Lineáris algebra jegyzet

Készítette: Jezsoviczki Ádám
Forrás: Az előadások és a gyakorlatok anyaga
Legutóbbi módosítás dátuma: 2011-12-04

A jegyzet nyomokban hibát tartalmazhat, így **fentartásokkal olvasandó**!

a, b, c vektorok **lineáris kombinációja**

$$\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}+\gamma\cdot\underline{c}=\underline{0} \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Ha csak a triviális lineáris kombináció adja meg a nullvektort, akkor a, b, c **lineárisan függetlenek** (jele: L). Ha más megoldás is van, akkor **lineárisan összefüggő** (jele: Ö).

Más szavakkal:
$\{a_1, a_2 ... a_n\}$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha $\alpha a_1+\alpha a_2+...+\alpha a_n$ lineáris kombináció csak $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ esetén adja a nullvektort, ellenkező esetben **lineárisan összefüggő**.
Egyelemű halmazok mindig: L
Kételemű halmazok mindig: L, kivéve, ha valamelyik vektor a mások konstansszorosa lenne
Három/több elemű: lehet L és Ö is.

Altér:
- nem üres
- konstansszorosra zárt $\lambda\,\underline{u}\in U$
- összegre zárt $\underline{u}+\underline{v}\in U$

Triviális altér: a nullvektor által generált altér

Bázis: maximális[1] lineárisan független vektorrendszer. Adott vektortér minden bázisa ugyanannyi elemet tartalmaz. Ez a vektortér **dimenziója**. Minden elem <u>egyértelműen</u> felírható a báziselemek lineáris kombinációjaként. $\underline{a}=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+...+\alpha_n b_n$
Triviális (standard) bázis:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Elemi bázistranszformáció $y_i=\frac{x_i}{\alpha_i}$ $i\ cserehely$ $\quad y_t=x_t-\frac{x_i}{\alpha_i}\cdot\alpha_t \quad t\neq i$

Generált altér: a generáló elemek összes lineáris kombinációja. $<\underline{a}, \underline{b}>\equiv span(\underline{a}, \underline{b})$

Vektorrendszer rangja: hány lineárisan független van. Amennyi (elemi bázistranszformációval) behelyettesíthető, annyi a rang. $\rho(A)$

Mátrix
$A^{n\times m}+B^{n\times m}$ (csak azonos méretű mátrixok adhatók össze)
$A^{n\times m}\cdot B^{m\times k}=(AB)^{n\times k}$
pl.:

$$\begin{pmatrix}1 & (-2) & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & (-36)\\ (-2) & 1\\ 3 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot3 & 1\cdot(-36)+(-2)\cdot1+3\cdot13\\ 0+1\cdot(-2)+7\cdot3 & 0\cdot(-36)+1\cdot1+7\cdot13\end{pmatrix}$$

A mátrixok **transzponáltja** A^T a sorok és oszlopok felcserélésével adódik.

$$A=\begin{pmatrix}1 & (-2) & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ (-2) & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

Transzponált tulajdonságai
$(A+B)^T=A^T+B^T \qquad (\lambda A)^T=\lambda A^T \qquad (A\cdot B)^T=B^T A^T \qquad (A^T)^T=A$

1 Ha még 1 elemet hozzáadnánk, akkor már összefüggővé válna.

I_n: $n \times n$ -es **egységmátrix** $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Négyzetes mátrixok esetén: $\forall A^{n\times n} \quad AI_n = I_n \cdot A = A$

A rangja: $\rho(A)$ a lineárisan független oszlopvektorok száma, illetve a lineárisan független sorvektorok száma. (0 rangú mátrix csak a nullmátrix.)

$\rho(A^T) = \rho(A) \quad \rho(kA) = \rho(A) \quad \rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) \quad \begin{matrix} \rho(A\cdot B) \leq \rho(A) \\ \rho(A\cdot B) \leq \rho(B) \end{matrix} \quad \rho(A^{n\times m}) \leq min(n, m)$

Diagonális mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Szimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Antiszimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Felső háromszög mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Alsó háromszög mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Nilpotens mátrix: $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Invertálható mátrix: $\exists A^{-1} : AA^{-1} = I_n$

Szalag mátrix[2]**:** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

---

2 Egy „szalag” mentén nem nulla.

Determináns kifejtési tétel:
Alsó/felső háromszög mátrix determinánsa (det. Jelölése: $|A|$, vagy $det(A)$) a diagonális elemek szorzata.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad det(AB) = det(A) \cdot det(B) \quad det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \quad det(AA^{-1}) = det(I) = 1$

$A\ invertálható \equiv det(a) \neq 0$

Determináns őrző műveletek: Egy sorhoz (vagy oszlophoz) hozzáadom egy másik sor konstansszorosát.
Det=0, ha van csupa 0 sora vagy oszlopa.
Det=0, ha egy sora/oszlopa a másik konstansszorosa.

$det(A) \neq 0 \equiv \exists A^{-1} \quad det(A) = det(A^T) \quad det(\lambda A^{n \times n}) = \lambda^n \cdot det(A)$

Sajátérték, sajátvektor:
$$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad (\lambda\ a\ sajátvektor)$$
$$A \underline{x} - \lambda \underline{x} = 0$$
$$(A - \lambda I) \underline{x} = 0$$

Az A mátrix **karakterisztikus polinomja**: $|A - \lambda I|$ gyökei az A **sajátértékei.** A sajátértékek száma megegyezik a mátrix méretével.
Sajátaltér: azonos sajátértékekhez tartozó összes sajátvektor által generált altér.

Diagonalizálható a mátrix, ha:
- van ugyanannyi sajátérték (multiplicitással), mint a mátrix mérete
- a sajátalterek dimenzió összege a mátrix mérete

Hasonlóság
- a karakterisztikus polinomok megegyeznek
- az egyes sajátértékekhez tartozó sajátalterek dimenziója megegyezik

Skalárszorzat (4db axióma):
1. $< y, x > = \overline{< x, y >}$ (Ha komplex $\overline{a+ib} = a - ib$)
2. $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
3. $< x, y+z > = < x, y > + < x, z >$
4. $< x, x > \geq 0 \quad < x, x > = 0 \equiv x = \underline{0}$

Hajlásszög:

$\cos \gamma(x, y) = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

SONB (sajátvektorokból álló ortogonális 1 normájú bázis)
Tétel: Valós szimmetrikus mátrix <=> létezik SONB és minden sajátértéke valós.

Kvadratikus alak: $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$

Kvadratikus alakok osztályozása:
- $\forall \lambda_k > 0$ Q pozitív definit
- $\forall \lambda_k \geq 0$ Q pozitív szemidefinit
- $\forall \lambda_k < 0$ Q negatív definit
- $\forall \lambda_k \leq 0$ Q negatív szemidefinit
- $\exists \lambda_k > 0, \lambda_j < 0$ Q identifinit

$\underline{x}, \ \|x\| \neq 1 \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$

Komplex skalárszorzat

$< a , b > = \underline{b}^* a \quad \underline{b}^* \ a \ b\, konjugáltja \quad a = x + iy \quad a^* = x - iy \quad \|a\| = \sqrt{a^* a}$

$< a , b > = < b , a > = 0 \equiv a\, merőleges\, b$

$\phi : R^n \rightarrow R^m$ **lineáris leképezés**, ha

- $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$
- $\phi(\lambda a) = \lambda \phi(a)$

Lineáris transzformáció, ha $\phi : R^n \rightarrow R^n$

Lineáris leképezés **magtere**: $Ker\, \phi = \{\underline{a} \in R^n ,\ \phi(\underline{a}) = 0\}$

Lineáris leképezés **képtere**: $I\, m\ \phi = \{b \in R^m ,\ \exists a \in R^n ,\ \phi(\underline{a}) = \underline{b}\}$

Izomorfizmus: bijektív lekérdezés
Lineáris leképezés izomorf <=> $Ker\, \phi = \{\underline{0}\}$

Dimenzió tétel: $dim\, Ker\, \phi + dim\, I\, m\, \phi = dim\, R^n = n$

Lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban: oszlopvektorok a báziselemek képei

$$A_\phi \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$