Logika és számításelmélet 2. zárthelyi

Csütörtök 14 órai ZH megoldásai (A)

1.

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{10^n n^{\frac{1}{10}}}{10^{\frac{1}{10}n} n^{10}} = \frac{10^{\frac{9}{10}n}}{n^{99/10}} \to \infty$$

$$\frac{g(n)}{h(n)} = \frac{10^{\frac{1}{10}n} n^{10}}{10 n^{\frac{1}{10}n}} = 10^{\frac{1}{10}n + 10\log_{10} n - 1 - \frac{1}{10} n \log_{10} n} \to 0$$

Ez alapján $f(n) = \Omega(g(n))$, $g(n) \neq \Omega(f(n))$, $g(n) = O(h(n))$, $h(n) \neq O(g(n))$.

2. I. mo: A gyakorlaton láttuk, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ számossága megszámlálhatóan végtelen. Legyen H_n azon kocka rácspontjainak halmaza, melynek két csúcsa $(0,0,0)$ és (n,n,n). $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rácspontjainak felsorolása: Először soroljuk fel H_0 pontjait (1 db), majd $H_1 \setminus H_0$ pontjait (8-1=7 db), majd $H_2 \setminus H_1$ pontjait (27-8=19 db), stb. Minden n-re $|H_{n+1} \setminus H_n|$ véges, $(n+1)^3 - n^3$, tehát ez valóban egy felsorolása a térnyolcad rácspontjainak, vagyis $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ is megszámlálhatóan végtelen.

   II. mo: Legyen $f((i,j)) \in \mathbb{N}$ az (i,j) pár sorszáma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ elemeinek felsorolásban, $(i,j \in \mathbb{N})$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \mathbb{N}\} = \{(i,(j,k)) \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}$. $|\{(i,(j,k)) \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}| = |\{(i, f((j,k))) \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}| = |\{(i,r) \mid i,r \in \mathbb{N}\}|$, ahol az utolsó előtti egyenlőség azért igaz, mert $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektív, míg az utolsó azért, mert f szürjektív.

3. (a) $q_0aaaab \vdash aq_1aaab \vdash a \sqcup q_2aab \vdash^2 a \sqcup aaq_2b \vdash a \sqcup aq_3a\# \vdash^2 aq_3 \sqcup aa\# \vdash a \sqcup q_0aa\# \vdash a \sqcup aq_1a\# \vdash a \sqcup a \sqcup q_2\# \vdash a \sqcup a \sqcup \#q_2\sqcup \vdash a \sqcup a \sqcup \#q_n\sqcup$. Tehát nem fogadja el $aaaab$-t.

   (b) Az $\mathcal{M}$ TG az $L = \{a^{2n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nyelv szavait fogadja el. Egy ciklust $\sqcup$ utáni betűn kezdünk. A második a-t átírjuk $\sqcup$-re, majd az első b-t átírjuk $\#$-re, végül visszamegyünk az első (hátulról!) $\sqcup$-re. Ami így 2-vel jobbra van az előzőtől. Csak akkor működik, ha egy a-s blokkot egy b-s blokk követ. Közben visszafelé át kell haladnunk a $\#$-re átírt betűkön is. Minden 2 a-ra 1 b kerül átírásra. Végül, amikor elfogytak az a-k q_0-ban, akkor ellenőrizzük, hogy nem maradt-e még át nem írt betű a szalagon.

   (c) A ciklusok száma legfeljebb n. Minden ciklusban legfeljebb $2n$(+konstans) lépés történik. Tehát ez $O(n^2)$ lépés. Végül a szalag további részének ellenőrzése max. n lépés, így pl. $k = 2$ jó választás.

4. (a) Terv: A szón balról jobbra haladva majd átírunk minden az a-t c-re, minden b-t d-re, közben amit átírunk lemásoljuk a szalag végére. Tegyük fel, hogy valahány betűt már átírtunk, és átmásoltuk a szalag végére, továbbá, hogy az író-olvasó fej a következő másolandó betűn áll. Innentől kezdve egy ciklus leírása: ha a-t olvasok c-re, ha b-t d-re cserélem, és hogy mit cseréltem le állapotban megjegyzem. Elmegyek jobbra az első $\sqcup$-ig, ott kiírom a megjegyzett betűt (c-t vagy d-t!!!), visszamegyek a c-ken d-ken majd az a-kon, b-ken egészen az első (hátulról!) c-ig vagy d-ig, majd egy jobbra lépéssel a következő másolandó betűre állok. Ha nincs több másolandó betű a szalagnak valamelyik végére megyek, és átírom az összes c-t a-ra, az összes d-t b-re. Átmenetdiagram talán később...

   (b) Minden betű másolása nagyjából $2n$ lépés, ezt szorozni kell a másolandó betűk számával, azaz n-nel, a végén a visszaírás max. $2n$ lépés, tehát a TG időigénye $\Theta(n^2)$.

5. Visszavezetjük a problémá**ra** a TG-ek megállási problémáját az üres szón. Indirekt tegyük fel, hogy egy $\mathcal{S}$ Turing-gép el tudja dönteni egy tetszőleges $\mathcal{M}$ TG-ről, hogy minden szót felismer-e. Készítünk egy $\mathcal{S}'$ TG-et, mely $\mathcal{M}$-ről eldönti, hogy megáll-e az üres szón. $\mathcal{S}'$ egy $\mathcal{M}$ inputon (valójában persze az $\mathcal{M}$ TG kódja az input) a következőt csinálja: Először legyártja $\mathcal{M}$-ből azt az $\mathcal{M}'$ TG-et, mely először úgy működik, hogy letörli az input szót, bármi is legyen az, majd pontosan úgy működik, ahogy $\mathcal{M}$, végül ha $\mathcal{M}$ megáll, akkor $\mathcal{M}'$ q_i-ben álljon meg. $\mathcal{S}'$ ezek után elindítja az $\mathcal{S}$ TG-et az $\mathcal{M}'$ inputtal. Az indirekt feltevésünk szerint az $\mathcal{S}$ TG ad egy választ, hogy $\mathcal{M}'$ felismer-e minden szót, vagy sem. Vegyük észre, hogy $\mathcal{M}'$ konstrukciója alapján $\mathcal{M}'$ pontosan akkor ismer fel minden szót, ha $\mathcal{M}$ megáll az üres szón. Végül, $\mathcal{S}'$ válaszoljon igennel (azaz menjen q_i állapotba), ha $\mathcal{S}$ igen választ adott, nemmel, ha $\mathcal{S}$ nem választ adott. Tehát az $\mathcal{S}'$ TG egy olyan TG, amely eldönti, hogy egy tetszőleges $\mathcal{M}$ TG megáll-e az üres szón, vagy sem. De erről a gyakorlaton/előadáson láttuk, hogy ilyen nincs.

B csoport: 1. feladat: $f(n) \neq O(g(n))$, $g(n) = O(f(n))$, $g(n) \neq \Omega(h(n))$, $h(n) = \Omega(g(n))$. A 3. feladatban a helyett c volt, a 4.-ben a és b helyett 0 és 1 volt.