37

Név: Katona János Dávid Neptun: LAJJFT

Logika és számításelmélet zárthelyi

2017. december 11, 16 óra

1. Tekintsük az alábbi függvényeket!

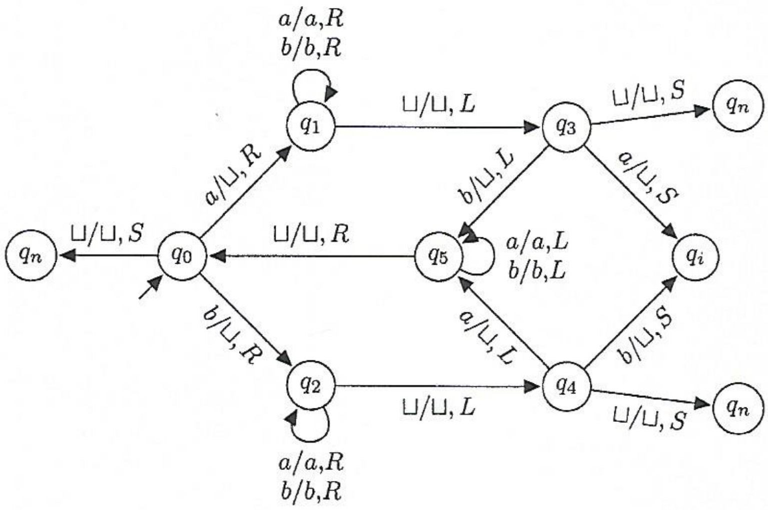
$$f(n) = 3^n + n^4, \qquad g(n) = n^2 \cdot 3^n + n^3 \cdot 2^n, \qquad h(n) = (n^2 + n) \cdot 3^n.$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$$f(n) = \Omega(g(n)), \qquad g(n) = \Omega(f(n)), \qquad g(n) = O(h(n)), \qquad h(n) = O(g(n)).$$

Röviden indokoljuk is a választ. (8 pont)

2. Az $M = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_i, q_n\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ determinisztikus Turing-gép állapotátmenete-i az alábbi átmenetdiagrammal vannak megadva. (Természetesen csak 1 db. q_n állapot van, az ábra az áttekinthetőség miatt tartalmaz 3 db. q_n állapotot.)



(a) Adjuk meg az *abb* szóhoz tartozó kezdőkonfigurációból valamely megállási konfigurációba a konfigurációátmenetek sorozatát! (4 pont)

(b) Adjuk meg az M által felismert $L(M)$ nyelvet! A választ röviden indokoljuk is! (6 pont)

(c) Adjunk meg egy olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre az M időigénye $\Theta(f(n))$. (1 pont)

3. Adjunk meg egy olyan determinisztikus Turing-gépet, ami eldönti, hogy egy szó második és utolsó előtti betűje ugyanaz! ($\Sigma = \{0, 1\}$) (5 pont)

4. (a) Jelölje $pre(u, k)$ egy u szó k hosszúságú prefixét (kezdőszeletét), azaz az első k darab betűjéből álló szót. Készítsünk determinisztikus Turing-gépet, mely az $f(u) = pre(u, \lfloor |u|/2 \rfloor)$ szófüggvényt számítja ki ($u \in \{a, b\}^*$)! Például $f(abbababaa) = abba$. (10 pont)

(b) Adjunk meg egy olyan $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre igaz lesz, hogy a feladat első részében kapott Turing-gép időigénye $\Theta(F(n))$. (1 pont)

5. Van-e a Post Megfelelkezési Problémának olyan legalább 3 dominóból álló D bemenete, melyre az igaz hogy (i) D-nek van megoldása (ii) D valamely két dominója felső szavának felcserélésével kapott D' készletnek nincs megoldása. Válaszunkat indokoljuk! (6 pont)

6A. $L = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = \infty\}$. Valamelyik előadáson vagy gyakorlaton bizonyított eldönthetetlen nyelv L-re való visszavezetésével igazoljuk, hogy $L \notin R$! Azaz eldönthetetlen, hogy egy Turing-gép véges sok szót ismer-e fel.

(Feltehető, hogy az input szavak a $\Sigma = \{0, 1\}$ ábécé felettiek, $\langle M\rangle$ a Turing-gépek szokásos, gyakorlaton és előadáson ismertetett kódolása.)

VAGY

6B. HÚ $= \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ irányított gráfban van Hamilton-út s-ből t-be$\}$

HÚKEZD $= \{\langle G, s\rangle \mid G$ irányított gráfban van olyan Hamilton-út, aminek s a kezdőpontja$\}$.

Mutassuk meg, hogy HÚ $\leq_p$ HÚKEZD. (9 pont)

Katona János Dávid LAJJFT

1. $f(n) = 3^n + n^4 \sim 3^n$
$g(n) = n^2 \cdot 3^n + n^3 \cdot 2^n \sim n^2 \cdot 3^n$
$h(n) = (n^2+n) \cdot 3^n$
$\Rightarrow f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ ✓

$f(n) = \Omega(g(n))$ — $f(n)$ egyenlő ~~g(n)~~ alsókorlátjával, igaz
$g(n) = \Omega(f(n))$ — $g(n)$ egyenlő $f(n)$ alsókorlátjával, hamis

$g(n) = O(h(n))$ — $g(n)$ egyenlő a $h(n)$ felsőkorlátjával, hamis
$h(n) = O(g(n))$ — $h(n)$ egyenlő a $g(n)$ felsőkorlátjával, igaz

2

2. a) 0. lépés: ... ⊔ a b b ⊔ ...
1. lépés: ... ⊔ a b b ⊔ ... q_0
2. lépés: ... ⊔ ⊔ b b ⊔ ... q_1
3. lépés ... ⊔ ⊔ b b ⊔ ... q_1
4. lépés ... ⊔ ⊔ b b ⊔ ... q_1
5. lépés ... ⊔ ⊔ b b ⊔ ... q_3
6. lépés ... ⊔ ⊔ b ⊔ ⊔ ... q_5
7. lépés ... ⊔ ⊔ b ⊔ ⊔ ... q_5
8. lépés ... ⊔ ⊔ b ⊔ ⊔ ... q_0
9. lépés ... ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ... q_2
10. lépés ... ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ... q_4
11. lépés ... ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ... q_n

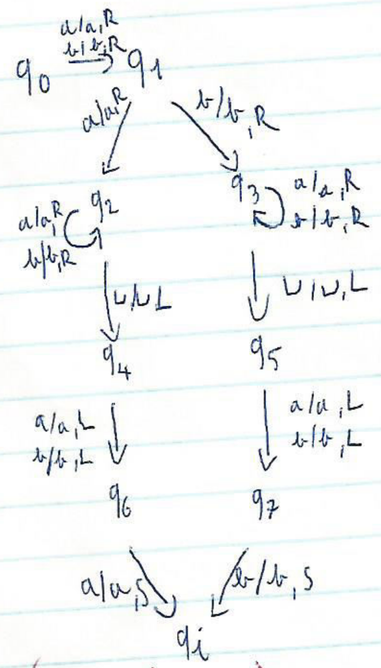
11

b) Azokat a szavakat fogadja el, amelyeknek van ugyanolyan karaktere elölről és hátulról az n-edik helyen.
$n \in \{1, \ldots \left[\frac{\text{szóhossz}}{2}\right]\} \cap \mathbb{N}$
$\Downarrow$
szóhossz $< 2 \Rightarrow$ elutasítja.

✓ miért?

c $f(n) = n^2$

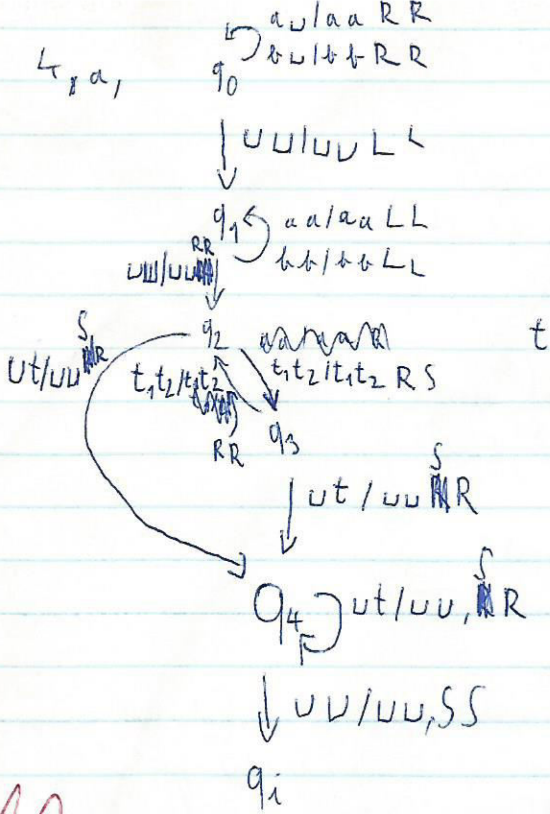
3.



5

$(\Sigma = \{0,1\})$

4. a,



$t \in \{a, b\}^1$

b, $F(n) = 6n$

11

5. a bcc de
ab ~~c~~ ~~c~~de

a	bcc	de
ab	c	cde

6

ha „a"-t kicseréljük, bármelyik másik felső szóra, akkor nem tudjuk elkezdeni a dominórakást ⇒ D'-nek nincs megoldása

6. B. HÚ $\leq_p$ Húkezd, mivel Hú tudja, hogy t az utolsó csúcs, HÚKEZD pedig megpróbálhatja hamarabb beletenni t csúcsot az útba, ~~ezért~~ emiatt ez több esetet jelent.

2