2015. szeptember 14/16.

Lineáris algebra (A, B, C)

2. előadás

A bázis (B) definíciójában az L az egyértelműséghez kellett:
TÉTEL: $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ B $V(\leqq \mathbb{R}^n)$-ben, $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$.
[Bizonyítás: A létezés a definícióból adódik. !: Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} = \alpha_1'\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k'\mathbf{b}_k = \alpha_1''\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k''\mathbf{b}_k$. Ekkor $(\alpha_1' - \alpha_1'')\mathbf{b}_1 + ... + (\alpha_k' - \alpha_k'')\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$. A $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ L, így minden zárójelben nulla áll.]
Érdemes kimondani a megfordítást is:
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in V$ olyan, hogy $\forall \mathbf{a} \in V\ \ \exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ bázis V-ben.
[Bizonyítás: L abból adódik, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$-ra az egyértelműség szerint a $\mathbf{0}$-t CSAK triviálisan állítja elő a $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$.]
Most azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy bázisból egyetlen elem megváltoztatásával újra bázishoz jutni.
TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ): Legyen $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ bázis V-ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$; i rögzített, $1 \leqq i \leqq k$. Ekkor $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{i+1}, ..., \mathbf{b}_k$ bázis V-ben $\iff$ $\alpha_i \neq 0$.
[Bizonyítás: $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $\alpha_i = 0$. Ekkor $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + 0\mathbf{b}_i + \alpha_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$, tehát $\alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + (-1)\mathbf{a} + \alpha_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$, így $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{i+1}, ..., \mathbf{b}_k$ Ö, ami ellentmondás.
$\Leftarrow$: Először azt bizonyítjuk be, hogy az új rendszer is előállít mindent lineáris kombinációként, amit az eredeti előállított lineáris kombinációként. Legyen $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + ... + x_i\mathbf{b}_i + ... + x_k\mathbf{b}_k$. Keresünk olyan $y_1, ..., y_i, ..., y_k$ számokat, melyekre $\mathbf{x} = y_1\mathbf{b}_1 + ... + y_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + y_i\mathbf{a} + y_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + ... + y_k\mathbf{b}_k$. Beírva az $\mathbf{a}$ előállítását, $\mathbf{x} = (y_1 + y_i\alpha_1)\mathbf{b}_1 + ... + (y_i\alpha_i)\mathbf{b}_i + ... + (y_k + y_i\alpha_k)\mathbf{b}_k$ adódik, amiből kitalálhatjuk a kívánt számokat (most $\alpha_i \neq 0$):

$$y_i = \frac{x_i}{\alpha_i}, \qquad t \neq i \quad \text{esetén pedig} \quad y_t = x_t - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_t,$$

$$\mathbf{x} = \left(x_1 - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_1\right)\mathbf{b}_1 + ... + \frac{x_i}{\alpha_i}\mathbf{a} + ... + \left(x_k - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_k\right)\mathbf{b}_k.$$

[[Akinek ez a számolás gondot okozott az y-ok keresgélése miatt, az elkerülheti ezt a következő módon: Az $\alpha_i \neq 0$ felhasználásával kifejezhetjük a $\mathbf{b}_i$-t az $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_i\mathbf{b}_i + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$-ból, majd beírhatjuk $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + ... + x_i\mathbf{b}_i + ... + x_k\mathbf{b}_k$-ba:

$$\mathbf{b}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{b}_1 - ... + \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{a} - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\mathbf{b}_k,$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + ... + x_i\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{b}_1 - ... + \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{a} - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\mathbf{b}_k\right) + ... + x_k\mathbf{b}_k,$$

$$\mathbf{x} = \left(x_1 - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_1\right)\mathbf{b}_1 + ... + \frac{x_i}{\alpha_i}\mathbf{a} + ... + \left(x_k - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_k\right)\mathbf{b}_k.]]$$

L biz: Tegyük fel, hogy $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in \mathbb{R};\ \mu_1\mathbf{b}_1 + ... + \mu_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + \mu_i\mathbf{a} + \mu_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + ... + \mu_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}\}$. Beírva az $\mathbf{a}$ előállítását, $(\mu_1 + \mu_i\alpha_1)\mathbf{b}_1 + ... + (\mu_i\alpha_i)\mathbf{b}_i + ... + (\mu_k + \mu_i\alpha_k)\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ adódik. $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i, ..., \mathbf{b}_k$ L, tehát minden zárójeles kifejezés 0:
$\mu_1 + \mu_i\alpha_1 = 0, \quad ..., \quad \mu_i\alpha_i = 0, \quad ..., \quad \mu_k + \mu_i\alpha_k = 0$; az i-edikből $\alpha_i \neq 0$ miatt $\mu_i = 0$ jön, ezt beírva a többibe, végül $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0$ adódik.]

DEFINÍCIÓ: $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ bázis V-ben, $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{b}_k$ esetén azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ koordinátái a $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ bázisban $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Jelölése:

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{b}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

Az elemi bázistranszformációs tétel $\alpha_i \neq 0$ feltevésű részének számolási szabályai a régi, illetve az új bázisban vett koordinátákkal így foglalhatók össze:

$\alpha_i \neq 0$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{x}$		$\mathbf{a}$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{b}_1$	α_1	x_1	$\mathbf{b}_1$	0	$x_1 - (x_i/\alpha_i)\alpha_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}_i$	α_i	x_i	$\mathbf{a}$	1	x_i/α_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}_k$	α_k	x_k	$\mathbf{b}_k$	0	$x_k - (x_i/\alpha_i)\alpha_k$

Most (pótlólag, ahogy ígértük) igazoljuk, hogy összeg tetszőlegesen zárójelezhető.
TÉTEL: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k$ egy tetszőleges zárójelezése $= ((...((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) + ...) + \mathbf{a}_{k-1}) + \mathbf{a}_k$.
[Bizonyítás: A bizonyítást a tagszám szerinti teljes indukcióval végezhetjük, de a legáltalánosabb indukciós feltevésre lesz szükségünk. Először tisztázzuk a kis k esetét: $k = 1$ esetén $\mathbf{a}_1$, $k = 2$ esetén $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ az összes lehetőség, $k = 3$ esetén két lehetőség van, melyek az I./3. szerint egyezők: $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$. Legyen most $k > 3$, és tegyük fel, hogy érvényes az állítás minden olyan összegre, amely k-nál kevesebb tagból áll. A k tagú összeg egy tetszőleges zárójelezésében keressük meg az utolsó összeadást, ekkor ilyen kifejezésünk lesz alkalmas s-re: ($\mathbf{a}_1 + ... + \mathbf{a}_s$ valamely zárójelezése) $+$ ($\mathbf{a}_{s+1} + ... + \mathbf{a}_k$ valamely zárójelezése). Itt $1 \leqq s \leqq k-1$ és $1 \leqq k-s \leqq k-1$, tehát mindkét zárójeles részben k-nál kevesebb tagú összegek valamilyen zárójelezése szerepel. Az indukciós feltevés szerint a fenti kifejezés a hangsúly kedvéért módosított zárójelekkel $= \{((...((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+\mathbf{a}_3)+...)+\mathbf{a}_{s-1})+\mathbf{a}_s\}+[\{(...((\mathbf{a}_{s+1}+\mathbf{a}_{s+2})+\mathbf{a}_{s+3})+...)+\mathbf{a}_{k-1}\}+\mathbf{a}_k]$. $s = k-1$ esetén már kész is vagyunk, $s < k-1$ esetén pedig I./3-at alkalmazva $= [\{((...((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+\mathbf{a}_3)+...)+\mathbf{a}_{s-1})+\mathbf{a}_s\}+\{(...((\mathbf{a}_{s+1}+\mathbf{a}_{s+2})+\mathbf{a}_{s+3})+...)+\mathbf{a}_{k-1}\}]+\mathbf{a}_k$ adódik, ahol a szögletes zárójelben lévő $k-1$ tagra újra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, s végre a kívánt alakhoz jutunk.]
Az 1. gyakorlaton már előfordult, hogy $\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}$ $(= \mathbf{b} + \mathbf{c} + (-1)\mathbf{d})$, ennek jogosságát mutatja a „kivonás"-t biztosító tétel.
TÉTEL: $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\ \exists!\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
[Bizonyítás: $!$: Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = ((-\mathbf{a}) + \mathbf{a}) + \mathbf{x} = (-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} + \mathbf{x}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$.
$\exists$: $\mathbf{a} + ((-\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$.]
A bizonyítás alapján $\mathbf{b} - \mathbf{a}$-val jelölhetjük az $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ vektoregyenlet egyértelmű megoldását: $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-1)\mathbf{a}$.
Az $\mathbb{R}^n$ vektortér altereit keresve, a $\{\mathbf{0}\}$ és $\mathbb{R}^n$ triviális példák, s jegyezzük meg, hogy $\mathbf{0}$ benne lesz minden altérben, hiszen egy altér nem üres részhalmaz, tehát van eleme, és ennek 0-szorosa is benne lesz a 3. követelmény szerint. Sok egyéb példát nyerhetünk a lineáris függés fogalmának bevezetésével, itt azonban egyrészt célszerű végtelen vektorrendszert is megengednünk, másrészt egy vektorrendszerben lehet több azonos vektor is, a szokott $\subseteqq$ azonban csak különböző elemeket engedne meg. Ezen a „$\subseteqq$" jellel segítünk:

DEFINÍCIÓ: Az A „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ jelentse azt, hogy $\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (de itt csak egyszer!).
DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ lineárisan függ az A-tól, ha a $\mathbf{v}$ előállítható valamely véges sok A-beli vektor valós együtthatós lineáris kombinációjaként.
A lineáris függés és a lineáris összefüggés kapcsolatát mutatja a következő két állítás.
TÉTEL: $k \geqq 2$, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén
$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö $\iff \exists\, \mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_k$ vr-től.
[Bizonyítás: $\Rightarrow$: Az Ö definícióját felírva, bármelyik olyan $\mathbf{a}_i$ megfelel, amelynek nullától különböző együtthatója van, az ilyen $\mathbf{a}_i$-t ki lehet fejezni a többivel.
$\Leftarrow$: Az $\mathbf{a}_i$-t -1 együtthatóval, a többit az adott lineáris kombinációbeli együtthatóval véve egy nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációt nyerünk.]
TÉTEL: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ Ö esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$-tól.
[Bizonyítás: Az előző tétel bizonyítása alapján világos, hogy az Ö definícióját felírva, azt kellene belátnunk, hogy $\mathbf{b}$ együtthatója nullától különbözik. Valóban, ha nulla volna, akkor $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö, ami most ellentmondás.]

DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ esetén $W(A) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v}$ lineárisan függ A-tól$\}$.
TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ esetén $W(A) \leqq \mathbb{R}^n$, továbbá A „$\subseteqq$" $W(A)$.
[Bizonyítás: Az altér definíciójának (1/4) 1., 2., 3. feltételét kell ellenőriznünk.
1.: $\exists \mathbf{a} \in A$, de $\mathbf{a} \in A$ esetén $\mathbf{a} = 1\mathbf{a} \in W(A)$, így egyúttal A „$\subseteqq$" $W(A)$ is kész.
2.: A $W(A)$ tetszőleges két eleme véges sok A beli vektor lineáris kombinációjaként írható, mégpedig elérhető, hogy ugyanazon véges sok vektoré: ha egy A beli vektor csak az egyik lineáris kombinációban fordulna elő, akkor a másikba is beírjuk 0 együtthatóval. Így a két vektor: $\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{a}_k$ illetve $\beta_1\mathbf{a}_1 + ... + \beta_k\mathbf{a}_k$ alakú, ahol $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$, az együtthatók pedig valós számok. Ekkor az összegük: $(\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{a}_1 + ... + (\alpha_k + \beta_k)\mathbf{a}_k \in W(A)$.
3.: Ha $\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{a}_k \in W(A)$, ahol $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$, $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a λ-szoros: $\lambda\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \lambda\alpha_k\mathbf{a}_k \in W(A)$.]
Így már sok alteret konstruálhatunk $\mathbb{R}^n$-ben, például $n \geq 2$ esetén

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}; W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

W_1 és W_2 alterei $\mathbb{R}^n$-nek, de $W_1 \cup W_2$ már nem altér (mindegyikből egy nullvektortól különböző vektort véve, ezek összege már nem eleme az egyesítésnek). Két altér egyesítése tehát általában nem altér. Ezután meglepő lehet, hogy két altér, sőt akárhány altér metszete mindig altér:
TÉTEL: $\{W_1 \leqq \mathbb{R}^n, W_2 \leqq \mathbb{R}^n\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leqq \mathbb{R}^n$.
[Bizonyítás: Az altér definíciójának 1., 2., 3. feltételét kell $W_1 \cap W_2$-re ellenőriznünk, közben persze W_i-re $(i = 1, 2)$ felhasználhatjuk a három feltevést, hisz ők alterek.
1.: $\mathbf{0} \in W_1, \mathbf{0} \in W_2$, így $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$, tehát $\emptyset \neq W_1 \cap W_2$, míg $W_1 \cap W_2 \subseteqq \mathbb{R}^n$ nyilvánvaló.
2.: Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_1 \cap W_2$, akkor $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_i\,(i \in \{1, 2\})$, tehát $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_i\,(i \in \{1, 2\})$ (hisz alterek), így $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_1 \cap W_2$.
3.: Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in W_1 \cap W_2$, akkor $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in W_i\,(i \in \{1, 2\})$, tehát $\lambda\mathbf{a} \in W_i\,(i \in \{1, 2\})$ (hisz alterek), így $\lambda\mathbf{a} \in W_1 \cap W_2$.]

Hasonlóan igazolható az is, hogy akárhány (akár végtelen sok, s nemcsak megszámlálható sok) altér metszete is altér, csupán az $\{1, 2\}$ helyére kell írni a megfelelő indexhalmazt.
DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ esetén tekintsük az $\mathbb{R}^n$ összes, az A-t „tartalmazó" alterének a metszetét. Ennek neve: az A által **generált** (kifeszített) **altér**, jelölése: $\mathrm{Span}\,(A)$ vagy $\langle A \rangle$. Véges A esetén, amikor pl. $A = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$, a $\mathrm{Span}\,(A)$ helyett inkább azt írjuk, hogy $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k)$.
A fenti definíció értelmes: van mit metszeni, hisz ismerünk A-t „tartalmazó" alteret, ilyen pl. maga az $\mathbb{R}^n$, de ilyen a $W(A)$ is; akárhány altér metszete is altér, így tényleg altérhez jutunk.
TÉTEL: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" $\mathbb{R}^n$ esetén $\mathrm{Span}\,(A) = W(A)$.
[Bizonyítás: $\subseteqq$: Mivel A „$\subseteqq$" $W(A)$, és $W(A)$ altér, azért $W(A)$ szerepel a metszendők között, tehát $\mathrm{Span}\,(A) \subseteqq W(A)$. $\supseteqq$: Legyen $W' \leqq \mathbb{R}^n$, melyre A „$\subseteqq$" W' (azaz W' a metszendők egyike). Legyen $\mathbf{v} \in W(A)$. Ekkor $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{a}_k$ alakú, ahol $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$. Utóbbi miatt $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in W'$ is teljesül, tehát lineáris kombinációjuk is ebben az altérben van: $\mathbf{v} \in W'$, tehát $W(A) \subseteqq W'$, azaz $W(A)$ benne van a metszendők bármelyikében, így a metszetben is.]
DEFINÍCIÓ: Legyen $V \leqq \mathbb{R}^n$. G **generátorrendszer** V**-ben** (rövidítve: G (V-ben)), ha $\emptyset \neq G$ „$\subseteqq$" V és $\mathrm{Span}\,(G) = V$.
Így már a **bázis** definícióját is rövidíthetjük: **B (**V**-ben)** $\equiv$ **L és G (**V**-ben)**. [Ez elvben végtelen vektorrendszerre is érvényes lesz, ha L-et definiáljuk erre az esetre: Egy végtelen vektorrendszer L, ha bármely véges részrendszere L.]
A gyakorlaton szereplő feladatokkal kapcsolatban jegyezzük meg, hogy $W_1, W_2 \leqq \mathbb{R}^n$ esetén az általuk generált altér: $\mathrm{Span}\,(W_1, W_2) = \mathrm{Span}\,(W_1 \cup W_2)$. [Útmutatás a vizsgálatához: célszerű megnézni a $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ alakú vektorokat, ahol $\mathbf{w}_i \in W_i$.]
Ha $W = \{\mathbf{0}\}$, akkor nincs benne független rendszer, így bázis sincs.
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V-ben van véges generátorrendszer, akkor létezik bázis V-ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.
[Bizonyítás: Legyen $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m$ egy véges generátorrendszer. Ha ez L, akkor máris B. Ha viszont Ö és legalább 2 eleme van, akkor van olyan eleme, pl. $\mathbf{g}_i$, amelyik lineárisan függ a többitől. Így erre valójában nincs szükség a generáláshoz: ha $\mathbf{v}$ kifejezhető $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_i, ..., \mathbf{g}_m$ lineáris kombinációjaként, akkor tudván, hogy $\mathbf{g}_i$ kifejezhető $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{i-1}$, $\mathbf{g}_{i+1}, ...\mathbf{g}_m$-mel, már $\mathbf{v}$ is kifejezhető ezekkel. Kiderült tehát, hogy $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{i-1}, \mathbf{g}_{i+1}, ...\mathbf{g}_m$ generátorrendszer. Most erre alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet, és így tovább, mindaddig, amíg legalább 2 elemünk van. Ha egyik lépésben sem jutottunk bázishoz, akkor végül egyelemű generátorrendszerünk adódik, pl. $\mathbf{g}_t$. Ekkor ez lesz bázis, mert $\mathbf{g}_t \neq \mathbf{0}$ (a $\mathbf{0}$ nem generálja V-t, hisz $V \neq \{\mathbf{0}\}$).]
A fenti bizonyításban tulajdonképpen minimális generátorrendszert kerestünk (amiből akármelyik vektort elhagyva már nem kapunk generátorrendszert), s erről derült ki, hogy bázis. Természetes bizonyítási útnak tűnik maximális lineárisan független vektorrendszer keresése is, itt azonban problematikus, hogy leáll-e a keresés, nincs-e véletlenül végtelen sok elemű lineárisan független rendszer. Ezt az $\mathbb{R}^n$ altereinél a következő ún. „kicserélési" tétellel ki fogjuk zárni, s végre összehasonlíthatjuk a bázisok elemszámát is.

A jelölésekkel kapcsolatban [az 1/4 oldal végét kiegészítve] illik megjegyezni, hogy a vektorjelöléstől eltekintve igyekszünk követni a későbbi alkalmazó tárgyak jelöléseit, hasonlóan az átmenetet segítő alábbi jegyzethez: CSÖRGŐ ISTVÁN: Fejezetek a lineáris algebrából kidolgozott példákkal, ELTE Eötvös Kiadó, 2008.