Logika és számításelmélet

I. rész
Logika

Elérhetőségek

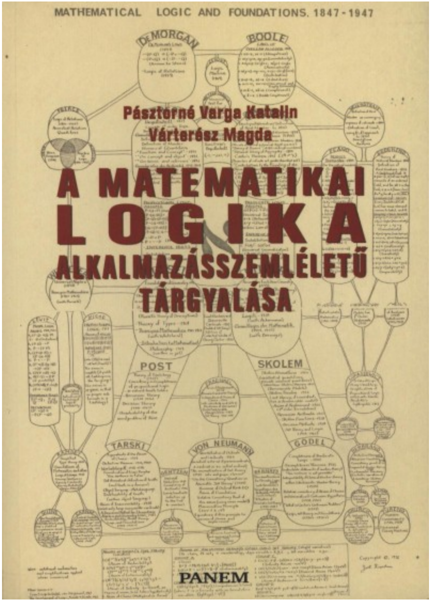
Tejfel Máté

Déli épület, 2.606

matej@inf.elte.hu

http://matej.web.elte.hu

Tankönyv


MATHEMATICAL LOGIC AND FOUNDATIONS. 1847-1947
DeMORGAN
BOOLE
Pásztorné Varga Katalin
Várterész Magda
A MATEMATIKAI
LOGIKA
ALKALMAZÁSSZEMLÉLETŰ
TÁRGYALÁSA
POST
SKOLEM
TARSKI
VON NEUMANN
GÖDEL
PANEM

Tartalom

Alapfogalmak

Halmazok direktszorzata

A és B tetszőleges halmazok direkt vagy Descartes szorzata $A \times B$ az összes olyan (a, b) párok hamaza, ahol $a \in A$ és $b \in B$.

U^n-nel jelöljük U-nak önmagával vett n-szeres direktszorzatát, ami az U elemeiből képezhető összes n elemű sorozatok halmaza ($U^2 = U \times U$).

Függvény

Legyenek D és R (nem feltétlenül különböző) halmazok. Függvénynek nevezünk egy $D \to R$ (D halmaz minden eleméhez egy R-beli elemet rendelő) leképezést. D a leképezés értelmezési tartománya, R az értékkészlete.

Alapfogalmak

Függvény fajtái

Legyen D a függvény értelmezési tartománya, R az értékkészlete. Valamint legyen U egy tetszőleges (individuum)halmaz.

- Ha $D = U$, akkor a függvény egyváltozós,
- ha $D = U^n$ $(n > 1)$, akkor n változós,
- ha $R = \mathbb{N}$, akkor a függvény egészértékű,
- ha $R = \{i, h\}$, akkor a függvény logikai függvény, más néven reláció,
- ha $D = R^n$ (azaz a függvény általános alakja: $U^n \to U$), akkor a függvény matematikai függvény, más néven művelet,
- az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ alakú függvény logikai művelet.

Logikai műveletek igazságtáblája

A lehetséges **kétváltozós** logikai műveletek közös igazságtáblája.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	**Y**	**X∧Y**	**X∨Y**	**X⊃Y**	**X↔Y**	**¬↔**	**¬∧**	**¬∨**	**¬⊃**	**¬⊂**	**X⊂Y**	**¬X**	**¬Y**	**X**	**Y**	**i**	**h**
i	i	i	i	i	i	h	h	h	h	h	i	h	h	i	i	i	h
i	h	h	i	h	h	i	i	h	i	h	i	h	i	i	h	i	h
h	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	i	h	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h	i	i	h	h	i	i	i	h	h	i	h

A táblázat tartalmazza a 16 db 2-változós műveletet (a 4 db 1- és a 2 db 0-változós művelet is köztük van). Ezekből a logika tárgyalásánál a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ műveleteket használjuk csak.

Nyelvdefiníció

Nyelv = Ábécé + Szintaxis + Szemantika

Rekúrzió/Indukció

Szerkezeti rekurzió

- definíciós módszer
- alaplépés + rekurzív lépés
- példa: logikai formulákon értelmezett függvények definíciója

Szerkezeti indukció

- bizonyítási módszer rekurzívan definiált struktúrák tulajdonságairól
- alaplépés + indukciós lépés
- speciális példa: teljes indukció
- példa: logikai formulák tulajdonságainak bizonyítása

Logika tárgya/célja

- A logika tárgya az emberi gondolkodás vizsgálata.
- A logika célkitűzése.
  Gondolkodási folyamatok vizsgálata során
  a helyes következtetés törvényeinek feltárása,
  újabb helyes következtetési módszerek kidolgozása.

Következtetésforma

Gondolkodásforma vagy következtetésforma

Egy $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ állításhalmazból és egy A állításból álló (F, A) pár.

Helyes következtetésforma

Egy $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ állításhalmazból és egy A állításból álló (F, A) pár, ha létezik olyan eset, hogy az F állításhalmazban szereplő mindegyik állítás igaz és minden ilyen esetben az A állítás is igaz.

Tartalom

Ítéletlogika vagy állításlogika

Tárgya az egyszerű állítások és a belőlük logikai műveletekkel kapott összetett állítások vizsgálata.

Egyszerű állítás

Egy olyan kijelentés, amelynek tartalmáról eldönthető, hogy igaz-e vagy nem. Egy állításhoz hozzárendeljük az igazságértékét: az i vagy h értéket.

Összetett állítás

Egy egyszerű állításokból álló összetett mondat, amelynek az igazságértéke csak az egyszerű állítások igazságértékeitől függ. Az összetett állítások csak olyan nyelvtani összekötőszavakat tartalmazhatnak amelyek logikai műveleteknek feleltethetők meg.

Tartalom

Ítéletlogika

- Ítéletlogika leíró nyelve – Ábécé
- Ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis
- Ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika

Az ítéletlogika leíró nyelvének ábécéje (V_0)

Az ítéletlogika leíró nyelvének ábécéje (V_0)

- Ítéletváltozók (V_v): $X, Y, X_i, \ldots$
- Unér és binér logikai műveleti jelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- Elválasztójelek: ( )

Tartalom

Az ítéletlogika leíró nyelvének szintaxisa ($\mathcal{L}_0$)

Ítéletlogikai formula (Tk.4.1.2 def.)

1. (alaplépés) Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (*prímformula*)
2. (rekurziós lépés)
   - Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula "$\circ$" a három binér művelet bármelyike.
3. Minden ítéletlogikai formula az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Formulaszerkezet

Ítéletlogikában a következő formulaszerkezeteket különböztetjük meg:

- $\neg A$ negációs
- $A \wedge B$ konjukciós
- $A \vee B$ diszjunkciós
- $A \supset B$ implikációs

Formulaszerkezet vizsgálata

Közvetlen részformula (Tk.4.1.6. def.)

1. Prímformulának nincs közvetlen részformulája.
2. $\neg A$ közvetlen részformulája az A formula.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A (*baloldali*) és a B (*jobboldali*).

Példa

A $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$ formula baloldali részformulája: $\neg(Z \supset \neg X)$, jobboldali részformulája: Y.

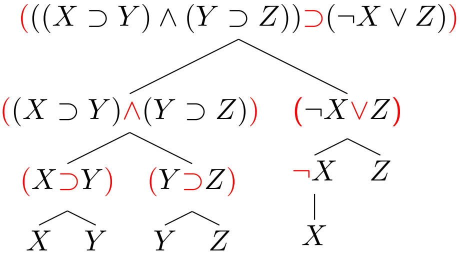
Szerkezeti fa

Szerkezeti fa (Tk. 49.o)

Egy adott formulához tartozó szerkezeti fa egy olyan fa, melynek gyökere a formula, minden csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula közvetlen részformulái, a fa levelei pedig ítéletváltozók.

Szerkezeti fa

Szerkezeti fa egy példa formulához:



Zárójelelhagyás

A teljesen zárójelezett formulákat kevesebb zárójellel írhatjuk fel, ha bevezetjük a műveletek prioritását: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ (csökkenő sorrend).

A **zárójelelhagyás**[1] célja egy formulából a legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének megtartása mellett.

[1] Tk. 52. o.

Zárójelelhagyás

Lépései:

1. A formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van ilyen).
2. Egy binér logikai összekötő hatáskörébe eső részformulák külső zárójelei akkor hagyhatók el, ha a részformula fő logikai összekötőjele nagyobb prioritású nála.

Példa

$(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z))$ a zárójelelhagyás után:
$(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$

Láncformulák

- **Konjunkciós**: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ (tetszőlegesen zárójelezhető)
- **Diszjunkciós**: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ (tetszőlegesen zárójelezhető)
- **Implikációs**: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n$ (default zárójelezése jobbról-balra) $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots (A_{n-1} \supset A_n) \ldots)$

Láncformulák

Literál

Ha X ítéletváltozó, akkor az X és a $\neg X$ formulákat literálnak nevezzük. Az ítéletváltozó a literál alapja. (X és $\neg X$ azonos alapú literálok.)

Elemi konjunkció

Különböző literálok konjunkciója.
Pl.: $X \wedge \neg Y \wedge \neg W \wedge Z$

Elemi diszjunkció

Különböző literálok diszjunkciója.
Pl.: $\neg X \vee Y \vee \neg W \vee \neg Z$

Formula logikai összetettsége

Egy A formula **logikai összetettsége**: $\ell(A)$

Szerkezeti rekurziót alkalmazó definíció (Tk.4.1.12)

Alaplépés

- Ha A ítéletváltozó, akkor $\ell(A) = 0$

Rekurziós lépések

- $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$
- $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$

Logikai műveletek hatásköre

Definíció (Tk.4.1.17.)

Logikai műveletek hatásköre a formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, amelyben az adott logikai összekötőjel előfordul.

Példa

A $(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$ formula $\wedge$ műveletet tartalmazó részformulái:

1. $\ell[(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z] = 6$
2. $\ell[(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)] = 3$

Ezek közül a 2. formula az $\wedge$ hatásköre. Egy művelet hatáskörébe eső formulák egyben *közvetlen komponensek* is.

Definíció (Tk.4.1.18.)

Egy formula **fő logikai összekötőjele** az az összekötőjel, amelynek a hatásköre maga a formula.

Tartalom

Szemantika

A nyelv ábécéjének értelmezése (interpretációja - modellezése).

Az ítéletlogika ábécéjében már csak az ítéletváltozókat kell interpretálni. Az ítéletváltozók befutják az állítások halmazát. Ha megmondjuk melyik ítéletváltozó melyik állítást jelenti, akkor a változó igazságértékét adtuk meg. Annak rögzítését melyik ítéletváltozó i(gaz) és melyik h(amis) igazságértékű **interpretáció**nak nevezzük.

Interpretáció

Igazságkiértékelés, interpretáció (Tk.4.2.1.)

$\mathcal{I} = V_v \to \{i, h\}$

$\mathcal{I}(x)$ jelöli az x ítéletváltozó értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban.

n db ítéletváltozó interpretációinak száma 2^n.

Megadása:

- Felsorolással
- Szemantikus fával
- Stb.

$n = 3$ esetén legyenek az ítéletváltozók X, Y, Z. Ezen változók egy sorrendjét **bázis**nak nevezzük. Legyen most a bázis X, Y, Z. Ekkor az összes interpretációt megadhatjuk táblázatos felsorolással, vagy szemantikus fával is.

Interpretáció megadása táblázattal

X	Y	Z
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

táblázat: Interpretáció megadása táblázattal X, Y, Z bázis esetén

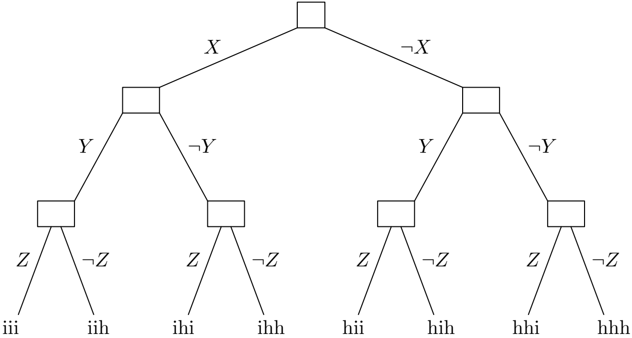
Interpretáció megadása szemantikus fával

Szemantikus fa

Egy n-változós **szemantikus fa** egy n-szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfeleltetve. Egy X változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz X, $\neg X$ címkéket rendelünk. X jelentése X *igaz*, $\neg X$ jelentése X *hamis* az élhez tartozó interpretációkban, így egy n-szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n) lehetséges igazságkiértékelés (I interpretáció) megjelenik.

Interpretáció megadása szemantikus fával

Szemantikus fa az X, Y, Z logikai változókra, mint bázisra:



Formula helyettesítési értéke

Formula helyettesítési értéke $\mathcal{I}$ interpretációban: $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C)$.

$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C)$ definíciója szerkezeti rekurzióval (Tk.4.2.2.)

1. Ha C formula ítéletváltozó, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C) = \mathcal{I}(C)$.
2. Ha C formula negációs, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\neg A) = \neg \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A)$.
3. Ha C formula $(A \circ B)$ alakú, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A \circ B) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A) \circ \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(B)$.

Formula igazságtáblája

Formula igazságtáblája

Egy n-**változós formula igazságtáblája** egy olyan $n+1$ oszlopból és 2^n+1 sorból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis (a formula változói rögzített sorrendben) és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az **interpretációk** (a **változók igazságkiértékelései**), a formula alatt **a formula helyettesítési értékei** találhatók.

Formula igazságtáblája

Egy n-változós formula az igazságtáblájával megadott $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ n-változós logikai műveletet ír le.

X	Y	Z	$(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	h

táblázat: A $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$ formula igazságtáblája

Egy formula **igazhalmaza** azon $\mathcal{I}$ interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke igaz.

Egy formula **hamishalmaza** azon $\mathcal{I}$ interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke hamis.

Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Második előadás

Tartalom

Igazságértékelés függvény

Egy formula **igaz-/hamis**halmazának előállításához keressük a formula bázisának interpretációira azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy ő az igazhalmaz illetve a hamishalmaz eleme legyen.

Ennek eszköze a φA^{α} **igazságértékelés függvény** ($\alpha = \mathbf{i}$ vagy $\mathbf{h}$), amely egy A formula esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül az A interpretációira vonatkozó $\varphi A^{\mathbf{i}}$ és a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke $\mathbf{i}$ vagy $\mathbf{h}$ lesz.

A φA^{α} függvény értelmezési tartománya a formulák halmaza értékkészlete a formula interpretációira vonatkozó feltételek.

Igazságértékelés függvény

A φ-igazságértékelés függvény definiálása szerkezeti rekurzióval

1. Ha A prímformula (ítéletváltozó), akkor $\varphi A^{\mathbf{i}}$ feltételt pontosan azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben $\mathcal{I}(A) = i$, a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételt pedig azok, amelyekben $\mathcal{I}(A) = h$.
2. A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételek.
3. A $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek mind a $\varphi A^{\mathbf{i}}$, mind a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
4. A $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{i}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
5. A $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.

A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{h}}$, és a $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{h}}$ feltételek értelemszerűen adódnak.

Igazságértékelés szabályok grafikus ábrázolása

$$
\begin{tikzcd}
\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}} \arrow[d, dash] \\
\varphi A^{\mathbf{h}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{i}} \arrow[d, dash] \\
\varphi A^{\mathbf{i}} \arrow[d, dash] \\
\varphi B^{\mathbf{i}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \varphi(A \vee B)^{\mathbf{i}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\varphi A^{\mathbf{i}} & & \varphi B^{\mathbf{i}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varphi(A \supset B)^{\mathbf{i}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\varphi A^{\mathbf{h}} & & \varphi B^{\mathbf{i}}
\end{tikzcd}
$$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$$

(implikációs)

$$\varphi X^{\mathbf{h}} \qquad \varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$$

(diszjunkciós)

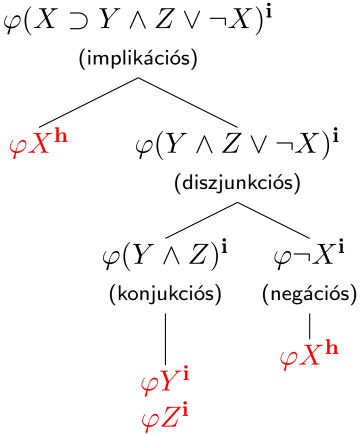
$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{i}} \qquad \varphi \neg X^{\mathbf{i}}$$

(konjukciós) (negációs)

$$\varphi Y^{\mathbf{i}} \qquad \varphi X^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi Z^{\mathbf{i}}$$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával



1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$\sim$	$\sim$	$\sim$	i	i	h	$\sim$	$\sim$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$

(implikációs)

$\varphi X^{\mathbf{h}}$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$

(diszjunkciós)

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{i}}$

(konjukciós)

$\varphi Y^{\mathbf{i}}$

$\varphi Z^{\mathbf{i}}$

$\varphi \neg X^{\mathbf{i}}$

(negációs)

$\varphi X^{\mathbf{h}}$

1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$\sim$	$\sim$	$\sim$	i	i	h	$\sim$	$\sim$

Az igazhalmaz:

X	Y	Z
i	i	i
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ ($\neg$implikációs)

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ ($\neg$diszjunkciós)

$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi Y^{\mathbf{h}}$ $\quad$ $\varphi Z^{\mathbf{h}}$

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬implikációs)

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬diszjunkciós)

$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi Y^{\mathbf{h}}$ $\qquad$ $\varphi Z^{\mathbf{h}}$

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$\sim$	i	$\sim$	h

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$ (¬implikációs)

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$ (¬diszjunkciós)

$$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi Y^{\mathbf{h}} \qquad \varphi Z^{\mathbf{h}}$$

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$\sim$	i	$\sim$	h

A hamishalmaz:

X	Y	Z
i	i	h
i	h	i
i	h	h

Tartalom

Formulák szemantikus tulajdonságai

Interpretáció kielégít egy formulát

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ **interpretáció kielégít egy** B **formulát** ($\mathcal{I} \models_0 B$). ha a formula helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban. A formulát kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációt a formula modelljének is szokás nevezni.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra (Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautologiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Példák

Példák ítéletlogikai törvényekre (Tk 71.o és 74.o)

$\models_0 A \supset (B \supset A)$

$\models_0 (A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$

$\models_0 A \supset B \supset (A \wedge B)$

$\models_0 ((A \supset B) \supset A) \supset A$

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz.

Interpretáció kielégít egy formulahalmazt

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégít** egy F formulahalmazt ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség formulahalmazokra (Tk.4.3.12.)

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája h (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).

Tartalom

Szemantikus következményfogalom

Szemantikus következmény (Tk.4.4.1.)

Egy G formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye** az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak, ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models_0 \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ fennáll, $\mathcal{I} \models_0 G$ is fennáll (ha $\mathcal{I}$ modellje $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$-nek, akkor modellje G-nek is).
Jelölés: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$

Tétel

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia ($\models_0 G$).

Tehát (F, G) akkor helyes következtetésforma, ha teljesül, hogy $F \models_0 G$ és létezik olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyre $\mathcal{I} \models_0 F$.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (Tk.4.4.3.)

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 ($\mathcal{F} \models_0 G_1$) és
$\mathcal{F}$-nek következménye G_2 ($\mathcal{F} \models_0 G_2$) valamint
$\{G_1, G_2\}$-nek következménye A ($\{G_1, G_2\} \models_0 A$),
akkor $\mathcal{F}$-nek következménye A ($\mathcal{F} \models_0 A$).

Szemantikus következményfogalom

Eldöntésprobléma

Eldöntésproblémának nevezik a logikában annak eldöntését, hogy egy (F, G) pár a szemantikus következményfogalom szerint helyes gondolkodásforma-e.

Tétel (Tk.4.4.4.)

$\mathcal{F}$-nek akkor és csak akkor következménye G, ha az $\mathcal{F} \cup \neg G$ vagy $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ kielégíthetetlen.

Ennek alapján az egyik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (dedukciós) (Tk.4.4.7.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models_0 (F_n \supset G)$

Tétel (eldöntésprobléma) (Tk.4.4.8.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\models_0 F_1 \supset (F_2 \supset \ldots (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \ldots)$

Ennek alapján a másik **szemantikus eldöntésprobléma**:
tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy tautológia-e.

Tautologikusan ekvivalens

Definíció 1. változat (Tk.4.3.7.)

Két vagy több formula igazságtáblája lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formulák **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jelölésére a $\sim_0$ szimbólumot használjuk.

Definíció 2. változat

Az A és B formulák **tautologikusan ekvivalensek**,
ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$.

Ekkor $\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Példák

Példák átalakítási szabályokra

$X \supset Y \sim_0 \neg X \vee Y$
$\neg\neg X \sim_0 X$

De Morgan szabályok:

1. $\neg(X \wedge Y) \sim_0 \neg X \vee \neg Y$
2. $\neg(X \vee Y) \sim_0 \neg X \wedge \neg Y$

Egyszerűsítési szabályok:

1. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$
2. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$

   ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjunkció.

Következtetési módok I.

Definíció (Tk.4.4.14.)

Legyen a $\mathcal{F}$ feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a **legszűkebb következmény** az az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel i értéket, amelyek kielégítik az $\mathcal{F}$-et.

Előrekövetkeztetés

Ismert az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz, és keressük $\mathcal{F}$ lehetséges következményeit. Megkeressük $\mathcal{F}$ legszűkebb következményét, R-t. Következmény minden olyan G formula, amelyre $R \supset G$ tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előrekövetkeztetés – példa

$\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$

P	M	Z	$Z \supset M \vee P$	Z	$\neg P$	Iszk.	köv.
i	i	i	i	i	h	h	h/i
i	i	h	i	h	h	h	h/i
i	h	i	i	i	h	h	h/i
i	h	h	i	h	h	h	h/i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i	h	h/i
h	h	i	h	i	i	h	h/i
h	h	h	i	h	i	h	h/i

Csak egy igazságértékre kielégíthető a feltételhalmaz.

Következtetési módok II.

Visszakövetkeztetés

Az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e $\mathcal{F}$-nek. Mivel $\mathcal{F} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Más szóval B pontosan akkor következménye $\mathcal{F}$-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis, az $\mathcal{F}$ kielégíthetetlen.

Példa

Legyen $\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$ és lássuk be, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha $\neg M$ igaz egy interpretációban, akkor $\mathcal{F}$ nem lesz kielégíthető. Ahhoz,hogy minden feltételformula i legyen $Z = i$, $P = h$ mellett $Z \supset M \vee P$-nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis, akkor $Z \supset M \vee P = h$ lehet csak. Tehát M következménye F-nek.

Tartalom

Formalizálás az ítéletlogikában [1]

Tegyük fel, hogy adott valamilyen köznapi vagy matematikai probléma. Ennek természetes nyelvű egyszerű vagy összetett kijelentő mondatokkal való leírását ismerjük.

Az **egyszerű kijelentő mondatok** formalizálására bevezetünk egy **azonosítót (állításjel, ítéletváltozó)**.

Az **összetett mondatot** analizáljuk, átalakítjuk azonos értelmű, de egyszerű kijelentő mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felírt mondattá, ahol **a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők** (logikai műveletek).

[1] Tk.54-55.o.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles akkor az ablakon mászott be.
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be.
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes (F), akkor kistermetű (K). $F \supset K$
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be (A). $K \supset A$
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott (R). $F \vee R$
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles (H), akkor az ablakon mászott be. $(R \wedge H) \supset A$
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be. $\neg A$
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi. $\neg F$

A feltételhalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$
A feltételezés szerinti következmény: $\neg F$

Példa Tk. 54.o

Előrekövetkeztetés:

Az $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$ formulahalmazt egyetlen interpretáció elégíti ki:
$A = h,\ F = h,\ K = h,\ R = i,\ H = h$, azaz a legszűkebb következényt leíró formula: $\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H$
$(\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H) \supset \neg F$ tautológia, így $\neg F$ következmény.

Visszakövetkeztetés:

$\neg F$ következmény, mivel a negáltját hozzávéve a feltételhalmazhoz, a kapott formulahalmaz:
$\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A,\ F\}$ kielégíthetetlen.

Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Harmadik előadás

Tartalom

Nulladrendű állítás

Az ítéletlogikában nem foglalkoztunk az állítások minősítésével és az állítások leírásával. Az állítás definíciója szerint az állítást egy kijelentő mondattal ki lehet fejezni.

Ha a kijelentő mondat *alanya valamely konkrét dolog*, akkor az állítást **nulladrendű állítás**nak hívjuk. Az ilyen állítások formális leírására egy relációt (logikai függvényt) definiálunk.

Példák

- $E(x) = i$, ha x egész szám
- $P(x) = i$, ha x prímszám
- $L(x, y, z) = i$,ha z az x és az y legnagyobb közös osztója

Az állítás konkrét egyedekkel behelyettesített reláció. Pl.: E(9) vagy L(9,6,3) állítások, de L(9,6,z) nem állítás (paraméteres állítás).

Elsőrendű állítás

Ha a kijelentő mondat *alanya egy halmaz*, akkor az állítást **elsőrendű állítás**nak hívjuk.

Ilyenkor az állítás az összes elemre egyidejűleg fennálló megállapítást/általánosítást vagy a halmaz bizonyos elemeire (nem feltétlenül mindre) fennálló megállapítást/létezést fogalmaz meg.

Leírásukhoz a kvantorokat ($\forall$,$\exists$) használjuk.

Példa

- $\forall x E(x)$ azt jelenti, hogy a halmaz minden eleme egész szám.
- $\exists x P(x)$ azt jelenti, hogy a halmazban van olyan elem, ami prímszám.

Matematikai struktúra

Az 1800-as évek végén és az 1900-as évek elején a matematikai struktúrák (halmazelmélet és az aritmetika – számelmélet) logikai vizsgálatához meg kellett teremteni mind a nulladrendű, mind az elsőrendű állítások leírására szolgáló eszközöket. Szükségessé vált a matematikai struktúrákat leíró nyelv definiálása.

Matematikai struktúra

Definíció

A matematikai struktúra egy $\langle U, R, M, K\rangle$ halmaznégyes, ahol

- U: nem üres halmaz, a struktúra értelmezési tartománya (amennyiben U egyfajtájú elemekből áll)
- R: az U-n értelmezett n-változós ($n = 1, 2, \ldots, k$) logikai függvények (**alaprelációk**) halmaza
- M: az U-n értelmezett n-változós ($n = 1, 2, \ldots, k$) matematikai függvények (**alapműveletek**) halmaza
- K: az U megjelölt elemeinek egy (esetleg üres) részhalmaza

A **struktúra szignatúrája** (ν_1, ν_2, ν_3 egészértékű fgv.együttes) megadja az alaprelációk és az alapműveletek aritását, valamint K elemszámát.

Matematikai struktúra leíró nyelve

Adott matematikai struktúra leíró nyelv ábécéjének logikán kívüli része áll:

- az R halmazbeli alaprelációk *nevei*ből
- az M halmazbeli alapműveletek *nevei*ből
- a K halmazbeli elemek *nevei*ből

Ezekkel a nevekkel már lehet egyszerű (nulladrendű és paraméteres) állításokat leírni. Az R, M, K-beli nevek a leíró nyelv **logikán kívüli** részét képezik.

Matematikai struktúra leíró nyelve

Az összetett állítások és az elsőrendű állítások leírására kibővítjük az ábécét a **logikai szimbólumok**kal (az ábécé logikai része):

- individuumváltozók
- unér és binér logikai műveleti jelek $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok $\forall, \exists$
- elválasztójelek ( ) ,

Ez együtt egy adott matematikai struktúra logikai leíró nyelvének az ábécéje.

Példa – elemi aritmetika [1]

$\langle \mathbb{N}_0; =; s, +, *; 0 \rangle$ együttes, ahol

- $x, y, \ldots$: individuumváltozók befutják a természetes számok halmazát ($\mathbb{N}_0$-t)
- $=$: az $\{(x, x)\}$ igazhalmazú alapreláció neve
- s: az egyváltozós rákövetkezés függvény neve
- $+$ és $*$: rendre az összeadás és a szorzás műveletek nevei
- 0: a megjelölt univerzumelem neve (az az elem, amely nem tartozik a rákövetkezés függvény értékkészletébe)

[1] Tk.36-37.o.

Példa – elemi aritmetika

A **struktúra szignatúrája** alatt az alaprelációk és az alapműveletek aritásait, valamint a konstansok számát megadó ν_1, ν_2, ν_3 egész értékű függvényeket értjük.

Esetünkben: $\nu_1(=) = 2$, $\nu_2(s) = 1$, $\nu_2(+) = 2$, $\nu_2(*) = 2$, $\nu_3 = 1$

Felsorolással megadva:

$=$	s	$+$	$*$	0
2	1	2	2	1

Az elemi aritmetika leíró nyelvének ábécéjében az $\mathbb{N}_0$ kezelésére a **változók** $(x, y, \ldots)$ szolgálnak (individuumváltozók), az $\{=, s, +, *; 0\}$ jelek a megfelelő **leképezések azonosítói**. A leíró nyelv szignatúrája ugyanaz, mint a struktúráé.

Példa – elemi aritmetika

Az alaprelációkkal (itt az $=$ relációval) lehet állításokat leírni, pl. $2 = 3$, $5 = 5$. De nem állítás pl. $y = 5$ vagy $z = w$ (paraméteres állítások). Egyéb ismert egyszerű állításokat pl. a kisebb egyenlő relációt ezen a nyelven csak összetett állítás formájában lehet felírni (formalizálni). Ehhez a nyelv ábécéjét logikai résszel bővítjük ki. Ezek:

- individuumváltozók: $x, y, \ldots$
- logikai összekötőjelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: $\forall, \exists$
- elválasztójelek: $(\ )\ ,$

Példa – aritmetika, geometria

Definiáljuk (formalizáljuk) az aritmetika logikai leíró nyelvén a $\leq$ relációt:

$x \leq y$

$x \leq y =_{def} \exists z((x + z) = y)$

Megjegyzés: Az aritmetika univerzuma *egyfajtájú* elemekből, a természetes számokból állt. Egy matematikai struktúra univerzuma *többfajtájú* elemekből is állhat. Például a térgeometriában pontok, egyenesek és síkok alkotják az értelmezési tartományt. Ekkor a leíró nyelv ábécéjében a fajták elnevezésére is bevezetünk jeleket. Esetünkben ezek a nevek: p, e, s. Így az értelmezési tartomány $U_p \cup U_e \cup U_s$ lesz, a struktúra pedig az $\langle U_p \cup U_e \cup U_s, R, M, K \rangle$ együttes.

Az elsőrendű logika leíró nyelve ($\mathcal{L}$) – követelmények

Olyan ábécével kell hogy rendelkezzen, melynek a logikán kívüli szimbólumai és azok szignatúrája paraméterezéssel bármely adott matematikai struktúra szignatúrájával megfeleltethető kell legyen, és ennélfogva a szimbólumok lehessenek a struktúra relációinak, műveleteinek és megjelölt elemeinek a nevei. Más szóval a nyelv alkalmas kell, hogy legyen tetszőleges szignatúrájú matematikai struktúrák leírására.

Egyfajtájú struktúrákat leíró nyelvek

Egyféle elemből álló U **esetén** az $\langle U, R, M, K\rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéje: $\langle Pr, Fn, Cnst\rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3).

- Pr: predikátumszimbólumok halamaza
  ν_1: $P \in Pr$-re megadja P aritását (k)
- Fn: függvényszimbólumok halamaza
  ν_2: $f \in Fn$-re megadja f aritását (k)
- $Cnst$: konstansszimbólumok halamaza
  ν_3: megadja a konstansok számát

Többfajtájú struktúrákat leíró nyelvek

Többféle elemből álló U **esetén** az $\langle U, R, M, K \rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéje: $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3).

- Srt: nemüres halmaz, melynek π_j elemei fajtákat szimbolizálnak
- Pr: predikátumszimbólumok halamaza
  ν_1: $P \in Pr$-re megadja P aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$
- Fn: függvényszimbólumok halamaza
  ν_2: $f \in Fn$-re megadja f aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok, valamint a függvény értéke $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k; \pi_f)$
- $Cnst$: konstansszimbólumok halamaza
  ν_3: megadja minden fajtához a konstansok számát.

Leíró nyelv – logikai rész

- különböző fajtájú individuumváltozók (minden fajtához megszámlálhatóan végtelen sok): $x, y, y_k, \ldots$
- unér és binér logikai műveleti jelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: $\forall, \exists$
- elválasztójelek: ( ) ,

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéjére $V[V_\nu]$-vel hivatkozunk, ahol V_ν adja meg a (ν_1, ν_2, ν_3) szignatúrájú $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ halmaznégyest.

Tartalom

A nyelv kifejezései

A nyelv kifejezései informálisan:

- **termek**: a matematikai leképezéseket szimbolizálják
- **formulák**: a logikai leképezéseket szimbolizálják

Az elsőrendű logika szintaxisa [2] – term I.

Egyfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

1. (alaplépés) Minden individuumváltozó és konstans szimbólum term.
2. (rekurzív lépés) Ha az $f \in Fn$ k-változós függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ is term.
3. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

[2] Tk.112.o.

Az elsőrendű logika szintaxisa – formula I.

Egyfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

1. (alaplépés) Ha a $P \in Pr$ k-változós predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
   - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol $\circ$ a három binér művelet bármelyike.
3. Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
4. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az elsőrendű logika szintaxisa – term II.

Többfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

1. (alaplépés) Minden $\pi \in Srt$ fajtájú individuumváltozó és konstans szimbólum π fajtájú term.
2. (rekurzív lépés) Ha az $f \in Fn$ $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k; \pi_f)$ fajtájú függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ π_f fajtájú term.
3. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az elsőrendű logika szintaxisa – formula II.

Többfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

1. (alaplépés) Ha a $P \in Pr$ $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ fajtájú predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
   - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol $\circ$ a három binér művelet bármelyike.
3. Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
4. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Elsőrendű logikai nyelv: $\mathcal{L}(V_\nu) = \mathcal{L}_t(V_\nu) \cup \mathcal{L}_f(V_\nu)$.

Formulaelnevezések

- $\neg A$ negációs
- $A \wedge B$ konjukciós
- $A \vee B$ diszjunkciós
- $A \supset B$ implikációs
- $\forall x A$ univerzálisan kvantált
- $\exists x A$ egzisztenciálisan kvantált

A $\forall x A$és $\exists x A$ formulák esetén az A formula a kvantált formula törzse - mátrixa.

Elsőrendű formulákhoz kapcsolódó fogalmak

Vezessük be a $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \supset$ prioritási sorrendet, ekkor az ítéletlogikához hasonlóan definiáljuk:

- a zárójelelhagyásokat
- a műveletek és a kvantorok hatáskörét
- a komponens és prímkomponens fogalmakat
- egy formula fő műveleti jelét

Az ítéletlogikában minden formulát fel lehet írni a prímformulák (azaz ítéletváltozók) és a műveletek segítségével. Az elsőrendű nyelvben is vannak ilyen formulák. **Prímformulák**[a] az elsőrendű nyelvben az atomi formulák és a kvantált formulák.

[a] Tk.113.o.

Közvetlen résztermés részformula

Közvetlen részterm

1. Konstansnak és individuumváltozónak nincs közvetlen résztermje.
2. Az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek.

Közvetlen részformula

1. Egy atomi formulának nincs közvetlen részformulája.
2. $\neg A$ közvetlen részformulája az A formula.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A (baloldali) és a B (jobboldali) formulák.
4. A QxA $(Q \in \{\forall, \exists\})$ közvetlen részformulája az A formula.

Prímkomponensek

Egy formulában egy logikai művelet hatáskörében lévő részformulá(ka)t **komponens formuláknak** nevezzük.

1. Egy atomi formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).
2. $\neg A$ közvetlen komponense az A formula.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen komponensei az A és a B formulák.
4. A QxA ($Q \in \{\forall, \exists\}$) formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).

Megjegyzés: **prímkomponens**nek nevezzük azokat a prímformulákat, amelyekből a formula kizárólag a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ műveletek segítségével épül fel.

Ennek megfelelően a **prímformulák**:

1. Egy atomi formula prímformula.
2. Egy QxA formula prímformula.

Szerkezeti fák [3]

Term szerkezeti fája.

Egy t term szerkezeti fája egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez a t term van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy t' term van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez a t' term közvetlen résztermjei vannak rendelve,
- leveleihez individuumváltozók vagy konstansok vannak rendelve.

[3] Tk. 116-118.o.

Szerkezeti fák

Formula szerkezeti fája.

Egy F formula szerkezeti egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez az F formula van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy F' formula van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez az F' formula közvetlen részformulái vannak rendelve,
- leveleihez atomi formulák vannak rendelve.

Logikai összetettség

Egy A formula **logikai összetettsége**: $\ell(A)$

Szerkezeti rekurzió szerinti definíció (Tk.5.1.15)

1. Ha A atomi formula, akkor $\ell(A) = 0$
2. $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$
3. $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$
4. $\ell(QxA) = \ell(A) + 1$

Szabad és kötött változók elsőrendű formulákban

Egy formulában egy x változó egy előfordulása

- **szabad**, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe
- **kötött**, ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik

Egy x változó egy formulában

- **kötött változó**, ha x minden előfordulása kötött
- **szabad változó**, ha x minden előfordulása szabad
- **vegyes változó**, ha x-nek van szabad és kötött előfordulása is

Megjegyzés: Ha egy formulában egy változó kötött, akkor átnevezve ezt a változót a formulában elő nem forduló változónévvel a formula ekvivalens marad az eredetivel. Ily módon minden formula átírható változóátnevezésekkel *vegyes változót* már *nem tartalmazó formulává*.

Szabad és kötött változók – példa

Szabad és kötött változók

A formula: $\forall x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

A prímkomponensek: $\forall x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$

A szabad individuumváltozók: v, w

Formulák szintaktikus tulajdonságai

Zártság

- **Egy formula zárt**, ha minden változója kötött.
- **Egy formula nyitott**, ha legalább egy individuumváltozónak van legalább egy szabad előfordulása.
- **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

1. rendű állításokat szimbolizálnak az $\mathcal{L}$ nyelven a zárt formulák vagy **mondatok**.

Alapkifejezés, alapatom, alapterm, ...

Alapkifejezés

Alapkifejezés a változót nem tartalmazó $\mathcal{L}$ kifejezés (alapformula, alapterm). Ezeket alappéldányoknak is nevezik. Az atomi formulák alappéldányait két csoportba soroljuk:

1. Egy atomi formula **alapatom**, ha argumentumai konstans szimbólumok vagy egy megadott univerzum elemei (pl. $P(c)$)
2. Egy atomi formulát **az atomi formula alappéldányának** nevezzük, ha argumentumai **alaptermek** (pl. $Q(f(a, b), a)$)

Megjegyzés: Egy atomi formulát (nem alappéldány) egyébként paraméteres állításnak is neveznek.

Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Negyedik előadás

Tartalom

Az elsőrendű logika szemantikája

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Elsőrendű logikai nyelv interpretációja

Egy elsőrendű logikai nyelv $\mathcal{L}[V_\nu]$ interpretációja egy, az $\mathcal{L}$ nyelvvel azonos szignatúrájú $\langle U, R, M, K\rangle$ matematikai struktúra.

Másik megfogalmazás: egy, a szignatúrának megfelelő U halmaz megadása, ezen a Pr, Fn, $Cnst$ szimbólumhalmazok szignatúrájával megegyező R, M, K reláció-, művelet- és konstanshalmaz definiálása.

Az $\mathcal{I}$ interpretáció működése: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst}\rangle$ függvénynégyes, ahol:

- $\mathcal{I}_{Srt} : \pi \mapsto \mathcal{U}_\pi$, ahol ha Srt egyelemű, akkor az interpretáció U univerzuma egyfajtájú elemekből áll
- az $\mathcal{I}_{Pr} : P \mapsto P^{\mathcal{I}}$, ahol $P^{\mathcal{I}}$ a struktúra R halmaza
- az $\mathcal{I}_{Fn} : f \mapsto f^{\mathcal{I}}$, ahol $f^{\mathcal{I}}$ a struktúra M halmaza
- az $\mathcal{I}_{Cnst} : c \mapsto c^{\mathcal{I}}$, ahol $c^{\mathcal{I}}$ a struktúra K halmaza

Változókiértékelés

Változókiértékelés

Egy $\kappa\colon V \to \mathcal{U}$ leképezés, ahol V a nyelv változóinak halmaza, U pedig az interpretáció univerzuma.

$|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U univerzumbeli $\kappa(x)$ elem.

Formula jelentése – informális definíció

Legyen egy formula valamely $\mathcal{L}(P_1, P_2, \ldots, P_n; f_1, f_2, \ldots, f_k)$ formalizált nyelven, ahol $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ az $\mathcal{L}$ nyelv, típusa/szignatúrája (ν_1, ν_2, ν_3).

1.lépés Választunk egy $S = U(R_1, R_2, \ldots, R_n; o_1, o_2, \ldots, o_k)$ matematikai struktúrát, amelynek a típusa/szignatúrája $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)/(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációknak illetve műveleteknek feleltetjük meg: $P_i = P_i^{\mathcal{I}}$, $f_k = f_k^{\mathcal{I}}$ (ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor $P_i^{\mathcal{I}} = R_i$ neve és $f_k^{\mathcal{I}} = o_k$ neve. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R_i és o_k jelentése egyértelmű).

2.lépés A nem kötött individuumváltozók kiértékelése $(|x|^{\mathcal{I},\kappa})$ és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

Formális definíció: termek szematikája

Termek szemantikája

1. ha c konstansszimbólum, $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U-beli $c^{\mathcal{I}}$ elem
2. ha x individuumváltozó, $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\kappa(x) \in U$ elem
   (ahol κ egy változókiértékelés)
3. $|f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}((|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa}))$

Formális definíció: formulák szemantikája

Formulák szemantikája

1. $|P(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa}) \in P^{\mathcal{I}}$, ahol a $P^{\mathcal{I}}$ jelöli a $P^{\mathcal{I}}$ reláció igazhalmazát.
2. $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} = \neg|A|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \wedge B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \vee |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \supset B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
3. $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i, ha |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ κ minden κ^* x variánsára
   $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i, ha |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ κ legalább egy κ^* x variánsára

A továbbiakban egyfajtájú struktúrákkal és egyfajtájú $\mathcal{L}$ nyelvvel (Srt egyelemű halmaz) foglalkozunk az elsőrendű logika tárgyalása során.

Formulakifejtés – példa

$\forall x P(x, y)$ formula kifejtése

$U = \{a, b, c\}$, formulakifejtés $\kappa(y) = a, b, c$-re:

- $\kappa(y) = a$
  $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, a)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a, a) \wedge P^{\mathcal{I}}(b, a) \wedge P^{\mathcal{I}}(c, a)$
- $\kappa(y) = b$
  $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, b)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a, b) \wedge P^{\mathcal{I}}(b, b) \wedge P^{\mathcal{I}}(c, b)$
- $\kappa(y) = c$
  $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, c)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a, c) \wedge P^{\mathcal{I}}(b, c) \wedge P^{\mathcal{I}}(c, c)$

Formulakifejtés – példa

$\forall x \exists y (P(x,y) \supset R(x,y))$ formula kifejtése

$U = \{a, b, c\}$

$|\forall x \exists y (P(x,y) \supset R(x,y))|^{\mathcal{I}}$

$=$

$|\exists y (P(a,y) \supset R(a,y))|^{\mathcal{I}} \wedge$
$|\exists y (P(b,y) \supset R(b,y))|^{\mathcal{I}} \wedge$
$|\exists y (P(c,y) \supset R(c,y))|^{\mathcal{I}}$

$=$

$\big((P^{\mathcal{I}}(a,a) \supset R^{\mathcal{I}}(a,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a,b) \supset R^{\mathcal{I}}(a,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a,c) \supset R^{\mathcal{I}}(a,c))\big) \wedge$
$\big((P^{\mathcal{I}}(b,a) \supset R^{\mathcal{I}}(b,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b,b) \supset R^{\mathcal{I}}(b,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b,c) \supset R^{\mathcal{I}}(b,c))\big) \wedge$
$\big((P^{\mathcal{I}}(c,a) \supset R^{\mathcal{I}}(c,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c,b) \supset R^{\mathcal{I}}(c,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c,c) \supset R^{\mathcal{I}}(c,c))\big) \wedge$

Komplett példa I.

- $\mathcal{L}$ nyelv:
  $\mathcal{L} = (=, P_1, P_2; a, b, f_1, f_2)$
  szignatúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$
- A struktúra leíró nyelve:
  $S = \mathbb{N}(=, <, >; 0, 1, +, *)$
  szigantúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$

$\mathcal{I}_{Pr} : P \to P^{\mathcal{I}}$	$=$	P_1	P_2
	$=$	$<$	$>$

$\mathcal{I}_{Fn} : f \to f^{\mathcal{I}}$	a	b	f_1	f_2
	0	1	$+$	$*$

$\mathcal{I}_{Cnst}$: nincs konstans, csak két db 0 változós függvény

Példa II.

Az $t = f_1(x, f_2(x, y))$ *term jelentésének megállapítása*:

$|t|^{\mathcal{I},\kappa} = |f_1(x, f_2(x, y))|^{\mathcal{I},\kappa} =$

$|f_1|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_2(x, y)|^{\mathcal{I},\kappa}) =$

$+(x, *(x, y)) =$

$x + x * y$

	x	y	$x + x * y$
κ_1	1	1	2
κ_2	2	3	8
κ_3	0	4	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Példa III.

A $P_1(t, f_1(y, f_2(x, y)))$ *formula jelentésének megállapítása*:

$$|P_1(t, f_1(y, f_2(x, y)))|^{\mathcal{I},\kappa} =$$
$$|P_1|^{\mathcal{I}}(|t|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_1|^{\mathcal{I}}(|y|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_2|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |y|^{\mathcal{I},\kappa}))) =$$
$$< (+(x, *(x, y)), +(y, *(x, y))) =$$
$$< (x + x * y, y + x * y) =$$
$$(x + x * y) < (y + x * y)$$

Egy kvantormentes formula kiértékelése: a formula minden alap előfordulását generáljuk és így minden állítás előáll $\mathcal{I}$-ben.

x	y	$(x + x * y) < (y + x * y)$
1	1	$(1 + 1 * 1) < (1 + 1 * 1) = h$
2	3	$(2 + 2 * 3) < (3 + 2 * 3) = i$
...	...	...

Példa IV.

Egzisztenciális formula jelentésének megállapítása:

$|\exists x P_1(a, f_1(x,x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(x,x))|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$
κ legalább egy κ^* variánsára.
Azaz ebben az interpretációban, ha $0 < (x + x) = i$
legalább egy $u \in N$ esetén.

Nézzük meg a formula értéktábláját:

x	$0 < (x + x)$
0	h
1	i
$\ldots$	$\ldots$

Mivel az $x = 1$-re a formula törzse i, ezért a $\exists x(0 < (x + x))$ formula is i.

Példa V.

Univerzális formula jelentésének megállapítása:

$|\forall x P_1(a, f_1(b, x)))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(b, x)))|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$
κ minden κ^* x variánsára.

Nézzük meg a formula értéktábláját:

x	$0 < (1 + x)$
0	i
1	i
$\dots$	$\dots$

Mivel minden egészre a formula törzse i, ezért a $\forall x(0 < (1 + x))$ formula értéke i.

A formula értéktáblája

Egy 1. rendű formula prímformulái az atomi formulák (ezek paraméteres állítások az interpretációkban) és a kvantált formulák (ezek állítások, ha zártak).

Egy 1. rendű formula prímkomponensei a formula azon prímformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Az **igazságtáblában** (ítéletlogika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula prímkomponensei) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket (interpretáció) írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

Egy 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a formula szabad változói, a prímkomponensek és a formula kerülnek. (Mivel a prímformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az individuumváltozók kiértékelése után válnak állításokká.) Az individuumváltozók alá a lehetséges változókiértékelések, a prímformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a formulának a prímformulák értékei alapján kiszámított helyettesítési értékei találhatók.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1, 2, 3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1,2,3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1,3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
- Ekkor $|\exists x P(x))|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1,2,3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1,3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
- Ekkor $|\exists x P(x))|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

Az értéktábla:

v	w	$\lvert\exists x P(x))\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert\exists y Q(w,y)\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert P(v)\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert\forall z Q(w,z)\rvert^{\mathcal{I}}$	F
1	1	i	$\lvert\exists y Q(1,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(1,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	h
1	2	i	$\lvert\exists y Q(2,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(2,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	i
1	3	i	$\lvert\exists y Q(3,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(3,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	h
2	1	i	...	...	...	...
2	2	i	...	...	...	...
2	3	i	...	...	...	...
3	1	i	...	...	...	...
3	2	i	...	...	...	...
3	3	i	...	...	...	...

Tartalom

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

$\mathcal{I}, \kappa \models A$

Az $\mathcal{L}$ **egy** $\mathcal{I}$ **interpretációja adott** κ **változókiértékelés mellett kielégít egy 1. rendű** A **formulát** $(\mathcal{I}, \kappa \models A)$, ha a formula $|A|^{\mathcal{I},\kappa}$ értéke i. Ha az A formula mondat (zárt formula) és $\mathcal{I} \models A$, akkor azt mondjuk, hogy az I által megadott S struktúra elégíti ki A-t, így $S \models A$. Más szóval S **modellje** A**-nak**.

$\mathcal{I} \models \mathcal{F}$

Ha $\mathcal{L}$ egy $\mathcal{I}$ interpretációjára az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ zárt formulahalmazban $|F_k|^{\mathcal{I}}$ értéke i, minden $1 \leq k \leq n$ értékre, akkor $\mathcal{I}$ **kielégíti** $\mathcal{F}$-et. Jelölés: $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Kielégíthető formula

Azt mondjuk, hogy egy G **formula kielégíthető** ha $\mathcal{L}$-hez van legalább egy $\mathcal{I}$ interpretáció és κ változókiértékelés, hogy $\mathcal{I}, \kappa \models G$.

Kielégíthető formulahalmaz

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ **zárt formulahalmaz kielégíthető** ha $\mathcal{L}$-nek legalább egy $\mathcal{I}$ interpretációja kielégíti, azaz $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Logikailag igaz és tautológia kérdése

Logikailag igaz

Azt mondjuk, hogy egy G formula **logikailag igaz (logikai törvény)**, ha G igaz minden lehetséges $\mathcal{I}$ interpretációra és minden κ változókiértékelésre. Ez azt jelenti, hogy G igaz minden lehetséges interpretáló struktúrában. Jelölés: $\models G$.

Tautológia

Azt mondjuk, hogy egy G formula **tautológia**, ha G értéktáblájában a prímkomponensekhez rendelhető összes lehetséges igazságérték hozzárendelés esetén a formula helyettesítési értéke i. Jelölés: $\models_0 G$

Példa

$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponens alakja
$p \wedge q \supset p$. ami tautológia, de

$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x P(x)$ prímkomponens alakja
$r \supset p$ nem tautológia (viszont mindkettő logikailag igaz!)

Kielégíthetetlenség

Kielégíthetetlenség

Azt mondjuk, hogy G formula illetve $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen** (nem kielégíthető), ha $\mathcal{L}$-hez nincs olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, hogy $\mathcal{I} \models G$ illetve, hogy $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$. Más szóval egy G formula kielégíthetetlen, ha minden interpretációban a G értéktáblájának minden sorában G helyettesítési értéke h(amis). Az $\mathcal{F}$ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha az $\mathcal{F}$ közös értéktáblájában minden sorban van legalább egy eleme $\mathcal{F}$-nek, amelynek a helyettesítési értéke h(amis).

A két szemantikus tulajdonság fennállásának vizsgálatához az összes inerpretáló struktúrára szükség van.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma adott U és adott szignatúra mellett

Legyenek rendre az $\mathcal{L}$ nyelv szignatúrája szerint $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ a predikátumszimbólumok és függvényszimbólumok aritásai. Legyen U az univerzum, ahol $|U| = M$.

Állapítsuk meg hány különböző $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ szignatúrájú struktúra létezik U felett?

Ezekkel az aritásokkal relációkat $\prod_{j=1}^{n} 2^{M^{r_j}}$, míg műveleteket $\prod_{t=1}^{k} M^{M^{s_t}}$ féleképp lehet definiálni. Az összes definiálható struktúra száma a kettő szorzata: $(\prod_{j=1}^{n} 2^{M^{r_j}}) * \prod_{t=1}^{k} M^{M^{s_t}}$.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma

Alsó becslés esetén csak a lehetséges relációk számát állapítjuk meg. Egy n változós reláció esetén az értelmezési tartomány elemszáma $|U^n| = M^n$, a relációt megadhatjuk az U^n halmaz egy részhalmazának kijelölésével. A lehetséges n-változós relációk száma megegyezik az értelmezési tartomány hatványhalmaza (összes részalmazai halmaza) számosságával $|\mathcal{P}(U^n)|$-el, ez ha U megszámlálhatóan végtelen, akkor kontínuum számosságú (több mint megszámlálhatóan végtelen), ami algoritmikusan nem kezelhető.

Elsőrendű szemantikus fa

Legyenek rendre az $\mathcal{L}$ nyelv szignatúrája szerint $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ a predikátumszimbólumok aritásai.

Előállítjuk minden $j = 1, \ldots, n$ értékre az U^{r_j} értékeinek felhazsnálásával P_{r_j} összes alapatomját, tekintsük ezek egy rögzitett sorrendjét (bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy-egy szint minden csúcsából pontosan két él indul ki, az egyik a szinthez rendelt alapatommal (ez jelenti, hogy az alapatom igaz az élhez tartozó interpretációkban), a másik ennek negáltjával van címkézve (ez jelenti, hogy az alapatom hamis az élhez tartozó interpretációkban). A bináris fa ágai adják meg a lehetséges interpretációkat.

Példa

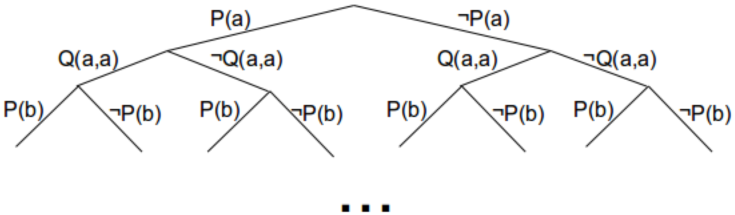
Adott nyelv esetén a predikátumszimbólumokra az összes interpretáció megadása szemantikus fával.

Legyen

- a formulahalmaz:
  $K = \{\forall x P(x), \forall y \forall z(\neg Q(y,z) \vee \neg P(z)), \forall u \forall v Q(u,v)\}$
- $U = \{a, b, c\}$
- a B bázis: $P(a)$, $Q(a,a)$, $P(b)$, $Q(a,b)$, $\ldots$, $Q(c,c)$ alapatom sorozat

Példa

A szemantikus fa a B bázis alapján:



Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Ötödik előadás

Tartalom

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Logikai vagy szemantikus következmény

Azt mondjuk, hogy a G formula logikai (szemantikus) következménye az $\mathcal{F}$ formulahalmaznak, ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$ teljesül, az $\mathcal{I} \models G$ is fennáll.

Más szóval $\mathcal{F} \models G$ teljesül, ha minden interpretáló struktúrában, az $\mathcal{F}, G$ közös értéktáblájában minden olyan sorban, ahol az $\mathcal{F}$ elemeinek helyettesítési értéke $i$gaz, a G helyettesítési értéke is $i$gaz.

Jelölés: $\mathcal{F} \models G$ vagy $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G$.

Tétel (logikailag igaz)

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G **logikailag igaz**.

Következményfogalom – tételek

Az ítéletlogikában bebizonyított tételek itt is igazak.

Tétel

$\mathcal{F}$-nek szemantikus következménye G, akkor és csak akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.

Egyik **eldöntésprobléma**: tetszőleges 1.rendű formulahalmazról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Tétel

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 és $\mathcal{F}$-nek következménye G_2, valamint, $\{G_1, G_2\}$-nek következménye A, akkor az $\mathcal{F}$-nek következménye A.

Következményfogalom – definíciók

A következményfogalom alapján, annak eldöntése, hogy $\mathcal{F} \models G$ *elméletileg* megoldható az interpretáló struktúrákban az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ és G-re kapott közös értéktábla alapján.

Legszűkebb következmény

Ha minden interpretáló struktúrában, a G a közös értéktáblának pontosan azokban a soraiban igaz, ahol $F_1, F_2, \ldots, F_n$ mindegyike igaz, akkor G **a legszűkebb következménye $\mathcal{F}$-nek**.

Ekvivalencia

Az A és B elsőrendű formulák **logikailag ekvivalensek**, ha $\{A\} \models B$ és $\{B\} \models A$.

További tételek

Tétel

G elsőrendű formula. Ha $\models_0 G$, akkor $\models G$.
(Ha G tautológia, akkor G logikailag igaz.)

Biz.: Ha $\models_0 G$, akkor G igaz a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére. Tekintsük a G egy $\mathcal{I}$ interpretációját, az individuumváltozók egy κ kiértékelése mellett. Ekkor a prímkomponensek igazságértéke kiszámolható és bármi is lesz a konkrét értékük, ezután a G helyettesítési értéke i lesz (mivel a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére igaz).

További tételek

Tétel

Ha $\mathcal{F} \models_0 G$, akkor $\mathcal{F} \models G$.

Biz.: Az $\mathcal{F}$ prímkomponenseinek minden, az $\mathcal{F}$-et kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációjára ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$) $\mathcal{I}$ kielégíti G-t is. Ha az $\mathcal{I}$ interpretáció kielégíti $\mathcal{F}$-et, akkor kielégíti G-t is mivel az egyidejűleg a prímkomponensekre vonatkozó igazságkiértékelés is.

Tétel

Ha A és B tautologikusan ekvivalens ($A \sim_0 B$), akkor A és B logikailag ekvivalens ($A \sim B$).

Eldöntésprobléma

Dedukciós tétel

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \iff \{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models F_n \supset G.$

Biz.: ugyanaz, mint ítéletlogikában

Tétel

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \iff$
$\models F_1 \supset (F_2 \supset (\ldots \supset (F_{n-1} \supset (F_n \supset G))\ldots))$ (logikailag igaz).

Biz.: A dedukciós tétel n-szeres alkalmazásával.

A másik eldöntésprobléma a predikátumlogikában: tetszőleges 1. rendű formuláról el kell tudni dönteni, hogy logikailag igaz-e.

Eldöntésprobléma megoldása szemantikai eszközökkel

Egy n változós ítéletlogikai B formula tautológia, ha

- hamishalmaza üres. Ez azt jelenti, hogy $\neg B$ kielégíthetetlen.
- az ítéletváltozók minden kiértékelésére (minden interpretációban) a helyettesítési érték i.

Elsőrendű n változós B formula logikailag igaz, ha

- minden U univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott B' alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktúrában.
- $\neg B$ kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban, egyetlen változókiértékelés mellett sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel. Szintaktikai eszközökre van szükség a megoldáshoz.

Szemantikus eldöntésprobléma megoldhatósága

Gödel bebizonyította, hogy **„A szemantikus eldöntésprobléma algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális eldöntési algoritmus”**.

Kutatások **„eldönthető formulaosztályok”** keresésére. Logikailag ekvivalens formulaátalakítások alkalmazása mellett.

Az egyik lehetőség, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus (döntési eljárás) keresése (tabló, rezolúciós elv).

A másik lehetőség, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása. (Erre nem térünk ki az előadás keretein belül.)

Tartalom

Eldönthető formulaosztályok

Az ítéletlogika eldönthető formulaosztályai a konjunktív normálforma és a diszjunktív normálforma.

Előkészítő definíciók (Tk. 93-96 és 99-100 o.).

Literál

Egy prímformula (ítéletváltozó) vagy annak negáltja. A literál alapja a benne szereplő prímformula. A literált egységkonjunkciónak vagy egységdiszjunkciónak (egységklóz) is nevezhetünk.

Elemi konjunkció/diszjunkció

Egységkonjunkció/diszjunkció, illetve különböző alapú literálok konjunkciója/diszjunkciója. Az elemi diszjunkciót klóznak is nevezzük.

Teljes elemi konjunkció/diszjunkció

Egy elemi konjunkció/diszjunkció teljes egy adott n változós logikai műveletre nézve, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamelyik benne szereplő literálnak.

Előkészítő definíciók (Tk. 93-96 és 99-100 o.).

Konjunktív normálforma (KNF)/ kitüntetett konjunktív normálforma (KKNF)

A KNF elemi diszjunkciók (klózok) konjunkciója. KKNF, ha teljes elemi diszjunkciók konjunkciója.

Diszjunktív normálforma (DNF)/ kitüntetett diszjunktív normálforma (KDNF)

A DNF elemi konjunkciók diszjunkciója. KDNF, ha teljes elemi konjunkciók diszjunkciója.

Egyszerűsítési szabályok (Tk.98.o.)

(1) $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) = d$ (2) $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) = k$

ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjukció.

KDNF/KKNF felírása igazságtábla alapján

KDNF felírása a formula igazságtáblája alapján:

- a formula igazhalmazbeli interpretációihoz felírjuk az interpretációban igaz teljes elemi konjunkciót,
- felírjuk a kapott teljes elemi konjunkciókból álló diszjunkciós láncformulát.
- Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy DNF-et.

KKNF felírása a formula igazságtáblája alapján:

- a formula hamishalmazbeli interpretációihoz felírjuk az interpretációban hamis teljes elemi diszjunkciót,
- felírjuk a kapott teljes elemi diszjunkciókból álló konjunkciós láncformulát.
- Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy KNF-et

Példa

A $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y$ formula igazságtáblája:

X	Y	Z	
i	i	i	i $(X \wedge Y \wedge Z)$
i	i	h	i $(X \wedge Y \wedge \neg Z)$
i	h	i	i $(X \wedge \neg Y \wedge Z)$
i	h	h	h $(\neg X \vee Y \vee Z)$
h	i	i	i $(\neg X \wedge Y \wedge Z)$
h	i	h	i $(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$
h	h	i	h $(X \vee Y \vee \neg Z)$
h	h	h	h $(X \vee Y \vee Z)$

KKNF: $(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee Z)$

KNF (egyszerűsítés után): $(Y \vee Z) \wedge (X \vee Y)$

KDNF:
$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$

Kalkulus

Az előzőek alapján tetszőleges ítéletlogikai formula átírható KNF vagy DNF alakba. Gödel szerint az eldöntésprobléma nem algoritmizálható, de ha egy eldönthető formulaosztályhoz tartozó formulává írjuk át az eldöntésproblémában vizsgált formulát, akkor bár nem algoritmussal hanem egy speciális levezetési eljárással (kalkulussal) sikeres döntésre juthatunk.

Kalkulus

Döntési „algoritmus", levezető eljárás egy olyan algoritmus/lépéssorozat, amely adott input adatokkal dolgozik, azokat a megfelelő szabályok szerint használja fel, a levezetési szabály szerint alakítja át, és akkor áll meg, amikor a **kitűzött célt** (az eljárás megállási feltétele) elérte. A megállással egy kétesélyes döntés egyik kimenetét igazolja. Azonban, ha az algoritmus nem éri el a kitűzött célt, az nem feltétlenül jelenti azt, hogy meghozta a másik eshetőségre a döntést. Egy ilyen eljárást **kalkulusnak** hívunk.

Automatikus tételbizonyító kalkulusok

Az egyik eldöntésprobléma megoldására - egy formula **kielégíthetetlen**ségének eldöntésére **több döntési algoritmus** ismert. Ezekről bebizonyítható, hogy ha a formula felhasználásával az algoritmus eléri a megállási feltételt, akkor a formula kielégíthetetlen (vagyis, ha a formula az $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$, akkor bebizonyítottuk, hogy $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$.)

Azt is mondjuk, hogy az ilyen kalkulusok **automatikus tételbizonyító** kalkulusok.

Tartalom

Kielégíthetetlen KNF formula

Egy KNF alakú formula kielégíthetetlenségének vizsgálata a KNF-ben szereplő klózok S halmaza kielégíthetetlenségének vizsgálatával ekvivalens. Hogyan lehet eldönteni, hogy egy S klózhalmaz kielégíthetetlen? Meg kell mutatni, hogy az S ítéletváltozóinak tetszőleges interpretációjában legalább egy $C \in S$ hamis. Egy C klóz hamis egy interpretációban, ha minden literálja hamis.

Ha az összes interpretációt az S összes ítéletváltozóinak rögzített sorrendje/bázis alapján előálló szemantikus fával adjuk meg, akkor egy C ítéletlogikai klóz abban az interpretációban hamis, amelyikben a klóz mindegyik literáljai ellenkező negáltságú. Az $X \vee Z$ klóz hamis az $\neg XY\neg Z$ és az $\neg X\neg Y\neg Z$ interpretációkban, az interpretáció kiválasztását a klóz szemantikus fára **illesztésének** hívjuk.

Klózok illesztése szemantikus fára (Fogalmak)

Fogalmak

Egy **klóz illesztése** a szemantikus fára az olyan ágak kiválasztása, amelyeken a klóz minden literálja negálva szerepel. Ezekben az interpretációkban ez a klóz hamis.

Cáfoló csúcsnak nevezzük a szemantikus fa azon csúcsát, amelyiket elérve egy klóz (amely azt megelőzően még nem volt hamis) hamissá válik.

Levezető csúcsnak nevezzük a szemantikus fa azon csúcsát, amelyiket követő mindkét csúcs cáfoló csúcs.

A szemantikus fa egy **ága zárt**, ha cáfoló csúcsban végződik.

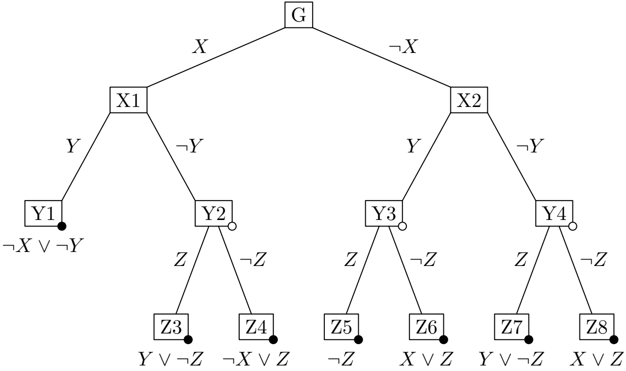
A szemantikus fa zárt, ha minden ága zárt.

Klózok illesztése szemantikus fára (Példa)

$S = \{ Y \vee \neg Z,\ X \vee Z,\ \neg X \vee \neg Y,\ \neg X \vee Z,\ \neg Z \}$ kielégíthetlen klózhalmaz.

Jelölések: cáfoló csúcs ($\bullet$), levezető csúcs ($\circ$)

Zárt szemantikus fa:



Zárt szemantikus fa

Tétel

Ha egy S véges klózhalmaz szemantikus fája zárt, akkor S kielégíthetetlen.

A klózhalmaz kielégíthetetlenségének eldöntésére nem a szemantikus fát használjuk, de fontos háttéreszköz marad a **rezolúciós kalkulus** tulajdonságainak vizsgálatában.

Elnevezések:

• n-változós klóz	n-argumentumos klóz
• 1-változós klóz	egységklóz
• 0-változós klóz	üres klóz: $\square$

Rezolvens képzés

Egyszerűsítési szabály: ha X ítéletváltozó és C egy X-et nem tartalmazó klóz, akkor $(X \vee C) \wedge (\neg X \vee C) \sim_0 C$

Az $(X) \wedge (\neg X) \sim_0 \Box$ – azonosan hamis.

Rezolvens

Legyenek C_1, C_2 olyan klózok, amelyek pontosan egy komplemens literálpárt tartalmaznak: $C_1 = C_1' \vee L_1$ és $C_2 = C_2' \vee L_2$ és $L_1 = \neg L_2$, ekkor létezik a rezolvensük: a $res(C_1, C_2) = C$ klóz, ami $C = C_1' \vee C_2'$.

Tétel (Tk.227-228.o.)

$\{C_1, C_2\} \models_0 C$ A rezolvensképzés a rezolúciós kalkulus levezetési szabálya (helyes következtetésforma).

Rezolúciós levezetés

Rezolúciós levezetés (Tk.229.o.)

Egy S klózhalmazból való **rezolúciós levezetés** egy olyan véges $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(m \geq 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a (k_s, k_t) klózpár rezolvense.

A levezetés célja az üres klóz levezetése (ez a megállási feltétel).

Példa rezolúciós levezetésre

Egy rezolúciós levezetés

Próbáljuk meg az üres klózt levezetni az
$S = \{\neg A \vee B, \neg A \vee C, A \vee C, \neg B \vee \neg C, \neg C\}$ klózhalmazból.

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg C & [\in S] \\
2. & A \vee C & [\in S] \\
3. & A & [res(1,2)] \\
4. & \neg A \vee C & [\in S] \\
5. & C & [res(3,4)] \\
6. & \Box & [res(1,5)]
\end{array}$$

S klózhalmazból való rezolúciós levezetés **döntési eljárás**.
Eldöntésproblémája: *levezethető-e egy S klózhalmazból az üres klóz?*
Rezolúciós cáfolatnak nevezzük azt a tényt, hogy S-ből levezethető az üres klóz.

Rezolúciós kalkulus helyessége, teljessége

A rezolúciós kalkulus helyes (Tk.230.o.)

(6.3.12) Lemma: Legyen S tetszőleges klózhalmaz és $k_1, k_2 \ldots, k_n$ klózsorozat rezolúciós levezetés S-ből. Ekkor minden $k_j, j = 1, 2 \ldots, n$-re szemantikus következménye S-nek.

(6.3.13) Tétel: Legyen S tetszőleges klózhalmaz. Ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

Bizonyítások indukcióval, illetve indirekt bizonyítással.

A rezolúciós kalkulus teljes (Tk.230.o.)

(6.3.14). Tétel: Ha az S véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből levezethető az üres klóz.

Bizonyítás: tetszőleges zárt szemantikus fa esetén előállítunk egy rezolúciós cáfolatot. (Tk.231-233.o.)

A teljesség bizonyításának algoritmusa

1. $j := 0$, $S_j := S$, *LIST* $:= \emptyset$.
2. Állítsuk elő S_j szemantikus fáját. $n_j :=$ a szemantikus fa szintjeinek száma. Ha $n_j = 0$, akkor levezettük az üres klózt, a levezetés *LIST*-ből kiolvasható.
3. Egyébként válasszuk ki a fa egy levezető csúcsát. A levezető csúcsot tartalmazó két ágra illesztett klózok legyenek k'_j és k''_j, rezolvensük pedig k_j. Tegyük a *LIST* végére a k'_j, k''_j, k_j klózokat.
4. $S_{j+1} := S_j \cup \{k_j\}$, $j := j + 1$. Folytassuk a 2. lépéssel.

Példa

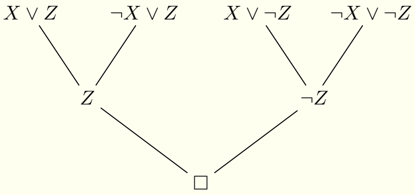
$S = \{X \vee \neg Z,\ \neg X \vee Y,\ \neg X \vee Z,\ X \vee Z,\ \neg Y \vee \neg Z\}$, bázis: Z, X, Y.

Levezetési fa

Levezetési fa Tk.235-236.o.

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét mutatja. Olyan gráf, amelynek csúcsaiban klózok vannak. Két csúcsból akkor vezet él egy harmadik csúcsba, ha abban a két csúcsban lévő klózok rezolvense található.

Példa - adott rezolúciós levezetés levezetési fája



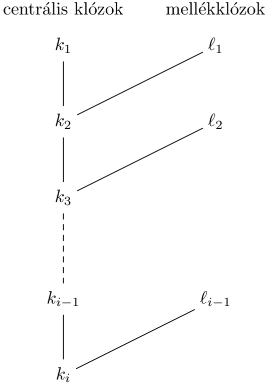
1.	$X \vee Z$	[$\in S_1$]
2.	$\neg X \vee Z$	[$\in S_1$]
3.	Z	[1, 2 rezolvense]
4.	$X \vee \neg Z$	[$\in S_1$]
5.	$\neg X \vee \neg Z$	[$\in S_1$]
6.	$\neg Z$	[4, 5 rezolvense]
7.	$\square$	[3, 6 rezolvense]

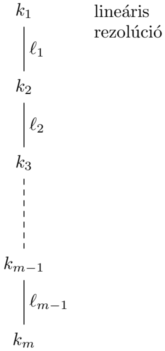
$S_1 = \{X \vee \neg Z,\ \neg X \vee Z,\ X \vee Z,\ \neg X \vee \neg Z\}$

Levezetési stratégiák I.

Lineáris rezolúciós levezetés

Egy S klózhalmazból egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ klózsorozat, ahol $k_1, l_1 \in S$ és minden $i = 2, 3, \ldots, m)$ esetben a k_i a k_{i-1}, l_{i-1} rezolvense, ahol $l_{i-1} \in S$, vagy egy korábban megkapott centrális klóz (rezolvense valamely k_s, l_s $(s < i)$-nek).





Levezetési stratégiák II.

Lineáris inputrezolúciós levezetés

S klózhalmazból egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ klózsorozat, ahol $k_1, l_1 \in S$, és minden $i = 2, 3, \ldots, m-1$ esetben $l_i \in S$, a k_i pedig a k_{i-1}, l_{i-1} rezolvense.

Egységrezolúciós stratégia

Rezolvens csak akkor képezhető, ha legalább az egyik klóz egységklóz.

Reuzolúciós stratégiák: lineáris rezolúció (helyes és teljes), lineáris input-, egység rezolúció (helyes de nem teljes) - Tk.236-238.o.

Az előadásban nem szereplő további rezolúciós stratégiák: Tk.281-300.o.

Horn klózok, Horn logika

Definíció

Egy klózt **Horn klóz**nak nevezünk, ha legfeljebb egy literálja nem negált.

Definíció

Horn logika az összes, csak Horn klózokat tartalmazó KNF alakú formulák halmaza.

Példa

$S = \{B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee C, C\}$ Horn klózok halmaza.

Tétel

A lineáris input és az egységrezolúciós stratégia teljes a Horn logikában.

Horn klózok, Horn logika

$$S = \{B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee C, C\}$$

1.	$B \vee \neg C$	$\in S$
2.	$\neg A \vee \neg B$	$\in S$
3.	$\neg A \vee \neg C$	$rez(1,2)$
4.	$A \vee \neg C$	$\in S$
5.	$\neg C$	$rez(3,4)$
6.	C	$\in S$
7.	$\square$	$rez(5,6)$

lineáris input rez.

1.	$B \vee \neg C$	$\in S$
2.	C	$\in S$
3.	B	$rez(1,2)$
4.	$\neg A \vee \neg B$	$\in S$
5.	$\neg A$	$rez(3,4)$
6.	$A \vee \neg C$	$\in S$
7.	$\neg C$	$rez(5,6)$
8.	$\square$	$rez(2,7)$

egységrezolúció

Horn klózok, Horn logika

Tétel

Ha az $\square$ levezethető lineáris input rezolúcióval egy K klózhalmazból, akkor K-ban van legalább egy egységklóz.
Biz.: Az $\square$-t az utolsó lépésben csak egy klózhalmazbeli egységklóz felhasználásával kaphatjuk meg.

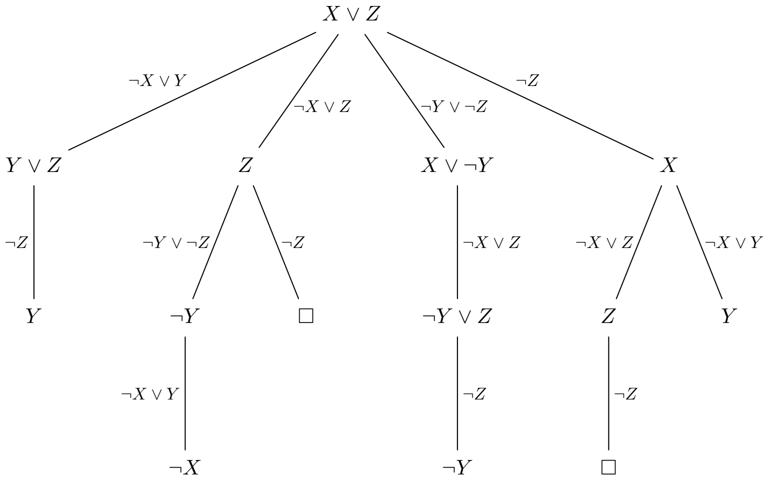
Tétel

Kielégíthetetlen Horn klózhalmazban van legalább egy egységklóz.

Teljes levezetési fa

Teljes levezetési fa adott klózzal kezdődő összes lineáris levezetés megadására.

Legyen $S = \{X \vee Z,\ \neg X \vee Z,\ \neg Y \vee \neg Z,\ \neg X \vee Y,\ \neg Z\}$.



Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Hatodik előadás

Tartalom

Prenex formula, Skolem normálforma

Eldönthető formulaosztályok keresése elsőrendű logikában.

Prenex formula

Legyen Q tetszőleges kvantor, a $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nB$ formula. $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n$ a prefixum, B, kvantormentes formula a formula magja, törzse.

Skolem formula

Skolem formula a $\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_nA$ Prenex formula, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok szerepelnek. Ez eldönthető formulaosztály elsőrendben.

Elsőrendű klóz

Elsőrendű klóz

Olyan zárt Skolem formula, aminek a magja az elsőrendű nyelv literáljainak (azaz atomi formuláinak vagy annak negáltjainak) diszjunkciója.
Pl. $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y)))$.

Az ítéletlogikai klózhalmaz (KNF) elsőrendű megfelelője az elsőrendű klózhalmaz (elsőrendű klózok konjunkciója) lehetne.

Alaprezolúció

A **feladat** tetszőleges elsőrendű formula átírása elsőrendű klózok konjunkciós formulájává. Az **eldöntésprobléma elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének** eldöntése.

Ha egy univerzális formulát kifejtünk egy U univerzum felett, akkor a mag alappéldányainak konjunkciója lesz U-ekvivalens az eredeti formulával.

Alaprezolúció

Ha elsőrendű klózok halmazával tesszük ugyanezt, akkor alapklózok hamazát kapjuk. A kifejtett klózhalmaz kielégíthetetlensége a kapott U feletti alapklózok halmazának kielégíthetetlenségével ekvivalens.

Az alapklózokra a rezolúciós kalkulust ugyanúgy definiálhatjuk mint az ítéletlogikában – alaprezolúció (Tk.251-254.o.). Alaprezolúcióval bármely adott U univerzumon való kielégíthetetlenség eldönthető.

Alaprezolúció – Példa

Elsőrendű klózhalmaz:

$S = \{\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))),\ \forall u \neg P(u),\ \forall z \forall w Q(z, f(w))\}$

$U = \{a, b, c\}$ univerzum feletti kifejtett klózhalmaz:

$$\big\{P(a) \vee \neg Q(a, f(a)),\ P(a) \vee \neg Q(a, f(b)),\ P(a) \vee \neg Q(a, f(c)),\\
P(b) \vee \neg Q(b, f(a)),\ P(b) \vee \neg Q(b, f(b)),\ P(b) \vee \neg Q(b, f(c)),\\
P(c) \vee \neg Q(c, f(a)),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(b)),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(c)),\\
\neg P(a),\ \neg P(b),\ \neg P(c), Q(a, f(a)),\ Q(a, f(b)),\ Q(a, f(c)),\\
Q(b, f(a)),\ Q(b, f(b)),\ Q(b, f(c)), Q(c, f(a)),\ Q(c, f(b)),\ Q(c, f(c))\big\}$$

Alaprezolúciós levezetés:

1. $P(a) \vee \neg Q(a, f(a))$ $\quad \in S$
2. $Q(a, f(a))$ $\quad \in S$
3. $P(a)$ $\quad$ res(1,2)
4. $\neg P(a)$ $\quad \in S$
5. $\Box$ $\quad$ res(3,4)

Formula felírása elsőrendű klózok konjunkciójaként

Hogyan lehet előállítani a vizsgálandó formulát elsőrendű klózok konjunkciójaként?

1. Tetszőleges formula átírható prenex alakba.
2. Tetszőleges prenex formula átírható Skolem alakba.
3. Tetszőleges Skolem normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként.

(1) Tetszőleges formula átírható prenex alakba

Az átalakításhoz szükséges átalakítási szabályok.

	Általános De Morgan szabályok
	$\neg\forall x A \sim \exists x \neg A$
	$\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$
	Kvantorkiemelési szabályok
(1)	$\forall x A[x] \wedge B \sim \forall x (A[x] \wedge B)$
	$\forall x A[x] \vee B \sim \forall x (A[x] \vee B)$
(2)	$\exists x A[x] \wedge B \sim \exists x (A[x] \wedge B)$
	$\exists x A[x] \vee B \sim \exists x (A[x] \vee B)$

(1) Tetszőleges formula átírható prenex alakba

Kvantorkiemelési szabályok

(3) $\forall x A[x] \wedge \forall x B[x] \sim \forall x(A[x] \wedge B[x])$, de $\vee$-re nem

(4) $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] \sim \exists x(A[x] \vee B[x])$, de $\wedge$-re nem

(5) $Q_1 x A[x] \wedge Q_2 x B[x] \sim Q_1 x Q_2 z(A[x] \wedge B[x/z])$

(6) $Q_1 x A[x] \vee Q_2 x B[x] \sim Q_1 x Q_2 z(A[x] \vee B[x/z])$

A prenex formába való átírás algoritmusa

1. A logikai összekötőjelek átírása $\neg, \wedge, \vee$-ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása addig amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül (a formula törzse kvantormentes formula).

Prenex fomrára való átírás - példa

$$\forall x(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(Q(y) \supset P(x,a))) \supset \neg\forall x \exists y(P(y,x) \supset R(x,y))$$

- 1. lépés

$$\neg(\forall x(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \neg\forall x \exists y(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$$

- 2. lépés

$$\exists x \neg(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \neg\exists y(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$$

$$\exists x(\neg\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y \neg(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$$

$$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \neg\neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y))$$

$$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y))$$

Példa folyt.

- 3. lépés (kvantorkiemelési szabályok)

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y)))$.

  $\exists y$ kiemeléséhez először végrehajtjuk az y/y_1 helyettesítést a $\forall y$-al kezdődő első részformulában és az y/y_2 helyettesítést a $\forall y$-al kezdődő második részformulában.

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2(P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

  $\exists x \exists y(\neg P(x,y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2(P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

  Utolsó lépés:

  $\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2(\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee (P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

Megkaptuk a prenex formulát. A mag DNF.

Ha a prenex formula törzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a formula normálforma: prenex konjunktív / prenex diszjunktív formula.

(2) Tetszőleges prenex formula átírható Skolem formába

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz egy interpretációban, akkor az $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az $f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}) = x_j$ (Skolem) függvénnyel fejezzük ki. Ez a függvény rendeli az x_j -hez a megfelelő értéket az $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ változók minden változókiértékelése esetén. Ezt a lépést végrehajtjuk a soronkövetkező egzisztenciális kvantorra addig amíg, minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.

Példa

Példa 1.

$\forall x \exists y P(x, y)$
Skolem alak: $\forall x P(x, f(x))$

Példa 2.

$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))$

x és y-hoz tartozó Skolem függvények 0 változósak (Skolem konstansok), pl. q, r. Skolem alak:
$\forall y_1 \forall y_2 (\neg P(q, r) \vee \neg Q(y_1) \vee P(q, a) \vee P(y_2, q) \wedge \neg R(q, y_2))$

(3) Tetszőleges Skolem normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként

A Skolem normálforma magja KNF, az elsőrendű nyelv literáljaiból felírt klózok konjunkciós lánca.

Példa

$$\forall x \forall y \forall y_1((\neg P(x,y) \vee Q(y_1)) \wedge (R(y, f(x) \vee P(x,a)) \\ \wedge (P(x,y_1) \vee \neg R(x,y)))$$

A konjunkciós láncban a 3. kvantorkiemelési szabály alkalmazható. Így a formula elsőrendű klózok konjunkciós láncaként felírt alakja:

$$\forall x \forall y \forall y_1(\neg P(x,y) \vee Q(y_1)) \wedge \forall x \forall y \forall y_1(R(y, f(x)) \vee P(x,a)) \\ \wedge \forall x \forall y \forall y_1(P(x,y_1) \vee R(x,y))$$

(3) folyt.

Elsőrendű klózokból álló konjunkciós lánc kielégíthetetlenségének vizsgálata.

Mivel egy kvantált formula értéke **nem függ a benne szereplő kötött változó értékétől**, ezeket a változókat át lehet nevezni.

Példa

$$\forall x \forall y \forall y_1 (\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1)) \wedge \forall z \forall w \forall y_1 (R(w, f(z)) \vee P(z,a)) \\ \wedge \forall v \forall z_1 \forall y_3 (P(v, y_3) \vee \neg R(v, z_1))$$

változóidegen klózok konjunkciója.

Átalakítható változóidegen elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének vizsgálatává.

Példa

$$\{(\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1)), (R(w, f(z)) \vee P(z,a)), (P(v, y_3) \vee \neg R(v, z_1))\}$$

Kielégíthetőség és az U számossága

Ha egy formula azonosan igaz $|U| = n$ számosságon, akkor ennél kisebb számosságon is azonosan igaz. (Tk.257.o.)

Ha egy formula kielégíthető $|U| = n$ számosságon, akkor ennél nagyobb számosságon is kielégíthető.(Tk.258.o.)

Löwenheim-Skolem tétel Tk.258.o.

Ha egy formula kielégíthető egyáltalán, akkor kielégíthető legfeljebb megszámlálhatóan végtelen U-n.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

A kielégíthetetlenségre hasonló tételek nincsenek.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, ha minden interpretációban **legalább egy klóza hamis**.

Egy **elsőrendű klóz hamis** egy interpretációban, ha az interpretáló struktúra U univerzumán kifejtve a magból kapott **alapklózok közül legalább egy hamis** ebben az interpretációban.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen U felett, ha az U-n definiálható minden struktúrában az **alapklózok** halmaza kielégíthetetlen. Ha az S elsőrendű klózhalmazból az adott számosságú univerzumon a kifejtéssel megkapott alapklózok halmazából alaprezolúcióval levezethető az üres klóz, akkor a klózhalmaz **ezen az univerzumon** kielégíthetetlen. Ha egy S kielégíthetetlen egy $|U| = n$ számosságú univerzumon, még lehet nagyobb számosságon kielégíthető.

Példa, TK. 254.o. / 6.3.45.

$\forall x \forall y \exists z ((P(x,y) \supset \neg P(y,x)) \wedge (P(x,z) \vee P(z,y)))$

Bebizonyítható, hogy a formula nem elégíthető ki kételemű univerzumon, de háromelemű univerzumon már kielégíthető.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

Herbrand megmutatta, hogy ha tekintjük az **elsőrendű klózhalmaz leíró nyelvének alaptermjei**ből álló halmazt a Herbrand-univerzumot ($\mathcal{H}$-t), akkor a klózhalmaz akkor lesz kielégíthetetlen, ha $\mathcal{H}$-n kielégíthetetlen. Minden elsőrendű nyelvhez (elsőrendű klózhalmazhoz) létezik **legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú Herbrand-univerzum**.

Egy elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Herbrand-univerzumán kielégíthetetlen.

Herbrand-univerzum előállítása Tk.259.o.

Herbrand-univerzum konstrukciója lépésről lépésre:

1. $\mathcal{H}_0 = \{S$-ben előforduló konstansok halmaza$\}$ vagy ha a klózhalmazban nincs konstans szimbólum, akkor egy szimbolikus konstans $\{a\}$.
2. $\mathcal{H}_{i+1} = \mathcal{H}_i \cup F_i$, ahol F_i azon alaptermek halmaza, amelyeket $\mathcal{H}_i$ elemeinek a klózhalmazban lévő függvényszimbólumokba való behelyettesítésével kapjuk.
3. $\mathcal{H}_\infty = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_k$

Alaprezolúció Herbrand-univerzum felett

Példa

Tekintsük az $S = \{P(x),\ \neg Q(y,z) \vee \neg P(z),\ Q(u, f(u))\}$ klózhalmazt.

$\mathcal{H}_0 = \{a\}$ - fiktív konstans
$\mathcal{H}_1 = \{a, f(a)\}$
$\mathcal{H}_j = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(\ldots f(a) \ldots)\}$ - j-szeres iteráció
$\mathcal{H}_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(\ldots f(a) \ldots), \ldots\}$

Alapklózhalmaz a Herbrand-univerzum felett:

$$S = \{P(a),\ \neg Q(a,a) \vee \neg P(a),\ Q(a, f(a)),\ P(f(a)),\ \neg Q(a, f(a)) \vee \neg P(f(a)), \ldots\}$$

Alaprezolúciós levezetés:

1. $\neg Q(a, f(a)) \vee \neg P(f(a))$ $\in S$
2. $P(f(a))$ $\in S$
3. $\neg Q(a, f(a))$ res(1,2)
4. $Q(a, f(a))$ $\in S$
5. $\square$ res(3,4)

Herbrand-bázis

Herbrand-bázis

Legyen S egy elsőrendű klózhalmaz és $\mathcal{H}$ a klózhalmazhoz tartozó Herbrand-univerzum. A $\mathcal{H}$ Herbrand-univerzum feletti alapatomok egy rögzített sorrendjét *Herbrand-bázisnak* nevezzük.

Példa

Az előző $S = \{P(x), \neg Q(y,z) \vee \neg P(z), Q(u, f(u))$ klózhalmaz esetén egy lehetséges Herbrand-bázis:

$\{P(a), Q(a,a), P(f(a)), Q(a, f(a)), Q(f(a), a), Q(f(a), f(a)),$
$P(f(f(a))), \ldots\}$

Herbrand-interpretáció

Herbrand-interpretáció

Legyen az S klózhalmaz leíró nyelve $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$, Herbrand-univerzuma pedig $\mathcal{H}$. *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$-vel jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek univerzuma éppen $\mathcal{H}$, és

- minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz a $c \in \mathcal{H}$ univerzumelemet (önmagát) rendeli, és
- minden k aritású $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz hozzárendeli azt az $f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}} : \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}$ műveletet, amelyikre minden $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{H}$ esetén

$$f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}}(h_1, h_2, \ldots, h_k) = f(h_1, h_2, \ldots, h_k).$$

Egy S elsőrendű klózhalmaz Herbrand-interpretációi tehát csak az S-ben előforduló predikátumszimbólumok interpretálásában különböznek.

Herbrand-interpretáció

Az előzőek alapján, ha adva van az S elsőrendű klózhalmaz egy $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációja, azt a következő módon is leírhatjuk: Legyen $\{A_1, A_2, \ldots\}$ az S klózhalmaz Herbrand-bázisa és legyen

$$L_i \rightleftharpoons \begin{cases} A_i, & \text{ha } A_i \text{ igaz } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban}, \\ \neg A_i, & \text{ha } A_i \text{ hamis } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban}. \end{cases}$$

Ekkor a $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációt az $\{L_1, L_2, \ldots\}$ alapliterál-halmaz egyértelműen megadja.

Herbrand-interpretáció – Példa

Példa

Legyen $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$. S Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}.$$

S egy Herbrand-bázisa:

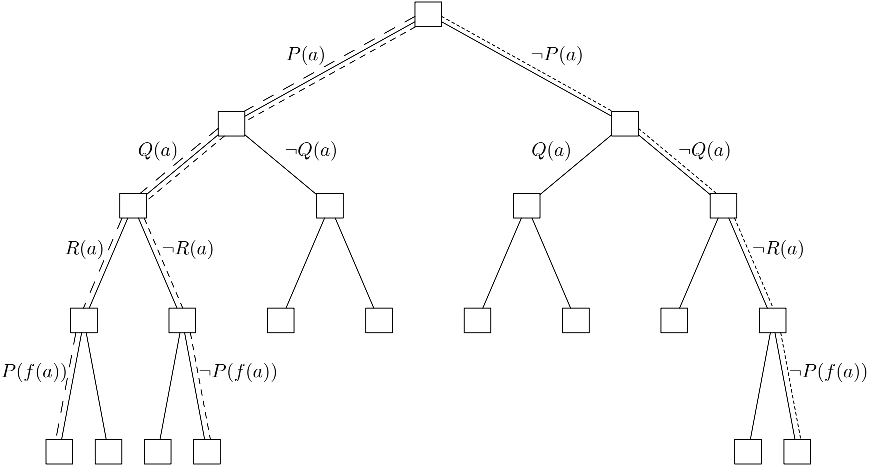
$$\{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\}.$$

Néhány Herbrand-interpretáció:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\} \\
\mathcal{I}_2 &= \{\neg P(a), \neg Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg R(f(a)), \ldots\} \\
\mathcal{I}_3 &= \{P(a), Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), Q(f(a)), \neg R(f(a)), \ldots\}
\end{aligned}$$

Herbrand-interpretáció – Példa

Az $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ és $\mathcal{I}_3$ interpretációk szemléltetése az előző Herbrand-bázis felhasználásával készül szemantikus fán:



Tételek Herbrand-interpretációhoz kapcsolódóan

Tétel Tk.6.3.61

Egy elsőrendű klózhalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpretáció sem elégíti ki. Nincs Herbrand-modellje.

A 6.3.61 tétel csak **elsőrendű klózhalmaz** esetén áll fenn. Példa:

Legyen egy nem elsőrendű klózhalmaz $S = \{P(a), \exists x \neg P(x)\}$.
S Herbrand-univerzuma: $\{a\}$, Herbrand-bázisa $\{P(a)\}$,
Herbrand-interpretációk: $P(a), \neg P(a)$. Egyikük sem elégíti ki S-et.
Ugyanakkor S kielégíthető például az $U = \{0, 1\}(P(x))$ struktúrában, ahol $P(0) = i$ és $P(1) = h$.

Herbrand tételek

H1 Tk.263.o.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha S bármely szemantikus fájához van véges zárt szemantikus fája.

H2 Tk.264.o.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha S klózai alapelőfordulásainak van véges kielégíthetetlen S' részhalmaza.

Példa alaprezolúcióra

Előállítjuk az elsőrendű klózok magjainak összes alappéldányát és az alapklózok halmazán ítéletlogikai rezolúcióval levezetjük az üres klózt.

Az elsőrendű klózhalmaz:

$$\{\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))),$$
$$\forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)),$$
$$\forall u (Q(g(u), u))\}$$

Herbrand-univerzum:

$$\{a, g(a), f(a), g(f(a)), g(g(a)), f(f(a)), f(g(a)), \dots\}$$

(A klózhalmaz leíró nyelvének összes alaptermje)

Példa folyt.

Alapklózok különböző helyettesítések esetén:

x	y	z	v	u	
					$\{P(x) \vee \neg Q(x, f(y))$, $\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)$, $Q(g(u), u)\}$
a	a	a	a	a	$\{P(a) \vee \neg Q(a, f(a))$, $\neg P(g(a)) \vee \neg P(a)$, $Q(g(a), a)\}$
$g(a)$	a	a	$g(a)$	a	$\{P(g(a)) \vee \neg Q(g(a), f(a))$, $\neg P(g(a)) \vee \neg P(g(a))$, $Q(g(a), a)\}$
$g(a)$	a	a	$g(a)$	$f(a)$	$\{P(g(a)) \vee \neg Q(g(a), f(a))$, $\neg P(g(a)) \vee \neg P(g(a))$, $Q(g(f(a)), f(a))\}$
$g(f(a))$	a	$f(a)$	$g(f(a))$	$f(a)$	$\{P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a))$, $\neg P(g(f(a))) \vee \neg P(g(f(a)))$, $Q(g(f(a)), f(a))\}$

Példa folyt.

Alaprezolúció:

1.	$Q(g(f(a)), f(a))$	$u \parallel f(a)$	1.	X
2.	$P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a))$	$x \parallel g(f(a)), y \parallel a$	2.	$Y \vee \neg X$
3.	$P(g(f(a)))$		3.	Y
4.	$\neg P(g(f(a)))$	$z \parallel f(a), v \parallel g(f(a))$	4.	$\neg Y$
5.	$\square$		5.	$\square$

Legyen a bázis első két eleme $P(g(f(a))), Q(g(f(a)), f(a))$.

Illesszük szemantikus fára az alapklózhalmazt.