# Formális nyelvek és automaták
# 1. zh, mintafeladatok

## I. feladatsor

A1. $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{b, ba\}$.
Adja meg az elemei felsorolásával:

$L_1 L_2 =$

A2. Mi a szükséges és elégséges feltétele: $L^+ = L^* \backslash \{\varepsilon\}$

A3. Adjon az $L_1^*$ nyelvhez reguláris nyelvtant!

B1. $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{b, ba\}$.
Adja meg az elemei felsorolásával:

$L_2^2 =$

B2. Adjon példát olyan nyelvre, amelyre $L = L^*$

B3. Adjon az $L_2^+$ nyelvhez olyan környezetfüggetlen nyelvtant, ami nem reguláris!

# I. feladatsor, megoldási kulcs:

A1. $L_1L_2 = \{ab, abb, aba, abba\}$

A2. $\varepsilon \notin L$

A3. $S \to \varepsilon|aS|abS$

B1. $L_2^2 = \{bb, bab, bba, baba\}$

B2. Pl. $L = \{\varepsilon\}$
($L = L^*$ **ha** $L$ maga is egy nyelv lezártja)

B3. $S \to b|ba|SS$

## II. feladatsor

A1. $G_1 : K \to S|\varepsilon,\ S \to aSB|aB,\ aB \to Ba,\ B \to b$
Mely állítások igazak és melyek hamisak?
$G_1 \in \mathcal{G}_0$, $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_1 \in \mathcal{G}_{1'}$
$G_1 \in \mathcal{G}_2$, $G_1 \in \mathcal{G}_{2'}$, $G_1 \in \mathcal{G}_3$, $G_1 \in \mathcal{G}_{3nf}$

A2. Helyettesítse $L(G_1)$ leírásában a ... -ot a megfelelő formulával (amely nem függ expliciten $G_1$-től)! $L(G_1) = \{u \in \{a,b\}^* | \ldots\}$

A3. $G_2 : S \to aS|bS$
Egészítse ki a $G_2$ nyelvtant egyetlen szabállyal úgy, hogy a következő állítás igaz legyen! $L(G_2) = \{a,b\}^*$

B1. $G_1 : S \to aSa|bSb|\varepsilon|a|b$
Mely állítások igazak és melyek hamisak?
$G_1 \in \mathcal{G}_0$, $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_1 \in \mathcal{G}_{1'}$
$G_1 \in \mathcal{G}_2$, $G_1 \in \mathcal{G}_{2'}$, $G_1 \in \mathcal{G}_3$, $G_1 \in \mathcal{G}_{3nf}$

B2. Helyettesítse $L(G_1)$ leírásában a ... -ot a megfelelő formulával (amely nem függ expliciten $G_1$-től)!
$L(G_1) = \{u \in \{a,b\}^* | \ldots\}$

# II. feladatsor, megoldási kulcs:

**A1:**

$G_1 \in \mathcal{G}_0$ ui. $G_1$ Chomsky-féle nyelvtan.
$G_1 \notin \mathcal{G}_1$ ui. $aB \to Ba$ nem egyes típusú szabály.
$G_1 \in \mathcal{G}_{1'}$ ui. $G_1$ csak korlátozott $\varepsilon$-szabályt és hosszúság-nemcsökkentő szabályokat tartalmaz.
$G_1 \notin \mathcal{G}_2$ ui. az $aB \to Ba$ szabály nem környezetfüggetlen (nem kfl): egy kfl szabály baloldala csak egy nyelvtani jel lehet.
$G_1 \notin \mathcal{G}_{2'}$, $G_1 \notin \mathcal{G}_3$, $G_1 \notin \mathcal{G}_{3nf}$, mivel $G_1 \notin \mathcal{G}_2$

**A2:**

$L(G_1) = \{u \in \{a,b\}^* | l_a(u) = l_b(u)\}$

**A3:**

Kiegészítve: $G_2 : S \to aS|bS|\varepsilon$

**B1:**

$G_1 \in \mathcal{G}_0$ ui. $G_1$ Chomsky-féle nyelvtan.
$G_1 \notin \mathcal{G}_1$, $G_1 \notin \mathcal{G}_{1'}$ ui. $S \to \varepsilon$ nem-korlátozott $\varepsilon$-szabály pl. $S \to aSa$ miatt.
$G_1 \in \mathcal{G}_2$ ui. mindegyik szabálya környezetfüggetlen.
$G_1 \notin \mathcal{G}_{2'}$ ui. $S \to \varepsilon$ nem-korlátozott $\varepsilon$-szabály.
$G_1 \notin \mathcal{G}_3$, $G_1 \notin \mathcal{G}_{3nf}$ hiszen pl. az $S \to aSa$ szabály nemreguláris.

**B2:**

$L(G_1) = \{u \in \{a,b\}^* | u = u^{-1}\}$

## III. feladatsor

**A:** Adjunk az alábbi EBNF-fel ekvivalens alap BNF-et!

$A_1$**:**
$< L >::= \{b\}_1^\infty\{\{a\}_0^1\{b|c\}\}_0^\infty$

$A_2$**:**
$< L >::= \{p|m\}_0^1 t\{\{p|m\}_1^\infty t\}_0^\infty$

**B:** Adjunk az alábbi alap BNF-fel ekvivalens EBNF-et úgy, hogy az EBNF egyetlen szabályból állhat, aminek a jobb oldalán csak terminálisok szerepelhetnek, BNF fogalmak (nyelvtani jelek) nem.

$B_1$**:**
$< L >::=< e >< t >$
$< e >::=< s > | < s >< e >$
$< t >::= \varepsilon|c < v >$
$< v >::= \varepsilon| < s >< v >$
$< s >::= a|b$

$B_2$**:**
$< L >::= ()|(< e >< v >)$
$< v >::= \varepsilon|, < e >< v >$
$< e >::=< b > | < b >< e >$
$< b >::= 0|1$

## III. feladatsor, megoldási kulcs:

$A_1$**:**
Vezessük be a köv. jelöléseket:
$< bk >::= \{b\}_1^\infty$
$< oa >::= \{a\}_0^1$
$< bvc >::= \{b|c\}$
$< av >::= \{< oa >< bvc >\}_0^\infty$

Ekkor a megoldás:
$< L >::=< bk >< av >$
$< bk >::= b|b < bk >$
$< av >::= \varepsilon| < oa >< bvc >< av >$
$< oa >::= \varepsilon|a$
$< bvc >::= b|c$

$B_1$**:**
Írjuk át az egyes szabályokat tömörített, nemrekurzív EBNF alakba:
$< L >::=< e >< t >$
$< e >::= \{< s >\}_1^\infty$
$< t >::= \{c < v >\}_0^1$
$< v >::= \{< s >\}_0^\infty$
$< s >::= a|b$

A fenti EBNF fogalmakba a szabály jobboldalakat visszahelyettesítve adódik a megoldás:

$< L >::= \{a|b\}_1^\infty\{c\{a|b\}_0^\infty\}_0^1$

# IV. feladatsor

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a Adjuk meg az $L$ nyelv $EBNF$ leírását úgy, hogy a szabályok között csak *egy* lehet rekurzív! (Több szabály-alternatíva is több szabálynak számít.)

1.b Írjuk le az $L$ nyelvet környezetfüggetlen nyelvtannal!

2. $G : S \to BZJ, Z \to XZY|\varepsilon, XY \to YaX,$
. $\quad Xa \to aX, aY \to Ya, XJ \to J, BY \to B,$
. $\quad Ba \to aB, BJ \to \varepsilon$
Adjunk az $L(G)$ nyelvhez olyan leírást, ami nem függ expliciten $G$-től!
Indokoljuk is az állítást!

3. $\varepsilon$-mentesítse az alábbi nyelvtant, a gyakorlatról ismert algoritmus segítségével!
$G : S \to aSB|SS|\varepsilon, B \to b|S$

## IV. feladatsor, megoldási kulcs:

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a $< L > ::= \{a\}_1^\infty | \{b\}_1^\infty | a < L > b$

1.b $S \to aSb|A|B, A \to aA|a, B \to bB|b$

2. $L(G) = \{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Minden $G$-beli levezetés az $S \to BZJ$ szabályt alkalmazza először, majd a $Z \to XZY$ szabályt alkalmazza valamely $n \in \mathbb{N}_0$ számszor, és a $Z \to \varepsilon$ szabállyal folytatja. Ezután létrejön a $BX^nY^nJ$ szó, amire pontosan $n^2$-szer kell alkalmazni az $XY \to YaX$ szabályt, hogy az $X$-ek az $XJ \to J$, az $Y$-ok pedig a $BY \to B$ szabály segítségével törlődhessenek. Mivel csak az $XY \to YaX$ szabály hoz létre terminálist, az eredményben biztosan $n^2$ darab $a$ betű lesz, azaz csak $a^{n^2}$ alakú lehet. Az ilyen alakú szavak viszont mind előállíthatók, mert az $X$-ek és az $Y$-ok az útjukba kerülő $a$ betűkön átlépve, egymással megcserélődve el tudnak jutni a $J$ illetve $B$ betűkhöz, ahol törlődnek. Közben pontosan $n^2$ darab $a$ betűt hoznak létre, ha a levezetés elején a $Z \to XZY$ szabályt $n$-szer alkalmaztuk. Az utolsó két szabály segítségével pedig a $B$ és a $J$ betűket tudjuk törölni.

3. $G : S \to aSB|SS|\varepsilon, B \to b|S$
**$\varepsilon$-mentesítés:**
$E_1 = \{S\}, E_2 = \{S\} \cup \{B\}, E_3 = \{S, B\} \cup \{\} = E_2, E = \{S, B\}$
Mivel $S \in E$, KES szükséges. Mivel $S$ szerepel szabály jobboldalon is, új kezdőszimbólumot ($K$) vezetünk be.
$K \to S|\varepsilon, S \to aSB|aS|aB|a|SS, B \to b|S$

# V. feladatsor

1.
$L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{\varepsilon, ba\}$.

a) Adja meg – elemei felsorolásával – az alábbi nyelveket!
a1) $L_1 L_2 =$
a2) $L_2 L_1 =$
a3) $L_1^2 =$
a4) $L_2^2 =$

b1) Sorolja fel az $L_1^*$ nyelv 2 hosszú szavait!
b2) Sorolja fel az $L_1^*$ nyelv 3 hosszú szavait!
b3) Sorolja fel az $L_2^*$ nyelv 3 hosszú szavait!
b4) Sorolja fel az $L_2^*$ nyelv legfeljebb 4 hosszú szavait!

2.
$G : S \to \varepsilon | aSb | Z, Z \to bSaZ | bSa$
a) Mutassa meg, hogy $abaabbab \in L(G)$ !
(Adja meg egy legbal levezetését, vagy a szintaxisfáját!)
b) Mutassa meg kétféleképpen, hogy $bababa \in L(G)$ !
(Adja meg két legbal levezetését, vagy két, különböző szintaxisfáját!)

3.
Írja át az alábbi grammatikákat megszorított 2-es típusú grammatikává, azaz – a gyakorlaton tanult algoritmussal – $\varepsilon$-mentesítse a nyelvtanokat!
$G_1 : S \to aSB | SS | \varepsilon, B \to b | S$
$G_2 : K \to SaS, S \to aSBS | \varepsilon, B \to b | \varepsilon$
$G_3 : S \to aZ | ZZ, Z \to aZZ | K, K \to Zb | \varepsilon$

4.
$L_1 = \{\varepsilon, ba\}^*$
$L_2 = \{a, ab\}^*\{a, ab\}$
$L_3 = (\{a\}\{b, \varepsilon\})^*\{b\}$

$L_4 = \{$ Olyan programok, amelyek egyetlen utasításból állnak. Az utasítás lehet struktúrált, úgymint C-szerű *while* utasítás, *if-else* utasítás és nemüres utasítássorozat C-szerűen bezárójelezve; vagy lehet elemi utasítás, amit az egyszerűség kedvéért mindig kis $u$ betűvel jelölünk. A *while* és *if-else* utasítások feltételeit pedig mindenütt egy-egy kis $f$ betűvel jelöljük. A struktúrált utasítások – mint C-ben – korlátozás nélkül egymásba ágyazhatók, de a legbelső mindig egy elemi utasítás. Két egymás után jövő utasítást mindig egy pontosvesszővel kell elválasztani. $\}$ Például:

```
{
    u;
    while(f){
        if(f) while(f)u
        else if(f)u
        else u;
        u
    }
}
```

a) Írja le olyan 2-es típusú nyelvtanokkal a fenti nyelveket, amelyek *nem* 3-as típusúak; azaz $\mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_3$ -beliek!

b) Írja le 3-as típusú nyelvtanokkal a fenti $L_1, L_2, L_3$ nyelveket!

c) Adjon BNF leírást a fenti nyelvekhez!

d) Adjon minél tömörebb EBNF leírást a fenti nyelvekhez!

**5.** Adjunk az alábbi EBNF-fel ekvivalens alap BNF-et!

**5.a** $< L >::= \{b\{a\}_0^1\}_1^\infty\{aa|b\}_0^\infty$

**5.b** $< L >::= c|b\{\{a\}_0^1\{b|c\}_1^\infty\}_0^\infty$

# V. feladatsor, megoldási kulcs:

**1.a1**
$L_1L_2 = \{a, ab\}\{\varepsilon, ba\} = \{a, aba, ab, abba\}$

**1.a2**
$L_2L_1 = \{\varepsilon, ba\}\{a, ab\} = \{a, ab, baa, baab\}$

**1.a3**
$L_1^2 = \{a, ab\}\{a, ab\} = \{aa, aab, aba, abab\}$

**1.a4**
$L_2^2 = \{\varepsilon, ba\}\{\varepsilon, ba\} = \{\varepsilon, ba, baba\}$

**1.b1**
$\{u \in L_1^* | l(u) = 2\} = \{ab, aa\}$

**1.b2**
$\{u \in L_1^* | l(u) = 3\} = \{aab, aba, aaa\}$

**1.b3**
$\{u \in L_2^* | l(u) = 3\} = \{\}$

**1.b4**
$\{u \in L_2^* | l(u) \leq 4\} = \{\varepsilon, ba, baba\}$

**2.a** $S \to aSb \to aZb \to abSab \to abaSbab \to abaaSbbab \to abaabbab$

$(G : S \to \varepsilon|aSb|Z, Z \to bSaZ|bSa)$
(Ebben a feladatmegoldásban, az alábbi szintaxisfákban $\varepsilon$ helyett # jelöli az üres szót. Az elágazások lefele, illetve vízszintesen jobbra haladnak.)

```
(2.a)       (2.b1)                      (2.b2)
  S           S                           S
 /|\          |                           |
a S b         Z-------Z-------Z           Z
  |          /|\     /|\     /|\         /|\
  Z         b S a   b S a   b S a       b S a
 /|\          |       |       |          /|\
b S a         #       #       #         a S b
 /|\                                      |
a S b                                     Z
 /|\                                     /|\
a S b                                   b S a
  |                                       |
  #                                       #
```

**3.1 $\varepsilon$-mentesítés:**
$E_1 = \{S\}, E_2 = \{S\} \cup \{B\}, E_3 = \{S, B\} \cup \{\} = E_2, E = \{S, B\}$
Mivel $S \in E$, KES szükséges. Mivel $S$ szerepel szabály jobboldalon is, új kezdőszimbólumot $(K)$ vezetünk be.
$K \to S|\varepsilon, S \to aSB|aS|aB|a|SS, B \to b|S$

**4.**

Vegyük észre, hogy

$L_1 = \{ba\}^*$

$L_2 = \{a, ab\}^+$

$L_3 = \{ab, a\}^*\{b\}$

**4.a.1**

$S \rightarrow \varepsilon|Sba$

**4.b.1**

$S \rightarrow \varepsilon|baS$

**4.c.1**

$< L1 >::= \varepsilon|ba < L1 >$

**4.d.1**

$< L1 >::= \{ba\}_0^\infty$

**4.a.2**

$S \rightarrow a|ab|SS$

**4.b.2**

$S \rightarrow a|ab|aS|abS$

**4.c.2**

$< L2 >::= a|ab| < L2 >< L2 >$

**4.d.2**

$< L2 >::= \{a|ab\}_1^\infty$

**4.a.3**

$S \rightarrow AS|b$

$A \rightarrow ab|a$

**4.b.3**
$S \rightarrow abS|aS|b$

**4.c.3**
$< L3 >::=< abva >< L3 > |b$
$< abva >::= ab|a$

**4.d.3**
$< L3 >::= \{ab|a\}_0^\infty b$
Más megoldás:
$< L3 >::= \{ab_0^1\}_0^\infty b$

**4.a.4**
$S \rightarrow W|F|B|u$
$W \rightarrow while(f)S$
$F \rightarrow if(f)SelseS$
$B \rightarrow \{K\}$
$K \rightarrow S|S;K$

**4.c.4**
BNF-fel:
$< L_4 >::=< utasitas >$
$< utasitas >::=< while-ut > \mid < if-ut > \mid < blokk > |u$
$< while-ut >::= while(f) < utasitas >$
$< if-ut >::= if(f) < utasitas > else < utasitas >$
$< blokk >::= \boldsymbol{\{} < ut-sor > \boldsymbol{\}}$
$< ut-sor >::=< utasitas > \mid < utasitas >; < ut-sor >$

**4.d.4**
EBNF-fel kiküszöbölhetjük az $< ut-sor >$ fogalmát:
$< blokk >::=$ '$\boldsymbol{\{}$' $< utasitas > \{; < utasitas >\}_0^\infty$ '$\boldsymbol{\}}$'

**5.a**

$< L >::=< E >< N >$

$< E >::= b < A > |b < A >< E >$

$< A >::= \varepsilon|a$

$< N >::= \varepsilon|aa < N > |b < N >$

**5.b**

$< L >::= c|b < abck >$

$< abck >::= \varepsilon| < A >< bcK >< abck >$

$< A >::= \varepsilon|a$

$< bcK >::=< bvc > | < bvc >< bcK >$

$< bvc >::= b|c$