Logika és számításelmélet 2. zárthelyi

Csütörtök 14 órai ZH megoldásai (A)

1.

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^{\frac{1}{10}}10^{10}}{10^{\frac{1}{10}n}n^{10}} = 10^{10}\frac{1}{10^{\frac{1}{10}n}n^{99/10}} \to 0$$

$$\frac{g(n)}{h(n)} = \frac{10^{\frac{1}{10}n}n^{10}}{10n^{\frac{1}{10}n}} = 10^{\frac{1}{10}n+10\log_{10}n-1-\frac{1}{10}n\log_{10}n} \to 0$$

Ez alapján $f(n) \neq \Omega(g(n))$, $g(n) = \Omega(f(n))$, $g(n) = O(h(n))$, $h(n) \neq O(g(n))$.

2. Legyen $U = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$. Jelölje H_n azon véges hosszúságú, U betűiből képezhető sorozatok halmazát, melyek csak a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ betűket használják (nem feltétlen mindet) és a sorozat hossza legfeljebb n. $|H_n|$ véges ($|H_n| = 1+n+\ldots+n^n = (n^{n+1}-1)/(n-1)$). Minden H-beli sorozat besorolható valamelyik H_n-be (többe is). Az $F_1 = H_1$, $F_2 = H_2 \setminus H_1$, …, $F_n = H_n \setminus H_{n-1}$, … halmazok véges sok sorozatot tartalmaznak, diszjunktak és az uniójuk kiadja H-t. Tehát H elemeinek egy lehetséges felsorolása: felsoroljuk először F_1, majd F_2, majd F_3, stb. elemeit.

3. (a) $q_0abcc \vdash q_1bcc \vdash \#q_2cc \vdash q_3\#@c \vdash q_3 \sqcup \#@c \vdash q_0\#@c \vdash \#q_4@c \vdash \#@q_5c \vdash \#@q_nc$. Tehát nem fogadja el $abcc$-t.

   (b) Az $\mathcal{M}$ TG az $L = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nyelv szavait fogadja el. Egy ciklust az első, $\sqcup$ utáni betűn kezdjük. (Korábbi ciklusokban már néhány a-t töröltünk.) Az első a-t átírjuk $\sqcup$-re, az első b-t átírjuk $\#$-re, az első c-t átírjuk @-re, majd visszatérünk a szó elejére, ami így már egy cellával jobbra lesz. Az átmenetek úgy vannak meghatározva, hogy a korábban átírt, most már # és @ betűkön át lehessen lépdelni. Minden ciklusban pontosan 1 a,b és c íródik át. Ahhoz, hogy ciklus közben ne akadjunk el a szónak mindenképp egy a-s blokkal kell kezdődnie, majd egy b-s blokkal, majd egy c-s blokkal folytatódnia. Továbbá a b-s illetve c-s blokknak legalább olyan hosszúnak kell lennie, mint az a-s blokknak a szó elején. Ha elfogytak az a-k ellenőrizzük, hogy már csak # és @ van a szalagon, azaz a b-s éa c-s blokk nem hosszabb-e, mint az a-s blokk és van-e a c-s blokk után még valami. Ha nincs akkor elfogadjuk a szót.

   (c) A ciklusok száma legfeljebb n. Minden ciklusban legfeljebb $2n$(+konstans) lépés történik. Tehát ez $O(n^2)$ lépés. Végül a szalag további részének ellenőrzése max. n lépés, így pl. $k = 2$ jó választás.

4. (a) Terv: A szó végére megyünk, majd egyesével átmásoljuk a betűket hátulról a szó végére. Egy ciklus úgy kezdődik, hogy valamennyit már átmásoltunk és az utolsó átmásolt betű az eredeti szóban meg van jelölve (Pl. a helyett c, b helyett d áll.) A megjelölt betűről indulunk. (Az első ciklusnál a szó végéről.) Visszaírjuk az eredeti betűt, eggyel balra lépünk. Megjelöljük a betűt és megjegyezzük egy állapotban. A szó végére megyünk, kiírjuk a megjegyzett betűt majd balra haladva megkeressük a megjelölt betűt. Akkor végeztünk, ha a ciklus elején a jelölés törlése majd balra lépés után $\sqcup$-ot olvasunk. Átmenetdiagram talán később...

   (b) A szó végére megyünk: n lépés, ha $i-1$ betű van már átmásolva, akkor az i. betű másolása $4i-1$ lépés végül 2 lépés a befejezés. tehát a TG időigénye $n + 2 + \sum_{i=1}^{n}(4i-1) = 2n(n+1) + 2 = \Theta(n^2)$.

5. Legyenek a φ-ben szereplő ítéletváltozók $X_1, \ldots, X_n$. Egy nyelv akkor NP-teljes, ha NP-beli és polinom időben visszavezethető rá minden NP-beli probléma. Azt láttuk, hogy a SAT probléma NP-beli, azaz nemdeterminisztikus TG-pel polinom időben ellenőrizhető, hogy φ kielégíthető KNF-jú ítéletlogikai formula-e. Azt lineáris időben tudja ellenőrizni egy TG, hogy minden elemi diszjunkció legfeljebb 3 literálból áll (egyszer végigolvassa az input szót, és állapotaival számolja az elemi diszjunkciókban szereplő literálok számát), szintén lineáris időben ellenőrizhető, hogy minden ítéletváltozó legfeljebb 3-szor szerepel (egyszer végigolvassa az input szót, és állapotaival számolja az egyes ítéletváltozók előfordulásának számát, pl. az, hogy a $q_{i_1i_2\ldots i_n}$ állapotban vagyunk jelentse azt, hogy eddig X_j i_j-szer fordult elő, $1 \leq j \leq n, 0 \leq i_j \leq 3$.) Tehát 3-SAT-3 NP-beli probléma.

   Azt, hogy polinom időben visszavezethető rá minden NP-beli probléma úgy látjuk be, hogy polinom időben visszavezetünk rá egy már ismert NP-teljes problémát. Legyen ez a probléma a SAT-3. Tekintsünk a φ, minden ítéletváltozót legfeljebb 3-szor tartalmazó formulának egy túl sok tagból álló elemi diszjunkcióját, $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n$-et, ahol $n \geq 4$. Ezt a részformulát helyettesítsük az $(L_1 \vee L_2 \vee Y_1) \wedge (\neg Y_1 \vee L_3 \vee Y_2) \wedge \cdots \wedge (\neg Y_{n-4} \vee L_{n-2} \vee Y_{n-3}) \wedge (\neg Y_{n-3} \vee L_{n-1} \vee L_n)$ részformulával, ahol $Y_1, \ldots, Y_{n-3}$ túl hosszú klózonként új, egyedi ítéletváltozók. Gyakorlaton láttuk (amikor SAT-ot vezettük vissza 3-SAT-ra), hogy φ akkor és csak akkor kielégíthető, ha az így átalakított φ' formula kielégíthető. Nyilvánvaló, hogy φ'-ben is minden ítéletváltozó legfeljebb 3-szor fordul elő, továbbá az átalakítás után minden elemi diszjunkció hossza ≤ 3. Az átalakítás nyilván polinom időben elvégezhető (φ' legfeljebb 3-szor olyan hosszú, mint φ). (Ha valaki rájött volna, hogy a SAT-3 vagy 3-SAT problémát kéne visszavezetni rá, és prezentálja a formula átalakítását már szép pontot adtam volna, ilyen részletes elemzés nem kell a 10 ponthoz.)

B csoport: 1. feladat: $f(n) = O(g(n))$, $g(n) \neq O(f(n))$, $g(n) \neq \Omega(h(n))$, $h(n) = \Omega(g(n))$. A 3. feladatban a, b, c helyett 0,1,2 volt, a 4.-ben b helyett c.