

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

A	B	C	Σ	J:

Prog. inf. I. (BSc.)

Minta vizsgadolgozat

2012. január 0.

Első rész (75 perc)

- A.** Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz 1 pontot ér. Az elégségeshez legalább 6 pontot kell szerezni ebből a feladatból. (15 pont)

1. Hány különböző lineáris kombinációja van két lineárisan független vektornak \mathbb{R}^5 -ben?

∞

2. Mi hiányzik az alábbi állításból, hogy annak egy ekvivalens megfogalmazását kapjuk, hogy $U \subseteq \mathbb{R}^5$ altér \mathbb{R}^5 -ben:
 $U \subseteq \mathbb{R}^5$ nem üres halmaz pontosan akkor altér, ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$, és ...

$\mathbf{u} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \mathbf{u} \in U$

3. Adjunk meg egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ vektort úgy, hogy \mathbf{v} -t hozzávéve az $\{[1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$ vektorhalmazhoz, bázist kapjunk \mathbb{R}^4 -ben.

Pl. $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

4. Mennyi lehet a rangja egy olyan 3×4 -es valós elemű nem nulla mátrixnak, melynek i -edik sorában ($1 \leq i \leq 3$ esetén) pontosan i darab nem nulla elem van, és a harmadik sor az első két sor összege?

2

5. Mondjunk példát 3 dimenziós altérre \mathbb{R}^5 -ben.

Pl. $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^5 \mid a_4 = a_5 = 0\}$.

6. Az A és B mátrixok AB szorzata létezik és 4×7 -es, továbbá mind az A -nak, mind a B -nek kevesebb sora van, mint oszlopa. Hány oszlopa lehet A -nak?

5 vagy 6.

7. Mi az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása, ha A négyzetes, és létezik neki inverze?

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$

8. Mondjunk legalább egy, a mátrixokon végrehajtható rangtartó átalakítást.

Sorcsere.

9. Mi lesz a $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és a $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ vektorok vektoriális szorzata, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$?

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

10. Hány inverzió van 5 elem „fordított” sorbarendezésében (azaz az 54321 permutációban)?

10

11. Számoljuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix második sorának harmadik eleméhez tartozó előjelezett aldeterminánst.

$A_{23} = -2$

12. Legyen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, melynek determinánsa -2 . Mi lesz $\det 3A^2$?

$$\det 3A^2 = 3^3(-2)^2 = 108$$

13. Legyen φ a sík tükrözése egy origón átmenő egyenesre, és legyen A a φ mátrixa valamely bázisban. Mik az A mátrix sajátértékei?

$$\text{Sajátértékek: } 1, -1$$

14. Legyen a φ lineáris transzformáció mátrixa (valamely bázisban) diagonalizálható, és tegyük föl, hogy φ karakterisztikus polinomja $k_\varphi(x) = x^6 + ax^4 + x^2$ valamely $a \in \mathbb{R}$ értékre. Hány dimenziós φ képtere?

$$\dim \mathcal{I}m \varphi = 4$$

15. Mi lehet a $c \in \mathbb{R}$ konstans értéke, ha a szokásos $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ euklideszi struktúrára nézve a $\mathbf{v} = (1 \ 2 \ 3 \ c)^T \in \mathbb{R}^4$ vektor normája 4?

$$c = \pm\sqrt{2}$$

- B.** Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz 2 pontot ér. Az elégségeshez legalább 4 pontot kell szerezni ebből a feladatból. (10 pont)

16. Definiáljuk egy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangját.

A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

17. Írjuk föl az $A \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ és a $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix $C = AB$ szorzatában a harmadik sor ötödik elemének a képletét.

$${}_3[C]_5 = \sum_{j=1}^m {}_3[A]_{j5} [B]_5$$

18. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha A és B négyzetes mátrixok, melyeknek a szorzata, AB létezik, akkor $\det(AB) = \det A \det B$.

19. Mit jelent, hogy egy V euklideszi térben az U és W alterek ortogonálisak egymásra?

U és W pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha minden $\mathbf{u} \in U$ és minden $\mathbf{w} \in W$ vektor merőleges egymásra: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

20. Mondjuk ki a lineáris leképezések egyértelmű kiterjesztési tételét.

Ha $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bázis \mathbb{R}^n -ben, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ pedig tetszőleges vektorok \mathbb{R}^k -ban, akkor létezik pontosan egy $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, melyre $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 pontot kell szerezni.

NÉV: _____

ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.)

Minta vizsgadolgozat/3

2012. január 0.

Második rész (45 perc)

C. Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimum-követelmény az elégségeshez.

21. Igazoljuk, hogy ha egy lineárisan független vektorrendszerhez hozzáveszünk egy új vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő, akkor az új vektor lineárisan függ a többi vektortól. (4 pont)

22. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a valós euklideszi terekre érvényes Cauchy-egyenlőtlenséget. (6 pont)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

0 – 14 :	1
15 – 18 :	2
19 – 22 :	3
23 – 26 :	4
27 – 35 :	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 0-án, pénteken 0 órakor a Déli tömb 11-111-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.