Logika ZH

I. Elmélet

1. Bevezető fogalmak

$\mathbb{L} = \{i, h\}$

- minden állításhoz i/h értéket rendelünk
- egyszerre csak egyiket rendelhetjük egy állításhoz
  ↳ akkor ez idővel változik az nem állítás

Logikai fv

- $f : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}$
  - k változós logikai fv
  - ebből 2^{2^k} db van (értelmezési tartomány mérete)
  - k=1 esettel foglalkozunk

Logikai művelet: az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ alakú fv. logikai művelet.

Logikai műveletek igazságtáblája

P	R	↑	↓	¬P	¬R	P ∧ R	P ∨ R	P → R	P ↔ R	P ⊗ R
i	i	i	h	h	h	i	i	i	i	h
i	h	i	h	h	i	h	i	h	h	i
h	i	i	h	i	h	h	i	i	h	i
h	h	i	h	i	i	h	h	i	i	h

↑: mindig igazat rendel a változókhoz

↓: mindig hamisat rendel a változókhoz

P ∧ R: konjunkció

P ∨ R: diszjunkció

P → R: implikáció

P ↔ R: ekvivalencia

P ⊗ R: kizáró vagy; xor (kizáró vagy)

2. Ítéletlogika (zérus rendű logika)

(1) Nyelv = Ábécé + Szintaxis + Szemantika

Ábécé ↓ "betűk"; Szintaxis ↓ "egymás után következés"; Szemantika ↓ "jelentés"

Tárgya: az egyszerű állítások és a belőlük logikai műveletekkel kapott összetett állítások vizsgálata

Ábécé (Az ítéletlogika leíró nyelvének ábécéje, V_0)

- $V_0 = \{\underset{\downarrow}{A, B, \dots}\} \cup \{\underbrace{'(', ')'}_{\text{elválasztó jelek}}, \underbrace{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow}_{\text{unér a binér logikai műv.}}\}$

  V_v: ítéletváltozók

  - ekvivalencia nincs köztük → ezekkel is mindent ki lehet fejezni

    → implikáció is csak azért hogy beszélt nyelvhez közelebb álljon

Szintaxis

Ítéletlogikai formula

1.) Minden ítéletváltozó atomi (ítéletlogikai) formula.

$A \in V_v \Rightarrow A$ formula (atomi)

2.) Ha A formula, akkor '$\neg A$' is (negációs) formula

A formula $\Rightarrow \neg A$ (negációs) formula

3) Ha A, B formulák, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \Rightarrow (A \circ B)$ is formula

4.) A negációs ($\neg A$) és $(A \circ B)$ formulák összetett formulák

- Példa nem formulákra:

  $\cancel{\neg PQ}$, $\cancel{P \neg \rightarrow R}$, $\cancel{P \vee R}$

  ↳ szabályok szerint zárójelben kell lennie: $(P \vee R)$

Formulaszerkezet

$\neg A$: negációs; $A \wedge B$: konjunkciós; $A \vee B$: diszjunkciós; $A \rightarrow B$: implikációs

Zárójelelhagyás

- műveletek prioritása: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- negáció zárójelpárja nem hagyható el, pl.: $\neg(A \circ B)$
- Lépései
  1) formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van)
  2) zárójelek formulájában zárójel akkor hagyható el
     - ha a zárójelen belüli operátor precedenciája nagyobb
     - ha a zárójelen belül ugyanolyan műveleti jelek vannak, mint a zárójeltől balra

       ↳ pl.: $((A \wedge B) \wedge (C \wedge D))$

Műveletek

- felcserélhető: – konjunkció: $A \wedge B \sim B \wedge A$
  - – diszjunkció: $A \vee B \sim B \vee A$
- láncok (láncformulák)
  - $P \wedge Q \wedge R \wedge S$ } zárójelezés lényegtelen
  - $P \vee Q \vee R \vee S$ }
  - $(P \to (Q \to (R \to S)))$ } zárójelezés sorrendje lényeges
    - ↳ default zárójelezés

Közvetlen részformula

- atomi formula: nincs közvetlen részformulája
- negációs formulának: $\neg A$-nak A a közvetlen részformulája
- $(A \circ B)$ alakú formulának
  - A (baloldali) közvetlen részformulája
  - B (jobboldali) közvetlen részformulája

Részformula

- Egy formula részformulái: önmaga + közvetlen részformulái

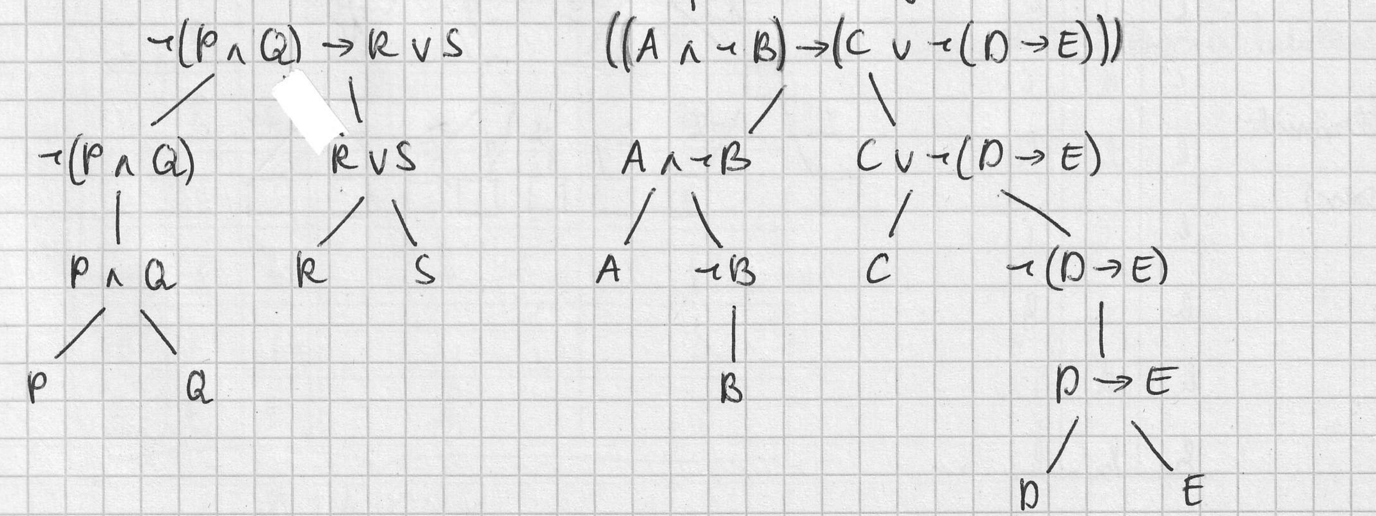
Formula szerkezeti fái

- csúcsai formulával vannak megcímkézve
- gyerekei a közvetlen részformulái

⇒ leveleiben atomi formulák vannak

Példák:

→ helyes zárójelezés segíthet a feladatban



Szemantika

Interpretáció

- A nyelv ábécéjének értelmezése (interpretációja – modellezése)
- Ítéletlogika ábécéjében ítéletváltozókat kell interpretálni (jelentés)
  - ítéletváltozók befutják az állítások halmazát
  - ha megmondjuk melyik ítéletváltozó melyik állítást jelenti, akkor a változó igazságértékét adjuk meg
  - <u>annak rögzítését, melyik ítéletváltozó igaz) és melyik h(amis) igazságértékű interpretációnak nevezzük</u>
- $I = V_v \rightarrow \{i, h\}$
  - $I(x)$ jelöli az x ítéletváltozó értékét az I interpretációban
- Megadása: felsorolással, szemantikus fával, stb.

Bázis

- $n = 3$ esetén legyenek az ítéletváltozók: X, Y, Z
  - ezen változók egy sorrendjét bázisnak nevezzük
- legyen a bázis: X, Y, Z

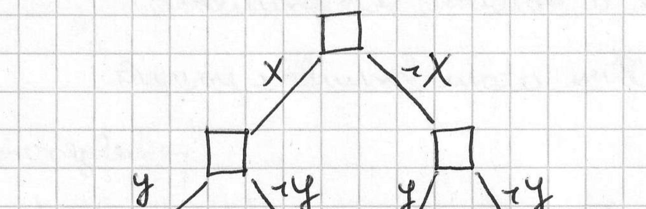
↳ akkor az összes interpretációt megadhatjuk táblázatos felsorolással/szemantikus fával is

Táblázattal:

(felírómód-szer)

X	Y	Z
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Szemantikus fával (2^n):



Formula helyettesítési értéke

- Formula helyettesítési értéke I interpretációban: $B_I(C)$ ↳ i/h lehet

- $B_I(C)$ definíciója
  - $B_I(C) = I(C)$ (ítéletváltozó)
  - $B_I(\neg A) = \neg B_I(A)$ (negációs)
  - $B_I(A \circ B) = B_I(A) \circ B_I(B)$ (összetett)

- Példa:

$V_v = \{A, B, C\}$

$I(A) = i$, $I(B) = h$, $I(C) = i$ (i, h, i)

$A \wedge (\neg B \vee C)$:

$$B_I(A \wedge (\neg B \vee C)) = \overbrace{B_I(A)}^{i} \wedge B_I(\neg B \vee C) = i \wedge i = \underline{\underline{i}}$$

$$B_I(A) = I(A) = i$$

$$B_I(\neg B \vee C) = B_I(\neg B) \vee B_I(C) = i \vee i = i$$

$$B_I(\neg B) = \neg B_I(B) = \neg h = i$$

$$B_I(B) = I(B) = h$$

$$B_I(C) = I(C) = i$$

A formula igazságtáblája

A	B	C	$A \wedge (\neg B \vee C)$	$A \to B \wedge C$
i	i	i	i	i
i	i	h	h	h
i	h	i	i	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	i	h	h	i
h	h	i	h	i
h	h	h	h	i

$2^n + 1$ sor

$n + 1$ oszlop

- $\forall$ sor egy-egy interpretáció-nak felel meg
- a formula alatt a formula helyettesítési értékei találhatók

Igazságértékelés fv.

- $\varphi^{\alpha}(A)$ igazságértékelés fv. ($\alpha = i/h$), egy A formula esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül az A interpretációra vonatkozó $\varphi^{I}(A)$ és a $\varphi^{H}(A)$ feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke i/h lesz.
- Igazhalmaz: $\varphi^{I}(V_n) = \{(*, *, \dots, \overset{n.}{\overset{\downarrow}{i}}, *, *, \dots)\}$
- Hamishalmaz: $\varphi^{H}(V_n) = \{(*, *, \dots, h, *, *, \dots)\}$
- Definiálása
  - $\varphi^{I}(\neg A) = \varphi^{H}(A)$
  - $\varphi^{H}(\neg A) = \varphi^{I}(A)$
  - $\varphi^{I}(A \wedge B) = \varphi^{I}(A) \cap \varphi^{I}(B)$
  - $\varphi^{H}(A \wedge B) = \varphi^{H}(A) \cap \varphi^{H}(B)$
  - $\varphi^{I}(A \vee B) = \varphi^{I}(A) \cup \varphi^{I}(B)$
  - $\varphi^{H}(A \vee B) = \varphi^{H}(A) \cap \varphi^{H}(B)$
  - $\varphi^{I}(A \to B) = \varphi^{H}(A) \cup \varphi^{I}(B)$
  - $\varphi^{H}(A \to B) = \varphi^{I}(A) \cap \varphi^{H}(B)$
- Grafikusan:

$\varphi^{I}(\neg A)$ — $\varphi^{H}(A)$

$\varphi^{I}(A \wedge B)$ — $\varphi^{I}(A)$, $\varphi^{I}(B)$

$\varphi^{I}(A \vee B)$ — $\varphi^{I}(A)$ / $\varphi^{I}(B)$

$\varphi^{I}(A \to B)$ — $\varphi^{H}(A)$ / $\varphi^{I}(B)$

Igazságértékelés fa

1.

$\varphi^I(A \land \neg B \to (B \lor C \to A)) = \{(i,i,i),(i,i,h),(i,h,i),(h,i,i),(h,h,i),(h,i,h),(i,h,h),(h,h,h)\}$

$\varphi^H(A \land \neg B)$ — $\varphi^I(B \lor C \to A)$

$\varphi^H(A)$ — $\varphi^H(\neg B)$ — $\varphi^H(B \lor C)$ — $\varphi^I(A)$

$(h,*,*)$ — $\varphi^I(B)$ — $\varphi^H(B)$ — $(i,*,*)$

$(*,i,*)$ — $\varphi^H(C)$

$(*,h,h)$

2.

$\varphi^H(A \land \neg B \to (B \lor C \to A))$

$\varphi^I(A \land \neg B)$

$\varphi^H(B \lor C \to A)$

$\varphi^I(A)$

$\varphi^I(\neg B)$

$\varphi^H(B)$

$\varphi^I(B \lor C)$

$\varphi^H(A)$

$\varphi^I(B)$ — $\varphi^I(C)$

↯ — ↯

3.

$\varphi^I((A \lor \neg B) \land C \to (\neg A \lor C)) = \{(i,i,i),(h,i,i),(i,h,i),(i,i,h),(i,h,h),(h,i,h),(h,h,i),(h,h,h)\}$

(tautológia)

$\varphi^H((A \lor \neg B) \land C)$ — $\varphi^I(\neg A \lor C)$

$\varphi^H(A \lor \neg B)$ — $\varphi^H(C)$ — $\varphi^I(\neg A)$ — $\varphi^I(C)$

$\varphi^H(A)$ — $(*,*,h)$ — $\varphi^H(A)$ — $(*,*,i)$

$\varphi^H(\neg B)$ — $(h,*,*)$

$\varphi^I(B)$

$(h,i,*)$

Interpretáció kielégít egy formulát

Az ítéletlogikában egy I interpretáció kielégít egy B formulát ($I \models_0 B$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.

Jellemzők

- <u>Tautológia</u>: egy formula tautológia, ha $\forall$ interpretáció kielégíti
- <u>Cáfolható</u>: egy formula cáfolható, ha <u>nem</u> $\forall$ interpretáció elégíti ki
- <u>Kielégíthetetlen</u>: egy f. kielégíthetetlen, ha egyik interpretáció sem elégíti ki

(Tautologikusan) ekvivalens

Ha két vagy több formula igazságtáblája azonos, akkor a formulák (tautologikusan) ekvivalensek.

Kiterjesztett igazságtábla

A	∧	¬	B	→	B	∨	C
i	h	h	i	i	i	i	i
i	h	h	i	i	i	i	h
i	i	i	h	i	h	i	i
i	i	i	h	h	h	h	h
h	h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i	i	h
h	h	i	h	i	h	i	i
h	h	i	h	i	h	h	h

- ítéletváltozók alatt a megszokott összes eset
- műveleti jelek alatt a hozzájuk tartozó formula értéke kerül adott interpretációban

Normálformák

Literálok : változó / változó negáltja, pl.: $A, \neg A$

- Konjunkciója (elemi konjunkció)

  $A \wedge \neg B$, $A \wedge B$

- Diszjunkciója (elemi diszjunkció, kész)

  $A \vee C \vee D$

Diszjunktív normálforma (DNF)

- elemi konjunkciók diszjunkciója
- $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C \wedge \neg D) \vee \ldots$

Konjunktív normálforma (KNF)

- elemi diszjunkciók konjunkciója
- $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)$

Kitüntetett diszjunktív normálforma (KDNF)

- olyan DNF, melynek minden részében szerepel az összes ítéletváltozó
- $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

Kitüntetett konjunktív normálforma (KKNF)

- olyan KNF, melynek minden részében szerepel az összes ítéletváltozó
- $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$

Példa:

formula

(I)

A	B	C	F
i	i	i	h
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	i

KDNF

- azon interpretációk kerülnek bele, melyekre $F = i$
- amelyik változó hamis → negáltan
- amelyik változó igaz → negálatlanul

$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$

$\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

KKNF

- azon interpretációk kerülnek bele, melyekre $F = h$
- amelyik változó hamis → negálatlanul!
- amelyik v. igaz → negáltan!

$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$

$\wedge (A \vee B \vee \neg C)$

(II)

A	B	C	F
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	h
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	i

KDNF

$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

KKNF

$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$

(III)

A	B	C	F
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	h	h

KDNF

$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

KKNF

$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge$

$\wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$

Egyszerűsítés

- $(x \wedge k) \vee (\neg x \wedge k) \sim_0 k$

  ↳ ha k olyan elemi konjunkció, melyben x nem szerepel, akkor a 2 állítás ekvivalens ($\sim_0$)

- $(x \vee d) \wedge (\neg x \vee d) \sim_0 d$

  ↳ ha d elemi diszjunkció, melyben nem szerepel x

Példák:

KDNF-re	KKNF-re
① $(A \wedge B \wedge C) \vee$	① $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge$
② $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee$	② $(\neg A \vee B \vee C) \wedge$
③ $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee$	③ $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge$
④ $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$	④ $(A \vee B \vee \neg C)$
⑤ $A \wedge B$ (①+②-ből)	⑤ $\neg A \vee B$ (①+②-ből)
⑥ $B \wedge \neg C$ (②+③-ból)	⑥ $B \vee \neg C$ (①+④)
⑦ $\neg A \wedge \neg C$ (③+④-ből)	⑦ $A \vee \neg C$ (③+④)
$(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$	$(\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg C)$

Mj:

- lényeg, hogy minden részformulát felhasználjunk az egyszerűsítésnél
  - ha nem tesszük, az eredeti részformula benne lesz az eredményben
- módszer (lehetséges másképp is)
  1.) Megnézzük az összes sorra, hogy van-e olyan az alatta levők közt, mely csak egy literál $\neg$-jában különbözik
  2.) Ha találunk ilyet, összevonhatjuk a két részformulát az egyetlen $\neg$-ban eltérő literál kihagyásával
  3.) Az egyszerűsített részformulákból alkotjuk az új formulát

Rezolúció

Következtetés: $\models_0$

- $\mathcal{F} \models_0 B$: - ami $\mathcal{F}$-et kielégíti, az B-t is
  - pontosan akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen
- Példák: $\{A \vee B, A \vee \neg B\} \models_0 A$; $\{A \vee B, \neg B \vee \neg C\} \models_0 A \vee \neg C$

Rezolvens

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_1' \vee l \\ C_2 &= C_2' \vee \neg l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{C_1, C_2\} \models_0 C_1' \vee C_2'$$

→ ha C_1 és C_2 csak egy formulában tér(nek) el, akkor szemantikusan köv. $\{C_1, C_2\}$

... legnagyobb közös osztója.

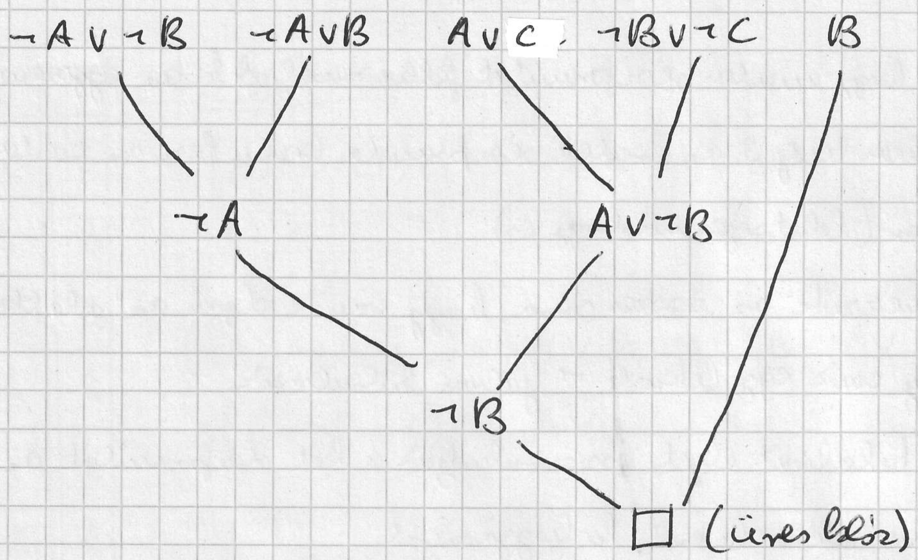
Kielégíthetetlenség

Ha egy formulából levezethető az üres klóz $\Longleftrightarrow$ a formula kielégíthetetlen.

Rezolúciós eljárás

- Vesszük az összes lehetséges párokat, melyekből rezolvens képezhető, és képezzük a rezolvensüket
- Addig folytatjuk, amíg vagy kijön az üres klóz, vagy érdemben már semmi sem párosítható semmivel
- Példa:

$\mathcal{F} = \{\neg A \vee \neg B, \neg A \vee B, A \vee C, \neg B \vee \neg C, B\}$



Lineáris rezolúció

- akkor lineáris az eredmény, ha minden lépésben ugyan azzal számolunk tovább egy korábbi eredmény beemelésével
- ha van rezolúció, akkor van lineáris rezolúció is

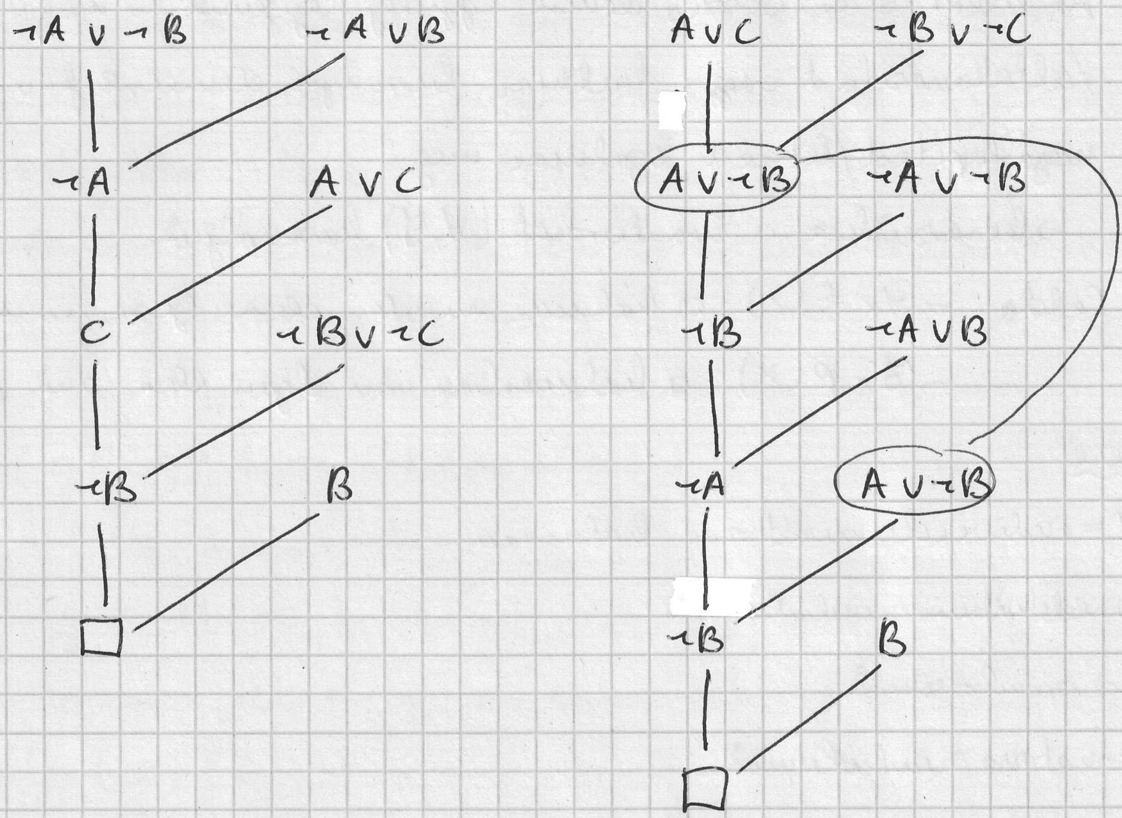
Input rezolúció

- minden rezolvensnél az egyik klóz az eredeti halmazból származik
- minden input rezolúció lineáris rezolúció is

Példák:

$\mathcal{I} = \{\neg A \vee \neg B,\ \neg A \vee B,\ A \vee C,\ \neg B \vee \neg C,\ B\}$

lineáris ∧ input: lineáris ∧ ¬ input:



Egység rezolúció

- rezolvensképzésnél a felhasznált klózok közül legalább az egyik egységklóz
- nem mindig van
- nem feltétlenül lineáris

(T) Létezik input rezolúciós cáfolat $\Longrightarrow$ létezik lineáris rez. cáfolat is

3. Elsőrendű logika

Bevezetés

Nulladrendű állítás

Ha a kijelentő mondat alanya valamely konkrét dolog, akkor az állítást nulladrendű állításnak hívjuk.

Példa:
- $E(x) = i$, ha x egész szám
- $P(x) = i$, ha x prímszám
- $L(x,y,z) = i$, ha z az x és y legnagyobb közös osztója.

Elsőrendű állítás

- Ha a kijelentő mondat alanya egy halmaz, akkor az állítást elsőrendű állításnak hívjuk.
- Az állítás az összes elemre egyidejűleg fennálló megállapítást/ /általánosítást vagy a halmaz bizonyos elemeire fennálló megállapítást/létezést fogalmaz meg.
  ↳ kiírásukhoz a kvantorokat $(\forall, \exists)$ használjuk
- Példa: $-\forall x\, E(x)$: a halmaz minden eleme egész szám
  $-\exists x\, P(x)$: a halmazban van olyan elem, ami prímszám

Ábécé

- V = individuumváltozók halmaza
- predikátum szimbólumok
- fv. szimbólumok
- konstans szimbólumok
- '(', ')', $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$

Szintaxis

- Π: fajták halmaza ("nagy pí")
- U: univerzum

$$U = \bigcup_{\pi_i \in \Pi} U_{\pi_i} \quad , \quad U_{\pi_i} \cap U_{\pi_j} = \emptyset \quad (\pi_i \neq \pi_j)$$

- Szignatúra: (ν_1, ν_2, ν_3) $\quad \nu_1 : Pr$ (predikátum) $\longrightarrow \pi^*$
  $\nu_2 : Fn$ (fv. szimbólum) $\longrightarrow \pi^*$
  $\nu_3 : Konst$ (konst. szim.) $\longrightarrow \Pi^*$

- Példa

$Pr = \{P, Q\}$; $\Pi = \{\pi_1, \pi_2\}$; $Fn = \{f, g\}$ (U-t nem kell megadni)

Szignatúra:

ν_1	P	Q
	(π_1, π_2)	(π_2)

ν_2	f	g
	$(\pi_1 ; \pi_2)$	$(\pi_1, \pi_2 ; \pi_1)$

ν_3	c
	π_1

Termek

- a matematikai leképezéseket szimbolizálják
- Def.

1) Minden individuumváltozó és konstans szimbólum term.

2.) Ha az $f \in Fn$ k-változós függvényszimbólum és $t_1, t_2, \dots, t_k$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ is term.

3.) Minden term (1), (2) szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

- $v \in V_{\pi_i} \Rightarrow v$ π_i fajtájú term
- Példa:
  - $f(g(\bar{x},\bar{y}))$ kifejezés helyes, mivel
    - f: π_1 típusút vár $\rightarrow$ g az
    - g 2 db π_2-es típusút vár: $\bar{x}, \bar{y}$ azok
    - $\Rightarrow$ összességében ez egy π_2 típusú term (f π_2 típusúra képez)
  - $\underbrace{f(\underbrace{g(\underbrace{\bar{x}}_{\pi_2}, \underbrace{f(\underbrace{c}_{\pi_1})}_{\pi_2})}_{\pi_1})}_{\pi_2}$

Formulák

- a logikai leképezéseket szimbolizálják
- Def.

1) Ha a $P \in Pr$ k-változós predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \dots, t_k$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ formula (atomi formula)

2) • Ha A formula $\Rightarrow \neg A$ is az
   • Ha A és B formulák, $\circ \in (\wedge, \vee, \rightarrow) \Rightarrow (A \circ B)$ is az

3.) Ha A formula $\Rightarrow \forall x A$ és $\exists x A$ is az

4.) Minden formula utóbbi szabályok véges sok alkalmazásával áll elő.

Zárójelezés

- $Qx(\ )$
  - Q valamilyen kvantor
  - zárójel nem hagyható el
- $\neg(..) \rightarrow$ zárójel nem hagyható el

Szemantika

Változókiértékelés

- $\mathcal{K}: V \rightarrow \mathcal{U}$ leképezés, ahol V a nyelv változóinak halmaza, $\mathcal{U}$ pedig az interpretáció univerzuma
- Példa:

$\mathcal{K}$	x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
	a	b	c	0	1	2

- $|x|^{\mathcal{I},\kappa} = \kappa(x) \quad (x \in V)$

  $\hookrightarrow$ az $\mathcal{U}$ univerzumbeli $\mathcal{K}(x)$ elem $(= a)$
- $|c|^{\mathcal{I},\kappa} = c^{\mathcal{I}} \quad (c \in Const)$

  $\hookrightarrow$ konstansoknak interpretáció által meghatározott értékük van
- $|f(t_1, t_2, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa})$

  $\hookrightarrow$ összetett fv. helyettesítési értéke az argumentumában szereplő elemek értékei szerint
- $|P(t_1, t_2, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa} = P^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa})$
- $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} = \neg\, |A|^{\mathcal{I},\kappa}$
- $|A \circ B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \circ |B|^{\mathcal{I},\kappa}$

Kvantált formulák

- $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} = \begin{cases} i, \text{ ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa} = i \text{ minden } \kappa^* x \text{ variánsra} \\ h \text{ különben} \end{cases}$
- $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} = \begin{cases} i, \text{ ha létezik } \kappa^* x \text{ vagy } |A|^{\mathcal{I},\kappa} = i \\ h, \text{ különben} \end{cases}$

• Példa:

$U = \{a, b, c\} \cup \{0, 1, 2\}$

$p^{\mathcal{I}}$	a	b	c
0	i	h	i
1	h	h	i
2	i	i	h

$Q^{\mathcal{I}}$	a	b	c
	h	i	h

$f^{\mathcal{I}}$	a	b	c
	1	2	0

$g^{\mathcal{I}}$	0	1	2
0	a	b	a
1	c	c	b
2	a	b	c

$$|p(c, f(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = p^{\mathcal{I}}(|c|^{\mathcal{I},\kappa}, |f(x)|^{\mathcal{I},\kappa}) =$$
$$= p^{\mathcal{I}}(c, f^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa})) =$$
$$= p^{\mathcal{I}}(c, f^{\mathcal{I}}(a)) = p^{\mathcal{I}}(c, 1) = \text{igaz}$$

II Gyakorlat

$\boxed{1}$ Hagyd el az alábbi formulákból a lehető legtöbb zárójelet úgy, hogy az eredetivel ekvivalens formulát kapj.

nem hagyható el "→" sorrendje miatt

ⓐ $\cancel{(}(\cancel{(}A \lor \neg B\cancel{)} \to \neg(A \land B)) \to \cancel{(}(\neg A \lor B) \land (A \to B)\cancel{)}\cancel{)}$

↳ külső zárójel minden további nélkül elhagyható

↳ $\land$ precedenciája > $\to$ precedenciája

ⓑ $\cancel{(}(A \to B) \to \cancel{(}(C \to D) \to \cancel{(}E \to F\cancel{)}\cancel{)}\cancel{)}$

$(A \to B) \to (C \to D) \to E \to F$

ⓒ $\cancel{(}\cancel{(}\cancel{(}A \land B\cancel{)} \to \neg A) \lor \cancel{(}B \land (A \to \neg B)\cancel{)}\cancel{)}$

$(A \land B \to \neg A) \lor B \land (A \to \neg B)$

$\boxed{2}$ Jelöld be aláhúzással a logikai jelek hatáskörét az alábbi formulákban.

ⓐ $A \lor \neg B \to \neg A \land B \to \neg A \lor B \land A \to B$

ⓑ $A \to B \to C \to D \to E \to F$

ⓒ $A \land B \to \neg A \lor B \land A \to \neg B$

3. Add meg az alábbi formulák igazságtábláját.

ⓐ $F_1 = (((A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)))$

A	B	¬B	A∨¬B ①	A∧B	¬(A∧B) ②	①→② ⑤	¬A	¬A∨B ③	A→B ④	③∧④ ⑥	⑤→⑥
i	i	h	i	i	h	h	h	i	i	i	i
i	h	i	i	h	i	i	h	h	h	h	h
h	i	h	h	h	i	i	i	i	i	i	i
h	h	i	i	h	i	i	i	i	i	i	i

ⓑ $F_2 = (((A \wedge B) \rightarrow \neg A) \vee (B \wedge (A \rightarrow \neg B)))$

A	B	A∧B ①	¬A	①→¬A ③	¬B	A→¬B ②	B∧② ④	③ ∨ ④
i	i	i	h	h	h	h	h	h
i	h	h	h	i	i	i	h	i
h	i	h	i	i	h	i	i	i
h	h	h	i	i	i	i	h	i

Ekvivalens-e a két formula?

A két formula nem ekvivalens, mivel igazságtáblájuk különbözik.

4. φ-igazságértékelés fv. segítségével add meg az alábbi formula igazhalmazát: $F = (A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A \wedge \neg(B \rightarrow A)$.

(A,B) bázissal: $\varphi^{F}(A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A \wedge \neg(B \rightarrow A) = \{(h,h),(i,h),(h,i)\}$

$\varphi^{F}(A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B))$

$\varphi^{H}(A \wedge B)$ — $\varphi^{F}(\neg(A \vee B))$

$\varphi^{H}(A)$ $\varphi^{H}(B)$ — $\varphi^{H}(A \vee B)$

$(h,*)$ $(*,h)$

$\varphi^{H}(A)$
$\varphi^{H}(B)$

(h,h)

$\varphi^{F}(A \wedge \neg(B \rightarrow A))$

$\varphi^{F}(A)$
$\varphi^{F}(\neg(B \rightarrow A))$

$\varphi^{H}(B \rightarrow A)$

$\varphi^{F}(B)$
$\varphi^{H}(A)$

↯

5

Add meg az alábbi formulával ekvivalens KKNF-ben és KDNF-ben lévő formulákat: $F = \neg A \vee B \to \neg C$

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg C$	$\neg A \vee B \to \neg C$
i	i	i	h	i	h	h
i	i	h	h	i	i	i
i	h	i	h	h	h	i
i	h	h	h	h	i	i
h	i	i	i	i	h	h
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	h	h
h	h	h	i	i	i	i

KDNF

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
$\vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
$\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

KKNF

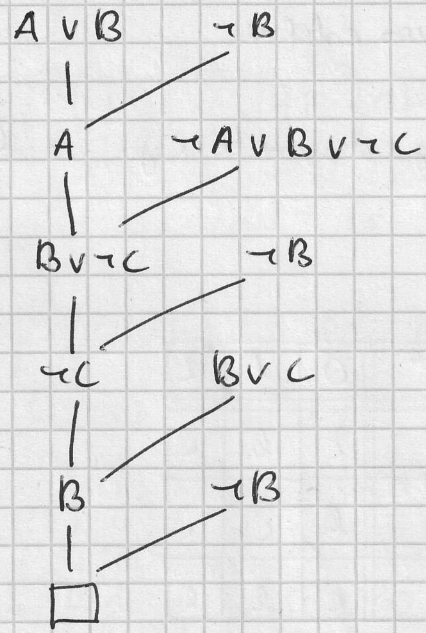
$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$
$\wedge (A \vee B \vee \neg C)$

6.

Adj rezolúciós cáfolatot az alábbi klózhalmazra.

Plusz pont, ha a rezolúció 1.) lineáris-, 2. lineáris input-, 3. egységrezolúció.

$F = \{A \vee B, \neg A \vee B \vee \neg C, \neg A \vee \neg B, B \vee C, \neg B\}$



7

Egy elsőrendű logikai nyelv logikán kívüli részét az alábbi halmaznégyes és szignatúra írja le:

$\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$, $Srt = \{\pi_1, \pi_2\}$; $Pr = \{P, Q, R\}$,

$Fn = \{f, g\}$; $Cnst = \{a, 1\}$..

ν_1	P	Q	R
	(π_1, π_2)	π_2	(π_2, π_1)

ν_2	f	g
	$(\pi_1, \pi_2; \pi_2)$	$(\pi_2; \pi_1)$

ν_3	a	1
	π_1	π_2

A változók halmaza $V = \{x, y, z, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots\}$.

Az alábbi kifejezésekről melyek a nyelv szavai, és mely csoportba tartoznak (term/formula, egyszerű/összetett)

ⓐ 1 : eleme a nyelvnek, egyszerű term

ⓑ $\forall z (R(\bar{x}, y) \vee Q(f(a, \bar{z})))$: eleme a nyelvnek, összetett formula

ⓒ $P(Q(\bar{x}), \bar{y})$: nem eleme a nyelvnek, nincs értelme

ⓓ $P(x, a)$: nem eleme a nyelvnek, nem típushelyes

ⓔ $f(g(\bar{x}), f(a, \bar{y}))$: eleme a nyelvnek, összetett term

ⓕ $a \vee x$: nem eleme a nyelvnek, nincs értelme

8.

Legyen az előző feladatbeli nyelv egy interpretációja a következő:

$U_{\pi_1} = \{a, b, c\}$, $U_{\pi_2} = \{0, 1, 2\}$

P^I	a	b	c
0	i	i	h
1	h	i	h
2	i	h	i

Q^I	0	1	2
	h	h	i

R^I	0	1	2
a	i	h	i
b	h	i	i
c	i	h	h

f^I	a	b	c
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	0	2

g^I	0	1	2
	b	c	a

$a \rightleftharpoons a$, $1 \rightleftharpoons 1$

Változókiértékelés:

κ	x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
	a	b	c	0	1	2

Mi az alábbi kifejezések értéke:

ⓐ $f(g(f(x,\bar{y})),\bar{x})$

$$|f(g(f(x,\bar{y})),\bar{x})|^{I,\kappa} = f^I(|g(f(x,\bar{y}))|^{I,\kappa}, |\bar{x}|^{I,\kappa}) =$$

$$= f^I(g^I(|f(x,\bar{y})|^{I,\kappa}), 0) = f^I(g^I(f^I(|x|^{I,\kappa}, |\bar{y}|^{I,\kappa})), 0) =$$

$$= f^I(g^I(f^I(a,1)),0) = f^I(g^I(2),0) = f^I(a,0) = \underline{\underline{0}}$$

ⓑ $R(f(y,1),x) \to Q(f(g(\bar{z}),\bar{y}))$

$$|R(f(y,1),x) \to Q(f(g(\bar{z}),\bar{y}))|^{I,\kappa} =$$

$$= |R(f(y,1),x)|^{I,\kappa} \to |Q(f(g(\bar{z}),\bar{y}))|^{I,\kappa} =$$

$$= R^I(|f(y,1)|^{I,\kappa}, |x|^{I,\kappa}) \to Q^I(|f(g(\bar{z}),\bar{y})|^{I,\kappa}) =$$

$$= R^I(f^I(|y|^{I,\kappa}, |1|^{I,\kappa}), a) \to Q^I(f^I(|g(\bar{z})|^{I,\kappa}, |\bar{y}|^{I,\kappa})) =$$

$$= R^I(f^I(b,1),a) \to Q^I(f^I(g^I(|\bar{z}|^{I,\kappa}), |1|^{I,\kappa})) =$$

$$= R^I(f^I(b,1),a) \to Q^I(f^I(g^I(2),1)) =$$

$$= R^I(0,a) \to Q^I(f^I(a,1)) = i \to Q^I(2) = i \to i = \underline{\underline{i}}$$

ⓒ $|\exists x(P(x,\bar{y}) \wedge Q(f(x,\bar{x})))|^{I,\kappa}$ (→ kif. értéke x függvényében)

	P	x	$\bar{y}$	$\wedge$	Q	f	x	$\bar{x}$
$x=a$:	h	a	1	h	h	0	a	0
$x=b$:	i	b	1	h	h	1	b	0
$x=c$:	h	c	1	h	i	2	c	0

9 Hozd prenex-alakra majd Skolem-formára az alábbi formulát.

$$F = \forall x \exists y (P(x) \to Q(y)) \land \forall x \exists y (\neg(P(y) \lor Q(x) \to R(x,y)))$$

$$\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)) \land \forall x \exists y (\neg(P(y) \lor Q(x) \to R(x,y)))$$
$$\sim \forall x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y)) \land \forall x \exists y (\neg(\neg(P(y) \lor Q(x)) \lor R(x,y)))$$
$$\sim \forall x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y)) \land \forall x \exists y ((P(y) \lor Q(x)) \land \neg R(x,y)))$$
$$\sim \forall x \Big(\exists y (\neg P(x) \lor Q(y)) \land \exists y ((P(y) \lor Q(x)) \land \neg R(x,y))\Big)$$
$$\sim \forall x (\exists y (\neg P(x) \lor Q(y)) \land \exists z ((P(z) \lor Q(x)) \land \neg R(x,z)))$$
$$\sim \forall x \exists y \exists z ((\neg P(x) \lor Q(y)) \land ((P(z) \lor Q(x)) \land \neg R(x,z)))$$
$$\sim \forall x ((\neg P(x) \lor Q(f_1(x))) \land ((P(f_2(x)) \lor Q(x)) \land \neg R(x, f_2(x))))$$

$f_1(x) = y \; ; \; f_2(x) = z$

MJ:

Szabályok

$A \to B = \neg A \lor B$ $\qquad \neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B$ $\qquad (A \to B) \land (B \to C) = A \to C$

$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$ $\qquad (A \to B) = \neg A \to \neg B$

$\forall x \exists y (\ell) \land \forall x \exists y (f) = \forall x (\exists y (\ell) \land \exists y (f))$

Prenex formula

Legyen Q tetszőleges kvantor, a $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B$ formula. $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ a prefixum, B kvantormentes formula a formula magja, törzse.

⇒ Prenex formulában a kifejezés elején (és csak ott) vannak a kvantorok

Skolem formula

Skolem formula a $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$ Prenex formula, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok ($\forall$) szerepelnek.

Ez eldönthető formulaosztály elsőrendben.

⇒ olyan Prenex formulák melyben csak univerzális kvantor van.