Név: .... Neptun: ....

Logika és számításelmélet zárthelyi

logika rész

2015-16-2 mintazh

1. $(Y \supset X) \wedge \neg Y \vee \neg X$

   (a) Rajzoljuk le a formula szerkezeti fáját. Fő logikai összekötője szerint milyen típusú a formula? (2 pont)

   (b) Adjuk meg a formula hamishalmazát! Indokoljuk is a választ! (Például számítással.) (4 pont)

2. (a) Formalizáljuk nulladrendben (ítéletlogikában) az alábbi állításokat!
   A_1: Ha Pisti tud szorozni, akkor ötöst kap, kivéve ha nem tudja az összeadást.
   A_2: Ha Pisti tud szorozni, akkor összeadni is tud.
   A_3: Ötöst csak akkor kaphat Pisti, ha nem tud összeadni.
   A_4: Pisti nem tud szorozni. (3 pont)

   (b) Legyenek F_1, F_2, F_3, F_4 rendre az A_1, A_2, A_3, A_4 állítások formalizálásával kapott formulák. Lássuk be, hogy ekkor $\{F_1, F_2, F_3\} \models_0 F_4$ (4 pont)

3. Adjunk meg egy az $\neg(X \supset \neg Y) \supset (Z \wedge X)$ formulával tautologikusan ekvivalens konjunktív normálformájú (KNF) formulát! (6 pont)

4. Adjunk meg egy olyan $\mathcal{S}$ klózhalmazt, melyre $\mathcal{S}$ kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha
   $\{X \vee Y,\ \ \neg W \supset X,\ \ \neg X \wedge (X \vee Z)\} \models_0\ Y \wedge Z.$ (3 pont)

5. Nulladrendű rezolúció segítségével igazoljuk, hogy
   $\{X \vee Y,\quad V \vee X,\quad \neg X,\quad X \vee Z,\quad \neg Y \vee \neg Z\}$ kielégíthetetlen. (5 pont)

6. Egy elsőrendű logika logikán kívüli jeleit és szignatúráját (egyetlen fajta van) a következőképpen definiáljuk:

   Pr=$\{P, Q\}$, $\nu_1(P) = 2$, $\nu_1(Q) = 1$,

   Fn=$\{f, g\}$, $\nu_2(f) = 2$, $\nu_2(g) = 1$,

   Cnst=$\{a\}$.

   Individuumváltozók: $\{x, y, z, \ldots\}$.

   (A) $f(f(f(f(y), y)))$ — term | nem term

   (B) $Q(\forall x P(x, y))$ — formula | nem formula

   (C) $\exists x Q(f(x, x))$ — formula | nem formula

   (D) $\neg\neg\neg\forall x \forall y \exists z P(f(x, x), x)$ — formula | nem formula

   (E) $\forall x f(x, y)$ — term | formula | mindkettő | egyik se

   (F) $\exists x P(x, y) \wedge \neg\forall x(Q(x) \supset \neg P(x, x))$ prímkomponensei:

   ....

   (G) Egy formula ebben a logikában, melynek szabad, kötött és vegyes individuumváltozója is van:

   ....

   (Pontszám: $\max\{0, HV - 2\}$, ahol HV: helyes válaszok száma.) (5 pont)

7. Az előző feladatban adott elsőrendű logikának tekintsük az alábbi $\mathcal{I} = \langle U, \mathcal{I}_{\text{Pr}}, \mathcal{I}_{\text{Fn}}, \mathcal{I}_{\text{Cnst}}\rangle$ interpretációját és ebben a κ változókiértékelést.

   $U = \{0, 1\}$, $\mathcal{I}_{\text{Pr}} : P \longrightarrow P^{\mathcal{I}}$, $Q \longrightarrow Q^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\text{Fn}} : f \longrightarrow f^{\mathcal{I}}$, $g \longrightarrow g^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\text{Cnst}} : a \longrightarrow a^{\mathcal{I}}$.

   ahol

$P^{\mathcal{I}}$	0	1
0	h	i
1	i	i

$Q^{\mathcal{I}}$	
0	i
1	h

$f^{\mathcal{I}}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$g^{\mathcal{I}}$	
0	1
1	0

   , $a^{\mathcal{I}} = 1$.

   Legyen továbbá a κ változókiértékelésre $\kappa(x) = 1, \kappa(y) = 0$.

   (a) $|f(f(g(x), a), g(y))|^{\mathcal{I},\kappa} =?$ (2 pont)

   (b) $|P(y, x) \supset \neg Q(g(f(x, y)))|^{\mathcal{I},\kappa} =?$ (2 pont)

   (c) $|\forall x P(y, x) \supset \neg Q(g(x))|^{\mathcal{I},\kappa} =?$ (2 pont)

   (d) Adjunk meg ugyanebben az $\mathcal{I}$ interpretációban egy másik, κ' változókiértékelést úgy, hogy az előző (b) részfeladat eredménye más legyen! (2 pont)

   Indokoljuk is a válaszokat! (Például elég ha a termek és formulák résztermjeinek illetve részformuláinak is megadjuk az értékét/igazságértékét.)

8. A gyakorlaton látott Ar$= \langle \mathbb{N}_0; =; s, +, \times; 0\rangle$ aritmetikai struktúrában formalizáljuk az alábbi állítást! (s az 1-aritású rákövetkezés függvény, a többi függvény és reláció 2-aritású és az aritmetikában közismert módokon vannak interpretálva.)

   „Ha egy természetes szám kisebb vagy egyenlő egy másiknál, akkor ha a két számhoz ugyanazt a természetes számot adjuk hozzá, továbbra is fennáll a kisebb vagy egyenlő reláció.” (3 pont)

9. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítás NEM IGAZ!

   „Minden A és B elsőrendű formulára teljesül, hogy

   $$\exists x(A \wedge B) \sim \exists x A \wedge \exists x B.\text{”}$$ (7 pont)