Lineáris algebra 1. ZH (2015. 10. 16.) megoldás

Készítette: Budai Martin, Mosi pajtás közreműködésével

1. Igaz, vagy hamis?

a) Két bázis metszete nem lehet üres halmaz.
Hamis. Ellenpélda: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right\}$ *mindkét vektorhalmaz bázis* $\mathbb{R}^2$*-ben, és a két halmaz metszete üres.*

b) $\mathbb{R}^n$-ben minden 2n elemű vektorhalmaz lineárisan összefüggő.
Igaz. n dimenzióban a lineárisan független vektorhalmazok maximális elemszáma n.

c) Két altér uniója mindig altér.
Hamis. Például a síkon altér a derékszögű koordinátarendszer x és y tengelye is, uniójuk viszont nem. Ha például az x és y tengelyekről veszünk egy-egy vektort, összeadjuk őket, akkor az összegvektor egyik tengelyen sem lesz rajta.

d) Lineárisan összegfüggő vektorhalmaz minden részhalmaza lineárisan összefüggő.
Hamis. Például, ha egy olyan egyelemű részhalmazt nézünk, amelynek nem eleme a nullvektor, akkor az a részhalmaz lineárisan független.

e) Ha az **a** vektort ki tudjuk fejezni **b**, **c**, **d**-vel, akkor **b**-t ki lehet fejezni **a**, **c**, **d**-vel. (Azaz $\boldsymbol{a} \in Span\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\} \to \boldsymbol{b} \in Span\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$)
Hamis. Írjuk fel az **a** *vektort a* **b, c, d** *vektorokkal!* $\boldsymbol{a} = \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d}$ $(\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$. *Ebből az egyenletből* **b** *kifejezhető:* $\boldsymbol{b} = \frac{1}{\beta}\boldsymbol{a} - \frac{\gamma}{\beta}\boldsymbol{c} - \frac{\delta}{\beta}\boldsymbol{d}$, *viszont, ha* $\beta = 0$, *akkor az egyenletnek nincs megoldása.*

2. Igaz-e, hogy $\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix} \in \boldsymbol{Span}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{2}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}\right\}$**?**
Igen. Az első vektorból vonjuk ki a másik kettőt, és megkapjuk a vizsgált vektort.

3. Az alábbi két halmaz közül melyik altér? Arról, ami altér, igazold, hogy altér, arról ami nem altér, igazold, hogy nem altér. Mennyi az altér dimenziója?

$$H_1 = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1^2 = x_4^2\right\}$$

Ez nem altér, mivel nem zárt a vektorok összeadására, például:

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Itt teljesül, hogy $2^2=(-2)^2$ és $2^2=2^2$ de az összegvektorban $4^2\neq0^2$.

$$H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1^3 = x_4^3 \right\}$$

Ez altér. Ennek igazolásához vizsgáljuk meg az altér definíciójának 3 pontját!

1. A nullvektor eleme ennek a halmaznak, mivel $0^3=0^3$.
2. Zárt-e a vektorok összeadására?

$$\begin{bmatrix} \sqrt[3]{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \\ \sqrt[3]{x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt[3]{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \\ \sqrt[3]{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1} \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1} \end{bmatrix}$$

   Ez az egyenlet igaz, mivel $(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1})^3 = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1})^3$ a köbgyök és a köbfüggvény bijekció volta miatt.

3. Zárt-e a skalárral való szorzásra?

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \\ \sqrt[3]{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \sqrt[3]{x_1} \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \\ \lambda \cdot \sqrt[3]{x_1} \end{bmatrix}$$

   Ez az egyenlet is igaz, mivel $(\lambda \cdot \sqrt[3]{x_1})^3 = (\lambda \cdot \sqrt[3]{x_1})^3$ teljesül a köbfüggvény bijekciója miatt.

Ennek az altérnek a dimenziója 3, mert a felírásban ennyi szabad tag szerepel.

4. Mennyi a következő vektorhalmaz rangja:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

A feladatnak több megoldása is lehetséges. Végezzünk a vektorokon elemi bázistranszformációt!

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & -8 & 24 & 16 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -35 & -24 \\ 7 & -18 & -12 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{2}{12} & 0 \\ -\frac{35}{12} & -2 \\ \frac{461}{12} & 2 \end{matrix}$$

1. oszlop bevitele a bázisba → 2. oszlop bevitele a bázisba (a 0 sort töröljük) → mivel van 1 db 0 elem, ezért már csak 1 oszlopot vihetünk be a bázisba.

Tehát a vektorhalmaz rangja: 3.

5. Bizonyítsd be, hogy ha {x, 2y+x, x+z-y} összefüggő, akkor {x,y,z} is az!

Mivel feltesszük, hogy a baloldali vektorrendszer összefüggő, választhatunk úgy egy vektort a halmazból, hogy az felírható a többi vektor lineáris kombinációjával. Vizsgáljuk meg először az **x** vektort, melyet felírhatunk a következő módon ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \alpha(2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{x} &= 2\alpha\boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{z} - \beta\boldsymbol{y} \\ (1-\alpha-\beta)\boldsymbol{x} &= (2\,\alpha-\beta)\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{0} &= (-1+\alpha+\beta)\boldsymbol{x} + (2\,\alpha-\beta)\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

Ha az **x, y, z** vektorok lineárisan függetlenek, akkor az összes együtthatónak 0-nak kell lennie. Tehát az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -1+\alpha+\beta &= 0 \\ 2\,\alpha-\beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből adódik, hogy $\beta = 0$. Visszahelyettesítve a második egyenletből adódik, hogy $\alpha = 0$. Viszont ekkor, visszahelyettesítve az első egyenletbe, ellentmondáshoz jutunk: $-1 \neq 0$.

Ebből következik, hogy az együtthatók nem lehetnek egyszerre 0-k, így a vektorok összefüggők. (Ha nem ez jött volna ki, akkor a másik két vektort is hasonlóan végig kell számolni!)

6. Adott $\mathbb{R}^5$-nek két altere: V és W, ahol dim(V)=2 és dim(W)=3. Ha Span(V,W)=$\mathbb{R}^5$, azaz együtt kigenerálják az egész teret, akkor mi lehet a metszetük (V∩W)?

Mivel a nullvektor minden altérnek eleme kell, hogy legyen, ezért azt V és W is tartalmazza, így a metszetükben is biztos benne van. Mivel együtt kiadják az egész teret, ezért ezen kívül más elemet nem tartalmazhat a metszet, mivel ha tartalmazna, akkor létezne egy olyan bázis V-ben és W-ben is, amelyben ez a vektor felírható. Ekkor azonban azok uniója nem lenne 5 elemű, tehát nem generálnák ki az egész teret.

Tehát:

$$V \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

7. Milyen mátrixok a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} \text{ és } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1}$$

Nézzük meg a „mátrixsorozat” első néhány tagját:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sejtés: a „mátrixsorozat" páros tagjai az egységmátrix, a páratlan tagjai pedig az eredeti mátrix. Ehhez elég belátni a páros tagokra vonatkozó állítást, mivel a páratlan tagok felírhatók a következő formában:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

És ha a baloldali mátrix az egységmátrix, akkor a szorzat eredménye a jobboldali mátrix.

Az állítás igazolásához használjunk teljes indukciót!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ez teljesül. Tegyük fel, hogy a k-adik tagra is igaz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A kitevő felbontása után:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az indukciós feltétel alkalmazása után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mivel tudjuk, hogy az egységmátrixszal való beszorzás helyben hagyja a mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

És ez az állítás valóban teljesül, tehát az eredeti feltevés is igaz volt.

(A teljes indukció nem is feltétlenül szükséges, tekintve, hogy ez egy tükröző mátrix, de így gyakoroltunk egy kis matalapot is ;))