Kérdések és válaszok lineáris algebrából

ELTE - IK

2015

rev. 1.0

Ez a dokumentum az ELTE IK lineáris algebra tárgy vizsgakérdéseit tartalmazza 2012-től 2014/2015 őszi félévének végéig LaTeX-ben összegyűjtve, rendszerezve, megválaszolva. A bizonyításoknál legnagyobb részben az órai jegyzetre, illetve *Freud Róbert: Lineáris Algebra* című könyvére támaszkodtam. Felhasználtam még *Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából* c. tankönyvét. Ezt a dokumentumot abban a reményben adom közre, hogy sokan hasznosnak találják, de a benne foglaltak helyességére semmilyen garanciát nem tudok vállalni.Bár igyekeztem pontos lenni, előfordulhatnak hibák, ha ilyet találsz, kérlek, jelezd a `kadlecsik@outlook.com` címen.

Utolsó módosítás: 2015.06.06. - Kadlecsik Csaba

Definíciók és tételkimondások

Mit jelent az, hogy egy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan független?

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan független, ha csak a triviális lineáris kombinációja $\mathbf{0}$.

Mit jelent az, hogy egy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan összefüggő?

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, ha léteznek olyan nem mind nulla $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ együtthatók, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.

Legyen $0 \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Mikor mondhatjuk, hogy $\mathbf{v}$ lineárisan függ A-tól?

Ha $\mathbf{v}$ előáll véges sok A-beli vektor lineáris kombinációjaként.

Hogyan definiáljuk $\mathbb{R}^n$ bázisait?

$\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_k$ vektorrendszer bázis, ha lineárisan függetlenek és $\mathbb{R}^n$ minden vektora előáll a valós együtthatós lineáris kombinációjaként.

Definiáljuk egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának fogalmát.

A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ a V altér bázisa, ha lineárisan független és V minden eleme előáll a valós együtthatós lineáris kombinációjaként.

Definiálja egy $\mathbb{R}^n$-beli altér dimenzióját.

$V \leq \mathbb{R}^n$ dimenziója 0, ha $V = \{\mathbf{0}\}$, egyébként V egy tetszőleges bázisának elemszáma.

Mikor nevezzük a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszert egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerének?

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generátorrendszer V-ben, ha $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$, és V minden eleme előáll $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineáris kombinációjaként.

$\emptyset \neq A$„$\subseteq$”$\mathbb{R}^n$ esetén hogy definiáltuk Span(A)-t?

Span(A) $\mathbb{R}^n$ összes A-t tartalmazó alterének a metszete.

Definiáljuk egy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangját.

A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Adott k elemű vektorrendszerre vonatkozóan milyen műveleteket nevetünk rangtartó átalakításoknak?

Rangtartó átalakítások:

- Sorrendcsere
- Egyik vektort lecseréljük a λ-szorosára, $\lambda \neq 0$

- Egy vektorhoz hozzáadjuk egy másik vektor λ-szorosát

Írja fel az elemi bázistranszformációra vonatkozó tételt.

$V \leq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázis V-ben. $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{b}_k$, $1 \leq i \leq k$, rögzített. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{i+1}, \ldots \mathbf{b}_n$ bázis V-ben $\Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$.

Definiáljuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ geometriai vektorok vektoriális szorzatát, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-t.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, ahol

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\gamma)$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög.
2. $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re.
3. $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ jobbrendszert alkotnak, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Definiáljuk három geometriai vektor vegyes szorzatát.

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzata $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Mondjuk ki a geometriai vektorokra vonatkozó felcserélési tételt.

Az $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ geometriai vektorokra $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Mondjuk ki a geometriai vektorok vektoriális szorzatára vonatkozó kifejtési tételt.

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix transzponáltját.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix transzponáltja $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ${}_i\left[A^T\right]_j = {}_j[A]_i$.

Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ és $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixok AB szorzatában az i. sor j. elemének képletét.

$$ {}_i[AB]_j = \sum_{l=1}^{k} {}_i[A]_l \; {}_l[B]_j $$

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix adjungáltját és mondjuk ki, mi a kapcsolat az adjungált és a mátrixszorzás között.

- $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ${}_i[A^*]_j = \overline{{}_j[A]_i}$
- $(AB)^* = B^* A^*$, ha az AB szorzat létezik.

Definiáljuk egy $\mathbb{R}$ feletti mátrix sorrangjának fogalmát.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix sorrangja az $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszloprangja, vagyis A^T oszlopaiból álló vektorrendszer rangja $\mathbb{R}^m$-ben.

Legyenek C és D ebben a sorrendben összeszorozható mátrixok. Milyen összefüggés áll fenn CD és C oszloprangja között?

$\rho_o(CD) \leq \rho_o(C)$

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix jobb oldali inverzének fogalmát.

$A^{(j)}$ az A mátrix jobbinverze, ha $A^{(j)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, és $AA^{(j)} = I_m$.

A rang fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixnak létezzen bal oldali inverze.

Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixnak létezik bal oldali inverze $\Leftrightarrow$ az A mátrix rangja n.

Mondjunk ki két lényegesen különböző feltételt, melyek azzal ekvivalensek, hogy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak létezik inverze.

- $\det(A) \neq 0$
- $\rho(A) = n$

Írja fel az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix determinánsának definícióját.

$$\det(A) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \\ (1,\ldots,n)}} (-1)^{I(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n}$$

A $\sum$ az $1, \ldots, n$ számok összes permutációján végigfut, $I(i_1, \ldots, i_n)$ az adott permutáció inverziószáma.

Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső háromszögmátrix determinánsának képletét.

$|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst.

B_{ij} az a mátrix, amit az eredeti A mátrix i. sorának és j. oszlopának elhagyásával kapunk. Az előjeles aldetermináns: $(-1)^{i+j}\det(B_{ij})$.

Írja fel egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix determinánsára vonatkozó kifejtési tételt.

Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ és jelölje A_{ij} az i. sorhoz és j. oszlophoz tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor

- $1 \leq i \leq n$: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$
- $1 \leq j \leq n$: $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $|AB| = |A||B|$.

A determináns fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy n egyenletből álló n ismeretlenes homogén lineáris egyenletnek legyen nem triviális megoldása.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek pontosan akkor van nem triviális megoldása, ha $|A| = 0$.

Mondjuk ki a lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó Cramer-szabályt.

Ha $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|A| \neq 0$, akkor tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re létezik egyetlen olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{b} \dots \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n])}$.

Mit jelent az, hogy két $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli mátrix, A és B hasonló egymáshoz $\mathbb{R}$ felett?

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor hasonlóak egymáshoz $\mathbb{R}$ felett, ha létezik olyan $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy $B = D^{-1}AD$.

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^n$ négyzetes mátrixhoz tartozó jobb oldali sajátvektor és sajátérték fogalmát.

- $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ jobb oldali sajátvektora A-nak. ha $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra.
- $\lambda \in \mathbb{R}$ jobb oldali sajátértéke A-nak, ha létezik olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^n$ mátrix $k_A(\lambda)$ karakterisztikus polinomját.

$k_A(\lambda) = \det(A - I_n \lambda)$

Mondjuk ki egy valós elemű mátrix (jobb oldali) sajátértékének és karakterisztikus polinomjának kapcsolatáról szóló tételt

Egy A valós mátrix (jobb oldali) sajátértékei megegyeznek karakterisztikus polinomjának valós gyökeivel.

Egy alkalmas determináns segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a λ_0 valós szám sajátértéke legyen az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak.

λ_0 pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $|A - \lambda_0 I_n| = 0$, ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrix.

Definiáljuk, mit jelent az, hogy egy valós elemű négyzetes mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett.

$A \in \mathbb{R}^n$ pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett, ha létezik olyan $D \in \mathbb{R}^n$ invertálható mátrix, melyre $D^{-1}AD$ diagonális mátrix.

A sajátvektor fogalma segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálható legyen $\mathbb{R}$ felett.

A pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett, ha létezik $\mathbb{R}^n$-ben az A sajátvektoraiból álló bázis.

Definiálja egy $\mathbf{x} \in V$ vektor euklideszi normáját.

$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

Mondjuk ki a V euklideszi tér $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira érvényes háromszög-egyenlőtlenséget.

$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, ahol $||\mathbf{x}||$ az $\mathbf{x} \in V$ vektor euklideszi normája.

Mondjuk ki a valós euklideszi terekre vonatkozó Cauchy-egyenlőtlenséget, nem megfeledkezve az egyenlőség esetéről sem.

V valós euklideszi tér, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárisan összefüggők.

Írjuk fel, mit jelent az, hogy egy $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak ...

	$\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	elnevezés
$\forall \lambda_k > 0$	$Q(\mathbf{x}) > 0$	pozitív definit
$\forall \lambda_k < 0$	$Q(\mathbf{x}) < 0$	negatív definit
$\forall \lambda_k \geq 0$	$Q(\mathbf{x}) \geq 0$	pozitív szemidefinit
$\forall \lambda_k \leq 0$	$Q(\mathbf{x}) \leq 0$	negatív szemidefinit
$\exists \lambda_i > 0$ és $\exists \lambda_j < 0$	$Q(\mathbf{x}_i) > 0$ és $Q(\mathbf{x}_j) < 0$	indefinit

Mondjuk ki a valós szimmetrikus mátrixok spektráltételét.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik sajátvektorokból álló bázisa, ha szimmetrikus.

Definiáljuk az $A \in \mathbb{R}^n$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus szorzatát.

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = |A|$$

Hogyan definiáltuk azt, hogy egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény mikor vektortérhomomorfizmus?

- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \varphi(\mathbf{u})$

Mondjuk ki a lineáris leképezések egyértelmű kiterjesztési tételét.

$\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ bázisok $\mathbb{R}^n$-ben,$\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^m$-ben. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés létezik, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{b}_i \quad 1 \leq i \leq n$.

Definiáljuk egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés magterét.

$\mathcal{K}er(\varphi) = \{\mathbf{x} \in V_1 | \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in V_2\}$

Mondjuk ki a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenzióösszefüggést.

V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$. Ekkor $\dim(V_1) = \dim(\mathcal{K}er(\varphi)) + \dim(\mathcal{I}m(\varphi))$

Definiáljuk egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformáció sajátvektorának fogalmát.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sajátvektora φ-nek, ha nem nullvektor és $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ valamely λ skalárra.

A dimenzió fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy két $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós vektortér izomorf legyen.

U, V véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ felett pontosan akkor izomorfak, ha $\dim(U) = \dim(V)$.

Mikor nevezünk egy V komplex vektortéren értelmezett bilineáris alakot Hermite-félének?

Egy $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alak Hermite-féle, ha $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re.

Bizonyítások

Igazoljuk, hogy ha egy lineárisan független vektorrendszerhez hozzáveszünk egy új vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő, akkor az új vektor lineárisan függ a többi vektortól.

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ lineárisan független, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ lineárisan összefüggő.
Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ skalárok, hogy $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n + \alpha_{n+1}\mathbf{b} = \mathbf{0}$
$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n + = (-1)\alpha_{n+1}\mathbf{b}$
$\frac{\alpha_1}{(-1)\alpha_{n+1}} \mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{(-1)\alpha_{n+1}} \mathbf{a}_n + = \mathbf{b}$
Ezek a törtek mindig léteznek, mert ha $\alpha_{n+1} = 0$ lenne, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ összefüggő lenne.
Tehát megkaptuk $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ egy lineáris kombinációjaként $\mathbf{b}$-t.

Igazoljuk a következő tételt: Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$, melynek van véges generátorrendszere, és $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Ekkor V bármely véges generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

- Ha V generátorrendszere egyelemű, az generálja V-t mert $V \neq \{\mathbf{0}\}$.
- Ha V generátorrendszere nem egyelemű és összefüggő, hagyjunk el egy olyan vektort, ami függ a többitől. Ismételjük ezt a lépést addig, amíg független vagy egyelemű generátorrendszer nem kapunk.

Mondjuk ki és bizonyítsuk be a kicserélési tételt.

$V \leq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineáris független rendszer, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ generátorrendszer V-ben.

- $\exists j \in \{1, \ldots, m\}$, hogy $\mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ független.
- $k \leq m$

Bizonyítás:

- $k = 1$: triviális
- $k \geq 2$: Indirekt bizonyítás:
  1. Tegyük fel, hogy $(\forall j \in \{1, \ldots m\}) : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ összefüggő.
  2. Mivel $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ független, $\mathbf{b}_j$ függ $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$-tól $\forall j$-re.
  3. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ generátorrendszer $\Rightarrow$ generálja $\mathbf{a}_1$-et.
  4. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ függ $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$-tól $\Rightarrow \mathbf{a}_1$ is. $\lightning$
- $\mathbf{b}_{j_1}$ bevihető $\mathbf{a}_1$ helyére, $\mathbf{b}_{j_2}$ bevihető $\mathbf{a}_2$ helyére, ... Mivel a rendszer minden lépésben független marad, $\mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \mathbf{b}_{j_k}$ mind függetlenek $\Rightarrow k \leq m$.

Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ Mondjuk ki az $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k$ vektorrendszerre vonatkozóan három rangtartó átalakítást és az egyikről bizonyítsuk be, hogy valóban rangtartó.

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, k \geq 2$

- $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$

Biz.: $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \Rightarrow$ a dimenziójuk is megegyezik.

- $r(\lambda\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$
- $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$

Legyen W_1 és W_2 altér $\mathbb{R}^n$-ben. Igazoljuk, hogy $W_1 \cap W_2$ is altér $\mathbb{R}^n$-ben.

- $\mathbf{0} \in W_1$, $\mathbf{0} \in W_2 \Rightarrow \mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$
- $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in W_1 \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_1$
  $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in W_2 \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_2$.
  Tehát $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_1 \cap W_2$.
- $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W_1 \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W_1$
  $\mathbf{a} \in W_2 \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W_2$
  Tehát $\mathbf{a} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W_1 \cap W_2$.

$\emptyset \neq A$„$\subseteq$”$\mathbb{R}^n$ esetén hogy definiáltuk $W(A)$-t? Igazoljuk, hogy $W(A)$ altér.

A nem üres vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. $W(A) = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v}$ lineárisan függ A-tól$\}$.

$W(A) \leq \mathbb{R}^n$

Biz.: $A = \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$

$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{a}_n \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{a}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{a}_n$

$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n) = (\lambda\alpha_1)\mathbf{a}_1 + \dots + (\lambda\alpha_n)\mathbf{a}_n$

Legyen A nem üres részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Definiáljuk az A által generált altér, $\mathrm{Span}(A)$ fogalmát, majd igazoljuk, hogy $\mathrm{Span}(A) = W(A)$, ahol $W(A)$ az A elemeitől lineárisan függő vektorok altere $\mathbb{R}^n$-ben.

$\mathrm{Span}(A)$ $\mathbb{R}^n$ összes A-t tartalmazó alterének a metszete.

- $\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} \in W(A)$, tehát $W(A)$ is egy A-t tartalmazó altér $\Rightarrow \mathrm{Span}(A) \subseteq W(A)$
- Legyen $W' \leq \mathbb{R}^n$ tetszőleges A-t tartalmazó altér $\mathbb{R}^n$-ben.
  $\mathbf{v} \in W(A) \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n \Rightarrow \mathbf{v} \in W' \Rightarrow W(A) \subseteq W'$
  Ez a gondolatmenet tetszőleges W'-re igaz, tehát $W(A) \subseteq \cap W' = \mathrm{Span}(A)$.

Mondjuk ki és igazoljuk a geometriai vektorok $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$-beli koordinátákból való kiszámítására vonatkozó képletet.

Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egymásra merőleges egységvektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak,

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$,$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, a többi szorzat hasonlóan számítható.
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, a többi szorzat hasonlóan számítható.

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \text{ vagyis } \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$$

Bizonyítás: $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ vektornak megfelelő lesz az $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Skalárszorzással ellenőrizhető, hogy merőlegesek.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Mondjuk ki és igazoljuk a mátrixszorzás asszociativitására vonatkozó tételt.

$A \in \mathbb{R}^{k\times l}$,$B \in \mathbb{R}^{l\times m}$,$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ekkor $\exists(AB)C$ és $\exists A(BC)$ és $(AB)C = A(BC)$
Bizonyítás:

$${}_i[(AB)C]_j = \sum_{p=1}^{k} {}_i[(AB)]_p \; {}_p[C]_j = \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{q=1}^{n} {}_i[A]_q \; {}_q[B]_p \right) {}_p[C]_j = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} {}_i[A]_q \; {}_q[B]_p \; {}_p[C]_j$$

Mivel a valós számok szorzása asszociatív, ez egyenlő a következővel:

$$\sum_{q=1}^{n} {}_i[A]_q \left(\sum_{p=1}^{k} {}_q[B]_p \; {}_p[C]_j \right) = \sum_{q=1}^{n} {}_i[A]_q \; {}_q[BC]_j = {}_i[A(BC)]_j$$

Mondjuk ki a mátrixok transzponálása és az egyéb mátrixműveletek közötti kapcsolatot és igazolja a szorzat transzponáltjára vonatkozó összefüggést.

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$${}_i\left[(AB)^T\right]_j = {}_j[(AB)]_i = \sum_{l=1}^{n} {}_j[(A)]_l \; {}_l[(B)]_i = \sum_{l=1}^{n} {}_l\left[(A^T)\right]_j \; {}_i\left[(B^T)\right]_l = \sum_{l=1}^{n} {}_i\left[(B^T)\right]_l \; {}_l\left[(A^T)\right]_j$$

Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két azonos sora, a determinánsa 0, mutassunk példát arra, amikor az állítás megfordítása nem teljesül.

- Két azonos sor cseréjétől nem változik a mátrix, így a determinánsa sem. Ha két sort felcserélünk a mátrixban a determinánsa (-1)-gyel szorzódik.
- Az azonos sorok cseréjétől egyrészt nem változik, másrészt előjelet vált a determináns, tehát $|A| = -|A| \Rightarrow |A| + |A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$
- Az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa nulla, de nincs két egyező sora.

Igazoljuk, hogy ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix valamelyik sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát, akkor a determináns értéke nem változik. (A felhasznált segédállításokat nem kell bizonyítani, de pontosan ki kell mondani.)

Segédállítás: Ha egy sor minden eleme kéttagú összeg, a determináns két determináns összegére bontható, ahol az egyikben az adott sorban a kéttagú összeg egyik tagja, a másikban a másik tagja szerepel, a többi elem a két determinánsba ugyanaz, mint az előzőben volt.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \dots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Segédállítás: Egy determináns egy sorát egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal szorozva a determináns értéke is λ-szorosára változik.
Segédállítás: Ha egy $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két azonos sora, a determinánsa 0.
Bizonyítás: Legyen $_k[A]$ az A mátrix k. sora. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $k < l$. Ekkor

$$\begin{vmatrix} {}_1[A] \\ \vdots \\ {}_k[A]+\lambda_l[A] \\ \vdots \\ {}_l[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ \vdots \\ {}_k[A] \\ \vdots \\ {}_l[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ \vdots \\ \lambda_l[A] \\ \vdots \\ {}_l[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ \vdots \\ {}_l[A] \\ \vdots \\ {}_l[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|$$

Mondjuk ki és bizonyítsuk be azt a tételt, ami egy valós mátrix rangját összekapcsolja bizonyos részmátrixainak determinánsával.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\rho(A) = r \geq 1$ esetén A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, menynek determinánsa nem 0, de minden $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.
Bizonyítás:

- A rang r, így van r darab lineárisan független oszlop.
- Ezeket az oszlopokat kiválasztva, mivel sorrang = oszloprang, r db lineárisan független sor is kiválasztható. Ez egy $r \times r$ méretű mátrix, aminek a rangja r, tehát a determinánsa nem 0.
- $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrixot választva, mivel a rang r, az $r+1$ oszlop biztosan összefüggő, tehát a determináns 0.

Definiáljuk a Vandermonde-determináns fogalmát, majd bizonyítsuk be az értékére adható explicit képletet.

$n \geq 2, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén $V_n(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i - a_j)$.

Bizonyítás: Teljes indukció n szerint.

- $n = 2$-re nyilvánvaló.

- $n \geq 3$ esetén:
  - Vonjuk ki jobbról bal fele haladva minden oszlopból az őt megelőző oszlop a_1-szeresét:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$
  - Vonjuk ki minden sorból az első sort, az oszlopokból pedig kiemelhetünk $a_2 - a_1$-et, $a_3 - a_1$-et...
  - A mátrix: $(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$
  - Ami pedig egyenlő $(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) V_{n-1}(a2, \dots a_n)$-vel.

Mondja ki és bizonyítsa a determinánsok szorzástételét.

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$. Bizonyítás:

- Legyen $C \in \mathbb{R}^{i \times i}$, $D \in \mathbb{R}^{j \times j}$, ekkor $\left[\begin{array}{c|c} C & \begin{matrix} \bullet_{11} & \dots & \bullet_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet_{u1} & \dots & \bullet_{uu} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & D \end{array}\right]$ blokkmátrix determinánsa $= |C||D|$.

  A $\begin{matrix} \bullet_{11} & \dots & \bullet_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet_{u1} & \dots & \bullet_{uu} \end{matrix}$ blokk elemei nem számítanak az eredmény szempontjából.

- Hasonlóan az előzőhöz a $\left[\begin{array}{c|c} C & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \bullet_{11} & \dots & \bullet_{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet_{w1} & \dots & \bullet_{ww} \end{matrix} & D \end{array}\right]$ blokkmátrix determinánsa is $|C||D|$.

- Az előzőek alapján $|A||B| = \det \left(\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{matrix} & B \end{array}\right] \right)$, ahol a $\begin{matrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{matrix}$ blokk $=$ $-I_n$, az egységmátrix (-1)-szerese.

- Az előző pontban felírt $\left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right|$ determináns determinánstartó átalakításokkal $\left|\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right|$ alakra hozható, amiből sorcserékkel a $(-1)^n \left|\begin{array}{c|c} -I_n & 0 \\ \hline A & AB \end{array}\right|$ determinánsérték következik, ami egyenlő $|AB|$-vel.

SÉ/I.: Mondjuk ki és igazoljuk egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja és jobb oldali sajátértékei közötti összefüggést (nem feledkezve meg a megfelelő definíciók kimondásáról sem).

Definíciók:

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ jobb oldali sajátértéke A-nak, ha létezik olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
2. $A \in \mathbb{R}^n$ mátrix $k_A(\lambda)$ karakterisztikus polinomja: $k_A(\lambda) = \det(A - I_n\lambda)$
3. Egy A valós mátrix jobb oldali sajátértékei megegyeznek karakterisztikus polinomjának valós gyökeivel.

Bizonyítás:

- Egy λ valós szám pontosan akkor sajátérték, ha $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, amelyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egy homogén lineáris egyenletrendszer $\Rightarrow [(A - \lambda I_n)][\mathbf{v}] = [\mathbf{0}]$. Ennek az egyenletrendszernek a valós megoldásait keressük.

Megjegyzés: Homogén lineáris egyenletrendszer olyan egyenletrendszer, melyben a szabad tagok nullával egyenlők.

SÉ/II.: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, igazoljuk, hogy λ_0 pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítva SÉ/I. tételnél.

SÉ/III.: Igazolja, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix jobb oldali sajátértékei megegyeznek a karakterisztikus polinom valós gyökeivel.

Bizonyítva SÉ/I. tételnél.

SÉ/IV.: Definiáljuk egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-es valós elemű mátrix karakterisztikus polinomjának, illetve jobb oldali sajátértékének a fogalmát, majd igazoljuk, hogy $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ pontosan akkor jobb oldali sajátértéke az A mátrixnak, ha λ_0 gyöke az A karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítva SÉ/I. tételnél.

Igazoljuk, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás teljes indukcióval.
Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots,$ sajátvektorai $\mathbf{v}_1, \ldots$

- $k = 1$-re $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, az állítás nyilvánvaló.
- Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ különböző sajátértékek, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$ összefüggő.

- Az indukciós feltevés alapján $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ független, tehát $\mathbf{v}_{k+1}$ függ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$-tól.
- Ez azt jelenti, hogy alkalmas skalárokkal $\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$.
- A fenti egyenletet A-val illetve λ_{k+1}-gyel szorozva:
  - $A\mathbf{v}_{k+1} = A\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + A\alpha_k \mathbf{v}_k$
  - $\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \lambda_{k+1}\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\alpha_k \mathbf{v}_k$
- Ezt a két egyenletet egymásból kivonva: $(A - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1(A - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(A - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$
- $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ $\forall i$-re, tehát a fenti egyenletbe A helyére λ_i írható.
- $(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$
- $0\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$
- $\mathbf{0} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$
- Mivel $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ független, csak a triviális lineáris kombinációja $\mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{i+1}) = 0$
- Mivel λ_i és λ_{i+1} különböző sajátértékek, minden $\alpha_i = 0$.
- $\alpha_i = 0$ visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe: $\mathbf{v}_{k+1} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ $\lightning$

Mondjuk ki és bizonyítsuk a hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjairól szóló állítást.

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.
Bizonyítás: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, A \sim B$
$|B - \lambda I_n| = |D^{-1}AD - \lambda I_n| = |D^{-1}(A - \lambda I_n)D| = |D^{-1}||(A - \lambda I_n)||D| = |(A - \lambda I_n)||D||D^{-1}| = |(A - \lambda I_n)|$

Igazoljuk, hogy $n > 0$ esetén tetszőleges n-dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.

Elég ortogonális bázist keresni, ebből normával osztva könnyen lehet ortonormált bázist csinálni.
Ortonormált bázis keresése Graham-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással:

- Legyen $\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$ bázis.
- Legyen $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$, tegyük fel, hogy $\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_i$ már páronként ortogonálisak és $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_i) = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_i)$
- Legyen $\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{b}_i + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots \lambda_i \mathbf{e}_i$
- Úgy kell $\mathbf{e}_{i+1}$-et meghatározni, hogy $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{i+1}) = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_{i+1})$ legyen.
- Legyen $1 \leq j \leq i$, ekkor $\langle \mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_i + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots \lambda_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \lambda_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle + \cdots + \lambda_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle + \lambda_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle$
- Mivel $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_i) = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_i)$, így $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_i)$ dimenziója i, így $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$
- Innen $\lambda_j = -\frac{\langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle}{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}$

Mondjuk ki és bizonyítsuk be a valós euklideszi terekre érvényes Cauchy-egyenlőtlenséget

V valós euklideszi tér, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggők.
Bizonyítás

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ összefüggők $\Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$
   - $|\langle\lambda\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle| = |\lambda\langle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{y}||^2 = |\lambda| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot ||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan függetlenek, tehát $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.
   - $\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \Rightarrow 0 < \langle\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle$
   - $\langle\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle = \langle\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle + \langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$
   - $\langle\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle + \langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = ||\lambda\mathbf{x}||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + ||\mathbf{x}||^2 = |\lambda|^2||\mathbf{x}||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + ||\mathbf{x}||^2$
   - $\lambda = \alpha\overline{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméterválasztással biztosítható, hogy a szorzat valós legyen.
   - $|\lambda|^2||\mathbf{x}||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + ||\mathbf{x}||^2 = |\alpha\overline{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}|^2||\mathbf{x}||^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha\overline{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + ||\mathbf{x}||^2 = \alpha^2|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2||\mathbf{x}||^2 + 2\alpha|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 + ||\mathbf{y}||^2$
   - Az eredeti feltétel értelmében $0 < \alpha^2|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2||\mathbf{x}||^2 + 2\alpha|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 + ||\mathbf{y}||^2$
   - Ezt megszorozva $||\mathbf{x}||^2 > 0$-val: $0 < |\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2(\alpha^2||\mathbf{x}||^4 + 2\alpha||\mathbf{x}||^2) + ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2$
   - Tehát $|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 < |\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2((\alpha||\mathbf{x}||^2 + 1)^2) + ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2$
   - Innen $\alpha = -\frac{1}{||\mathbf{x}||^2}$ választással kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

Mondjuk ki és igazoljuk az euklideszi terek vektoraira vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget

$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$
Bizonyítás:
$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = \langle\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = ||\mathbf{x}||^2 + \langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \overline{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} + ||\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + ||\mathbf{y}||^2 \leq ||\mathbf{x}||^2 + 2|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + ||\mathbf{y}||^2 \underset{\text{Cauchy-egyenlőtlenség}}{\leq} ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2$

Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris leképezések egyértelmű kiterjesztési tételét.

$\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ bázisok $\mathbb{R}^n$-ben,$\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^m$-ben. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés létezik, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{b}_i \quad 1 \leq i \leq n$.
Bizonyítás:
Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots x_n\mathbf{e}_n$

- $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots x_n\mathbf{e}_n) = \varphi((x_1\mathbf{e}_1) + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots x_n\mathbf{e}_n) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2 + \ldots x_n\mathbf{e}_n)$
- $\varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2 + \ldots x_n\mathbf{e}_n) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + \varphi(x_n\mathbf{e}_n)$
- A fenti egyenlet $x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + x_2\varphi(\mathbf{e}_2) + x_n \cdots + \varphi(\mathbf{e}_n)$ formára hozható. (Egyértelműség)
- Ha $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots x_n\mathbf{e}_n$, $\varphi(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{b}_1 + \ldots x_n\mathbf{b}_n$ megfelelő leképezés. (Létezés)

Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenzióösszefüggést

V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$. Ekkor $\dim(V_1) = \dim(\mathcal{K}er(\varphi)) + \dim(\mathcal{I}m(\varphi))$
Bizonyítás:

- Tegyük fel, hogy a következő pontban $0 < s < n$
- Legyen $\dim(V_1) = n$,$\dim(\mathcal{K}er(\varphi)) = s$. Legyen $\mathcal{K}er(\varphi)$ egy bázisa: $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$
- $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ a $\mathbf{b}_{s+1}, \ldots, \mathbf{b}_n$ vektorokkal kiegészíthető V_1 egy bázisává.

- Állítás: $\varphi(\mathbf{b}_{s+1}), \dots \varphi(\mathbf{b}_n)$ bázis $\mathcal{Im}(\varphi)$-ben.
  - Legyen $\varphi(\mathbf{u})$ $\mathcal{Im}(\varphi)$ egy tetszőleges eleme.
  - $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \dots \lambda_n\mathbf{b}_n$, tehát $\varphi(u) = \varphi(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \dots \lambda_n\mathbf{b}_n)$
  - $\varphi(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \dots \lambda_n\mathbf{b}_n) = \lambda_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\mathbf{b}_n)$
  - Mivel $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_s$ bázis $\mathcal{Ker}(\varphi)$-ben, a képük 0.
  - $\lambda_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\mathbf{b}_n) = \lambda_{s+1}\varphi(\mathbf{b}_{s+1}) + \dots + \lambda_n\varphi(\mathbf{b}_n)$
  - Tehát $\varphi(\mathbf{b}_{s+1}), \dots \varphi(\mathbf{b}_n)$ generátorrendszer $\mathcal{Im}(\varphi)$-ben.
  - Tegyük fel, hogy $\varphi(\gamma_{s+1}\mathbf{b}_{s+1}) + \dots + \gamma_n\varphi(\mathbf{b}_n) = \mathbf{0} \qquad (\star)$
  - Mivel φ lineáris, az egyenlet bal oldala: $\varphi(\gamma_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} + \dots + \gamma_n\mathbf{b}_n)$
  - Legyen $\mathbf{x} = \gamma_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} + \dots + \gamma_n\mathbf{b}_n$
  - A $(\star)$ egyenletbe visszahelyettesítve: $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{Ker}(\varphi)$
  - Mivel $\mathbf{x} \in \mathcal{Ker}(\varphi)$, $\mathbf{x}$ előáll a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$, $\mathcal{Ker}(\varphi)$ bázisvektorai lineáris kombinációjaként is.
  - $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \dots, \alpha_s\mathbf{b}_s = \gamma_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} + \dots + \gamma_n\mathbf{b}_n$
  - $\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \dots, \alpha_s\mathbf{b}_s - \gamma_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} - \dots - \gamma_n\mathbf{b}_n$
  - Ez pedig a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisvektorok lineáris kombinációja, ami csak úgy lehet $\mathbf{0}$, ha minden α_i és γ_j is 0.
- Tehát $\varphi(\mathbf{b}_{s+1}), \dots \varphi(\mathbf{b}_n)$ bázis $\mathcal{Im}(\varphi)$-ben, innen adódik a dimenzióösszefüggés.
- Ha $\dim(\mathcal{Ker}(\varphi)) = 0$, V_1 tetszőleges bázisával dolgozhatunk. Ha $\mathcal{Ker}(\varphi) = V_1$, akkor $\mathcal{Im}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$.

Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Igazolja a következő tételt: $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim(V_1) = \dim(V_2)$

- Az állítás 0 dimenziós vektorterekre triviális. Tegyük fel, hogy $\dim(V_1) = n \neq 0$
- $\Rightarrow$ irány:
  - $V_1 \cong V_2$, tehát létezik közöttük bijektív homogén lineáris leképezés :φ
  - $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben. Állítás: $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots \varphi(\mathbf{e}_n)$ bázis V_2-ben.
    * Legyen $\mathbf{v} \in V_2$. Mivel φ szürjektív, $\exists \mathbf{u} \in V_1 : \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u})$
    * $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$
    * $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n) = u_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + u_n\varphi(\mathbf{e}_n)$, tehát $\varphi(\mathbf{e}_i)$ generátorrendszer.
    * Tegyük fel, hogy $\alpha_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$
    * Ekkor $\varphi(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$
    * $\mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0})$, így ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha_i = 0$
- $\Leftarrow$ irány:
  - Legyen $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben, $\mathbf{f}_1, \dots \mathbf{f}_n$ bázis V_2-ben. Az egyértelmű kiterjesztési tétel alapján egyértelműen létezik olyan vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_i$.
  - Állítás: φ bijektív
    * Legyen $\mathbf{v} \in V_2$. $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{f}_n = \beta_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \beta_n\varphi(\mathbf{e}_n)$
    * A fenti egyenletből $\mathbf{v} = \varphi(\beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n)$, tehát φ szürjektív.
    * φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$
    * Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{Ker}(\varphi)$, tehát $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

- $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots x_n\mathbf{e}_n$
- $\mathbf{0} = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots x_n\varphi(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{f}_1 + \dots x_n\mathbf{f}_n$ Tehát minden $x_i = 0$, φ valóban injektív.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén hogyan változik egy bilineáris alak mátrixa új bázisra való áttérésnél? Mondjuk ki és bizonyítsuk be az erre vonatkozó tételt.

???