

Matematika példatár 6.

Lineáris algebra I.

Csordásné Marton , Melinda

Matematika példatár 6.: Lineáris algebra I.

Csordásné Marton , Melinda

Lektor: Dr. Pfeil , Tamás

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült.
A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Szerzői jog © 2010 Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Kivonat

A modul a determinánsokat és széleskörű alkalmazási lehetőségeiket mutatja be. Megismerjük a mátrixokat, a mátrixokkal végezhető műveleteket, a determinánsokat, és alkalmazzuk ezeket az ismereteket lineáris egyenletrendszerek megoldásához. Bemutatjuk a lineáris egyenletrendszerek megoldását a Cramer szabály és a Gauss elimináció felhasználásával. Definiáljuk a mátrix rangját, és megmutatjuk a rang és a megoldhatóság kapcsolatát.

Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi. Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizártlag a szerző írásos engedélyével lehetséges.

Tartalom

6. Lineáris algebra I.	1
1. 6.1 Bevezetés	1
2. 6.2 Mátrixok	1
3. 6.3 Determinánsok	3
3.1. 6.3.1 Feladatok	5
4. 6.4 Műveletek mátrixokkal	9
4.1. 6.4.7 Mátrix determinánsrangja	16
4.2. 6.4.8 Feladatok	16
5. 6.5 Lineáris egyenletrendszerek	18
5.1. 6.5.1 Lineáris egyenletrendszerek megoldása inverz mátrix segítségével	18
5.1.1. 6.5.1.1 Feladatok	20
5.2. 6.5.2 A Cramer szabály	21
5.2.1. 6.5.2.1 Feladatok	22
5.3. 6.5.3 A Cramer szabály alkalmazása inhomogén lineáris egyenletrendszerek megoldásánál, amikor az egyenletrendszer determinánsa nulla	23
5.3.1. 6.5.3.1 Feladatok	24
5.4. 6.5.4 Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása Cramer szabály alkalmazásával	25
5.4.1. 6.5.4.1 Feladatok	26
6. 6.6. Gauss elimináció	26
6.1. 6.6.1. Példa olyan lineáris egyenletrendszerre, amelynek nincs megoldása:	29
6.2. 6.6.2 Példa olyan lineáris egyenletrendszerre, amelynek végtelen sok megoldása van	30
6.3. 6.6.3 Példa homogén lineáris egyenletrendszer megoldására Gauss eliminációval	30
6.4. 6.6.4 Feladatok	31
7. 6.7 Tanácsok a lineáris egyenletrendszerek megoldásához	34
8. 6.8 Lineáris függetlenség	35
8.1. 6.8.1 Feladatok	36
8.2. Megoldások	37
9. 6.9 Mátrixok rangja	40
9.1. 6.8.2 Feladatok	42
10. 6.9 Összefoglalás	43

6. fejezet - Lineáris algebra I.

1. 6.1 Bevezetés

A hatodik modul a Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar Matematika II. tantárgyának lineáris algebra tananyaga alapján készült.

A modul feladatgyűjtemény jellegűen, a földmérő-földrendező nappali és levelező tagozatos hallgatók lineáris algebra tananyagát feladatok segítségével dolgozza fel. Ezeknek a feladatoknak egy része más feladatgyűjteményekben is megtalálható, de olyan speciális feladatokat is közlünk, amelyeket a karon szerzett több éves oktatói tapasztalataink alapján megoldásra érdemesnek és hasznosnak találtunk. Javasoljuk, hogy azok az érdeklődő hallgatók, akik még többet szeretnének gyakorolni, használják az irodalomjegyzékben felsorolt könyveket és példatárákat is.

A modul először a determinánsokkal, azok tulajdonságaival, és széleskörű alkalmazási lehetőségeik bemutatásával foglalkozik. Majd megismerkedünk a mátrixok világával, elsajátítjuk és gyakoroljuk a mátrixaritmetikai műveleteket. Az a célunk, hogy a fejezet feladatainak megoldását követően a hallgatók olyan biztos látásmóddal, tudással rendelkezzenek, amelyet majd könnyedén tudnak integrálni a mérnöki tanulmányai során felmerülő szakmai problémák megoldásához.

Részletesen tárgyaljuk a lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereit, amely ismereteket a következő modulban még tovább bővíünk. Definiáljuk a lineárisan összefüggő és független vektorokat. Megmutatjuk, hogy lehet ezeknek a fogalmaknak a felhasználásával szemléletesen áttekinteni és megoldani a lineáris egyenletrendszereket. Bevezetjük a mátrixok rangját. Azokra a kérdésekre keressük és adjuk meg a választ, hogy milyen esetben lehet megoldani egy lineáris egyenletrendszert, és hány megoldása lesz.

A modul a jobb áttekinthetőség kedvéért rövid alfejezetekre tagolódik. minden fejezet elméleti összefoglalóval kezdődik. Bármennyire fontos elméleti anyagról is van szó, a terjedelemre való tekintettel, törekednünk kellett a tömörségre, ezért bizonyítások a modulban nem szerepelnek.

A levelező tagozatos hallgatókra és a távoztatásban résztvevőkre gondolva, minden alfejezet részletesen kidolgozott mintafeladatokat tartalmaz. minden további megoldott feladatban már kevésbé részletesen közöljük az egyes lépéseket, végül pedig olyan feladatok következnek, ahol csak végeredményeket találunk. A végső cél az önálló feladatmegoldás, amely sikeres, egyúttal a megszerzett tudás ellenőrzését is jelenti.

Szeretnénk, ha a matematika iránt érdeklődő olvasók is szívesen és sikerélménnyel használnák a feladatgyűjteményt. Ezért nem célnak olyan nehéz feladatok kitűzése, amely olyan speciális ötleteket igényel, amely nem várható el egy átlagos matematikai érzékkel rendelkező olvasótól. Fő célunk a gyakoroltatás, az ismeretek mélyítése, annak megmutatása, hogy egy-egy problémát több oldalról közelítve sok megoldási lehetőség közül választhatunk. Reméljük, hogy ez a feladatgyűjtemény, amely hallgatóink kéréseit, és igényeit is figyelembe veszi, segíteni fogja őket abban, hogy elsajátítsák az új ismereteket, majd sikeresen alkalmazzák ezeket a későbbiekbén.

2. 6.2 Mátrixok

Legyenek $(1, 2, \dots)$, $1, 2, \dots \in (1, 2, \dots)$, $1, 2, \dots \in \dots$; és $(1, 2, \dots), 1, 2, \dots \in (1, 2, \dots), 1, 2, \dots \in \dots$ szám-n-esek. Jelölje

halmaz Descartes szorzatát. **Mátrixoknak** nevezük a két az

halmazon értelmezett valós számok halmazába képező $\rightarrow \rightarrow$ függvények halmazát. A függvény által a rendezett párhoz rendelt $\rightarrow \in \rightarrow \in$ számot a mátrix egy elemének nevezzük.

Majd a továbbiakban látni fogjuk, hogy nagyon megkönnyíti a mátrixokkal való számolást, ha elemeit az

elemet tartalmazó, téglalap alakú táblázatot, ahol jelöli a sorok számát, és jelöli az oszlopok számát. A táblázatot szokás szögletes vagy gömbölyű zárójelbe helyezni.

$$\begin{array}{|c c c c|} \hline 11 & 12 & \cdots & 1 \\ \hline 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 1 & 2 & \cdots & \end{array} \quad \begin{array}{|c c c c|} \hline 11 & 12 & \cdots & 1 \\ \hline 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 1 & 2 & \cdots & \end{array} \quad \text{vagy} \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Az első index mindig a sorindex, a második index pedig az oszlopindex. Tehát az elemet a táblázat

sorába és a -edik

oszlopába helyeztük. A továbbiakban az -edik

típusú mátrixok halmazát az szimbólummal jelöljük.

Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő, ha azonos típusúak, és a megfelelő helyen álló értékekben is megegyeznek.

Azaz $\in \in$ és $\in \in$ esetén $= =$, ha $=$, $= =$, $=$, és $= =$ minden i -re, ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$.

Az olyan mátrixokat, amelyek ugyanannyi sorból és oszlopból állnak, azaz $= =$, négyzetes vagy kvadratikus mátrixnak nevezzük. Az ilyen mátrix sorainak (vagy oszlopainak) a számát a négyzetes mátrix **rendjének** nevezik.

Az olyan mátrixokat, amelyeknek csak egy sora van, **sormátrixoknak**, amelynek csak egy oszlopa van, **oszlopmastrixoknak** nevezzük. A fentiekben említettekkel összhangban a sormátrixokat az , az oszlopmastrixokat az szimbólummal jelöljük. Ezen mátrixok halmaza és a rendezett szám-n-esek -- azaz -- között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, ezért gyakran azonos betűvel jelölünk egy sor vagy oszlopmastrixot, illetve egy -beli elemet, vagyis

$$:= \left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} \right) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv [1 \ 2 \ \cdots] := \left(\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots \end{matrix} \right) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv [1 \ 2 \ \cdots].$$

A továbbiakban a szövegkörnyezetből egyértelműen kiderül, hogy a fenti lehetőségek közül mire gondoltunk. Megjegyezzük, hogy szokták a sor, illetve oszlopmastrixokat **sor**, illetve **oszlopvektoroknak** is nevezni. Ezeket félkövér betűkkel jelöljük: , , , .

Nevezzük **egységmátrixnak** az olyan négyzetes mátrixot, amelynek főátlójában (a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átló) csak egyesek állnak, és az összes többi eleme nulla.

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A **diagonalmátrix** olyan négyzetes mátrix, amelyben a főátlója kivételével minden elem nulla.

Zérusmátrixnak vagy **nullmátrixnak** nevezzük azokat a mátrixokat, amelyeknek minden eleme nulla.

Természetesen az egységmátrix és a nullmátrix is diagonalmátrix.

Azt a négyzetes mátrixot, amelynek főátlójára való tükröképe önmaga (azaz minden elemére teljesül, hogy $= =$) **szimmetrikus** mátrixnak nevezzük.

Azt a négyzetes mátrixot, amelynek minden elemére teljesül, hogy $= - = - \quad (\ell = 1, \dots, n) \quad (\ell = 1, \dots, n)$ **antiszimmetrikus** mátrixnak nevezzük.

3. 6.3 Determinánsok

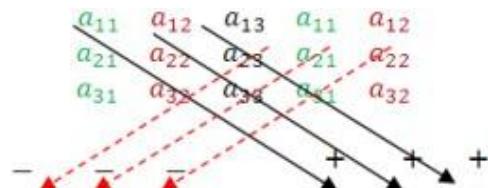
A determinánsok pontos definiálása olyan fogalmak ismeretét követelné, amelyek bevezetésére itt nincs módunk (Multilineáris, vagy n-lineáris antiszimmetrikus leképezések). Ezért, ami nálunk definícióként szerepel, az precízebb tárgyalás esetén valójában a determináns kiszámításának a módja.

Az $\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{vmatrix}$ elemekből alkotott $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix}$ kifejezés értékét a $(22)(22)$ -es mátrix **determinánsának** nevezzük. A determinánst úgy számoljuk ki, hogy a főátlóban (a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba mutató átló) lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát: $1122 - 12211122 - 1221$.

A harmadrendű determináns definíció szerint:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} := 112233 + 122331 + 132132 - 132231 - 112332 - 122133 - 112233 - 122331 - 132132 + 132231 + 112332 + 122133.$$

A kifejezés megjegyzését segíti a Sarrus szabály, amikor akár gondolatban, a mátrix mellé másoljuk az első két oszlopot, és a főátlóval egyező irányú vonalak mentén álló tagok szorzata pozitív előjellel, míg a mellékátlóval egyező irányú vonalak mentén álló tagok szorzata negatív előjellel szerepel a kifejezésben.



A determinánst megkaphatjuk bármely sora vagy oszlopa szerinti kifejtéssel is. Például az első sor szerinti kifejtésnél az első sor elemeit kell szorozni az adott elem sorának és oszlopának törlésével keletkezett aldeterminánnal. Az egyes szorzatok előjele a determináns kiszámításában pozitív, ha az elem oszlop és sorindexeinek az összege páros, és negatív, ha ezek összege páratlan. Az előjelek sakktáblaszerűen váltakoznak, ezért ezt szokták sakktáblaszabálynak is nevezni:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Nézzünk egy konkrét determináns meghatározását a két módszer szerint:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \cdot 5 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \cdot 5 = -8$$

Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$$

Fejtsük ki a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

Láthatóan könnyebb dolgunk van, ha egy determináns valamelyik sora, vagy oszlopa sok nullát tartalmaz.

Az n-ed rendű determináns meghatározása a **kifejtési téTEL** segítségével történik:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{vmatrix} = {}_{11} + {}_{12} + \cdots {}_1 = \sum_{=11} \begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{vmatrix} = {}_{11} + {}_{12} + \cdots {}_1 = \sum_{=11}$$

A kifejezésben az

mátrix elemhez tartozó $(-1)(-1)$ -ed rendű előjeles aldetermináns, amelyet az eredeti mátrixból úgy kapunk, hogy elhagyjuk az i-edik sorát és a k-adik oszlopát, és az így kapott $(-1)(-1)$ -edrendű mátrixból képzett determinánst megszorozzuk $(-1)^+(-1)^+$ előjellel. Az eljárást addig folytatjuk, amíg másodrendű determinánsokhoz nem jutunk. Így a determináns rekurzív definícióját adtuk meg.

A determinánsok meghatározása sokszor nagyon sok számolást igényel. Ha nem áll módunkban, vagy nem engedélyezett számítógép bevonása, akkor célszerű az alábbi tételek szerint a determináns egy sorát, vagy oszlopát úgy alakítani, hogy abban a lehető legtöbb nullát kapjuk, azaz „kinullázni” a determinánst.

A determinánsok elemi átalakításai:

- A determináns nem változik, ha a mátrix sorait és oszlopait felcseréljük, azaz az elemeit a föátlóra tükrözük.
- A determináns (-1)-szeresére változik, ha a mátrix szomszédos sorát (vagy oszlopát) felcseréljük.
- Ha a mátrix két sora vagy két oszlopa megegyezik, akkor a determináns nulla.
- Ha a mátrix valamely sorát vagy oszlopát megszorozzuk egy nullától különböző

számmal, akkor a determináns is

szorosára változik.

- A determináns nem változik, ha a mátrix valamely sorához, (vagy oszlopához) hozzáadjuk másik sor (vagy oszlop) számszorosát. Ezt a tulajdonságot érdemes felhasználni, hogy a determináns könnyebben számolhatóvá váljon. Különösen magasabb rendű determinánsok meghatározását segíti ez a tulajdonság.
- Ha a mátrix valamely sorában, vagy oszlopában csak nulla elemek találhatóak, akkor a determináns nulla.
- Ha egy mátrix főátlója alatt vagy felett minden elem nulla, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.
 - Ha két mátrix csak egy sorban, (vagy oszlopban) különbözik egymástól, akkor például

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 + 13 \\ 21 & 22 & 23 + 23 \\ 31 & 32 & 33 + 33 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 + 13 \\ 21 & 22 & 23 + 23 \\ 31 & 32 & 33 + 33 \end{vmatrix}$$

Nézzük, hogy az alábbi negyedrendű determinánst hogyan határozhatjuk meg az előbbiekben leírtak felhasználásával:

A determináns első sorát hozzáadjuk a második sorhoz, kivonjuk a negyedik sorból majd az első oszlopa szerint kifejtjük.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

3.1. 6.3.1 Feladatok

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \sin 2 & -\cos 2 & 1 \\ \sin & -\cos & \cos \\ \cos & \sin & \sin \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} \sin 2 & -\cos 2 & 1 \\ \sin & -\cos & \cos \\ \cos & \sin & \sin \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 1 + \cos & 1 + \sin & 1 \\ 1 - \sin & 1 + \cos & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\
 &= \begin{vmatrix} 1 + \cos & 1 + \sin & 1 \\ 1 - \sin & 1 + \cos & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\
 &= \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 - & 1 \\ 2 - & 1 \end{vmatrix}. \quad = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 - & 1 \\ 2 - & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1. Határozzuk

meg

értékét úgy, hogy a determináns értéke nulla legyen:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}, \\
 &\quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| \quad \right|.
 \end{aligned}$$

1. Bizonyítsuk be, hogy

2. Határozzuk meg a következő determinánsok deriváltját:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } &= \begin{vmatrix} 2 & +1 & 3 \\ 1 & 2-1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 & +1 & 3 \\ 1 & 2-1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}, \\
 \text{b. } &= \begin{vmatrix} \cos & \sin \\ \sin & \cos \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos & \sin \\ \sin & \cos \end{vmatrix}, \\
 \text{i. } &= \begin{vmatrix} \log_2 & 2 \\ 1+ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log_2 & 2 \\ 1+ & \end{vmatrix}, \\
 \text{a. } &= \begin{vmatrix} 1+^2 \\ \operatorname{tg}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+^2 \\ \operatorname{tg}^2 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Megoldások:

$$\begin{aligned}
 \text{1. } &= 0, \quad = -8, \quad = 100, \quad = -12, \quad = 15, \quad = 0, \quad = -8, \quad = 100, \quad = -12, \quad = 15, \\
 \text{t } &= 10, \quad = 270, \quad = 1, \quad \text{t } = 10, \quad = 270, \quad = 1.
 \end{aligned}$$

1. Az

determináns értékének a meghatározásához fejtsük ki a determinánst az első sora szerint:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \sin 2 & -\cos 2 & 1 \\ \sin & -\cos & \cos \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2 & -\cos 2 & 1 \\ \sin & -\cos & \cos \end{vmatrix} \\
 \sin 2 \begin{vmatrix} -\cos & \cos \\ \sin & \sin \end{vmatrix} - (-\cos 2) \begin{vmatrix} \sin & \cos \\ \cos & \sin \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin & -\cos \\ \cos & \sin \end{vmatrix} &= \sin 2[(-\sin \cos - \sin \cos)] + \cos 2(\sin^2 - \cos^2) + (\sin^2 + \cos^2) = \sin 2(-\sin 2) + \cos 2(-\cos 2) + 1 = \\
 -(\sin^2 + \cos^2) + 1 &= -1 + 1 = 0 \\
 \sin 2 \begin{vmatrix} -\cos & \cos \\ \sin & \sin \end{vmatrix} - (-\cos 2) \begin{vmatrix} \sin & \cos \\ \cos & \sin \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin & -\cos \\ \cos & \sin \end{vmatrix} &= \sin 2[(-\sin \cos - \sin \cos)] + \cos 2(\sin^2 - \cos^2) + (\sin^2 + \cos^2) = \sin 2(-\sin 2) + \cos 2(-\cos 2) + 1 = \\
 -(\sin^2 + \cos^2) + 1 &= -1 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

A

determináns értékének a meghatározásához alkalmazzuk a Sarrus szabályt:

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{ccc|cc} 1+\cos & 1+\sin & 1 & 1+\cos & 1+\sin \\ 1-\sin & 1+\cos & 1 & 1-\sin & 1+\cos \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \Rightarrow \\
 &= (1+\cos)^2 + 1 + \sin + 1 - \sin - (1 + \cos + 1 + \cos + 1 - \sin^2) \\
 &= 1 + 2\cos + \cos^2 + 2 - (2 + 2\cos + 1 - \sin^2) = \sin^2 + \cos^2 = 1 \\
 &= 1 + 2\cos + \cos^2 + 2 - (2 + 2\cos + 1 - \sin^2) = \sin^2 + \cos^2 = 1
 \end{aligned}$$

A

determináns értékének a meghatározásához alkalmazzuk a Sarrus szabályt:

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{ccccc|ccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \right|, \text{ tehát} \\
 &= 3(+)-[(+)^3 + 3^3 + 3^3] + 3^2 + 3^2 - (3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3) = -2(3^3 + 3^3) \\
 &= 3(+)-[(+)^3 + 3^3 + 3^3] + 3^2 + 3^2 - (3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3) = -2(3^3 + 3^3)
 \end{aligned}$$

A

determináns meghatározásához cseréljük meg az első oszlopot a harmadik oszloppal. Így a determináns értéke (-1) -gyel szorzódik. Ekkor egy nevezetes determinánst a **Vandermonde determinánst** kaptuk. Az [1](#); [2](#); ... [1](#); [2](#); ... számokhoz tartozó Vandermonde-féle determináns:

$$\begin{aligned}
 (1; 2; \dots) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & -1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \\
 (2-1)(3-1)(3-2) \dots (-1)(-2) \dots (-(-1)) &(2-1)(3-1)(3-2) \dots (-1)(-2) \dots (-(-1))
 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1; 2) = -(-)(-) = 1$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1; 2) = -(-)(-) = 1$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Felhasználtuk, hogy ha egy determináns két oszlopa azonos, akkor az értékük nulla.

1. A determinánst fejtsük ki az első oszlopa szerint:

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 5 - 6 = 0 \rightarrow \text{az } 1. \text{ oszlop } \text{az } 2. \text{ oszlop } \text{szorozata}$$

$$1. = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow = -\frac{12}{29} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow = -\frac{12}{29}$$

2. A determináns első oszlopát szorozzuk másodikat

val, a másodikat

vel, a harmadikat pedig

vel, és osztunk is abc-vel:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right| =$$

Emeljünk ki az első sorból

második -t, a sorból

a harmadik -t, és sorból

így a bizonyítandó azonosságot kapjuk.

1. A determinánst kifejtjük, majd az így kapott kifejezést deriváljuk.

$$= \begin{vmatrix} 2 & +1 & 3 \\ 1 & 2-1 & 3 \\ 0 & 12^2 & 5 \end{vmatrix} = -6 - 4^3 + 2^2 + 5 + 2 = \begin{vmatrix} 2 & +1 & 3 \\ 1 & 2-1 & 3 \\ 0 & 12^2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4^3 + 2^2 + 5 + 2$$

, így

a. $' = -2 \sin 2, ' = -2 \sin 2.$

i. $' = \frac{1}{2} - (1+) = \frac{1}{2} - (1+)$

a. $' = -2 - 1 = -2 - 1$

4. 6.4 Műveletek mátrixokkal

Mátrixok transzponáltja

Ha a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, akkor a mátrix transzponáltjához jutunk. **Jele:** . Ha $\in \in$, akkor a transzponálás eredményeképpen egy $\in \in$ mátrixot kapunk. Az

edrendű négyzetes mátrix típusa nem változik a művelet során.

Például:

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 9 & 11 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 9 & 11 & -20 \end{bmatrix}, \text{akkor } = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -5 & 11 \\ 6 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -5 & 11 \\ 6 & -20 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{akkor } = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mátrixok összeadása, kivonása

A mátrixok közötti összeadás (és kivonás), valamint a számmal való szorzás művelete hasonlóan a valós értékű függvényekhez

Legyen

\in két azonos típusú mátrix. A két mátrix összegén azt az

-es

mátrixot értjük, amelynek minden eleme

és

megfelelő elemeinek összegzésével, (vagy kivonásával) állítható elő. Tehát minden megfelelő

-re, -

re $= + = +$, vagy $= - = -$ Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Az összeadás kommutatív, asszociatív, és teljesül, hogy $(+) = + (+) = +$.

Mátrix szorzása skalárral

Egy mátrix

skalárral való szorzása egy eredetivel azonos típusú mátrixot eredményez, melynek minden eleme az eredeti mátrix minden eleménének

szorosa, azaz $= =$ mátrix minden elemét úgy kapjuk, hogy $= =$ minden megfelelő

re. Például:

$$4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Mátrixok lineáris kombinációja

A fenti két művelet segítségével definiálhatjuk mátrixok lineáris kombinációját is. Legyenek $\dots, \dots, \dots, \in \mathbb{E}$ azonos típusú mátrixok, és $1, 2, \dots, 1, 2, \dots$ valós számok. Ekkor a mátrixok lineáris kombinációja alatt a $\sum_{=1} \in \sum_{=1} \in$ mátrixot értjük.

Mátrix szorzása mátrixszal

A fentek alapján azt tekintenénk logikusnak, hogy két mátrix szorzatát úgy értelmezünk, mint azonos értelmezési tartománnal rendelkező, valós értékű függvények szorzatát. A mátrixok és a mátrixműveletek szorosan kapcsolódnak többek között a lineáris egyenletrendszerek és a lineáris leképezések elméletéhez. Ezek megismerését követően válik nyilvánvalóvá, hogy a mátrixok szorzatát miért érdemes az alábbi módon definiálni.

A mátrixok szorzásának általános definícióját készítük elő két vektor skaláris szorzatának a felidézésével. Két

dimenziós

és

vektor skaláris szorzatán, vagy skalárszorzatán értjük azt a valós számot, amelyet úgy kapunk, hogy

és

azonos indexű koordinátáit összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk. Jele:

Látni fogjuk, hogy célszerű az első tényezőt sor a második tényezőt oszlopvektor formájában felírni. Tehát:

$$= [1 \quad 2 \quad \cdots] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} = 1_1 + 2_2 + \cdots + = \sum_{i=1}^n.$$

A skaláris szorzat segítségével definiálhatjuk két mátrix skaláris szorzatát abban az esetben, ha az első mátrix (a szorzáskor az első tényező) oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix (szorzáskor a második tényező) sorainak a számával. A mátrixszorzást csak ebben ez esetben értelmezzük. Azokat a mátrixokat, amelyek egy meghatározott sorrendben összeszorozhatóak **konformábilisoknak** nevezzük. Még mielőtt rátérnéink a szorzás definiciójára vegyük észre, hogy

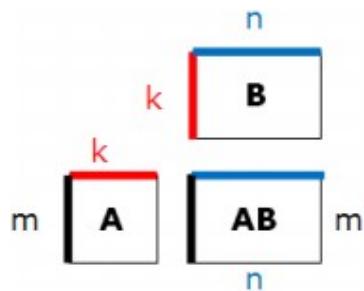
- a szorzásban szereplő mátrixok különböző típusúak, és maga a szorzat esetleg egy újabb típusú mátrix, ugyanis

típusú	mátrix	szorzása	egy
--------	--------	----------	-----

típusú	mátrixszal	egy
--------	------------	-----

típusú mátrixot eredményez.

Tehát $0\mathbf{O} = \mathbf{O}0 =$, ahogy ezt az alábbi ábra is illusztrálja.



- Vannak olyan mátrixok, amelyeket nem lehet összeszorozni.
- A mátrixszorzás nem kommutatív.

Legyen

egy

típusú	és
--------	----

egy

típusú	mátrix,	azaz	az
--------	---------	------	----

mátrix	oszlopainak	a	száma	megegyezik	a
--------	-------------	---	-------	------------	---

mátrix	sorainak	a	számával.	A	két	mátrix	szorzatán	azt	az
--------	----------	---	-----------	---	-----	--------	-----------	-----	----

típusú

mátrixot értjük, amelynek minden elemére teljesül az alábbi egyenlőség:

$$= [1 \ 2 \ \cdots] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} = _{11} + _{22} + \cdots + , = 1, \dots, = 1, \dots$$

$$= [1 \ 2 \ \cdots] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} = _{11} + _{22} + \cdots + , = 1, \dots, = 1, \dots$$

A definíció alapján könnyen igazolható, hogy a mátrixszorzás asszociatív, és egyszerű ellenpélda megadása bizonyítja, hogy a mátrixszorzás nem kommutatív.

A mátrixok szorzása disztributív, azaz $(+ \cdot) = + \cdot (+)$ = + és $(+ \cdot) = + \cdot (+) = +$. Mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, minden két egyenlőséget fel kell, hogy írjuk.

Ha az

és a

-val

jelölt nullmátrix egymással konformábilisak, akkor $= = =$.

Itt válik világossá az egységmátrix választásának oka, ugyanis ha

és

egymással konformábilisak, azaz

és

azonos méretűek, akkor $= = = =$.

A mátrixszorzás egyik érdekes tulajdonsága, hogy $= =$ lehetséges úgy, hogy sem

sem

pedig

nem

nullmátrix. Ezt azért tartjuk érdekesnek, mert a valós számok körében ez nem így van.

Példa: $= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ és $= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ mátrixok egyike sem nullmátrix, de $= =$.

Értelmezzük a kvadratikus mátrixok nemnegatív egész kitevőjű hatványait rekurzív módon, tehát

$${}^0 := {}^0 := ,$$

$${}^1 := ,$$

$${}^2 =: \cdot ,$$

$${}^3 =: {}^2 \cdot {}^3 =: {}^2 \cdot ,$$

$$:= - \cdot \geq 4 := - \cdot \geq 4 \text{ esetén.}$$

Előfordulhat, hogy a hatványozás során nullmátrixtól különböző mátrix nullmátrixot eredményez. Ha $= 0 = 0$ az akkor

mátrix nilpotens mátrix, és az a legkisebb kitevő, amelyre

-t

hatványozva nullmátrixot kapunk, a nilpotencia foka.

A mátrixszorzás átláthatóbb elvégzését segíti az ún. Falk séma használata.

$$:= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}; := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor:}$$

		<i>B</i>	1	0	-1	
<i>A</i>		2	1	6		
3	2	7	2	9		$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$
1	4	9	4	23		$1 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 23$
2	1	4	1	4		
0	1	2	1	6		
6	8	22	8	22		

1. ábra

Az alsó sor egy ellenőrzési lehetőséget a *Falk oszlopösszeg próbá*t mutatja. A mátrix oszlopait összeadjuk, és az eredményeket beírjuk az alsó kékkal jelölt kiegészítő sorba. Ezután a szorzást elvégezzük ezzel a kiegészítő sorral is, amit \cdot mátrix alá írunk. Ha a számítás jó volt, akkor a sor minden eleme megegyezik a felette lévő \cdot szorzatmátrix oszlopában szereplő számok összegével.

Mátrix adjungáltja

Egy

négyzetes

mátrix adjungált mátrixának vagy röviden adjungáltjának nevezzük az

$$= \begin{bmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 21 & \cdots & 1 \\ 12 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{bmatrix}$$

 az

az

-adik

 -edik
nátrix

-edik

-adik

eleméhez tartozó előjeles aldetermináns. Vagyis

$$= \begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{vmatrix}.$$

Emlékeztetünk az előjeles aldetermináns képzésére:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{vmatrix} \rightarrow = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \cdots & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{vmatrix} \rightarrow = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \cdots & \end{vmatrix}.$$

Igazolható, hogy

$$\cdot 0 = 0 \cdot = 0 \cdot = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Példa: Határozzuk meg az mátrix adjungáltját!

$$= \begin{bmatrix} |1 & 1| & -|2 & 1| & |2 & 1| \\ |2 & -1| & |0 & -1| & |0 & 2| \\ -|0 & 1| & |1 & 1| & -|1 & 0| \\ |2 & 1| & -|1 & 1| & |1 & 0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz mátrix

A mátrixok körében definiáltuk a mátrixok összegét és szorzatát. Felvetődik a kérdés, hogy van-e lehetőség a mátrixok körében a reciprok műveletét bevezetni. Pillanatnyilag nem érthető, hogy miért lenne ez hasznos, de a későbbiekben kiderül, hogy ha tudjuk a mátrixszorzás inverz műveletét definiálni, akkor a lineáris egyenletrendszerek megoldásának elméletében ez nagyon hasznos eszközzé fog válni.

Regulárisnak nevezzük azokat a négyzetes mátrixokat, amelyek determinánsa nem nulla.

Az inverz mátrix fogalmát négyzetes, reguláris mátrixokra vezetjük be.

Legyen

négyzetes, reguláris mátrix. Ha van egy olyan ,

négyzetes mátrix, amelyre $= =$ és $= =$ akkor $= =$.

Szorozzuk az $= =$ $=$ mátrixegyenletet balról

mátrixszal:

$$0 = = .$$

Szorozzuk a $= =$ $=$ mátrixegyenletet jobbról a

mátrixszal:

$$0 = = .$$

Mivel a fenti két egyenlet bal oldala azonos, ezért

$$= .$$

Definíció:

Ha

négyzetes, reguláris mátrix, akkor

inverz mátrixán azt a

mátrixot értjük, amelyre

$$= = .$$

Vezessük be a következő jelölést: $\bar{A} := A^{-1}$.

Az inverz mátrix könnyen megadható az $\cdot 0 = 0 \cdot = 0 \cdot \cdot 0 = 0 \cdot = 0 \cdot$ összefüggés segítségével. Mivel

reguláris, az egyenletet a $\neq \neq$ számmal osztva

$$\cdot = \cdot = ,$$

amelyből látható, hogy

$$\boxed{-^{-1} = \text{.}}$$

Ha egy négyzetes mátrix nem reguláris ($\det(A) = 0$), akkor nincs inverz mátrixa.

Belátható, hogy

$$\begin{aligned} (-1)^{-1} &= \text{.}, \\ 0^{-1} &= (-1), \\ 0^{-1} &= -1^{-1}. \end{aligned}$$

4.1. 6.4.7 Mátrix determinánsrangja

Az

mátrix

determinánsrangja

van olyan -es aldeterminánsa, ami nem nulla, de bármely nagyobb rendű aldeterminánsa, már nulla.

-nél

4.2. 6.4.8 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi mátrixok $2 + 4 - 2 + 4 -$ lineáris kombinációját:

$$= [2 \ 3 \ 4], \quad = [0 \ -1 \ 2], \quad = [1 \ -1 \ 0].$$

1. Oldja meg az $2 + 4 - 2 + 4 -$ mátrixegyenletet, ahol

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Végezze el a kijelölt szorzásokat, amennyiben az értelmezett!

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad = [2 \ -2 \ 1], \quad = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$0 \cdot, \quad 0 \cdot,$

$0 \cdot, \quad 0 \cdot.$

1. Határozza meg az

mátrix hiányzó elemeit úgy, hogy $\det(A) = \det(B)$ legyen:

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet úgy, hogy $\cdot = \cdot = \cdot$ legyen, ha

az ismeretlen mátrix:

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Ellenőrizze, hogy helyesen adtuk-e meg az alábbi mátrix inverzét:

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját:

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldások:

1. $\cdot \cdot \cdot$ mátrixok szorzatának a meghatározása:

A				B		
1	0	-3		1	0	-3
2	0	1		2	0	1
3	1	3		1	1	3
4	-1	4		1	-1	4
0	2	4	1	1	0	-1
0	2	4	1	0	2	4

2. ábra

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. mátrix inverzének a meghatározása:

$$= \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

$$-\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1. \text{ a)} = \mathbf{0} = \mathbf{0}, \text{ b)} = \mathbf{2}, \text{ c)} = \mathbf{3}, \text{ d)} = \mathbf{3} = \mathbf{3}.$$

5. 6.5 Lineáris egyenletrendszer

A lineáris egyenletrendszer általános alakja

egyenlet és ismeretlen esetén:

$$\begin{array}{cccccc} 1_{11} & +1_{12} & \dots & +1_n & = & 1 \\ 2_{11} & +2_{12} & \dots & +2_n & = & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1_1 & +2_2 & \dots & + & = & . \end{array}$$

Az egyenletrendszerben szereplő együtthatók és konstansok valós számok.

A lineáris egyenletrendszer megoldásán a valós számok olyan $1, 2, \dots, 1, 2, \dots$ sorozatát értjük, amelyekre a fenti egyenletek teljesülnek.

Ha az egyenletrendszer jobb oldalán lévő konstans tagok mindegyike nulla, akkor **homogén** lineáris egyenletrendszerről beszélünk. Ha e konstansok között van olyan, amelyik nem nulla, akkor **inhomogén** lineáris egyenletrendszerrrel találkoztunk.

A feladatunk az, hogy keressük meg a lineáris egyenletrendszerek megoldását. Megoldhatóság szempontjából lehetséges, hogy a lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, pontosan egy megoldása van, vagy egynél több megoldása van, amely jelen esetben végtelen sok megoldást jelent.

Ebben a fejezetben azokra a kérdésekre keressük a választ, hogy

- (1) mi a feltétele az egyenletrendszer megoldhatóságának,
- (2) megoldhatóság esetén hány megoldás van,
- (3) hogy kell az egyenletrendszert megoldani, és a megoldásokat áttekinthető formában közölni.

5.1. 6.5.1 Lineáris egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével

Tekintsük azt a speciális lineáris egyenletrendszert, amelyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:

$$\begin{array}{cccccc} 1_{11} & +1_{12} & \dots & +1_n & = & 1 \\ 2_{11} & +2_{12} & \dots & +2_n & = & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1_1 & +2_2 & \dots & + & = & . \end{array}$$

az

lmazó

.ncksak

dimenziós oszlopvektort:

$$:= \begin{bmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1 \\ 21 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \end{bmatrix}, \quad := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}, \quad := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Az előzőekben ismertetett mátrixműveletek felhasználásával a lineáris egyenletrendszer a fenti jelölések felhasználásával az $\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{mátrixegyenletként} \end{matrix}$ írható fel. Ekkor a megoldhatóság feltétele, hogy a mátrix inverze létezzen, ez pedig akkor teljesül, ha az egyenletrendszer determinánsa nem nulla.

Szorozzuk az $\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{mátrixegyenletet} \end{matrix}$ balról $\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{matrix}$ -gyel, ekkor

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{matrix}$$

egyenletet kapjuk. Felhasználva, hogy $\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{a mátrixegyenlet megoldása:} \end{matrix}$

$$\boxed{\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{matrix}}.$$

Példa: Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket inverz mátrix felhasználásával!

$$\begin{array}{rrrcl} 1 & -2 & +3 & = & 0 \\ 2 & 1 & +2 & +3 & = 1 \\ 1 & -6 & +3 & = & -1 \end{array}$$

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

A mátrixot transponálni kell!

$$A^{-1} = \frac{1}{det A} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 9 & -5 & -13 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -13 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

			0
			1
			-1
9	-3	-2	-1
-5	2	1	1
-13	5	3	2

3. ábra

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{rcl} -1 & -1 & +2 \\ -2 & +1 & +2 \\ -1 & -6 & +6 \end{array} = \begin{array}{rcl} 0 & -1 & +2 \\ 1 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & +6 \end{array} = \begin{array}{rcl} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

Megoldások: Ellenőrzés:

5.1.1. 6.5.1.1 Feladatok

Oldjuk meg a következő egyenletrendszeret inverz mátrix felhasználásával!

$$\begin{array}{l} 3_1 + 3_3 = 23_1 + 3_3 = 2 \\ 2_1 + 2_2 + 3_3 = 12_1 + 2_2 + 3_3 = 1 \\ 1. \quad 1 - 2 - 3 = 1_1 - 2 - 3 = 1 \\ \\ 1 + 2 + 3 = 2_1 + 2 + 3 = 2 \\ 2 + 3 = 4 \quad 2 + 3 = 4 \\ 2. \quad 1 + 2_3 = 6_1 + 2_3 = 6 \\ \\ 1 - 2 + 2_3 = -1_1 - 2 + 2_3 = -1 \\ 2_1 + 2 - 3 = 9_2_1 + 2 - 3 = 9 \\ 3. \quad -1 + 2_2 + 3 = 0 - 1 + 2_2 + 3 = 0 \\ \\ 1 - 2 + 2_3 = 14_1 - 2 + 2_3 = 14 \\ 2_1 + 2 - 3 = 0_2_1 + 2 - 3 = 0 \\ 4. \quad -1 + 2_2 + 3 = 28 - 1 + 2_2 + 3 = 28 \\ \\ 1 - 2_2 + 3 = 0_1 - 2_2 + 3 = 0 \\ 3_1 + 2 - 2_3 = -13_1 + 2 - 2_3 = -1 \\ 5. \quad 2_1 + 2_2 - 3 = 32_1 + 2_2 - 3 = 3 \end{array}$$

Megoldások:

$$1. \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3_1 & + 3_3 & = & 2 \\ 2_1 & + 2_2 + 3_3 & = & 1 \\ 1 & - 2 - 3 & = & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 3_1 & + 3_3 & = & 2 \\ 2_1 & + 2_2 + 3_3 & = & 1 \\ 1 & - 2 - 3 & = & 1 \end{array} \right| = -1, = -1,$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$- = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$- = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -7 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

A^{-1}			b	2
-1	1	2	1	1
-5	4	7	1	1
4	-3	-6	-1	-1

4. ábra

= -

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} 3 & -1 & = 2 \\ 2 & +2 & -3 = 1 \\ 1 & +1 & -1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3 & -1 & = 2 \\ 2 & +2 & -3 = 1 \\ 1 & +1 & -1 = 1 \end{array}$$

Megoldások: Ellenőrzés: 1. 1. 1.

$$1. \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & +2 & +3 & 2 \\ 2 & +3 & & 4 \\ 1 & +2_3 & = 6 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & +2 & +3 & 2 \\ 2 & +3 & & 4 \\ 1 & +2_3 & = 6 \end{array} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow - = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow - = \begin{bmatrix} 1 & = -2 \\ 2 & = 0 \\ 3 & = 4 \end{bmatrix}.$$

$$1. \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +2_3 & -1 \\ 2_1 & +2 & -3 & 9 \\ -1 & +2_2 & +3 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +2_3 & -1 \\ 2_1 & +2 & -3 & 9 \\ -1 & +2_2 & +3 & 0 \end{array} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow - = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} \Rightarrow - = \begin{bmatrix} 1 & = 3 \\ 2 & = 2 \\ 3 & = -1 \end{bmatrix}.$$

1. $1 = 1, 2 = 9, 3 = 11$, $1 = 1, 2 = 9, 3 = 11$.

2. $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3$, $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3$.

5.2. 6.5.2 A Cramer szabály

Ha $\in \in \in \neq 0 \neq 0$, akkor az $\cdot = \cdot =$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldás az $= =$, $(= 1, 2, \dots)$, $(= 1, 2, \dots)$ ahol a determinánst úgy kapjuk meg, hogy

a -ben oszlop helyére a jobb oldali konstansokat, azaz -edik azaz

vektor koordinátáit írjuk.

$$= \frac{\begin{vmatrix} 11 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 21 & \cdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 21 & \cdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 21 & \cdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 21 & \cdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}, = 1, 2, \dots, = 1, 2, \dots,$$

A mátrixszorzás szabályai szerint ugyanis $1 \cdot 1$ éppen az $- -$ mátrix első sorának és a

vektornak a szorzata:

$$= - \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = - \frac{1}{\begin{vmatrix} 11 & 21 & \cdots & 1 \\ 12 & 22 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$_1 = \frac{1}{\begin{vmatrix} 11 & 21 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1_{11} + 2_{21} + \cdots + 1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Például:

$$\boxed{\begin{array}{rrrcl} +4 & +2 & = & 5 \\ -3 & +2 & + & = & -1 \\ 4 & - & - & = & 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{rrrcl} +4 & +2 & = & 5 \\ -3 & +2 & + & = & -1 \\ 4 & - & - & = & 2 \end{array}}$$

Példa:

$$\text{Az egyenletrendszer determinánsa: } = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow = \frac{-7}{-7} = 1. \quad = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow = \frac{-7}{-7} = 1.$$

Az első oszlop helyére beírtuk a konstans tagokat.

A determináns második és harmadik oszlop változatlan.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow = \frac{0}{-7} = 0.$$

A második oszlop helyére beírtuk a konstans tagokat.

A determináns első és harmadik oszlop változatlan.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Az harmadik oszlop helyére beírtuk a konstans tagokat.

A determináns első és második oszlop változatlan.

5.2.1. 6.5.2.1 Feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Cramer szabály felhasználásával:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{array}{rrrcl} 1 & -2_2 & +_3 & = & 2 \\ 1 & +8_2 & -6_3 & = & -5 \\ 6_1 & +10_2 & +3_3 & = & 46 \end{array} \quad \begin{array}{rrrcl} 1 & -2_2 & +_3 & = & 2 \\ 1 & +8_2 & -6_3 & = & -5 \\ 10_1 & +10_2 & +3_3 & = & 46 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \begin{array}{rrrcl} 1 & -2_2 & +_3 & = & 0 \\ 3_1 & +_2 & -2_3 & = & -13 \\ 2_1 & +_2 & -3_3 & = & 32 \end{array} \quad \begin{array}{rrrcl} 1 & -2_2 & +_3 & = & 0 \\ 1 & +_2 & -2_3 & = & -1 \\ 2 & +_2 & -3_3 & = & 3 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccccc}
 & + & +2 & +3 & = & 1 & + & +2 & +3 & = & 1 \\
 3 & - & - & -2 & = & -4 & 3 & - & - & -2 & = & -4 \\
 2 & +3 & - & - & = & -6 & 2 & +3 & - & - & = & -6 \\
 3. & +2 & +3 & - & = & -4 & +2 & +3 & - & = & -4
 \end{array}$$

Megoldások:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2_2 & +3 & = & 2 \\ 1 & +8_2 & -6_3 & = & -5 \\ 6_1 & +10_2 & +3_3 & = & 4 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2_2 & +3 & = & 2 \\ 1 & +8_2 & -6_3 & = & -5 \\ 6_1 & +10_2 & +3_3 & = & 4 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$= 124, \quad _1 = 104, \quad _2 = -35, \quad _3 = 74.$$

$$1 = \frac{104}{124}, \quad 2 = -\frac{35}{124}, \quad 3 = \frac{74}{124} = \frac{104}{124}, \quad 2 = -\frac{35}{124}, \quad 3 = \frac{74}{124}.$$

$$1. \quad 1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 3. \quad 1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 3.$$

$$2. \quad 1 = 2 = -1, \quad 3 = 0, \quad 4 = 1. \quad 1 = 2 = -1, \quad 3 = 0, \quad 4 = 1.$$

5.3. 6.5.3 A Cramer szabály alkalmazása inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásánál, amikor az egyenletrendszer determinánsa nulla

Ha $\in \in \in = = 0 = = 0$, akkor az $\cdot = \cdot =$ egyenletrendszer vagy nem oldható meg, vagy pedig végtelen sok megoldása van.

Példa: Oldjuk meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszeret a Cramer szabály alkalmazásával:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & +2 & -3 & = & 6 \\ 3_1 & -2_2 & +5_3 & = & 3 \\ 6_1 & +2 & +2_3 & = & 21 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tekintsük az egyenletrendszer determinánsát:

Könnyen látható, hogy ha az első egyenlet háromszorosát hozzáadjuk a második egyenlethez, akkor a harmadik egyenletet kapjuk. Ezeket az összefüggéseket az egyenletrendszer determinánsának vizsgálata során vehetjük észre legegyszerűbben. Hagyjuk el a harmadik egyenletet, majd rendezzük az egyenleteket úgy, hogy 33 az egyes egyenletek jobb oldalára kerüljön:

$$\begin{array}{l}
 1 +_2 -_3 = 6 \Rightarrow 1 +_2 = 6 +_3, \\
 1 +_2 -_3 = 6 \Rightarrow 1 +_2 = 6 +_3,
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3_1 -2_2 +5_3 = 3 \Rightarrow 3_1 -2_2 = 3 -5_3, \\
 3_1 -2_2 +5_3 = 3 \Rightarrow 3_1 -2_2 = 3 -5_3.
 \end{array}$$

Írjuk fel az így kapott két egyenletből álló egyenletrendszer bal oldalán álló együtthatóiból képzett determinánst:

$$* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 * = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

determináns nem nulla, alkalmazhatjuk a Cramer szabályt, de most a

$$= \begin{bmatrix} 6 & +_3 \\ 3 & -5_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & +_3 \\ 3 & -5_3 \end{bmatrix}$$

konstansvektort az egyenletrendszer jobb oldalán álló kifejezéssel helyettesítjük:
Így

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & +3 & 1 \\ 3 & -5_3 & -2 \\ -5 & \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}(-12 - 2_3 - 3 + 5_3) = 3 - \frac{3}{5}_3,$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & +3 \\ 3 & 3 & -5_3 \\ -5 & \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}(3 - 5_3 - 18 - 3_3) = 3 + \frac{8}{5}_3.$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & +3 \\ 3 & 3 & -5_3 \\ -5 & \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}(3 - 5_3 - 18 - 3_3) = 3 + \frac{8}{5}_3.$$

Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$z_1 = 3 - \frac{3}{5}_3, \quad z_2 = 3 + \frac{8}{5}_3, \quad z_3 \in \mathbb{R}, \quad z_1 = 3 - \frac{3}{5}_3, \quad z_2 = 3 + \frac{8}{5}_3, \quad z_3 \in \mathbb{R}$$

szabad ismeretlen.

Az egyenletrendszer egy speciális megoldását, amikor a szabad ismeretlenet nullának választjuk **bázismegoldásnak** nevezzük: $z_1 = 3, z_2 = 3, z_3 = 0, z_1 = 3, z_2 = 3, z_3 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldásának egyik gyors ellenőrzési módja a bázismegoldás ellenőrzése.

Az egyenletrendszer egy másik megoldását, amikor a szabad ismeretlenet tetszőlegesen megválaszthatjuk, **partikuláris megoldásnak** nevezzük:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 11, \quad z_3 = 5.$$

Ellenőrizzük a partikuláris megoldást:

$$\begin{array}{rcccl} +11 & -5 & = & 6 \\ -22 & +25 & = & 3 \\ 11 & +10 & = & 21. \end{array}$$

5.3.1. 6.5.3.1 Feladatok

$$\begin{array}{lll} z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \\ z_2 & -6z_2 & -3z_3 = -6 \\ a. \quad -z_1 & +3z_2 & -2z_3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \\ 2z_1 & -6z_2 & -3z_3 = -6 \\ -z_1 & +3z_2 & -2z_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} z_1 & -2z_2 & +z_3 = 1 \\ -2z_1 & +z_2 & -3z_3 = 2 \\ b. \quad -3z_2 & -z_3 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{lll} z_1 & -2z_2 & +z_3 = 1 \\ 2z_1 & -2z_2 & +z_2 & -3z_3 = 2 \\ -3z_2 & -z_3 = 4 \end{array}$$

Megoldások:

$\begin{array}{lll} z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \\ z_2 & -6z_2 & -3z_3 = -6 \\ -z_1 & +3z_2 & -2z_3 = 3 \end{array}$	$\begin{array}{lll} z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \\ 2z_1 & -6z_2 & -3z_3 = -6 \\ -z_1 & +3z_2 & -2z_3 = 3 \end{array}$
---	--

$= 0 = 0$, ami azért nem meglepő, mert látható, hogy a harmadik egyenlet mínusz egyszerese az első egyenletnek. Hagyjuk el a harmadik egyenletet, és vigyük át az $\underline{33}$ kifejezéseket az egyenletek jobb oldalára:

$$\begin{array}{lll} z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \Rightarrow z_1 & -3z_2 = -3 & -2z_3 \\ z_1 & -3z_2 & +2z_3 = -3 \Rightarrow z_1 & -3z_2 = -3 & -2z_3, \end{array}$$

$$2z_1 & -2z_2 & -3z_3 = -6 \Rightarrow 2z_1 & -6z_2 & = -6 & +3z_3.$$

$* = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$, enletből álló egyenletrendszer determinánsát, akkor nullát kapunk:

Ez nem meglepő, mert az egyenlet bal oldalán álló kifejezésekéről látható, hogy a második az elsőnek kétszerese.

Mi ilyenkor a teendő? Látható, hogy $\underline{3} = \underline{0}_3 = \underline{0}$ megoldás esetén a második egyenlet kétszerese az elsőnek, $\underline{3} \neq \underline{0}_3 \neq \underline{0}$ esetén pedig nincs megfelelő $\underline{1}, \underline{2}, \underline{1}, \underline{2}$.

Általános megoldás:

$\underline{1} - \underline{3}_2 = -3 \Rightarrow \underline{1} = -3 + \underline{3}_2$, $\underline{1} - \underline{3}_2 = -3 \Rightarrow \underline{1} = -3 + \underline{3}_2$, ahol $\underline{1}, \underline{2}$ kötött ismeretlen.

$\underline{2} \in \underline{2} \in$ szabad ismeretlen és $\underline{3} = \underline{0}_3 = \underline{0}$ kötött ismeretlen.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -\underline{2}_2 & +\underline{3} & \underline{1} \\ -\underline{2}_1 & +\underline{2} & -\underline{3}_3 & \underline{2} \\ -\underline{3}_2 & -\underline{3} & & \underline{4} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -\underline{2}_2 & +\underline{3} & \underline{1} \\ -\underline{2}_1 & +\underline{2} & -\underline{3}_3 & \underline{2} \\ -\underline{3}_2 & -\underline{3} & & \underline{4} \end{array} \right|$$

a.

$$\underline{1} = -\frac{5}{3}\underline{3} - \frac{5}{3}\underline{1} = -\frac{5}{3}\underline{3} - \frac{5}{3},$$

$$\underline{2} = -\frac{1}{3}\underline{3} - \frac{4}{3}\underline{2} = -\frac{1}{3}\underline{3} - \frac{4}{3},$$

$\underline{3} \in \underline{3} \in$ szabad ismeretlen.

5.4. 6.5.4 Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása Cramer szabály alkalmazásával

Ha egy lineáris egyenletrendszer jobb oldalán álló konstans tagok mindegyike zérus, akkor homogén lineáris egyenletrendszerről beszélünk. Ezeknek az egyenletrendszereknek minden van megoldása, az úgynévezett triviális megoldás, amikor minden ismeretlenet nullának választunk. A feladatunk éppen a triviálistól különböző megoldások megtalálása. Belátható, hogy ha van triviálistól különböző megoldás, akkor ez egyben azt is jelenti, hogy végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

A homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa zérus. Ekkor az egyenletrendszer triviálistól különböző megoldásait az alábbi módon kapjuk:

$\underline{1}: \underline{2}: \underline{3} = \underline{11}: \underline{12}: \underline{13} \underline{1}: \underline{2}: \underline{3} = \underline{11}: \underline{12}: \underline{13}$ ahol $\underline{11}, \underline{12}, \underline{13} \underline{11}, \underline{12}, \underline{13}$ nullától különböző előjeles aldeterminánsok.

Példa: Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert a Cramer szabály alkalmazásával:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \underline{1} & +\underline{2}_2 & +\underline{3} & \underline{0} \\ +\underline{3}_2 & +\underline{2}_3 & & \underline{0} \\ \underline{5}_1 & +\underline{4}_2 & +\underline{3} & \underline{0} \end{array} \right|$$

Először határozzuk meg az egyenletrendszer determinánsát:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ tehát az egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása. Ezt a következő összefüggés segítségével határozhatjuk meg:}$$

$$\underline{1}: \underline{2}: \underline{3} = \underline{11}: \underline{12}: \underline{13} \underline{1}: \underline{2}: \underline{3} = \underline{11}: \underline{12}: \underline{13}, \text{ ahol}$$

$$\begin{array}{l} \text{..} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \text{..} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{..} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \\ \text{..} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \text{..} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{..} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -15 \end{array}$$

Ebből következik, hogy $\begin{matrix} 1:2:3 = (-5):10:(-15) \Rightarrow 1 = , 2 = -2, 3 = 3 \\ 1:2:3 = (-5):10:(-15) \Rightarrow 1 = , 2 = -2, 3 = 3 \end{matrix}$ ahol $\in \in$ szabadon választható, tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

5.4.1. 6.5.4.1 Feladatok

$$\begin{array}{ll} 1. & \begin{array}{ccccccccc} 1 & +2_2 & +_3 & = & 0 & 1 & +2_2 & +_3 & = & 0 \\ 3_1 & -2_2 & +2_3 & = & 0 & 3_1 & -2_2 & +2_3 & = & 0 \\ 6_1 & +4_2 & +5_3 & = & 0 & 6_1 & +4_2 & +5_3 & = & 0 \end{array} \\ \\ 2. & \begin{array}{ccccccccc} 1 & -3_2 & +2_3 & = & 0 & 1 & -3_2 & +2_3 & = & 0 \\ 2_1 & +3_2 & -_3 & = & 0 & 2_1 & +3_2 & -_3 & = & 0 \\ 8_1 & +3_2 & -5_3 & = & 0 & 8_1 & +3_2 & -5_3 & = & 0 \end{array} \\ \\ 3. & \begin{array}{ccccccccc} 5_1 & & +2_3 & = & 0 & 5_1 & & +2_3 & = & 0 \\ 1 & +_2 & +_3 & = & 0 & 1 & +_2 & +_3 & = & 0 \\ -2_1 & -2_2 & -2_3 & = & 0 & -2_1 & -2_2 & -2_3 & = & 0 \end{array} \end{array}$$

Megoldások:

1. $1 = 6, 2 = , 3 = -8, \in 1 = 6, 2 = , 3 = -8, \in$
2. $\neq 0 \neq 0$ ezért az egyenletrendszernek nincs triviálistól különböző megoldása.
3. $1 = 2, 2 = 3, 3 = -5, \in 1 = 2, 2 = 3, 3 = -5, \in$.

6. 6.6. Gauss elimináció

Az eddigiekben olyan lineáris egyenletrendszereket oldottunk meg, amelyekben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen. Az eddig ismertetett megoldási módszerek csak az ilyen speciálisnak tekinthető esetekben voltak alkalmazhatóak. **Nagyon fontos**, hogy a lineáris egyenletrendszerek általában nem ugyanannyi egyenletből állnak, mint amennyi ismeretlenet tartalmaznak. Tehát a lineáris egyenletrendszer általános alakja

egyenlet, és

ismeretlen esetén:

$$\begin{array}{ccccccccc} 111 & +122 & \dots & +_1 & = & 1 \\ 211 & +222 & \dots & +_2 & = & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 11 & +22 & \dots & + & = & . \end{array}$$

Ilyen esetben a lineáris egyenletrendszerek megoldását a **Gauss elimináció** segítségével adhatjuk meg.

Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha pontosan ugyanazok a megoldásai. A Gauss elimináció során az egyenletrendszerekkel olyan átalakításokat végezünk, amelyek az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert eredményeznek. Az átalakításoknak az a célja, hogy olyan alakba írjuk fel az egyenletrendszereket, amelyekből a megoldás már könnyen megadható.

A lineáris egyenletrendszer elemi ekvivalens átalakításai:

- Szabad ez egyenletrendszerben szereplő egyenleteket nullától különböző valós számmal, skalárral szorozni.
- Szabad az egyenletrendszer valamelyik egyenletének skalárszorosát egy másik egyenlethez hozzáadni.
- Szabad az egyenleteket felcserélni.
- Azokat az egyenleteket, amelyekben valamennyi együttható és a konstans tag is nulla, elhagyhatjuk.

A Gauss elimináció megértése érdekében nézzük az alábbi mintafeladatot:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +_2 & -_3 & +_4 & = & 8 \\ 2 & 1 & +_2 & -_3 & -_4 & = & 3 \\ 1 & +_2 & -_3 & -2_4 & = & 0 \\ 1 & -2 & -3 & +3_4 & = & 12. \end{array}$$

Az elemi ekvivalens átalakítások segítségével az egyenletrendszerből egymás után *kiküszöböljük* az ismeretleneket. Először, ha az egyenletrendszer eleve nem úgy adott, az egyenleteket úgy cseréljük egymással, hogy az első egyenlet $\underline{\underline{1111}}$ együtthatója ne legyen nulla. Ezt követően az első egyenletet osztjuk $\underline{\underline{1111}}$ -gyel, majd az alábbiakban részletezett lépésekkel minden további egyenletből kiküszöböljük $\underline{\underline{11}}$ -et:

$\begin{array}{cccc c} 1 & +_2 & -_3 & +_4 & = & 8 \\ 2 & 1 & +_2 & -_3 & -_4 & = & 3 \\ 1 & +_2 & -_3 & -2_4 & = & 0 \\ 1 & -2 & -3 & +3_4 & = & 12. \end{array}$	Az első egyenlet (-2) szeresét hozzáadjuk a második egyenlethez. Az első egyenlet (-1) szeresét hozzáadjuk a harmadik és a negyedik egyenlethez.
--	--

Ezzel az átalakítással egy olyan egyenletrendszerhez jutunk, amelyben az első egyenlet kivételével, egyik egyenlet sem tartalmazza az $\underline{\underline{11}}$ ismeretlenet. A továbbiakban csak a második egyenlettől lefelé végzünk átalakításokat:

$\begin{array}{cccc c} 1 & +_2 & -_3 & +_4 & = & 8 \\ -2 & +_3 & -3_4 & = & -13 \\ +_2 & +2_3 & -3_4 & = & -8 \\ -2_2 & +2_4 & = & 4. \end{array}$	A második egyenletet hozzáadjuk a harmadik egyenlethez. A második egyenlet kétszeresét hozzáadjuk a negyedik egyenlethez.
--	---

Ezzel az átalakítással olyan egyenletrendszerhez jutunk, amely a harmadik és a negyedik egyenletből $\underline{\underline{11}}$ mellett az $\underline{\underline{22}}$ ismeretlenet is kiküszöbölte:

$\begin{array}{cccc c} 1 & +_2 & -_3 & +_4 & = & 8 \\ -2 & +_3 & -3_4 & = & -13 \\ +3_3 & -6_4 & = & -21 \\ -2_3 & +8_4 & = & 30, \end{array}$	A harmadik egyenletet osztjuk hárommal, a negyedik egyenletet pedig kettővel.
$\begin{array}{cccc c} 1 & +_2 & -_3 & +_4 & = & 8 \\ -2 & +_3 & -3_4 & = & -13 \\ +3 & -2_4 & = & -7 \\ -3 & +4_4 & = & 15. \end{array}$	A harmadik egyenletet hozzáadjuk a negyedik egyenlethez.

Ezzel az átalakítással olyan egyenletrendszerhez jutunk, amely a negyedik egyenletből kiküszöböli az $\underline{\underline{33}}$ ismeretlenetet:

$$\begin{array}{rcl} 1 & +_2 & -_3 & +_4 = & 8 \\ & -2 & +_3 & -3_4 = & -13 \\ & & +_3 & -2_4 = & -7 \\ & & & +2_4 = & 8. \end{array}$$

Az ekvivalens átalakításokat követően az egyenletrendszer megoldása:

$$2_4 = 8 \Rightarrow = 2_4 = 8 \Rightarrow =$$

A kapott eredményt a harmadik egyenletbe helyettesítve:

$$3 - 2_4 = -7,$$

$$3 - 8 = -7 \Rightarrow = 3 - 8 = -7 \Rightarrow =$$

A kapott eredményt a második egyenletbe helyettesítve:

$$-2 + 3 - 3_4 = -13 \quad -2 + 3 - 3_4 = -13,$$

$$-2 + 1 - 12 = -13 \Rightarrow = \quad -2 + 1 - 12 = -13 \Rightarrow =$$

A kapott eredményt az első egyenletbe helyettesítve:

$$1 + 2 - 3 + 4 = 8,$$

$$1 + 2 - 1 + 4 = 8 \Rightarrow =.$$

A jobb áttekinthetőség és egyúttal a gyorsabb megoldás érdekében szorítkozhatunk csupán az egyenletrendszerben szereplő együtthatók és állandók leírására, hiszen észrevehetjük, hogy csak ezek változnak.

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa az $(\text{I}) (\text{II})$ mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy együtthatómátrixot egy további oszloppal, az egyenletrendszer jobb oldalán álló állandók oszlopával bővíjtük. Látható, hogy az egyenletrendszerrel végzett elemi átalakítások a kibővített mátrix alábbi átalakításainak felelnek meg:

- A mátrix valamely sorát egy nullától különböző skalárral szorozzuk.
- Valamelyik sorhoz egy másik sor számszorosát hozzáadjuk.
- Két sort felcserélünk.
- A csak nullát tartalmazó sorokat elhagyjuk.

A fenti egyenlet megoldása kibővített mátrix felhasználásával így írható. A $\sim \sim$ az ekvivalens átalakítást követően kapott mátrixot jelöli. Ez természetesen nem ugyanaz a mátrix, de a segítségével felírható egyenletrendszer ekvivalens az öt megelőzővel:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 12 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 30 \end{array} \right| \\ \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| \\ \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| \end{array}$$

A kibővített mátrix segítségével végzett megoldásból világosan látszik az eljárás. Felülről lefelé történő átalakításokkal olyan mátrixhoz jutunk, amelyben az első sor kivételével minden sor nullával kezdődik. A következő lépésekben második sor második eleme nem nulla, de attól lefelé minden második elem nulla lesz.

Az eljárás tovább finomítható. Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy minden sorban az első nemnulla elem mindig legyen egyes. Nevezzük ezeket *vezéregyeseknek*. A vezéregyesek alatti elemek nullák. Ezt az alakot nevezzük *lépcsősoros* alaknak, rövidítve LA

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

A mátrix negyedik sorából következik, hogy $\underline{4} = 4_4 = 4$.

Az $\underline{4}$ ismeretlen a mátrix harmadik sorába helyettesítve következik:

$$\underline{3} - 2\underline{4} = -7 \Rightarrow \underline{3} = 1.$$

A mátrix második sorából következik: $\underline{2} - \underline{3} + 3\underline{3} = 13 \Rightarrow \underline{2} = 2_2 - \underline{3} + 3\underline{3} = 13 \Rightarrow \underline{2} = 2$.

A mátrix első sorába helyettesítve: $\underline{1} + \underline{2} - \underline{3} + \underline{4} = 8 \Rightarrow \underline{1} = 3_1 + \underline{2} - \underline{3} + \underline{4} = 8 \Rightarrow \underline{1} = 3$.

Ezt követően a lépcsősoros alakból a vezéregyesek fölötti elemeket is kinullázhatjuk, így a *redukált lépcsősoros alakhoz* jutunk. Kétségkívül ebből az alakból olvasható le leg könnyebben a megoldás, ahogy ez az alábbi példából is látható:

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

Redukált lépcsősoros alak:

Megoldás a redukált lépcsősoros alakból: $\underline{1} = 3, \underline{2} = 2, \underline{3} = 1, \underline{4} = 4_1 = 3, \underline{2} = 2, \underline{3} = 1, \underline{4} = 4$.

Ugyanakkor az is praktikus tanács, hogy sokszor elég, kevesebb számolással, a lépcsősoros alakig eljutnunk, mert már abból is könnyen számítható a megoldás.

6.1. 6.6.1. Példa olyan lineáris egyenletrendszerre, amelynek nincs megoldása:

$$\begin{aligned} \underline{1} - 8\underline{2} + 9\underline{3} &= -32 \\ 2\underline{1} - \underline{2} + 3\underline{3} &= -1 \\ \underline{1} + 2\underline{2} - \underline{3} &= 12. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa, és elemi átalakításai:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 10 & 10 & 44 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 5 & -5 & 21 \\ 0 & 5 & 5 & 22 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Az egyenletrendszer nem oldható meg, mert a harmadik sorban az együtthatók nullák, de a jobb oldalon lévő konstans tag nem nulla. Ha megoldható lenne, az azt jelentené, hogy van olyan valós szám, amelyet nullával szorzva nem nullát kapunk eredményül, ami nyilván nem igaz, mert $0 \cdot \underline{1} + 0 \cdot \underline{2} + 0 \cdot \underline{3} \neq 1$

$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \neq 1$. Összefoglaló néven a kibővített mátrix ilyen sorait *tilos soroknak* nevezik. A lineáris egyenletrendszer nem oldható meg, ha tilos sort tartalmaz.

6.2. 6.6.2 Példa olyan lineáris egyenletrendszerre, amelynek végtelen sok megoldása van

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszeret

$$\begin{array}{rcl} 2 & -3 & -4 = -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & +2 & 3 \\ 2_1 & -3_2 & -3_4 = -7 \\ 3 & -7 & +3 & -5_4 = -8. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array} \right] \sim$$

Az első sort megcseréljük a második sorral.

Az első sor minusz kétszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Az első sor minusz háromszorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz.

A második egyenlet minusz ötszörösét hozzáadjuk a harmadik és a negyedik egyenlethez.

$$\rightarrow \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Elhagyjuk a harmadik és a negyedik sort. Az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 1 & -4 & 2 & +2 & 3 = -1 \\ 2 & -3 & -4 = -1. \end{aligned}$$

Legyen z_3 és z_4 szabad ismeretlen, akkor $z_1 = z_3 + z_4 - 1$, $z_2 = z_3 + z_4 - 1$, és ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $z_1 = 4(z_3 + z_4 - 1) - 2z_3 - 1 = 2z_3 + 4z_4 - 5$.

Az egyenletrendszer általános megoldása:

$= [2_3 + 4_4 - 5 \ z_3 + z_4 - 1 \ z_3 \ z_4] = [2_3 + 4_4 - 5 \ z_3 + z_4 - 1 \ z_3 \ z_4]$, ahol $z_3, z_4 \in \mathbb{R}$, tehát az egyenlet-rendszernek végtelen sok megoldása van.

Az egyenletrendszer **bázismegoldását** kapjuk, ha a szabad ismeretleneket nullának választjuk: $= [-5 \ -1 \ 0 \ 0] = [-5 \ -1 \ 0 \ 0]$.

Ha a szabad ismeretleneket tetszőlegesen választjuk, akkor az egyenletrendszer **partikuláris** megoldását kapjuk: $= [5 \ 2 \ 1 \ 2] = [5 \ 2 \ 1 \ 2]$.

6.3. 6.6.3 Példa homogén lineáris egyenletrendszer megoldására Gauss eliminációval

A homogén lineáris egyenletrendszernek minden van megoldása. Ugyanis, ha minden ismeretlenet nullának választjuk, akkor az egyenletrendszer triviális megoldását kapjuk. A feladat az egyenletrendszer triviális különböző megoldásának a megtalálása. Erre mutatunk most példát:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & -3 & -4 & = & 0 \\ 1 & -4_2 & +2_3 & & = & 0 \\ 2_1 & -3_2 & -3 & -5_4 & = & 0 \\ 3_1 & -7_2 & +3 & -5_4 & = & 0. \end{array}$$

Az egyenletrendszer együtthatómátrixa ugyanaz, mint az előző feladatban. A konstansok nullák, tehát az egyenletrendszer homogén. A fenti elimináció ennek a feladatnak a megoldására ugyanúgy alkalmas, viszont az utolsó oszlopot felesleges szerepelhetni, mert azok az elemi átalakításokat követően végig nullák maradnának:

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right|$$

A felírható ekvivalens egyenletrendszer:

$$_1 - 4_2 + 2_3 = 0$$

$$_2 - 3 - 4 = 0 \quad _2 - 3 - 4 = 0$$

Legyen $_3$ és $_4$ szabad ismeretlen, akkor $_2 = _3 + 4_2 = _3 + 4$. Ezt helyettesítsük az első egyenletbe: $_1 = 4(_3 + 4) - 2_3 = 2_3 + 4_4 = 4(_3 + 4) - 2_3 = 2_3 + 4_4$.

Az egyenletrendszer általános megoldása:

$= [2_3 + 4_4 \quad _3 + 4 \quad _3 \quad 4] = [2_3 + 4_4 \quad _3 + 4 \quad _3 \quad 4]$, ahol $\underline{\underline{3,4}} \in \underline{\underline{3,4}}$, tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

A bázismegoldás itt a triviális megoldást adja.

Az egyenletrendszer egy **partikuláris megoldását** kapjuk, ha a szabad ismeretleneket tetszés szerint választjuk: $= [10 \quad 3 \quad 1 \quad 2] = [10 \quad 3 \quad 1 \quad 2]$.

6.4. 6.6.4 Feladatok

Oldjuk meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszeret!

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & +3 & -3_4 & = & 7 & 1 & -2 & +3 & -3_4 & = & 7 \\ 1 & -2_2 & +3_3 & -4_4 & = & 19 & 1 & -2_2 & +3_3 & -4_4 & = & 19 \\ 3_1 & +4_2 & -3 & +2_4 & = & -9 & 3_1 & +4_2 & -3 & +2_4 & = & -9 \\ 1. \quad -2_1 & +3_2 & +2_3 & +4 & = & -2 & -2_1 & +3_2 & +2_3 & +4 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +2 & +3 & -4 & = & 4 & 1 & +2 & +3 & -4 & = & 4 \\ 1 & -2 & +3 & +4 & = & 8 & 1 & -2 & +3 & +4 & = & 8 \\ 2. \quad 3_1 & +2 & +3_3 & -4 & = & 16 & 3_1 & +2 & +3_3 & -4 & = & 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2_2 & +3_3 & -4 & +2_5 & = & 2 & 1 & -2_2 & +3_3 & -4 & +2_5 & = & 2 \\ 3_1 & -2 & +5_3 & -3_4 & -5 & = & 6 & 3_1 & -2 & +5_3 & -3_4 & -5 & = & 6 \\ 3. \quad 2_1 & +2 & +2_3 & -2_4 & -3_5 & = & 8 & 2_1 & +2 & +2_3 & -2_4 & -3_5 & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +2_2 & +3_3 & = & 1 & 1 & +2_2 & +3_3 & = & 1 \\ 1 & +3_2 & +5_3 & = & 1 & 1 & +3_2 & +5_3 & = & 1 \\ 3_1 & -2 & -4_3 & = & 1 & 3_1 & -2 & -4_3 & = & 1 \\ 9_1 & +2_2 & -3 & = & 19 & 1 & +2_2 & -3 & = & 1 \\ 4. \quad 5_1 & +2_2 & +3 & = & 15 & 1 & +2_2 & +3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & -2 & +3 = 4 \\ 1 & +2_2 & +3 = 13 \\ 2_1 & +4_2 & +2_3 = 26 \\ 5. \quad 4_1 & +5_2 & +4_3 = 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & +2 & -3_3 = -1 \\ 2_1 & +2 & -2_3 = 12 \\ 1 & +2 & +3 = 3 \\ 6. \quad 1 & +2_2 & -3_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2_1 & +2 & +3 = 22 \\ 1 & +3_2 & +3 = 5 \\ 1 & +2 & +5_3 = -7 \\ 7. \quad 2_1 & +3_2 & -3_3 = 142 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2_1 & -2 & +3_3 = 32 \\ 3_1 & +2 & -5_3 = 03 \\ 4_1 & -2 & +3 = 34 \\ 8. \quad 1 & +3_2 & -13_3 = -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & +3_2 & +2_3 = 0 \\ 2_1 & -2 & +3_3 = 02 \\ 3_1 & -5_2 & +4_3 = 03 \\ 9. \quad 1 & +17_2 & +4_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 & -2_2 & -3 = 0 \\ 1 & +2 & +3_3 = 0 \\ -1 & -3_2 & +3 = 0 \\ -1 & -4_2 & +3_3 = 0 \\ -1 & -5_2 & +5_3 = 0 \\ 10. \quad & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & +2 & -3 + 4 - 5 = 0 \\ 2_1 & +2 & -3_3 - 4 + 5 = 0 \\ 11. \quad -2_1 & -2 & -3 + 4 - 5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & -2_2 & -4_3 + 4 - 3_5 = 0 \\ -1 & +2 & -2_3 - 2_4 - 2_5 = 0 \\ 12. \quad 2_1 & -5_2 & -14_3 + 4 - 11_5 = 02 \end{array}$$

13. Válasszuk meg

paramétert úgy a

$$\begin{array}{rcl} 2_1 & -2 & +3 + 4 = 1 \\ 1 & +2_2 & -3 + 4_4 = 2 \\ 1 & +7_2 & -4_3 + 11_4 = \end{array}$$

- a. az egyenletrendszernek ne legyen megoldása,
- b. pontosan egy megoldása legyen,
- i. egynél több megoldása legyen.

Megoldások:

$$1. \begin{array}{rcl} 1 & -2 & +3 \\ 1 & -2_2 & +3_3 \\ 3_1 & +4_2 & -3 \\ -2_1 & +3_2 & +2_3 \end{array} \begin{array}{l} -3_4 = 7 \\ -4_4 = 19 \\ +2_4 = -9 \\ +4 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 1 & -2 & +3 \\ 1 & -2_2 & +3_3 \\ 3_1 & +4_2 & -3 \\ -2_1 & +3_2 & +2_3 \end{array} \begin{array}{l} -3_4 = 7 \\ -4_4 = 19 \\ +2_4 = -9 \\ +4 = -2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -9 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & -30 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 12 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 27 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$_4 = 1,$$

$$_3 = 4 + _4 = 5, \quad _3 = 4 + _4 = 5,$$

$$_2 = 2_3 - _4 - 12 = -3,$$

$$_1 = _2 - _3 + 3_4 + 7 = 2.$$

$$1. \begin{array}{rcl} 1 & +2 & +3 \\ 1 & -2 & +3 \\ 3_1 & +2 & +3_3 \end{array} \begin{array}{l} -4 = 4 \\ +4 = 8 \\ -4 = 16 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 1 & +2 & +3 \\ 1 & -2 & +3 \\ 3_1 & +2 & +3_3 \end{array} \begin{array}{l} -4 = 4 \\ +4 = 8 \\ -4 = 16 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 16 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Általános megoldás: $_3, _4 \in ; _3, _4 \in ;$ szabad ismeretlenek, $_2 = -2 + _4, _1 = 6 - _3, _2 = -2 + _4, _1 = 6 - _3$ kötött ismeretlenek.

$$1. \begin{array}{rcl} 1 & -2_2 & +3_3 \\ 3_1 & -2 & +5_3 \\ 2_1 & +2 & +2_3 \end{array} \begin{array}{l} -4 + 2_5 = 2 \\ -3_4 - 5_5 = 6 \\ -2_4 - 3_5 = 8 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 1 & -2_2 & +3_3 \\ 3_1 & -2 & +5_3 \\ 2_1 & +2 & +2_3 \end{array} \begin{array}{l} -4 + 2_5 = 2 \\ -3_4 - 5_5 = 6 \\ -2_4 - 3_5 = 8 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right|$$

Az egyenletrendszer kibővített átalakított mátrixának utolsó sora *tiltott* sora, tehát az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

$$1. \quad _1 = -1, \quad _2 = 4, \quad _3 = -2, \quad _1 = -1, \quad _2 = 4, \quad _3 = -2.$$

$$2. \quad \text{Általános megoldás: } _3 \in ; \quad _3 \in ; \quad \text{szabad ismeretlen, } _2 = 3, \quad _1 = 7 - _3, \quad _2 = 3, \quad _1 = 7 - _3 \quad \text{kötött ismeretlenek.}$$

3. Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

$$4. \quad _1 = 1, \quad _2 = 2, \quad _3 = -2, \quad _1 = 1, \quad _2 = 2, \quad _3 = -2.$$

$$5. \quad _1 = 1, \quad _2 = 2, \quad _3 = 1, \quad _1 = 1, \quad _2 = 2, \quad _3 = 1.$$

6. Általános megoldás: $z \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; szabad ismeretlen, $x_1 = -\frac{11z}{7}$, $x_2 = -\frac{3}{7}z$, $x_3 = -\frac{11z}{7}$, $x_4 = -\frac{3}{7}z$ kötött ismeretlenek.
7. Általános megoldás: $z \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; szabad ismeretlen, $x_1 = -5z$, $x_2 = 2z$, $x_3 = -5z$, $x_4 = 2z$ kötött ismeretlenek.
8. Általános megoldás: $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; szabad ismeretlenek, $x_3 = 0$, $x_2 = -3x_4 + 3x_5$, $x_1 = 2x_4 - 2x_5$, $x_3 = 0$, $x_2 = -3x_4 + 3x_5$, $x_1 = 2x_4 - 2x_5$ kötött ismeretlenek.
9. Általános megoldás: $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; szabad ismeretlenek, $x_2 = -6x_3 - 4x_4 - 5x_5$, $x_1 = -8x_3 - 3x_4 - 7x_5$, $x_2 = -6x_3 - 4x_4 - 5x_5$, $x_1 = -8x_3 - 3x_4 - 7x_5$ kötött ismeretlenek.
10. a) $\neq 5, \neq 5$,
 b) nincs ilyen
 c)

paraméter,

c) $= 0, = 0$.

7. 6.7 Tanácsok a lineáris egyenletrendszerek megoldásához



Eddig a lineáris egyenletrendszerek megoldásához ismertettük az inverz mátrix felhasználásával történő megoldást, a *Cramer szabályt* és a *Gauss eliminációt*. A megoldási lehetőségek száma még bővül a továbbiakban.

Felvetődik a kérdés, hogy melyik módszert válasszam? A kérdés pontosítása azonban az lenne, hogy melyik módszert választhatom. Azt mondhatjuk, hogy a Gauss eliminációval minden eddig felsorolt példa megoldható. A számolási algoritmus biztos és könnyen elsajtítható. A Gauss elimináció a Cramer szabályhoz képest lényegesen kevesebb lépésszámú. A megoldás azonban nagy figyelmet igényel. Ügyeljünk arra, hogy ne számoljuk el a feladatot, mert akár az első lépésekben is hibázhatunk, és az örökölt hiba a feladat hibás megoldását eredményezheti. Természetesen az, hogy milyen megoldást választunk, az függ az egyenletrendszer nagyságától. Két egyenlet, két ismeretlen esetén a fenti elméleti megalapozás felesleges, kézzel pedig szinte soha nem számolunk négy-öt egyenletből álló egyenletrendszernél nagyobbat. A mérnöki problémák megoldásakor felmerülő nagyobb egyenletrendszerek megoldása gépi úton történik.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az egyenletrendszer megoldhatósága vagy a megoldások száma nem függ sem az egyenletek számától, sem pedig az ismeretlenek számától. Felejtsük el azokat a régi emlékeket, hogy középiskolás korunkban, ritka kivételektől eltekintve, olyan egyenletrendszerekkel találkoztunk, amelyekben ugyanannyi egyenlet volt, mint ismeretlen. A mérnöki gyakorlatban felvetődő feladatok, problémák nagy többsége nem ilyen. A tankönyvekben, a gyakorlatokon sokszor a feladatkészítők tudatosan kiegészítik a már adott lineáris egyenletrendszert olyan egyenletekkel, amelyek összefüggnek a többiekkel, bár ez az összefüggés rejte marad, és csak a kibővített mátrix elemi átalakításait követően válik nyilvánvalóvá. Ugyanakkor nagyon könnyű olyan egyenletrendszereket is felírni, amelyekben a bal oldal együtthatói megegyeznek, a jobb oldalak pedig különböznek, így az egyenletrendszer nem lesz megoldható. Ne felejtsük el, hogy a homogén lineáris egyenletrendszereknek minden van triviális megoldása, és belátható, hogy ha az ismeretlenek száma több, mint az egyenletek száma, akkor minden lesz az egyenletrendszernek triviálisból különböző megoldása is.

8. 6.8 Lineáris függetlenség

Az egy oszloból álló mátrixokat **oszlopvektoroknak** nevezzük. Egy ilyen oszlopvektor egyes elemeit a vektor koordinátáinak hívjuk. Ezek a koordináták a mi tárgyalásunkban minden valós számok, ezért, ezen vektorok összességét -nel jelöljük. Ezeket az oszlopvektorokat félkövér betűkkel jelöljük:

Ezeknek az oszlopvektoroknak a körében minden eddig definiált mátrixművelet elvégezhető.

Az oszlopvektoroknak a felhasználásával egy lineáris egyenletrendszer az alábbi alakba írható fel:

$$\begin{array}{cccccc} 111 & +122 & \dots & +_1 = 1 \\ 211 & +222 & \dots & +_2 = 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 11 & +22 & \dots & + = \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{matrix} + \dots + \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{matrix}$$

$$1 + 2 + \dots = 1 + 2 + \dots =$$

Az $, \dots, \in , \dots, \in$ vektorok **lineárisan összefüggők**, ha vannak olyan $, \dots, \in , \dots, \in$ skalárok, amelyek nem mind nullák, és

$$1 + 2 + \dots = .$$

Az $, \dots, \in , \dots, \in$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha $1 + \dots = 1 + \dots =$ csak akkor teljesül, amikor minden $= 0 = 0$. Azaz

$$1 + 2 + \dots = \Rightarrow = 0, \quad = 1 \dots, 1 + 2 + \dots = \Rightarrow = 0, \quad = 1 \dots,$$

Az $, \dots, \in , \dots, \in$ vektorokat szokás vektorrendszernek is nevezni, ahol a „rendszer” kifejezés arra utal, hogy ugyanaz a vektor többször is előfordulhat a felsorolásban. Egy adott $, \dots, \in , \dots, \in$ vektorrendszer vagy lineárisan összefüggő vagy lineárisan független, tehát a két állítás közül pontosan egy teljesül. Belátható, hogy ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor van közöttük olyan vektor, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Példa lineárisan összefüggő vektorrendszerre:

lineárisan összefüggők, mert $+ + (-3) = + + (-3) =$. Tehát $= 3 - = 3 -$.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Tekintsük az $, \dots, \in , \dots, \in$ vektorrendszert. Ez lineárisan független, mert:

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 4 = & \begin{array}{ll} 1 & +2_2 + 2_4 = 0 \\ 2_1 & +_2 + _4 = 0 \\ 1 & +2_2 + _4 = 0 \end{array} & \begin{array}{ll} 1 & +2_2 + 2_4 = 0 \\ 2_1 & +_2 + _4 = 0 \\ 1 & +2_2 + _4 = 0 \end{array} & \text{homogén lineáris} \\ \Rightarrow & & \Rightarrow & \end{array}$$

egyenlet-rendszernek csak triviális megoldása van, azaz $1 = 2 = 4 = 0$, mert az egyenletrendszer együtthatóiból képzett együtthatómátrix determinánsa nem zérus. A Gauss eliminációval történő megoldás ugyanezt az eredményt adná:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorok lineáris függetlenségének vagy összefüggésének eldöntése visszavezethető egy a vektorrendszer segítségével felírt homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának kérdésére. Ha az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, akkor a vektorrendszer lineárisan független, ha van a triviálistól különböző megoldás is, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő. Ránézésre szinte lehetetlen egy vektorrendszer függetlenségéről nyilatkozni, de belátható hogy:

- akárhogy választunk -ben

nél több vektort, ezek lineárisan összefüggőek lesznek,

- ha egy legalább kételemű lineárisan független rendszerből bárhogys elhagyunk egy tetszőleges vektort, a maradék rendszer továbbra is lineárisan független marad,
 - ha egy lineárisan összefüggő rendszerhez egy tetszőleges vektort hozzáveszünk, a rendszer továbbra is lineárisan összefüggő marad,
 - ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, akkor az lineárisan összefüggő.

8.1. 6.8.1 Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy a megadott vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e vagy sem!

$$\text{a. } = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c. \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$e = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g. \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Legyenek az $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Állapítsa meg az $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vektorok alábbi lineáris kombinációiként megadott \vec{v}_4 vektorról, hogy lineárisan függők-e vagy sem!

- a. $= ; = + ; = + + .$
 b. $= - ; = - ; = - .$
 c. $= + ; = + ; = + .$
 d. $= + + ; = + + ; = - .$
 e. $= + + ; = + - ; = + .$

3. Határozzuk meg, hogy az

vektort az vektorok milyen lineáris kombinációja állítja elő, ha:

$$\text{a. } \begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b. } \begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{c. } \begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenletrendszeret vektorok lineáris kombinációjaként. Állapítsuk meg a kapott vektorrendserről, hogy lineárisan összefüggők vagy függetlenek. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\text{a. } \begin{aligned} 1 &-2_2 +_3 +_4 = 1 \\ 1 &-2_2 +_3 -_4 = -1 \\ 1 &-2_2 +_3 +5_4 = 5 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \begin{aligned} &+ +_3 + = 4 \\ 2 &-3 + +2 = 3 \\ 3 &-2 +4 +3 = 7 \\ &+ = 1 \end{aligned}$$

8.2. Megoldások

$$\text{1. a) } = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -_1 +_2 &=& 0 \\ 2_1 +_2 +3_3 &=& 0 \\ +_2 +_3 &=& 0. \end{array}$$

Oldjuk meg a $_1 + _2 + _3 =$ egyenletrendszert:

A homogén lineáris egyenletrendszer megoldását Gauss eliminációval végezzük. Adjuk hozzá az első sor kétszeresét a második sorhoz, majd a második sor harmadát vonjuk ki a harmadik sorból:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megoldás: $\underline{3}$ szabad ismeretlen; $\underline{1} = \underline{2} = \underline{-3}$ kötött ismeretlenek. Tehát $\underline{3} = \underline{1}$ választása esetén $\underline{+} - = \Leftrightarrow \underline{+} = \underline{+} - = \Leftrightarrow \underline{+} =$.

Másik lehetőség, mivel a feladat csak a lineáris összefüggést, illetve függetlenséget kérdezi, hogy felírjuk az

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenletrendszer determinánsát: , tehát az egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása, a vektorrendszer lineárisan összefüggő. Nem tudjuk megmondani a vektorok közötti összefüggést, de ebben a feladatban ez nem is volt kérdés.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Lineárisan függetlenek.

- i. Lineárisan függetlenek.
- a. Lineárisan összefüggők.
- b. Lineárisan függetlenek.
- c. Lineárisan függetlenek.
- d. Lineárisan összefüggők.

1. $=, = +, = + +$.

Tegyük fel, hogy $\underline{1} + \underline{2} + \underline{3} =$ ekkor $\underline{1}(0) + \underline{2}(+) + \underline{3}(++) = (\underline{1} + \underline{2} + \underline{3}) + (\underline{2} + \underline{3}) + \underline{3} =$. Mivel az , lineárisan független vektorok, ezért $\underline{3} = 0, \underline{2} + \underline{3} = 0, \underline{1} + \underline{2} + \underline{3} = 0$, tehát $\underline{1} = \underline{2} = \underline{3} = 0$. A vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

- a. Lineárisan összefüggők.
- i. Lineárisan függetlenek.
- a. Lineárisan összefüggők.
- b. Lineárisan összefüggők.

1. Határozzuk meg, hogy az

vektort az „„„„” vektorok milyen lineáris kombinációja állítja elő, ha

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{rcl}
 +3 & - & + = 1 \\
 -4 & -2 & +2 = 1 \\
 2 & + & - = 1
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{rcl}
 +3 & - & + = 1 \\
 -4 & -2 & +2 = 1 \\
 2 & + & - = 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 +3 & - & + = 1 \\
 -4 & -2 & +2 = 1 \\
 2 & + & - = 1
 \end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $= -\frac{1}{2}, \quad = 1, \quad = \frac{1}{2}, \quad = -1, \quad = -\frac{1}{2}, \quad = 1, \quad = \frac{1}{2}, \quad = -1$.

Tehát $-\frac{1}{2} + + \frac{1}{2} - = -\frac{1}{2} + + \frac{1}{2} - =$.

a. Végtelen sok megoldás van.

i. Az

vektor nem állítható elő a megadott vektorok lineáris kombinációjaként.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 1 & -2_2 & +_3 & +_4 = 1 \\ 1 & -2_2 & +_3 & -_4 = -1 \\ 1 & -2_2 & +_3 & +5_4 = 5 \end{array}}$$

1. Az lineáris egyenletrendszer

$1 + 2 + 3 + 4 =$ alakba írható, ahol

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy $= , \quad = -2, \quad =$.

(Az egyenletrendszerek így történő megoldását nagyon megnehezíti, hogy az egyenletrendszerek többségében az oszlopvektorok közötti összefüggések nem láthatóak ilyen világosan, de hamarosan mutatunk egy olyan módszert, amely a rejtett összefüggések felismerését, rövid számolást követően, sokkal átláthatóbbá fogja tenni.)

Ezeket az összefüggéseket az $1 + 2 + 3 + 4 =$ egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$1 + 2(-2) + 3 + 4 =$$

A fenti egyenletet nullára rendezve:

$$(1 - 2_2 + 3) + (4 - 1) = , \quad \text{amelyből következik, hogy } 4 - 1 = 0 \Rightarrow 4 = 1 \quad \text{és}$$

$$1 - 2_2 + 3 = 0 \Rightarrow 1 = 2_2 - 3.$$

Kötött ismeretlenek: $1, 4$.

Szabad ismeretlenek: $2, 3 \in$.

a. Az oszlopvektorok közötti összefüggések:

$= , \quad = 2 + , \quad = 3 + = , \quad = 2 + , \quad = 3 +$, melynek felhasználásával kapjuk, hogy

$$(+2+ -3) + (+ -1) = 0 (+2+ -3) + (+ -1) = 0$$

Így az egyenletrendszer megoldása:

$$+2 + -3 = 0 \Rightarrow = 3 - 2 -,$$

$+ -1 = 0 \Rightarrow = 1 - + -1 = 0 \Rightarrow = 1 -$, ahol $, \in, \in$ szabad ismeretlenek és $, ,$ kötött ismeretlenek.

9. 6.9 Mátrixok rangja

A mátrixokra háromféle rangfogalmat definiálhatunk. Kettőt a lineáris függetlenség, egyet a determinánsok segítségével.

Tekintsük az $=$ mátrixot. Ennek a mátrixnak

darab oszlopvektora és

darab sorvektora van.

Az

mátrix **oszloprangja**

oszlopvektorai között, ha található

lineárisan független, de

több lineárisan független oszlopvektor már nem.

Az

mátrix **sorrangja**

sorvektorai között, ha található

lineárisan független, de

több lineárisan független sorvektor már nem.

Az

mátrix **determinánsrangja**

van olyan -es aldeterminánsa, ami nem nulla, de bármely

-nél

nagyobb rendű aldeterminánsa, ha van olyan, már nulla.

Belátható, hogy a három meghatározás egymással ekvivalens.

Belátható, hogy a mátrix rangja egyenlő a Gauss elimináció során kapott *redukált lépcsősoros alakban* (rövidítve RLA) a vezéregyesek számával. Éppen ezért az RLA alak ismeretében könnyen meghatározhatjuk a mátrix rangját.

A mátrix rangfogalmának ismeretében a lineáris egyenletrendszer megoldhatóságára az alábbi **tételt** mondhatjuk ki:

Az $= =$ egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\text{O} = \text{(}\text{)}\text{O} = \text{(}\text{)}$, azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával. Megoldás esetén a megoldás akkor és csak akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.

Példa:

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A megoldáshoz használjuk a determinánsrang definíciót. Mivel $\neq 0 \neq 0$ a mátrix rangja $\text{O} = 30 = 3$.

1. Mutassuk meg elemi átalakításokkal, hogy $\text{O} = 20 = 2$, ha

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

A feladat megoldásához használjuk a sorrang definíciót. Először alakítsuk át a mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első sor minusz kétszeresét hozzáadtuk a negyedik sorhoz

Az első sor minusz egyszeresét hozzáadtuk a harmadik sorhoz

A második sort hozzáadtuk a harmadik sorhoz

Mivel a mátrix négy sora közül a harmadik és a negyedik sor nulla, és a mátrix sorvektorai közül az első kettő lineárisan független rendszert alkot, tehát a mátrix rangja kettő.

A mátrix rangját határozzuk meg úgy is, hogy a mátrixot RLA –ban adjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a vezéregyesek száma kettő, ezért $\text{O} = 20 = 2$.

9.1. 6.8.2 Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$\begin{array}{l}
 \text{a. } = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 \text{b. } = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{c. } = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2. Alakítsuk át RLA mátrixszá az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ mátrixot, majd állapítsuk meg a rangját!

3. Határozzuk meg, hogy függ

értékének a megválasztásától az alábbi mátrix rangja:

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldások:

1. a) A feladat megoldásához használjuk a determinánsrangot:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow 0 = 3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \neq 3 \Rightarrow 0 = 0 \neq 3. \text{ A mátrixból képzett minden másodrendű aldetermináns is nulla, ezért } 0 = 2.0 = 2. \text{ A mátrix rangja } 0 = 10 = 1.
 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy csak annak a mátrixnak nulla a rangja, amelynek minden eleme nulla.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \neq 3 = 0 \Rightarrow 0 \neq 3$$

Képezzük a $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ másodrendű aldeterminánst. Mivel ez nem nulla, $0 = 2.0 = 2$.

a. A feladat megoldását eliminációs módszerrel javasoljuk:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 3.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 2.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 3.$$

i. A feladat megoldását eliminációs módszerrel javasoljuk: $0 = 2, 0 = 2, 0 = 2$.

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 2. \\ 1. \quad &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -9 & +4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -9 & +4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ha az $= -1 = -1$, akkor a mátrix rangja kettő.

Ha az $\neq -1, \neq -1$, akkor a mátrix rangja három.

10. 6.9 Összefoglalás

1. Mennyi a $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ harmadrendű determináns 3232 előleles aldeterminánsának az értéke?

- a. 0,
- b. -5,
- i. 5,
- a. 1,
- b. -1.

2. Képezhető-e két determináns összege:

- a. igen, bármely két determináns összege képezhető,
- b. sohasem,
- i. igen, de csak akkor, ha két determináns azonos rendű,

- a. igen, de az előző feltétel mellett más feltételek is teljesülnie kell.
3. Mikor változik meg a nem zérus determináns értéke:
- ha sorait és oszlopait felcseréljük
 - ha valamely sorának konstans szorosát egy másik sorához hozzáadjuk,
 - ha egy oszlopának elemeit rendre kivonjuk egy másik oszlopának elemeiből,
 - ha egyik sorának elemeit rendre megszorozzuk egy 1-től különböző számmal.

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot [1 \ 0] = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot [1 \ 0]$$

4. Milyen mennyiséget ad az szorzat:

- egy elemű mátrixot,
- egynél több elemű mátrixot,
- nem végezhető el a szorzás.

5. Elvégezhető-e az $= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és a $= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ mátrixokkal az + + összeadás és az * * szorzás:

- egyik művelet sem végezhető el,
- a szorzás igen, de az összeadás nem,
- az összeadás igen, de a megadott szorzás nem,
- mindegyik művelet elvégezhető.

6. Egy mátrix inverzének létezéséhez az alábbi feltételek közül melyik nem szükséges:

- az mátrix kvadratikus,
- az mátrix reguláris,
- legyen zérustól különböző eleme
- legalább 3x3-as mátrixnak kell lenni.

7. Legyen a 3x3-as egységmátrix, és

egy 2x3-as mátrix, * * és * * a szorzatuk. Mely állítások igazak a szorzatokra vonatkozóan:

- * * = * * = *,
- * * = * * = * *.
- csak az * * szorzat képezhető
- a szorzatok nem képezhetőek.

8. Mennyi a megadott mátrix rangja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- a. 1,
- b. 0,
- i. 2,
- a. 3.

1. Melyik állítás hamis az alábbiak közül:

- a. 2×2 -es mátrixnak nem képezhető az adjungáltja,
- b. a mátrixszorzás kommutatív,
- i. a homogén lineáris egyenletrendszernek minden végtelen sok megoldása van.

2. Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyek igazak, és melyek hamisak!

a. Legyen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ha $\neq 4 \neq 4$, akkor

invertálható.

b. Legyen $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix}$. Ha

invertálható, akkor $\neq 1 \neq 1$.

i. Ha $\in \in$ invertálható, akkor az $= =$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

a. Ha $; \in ; \in$ invertálhatóak, akkor létezik az $(+)^- . (+)^-$.

b. Az $; \in ; \in$ esetén $\cdot \neq 0 \cdot \neq 0$, akkor létezik $^{-1-1}$ és $^{-1-1}$.

3. Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyek igazak, és melyek hamisak!

a. Ha $\in \in$ és $= 0 = 0$ akkor $0 = 0.0 = 0$.

b. Ha $\in \in$ és $= 0 = 0$ akkor $0 < 0 <$.

i. Ha $\in \in$ és $0 = 0.0 = 0$ akkor $= 0 = 0$.

a. Ha $\in \in$ és $0 < 0 <$ akkor $= 0 = 0$.

b. Ha $\in^{44} \in^{44}$ és $0 = 30 = 3$, akkor nincs olyan harmadrendű aldeterminánsa, ami nullával egyenlő.

c.

 $\in \mathbb{C}^{44}$ $\in \mathbb{C}^{44}$

$$0 \leq 2.0 \leq 2.$$

-nak van olyan harmadrendű aldeterminánsa, ami nullával egyenlő, akkor

d. Ha

 $\in \mathbb{C}^{44}$ $\in \mathbb{C}^{44}$

és

-nak van olyan harmadrendű aldeterminánsa, ami nullával egyenlő, akkor $0 \geq 30 \geq 3$.

Az ellenőrző kérdések megoldásai:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	a	d	b	b	d	c	a	abd

1.

- a. igaz
- b. igaz
- i. igaz
- a. hamis
- b. igaz
- c. igaz

11.

- a. hamis
- b. igaz
- i. igaz
- a. igaz
- b. hamis
- c. hamis
- d. igaz

Irodalomjegyzék

Bánhegyesiné Topor Gizella - Bánhegyesi Zoltán: *Az informatika matematikai alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.

Csernyák László: *Operációkutatás II*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

Ernyes Éva, Mala József, Orosz Ágota, Racsmány Anna, Szakál Szilvia: *Matematikai alapok*, AULA, Budapest, 2007.

Fagyajev D. K - Szominszkij I. Sz: *Felsőfokú algebrai feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

Flanigan Francis J - L. Kazdan Jerry L.: *Calculus II. Linear and Nonlinear Function*, Springer-Verlag, 1900.

Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007.

Gantmacher F. R.: *The theory of Matrices I*, AMS, Chelsea, Rhode Island, 1998.

Gáspár László: *Lineáris algebra példatár*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

Gelfand I. M.: *Előadások a lineáris algebrából*, Akadémiai kiadó, Budapest, 1955.

Horváth Péter: *Feleletválasztásos feladtok a matematika gyakorlatokhoz*, Főiskolai Kiadó, Dunaújváros, 2006.

Kirchner István: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Főiskolai Kiadó, Dunaújváros, 2003.

Korpás Attiláné: *Általános statisztika I. és II*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

Molnár Máténé - Tóth Mártonné: *Általános statisztika példatár I. II*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.

Sharnitzky Viktor: Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.

Szelezsán János, Veres Ferenc, Marosvásáry Erika: *Matematika 3*, SZÁMALK Kiadó, Budapest, 2001.

Tóth Irén: *Operációkutatás I*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.