

2015. szeptember 7/9.

# Lineáris algebra (A, B, C)

## 1. előadás

A középiskolában a vektorok összegének és valós számszorosának (skalárszorosának) koordinátáiról tanultak alapján definiáljuk az oszlopokba rendezett valós számhármassok összegét és valós számszorosát:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{esetén legyen} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma \in \mathbb{R}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{esetén legyen} \quad \gamma \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1 \\ \gamma \alpha_2 \\ \gamma \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Az oszlopos írásmód az alkalmazásokat könnyítheti meg. Az oszlopok elemei vagy komponensei [kerüljük a koordináta szóhasználatot, mert félreérthető] valós számok. A skalárookra a görög betűs jelölés sem lehet következetes, mert lineáris egyenletrendszer-nél (LER) a latin kisbetűk használata a szokásos.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 9 \\ 3x + 4y + 5z &= 12 \end{aligned}$$

esetén

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

jelöléssel olyan  $x, y, z$  valós számokat keresünk, melyekre

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

teljesül. Ránézésre látszik, hogy  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d}$ , így  $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$  biztosan megoldás. Van azonban más is, pl.  $x_2 = 0, y_2 = 3, z_2 = 0$ , sőt végtelen sok is van [belátható, hogy  $x = z, y = 3 - 2z$  alakú az összes megoldás], ennek oka az, hogy most  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = 2\mathbf{b}$ . [Az is igaz, hogy az első két egyenlet összeadásával adódik a harmadik.]

A fenti ötlet használható több ismeretlen esetén is:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

választással  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$  az átfogalmazás. Az igazi gond az, hogy mit tegyünk 3-nál több, mondjuk  $n$  egyenlet esetén (az ismeretlenek száma maradjon 4):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 &= b_n \end{aligned}$$

Az előbbi mintájára próbálkozhatunk a következő örűtséggel:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A baj az, hogy nem volt szó "hosszú" oszlopok számszorosáról, így a definiálatlan dolgok összege is értelmetlen. A jobb oldalnak viszont tudunk értelmet adni: ez egy (oszlopba) rendezett valós szám  $n$ -es, vagyis  $\mathbb{R}^n$  egy eleme. Két ilyen rendezett valós szám  $n$ -es pontosan akkor egyezik meg, ha az oszlop megfelelő helyein ugyanazok az elemek vagy komponensek állnak (csak koordinátát ne mondjunk, mert az most értelmetlen). A bal oldalra is ilyen  $n$  komponensű oszlopokat kellene gyártanunk, az  $\mathbb{R}^n$ -en kellene műveleteket definiálnunk, a következő műveletek az előzmények alapján természetesek.

**DEFINÍCIÓ:** Legyen  $n$  rögzített pozitív egész szám, továbbá

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén legyen} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén legyen} \quad \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ezzel látszólag már minden örülség értelmet kapott, de ez nem egészen igaz: A négytagú összegben nem volt zárójelezés! Persze, ha az imént definiált  $\mathbb{R}^n$ -beli összeadás asszociatív, akkor nincs baj. A valós számok összeadásának asszociatív voltára hivatkozva:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén} \quad \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 \\ \vdots \\ (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \\ \vdots \\ \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \right),$$

s ennek mintájára igazolható, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben egy négytagú összeg is tetszőlegesen zárójelezhető. Ezzel már értelmet nyert az 1/2 oldal tetején lévő egyenlet, azaz egy darab  $\mathbb{R}^n$ -beli egyenlet a korábbi  $n$  darab egyenlet helyett. Itt illik megjegyezni, hogy az  $\mathbb{R}^n$ -beli összeadás nemcsak asszociatív, hanem kommutatív is, melynek bizonyítására

a valós számok összeadásának kommutativitása használható:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{esetén} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Most nézzük meg, mikor lehet megoldás az  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  : világos, hogy pontosan  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  esetén (ilyenkor szokás homogén LERről beszélni).

Ekkor a megfelelő  $\mathbb{R}^n$ -beli egyenlet jobb oldalán egy csupa nullából álló rendezett valós szám  $n$ -es szerepel. Ez az 1/2 oldalon definiált összeadásnál mindent helyben hagy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

A csupa nullából álló rendezett valós szám  $n$ -es tehát úgy viselkedik itt, mint a középiskolában a vektoroknál a nullvektor! Ha erre bevezetjük a  $\mathbf{0} =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ jelölést, } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

helyett pedig azt írjuk, hogy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , akkor az előbbi észrevétel sokkal kisebb helyet foglal el:  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ . Rögtön vérszemet is kaphatunk, könnyen ellenőrizhető, hogy egy rendezett valós szám  $n$ -es komponenseinek ellentettjeiből álló  $n$ -es eljuttassa az ellentett szerepét:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

az  $\mathbf{a}$  ellentettjének szokásos  $(-\mathbf{a})$  jelölésével ez röviden így néz ki:  $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Itt természetesen vetődik fel a kapcsolat a  $-1$ -gyel való szorzással, látjuk, hogy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a})$ . Vizsgálhatjuk tovább, mi minden vihető át a középiskolai vektorismeretekből, pl. az összeadás és a skalárral való szorzás (mindkét) disztributív kapcsolata itt is érvényes, csak most a bizonyításnál a valós számok összeadásának és szorzásának disztributív kapcsolatára lehet hivatkozni. A valós számok szorzásának asszociativitását is használhatjuk egy „asszociativitás”-szerű kapcsolat igazolásához. A rövid  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  jelölések felhasználásával érdemes rendszerezni az eddigieket.

**ÖSSZEFOGLALÁS** (az  $\mathbb{R}^n$ -beli komponensenkénti összeadás  $(+)$  és valós számmal való szorzás  $(\lambda \cdot)$  tulajdonságai):

I./1.  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , azaz  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ -hez hozzá van rendelve egy  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ;

I./2.  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  (kommutativitás);

I./3.  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (asszociativitás);

I./4.  $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} + \mathbf{0})$  („nullvektor” létezése);

I./5.  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \exists (-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} (= \mathbf{a} + (-\mathbf{a}))$  („ellentett” létezése);

II./1.  $\lambda \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , azaz  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ -hez hozzá van rendelve egy  $\lambda \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ;

II./2.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$  („asszociativitás”);

II./3.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$  (első disztributivitás);

II./4.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  (második disztributivitás);

II./5.  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

A középiskolai vektorműveletek tulajdonságaira gondolva, azt, hogy az  $\mathbb{R}^n$ -beli összeadás és valós számmal való szorzás rendelkezik a fenti 10 tulajdonsággal, úgy fogjuk mondani, hogy  $\mathbb{R}^n$  **vektortér** [vagy lineáris tér]  $\mathbb{R}$  felett. Ezentúl, ha  $\mathbb{R}^n$ -et írunk, az  $\mathbb{R}$  feletti  $\mathbb{R}^n$  vektortérre gondolunk a komponensenkénti műveletekkel, elemeit pedig **vektoroknak** fogjuk hívni. Szükségünk lesz majd arra, hogy az  $\mathbb{R}^n$  egy adott  $W$  részhalmazáról el tudjuk dönteni, hogy rendelkezik-e a fenti tulajdonságokkal  $\mathbb{R}$  felett az  $\mathbb{R}^n$ -beli műveletek megszorításaira nézve. A megszorításokkal kapcsolatok gondokat a következő egyszerű definícióval kerüljük el:

DEFINÍCIÓ:  $W$  **altér**  $\mathbb{R}^n$ -nek [jelölése:  $W \leq \mathbb{R}^n$ ], ha teljesülnek:

1.  $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$     2.  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$     3.  $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W \Rightarrow \lambda \mathbf{a} \in W$ .

Az altérek egyéb tulajdonságainak vizsgálatáról később lesz szó, most a 10 kiemelt tulajdonsággal kapcsolatban megjegyezzük, hogy pl. ! kínálkozik I./4-be és I./5-be, hisz bárki be tudja bizonyítani, hogy az 1/3 oldalon megadottn kívül nincs más elem a kívánt tulajdonsággal. Mivel valós számok szorzata csak úgy lehet 0, hogy valamelyik tényező 0,  $\mathbb{R}^n$ -ben a komponensenkénti összeadás és skalárral való szorzás definíciójából az is rögtön leolvasható, hogy  $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$  vagy  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Most összeadást és skalárral való szorzást tartalmazó kifejezéseket szeretnénk vizsgálni, nem szeretnénk azonban a zárójelezéssel bajlódni (most a gyakorlatok igényei fontosabbak), majd később az I./3. felhasználásával pótlólag igazoljuk, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető. Kényelmi szempontból még megállapodunk a következőben:  $\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a}$ .

DEFINÍCIÓ: Legyen  $k \geq 1$ ;  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  [vektorrendszer, rövidítve: vr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet];  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vr  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ . Az eredmény egy  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor. Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA:  $0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k$ . Bármely vr triviális lineáris kombinációja  $= \mathbf{0}$ .

DEFINÍCIÓ: Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$   $\mathbb{R}^n$ -beli vr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha  $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , nem mind 0, melyekre  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$  (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).

DEFINÍCIÓ: Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$   $\mathbb{R}^n$ -beli vr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mu_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0\}$  (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).

A második fogalom az előző tagadásaként adódik, azért részleteztük mégis, mert veszélyes: sokan hajlamosak  $\Rightarrow$  helyett  $\Leftarrow$ -t gondolni, pedig utóbbi mindössze annyi, hogy a triviális lineáris kombináció nullvektor.

Most már láthatjuk a hasznát az eddigieknek: tetszőleges rögzített  $n$  pozitív egész esetén  $\mathbb{R}^n$ -ben találhatunk  $n$  elemű lineárisan független vektorrendszert. Olyan példát választunk, ahol a számolás triviális, szinte látszik.

$$\text{Legyen } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n \text{ a következő: } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}; \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}\}$ . A komponensenkénti

$$\text{összeadás és skalárral való szorzás szerint ekkor } \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ebből pedig következik,}$$

hogy  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ . Beláttuk tehát, hogy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  L. Sőt, még azt is észrevehetjük, hogy  $\mathbb{R}^n$  minden elemét előállítják lineáris kombinációjukként (az együtthatók a komponensekből adódnak). Ennek alapján ezt a speciális tulajdonságú vektorrendszert bázisnak hívjuk, s majd  $\mathbb{R}^n$  triviális bázisaként emlegetjük. Általánosabban:

DEFINÍCIÓ:  $V \leq \mathbb{R}^n$  esetén legyen  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in V$ . A  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  BÁZIS (rövidítve: B)  $V$ -ben, ha L és a  $V$  minden vektorát előállítják lineáris kombinációjukként.

A vektorokra a középiskolai analógia alapján használtuk az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  jelölést [kézírásban aláhúzás javasolt], a későbbi alkalmazó tárgyakban majd  $a, b, c, \dots$  szerepel, ez azonban most még sok félreértést okozhatna.