Megoldások (B csoport)

2011/12/1 Formális nyelvek és automaták évfolyamzárthelyi

1. feladat: Építsen az $m = papapp$ mintához *KMP automatát*, majd döntse el, hogy az $u = papaapapapappap$ szóban megtalálható-e a minta az automata működésének az u bemeneten történő bemutatásával (azaz töltse ki az alábbi táblázatot, az első cellába az automata kezdőállapota kerüljön)!

Megoldás:

		a	p
$\rightarrow$	0	0	1
	1	2	1
	2	0	3
	3	4	1
	4	0	5
	5	4	6
$\leftarrow$	6	6	6

	p	a	p	a	a	p	a	p	a	p	a	p	p	a	p
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	4	5	6	6	6

2. feladat: Hozza 3-as normálformára az alábbi G nyelvtant (grammatikát), majd készítsen a tanult algoritmussal olyan *véges determinisztikus automatát* a nyelvtanhoz, mely a G által generált nyelvet ismeri fel! $G = \langle\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, \mathcal{P}, S\rangle$, ahol a $\mathcal{P}$ szabályrendszer a következő:

$$S \rightarrow abB \mid A \mid c$$
$$A \rightarrow ab \mid cB \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow bB \mid a \mid bA$$

Megoldás:

Láncmentesítés:

$S \rightarrow abB \mid ab \mid cB \mid \varepsilon \mid c$
$A \rightarrow ab \mid cB \mid \varepsilon$
$B \rightarrow bB \mid a \mid bA$

Hosszredukció (+ univerzális ε szabály):

$S \rightarrow aZ \mid aY \mid cB \mid \varepsilon \mid cF$ $\quad Z \rightarrow bB$
$A \rightarrow aY \mid cB \mid \varepsilon$ $\quad Y \rightarrow bF$
$B \rightarrow bB \mid aF \mid bA$ $\quad F \rightarrow \varepsilon$

NDA:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	S	$\{Y, Z\}$	$\{\}$	$\{B, F\}$
$\leftarrow$	A	$\{Y\}$	$\{\}$	$\{B\}$
	B	$\{F\}$	$\{A, B\}$	$\{\}$
	Z	$\{\}$	$\{B\}$	$\{\}$
	Y	$\{\}$	$\{F\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	F	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

VDA:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{S\}$	$\{Y, Z\}$	$\{\}$	$\{B, F\}$
	$\{Y, Z\}$	$\{\}$	$\{B, F\}$	$\{\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{B, F\}$	$\{F\}$	$\{A, B\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{F\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A, B\}$	$\{F, Y\}$	$\{A, B\}$	$\{B\}$
$\leftarrow$	$\{F, Y\}$	$\{\}$	$\{F\}$	$\{\}$
	$\{B\}$	$\{F\}$	$\{A, B\}$	$\{\}$

3. feladat: Készítse el az alábbi $\mathcal{A}$ véges determinisztikus automata *minimális automatáját* a tanult algoritmus alapján (összefüggővé alakítás, redukció)!
$\mathcal{A} = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_3, q_7, q_8\}\rangle$, a δ állapotátmenet függvény táblázattal:

		0	1
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_1
	q_1	q_2	q_3
$\leftarrow$	q_2	q_3	q_4
$\leftarrow$	q_3	q_4	q_2
	q_4	q_6	q_6
	q_5	q_9	q_6
	q_6	q_7	q_8
$\leftarrow$	q_7	q_8	q_0
$\leftarrow$	q_8	q_0	q_7
	q_9	q_0	q_5

Megoldás: $H_0 = \{q_0\}$, $H_1 = \{q_0, q_1\}$, $H_2 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $H_3 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $H_4 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$, $H_5 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_7, q_8\}$, $H_6 = H_5$. Elhagyható q_5, q_9.

$\overset{0}{\sim}$: $\{q_2, q_3, q_7, q_8\}(=: F), \{q_0, q_1, q_4, q_6\}(=: N)$;

	0	1
q_2	F	N
q_3	N	F
q_7	F	N
q_8	N	F

	0	1
q_0	N	N
q_1	F	F
q_4	N	N
q_6	F	F

$\overset{1}{\sim}$: $\{q_2, q_7\}(=: A), \{q_3, q_8\}(=: B), \{q_0, q_4\}(=: C), \{q_1, q_6\}(=: D)$;

	0	1
q_2	B	C
q_7	B	C

	0	1
q_3	C	A
q_8	C	A

	0	1
q_0	D	D
q_4	D	D

	0	1
q_1	A	B
q_6	A	B

$\overset{2}{\sim} = \overset{1}{\sim} = \sim$, tehát a minimális automata:

		0	1
$\to$	C	D	D
	D	A	B
$\leftarrow$	A	B	C
$\leftarrow$	B	C	A

4. feladat: A *CYK–algoritmus* segítségével döntse el, hogy a *bababa* szó levezethető-e a $G = \langle\{a, b\}, \{S, X, Y, Z\}, \mathcal{P}, S\rangle$ nyelvtanban, ahol a $\mathcal{P}$ szabályrendszer a következő:

$$
\begin{aligned}
&S \to XZ \,|\, ZZ \,|\, a\\
&X \to SS \,|\, YY \,|\, a\\
&Y \to XY \,|\, b\\
&Z \to SS \,|\, SY
\end{aligned}
$$

Megoldás:

$\{X, Z\}$					
$\{S, Y\}$	$\{X, Z\}$				
$\{\}$	$\{S, X\}$	$\{\}$			
$\{X\}$	$\{\}$	$\{X\}$	$\{\}$		
$\{\}$	$\{Y, Z\}$	$\{\}$	$\{Y, Z\}$	$\{\}$	
$\{Y\}$	$\{S, X\}$	$\{Y\}$	$\{S, X\}$	$\{Y\}$	$\{S, X\}$
b	a	b	a	b	a

Mivel $S \notin H_{1,6}$, ezért *bababa* $\notin L(G)$.

5. feladat: Legyen $L = \{a^i b^j \,|\, i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i > j\}$. Bizonyítsuk be, hogy $L \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$!

Megoldások:

$L \in \mathcal{L}_2$ bizonyításához megadjuk a nyelvet kettes típusú nyelvleíró eszközzel, pl (vagylagosan)
– környezetfüggetlen nyelvtannal: $S \to aSb \,|\, A$, $A \to a \,|\, aA$,
– EBNF-fel: <L> ::= a<L>b $|$ $\{a\}_1^\infty$ (Más jelöléssel: $\langle L\rangle$ ::= $a\langle L\rangle b \,|\, a@a$)
– egy vermes, üres veremmel elfogadó automatával:

$$
\begin{aligned}
&(S, a, \#) \to (S, a\#),\ (S, a, a) \to (S, aa),\ (S, \varepsilon, a) \to (V, \varepsilon),\\
&(V, b, a) \to (V, \varepsilon),\ (V, \varepsilon, a) \to (V, \varepsilon),\ (V, \varepsilon, \#) \to (V, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

$L \notin \mathcal{L}_3$ bizonyításához a Myhill-Nerode tétel szerint elég belátni, hogy végtelen sok maradéknyelve van. Ez utóbbi állítás pedig következik abból, hogy az $\{L_{a^i} \,|\, i \in \mathbb{N}_+\}$ maradéknyelv halmaz végtelen, aminek elégséges feltétele, hogy $i > k$ esetén $L_{a^i} \neq L_{a^k}$. Ez viszont közvetlenül adódik abból, hogy $i > k$ esetén $b^{i-1} \in L_{a^i}$, de $b^{i-1} \notin L_{a^k}$. A $b^{i-1} \in L_{a^i}$ pedig a maradéknyelv fogalma alapján következik az $a^i b^{i-1} \in L$ állításból, ami nyilvánvaló $i > (i-1)$ alapján. Hasonlóan, $b^{i-1} \notin L_{a^k}$ a maradéknyelv fogalma alapján következik az $a^k b^{i-1} \notin L$ állításból, ami nyilvánvaló $k \leq (i-1)$, azaz $k < i$ alapján.

$L \notin \mathcal{L}_3$ a "Kis" Bar-Hillel lemmából is következik. Tegyük fel ugyanis, hogy $L \in \mathcal{L}_3$ és tekintsük az $a^i b^{i-1} \in L$ szót! Ha i elég nagy, akkor a lemma szerint az a^i prefixben van nemüres, beiterálható részszó. Ez a^k alakú, ahol k pozitív egész szám. A nulladik iteráltat tekintve $a^{i-k} b^{i-1} \in L$, ahonnét L definíciója szerint $i - k > i - 1$. Innét az egyenlőtlenség mindkét oldalához $k - i + 1$-et hozzáadva $1 > k$ adódik, ami ellentmond annak, hogy k pozitív egész szám.