kat.

ww^{-1}: w∈{a,b}

(1) δ(q0, t1, #) = (q0, t1#), t1={a,b}
(2) δ(q0, t2, t1) = (q0, t2t1)
(3) δ(q0, t1, t1) = (q1, ε)
(4) δ(q0, t1, t1) = (q0, t1t1)

L= { $a^kb^nc^l$: k, n, l∈N; k+l=2n}, Z={+,-,#}

(1) δ(q0, a, #) = (q0, +#)
(2) δ(q0, a, +) = (q0, ++)
(3) δ(q0, b, +) = (q1, ε)
(4) δ(q1, ε, +) = (q2, ε)
(5) δ(q1, ε, #) = (q2, #)
(6) δ(q2, b, -) = (q2, ---)
(7) δ(q2, b, #) = (q2, --#)
(8) δ(q2, c, -) = (q3, ε)
(9) δ(q3, c, -) = (q3, ε)
(10) δ(q3, ε, #) = (q3, ε)

L = { $c^ma^nb^n$ | m>=1, n>=1 }

(1) δ(z0, q0, c) = (z0, q0), // Ha c-t olvas, akkor nem változtat a konfigon
(2) δ(z0, q0, a) = (az0, q1), // ha megjelenik 'a'; állapotot vált, vissza z0
(3) δ(a, q0, a) = (aa, q1), // ha a-t olvas; veremben lévő a számát növeli
(4) δ(a, q1, b) = (ε, q2), // verem tetejéről törli a-t és állapotot vált
(5) δ(a, q2, b) = (ε, q2),
(6) δ(z0, q2, ε) = (ε, q3)
(7) q3 = F

L = { a^nb^{n-1} }

(1) δ(#, q0, a) = (a#, q1),
(2) δ(ε, q1, a) = (aa, q1),
(3) δ(a, q1, b) = (ε, q2),
(4) δ(a, q2, b) = (ε, q2),
(5) δ(a, q2, ε) = (ε, q3),
(6) δ(#, q3, ε) = (ε, q4)

G=(N,T,P,S) => (Q,T, δ,q0,F)=A : L(G)=L(A);
P={S->bb, B->cX, X->bA, A->cX, X->aC, C-> ε }; F={C}; q0={S}
δ(S,b)={B}, δ(X,C)={X}, δ(X,b)={A}, δ(X,a)={C}