A	**B**	**C**	Σ	**J:**

NÉV: ______________________________ NEPTUN-KÓD: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat** *2015. december 17.*

Első rész (70 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez az A kérdéscsoportból legalább* 6 *pontot kell szerezni.* 5 *pont esetén a dolgozat további részeiben kell legalább* 10 *pontot szerezni.* (15 *pont*)

1. A $\mathbf{v} \in V \leq \mathbb{R}^n$vektor koordinátavektora a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisban $[1 \quad -2 \quad -3]^T$. Adjuk meg az $\mathbf{u} = \mathbf{v} + 3\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$ vektor koordinátavektorát a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisban.

   $[\mathbf{u}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Konkrét vektorokat megadva mutassuk meg, hogy azoknak a $\mathbb{R}^3$-beli vektoroknak az U-val jelölt halmaza, melyeknek legalább az egyik komponense nemnegatív, nem alkotnak alteret.

   Pl. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$, de $(-1) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin U$, tehát U nem zárt a skalárral való szorzásra.

3. Milyen $c \in \mathbb{R}$ értékekre lesz lineárisan független az $\mathbf{u}_1 = [1 \quad 2 \quad 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ és $\mathbf{u}_3 = [0 \quad 1 \quad c]^T$ vektorrendszer?

   $c \neq 0$

4. Legyen $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázis egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Hány dimenziós a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ vektorok által generált U altér?

   $\dim U = 2$

5. Adjunk meg egy olyan 2 ismeretlenes, 3 egyenletből álló valós együtthatós lineáris egyenletrendszert, melynek egyetlen megoldása van.

   Pl. $\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$

6. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra lesz igaz, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 2 & 2c \end{bmatrix}$ mátrix négyzete, A^2 a nullmátrixot adja.

   $c = -1/2$

7. Az $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$ mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámolásakor szerepel az összegben a *chin* szorzat. Határozzuk meg az inverziók számát abban a permutációban, amely alapján eldönthetjük, milyen szorzóval (+1 vagy −1) szerepel ez a tag a determinánsban.

   Inverziók száma: 4

8. Hogyan változik egy 4×4-es mátrix determinánsa, ha az oszlopait fordított sorrendben soroljuk föl?

   Nem változik.

9. Tegyük föl, hogy $\mathbf{x} = [1 \quad -1 \quad -2]^T$ jobb oldali sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrixnak, és az $A\mathbf{x}$ vektor harmadik komponense 6. Mi lesz az $A\mathbf{x}$ vektor első komponense?

   $A\mathbf{x}$ első komponense: -3

10. Írjunk föl egy olyan 2×2-es valós elemű, $\mathbb{R}$ felett diagonalizálható, de nem diagonális mátrixot, melynek sajátértéke az 1 és a 2.

    Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. Hány dimenziós a magtere annak a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációnak, mely minden vektorhoz hozzárendeli a z tengely körüli $+90°$-os elforgatottját?

$\dim \mathcal{K}er\, \varphi = 0$

12. Hány olyan nullvektortól különböző vektor van $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ triviális bázisvektorok közül az első háromra (a szokásos $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ skaláris szorzatra nézve)?

Számuk: végtelen

13. Mennyi a $[4 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$ és az $[1 \quad 2 \quad 2 \quad 4]^T$ vektorok szöge $\mathbb{R}^4$-ben, a szokásos $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ skaláris szorzatra nézve?

Szögük: $90°$

14. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és a $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ vektorok vektoriális szorzatát.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

15. Keressünk olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ vektort, melyen az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak a 0 értéket veszi föl.

Pl. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez a B kérdéscsoportból legalább* 4 *pontot kell szerezni.* (10 *pont*)

16. Mit jelent az, hogy egy $W \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmaz altér?

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha: 1) W nem üres; 2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$ (azaz W zárt az összeadásra); 3) $\mathbf{a} \in W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\mathbf{a} \in W$ (azaz W zárt a skalárral szorzásra).

17. Mondjuk ki a lineárisan független rendszerek és a generátorrendszerek elemszámát összehasonlító tételt (ez a kicserélési tétel egyik része).

Minden lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint bármelyik generátorrendszer elemszáma.

18. Mondjuk ki a mátrix rangja és a mátrix egyes részmátrixainak determinánsa közötti összefüggésről szóló tételt.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, melynek rangja $r \geq 1$. Ekkor A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, amelynek determinánsa nem nulla, de minden $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.

19. Definiáljuk egy négyzetes mátrix karakterisztikus polinomjának fogalmát.

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(\lambda) = \det(A - I_n\lambda)$, ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrix.

20. Mondjuk ki a valós vagy komplex euklideszi terekre vonatkozó Cauchy-egyelőtlenséget, valamint azt, hogy mikor áll ebben egyenlőség.

Ha V valós vagy komplex euklideszi tér, akkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ vektorokra teljesül, hogy $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok lineárisan összefüggőek (azaz párhuzamosak).

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 14 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ______________________________ NEPTUN-KÓD: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat/3** *2015. december 17.*

Második rész (40 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Mondjuk ki és igazoljuk azt az állítást, mely arról szól, mi történik, ha egy lineárisan független $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorrendszerhez hozzávéve a $\mathbf{b}$ vektort, az új, bővebb $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ vektorrendszer már összefüggővé válik. (4 *pont*)

A hátlapon folytatható!

22. Definiáljuk egy A mátrix karakterisztikus polinomját, majd mondjuk ki és bizonyítsuk be a karakterisztikus polinom és a mátrix jobb oldali sajátértékeinek kapcsolatáról szóló tételt. (6 *pont*)

A hátlapon folytatható!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

0 – 13 :	1
14 – 17 :	2
18 – 21 :	3
22 – 25 :	4
26 – 35 :	5

Az elégségeshez legalább 15 pont kell, ha az A részből elért pontszám 5. A többi osztályzat ponthatára ilyenkor változatlan.

EREDMÉNYHIRDETÉS: 2015. december 17-én, csütörtökön 17 és 18 óra között a Déli tömb 3-708-as szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a szóbeli vizsgák napjain a délelőtti órákban.