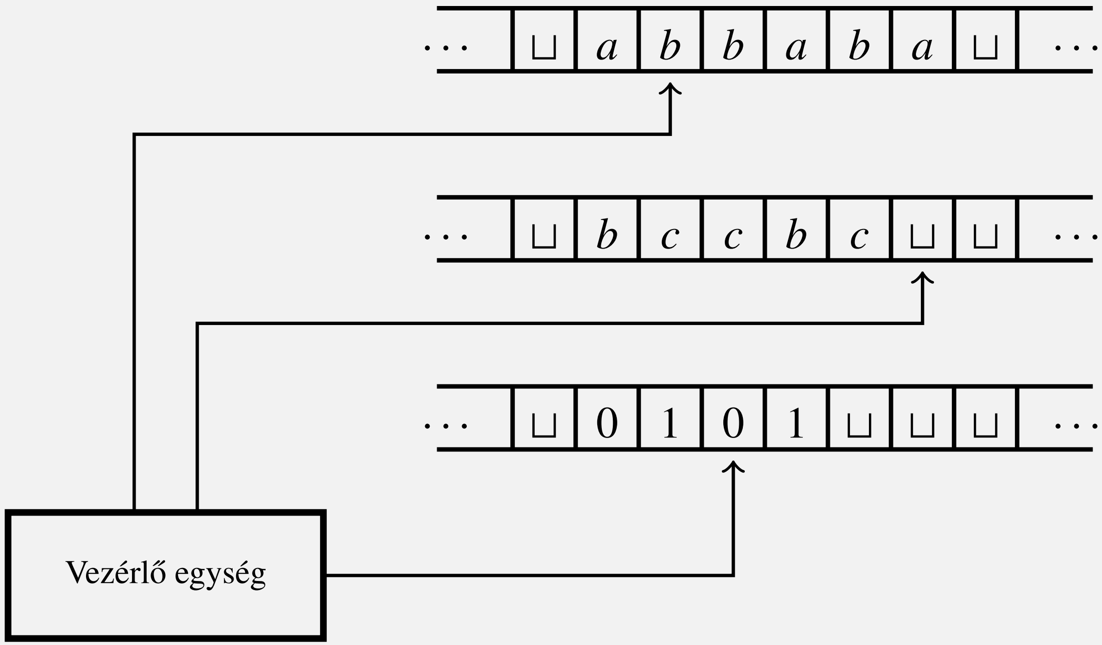
Logika és számításelmélet

8. előadás

k-szalagos Turing-gép

Informális kép



- Egy ütem: Mind a k szalag olvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, egymástól függetlenül.
- Az egyszalagos géppel analóg elfogadásfogalom.
- Az egyszalagos géppel analóg időigény fogalom.

k-szalagos Turing-gép

Definíció

k-szalagos Turing-gép

A **k-szalagos Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k$ az átmenet függvény.

k-szalagos Turing-gép

Konfigurációk

Konfiguráció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy az aktuális állapot q, az i. szalag tartalma $u_i v_i$ és az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leq i \leq k)$.

Kezdőkonfiguráció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció:** $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$.

[v_1 miért $u\sqcup$ és nem u? Azért, hogy $u = \varepsilon$ ne legyen külön eset, és ugyanazt a szalagtartalmat reprezentálják.]

Elfogadó/elutasító/megállási konfiguráció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$, **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$, **megállási konfiguráció**, ha $q = q_i$ vagy $q = q_n$.

k-szalagos Turing-gép

Egy- és többlépéses konfigurációátmenet

A k-szalagos Turing-gépek **egylépéses konfigurációátmenetét** az egyszalagos esettel analóg módon definiálhatjuk. Mivel túl sok eset van (a lehetséges 3^k irány-k-as miatt) ezért ezt csak egy példán keresztül nézzük meg. Jelölés: $\vdash$.

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1v_1, u_2, a_2v_2) \vdash (r, u_1b_1, v_1', u_2, b_2v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell hogy szikronban lépjenek, egymástól függetlenül mozoghatnak.

Ezek után a **többlépéses konfigurációátmenet** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal. Jelölés: $\vdash^*$.

k-szalagos Turing-gép

Felismert nyelv, időigény

k-szalagos Turing-gép által felismert nyelv

$$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),\ x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots,, y_k \neq \varepsilon\}.$$

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.
A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelv fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.

k-szalagos Turing-gép futási ideje adott szóra

Egy k-szalagos Turing-gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.

Ezek után az **időigény** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal.

k-szalagos Turing-gép

Egy példa

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$!

Az **átmenetdiagram**.

$$q \xrightarrow{a_1, \ldots, a_k / b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k} r$$

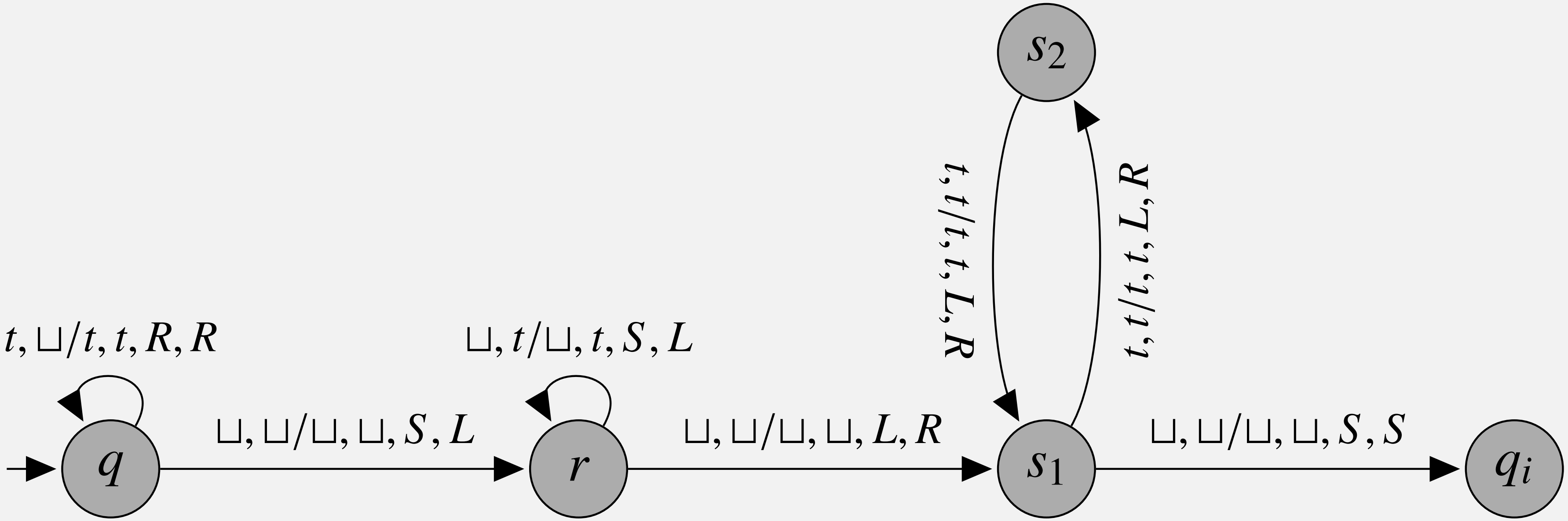
$\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$ jelölése
$(q, r \in Q, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \Gamma, D_1, \ldots, D_k \in \{L, S, R\})$

k-szalagos Turing-gép

Egy példa

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!

Egy **megoldás**:
(A többi átmenet q_n-be megy. Minden átmenetre $t \in \{a,b\}$ tetszőleges.)



Mennyi a TG időigénye? Ez egy $O(n)$ időkorlátos TG.

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

Ekvivalens TG-ek

Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

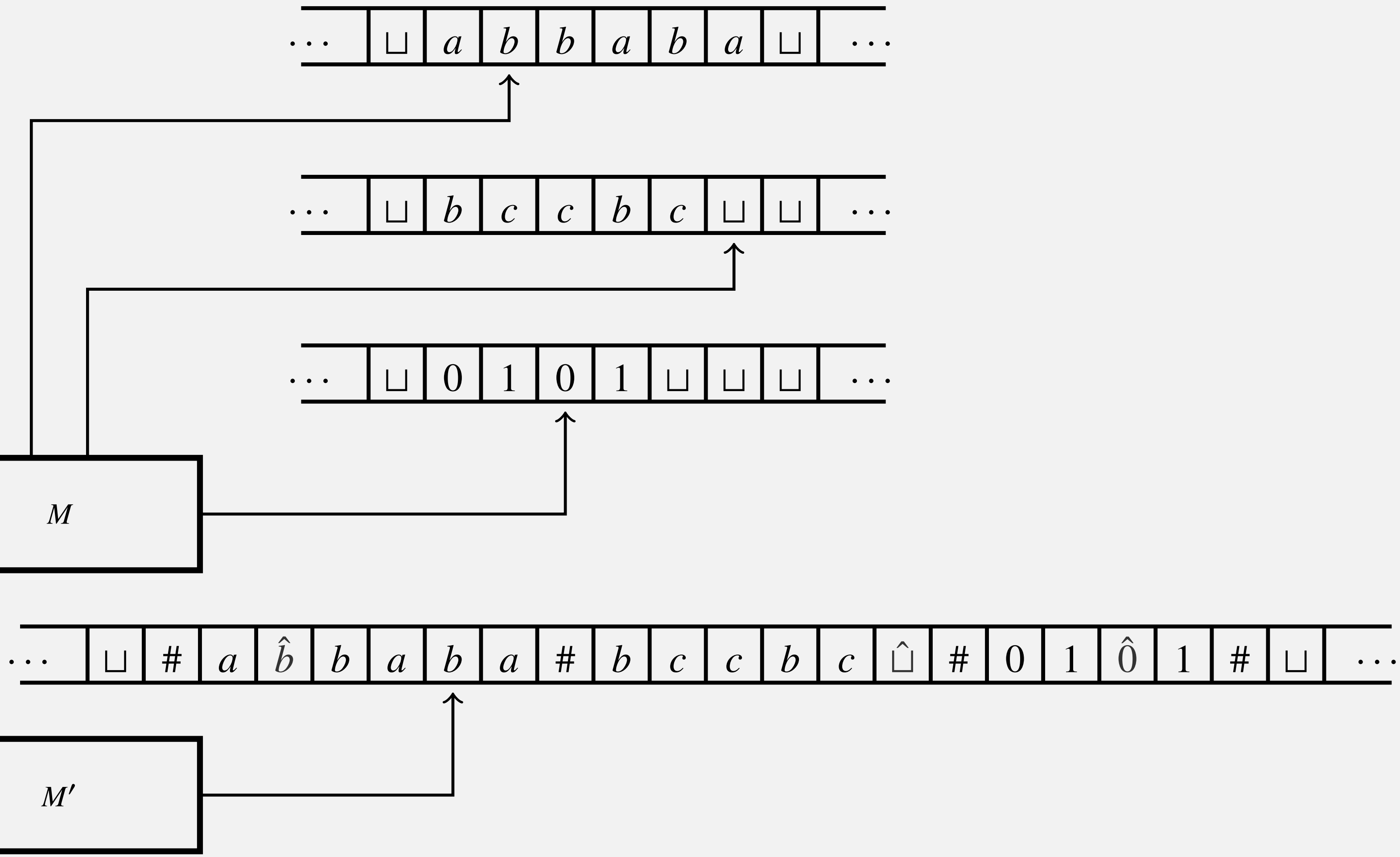
Tétel

Minden M k-szalagos Turing-géphez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos Turing-gép. Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű $f(n)$ időkorlátos gép (azaz $f(n) \geq n$), akkor M' $O(f(n)^2)$ időkorlátos.

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

Bizonyítás (vázlat): A szimuláció alapötlete



k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

A szimuláció menete egy $a_1 \cdots a_n$ bemeneten:

1. M' kezdőkonfigurációja legyen $q_0'\#\hat{a}_1 a_2 \cdots a_n\#\hat{\sqcup}\# \cdots \hat{\sqcup}\#$
2. M' először végigmegy a szalagon (számolja a #-okat) és eltárolja a $\hat{}$ -pal megjelölt szimbólumokat az állapotában
3. M' mégegyszer végigmegy a szalagján és M átmenetfüggvénye alapján aktualizálja azt
4. ha M valamelyik szalagján nő a szó hozza, akkor M'-nek az adott ponttól mozgatnia kell a szalagja tartalmát jobbra
5. Ha M elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M' is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába
6. Egyébként M' folytatja a szimulációt a 2-ik ponttal

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal – időigény

Meggondolható, hogy M egyetlen lépésének szimulálásakor

- a lépések számára aszimptotikus felső korlát az M' által addig felhasznált cellaterület (tár). (Kétszer végigmegy M' szalagján, legfeljebb k-szor kell egy $\sqcup$-nek helyet csinálni, ami szintén O(felhasznált cellaterület))
- a felhasznált cellaterület $O(1)$-el nőtt. ($\leq k$-val, hiszen $\leq k$-szor kell egy $\sqcup$-t beszúrni)

Az M' által felhasznált cellaterület mérete kezdetben $\Theta(n)$, lépésenként $O(1)$-gyel nőhet, így $O(n + f(n)O(1)) = O(n + f(n))$ közös, minden lépés után igaz aszimptotikus felső korlát az M' által felhasznált cellaterület méretére.
Tehát M minden egyes lépésének szimulációja $O(n + f(n))$ M'-beli lépés.
Így M' összesen $f(n) \cdot O(n + f(n))$ időkorlátos, ami $O(f(n)^2)$, ha $f(n) = \Omega(n)$.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

- Az egy irányban végtelen szalagos Turing-gép egy, a bal oldalán zárt szalaggal rendelkezik
- A fej nem tud "leesni" a bal oldalon, még ha az állapot-átmeneti függvény balra lépést ír is elő a legbaloldalibb cellán, ilyenkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-gép.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Tétel

Minden egyszalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-gép.

Bizonyítás (vázlat):

1. Szimuláljuk M-et egy olyan M' TG-pel, ami két darab egy irányban végtelen szalaggal rendelkezik:
   M' megjelöli mindkét szalagjának első celláját egy speciális szimbólummal. Ezután M
   – az első szalagján szimulálja M-et akkor, amikor az a fej kezdőpozícióján vagy attól jobbra dolgozik,
   – a második szalagján pedig akkor, amikor az M a fej kezdőpozíciótól balra dolgozik (ezen a szalagon az ettől a pozíciótól balra lévő szó tükörképe van)
2. Szimuláljuk M'-t egy egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-géppel (az előző tételben látott bizonyításhoz hasonlóan)

Nemdeterminisztikus Turing-gép

definíció, egylépéses konfigurációátmenet

Jelölje $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ az X halmaz hatványhalmazát.

Nemdeterminisztikus Turing-gép (NTG)

A **nemdeterminisztikus Turing-gép** (NTG) olyan
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol

- $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_i, q_n$ ugyanaz, mint eddig
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$

Konfigurációk C_M halmazának fogalma azonos.

$\vdash \subseteq C_M \times C_M$ egylépéses konfigurációátmenet

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma,\ u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, azaz:

$\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet

$C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots \in C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

NTG által felismert nyelv

$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon\}$.

Egy NTG-re úgy gondolhatunk, hogy több számítása is lehet ugyanarra a szóra. Akkor fogad el egy szót, ha legalább egy számítása q_i-ben ér véget.

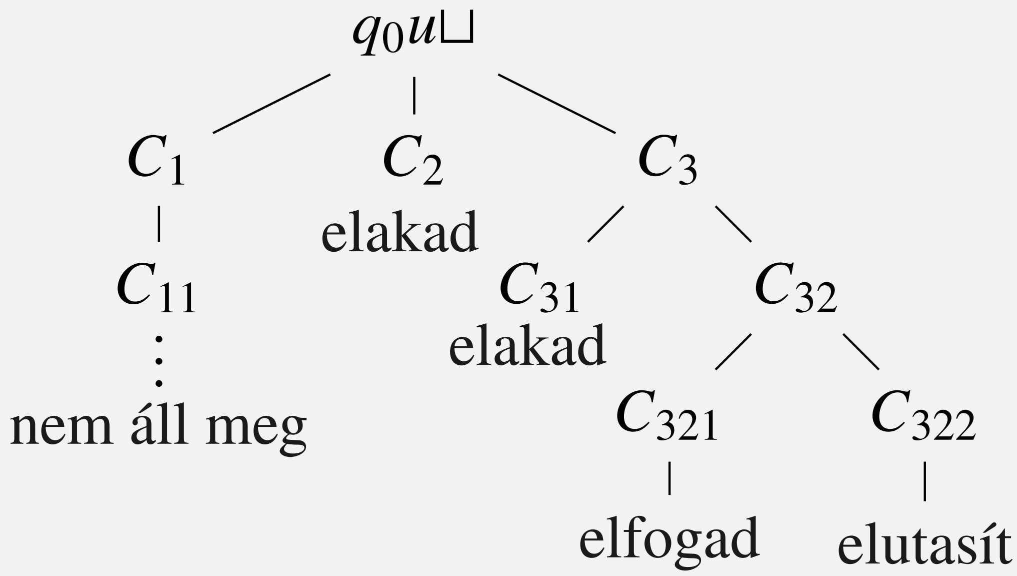
Nemdeterminisztikus Turing-gép

Nemdeterminisztikus számítási fa

$u \in \Sigma^*$ nemdeterminisztikus számítási fája

Irányított fa, melynek csúcsai konfigurációkkal címkézettek. $q_0u\sqcup$ a gyökér címkéje. Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

Példa:



Elfogadja u-t, hiszen a $q_0u\sqcup \vdash C_3 \vdash C_{32} \vdash C_{321}$ számítása elfogadó konfigurációba visz. Egy ilyen számítás is elég az elfogadáshoz.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

NTG-vel való eldönthetőség, időigény

M **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri és minden $u \in \Sigma^*$ szóra az M számítási fája véges és minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

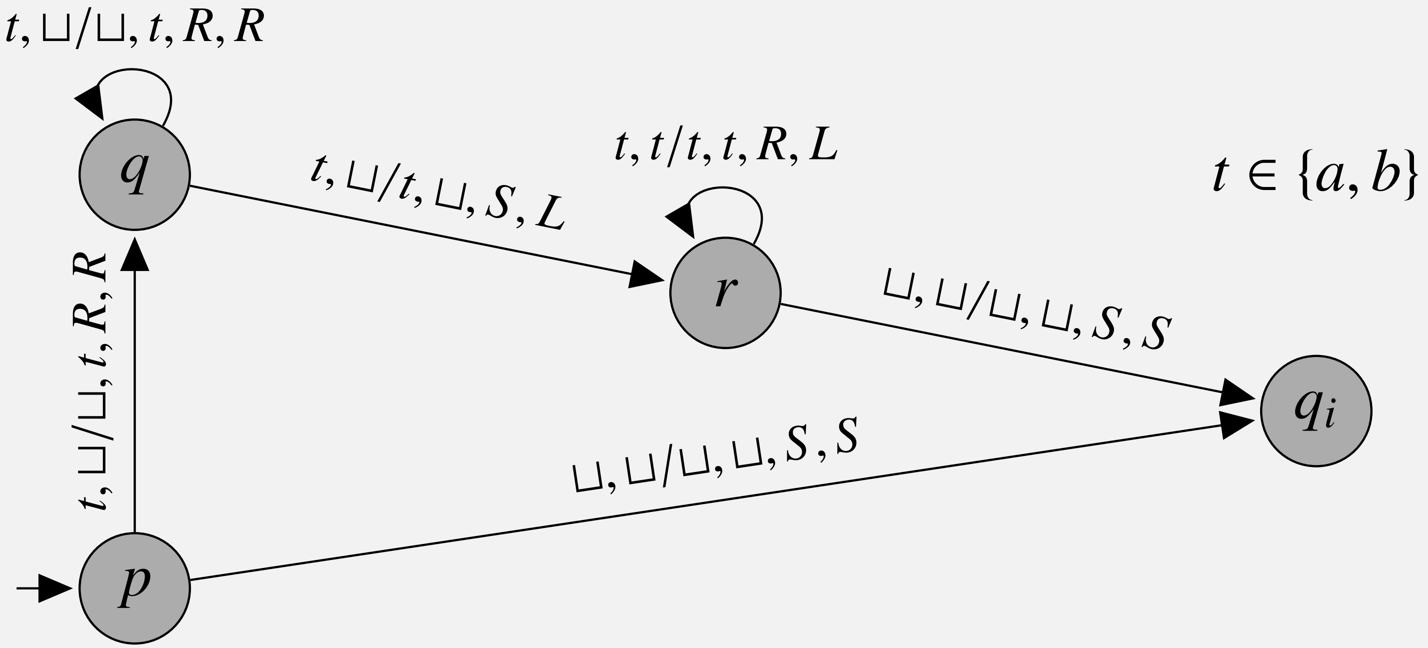
M $f(n)$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra u számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Megjegyzés: a nemdeterminisztikus Turing-gép definíciója értelemszerűen kiterjeszthető k-szalagos gépekre is, így beszélhetünk k-szalagos nemdeterminisztikus Turing-gépekről is.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Példa

Feladat: Készítsünk egy M nemdeterminisztikus Turing-gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!



$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash (q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, ba, ab, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, ba, a, b) \vdash$
$(r, b, a, \varepsilon, ab) \vdash (r, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab) \vdash (q_i, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab)$

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

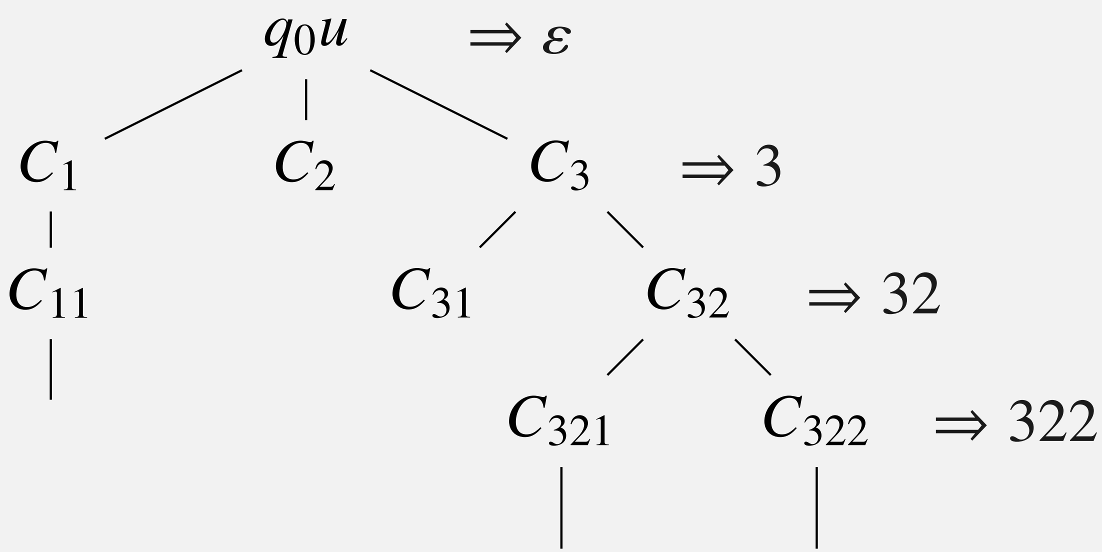
Bizonyítás (vázlat): M' egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten szimulálja u M-beli összes számítását számítási fájának szélességi keresése által.

- Legyen d az M átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $d = \max_{(q,a) \in Q \times T} |\delta(q, a)|$.
- Legyen $T = \{1, 2, \ldots, d\}$ egy ábécé.
- minden $(q, a) \in Q \times \Gamma$ esetén rögzítsük le $\delta(q, a)$ elemeinek egy sorrendjét

Nemdeterminisztikus Turing-gép

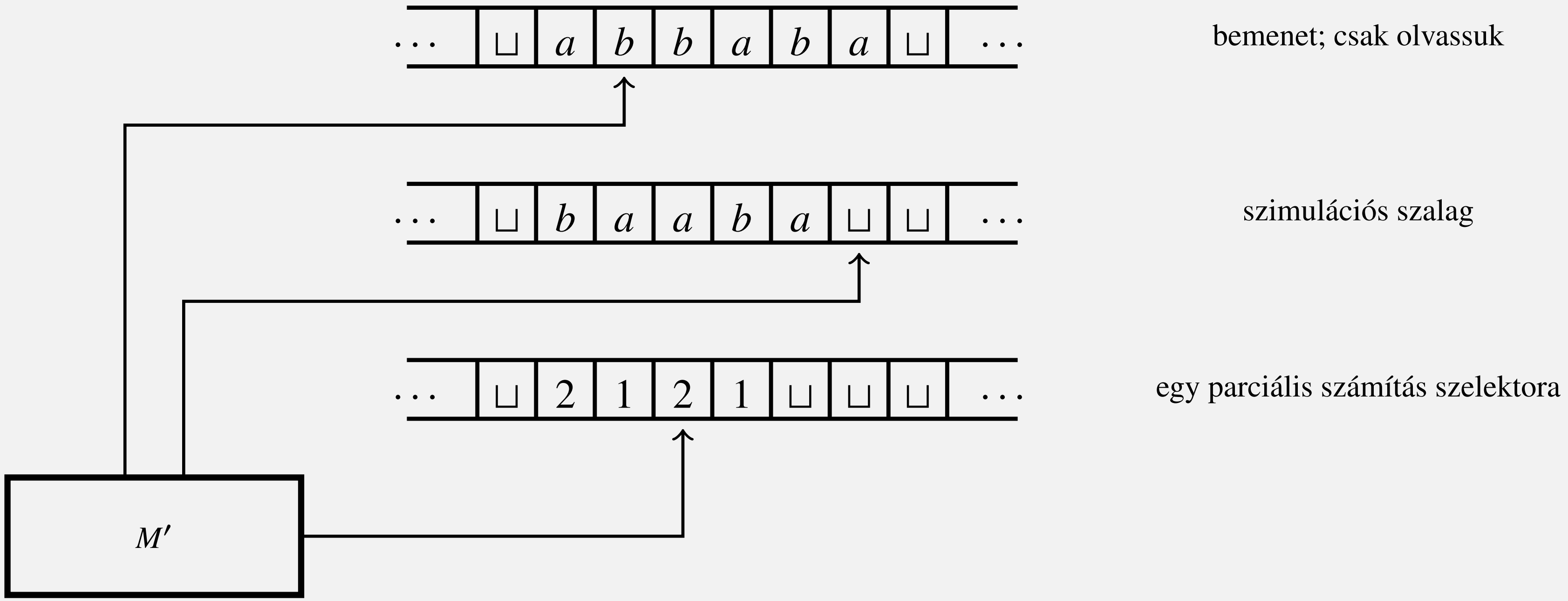
Szimulálás determinisztikus TG-pel

A számítási fa minden csúcsához egyértelműen hozzárendelhető egy T^*-beli szó, az adott konfigurációhoz tartozó parciális konfigurációátmenet-sorozat szelektora.



Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel



M' működése:

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

- M' kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - M' rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen k a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű a és a szimulált M aktuális állapota q
    - Ha $\delta(q,a)$-nak van k-ik eleme, akkor
      - M' szimulálja M egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez q_i -be vezet, akkor M' is elfogad
      - Ha ez q_n-be vezet, akkor M' kilép ebből a ciklusból
    - M' a 3-ik szalagon eggyel jobbra lép
  - M' törli a 2. szalagot és előállítja a 3. szalagon a hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés szerinti következő szót T felett

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

- M' akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált M elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
- M'-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia ($\leq$ egy $f(n)$ magasságú teljes d-áris fa belső csúcsainak száma, ami $O(d^{f(n)})$), azaz M' időigénye $2^{O(f(n))}$

Megjegyzés:

- Abból, hogy a bizonyításban alkalmazott szimuláció exponenciális időigényű még nem következik, hogy nincs hatékonyabb szimuláció.
- Az a *sejtés*, hogy nem lehet a nemdeterminisztikus Turing-gépet az időigény drasztikus romlása nélkül determinisztikus Turing-géppel szimulálni.