LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

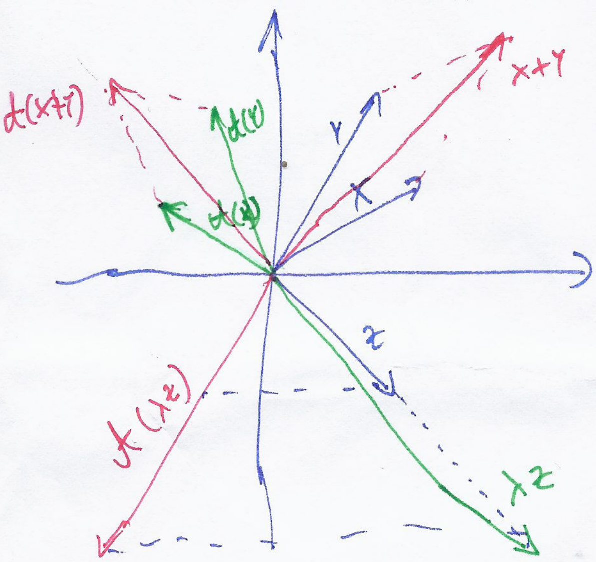
A LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK VEKTORTEREK KÖZÖTT ÉRTELMEZETTEK.

AZ $\mathcal{A}\ (V_1 \to V_2)$ LEKÉPEZÉS LINEÁRIS, HA

- ÖSSZEGTARTÓ: $\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x+y)\ \ \forall x, y \in V_1$-RE
- SKALÁRSZOROSTARTÓ: $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\, \mathcal{A}(x)\ \ \forall x \in V_1$-RE.

EGY L.L. TRANSZFORMÁCIÓ, HA $V_1 = V_2$. A TOVÁBBIAKBAN A SÍK ($\mathbb{R}^2$) TRANSZFORMÁCIÓIN KERESZTÜL MUTATOM BE A FOGALMAKAT.

A LEGALAPABB ALAP PÉLDA AZ Y TENGELYRE VALÓ TÜKRÖZÉS.

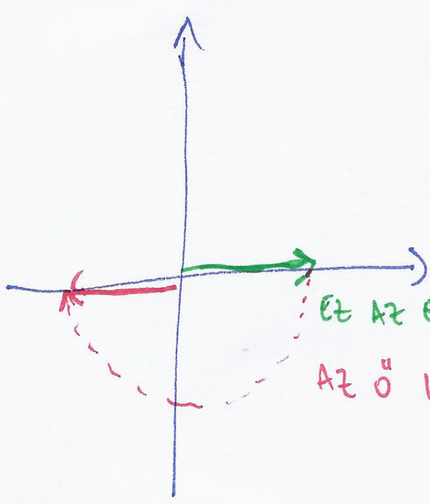


- VALÓBAN TELJESÜL AZ ÖSSZEGTARTÁS, HISZEN A KÉT ROMBUSZ EGYBEVÁGÓ

- A SKALÁRSZOROSTARTÁS IS MŰKÖDIK A MEGFELELŐ HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓK

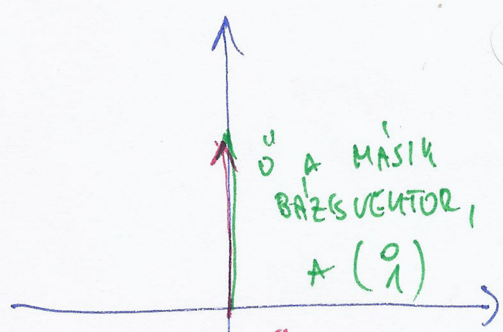
- EZ TEHÁT EGY TRANSZFORMÁCIÓ.

A TRANSZFORMÁCIÓ MÁTRIXÁT A BÁZISELEMEK KÉPEIVEL LEHET MEGKAPNI. NAGYON FONTOS, HOGY MÁS BÁZIS ESETÉN A MÁTRIX IS MÁS LESZ. A TRIVIÁLIS BÁZISBAN SZOKTUNK DOLGOZNI ÁLTALÁBAN.



EZ AZ EGYIK BÁZISVEKTOR, AZ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

AZ Ő KÉPE A $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$



Ő A MÁSIK BÁZISVEKTOR, A $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Ő HELYBEN MARAD, A KÉPE $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

A MÁTRIXBA A BÁZISELEMEK KÉPEI KERÜLNEK. TERMÉSZETESEN „ÖNMAGUKKAL KIFEJEZVE”, AZAZ

AZ $\binom{1}{0}$ KÉPE $\qquad$ A $\binom{0}{1}$ KÉPE

$$\begin{bmatrix} -1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha\binom{1}{0} = -1\cdot\binom{1}{0} + 0\cdot\binom{0}{1}$, EZ AZ ELSŐ OSZLOP. EZ AKKOR LESZ KEVÉSBÉ TRIVIÁLIS, HA MÁS LESZ A KIINDULÓ BÁZIS.

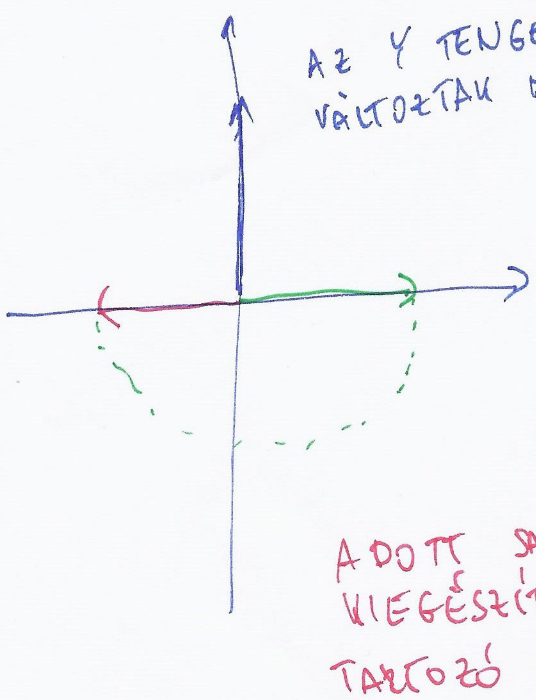
AZ, HOGY EZ A MÁTRIX, AZT JELENTI, HOGY TETSZŐLEGES VEKTOR KÉPE A MÁTRIXSZAL (BALRÓL) SZORZÁSSAL KAPHATÓ MEG

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

AZ $\binom{x}{y}$ VEKTOR KÉPE $\binom{-x}{y}$

A MÁTRIXSZAL FELÍRT LEKÉPEZÉSEK LINEARITÁSA KÖVETKEZIK A MÁTRIXMŰVELETEK MEGFELELŐ TULAJDONSÁGAIBÓL, HISZEN $Ax + Bx = (A+B)x$, ILLETVE $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$ (PERSZE HA EZEK ÉRTELMESEK).

EGY LEKÉPEZÉS SAJÁTVEKTORA x, HA x A LEKÉPEZÉS HATÁSÁRA A SAJÁT EGYENESÉBEN MARAD, AZAZ ÖNMAGA SKALÁRSZOROSÁRA VÁLTOZIK. HABÁR EZ IGAZ A NULLVEKTORRA IS, ŐT NEM TEKINTJÜK SAJÁTVEKTORNAK.
EGY LEKÉPEZÉS SAJÁTÉRTÉKE λ, HA LÉTEZIK OLYAN NEMNULLA x SAJÁTVEKTOR, AMI A λ-SZOROSÁRA VÁLTOZOTT MEG. A NULLA LEHET SAJÁTÉRTÉK.



AZ Y TENGELY VEKTORAI HELYBEN MARADTAK, ÖNMAGUK 1-SZERESÉRE VÁLTOZTAK MEG. ÍGY ŐK SAJÁTVEKTOROK, 1 SAJÁTÉRTÉKKEL.

AZ X TENGELY VEKTORAI A MÍNUSZ EGYSZERESÜKRE VÁLTOZTAK, ÍGY ŐK IS SAJÁTVEKTOROK, -1 SAJÁTÉRTÉKKEL.

ADOTT SAJÁTÉRTÉKHEZ TARTOZÓ SAJÁTVEKTOROK A NULLVEKTORRAL KIEGÉSZÍTVE ALTERET ALKOTNAK. TEHÁT A -1 SAJÁTÉRTÉKHEZ TARTOZÓ SAJÁTALTÉR AZ X TENGELY.

EGY LEKÉPEZÉS KÉPTERÉT AZON Y VEKTOROK ALKOTJÁK, AMIK ELŐFORDULNAK KÉPKÉNT, AZAZ AMIKEZ LÉTEZIK OLYAN $x \in V_1$, HOGY $A(x) = y$. A TENGELYES TÜKRÖZÉSBEN AZ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ VEKTORT A $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ VEKTORBÓL KAPHATJUK, EZÉRT ITT MINDEN VEKTOR FELLÉP KÉPKÉNT. A KÉPTÉR DIMENZIÓJA EZÉRT 2. EZ MINDIG MEGEGYEZIK A LEKÉPEZÉS MÁTRIXÁNAK RANGJÁVAL. $\rho \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$, VALÓBAN.

EGY LEKÉPEZÉS MAGTERE A NULLVEKTORBA KÉPEZŐDŐ NEMNULLA VEKTOROK HALMAZA, AZAZ A 0 SAJÁTÉRTÉKHEZ TARTOZÓ SAJÁTALTÉR. MIVEL ITT ILYEN VEKTOR NINCS, EZ "ÜRES", A DIMENZIÓJA 0.

EZEK A LEGKÖNNYEBBEN A KARAKTERISZTIKUS POLINOM SEGÍTSÉGÉVEL SZÁMOLHATÓK.

$$K_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I).$$

MAGYARUL A MÁTRIX FŐÁTLÓJÁNAK ELEMEIBŐL KIVONJUK A FÜGGETLEN VÁLTOZÓT, ÉS A KELETKEZETT MÁTRIX DETERMINÁNSÁRÓL VAN SZÓ.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda).$$

A SAJÁTÉRTÉKEK A KARAKTERISZTIKUS POLINOM GYÖKEI $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 1$.

A MAGTÉR ANNYI DIMENZIÓS, AHÁNYSZOROS GYÖKE A KARAKTERISZTIKUS POLINOMNAK A NULLA. ITT MOST UGYE EZ 0, HISZEN EGYÁLTALÁN NEM GYÖK.

A KÉPTERET $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, A MAGTERET $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ JELÖLI (A ZÁRÓJEL ELHAGYHATÓ).

A DIMENZIÓTÉTEL AZT MONDJA, HOGY HA $\mathcal{A}$ LINEÁRIS LEKÉPEZÉS, AKKOR

$$\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} + \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \dim V_1.$$

A KARAKTERISZTIKUS POLINOM EGYIK GYÖKE A −1. HOGY LESZNEK EBBŐL SAJÁTVEKTOROK? TEGYÜK FEL, HOGY $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ SAJÁTVEKTOR. AKKOR Ő A (−1)-SZERESÉRE VÁLTOZOTT, AZAZ $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ LETT BELŐLE. DE A TRAFÓ MÁTRIXÁBÓL AZ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ KÉPE $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. EZ ÍGY EGYSZERRE CSAK ÚGY FORDULHAT ELŐ, HA EZEK MEGEGYEZNEK

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

A VEKTOROK MEGEGYEZŐSÉGÉHEZ A KOMPONENSEIK EGYEZŐSÉGE KELL. $-x = -x$, EBBŐL x BÁRMILYEN VALÓS SZÁM LEHET, $-y = y$, AZAZ $y = 0$. TEHÁT AZ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ALAKÚ VEKTOROKRÓL, AZAZ AZ x TENGELYRŐL VAN SZÓ. EZ 1 DIMENZIÓS SAJÁTALTÉR.

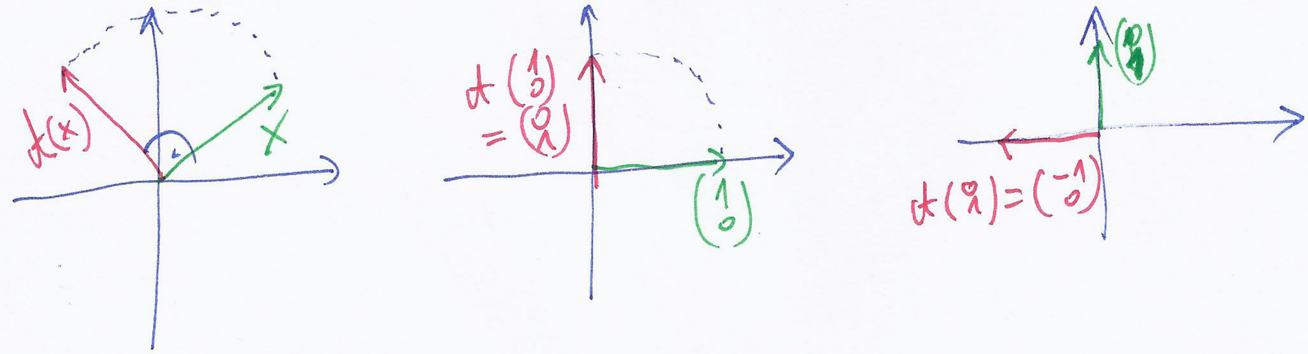
A MÁSIK GYÖK AZ 1. UGYANEZ A MÓDSZER. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$-BÓL $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ LETT, AZAZ

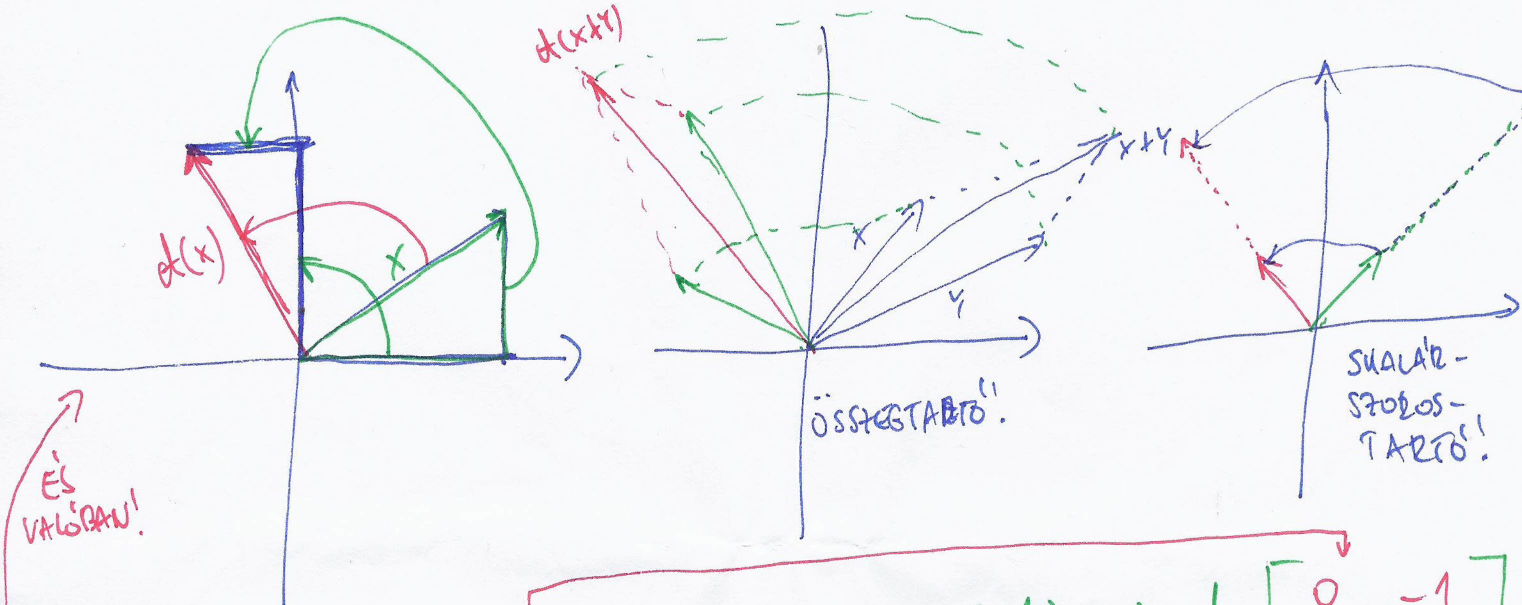
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}. \quad x = -x,\ x = 0;\ y = y,\ y \in \mathbb{R}.$$

EZ TEHÁT AZ $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ ALAKÚ VEKTOROK, y TENGELY FEDŐNEVŰ SAJÁTALTERE. AMI SZINTÉN 1 DIMENZIÓS.

HA AZ ÖSSZES SAJÁTALTÉR DIMENZIÓJÁNAK ÖSSZEGE PONTOSAN A VEKTORTÉR DIMENZIÓJA, AKKOR A MÁTRIX DIAGONALIZÁLHATÓ. $1+1=2$, PERSZE EZ TRIVIÁLIS VOLT, HISZEN A $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ MÁTRIX ELEVE DIAGONÁLIS. HA AZ ÖSSZEG KEVESEBB, AKKOR NEM DIAGONALIZÁLHATÓ, HA TÖBB, AKKOR ELSZÁMOLTAD.

KÖVETKEZŐ PÉLDA A 90 FOKKAL FORGATÁS





Az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ képe a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ képe a $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, ezért $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

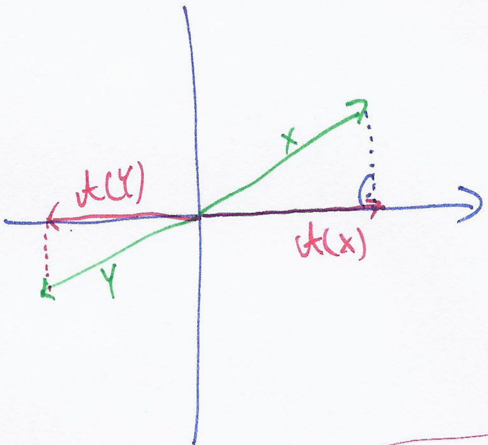
$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$$

SAJÁTVEKTOR NEM LESZ, HISZEN EGY NEMNULLA VEKTOR KÉPE MERŐLEGES AZ ALAPVEKTORRA.

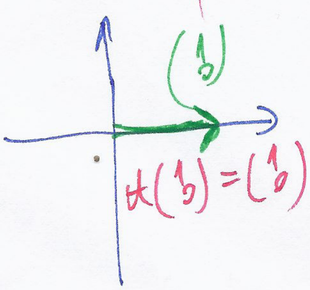
$$K_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$ ENNEK TÉNYLEG NINCS VALÓS GYÖKE.

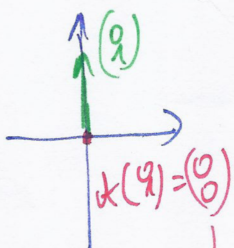
A MAGTÉR DIMENZIÓJA EZÉRT 0, A KÉPTERÉ PEDIG A DIMENZIÓTÉTELBŐL, VAGY A RANGBÓL 2. AZ Y VEKTORT -90 FOKKAL ELFORGATVA VALÓBAN MEGKAPHATÓ AZ AZ X VEKTOR, AMIRE $\mathcal{A}(x) = y$.

JÖN A MERŐLEGES VETÍTÉS AZ X TENGELYRE.



A LEKÉPEZÉS SORÁN ELTŰNIK (NULLÁVÁ VÁLIK) AZ Y KOORDINÁTA. MINDIG AZ A KOORDINÁTA TŰNIK EL, AMIRE A VETÍTÉS NEM VONATKOZIK (EZ TÉRBEN LESZ MAJD JELENTŐS). EZ MÁR IGAZOLJA A LINEARITÁST.





$$t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LÁTHATÓ, HOGY AZ X TENGELY VEKTORAI HELYBEN MARADNAK, ŐK LESZNEK AZ 1 SAJÁTÉRTÉKŰ SAJÁTVEKTOROK; AZ Y TENGELY VEKTORAI PEDIG BEMENNEK AZ ORIGÓBA, ŐK A 0 SAJÁTÉRTÉKŰ SAJÁTVEKTOROK.

A KARAKTERISZTIKUS POLINOM: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2 - \lambda$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0$

A GYÖKEI A SAJÁTÉRTÉKEK:

1-SZERES GYÖK A 0, EZÉRT A MAGTÉR 1 DIMENZIÓS, A KÉPTÉR $2-1=1$ DIMENZIÓS (A MÁTRIX RANGJA IS ENNYI PERSZE) MI LESZ A KÉPTÉR?

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{array}{c} x \\ y \\ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EZ BIZONY AZ X TENGELY, AMI VALÓBAN 1 DIMENZIÓS.

A MAGTÉR A 0 SAJÁTÉRTÉKHEZ TARTOZÓ SAJÁTALTÉR. HA CSAK ENNYI A KÉRDÉS, AKKOR KÖZVETLENÜL IS ELLENŐRIZHETŐ, MI KÉPZŐDIK A NULLVEKTORBA.

$$\mathcal{A}(v) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0,$$ y TETSZŐLEGES; EZEK AZ y TENGELY VEKTORAI. 1 DIMENZIÓS. A MÁSIK SAJÁTÉRTÉK AZ 1.

$$\mathcal{A}(v) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ $x = x$, EZ TETSZŐLEGES LEHET, $0 = y$, $y = 0$. EZ AZ 1 DIMENZIÓS x TENGELY.

A SAJÁTALTEREK DIMENZIÓINAK ÖSSZEGE $1+1=2$, A MÁTRIX DIAGONALIZÁLHATÓ.

A LEKÉPEZÉSEKET NEMCSAK SZÖVEGESEN LEHET MEGADNI, HANEM MÁTRIXSZAL VAGY "TERMÉSZETES MÓDON" IS. ELŐBBI ESETBEN NINCS SZÜKSÉG A LINEARITÁS IGAZOLÁSÁRA. MINDEN MÁTRIX MEGFELELTETHETŐ EGY LINEÁRIS LEKÉPEZÉSNEK, ÉS FORDÍTVA. A "MÁTRIX KÉPTERE" IS PERSZE A MEGFELELŐ LEKÉPEZÉS KÉPTERÉVEL EGYENLŐ. MUTATOK PÉLDÁT AZ UTÓBBI MEGADÁSRA.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \end{pmatrix}$$

AZ ILYEN FORMÁBAN MEGADOTT LEKÉPEZÉSEK MINDIG AKKOR LINEÁRISAK, HA A KÉPEK (HOMOGÉN) LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ ALAKÚAK. A MÁTRIXOT UGYANÚGY KELL ELKÉSZÍTENI, MINT AZ ELŐBB. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ KÉPE $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ KÉPE $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ KÉPE $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

VAJON MI LESZ AZ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ VEKTORBÓL?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \end{bmatrix}$$

MICSODA MEGLEPETÉS!!

ITT LÁTSZIK, HOGY MIÉRT CSAK A LINEÁRIS KOMBINÁCIÓK LESZNEK JÓK.

A KARAKTERISZTIKUS POLINOM
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$$

A GYÖKEI A SAJÁTÉRTÉKEK, AZAZ $\lambda_1 = 0$; NINCS VALÓS GYÖKE

A 0-HOZ TARTOZÓ SAJÁTALTÉR (MAGTÉR):

$$\begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = y = z$, VALÓS SZÁMOK. EZ 1 DIMENZIÓS. (VALÓBAN 1-SZERES GYÖK VOLT A NULLA).

A MÁTRIXOT NEM LEHET DIAGONALIZÁLNI (A VALÓS TEST FÖLÖTT!!!), MERT CSAK 1 A DIMENZIÓK ÖSSZEGE.

A KÉPTÉR 2 DIMENZIÓS. EBBEN BÁZIST A SZOKÁSOS MÓDON KERESÜNK. $(x-y)$ BÁRMI LEHET, $(y-z)$ IS, VISZONT $(z-x)$ MÁR KÖTÖTT (EZEK NEGÁLTJAINAK AZ ÖSSZEGE). A VEKTOROK TEHÁT $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix}$ ALAKÚAK, EBBEN BÁZIS $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ÉS $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A DIAGONALIZÁLHATÓSÁGNÁL NAGYON FONTOS, HOGY HA A MÁTRIXNAK VAN N KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKE, AKKOR BIZTOSAN DIAGONALIZÁLHATÓ (EZESETBEN MINDEGYIKNEK 1 A SAJÁTALTÉR DIMENZIÓJA). VISZONT HA NINCS N SAJÁTÉRTÉK, AKKOR IS LEHET DIAGONALIZÁLHATÓ. ITT VAN PÉLDAKÉNT AZ EGYSÉGMÁTRIX:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NEKI CSAK AZ 1 A SAJÁTÉRTÉKE, DE A HOZZÁ TARTOZÓ SAJÁTALTÉR 3 DIMENZIÓS (NYILVÁN MINDEN VEKTORT ÖNMAGÁBA KÉPEZ!)

FOLYTATÁSA KÖVETKEZIK!

MOSI PAJTÁS 2014-11-13