A	B	C	Σ	J:

NÉV: ________________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat** *2015. január 15.*

Első rész (70 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 6 *pontot kell szerezni az A kérdéscsoportból.* (15 *pont*)

1. Melyek azok az $x \in \mathbb{R}$ valós számok, melyekre az $[1 \;\; 0 \;\; x]^T$, a $[2 \;\; 2 \;\; 2]^T$ és a $[4 \;\; 2 \;\; 3]^T$ vektorok lineárisan függetlenek?

   $x \neq 1/2$

2. Egy $U \leq \mathbb{R}^4$ altérben van 2 vektor, ami lineárisan összefüggő, és van 3 vektor, ami lineárisan független. Ha $\mathbf{u} \in U$ nem nullvektor, akkor hány olyan generátorrendszere van U-nak, amely tartalmazza $\mathbf{u}$-t?

   Számuk: végtelen

3. Legyen $U \leq \mathbb{R}^3$ azon vektoroknak a halmaza, amelyeknek a komponensei (a megadott sorrendben) számtani sorozatot alkotnak. Adjuk meg U-nak egy bázisát.

   Bázis pl. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

4. Mi lehet $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ha $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

   $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ olyan, melyre $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, akkor adjunk meg két különböző vektort, $\mathbf{y}_1$-et és $\mathbf{y}_2$-t, melyekre $A\mathbf{y}_1 = A\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   Pl. $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. Ha egy $n \times n$-es mátrix invertálható, mennyi lehet benne az $(n-1)\times(n-1)$-es nem nulla aldeterminánsok minimális száma?

   Számuk legalább: n

7. Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ egymásra merőleges geometriai egységvektorok. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$-val bezárt γ szögét.

   $\gamma = 0°$

8. Az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix elemeiből képzett $a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$ szorzat milyen előjellel kerül bele a $\det A$-t definiáló összegbe?

   Előjel: $-$

9. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix első oszlopának első eleme 3, a többi 0, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig tetszőleges invertálható mátrix. Határozzuk meg $\det(B^{-1}AB - 3I_n)$ értékét.

   $\det(B^{-1}AB - 3I_n) = 0$

10. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó Q kvadratikus alakot. Keressünk olyan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vektort, melyre $Q(\mathbf{u})$ negatív.

    Pl. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

11. Legyenek $\varphi, \psi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lineáris transzformációk, méghozzá φ a tér forgatása a z tengely körül $90°$-kal, ψ pedig a tér tükrözése az x-y-síkra. Hány dimenziós lesz $\mathcal{K}er(\varphi\psi\varphi)$?

    $\dim \mathcal{K}er(\varphi\psi\varphi) = 0$

12. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. Mik lehetnek $c \in \mathbb{R}$ értékei?

    $c \leq -3/4$

13. Határozzuk meg az $\mathbf{u} = [1+i \quad 2i-3 \quad 1+3i]^T \in \mathbb{C}^3$ vektor normáját a szokásos $\mathbf{v}^*\mathbf{u}$ skaláris szorzatra nézve.

$\|\mathbf{u}\| = 5$

14. Adjunk meg egy, a nullvektortól különböző $\mathbf{v}$ vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely (a szokásos $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve) merőleges mindazon vektorokra, melyekben a komponensek összege 0?

Pl. $\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

15. Egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ bázisban $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Mi lesz a transzformáció mátrixa a $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}$ bázisban?

$[\varphi]^{\mathbf{2u},\mathbf{2v};\mathbf{2u},\mathbf{2v}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 4 *pontot kell szerezni a B kérdéscsoportból.* (10 *pont*)

16. Mit jelent az, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek?

Az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, azaz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ esetén $\lambda_i = 0$ minden $1 \leq i \leq k$-ra.

17. Definiáljuk két geometriai vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális szorzatát.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, melyre:
1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (ahol $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a két vektor közötti hajlásszög);
2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$;
3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszert alkotnak (feltéve hogy $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ nem nulla).

18. Mondjuk ki a determinánsokra vonatkozó kifejtési tételt. (Ne feledkezzünk meg a tételben szereplő jelek magyarázatáról sem!)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és a_{ij} jelöli az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét, A_{ij} pedig az ehhez tartozó előjelezett aldeterminánst, akkor tetszőleges i-re $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (ez az i-edik sor szerinti kifejtés).

19. Mit jelent az, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix hasonló $\mathbb{R}$ fölött a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixhoz?

Azt mondjuk, hogy az A mátrix hasonló $\mathbb{R}$ fölött a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, melyre $B = D^{-1}AD$.

20. Mondjuk ki azt a tételt, amely egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix $\mathbb{R}$ fölötti diagonalizálhatóságára ad szükséges és elégséges feltételt. (Figyelem, itt nem a diagonalizálhatóság definícióját kérdezzük!)

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, ha $\mathbb{R}^n$-nek létezik A sajátvektoraiból álló bázisa.

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ________________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat/3** *2015. január 15.*

Második rész (40 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimum-követelmény az elégségeshez.*

21. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a vektorok lineáris összefüggőségének és a vektorok lineáris függésének fogalmát összekapcsoló tételt. (4 *pont*)

A hátlapon folytatható!

22. Definiáljuk a Vandermonde-determináns fogalmát, majd mondjuk ki és bizonyítsuk be a Vandermonde-determináns értékére vonatkozó állítást. (6 *pont*)

A hátlapon folytatható!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 14:$	1
$15 - 18:$	2
$19 - 22:$	3
$23 - 26:$	4
$27 - 35:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: 2015. január 15-én, csütörtökön 17 és 18 óra között a Déli tömb 3-711-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a szóbeli vizsgák napjain (többnyire kedden, szerdán és csütörtökön a délelőtti órákban).