Lineáris algebra
2. zh

1. **I**gazak, vagy **H**amisak az alábbi állítások?

- $A \in \mathbb{R}^{15\times15}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda^{15}\ det(A^{15}) = det((\lambda A)^{15})$. **H**

  $(\lambda A)^{15} = \lambda^{15} \cdot A^{15}$
  $det(A^{15}) \cdot (\lambda^{15})^n = det(A^{15}) \cdot det(A^{15}) \cdot (A^{15})^{15}$
  Ez nagyon nem $\lambda^{15} \cdot det(A^{15})$

- $\mathbb{R}^{15\times15}$-ben $det(AB^{-1}) = det(BA^T)$, minden invertálható B és nem invertálható A esetén. **H**

  $$det(AB^{-1}) = det(A) \cdot det(B^{-1}) = det(A) \cdot \frac{1}{det(B)}$$

  $$det(BA^T) = det(B) \cdot det(A)$$

  Ezek sem egyenlők.

- Ha $\boldsymbol{x}$ j.o. sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak is, az $\alpha \neq \beta$ sajátértékkel, akkor $\boldsymbol{x}$ j.o. sajátvektora AB mátrixnak is. **I**

  $AB(\boldsymbol{x}) = A\big(B(\boldsymbol{x})\big) = A(B\boldsymbol{x}) = (\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{x}$ ezért $\boldsymbol{x}$ sajátvektor $(\alpha\beta)$ sajátértékkel.

- Ha $\mathbb{R}^{2015\times2015}$-ben két mátrix determinánsa megegyezik, akkor hasonlók. **H**

  Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, de fordítva nem igaz, például

  $$0 \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Minden $\varphi \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra $dim(Ker\varphi) \leq (Im\varphi)$. **H**

  $\emptyset = nullmátrix$. Erre $dim(Ker\emptyset) = \mathbb{N}, dim\left(\frac{t}{m}\right)\emptyset = 0$.

2. $[\boldsymbol{a}]_{i,j,k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{b}]_{i,j,k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{c}]_{i,j,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =?$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} =?$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) =?$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & i \\ 3 & 7 & j \\ 5 & 9 & k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -16$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \left.\begin{matrix} 14 - 25 + 27 \\ -15 - 35 + 18 \end{matrix}\right\} = -16$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{bmatrix}2&1&i\\3&-1&j\\5&1&k\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}5&1&i\\7&-1&j\\9&1&k\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}16\\4\\-12\end{pmatrix}\ \begin{bmatrix}8&16&i\\3&4&j\\-5&-12&k\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\80\\-16\end{pmatrix}$$

FONTOS: Ne felejtsd el a 7-nél a váltást!!!

3. Számítsa ki az alábbi $n\times n$-es $(n\geq 3)$ determináns értékét! (A főátló alatti átlóban végig 0 van, a jobb fölső sarokban is 0 van, minden más elem 1.)

$$\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

Először leviszed az első sort az alsóba.

(Az első sort kicseréled a másodikra, az (új) másodikat a harmadikra, stb…)

$$\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}$$

Ezt pedig megoldod a „szokásos módszerekkel".

FONTOS: Mivel volt $\boldsymbol{n-1}$ sorcsere, az egész $\boldsymbol{(-1)^{n-1}}$-szerese lett!!!

- **Első megoldás**

Az első sort levonod a többiből.

$$\begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & \\ \left[\begin{array}{c|cccc}0&1&1&\cdots&1\\\cline{2-5}1&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1\end{array}\right]\end{array}$$

Most hozzáadod az első oszlophoz a többit.

$$det\begin{bmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{bmatrix}=(n-1)\cdot(-1)^{n-1}$$, ezt szorzod az előbb kijött $(-1)^{n-1}$-gyel $=(n-1)$.

- **Második megoldás**

  A sorok összege $(n-1) \Rightarrow (n-1)$ a sajátérték.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 1x_n \\ 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_n \\ \vdots \\ 1x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

  Ha itt $\lambda = -1$, és ezt rendezed a bal oldalon („homogenizálod”), akkor ez

  n darab egyenlet$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0 \end{cases}$

  Ezzel a megoldással lesz n darab szabad tag, tehát a (-1), $(n-1)$-szeres sajátérték lesz.
  (A -1 sajátértékhez $n-1$ dimenziós sajátaltér tartozik)

  Megvan a (multiplicitással számolt) n darab sajátérték, több nincs. A determináns a sajátértékek szorzata. $(n-1)(-1)^{n-1}$, és ez (mint előbb) szorzódik a $(-1)^{n-1}$-gyel. (A sorcsere miatt)

  Itt is megkaptad, hogy $det(A) = n-1$

4. Határozza meg a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix (jobb oldali) sajátértékeit, a sajátaltereket, karakterisztikus polinomját, és döntse el, hogy diagonalizálható-e $\mathbb{R}$ felett!

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei.

$$\begin{aligned} (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - 2(2-\lambda) &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 + 1 + 1 - 6 + 3\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 \end{aligned}$$

$$1\,\begin{array}{|cccc} -1 & 6 & -9 & 4 \\ \hline \underbrace{-1 \quad 5 \quad -4} & & & 0 \end{array}$$

Ránézel, és látod, hogy az 1 a gyöke.
DE!!!!! Azt előbb kell tudnod, hogy a 4 a gyöke, mert a mátrix sorainak összege is 4!!!
<u>**Természetesen,**</u> ha már látod alapból, hogy az egyik sajátérték 4, akkor az előző mintájára rájöhetsz, hogy a többi sajátérték megegyezik. Mivel még két sajátérték van hátra, ezért $4 + \lambda_2 + \lambda_2 =$ a mátrix nyomával, ami 6. (A főátló elemeinek összege) Azaz $\lambda_2 = 1$.

Persze ha ezt nem tudod, akkor $-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4=(\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4)=-1(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4)$.

NAH AKKOR.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

- „4" sajátérték

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=4x \\ x+2y+z=4y \\ x+y+2z=4z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{x=y=z}$$

Sajátaltér: $Span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- „1" sajátérték

$$\begin{cases} 2x+y+z=x \\ x+2y+z=y \\ x+y+2z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

<u>**KÉT**</u> szabad tagod van $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$

$$Span\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

NYILVÁN DIAGONALIZÁLHATÓ, MERT SZIMMETRIKUS!!!

5. Az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz megadandó SONB (az $\mathbb{R}^2$-ben $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$ mellett), és meghatározandó a mátrixhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ – szimmetrikus, biztos lesz SONB.

$$\begin{bmatrix} 5-\xi & 2 \\ 4 & 2-\xi \end{bmatrix} = (5-\xi)(4-\xi) - 4 = \xi^2 - 9\xi + 16$$

$$\xi_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{8-64}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$ Ó, de szép!

	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$

- $\frac{9+\sqrt{17}}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{17}}{2} x \\ \frac{9+\sqrt{17}}{2} y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} x \to 2y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} x \to \boxed{y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} x} \\ 2x + 4y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} y \to 2x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} y \to \boxed{x = \frac{\sqrt{17}+1}{2} y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right) = \frac{17-1}{16} = 1$$ KORREKT!

(A két egyenlet ugyanazt mondja!)

Sajátaltér: $Span \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{17}-1}{4} \end{pmatrix}$ NORMÁLOD!

$$b = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1/b \\ \frac{\sqrt{17}-1}{4} \Big/ b \end{pmatrix}$$

- Másik sajátaltér úgyis merőleges az elsőre, ezt is használhatod, ha akarod.

$$\begin{cases} 5x + 2y = \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}x \\ 2x + 4y = \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}x \\ 2x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}y \end{cases}$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}x; \qquad x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}y$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) = \frac{16}{16} = 1 \qquad \checkmark$$

$$Span\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$$

$$b = \sqrt{1 + \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)^2}$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1/b \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \Big/ b \end{pmatrix}$$

Mindkét sajátérték pozitív, akkor mégis mi más, mint pozitív definit!

6. Legyen $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\qquad \varphi: \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta \\ 2\beta - 2\gamma \\ 2\gamma - \alpha \end{bmatrix}$.

a) φ lineáris transzformáció-e? Ha igen, melyek a sajátértékei, sajátvektorai, van-e SB?

b) φ vektortér-izomorfizmus-e?

$\varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ Valóban!

$\varphi(\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\varphi(\boldsymbol{x}))$ Valóban!

Nézzük meg a báziselemek képeit!

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \varphi = & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ 2\beta - 2\gamma \\ 2\gamma - \alpha \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Valóban!

Innentől csak a szokásos!

$$\begin{bmatrix} 1-\psi & -2 & 0 \\ 0 & 2-\psi & -2 \\ -1 & 0 & 2-\psi \end{bmatrix}$$

$$K_\varphi(\psi) = (1-\psi)\underbrace{(2-\psi)^2}_{=\psi^2-4\psi+4} - 4 = \psi^2 - 4\psi + 4 - \psi^3 + 4\psi^2 - 4\psi - 4$$
$$= -\psi^3 + 5\psi^2 - 8\psi = -\psi(\psi^2 - 5\psi + 8)$$

Ennek nincs gyöke, hál istennek!!!

Egyetlen sajátérték a nulla.

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\beta - 2\gamma = 0 \\ 2\gamma - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \beta = {}^{\alpha}/_{2}}$$

Magtér: $Span\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egy dimenziós, az összes sajátértékhez tartozó sajátalterek dimenzióinak összege 1.

Nincs sajátbázis.

NEM! vektortér-izomorfizmus, mert a nulla a sajátértéke!

7. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ projektor mátrix ($A^2 = A$).

   a) Melyek az A lehetséges sajátértékei?

   b) Mi lehet az A, ha minden sajátértéke pozitív?

Legyen $\boldsymbol{x}$ sajátvektor, λ sajátértékkel!

$$A^2(\boldsymbol{x}) = A\big(A(\boldsymbol{x})\big) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \underbrace{\boxed{\lambda^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}}_{\substack{\lambda=0,vagy \\ \lambda=1}} = A(\boldsymbol{x})$$

Ha minden sajátérték pozitív, akkor ez IZOMORFIZMUS, azaz különböző vektorok képe különböző. $A\big(A(\boldsymbol{x})\big) = A(\boldsymbol{x})$, ezért $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ ($\forall\ \boldsymbol{x}$ vektorra), azaz ez az identitás (egységmátrix).