Turing gépek

Definíció

Turing gép

A **Turing gép** (továbbiakban röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$.
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ az egész $(Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma$-n értelmezett függvény.

Az $\{L, S, R\}$ halmaz elemeire úgy gondolhatunk mint a TG lépéseinek irányai (balra, helyben marad, jobbra). Valójában elég 2 irány: Minden helyben maradó lépés helyettesíthető egy jobbra és egy balra lépéssel egy új, csak erre az átmenetre használt új állapot bevezetése által.

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Konfiguráció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz: a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van és az író-olvasó fej a v szó első betűjén áll. Két konfigurációt azonosnak tekintünk, ha csak balra/jobbra hozzáírt $\sqcup$-ekben térnek el egymástól.

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0u\sqcup$ szó. (Vagyis q_0u, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0\sqcup$, ha $u = \varepsilon$).
Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_i$.
Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_n$.
Az elfogadó és elutasító konfigurációk közös elnevezése **megállási konfiguráció**.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. M $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet-relációját** az alábbiak szerint definiáljuk.

$\vdash \subseteq C_M \times C_M$ egylépéses konfigurációátmenet

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma,\ u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Turing gépek

Többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív, tranzitív lezártja, azaz:

$\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet

$C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

Az M TG által felismert nyelv

$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y$ valamely $x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon\}$.

Figyeljük meg, hogy $L(M)$ csak Σ feletti szavakat tartalmaz.

Turing gépek

A TG-ek és a nyelvek

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.
Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

A Turing-felismerhető nyelveket szokás **rekurzívan felsorolható**nak (vagy *parciálisan rekurzívnak*, vagy *félig eldönthetőnek*) az eldönthető nyelveket pedig **rekurzív**nak is nevezni.

A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát RE -vel, a rekurzív nyelvek osztályát pedig R-rel jelöljük.

Nyilván $R \subseteq RE$. Igaz-e hogy $R \subset RE$?

Turing gépek

Futási idő

Egy M TG **futási ideje** (időigénye) az u szóra n ($n \geq 0$), ha M az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból n lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u szóra végtelen.

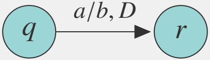
Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M egy $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** gép (vagy M $f(n)$ időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.

Gyakran megelégszünk azzal, hogy a pontos időkorlát helyett jó aszimptotikus felső korlátot adunk az időigényre.

Turing gépek

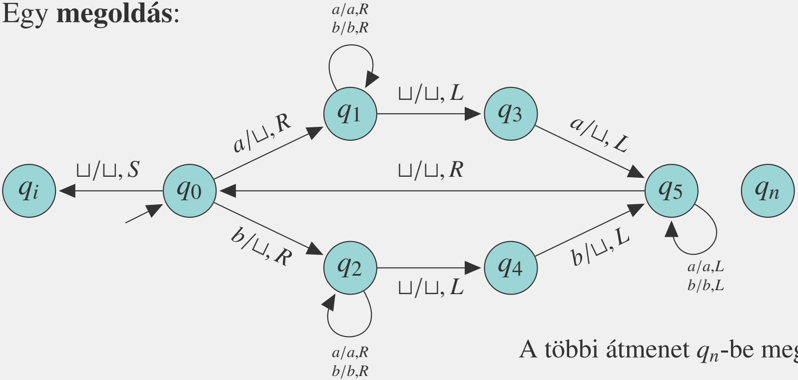
Egy példa

Feladat: Készítsünk egy M Turing gépet, melyre
$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!
Az **átmenetdiagram**.



$\delta(q,a) = (r,b,D)$ jelölése
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

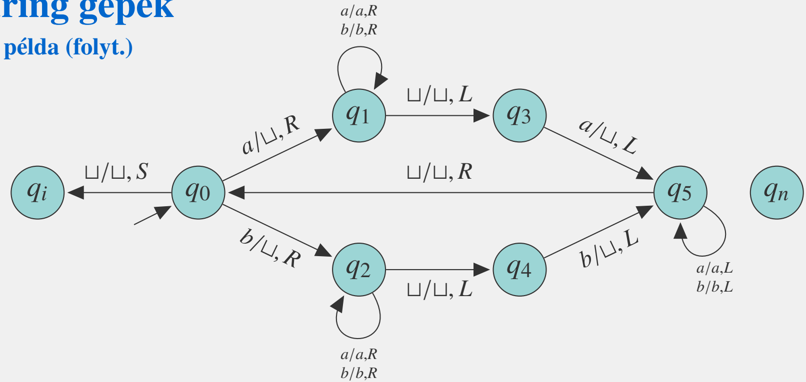
Egy **megoldás**:



A többi átmenet q_n-be megy.

Turing gépek

Egy példa (folyt.)



Példa. Konfigurációátmenetek sorozata az *aba* inputra:
$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1 \sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5 \sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2 \sqcup \vdash q_4 \sqcup \vdash q_n \sqcup$.
Az *aba* inputra 10 lépésben jut a gép megállási konfigurációba. Ebben a példában tetszőleges n-re ki tudjuk számolni a pontos időigényt is, de egyszerűbb (és gyakran elegendő) egy jó aszimptotikus felső korlát megadása.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Definició

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n)$ = nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leq c \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \geq c \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.
- f-nek g aszimptotikus éles korlátja (jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$) ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ minden $n \geq N$-re.

Megjegyzés: a definíció könnyen kiterjeszthető aszimptotikusan nemnegatív, azaz egy korlát után nemnegatív értékű függvényekre.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Függvények aszimptotikus nagyságrend szerinti osztályozása

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is felfogható az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív
- Θ szimmetrikus
- O, Ω fordítottan szimmetrikus ($f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$)
- (köv.) Θ ekvivalenciareláció, az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények egy osztályozását adja. Az egyes függvényosztályokat általában "legegyszerűbb" tagjukkal reprezentáljuk. Pl. 1 (korlátos függvények), n (lineáris függvények), n^2 (négyzetes függvények), stb.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Tételek

- $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)
- Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)
- $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$ (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.
- Ha létezik az f/g határérték

  ha $f(n)/g(n) \to +\infty \Rightarrow f(n)=\Omega(g(n))$ és $f(n) \neq O(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to c \quad (c > 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to 0 \quad \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ és $f(n) \neq \Omega(g(n))$

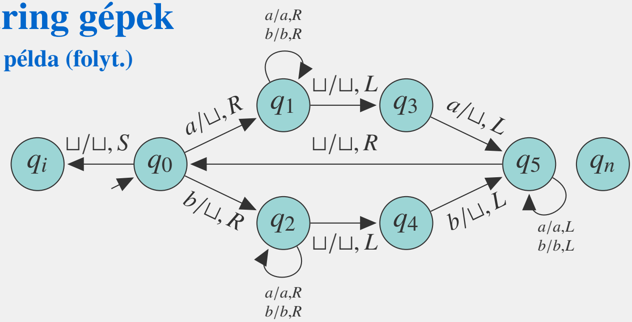
Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Konkrét függvények

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,
- Minden $c > 0$ -ra $\log n = O(n^c)$, de $\log n \neq \Omega(n^c)$.

Turing gépek

Egy példa (folyt.)



A TG időigénye $O(n^2)$, hiszen $O(n)$ iteráció mindegyikében $O(n)$-et lépünk, +1 lépés q_i-be vagy q_n-be.

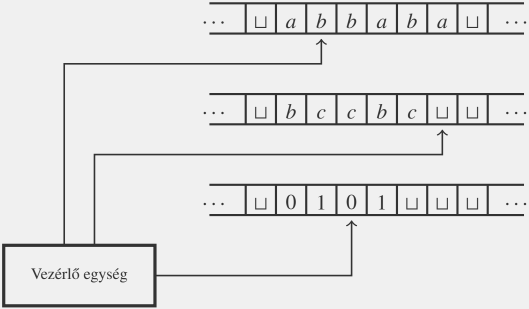
Van-e jobb aszimptotikus felső korlát? Nincs, mert van végtelen sok szó, melyre $\Omega(n^2)$-et lép.

Eldönti-e az $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nyelvet vagy "csak" felismeri? Eldönti.

Van-e olyan TG, ami nem dönti el, de azért felismeri L-et? Igen, a q_n-be menő átmeneteket vezessük végtelen ciklusba.

k-szalagos Turing-gép

Informális kép



- Egy ütem: Mind a k szalag olvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, egymástól függetlenül.
- Az egyszalagos géppel analóg elfogadásfogalom.
- Az egyszalagos géppel analóg időigény fogalom.

k-szalagos Turing-gép

A **k-szalagos Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k$ az átmenet függvény.

k-szalagos Turing-gép

Konfigurációk

Konfiguráció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy az aktuális állapot q, az i. szalag tartalma $u_i v_i$ és az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leq i \leq k)$.

Kezdőkonfiguráció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció:** $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$.

[v_1 miért $u\sqcup$ és nem u? Azért, hogy $u = \varepsilon$ ne legyen külön eset, és ugyanazt a szalagtartalmat reprezentálják.]

Elfogadó/elutasító/megállási konfiguráció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$, **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$, **megállási konfiguráció**, ha $q = q_i$ vagy $q = q_n$.

k-szalagos Turing-gép

Egy- és többlépéses konfigurációátmenet

A k-szalagos Turing-gépek **egylépéses konfigurációátmenetét** az egyszalagos esettel analóg módon definiálhatjuk. Mivel túl sok eset van (a lehetséges 3^k irány-k-as miatt) ezért ezt csak egy példán keresztül nézzük meg. Jelölés: $\vdash$.

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1v_1, u_2, a_2v_2) \vdash (r, u_1b_1, v_1', u_2, b_2v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell hogy szikronban lépjenek, egymástól függetlenül mozoghatnak.

Ezek után a **többlépéses konfigurációátmenet** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal. Jelölés: $\vdash^*$.

k-szalagos Turing-gép

Felismert nyelv, időigény

k-szalagos Turing-gép által felismert nyelv

$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^*$
$(q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),\ x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon\}.$

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.
A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelv fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.

k-szalagos Turing-gép futási ideje adott szóra

Egy k-szalagos Turing-gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.

Ezek után az **időigény** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal.

k-szalagos Turing-gép

Egy példa

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre
$L(M) = \{ww^{-1} \,|\, w \in \{a,b\}^*\}$!
Az **átmenetdiagram**.

$$q \xrightarrow{a_1,\ldots,a_k/b_1,\ldots,b_k,D_1,\ldots,D_k} r$$

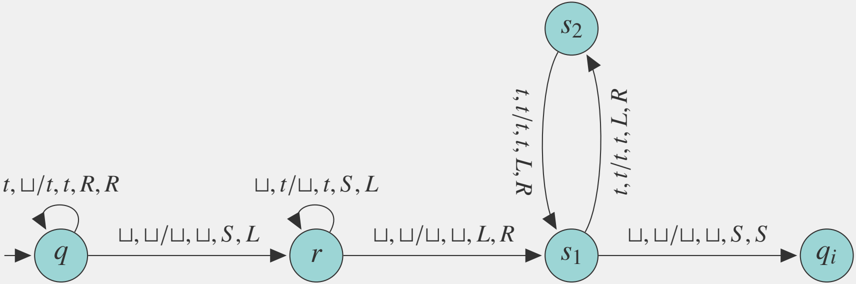
$\delta(q,a_1,\ldots,a_k) = (r,b_1,\ldots,b_k,D_1,\ldots,D_k)$ jelölése
$(q,r \in Q, a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k \in \Gamma, D_1,\ldots,D_k \in \{L,S,R\})$

k-szalagos Turing-gép

Egy példa

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!

Egy **megoldás**:
(A többi átmenet q_n-be megy. Minden átmenetre $t \in \{a, b\}$ tetszőleges.)



Mennyi a TG időigénye? Ez egy $O(n)$ időkorlátos TG.

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

Ekvivalens TG-ek

Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

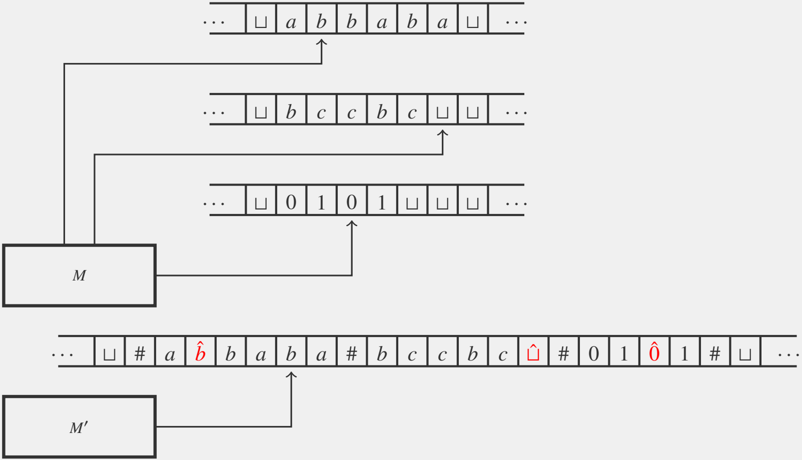
Tétel

Minden M k-szalagos Turing-géphez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos Turing-gép. Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű $f(n)$ időkorlátos gép (azaz $f(n) \geq n$), akkor M' $O(f(n)^2)$ időkorlátos.

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

Bizonyítás (vázlat): A szimuláció alapötlete



k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal

A szimuláció menete egy $a_1 \cdots a_n$ bemeneten:

1. M' kezdőkonfigurációja legyen $q'_0\#\hat{a}_1 a_2 \cdots a_n\#\hat{\sqcup}\#\cdots\hat{\sqcup}\#$
2. M' először végigmegy a szalagon (számolja a #-okat) és eltárolja a $\hat{}$ -pal megjelölt szimbólumokat az állapotában
3. M' mégegyszer végigmegy a szalagján és M átmenetfüggvénye alapján aktualizálja azt
4. ha M valamelyik szalagján nő a szó hozza, akkor M'-nek az adott ponttól mozgatnia kell a szalagja tartalmát jobbra
5. Ha M elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M' is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába
6. Egyébként M' folytatja a szimulációt a 2-ik ponttal

k-szalagos Turing-gép

Szimulálás egy szalaggal – időigény

Meggondolható, hogy M egyetlen lépésének szimulálásakor

- a lépések számára aszimptotikus felső korlát az M' által addig felhasznált cellaterület (tár). (Kétszer végigmegy M' szalagján, legfeljebb k-szor kell egy $\sqcup$-nek helyet csinálni, ami szintén O(felhasznált cellaterület))
- a felhasznált cellaterület $O(1)$-el nőtt. ($\leq k$-val, hiszen $\leq k$-szor kell egy $\sqcup$-t beszúrni)

Az M' által felhasznált cellaterület mérete kezdetben $\Theta(n)$, lépésenként $O(1)$-gyel nőhet, így $O(n + f(n)O(1)) = O(n + f(n))$ közös, minden lépés után igaz aszimptotikus felső korlát az M' által felhasznált cellaterület méretére.
Tehát M minden egyes lépésének szimulációja $O(n + f(n))$ M'-beli lépés.
Így M' összesen $f(n) \cdot O(n + f(n))$ időkorlátos, ami $O(f(n)^2)$, ha $f(n) = \Omega(n)$.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

- Az egy irányban végtelen szalagos Turing-gép egy, a bal oldalán zárt szalaggal rendelkezik
- A fej nem tud "leesni" a bal oldalon, még ha az állapot-átmeneti függvény balra lépést ír is elő a legbaloldalibb cellán, ilyenkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-gép.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Tétel

Minden egyszalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-gép.

Bizonyítás (vázlat):

1. Szimuláljuk M-et egy olyan M' TG-pel, ami két darab egy irányban végtelen szalaggal rendelkezik:
   M' megjelöli mindkét szalagjának első celláját egy speciális szimbólummal. Ezután M
   – az első szalagján szimulálja M-et akkor, amikor az a fej kezdőpozícióján vagy attól jobbra dolgozik,
   – a második szalagján pedig akkor, amikor az M a fej kezdőpozíciótól balra dolgozik (ezen a szalagon az ettől a pozíciótól balra lévő szó tükörképe van)
2. Szimuláljuk M'-t egy egyirányban végtelen szalagos M'' Turing-géppel (az előző tételben látott bizonyításhoz hasonlóan)

Nemdeterminisztikus Turing-gép

definíció, egylépéses konfigurációátmenet

Jelölje $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ az X halmaz hatványhalmazát.

Nemdeterminisztikus Turing-gép (NTG)

A **nemdeterminisztikus Turing-gép** (NTG) olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol

- $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_i, q_n$ ugyanaz, mint eddig
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$

Konfigurációk C_M halmazának fogalma azonos.

$\vdash \subseteq C_M \times C_M$ egylépéses konfigurációátmenet

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, azaz:

$\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet

$C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

NTG által felismert nyelv

$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon\}$.

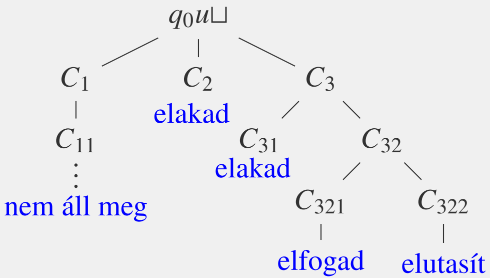
Egy NTG-re úgy gondolhatunk, hogy több számítása is lehet ugyanarra a szóra. Akkor fogad el egy szót, ha legalább egy számítása q_i-ben ér véget.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Nemdeterminisztikus számítási fa

$u \in \Sigma^*$ nemdeterminisztikus számítási fája

Irányított fa, melynek csúcsai konfigurációkkal címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.



Példa:

Elfogadja u-t, hiszen a $q_0 u \sqcup \vdash C_3 \vdash C_{32} \vdash C_{321}$ számítása elfogadó konfigurációba visz. Egy ilyen számítás is elég az elfogadáshoz.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

NTG-vel való eldönthetőség, időigény

M **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri és minden $u \in \Sigma^*$ szóra az M számítási fája véges és minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

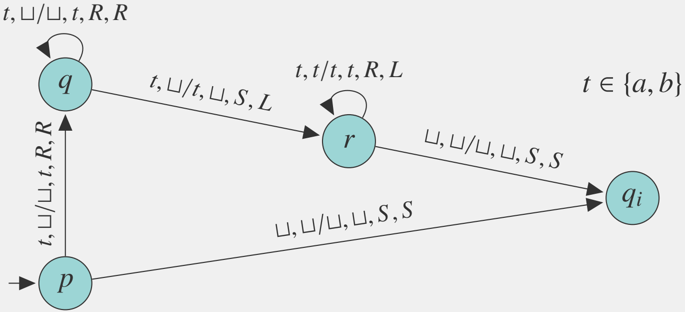
M $f(n)$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra u számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Megjegyzés: a nemdeterminisztikus Turing-gép definíciója értelemszerűen kiterjeszthető k-szalagos gépekre is, így beszélhetünk k-szalagos nemdeterminisztikus Turing-gépekről is.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Példa

Feladat: Készítsünk egy M nemdeterminisztikus Turing-gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!



$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash (q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, ba, ab, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, ba, a, b) \vdash$
$(r, b, a, \varepsilon, ab) \vdash (r, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab) \vdash (q_i, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab)$

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

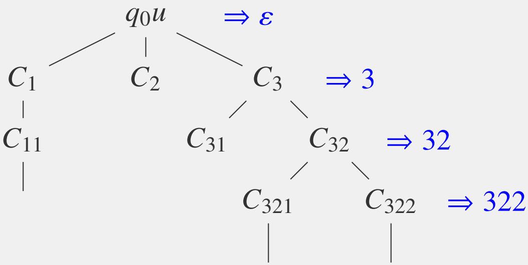
Bizonyítás (vázlat): M' egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten szimulálja u M-beli összes számítását számítási fájának szélességi keresése által.

- Legyen d az M átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $d = \max_{(q,a) \in Q \times T} |\delta(q, a)|$.
- Legyen $T = \{1, 2, \ldots, d\}$ egy ábécé.
- minden $(q, a) \in Q \times \Gamma$ esetén rögzítsük le $\delta(q, a)$ elemeinek egy sorrendjét

Nemdeterminisztikus Turing-gép

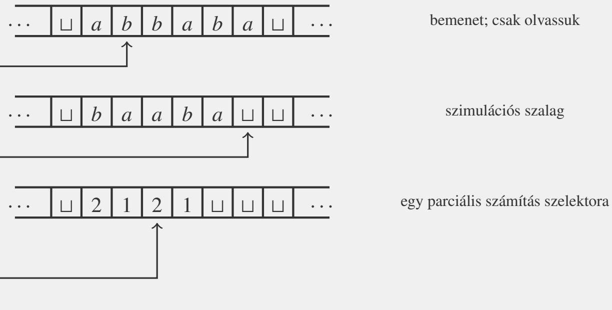
Szimulálás determinisztikus TG-pel

A számítási fa minden csúcsához egyértelműen hozzárendelhető egy T^*-beli szó, az adott konfigurációhoz tartozó parciális konfigurációátmenet-sorozat szelektora.



Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel



M' működése:

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

- M' kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - M' rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen k a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű a és a szimulált M aktuális állapota q
    - Ha $\delta(q, a)$-nak van k-ik eleme, akkor
      - M' szimulálja M egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez q_i -be vezet, akkor M' is elfogad
      - Ha ez q_n-be vezet, akkor M' kilép ebből a ciklusból
    - M' a 3-ik szalagon eggyel jobbra lép
  - M' törli a 2. szalagot és előállítja a 3. szalagon a hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés szerinti következő szót T felett

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Szimulálás determinisztikus TG-pel

- M' akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált M elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
- M'-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia ($\leq$ egy $f(n)$ magasságú teljes d-áris fa belső csúcsainak száma, ami $O(d^{f(n)})$), azaz M' időigénye $2^{O(f(n))}$

Megjegyzés:

- Abból, hogy a bizonyításban alkalmazott szimuláció exponenciális időigényű még nem következik, hogy nincs hatékonyabb szimuláció.
- Az a *sejtés*, hogy nem lehet a nemdeterminisztikus Turing-gépet az időigény drasztikus romlása nélkül determinisztikus Turing-géppel szimulálni.

Számosság

(ismétlés), definíció

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\Rightarrow$ *természetes számok* fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Egy ilyen általánosítás a **számosság** *(G. Cantor, 1845-1918)*.

Halmazok számossága

- A és B halmazoknak megegyezik a számossága, ha létezik bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.
- A számossága legalább annyi, mint B számossága, ha van B-ből injekció A-ba. Jelölése: $|A| \geq |B|$.
- A számossága nagyobb, mint B számossága, ha van B-ből injekció A-ba, de bijeckió nincs. Jelölése: $|A| > |B|$.

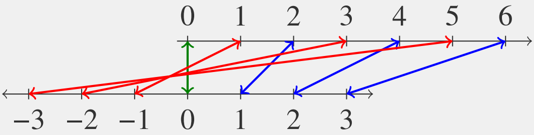
Cantor-Bernstein tétel

Ha A-ból B-be van injekció és B-ből A-ba is van, akkor A és B között bijekció is van, azaz ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \geq |B|$, akkor $|A| = |B|$.

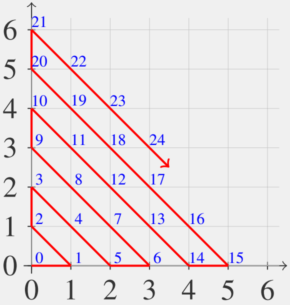
Számosság

Példák

1. Példa: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.



2. példa: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.



Számosság

További példa; a megszámlálhatóan végtelen számosság

3. példa: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.
Bizonyítás:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leq \mathbb{Q}|$.
$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+$, a tört nem egyszerűsíthető$\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+$, a tört nem egyszerűsíthető$\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Legyen $\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2 \ldots, \}$, $\mathbb{Q}^- = \{b_1, b_2 \ldots, \}$, ekkor
$\mathbb{Q} = \{0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$

Megszámlálhatóan végtelen számosság

$\mathbb{N}$ számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük. Egy halmaz **megszámlálható**, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Tétel

Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.

Számosság

A continuum számosság

Van-e más végtelen számosság a megszámlálhatóan végtelenen kívül?

Igen, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Continuum számosság

$\mathbb{R}$ számosságát **continuumnak** nevezzük.

4. példa: $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.

$\mathrm{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))\big|_{(0,1)} : (0,1) \to \mathbb{R}$ bijekció $(0,1)$ és $\mathbb{R}$ között.

Megjegyzés: $|\mathbb{R}| = |(a,b)| = |[c,d]|$ és $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$.

5. Példa: $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

A hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés egy bijekció:
ε,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,0000,. . .

6. Példa
$$\Big|\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\}\Big| = \Big|\{(b_1,\ldots,b_i,\ldots) \mid b_i \in \{0,1\},\ i \in \mathbb{N}\}\Big|$$

Természetes bijekció van köztük:
Soroljuk fel a bináris szavakat a hossz-lexikografikus rendezés szerint.
Egy nyelvhez rendeljük azt a megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bitsorozatot, melynek 1 az i. bitje, ha benne van az i. szó, 0 ha nem (a nyelv *karakterisztikus vektorát*).

Jelöljük a jobboldali halmazt $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-nel.

Számosság

Szavakkal kapcsolatos számosságok

7. Példa $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

Bizonyítás (vázlat):

$x \in [0,1)$-hez rendeljük hozzá x kettedestört alakjának "0." utáni részét (ha kettő van akkor az egyiket). Injektív, így $|[0,1)| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

$\mathbf{z} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ minden 1-esét helyettesítsük 2-essel, írjuk elé "0."-t és tekintsük harmadostörtnek. Meggondolható, hogy ez injektív megfeleltetés, így $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |[0,1)|$.

A Cantor-Bernstein tétel alapján $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

Számosság

Cantor-féle átlós módszer

Állítás: $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$

Bizonyítás:

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geq |\mathbb{N}|$:

$H_0 := \{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$

$H_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, és $|H_0| = |\mathbb{N}|$.

Kell: $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}|$.

Számosság

Cantor-féle átlós módszer

Állítás: $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$

Indirekt tegyük fel, hogy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$. Ez azt jelenti, hogy bijekcióba lehet állítani $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ elemeit $\mathbb{N}$ elemeivel, azaz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{u_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ elemeinek egy felsorolása (a természetes számokkal való megindexelése).
Legyen $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots)$, ahol minden i, $j \in \mathbb{N}$-re $u_{i,j} \in \{0,1\}$.
Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \ldots, \overline{u_{i,i}}, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

Mivel, minden megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris szó fel van sorolva, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $u = u_k$.

Ekkor u k.bitje $u_{k,k}$ (így jelöltük u_k k. bitjét), másrészt $\overline{u_{k,k}}$ (így definiáltuk u-t).
De ez nem lehetséges, tehát az indirekt feltevésünk, azaz hogy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$ hamis.

Számosság

Cantor-féle átlós módszer

1. Következmény

A continuum számosság nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen számosság.

2. Következmény

Több $\{0, 1\}$ feletti nyelv van mint $\{0, 1\}$ feletti szó. (Számosság értelemben.)

Számosság

Cantor-féle átlós módszer

Megjegyzés $\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\} = \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$. Igaz-e általában, hogy $|\mathcal{P}(H)| > |H|$?

Tétel

Minden H halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

Bizonyítás: $|\mathcal{P}(H)| \geq |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Cantor-féle átlós módszerrel:
Indirekt $f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt:
$\forall x \in H : \quad x :\in A \;\Leftrightarrow\; x \notin f^{-1}(x)$

$f(A) \in A$ igaz-e? Ha igen, $f(A) \notin A$, ha nem $f(A) \in A$, tehát $f(A)$ se az A halmazban, se azon kívül nincs, ellentmondás.

Számítási feladatok megoldása TG-pel

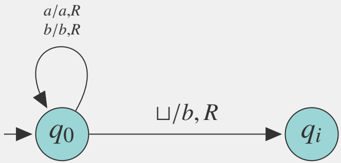
Használhatjuk a TG-eket szófüggvények kiszámítására is. A számítási feladatok megadhatók szófüggvényként.

Szófüggvényt kiszámító TG

Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, (q_n)\rangle$ TG kiszámítja az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Megjegyzés: Nincs szükség q_i és q_n megkülönböztetésére, elég lenne egyetlen megállási állapot. [Ezért van q_n ()-ben.]

Példa: $f(u) = ub \quad (u \in \{a, b\}^*)$.



Problémák, mint formális nyelvek

Ha egy problémának megszámlálható sok lehetséges bemenete van (a hétköznapi problémák gyakorlatilag ilyenek), akkor a bemeneteket elkódolhatjuk egy véges ábécé felett.
Fontos-e, hogy mekkora ezen ábécé mérete? Egy d méretű ábécé esetén az első n bemenet elkódolásához nagyjából $log_d n$ hosszú szavak kellenek. Mivel $log_d n = \Theta(log_{d'} n)$, ha $d, d' \geq 2$, ezért a válasz az, hogy nem igazán számít.
De! Ne kódoljunk unárisan! Pl. 2 szám összeadása.

Ha I egy bemenet, jelölje $\langle I \rangle$ az I kódját.

Eldöntési probléma:
$L = \{\langle I \rangle \,|\, I$ a probléma igen példánya$\}$ eldönthető-e Turing géppel.

Kiszámítási probléma:
Van-e olyan TG, ami f-t illetve $\langle I \rangle \mapsto \langle f(I) \rangle$-t számítja ki.

A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. A fentiek szerint minden input hatékonyan kódolható Σ felett.
Egy M Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$
- $k \geq 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_i$, $p_k = q_n$,
- $m \geq 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$.
- Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i 1 0^j 1 0^r 1 0^s 1 0^t$.
- $\langle M \rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

Észrevétel: $\langle M \rangle$ 0-val kezdődik és végződik, nem tartalmaz 3 darab 1-t egymás után.

$\langle M, w \rangle := \langle M \rangle 111 w$

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

Jelölés: Minden $i \geq 1$-re,

- jelölje w_i a $\{0,1\}^*$ halmaz i-ik elemét a hossz-lexikografikus rendezés szerint.
- jelölje M_i a w_i által kódolt TG-t (ha w_i nem kódol TG-t, akkor M_i egy tetszőleges olyan TG, ami nem fogad el semmit)

Tétel

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

Bizonyítás: Két különböző nyelvet nem ismerhet fel ugyanaz a TG. A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, ami volt, hogy megszámlálható). Másrészt viszont a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum (volt).

Azaz valójában a nyelvek "többsége" ilyen. Tudnánk-e konkrét nyelvet mutatni? Igen, $L_{\text{átló}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$ például ilyen.

$L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

Tétel

$L_{\text{átló}} \notin RE$.

A Cantor-féle átlós módszerrel adódik:
Bizonyítás: Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen méretű T bittáblázatot, melyre $T(i, j) = 1 \;\Leftrightarrow\; w_j \in L(M_i)\; (i, j \geq 1)$.
Legyen $\mathbf{z}$ a T átlójában olvasható végtelen hosszú bitsztring, $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geq 1$-re, T i-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus függvénye
- $\bar{\mathbf{z}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus függvénye
- Minden TG-pel felismerhető, azaz RE-beli nyelv karakterisztikus függvénye megegyezik T valamelyik sorával
- $\bar{\mathbf{z}}$ különbözik T minden sorától
- Ezek alapján $L_{\text{átló}}$ különbözik az összes RE-beli nyelvtől

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

Bizonyítás: Konstruálunk egy 4 szalagos U "univerzális" TG-et, ami minden TG minden bementére szimulálja annak működését.

1. szalag: U ezt csak olvassa, itt olvasható végig $\langle M, w \rangle$.

2. szalag: M aktuális szalagtartalma (elkódolva a fentiek szerint)

3. szalag: M aktuális állapota (elkódolva a fentiek szerint)

4. szalag: segédszalag

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \,|\, w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

U működése vázlatosan:

- Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem elutasítja a bemenetet
- ha igen felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
- Szimulálja M egy lépését:
  – Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát
  – Leolvassa a harmadik szalagról M aktuális állapotát
  – Szimulálja M egy lépését (ha kell, használja a segédszalagot) M első szalagon található leírása alapján.
- Ha M aktuális állapota elfogadó vagy elutasító, akkor U is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába

Az univerzális TG

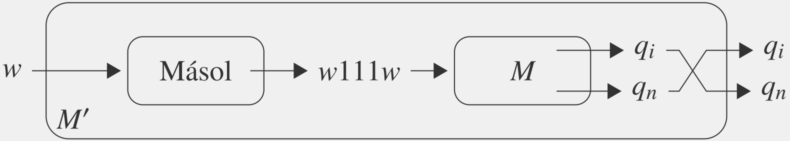
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$w \in L(M') \Leftrightarrow w111w \notin L(M) \Leftrightarrow$ a w által kódolt TG nem fogadja el w-t $\Leftrightarrow$ $w \in L_{\text{átló}}$.

Tehát $L(M') = L_{\text{átló}}$, ami lehetetlen egy előző tétel miatt.

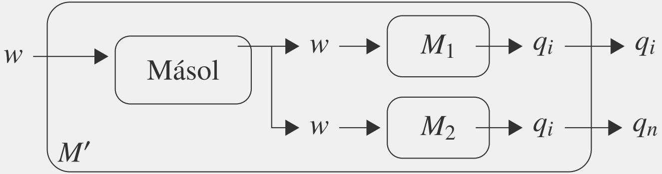
RE és R tulajdonságai

Jelölés: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor jelölje $\bar{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$.

Tétel

Ha L és $\bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Bizonyítás: Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\bar{L}$-t felismerő TG. Konstruáljuk meg az M' kétszalagos TG-t:



M' lemásolja w-t a második szalagjára, majd felváltva szimulálja M_1 és M_2 egy-egy lépését addig, amíg valamelyik elfogadó állapotba lép. Így M' az L-et ismeri fel, és minden bemeneten meg is áll, azaz $L \in R$.

RE és R tulajdonságai

Következmény

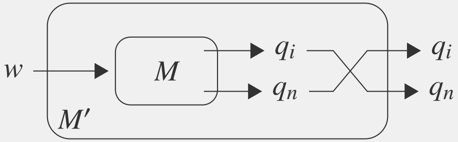
RE nem zárt a komplementer-képzésre.

Bizonyítás:
Legyen $L \in RE \setminus R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv) Ekkor $\bar{L} \notin RE$, hiszen ha $\bar{L} \in RE$ lenne, akkor ebből az előző tétel miatt $L \in R$ következne, ami ellentmondás.

Tétel

R zárt a komplementer-képzésre

Bizonyítás: Legyen $L \in R$ és M egy TG, ami az L-t dönti el. Akkor az alábbi M' $\bar{L}$-t dönti el:



Visszavezetés

Kiszámítható szófüggvény

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. [lásd szófüggvényt kiszámító TG]

Visszavezetés

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq L_2$

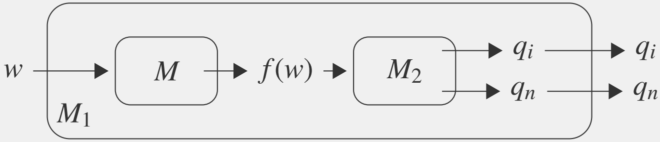
[Emil Posttól származik, angolul many-one reducibility]

Tétel

- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin RE$, akkor $L_2 \notin RE$.
- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$.

Visszavezetés

Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leq L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:



Ha M_2 felismeri L_2-t M_1 is fel fogja ismerni L_1-t, ha el is dönti, akkor M_1 is el fogja dönteni.

Következmény

- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in RE$, akkor $L_1 \in RE$.
- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in R$, akkor $L_1 \in R$.

Bizonyítás: Indirekten azonnal adódik a fenti tételből.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma:
$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M$ megáll a w bemeneten$\}$.
[Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.]
Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leq L_h$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \notin R$.
Tetszőleges M TG-re, legyen M' az alábbi TG
M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' végtelen ciklusba kerül

A Turing gépek megállási problémája

Bizonyítás: (folyt.)
Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \to \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra. Így $L_h \notin R$.

Megjegyzés: Visszavezetések megadásakor jellemzően csak azon szavakra térünk ki, amelyek ténylegesen kódolnak valamilyen nyelvbeli objektumot (TG-t, (TG,szó) párt, stb.)

Pl. a fenti esetben nem foglalkoztunk azzal, hogy f mit rendeljen olyan szavakhoz, melyek nem kódolnak (TG, szó) párt. Ez általában egy könnyen kezelhető eset, most:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w\rangle & \text{ha } \exists M \text{ TG, hogy} x = \langle M, w\rangle \\ \varepsilon & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad (x \in \{0,1\}^*)$$

hiszen ε nem kódol (TG,szó) párt (L_h elemei (TG,szó) párok).

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leq L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_h \Leftrightarrow M$ megáll w-n $\Leftrightarrow M'$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_u$

Tehát f által L_h visszavezethető L_u-ra.

Rice tétel

Rekurzíve felsorolható nyelvek tulajdonságai

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük. $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$.

$L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \,|\, L(M) \in \mathcal{P}\}$.

Rice tétele

Ha $\mathcal{P} \subseteq RE$ egy nem triviális tulajdonság, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$.

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

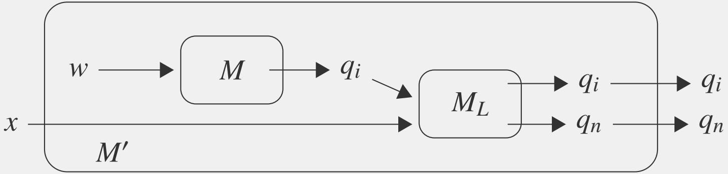
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leq L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. ($L \neq \emptyset$).
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w\rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' (valójában $M'_{\langle M,w\rangle}$) kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-n
2. Így, ha M nem áll meg w-n, M' se áll meg semelyik inputján $\Rightarrow L(M') = \emptyset$.
3. Ha M elutasítja w-t, akkor M' q_n-be lép és leáll (azaz nem fogadja el x-et $\Rightarrow L(M') = \emptyset$.
4. Ha M elfogadja w-t, akkor M' szimulálja M_L -et x-en (azaz $L(M') = L$).

Rice tétel

Bizonyítás



Összefoglalva

- $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$.
- $\langle M, w\rangle \notin L_u \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \notin \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L_{\mathcal{P}}$.

Azaz:
$\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$, tehát $L_u \leq L_{\mathcal{P}}$ és így $L_{\mathcal{P}} \notin R$.

Rice tétel

Bizonyítás

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

- Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \setminus \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
- Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}} \notin R$, hiszen ha R-beli lenne akkor a nem TG-kódokat elutasítva $L_{\overline{\mathcal{P}}}$-t eldöntő TG-t kapnánk.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}} \notin R \Rightarrow L_{\mathcal{P}} \notin R$ (tétel volt).

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

- az üres nyelvet ismeri-e fel. ($\mathcal{P} = \{\emptyset\}$)
- véges nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ véges }\}$)
- környezetfüggetlen nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ környezetfüggetlen }\}$)
- elfogadja-e az üres szót ($\mathcal{P} = \{L \in RE \mid \varepsilon \in L\}$)
- $\ldots$

Post Megfelelkezési Probléma

Legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geq 1)$.
A $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük ha $d_i = \frac{u_i}{v_i}$ $(1 \leq i \leq n)$.
A $d_{i_1} \cdots d_{i_m}$ sorozat $(m \geq 1)$ a D egy **megoldása**, ha $d_{i_j} \in D$ $(1 \leq j \leq m)$ és $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$.

Példa: Az $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ egy megoldása $\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$.
Megjegyzés: Tehát a megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell mindet felhasználni.

Post Megfelelkezési Probléma (PMP):
$L_{\mathrm{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$.

Tétel

$L_{\mathrm{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások. Egy TG, mely ezen D feletti szavakat a hosszlexikografikus sorrendben sorra kipróbálja és ha megoldást talál q_i-ben leáll éppen L_{PMP}-t ismeri fel.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\text{PMP}} \notin R$.

Bizonyítás:
Definiáljuk a PMP egy módosított változatát, MPMP-t. Az MPMP probléma igen-példányai olyan (D, d) (dominókészlet,dominó) párok, melyre D-nek van d-vel kezdődő megoldása.
$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \,|\, d \in D \ \wedge\ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\text{MPMP}} \leq L_{\text{PMP}}$.

Jelölés: ha $u = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ és $* \notin \Sigma$ akkor legyen

balcsillag$(u) := *a_1 * a_2 \cdots * a_n$
jobbcsillag$(u) := a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.
mindkétcsillag$(u) := *a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.

Post Megfelelkezési Probléma

Legyen $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ egy tetszőleges dominókészlet, ahol $d_i = \frac{u_i}{v_i}$ $(1 \leq i \leq n)$.

D' legyen a következő $|D| + 2$ méretű készlet:

$$d'_0 = \frac{\text{balcsillag}(u_1)}{\text{mindkétcsillag}(v_1)}, \quad d'_i = \frac{\text{balcsillag}(u_i)}{\text{jobbcsillag}(v_i)} \ (1 \leq i \leq n), \quad d'_{n+1} = \frac{*\#}{\#}.$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\text{MPMP}} \iff \langle D' \rangle \in L_{\text{PMP}}$.

Az állítás bizonyítása:

- ha $d_{i_1} \cdots d_{i_m}$ MPMP egy (D, d_1) bemenetének egy megoldása, akkor $d'_0 d'_{i_2} \cdots d'_{i_m} d'_{n+1}$ megoldása D'-nek, mint PMP inputnak.
- ha $d'_{i_1} \cdots d'_{i_m}$ D'-nek, mint PMP inputnak egy megoldása, akkor az első illetve az utolsó betű egyezése miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $d'_{i_1} = d'_0$ és $d'_{i_m} = d'_{n+1}$. Ekkor viszont $d_{i_1} \cdots d_{i_{m-1}}$ megoldása a (D, d_1) MPMP bemenetnek.

Ezzel az állítást bizonyítottuk. Mivel a megfeleltetés TG-pel kiszámítható, ezért $L_{\text{MPMP}} \leq L_{\text{PMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leq L_{\text{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \Longleftrightarrow D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\# q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)\ \frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)\ \frac{a}{a} :\in D$
- $\frac{\#}{\#}, \frac{\#}{\sqcup \#}, \frac{\#}{\# \sqcup} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)\ \frac{a q_i}{q_i}, \frac{q_i a}{q_i} :\in D$
- $\frac{q_i \# \#}{\#} :\in D.$

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0bab \vdash aq_2ab \vdash aq_ibb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab\rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0b}{aq_2}$ és $\frac{q_2a}{q_ib}$ átmenet- , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{\sqcup}{\sqcup}$ és $\frac{\#}{\#}$ identikus dominókat valamint a befejezéshez szükséges $\frac{aq_i}{q_i}$, $\frac{q_ib}{q_i}$ és $\frac{q_i\#\#}{\#}$ dominókat.

Ekkor egy kirakás (|-al blokkokra osztva):

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \mid \frac{q_0b}{aq_2}\frac{a}{a}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{a}{a}\frac{q_2a}{q_ib}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{aq_i}{q_i}\frac{b}{b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_ib}{q_i}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_ib}{q_i}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_i\#\#}{\#}$$

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \mid \frac{q_0b}{aq_2}\frac{a}{a}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{a}{a}\frac{q_2a}{q_ib}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{aq_i}{q_i}\frac{b}{b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_ib}{q_i}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_ib}{q_i}\frac{\#}{\#} \mid \frac{q_i\#\#}{\#}$$

A fenti példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.

A következő két blokkban alul és felül is konfigurációk következnek, felül mindig eggyel "lemaradva".

A 4.-6. blokkokban a $\frac{aq_i}{q_i}$ (és $\frac{q_ia}{q_i}$) típusú dominókkal egyesével behozható a felső szó lemaradása, egészen addig, amíg az alsó rész már csak $q_i\#$-al hosszabb.

Végül a 7. blokkban csak egy (záró)dominó szerepel, melynek az a szerepe, hogy behozza a még megmaradt lemaradást.

Post Megfelelkezési Probléma

A fenti példa alapján meg lehet általános esetben is konstruálni egy megoldást, így $w \in L(M) \Rightarrow$ van $\langle D, d\rangle$-nak megoldása.

Másrészt ha van d-vel kezdődő megoldás, akkor ez a dominósorozat két szavának hosszára vonatkozó megfontolások alapján csak q_i-t tartalmazó dominók használatával lehetséges. Meggondolható, hogy minden kirakás gyakorlatilag konfigurációátmenetek sorozata kell legyen az első q_i megjelenéséig, és így a w szóhoz tartozó kezdőkonfigurációból el lehet jutni elfogadó konfigurációba, azaz $w \in L(M)$.

Nyilván $\langle D, d\rangle$ $\langle M, w\rangle$-ből TG-pel kiszámítható, így beláttuk, hogy $L_u \leq L_{\mathrm{MPMP}}$.

Innen a tétel bizonyítása: $L_u \leq L_{\mathrm{MPMP}}$, $L_{\mathrm{MPMP}} \leq L_{\mathrm{PMP}}$ és tudjuk már, hogy $L_u \notin R$. Ebből a visszavezetés tranzitivitása és korábbi tételünk alapján $L_{\mathrm{PMP}} \notin R$.

Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) nyelvtan **egyértelmű**, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (Baloldali levezetés: mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)
$L_{\mathrm{ECF}} = \{\langle G\rangle \,|\, G$ egy egyértelmű CF nyelvtan$\}$.

Tétel

$L_{\mathrm{ECF}} \notin R$

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $L_{\mathrm{PMP}} \leq \overline{L_{\mathrm{ECF}}}$.
Legyen $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}\right\}$ egy tetszőleges dominókészlet.
$\Delta := \{a_1, \ldots, a_n\}$ úgy, hogy $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.
$P_A := \{A \to u_1 A a_1, \ldots, A \to u_n A a_n,\ A \to \varepsilon\}$.
$P_B := \{B \to v_1 B a_1, \ldots, B \to v_n B a_n,\ B \to \varepsilon\}$.

CF nyelvtanokkal kapcsolatos eldönthetetlen problémák

Egyértelmű nyelvtan

Bizonyítás: (folyt.)
$G_A = \langle A, \{A\}, \Gamma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Gamma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Gamma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:
* ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$.
De ekkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = v_{i_1} \cdots v_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}$ kétféleképpen is levezethető, így G_D nem egyértelmű.

* ha G_D nem egyértelmű, akkor van olyan szó, aminek két baloldali levezetése van. De ezek $S \to A$-val illetve $S \to B$-vel kell kezdődjenek, hiszen G_A és G_B egyértelmű.A generált szavak xy, $x \in \Gamma^*, y \in \Delta^*$ alakúak, így ugyanaz a generált Γ feletti prefix is. Így a két levezetés D egy megoldását adja.

f nyilván TG-pel kiszámítható. Mivel $L_{\mathrm{PMP}} \notin R$, következik, hogy $\overline{L_{\mathrm{ECF}}} \notin R$, amiből kapjuk, hogy $L_{\mathrm{ECF}} \notin R$.

CF nyelvtanokkal kapcsolatos eldönthetetlen problémák

Közös metszet, ekvivalencia, tartalmazás

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi CF nyelvtanokkal kapcsolatos kérdések. Legyen G_1 és G_2 két CF nyelvtan.

- $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
- $L(G_1) = \Gamma^*$ valamely Γ-ra
- $L(G_1) = L(G_2)$
- $L(G_1) \subseteq L(G_2)$

Csak az elsőt bizonyítjuk. L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá. Legyen $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}\right\}$ a dominókészlet. Készítsük el a fenti G_A és G_B nyelvtanokat. Könnyen látható, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $L(G_A)$-nak és $L(G_B)$-nek van nemüres metszete.
(A másik 3 állítás: biz. nélkül)

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

Eldönthetetlen, hogy A elsőrendű logikai formulára

(1) $\models A$ teljesül-e (logikailag igaz-e).

(biz. nélkül). L_{PMP}-t lehet visszavezetni rá. Azaz minden D dominókészlethez megadható egy A_D elsőrendű formula, melyre van D-nek megoldása $\Leftrightarrow \models A_D$. (részletek l. pl. Gazdag jegyzet)

Következmény

Legyen $\mathcal{F}$ egy elsőrendű formulahalmaz és A egy elsőrendű formula. Eldönthetetlen, hogy

(2) A kielégíthetetlen-e

(3) A kielégíthető-e

(4) $\mathcal{F} \models A$ teljesül-e

Bizonyítás: (2) $\models \neg A \;\Leftrightarrow\; A$ kielégíthetetlen. (3) Eldönthetetlen nyelv komplementere. (4) Kieléghetetlenségre visszavezethető (l. logika rész).

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Logikából tanultuk, hogy van olyan algoritmus, ami egy tetszőleges A elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg igen válasszal, ha A kielégíthetetlen (például a elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa). Ezért a kielégíthetetlenség eldöntése RE-beli probléma.

$\Rightarrow$ a kielégíthetőség eldöntése nem RE-beli probléma.

Mi a helyzet nulladrendű logika esetén?

A fenti kérdések mindegyike eldönthető. (ítélettábla). Véges sok interpretáció van, elsőrendben végtelen.

Nulladrendű logikában, az a kérdés van-e hatékony megoldás.

A továbbiakban az R nyelvosztályt vizsgáljuk. (Bonyolultságelmélet.)

A továbbiakban eldönthető problémákkal foglalkozunk, ilyenkor a kérdés az, hogy milyen hatékonyan dönthető el az adott probléma.

- $\mathrm{TIME}\,(f(n)) =$
  $\{L \,|\, L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű determinisztikus TG-pel$\}$
- $\mathrm{NTIME}\,(f(n)) = \{L \,|\, L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű NTG-pel$\}$
- $\mathrm{P}{=}\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{TIME}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NP}{=}\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{NTIME}\,(n^k)$.
- Észrevétel: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.
- Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ (sejtjük, hogy igaz, de bizonyítani nem tudjuk).

NP

A P tartalmazza a gyakorlatban is hatékonyan megoldható problémákat.

Milyen problémákat tartalmaz NP?

Egy L NP-beli problémához definíció szerint létezik őt polinom időben eldöntő NTG ami gyakran a következőképpen működik: a probléma minden I bemenetére polinom időben „megsejti" (azaz nemdeterminisztikusan generálja) I egy lehetséges m megoldását és polinom időben leellenőrzi (determinisztikusan), hogy m alapján $I \in L$-e.

A következőkben a P és NP bonyolultsági osztályok közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

Polinom idejű visszavezetés

Polinom időben kiszámítható szófüggvény

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami polinom időben kiszámítja.

Visszavezetés polinom időben

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **polinom időben visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq_p L_2$.

A polinom idejű visszavezetést Richard Karpról elnevezve *Karp-redukciónak* is nevezik.

Tétel

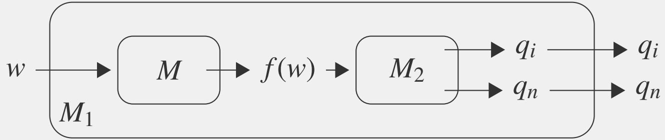
- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{P}$, akkor $L_1 \in \mathrm{P}$.
- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$, akkor $L_1 \in \mathrm{NP}$.

Az elsőt bizonyítjuk, a második analóg.

Polinom idejű visszavezetés

Bizonyítás:

Legyen $L_2 \in$ P és tegyük fel, hogy $L_1 \leq_p L_2$.
Legyen M_2 az L_2-t eldöntő, míg M a visszavezetést kiszámító TG.
Feltehetjük, hogy M $p(n)$ és M_2 $p_2(n)$ polinom idejű TG-ek.
Konstruáljuk meg M_1-et:



- M_1 eldönti az L_1 nyelvet
- ha w n hosszú, akkor $f(w)$ legfeljebb $p(n)$ hosszú lehet
- M_1 időigénye $p_2(p(n))$, ami szintén polinom

Polinom idejű visszavezetés

Adott problémaosztályra nézve nehéz nyelv

Legyen $\mathfrak{C}$ egy problémaosztály. egy L probléma $\mathfrak{C}$**-nehéz** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathfrak{C}$ esetén $L' \leq_p L$.

Adott problémaosztályban teljes nyelv

Egy $\mathfrak{C}$-nehéz L probléma $\mathfrak{C}$**-teljes**, ha $L \in \mathfrak{C}$.

Tétel

Legyen L egy NP-teljes probléma. Ha $L \in$ P, akkor P = NP.

Bizonyítás: Elég megmutatni, hogy NP $\subseteq$ P.
Legyen $L' \in$ NP egy tetszőleges probléma.
Ekkor $L' \leq_p L$, hiszen L NP-teljes.
Mivel $L \in$ P, ezért az előző tétel alapján $L' \in$ P.
Ez minden $L' \in$ NP-re elmondható, ezért NP $\subseteq$ P.

NP-teljesség

Emlékeztetőül:

NP-teljes nyelv

Egy L probléma **NP-teljes** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha

- $L \in \mathrm{NP}$
- L NP-nehéz, azaz minden $L' \in$NP esetén $L' \leq_p L$.

Azaz az NP-teljes problémák (ha vannak) az NP-beli problémák legnehezebbjei. Egyikre sem ismeretes polinomiális algoritmus és nem túl valószínű, hogy valaha is lesz ugyanis láttuk, hogy elég egyetlen NP-teljes problémáról bizonyítani, hogy P-beli, ez implikálná, hgy P=NP.

NP-teljesség

Emlékeztetőül:

NP-teljes nyelv

Egy L probléma **NP-teljes** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha

- $L \in \mathrm{NP}$
- L NP-nehéz, azaz minden $L' \in$NP esetén $L' \leq_p L$.

Azaz az NP-teljes problémák (ha vannak) az NP-beli problémák legnehezebbjei. Egyikre sem ismeretes polinomiális algoritmus és nem túl valószínű, hogy valaha is lesz ugyanis láttuk, hogy elég egyetlen NP-teljes problémáról bizonyítani, hogy P-beli, ez implikálná, hgy P=NP.
Van-e NP-teljes probléma egyáltalán?

SAT= $\{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű KNF$\}$

Tétel (Cook)

SAT NP-teljes.

Cook tétel bizonyítás

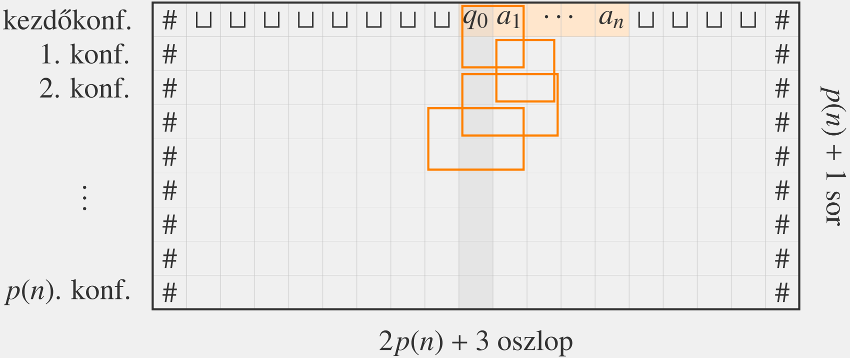
Bizonyítás:

- SAT$\in$ NP: Adott egy φ input. Egy NTG egy számítási ágán polinom időben előállít egy I interpretációt. Majd szintén polinom időben ellenőrzi, hogy ez kielégíti-e φ-t.
- SAT NP-nehéz: ehhez kell, $L \leq_p$ SAT, minden $L \in$ NP-re.

  • Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy L-et eldöntő $p(n)$ polinom időkorlátos NTG. (Feltehető, hogy $p(n) \geq n$.)
  • Legyen továbbá $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ egy szó.
  • M segítségével megadunk egy polinom időben előállítható φ_w nulladrendű KNF formulát, melyre $w \in L \Leftrightarrow \langle \varphi_w \rangle \in$ SAT.
  • M egy számítása w-n leírható egy T táblázattal, melynek
  – első sora $\# \sqcup^{p(n)} C_0 \sqcup^{p(n)-n} \#$, ahol $C_0 = q_0 w$ M kezdőkonfigurációja w-n
  – T egymást követő két sora M egymást követő két konfigurációja (elegendő $\sqcup$-el kiegészítve, elején és a végén egy #-el). Minden sor $2p(n) + 3$ hosszú.

Cook tétel bizonyítás (folyt.)

– $p(n) + 1$ sor van. Ha hamarabb jut elfogadó konfigurációba, akkor onnantól kezve ismételjük meg az elfogadó konfigurációt.



– a konfigurációátmenet definíciója miatt bármely két sor közötti különbség belefér egy 2x3-as "ablakba"
– T magassága akkora, hogy minden, $\leq p(n)$ lépéses átmenetet tartalmazhasson. A ⊔-ek számát ($\Rightarrow$ T szélességét) pedig úgy, hogy az ablakok biztosan "ne eshessenek le" egyik oldalon se.

Cook tétel bizonyítás (folyt.)

– φ_w ítéletváltozói $X_{i,j,s}$ alakúak, melynek jelentése: T i-ik sorának j-ik cellájában az s szimbólum van, ahol $s \in \Delta = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$.
– φ_w a w bemenetre M minden lehetséges legfeljebb $p(n)$ lépésű működését leírja. Felépítése: $\varphi_w = \varphi_0 \wedge \varphi_{\text{start}} \wedge \varphi_{\text{move}} \wedge \varphi_{\text{accept}}$.
– φ_0 akkor és csak akkor legyen igaz, ha minden cellában pontosan 1 betű van:

$$\varphi_0 := \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq p(n)+1 \\ 1 \leq j \leq 2p(n)+3}} \left(\left(\bigvee_{s \in \Delta} X_{i,j,s} \right) \wedge \bigwedge_{s,t \in \Delta, s \neq t} \left(\neg X_{i,j,s} \vee \neg X_{i,j,t} \right) \right)$$

– φ_{start} akkor és csak akkor legyen igaz, ha T első sora a $\sqcup$-okkal és #-ekkel a fent említett módon adott hosszúságúra kiegészített kezdőkonfiguráció.

$$\varphi_{\text{start}} := X_{1,1,\#} \wedge X_{1,2,\sqcup} \wedge \cdots \wedge X_{1,2p(n)+2,\sqcup} \wedge X_{1,2p(n)+3,\#}$$

Cook tétel bizonyítás (folyt.)

– φ_{move} akkor és csak akkor legyen igaz, ha minden ablak legális, azaz δ szerinti átmenetet ír le:

$$\varphi_{\text{move}} := \bigwedge_{\substack{1\le i\le p(n)\\ 2\le j\le 2p(n)+2}} \psi_{i,j},$$

ahol $\psi_{i,j} \sim \bigvee_{\substack{(b_1,\ldots,b_6)\\ \text{legális ablak}}} X_{i,j-1,b_1} \wedge X_{i,j,b_2} \wedge X_{i,j+1,b_3} \wedge X_{i+1,j-1,b_4} \wedge X_{i+1,j,b_5} \wedge X_{i+1,j+1,b_6}$

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6

De: $\psi_{i,j}$ nem elemi diszjunkció!!! Ezért e helyett:

$$\psi_{i,j} := \bigwedge_{\substack{(b_1,\ldots,b_6)\\ \text{illegális ablak}}} \neg X_{i,j-1,b_1} \vee \neg X_{i,j,b_2} \vee \neg X_{i,j+1,b_3} \vee \neg X_{i+1,j-1,b_4} \vee \neg X_{i+1,j,b_5} \vee \neg X_{i+1,j+1,b_6}$$

Cook tétel bizonyítás (folyt.)

– végezetül: φ_{accept} akkor és csak akkor legyen igaz, ha az utolsó sorban van q_i-t:

$$\varphi_{\text{accept}} = \bigvee_{j=2}^{2p(n)+2} X_{p(n)+1,j,q_i}$$

.

• $w \in L \Leftrightarrow$ az M NTG-nek van w-t elfogadó számítása$\Leftrightarrow$ T kitölthető úgy, hogy ϕ_w igaz $\Leftrightarrow$ ϕ_w kielégíthető $\Leftrightarrow \langle\varphi_w\rangle \in$ SAT,

• hány literált tartalmaz a φ_w formula? Legyen $k = |\Delta|$.

$\phi_0 : \quad (p(n)+1)(2p(n)+3)(k+k(k-1)) = O(p^2(n))$,

$\varphi_{\text{start}} : \quad 2p(n)+3 = O(p(n))$,

$\varphi_{\text{move}} : \quad \leq p(n)(2p(n)+1)k^6 \cdot 6 = O(p^2(n))$,

$\varphi_{\text{accept}} : \quad 2p(n)+1 = O(p(n))$,

azaz φ_w $O(p^2(n))$ méretű, így polinom időben megkonstruálható

• tehát $w \mapsto \langle\varphi_w\rangle$ pol. idejű visszavezetés, így $L \leq_p$ SAT.

• Ez tetszőleges $L \in$ NP nyelvre elmondható. Így SAT NP-nehéz. Mivel NP-beli, ezért NP-teljes is.

További NP-teljes problémák, kSAT

Tétel

Ha L NP-teljes, $L \leq_p L'$ és $L' \in$ NP, akkor L' NP-teljes.

Bizonyítás: Legyen $L'' \in$ NP tetszőleges. Mivel L NP-teljes, ezért $L'' \leq_p L$. Mivel a feltételek szerint $L \leq_p L'$, ezért a polinom idejű visszavezetések tranzitívitása miatt ($p_1(p_2(n))$ is polinom!) L' NP-nehéz. Ebből és a 3. feltételből következik az állítás.

Tehát polinom idejű visszavezetéssel további nyelvek NP-teljessége bizonyítható.

kSAT$=\{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető KNF és minden tagban pontosan k különböző literál van$\}$.

Az ilyen formulákat kKNF-nek nevezzük a továbbiakban.

3SAT NP-teljessége

Tétel

3SAT NP-teljes.

- 3SAT NP-beli: lásd SAT
- SAT$\leq_p$ 3SAT
  Kell $f : \varphi \mapsto \varphi'$, φ KNF, φ' 3KNF, φ' kielégíthető $\Leftrightarrow$ φ kielégíthető, f polinom időben kiszámolható.

$\varphi \mapsto \varphi'$:

ℓ	$\ell \vee X \vee Y,\ \ell \vee X \vee \neg Y,\ \ell \vee \neg X \vee Y,\ \ell \vee \neg X \vee \neg Y$
$\ell_1 \vee \ell_2$	$\ell_1 \vee \ell_2 \vee X,\ \ \ell_1 \vee \ell_2 \vee \neg X$
$\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$	$\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$
$\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4$	$\ell_1 \vee \ell_2 \vee X,\ \ \neg X \vee \ell_3 \vee \ell_4$
$\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ $(n \geq 5)$	$\ell_1 \vee \ell_2 \vee X_1, \neg X_1 \vee \ell_3 \vee X_2, \ldots, \neg X_{n-2} \vee \ell_{n-1} \vee \ell_n$

$X, Y, X_1, \ldots, X_{n-2}$ új ítéletváltozók. φ' ezek konjunkciója.

Megjegyzés: HORNSAT: mint SAT, de klózonként max. 1 pozitív literál lehet. HORNSAT és 2SAT $\in$ P.

3 színezhetőség

Egy gráf k-**színezhető**, ha csúcsai k színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok színei különbözőek.

3Színezés$=\{\langle G\rangle \mid G$ 3-színezhető$\}$

Tétel

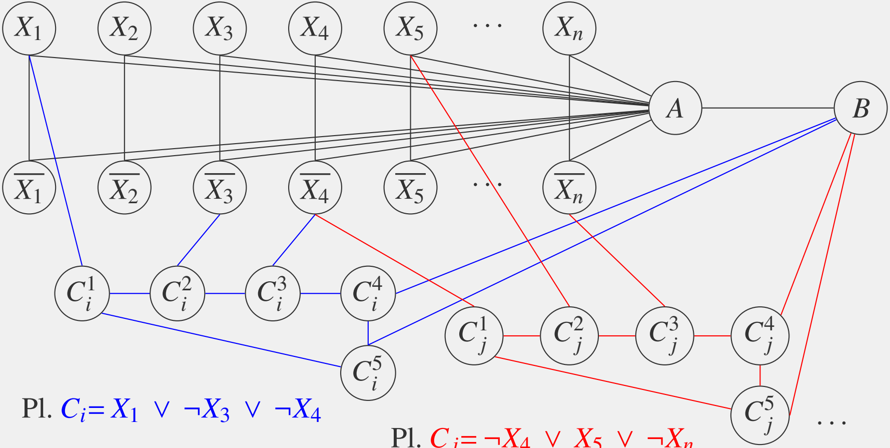
3Színezés NP-teljes.

- 3Színezés NP-beli: egy NTG számítási ágai színezzék ki a gráfot. Egy konkrét színezésről ellenőrizni, hogy helyes-e polinom időben megtehető.
- 3SAT$\leq_p$ 3Színezés

  Elegendő minden φ 3KNF formulához polinom időben elkészíteni egy G_φ gráfot úgy φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ G_φ 3 színezhető.

3 színezhetőség

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ a φ-ben előforduló ítéletváltozók. Továbbá $\varphi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, azaz $C_1, \ldots C_m$ φ pontosan 3 literálból álló klózai.
G_φ konstrukciója:



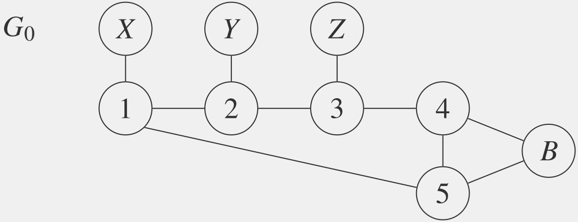
Pl. $C_i = X_1 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4$

Pl. $C_j = \neg X_4 \vee X_5 \vee \neg X_n$

Minden klózhoz tartozik egy ötszög a fenti módon.

3 színezhetőség

Lemma: Legyen G_0 az alábbi gráf és tegyük fel, hogy az X, Y, Z, B csúcsokat 2 színnel kiszíneztük. Akkor és csak akkor létezik ehhez a parciális színezéshez az egész G_0-ra kiterjeszthető 3-színezés, ha X, Y, Z, B nem mind egyszínű.



A lemma bizonyítása:

- Ha X, Y, Z, B egyszínű, akkor a maradék 2 színnel kéne az ötszöget kiszínezni, amit nem lehet.
- Egyébként megadunk egy színezést. *1. lépés:* első körben csak 2 színt használunk, 1,2,3,4,5-öt színezzük az $\{X, Y, Z, B\}$-beli szomszédjával ellentétes színűre.

3 színezhetőség

Ez persze még nem jó, mert 1,2,3,4,5 között lehetnek azonos színű szomszédok.

2. lépés: bevetjük a 3. színt: ha 1,2,3,4,5 között van ciklikusan, az óramutató járása szerint valahány egymás utáni egyszínű csúcs, akkor minden párosadikat színezzük át a 3. színre.

A visszavezetés bizonyítása:

- Tegyük fel hogy φ kielégíthető, ekkor meg kell adnunk G_φ egy 3-színezését. Legyenek a színek piros, zöld és kék. Ha X_i igaz, akkor legyen az X_i csúcs zöld, az $\overline{X_i}$ csúcs piros. Ha hamis, akkor épp fordítva. A legyen kék és B legyen piros. Mivel minden klóz ki van elégítve, így minden ötszöghöz van zöld (az igaz literál) és piros szomszéd (B) is, így a lemma miatt a színezés minden ötszögre kiterjeszthető.

3 színezhetőség

- Tegyük fel most, hogy G_φ ki van színezve 3 színnel. Ámnfth. A kék. Mivel $X_1, \ldots, X_n, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}$ mind A szomszédai, így egyikük se lehet kék. Továbbá az $(X_i, \overline{X_1})$ párok össze vannak kötve, így minden párban pontosan egy piros és pont egy zöld csúcs van. Ámnfth. B piros (a zöld eset analóg). Mivel az ötszögek ki vannak színezve, ezért a lemma miatt minden ötszögnek van zöld szomszédja. Az "X_i:=igaz $\Leftrightarrow$ X_i csúcs zöld" interpretáció tehát kielégíti φ-t.

Tehát beláttuk, hogy $\varphi \mapsto G_\varphi$ visszavezetés. Mivel G_φ φ ismeretében az input méretének polinomja időben legyártható, ezért a visszavezetés polinom idejű.

Mivel 3SAT NP-teljes korábbi tételünk miatt 3SZÍNEZÉS is az.

Megjegyzés: 2SZÍNEZÉS $\in$ P

3 irányítatlan gráfokkal kapcsolatos probléma

Az alábbi nyelvek esetén G egyszerű, irányítatlan gráf k pedig egy nemnegatív egész. G egy teljes részgráfját **klikknek**, egy üres részgráfját **független ponthalmaznak** mondjuk.

KLIKK$=\{\langle G, k\rangle \mid G$-nek van k méretű klikkje$\}$

FÜGGETLEN PONTHALMAZ=
$\{\langle G, k\rangle \mid G$-nek van k méretű független ponthalmaza$\}$

Legyen $S \subseteq V(G)$ és $E \in E(G)$. Ha $S \cap E \neq \emptyset$, akkor a csúcshalmaz **lefogja** E-t. Ha S minden $E \in E(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó ponthalmaz**.

[Megjegyzés: LEFOGÓ PONTHALMAZ a Gazdag jegyzetben CSÚCSLEFEDÉS néven szerepel]

LEFOGÓ PONTHALMAZ$=\{\langle G, k\rangle \mid G$-nek van k méretű lefogó ponthalmaza$\}$

Ha G-nek van k méretű klikkje/független ponthalmaza, akkor bármely kisebb k-ra is van. Ha van k méretű lefogó ponthalmaz, akkor bármely nagyobb k-ra is van ($k \leq |V(G)|$).

Független ponthalmaz

Tétel

Klikk,Független ponthalmaz,Lefogó ponthalmaz NP-teljes.

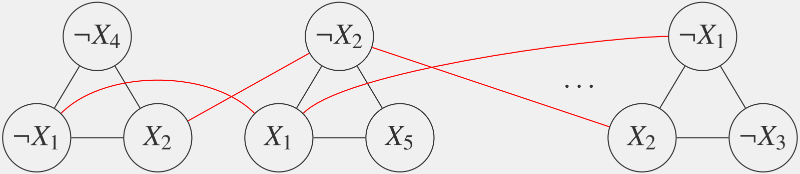
- Egy NTG egy számítási ágán vizsgáljon meg egy k elemű ponthalmazt. Mindhárom esetben az ellenőrzés polinomiális.
- 3SAT$\leq_p$ Független csúcshalmaz

  Kell: $f : \varphi \mapsto (G_\varphi, k)$, φ 3KNF, G_φ-ben van k független akkor és csak akkor ha φ kielégíthető.

  (G_φ, k) konstrukciója: minden egyes $L_1 \vee L_2 \vee L_3$ klózhoz vegyünk fel egy a többitől diszjunkt háromszöget, a csúcsokhoz rendeljük hozzá a literálokat. Így m darab klóz esetén $3m$ csúcsot kapunk. Kössük össze éllel ezen felül a komplemens párokat is. $k := m$.

Független ponthalmaz

Egy példa:



$\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_4$ $\quad$ $X_1 \vee \neg X_2 \vee X_5$ $\quad$ $\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3$

* Ha φ kielégíthető, akkor minden klózban van kielégített literál, válasszunk klózonként egyet, ezeknek megfelelő csúcsok m elemű független csúcshalmazt alkotnak.

* Ha G_φ-ben van m független csúcs, akkor ez csak úgy lehet, ha háromszögenként 1 van. Vegyünk egy ilyet, ezen csúcsoknak megfelelő literálok között nem lehet komplemens pár, hiszen azok össze vannak kötve. Így a független halmaznak megfelelő, (esetleg csak parciális) interpretáció kielégít minden klózt. Ha nincs minden változó kiértékelve, egészítsük ki tetszőlegesen egy interpretációvá.

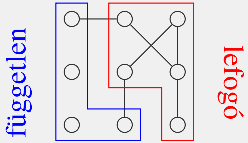
Klikk,Lefogó ponthalmaz

- Független ponthalmaz $\leq_p$ Klikk

  $f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$

  Ez jó visszavezetés, mert ami G-ben klikk az $\bar{G}$-ban független ponthalmaz és viszont.

- Független ponthalmaz $\leq_p$ Lefogó ponthalmaz
  $f : (G, k) \mapsto (G, |V(G)| - k)$
  Ha G-ben van k méretű F független ponthalmaz, akkor van $|V(G)| - k$ méretű lefogó ponthalmaz (F komplementere).
  Ha G-ben van $|V(G)| - k$ méretű L lefogó ponthalmaz, akkor van k méretű független ponthalmaz (L komplementere).



Mindkét visszavezetés polinom időben kiszámítható.

Lefogó ponthalmaz hipergráfokban

$\mathcal{S}$ egy **hipergráf** (vagy halmazrendszer), ha $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, ahol $A_i \subseteq U$, $(1 \le i \le n)$ valamely U alaphalmazra. $H \subseteq U$ egy **lefogó ponthalmaz**, ha $\forall 1 \le i \le n : H \cap A_i \neq \emptyset$.

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ$=\{\langle \mathcal{S}, k\rangle \mid \mathcal{S}$ egy hipergráf és $\mathcal{S}$-hez van k elemű lefogó ponthalmaz$\}$.

Tétel

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ NP-teljes.

Bizonyítás: HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ NP-beli, hiszen polinom időben ellenőrizhető, hogy U egy részhalmaza minden $\mathcal{S}$-beli halmazt metsz-e.

LEFOGÓ PONTHALMAZ a HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ speciális esete, hiszen a gráf a hipergráf speciális esete: egy gráf éleire úgy gondolunk, mint 2-elemű halmazokra, így a gráf éleinek halmaza egy hipergráf. (A visszavezetés az identikus leképezés.
$U := V(G)$, $\mathcal{S} := E(G)$, k ugyanaz).
[Megjegyzés: a Gazdag jegyzetben HITTING SET]

Irányítatlan/irányított Hamilton út/kör

Hamilton út/kör

Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan / irányított gráf ($|V| = n$). Egy $P = v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ felsorolása a csúcsoknak **Hamilton út** G-ben, ha $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\} = V$ és minden $1 \leq k \leq n-1$-re $\{v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\} \in E$ (illetve irányított esetben $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E$). Ha $\{v_{i_n}, v_{i_1}\} \in E$ (illetve irányított esetben $(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E$) is teljesül, akkor P **Hamilton kör**.

Jelölés: H-út/ H-kör Hamilton út/ Hamilton kör helyett.

HÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \,|\,$van a G irányított gráfban s-ből t-be H-út$\}$.

IHÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \,|\,$van a G irányítatlan gráfban s-ből t-be H-út$\}$.

IHK=$\{\langle G\rangle \,|\,$van a G irányítatlan gráfban H-kör$\}$.

Irányított $s - t$-Hamilton út NP teljessége

Tétel

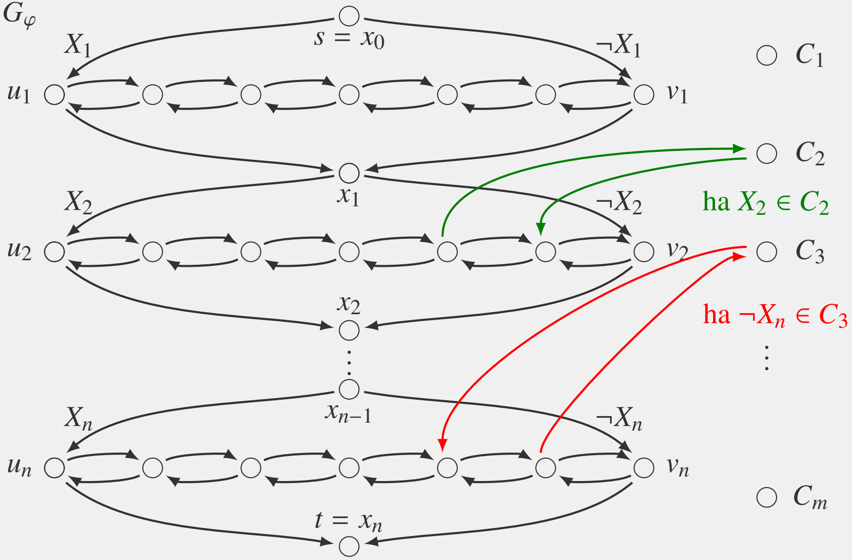
HÚ NP-teljes

Bizonyítás: NP-beli, hiszen polinom időben előállítható egy n darab csúcs egy P felsorolása. P-ről polinom időben ellenőrizhető, hogy a csúcsok egy permutációja-e és hogy tényleg H-út-e.

SAT$\leq_p$ HÚ. Elég bármely φ KNF-hez konstruálni (G_φ, s, t)-t azzal a tulajdonsággal, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ a G_φ-ben van s-ből t-be H-út.

Legyenek $X_1, \dots X_n$ a φ-ben előforduló ítéletváltozók és $C_1, \dots C_m$ φ klózai.

Irányított $s - t$-Hamilton út NP teljessége



Irányított $s - t$-Hamilton út NP teljessége

G_φ konstrukciója

- $\forall 1 \leq i \leq n : (x_{i-1}, u_i), (x_{i-1}, v_i), (u_i, x_i), (v_i, x_i) :\in E(G_\varphi)$
- $s := x_0, t := x_n$
- $\forall 1 \leq i \leq n$-re u_i és v_i között $2m$ belső pontú kétirányú út $w_{i,1}, \ldots, w_{i,2m}$.
- Minden $w_{i,k}$ legfeljebb egy C_j-vel lehet összekötve.
- Ha $X_i \in C_j$, akkor $(w_{i,k}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,k+1}) :\in E(G_\varphi)$. (pozitív bekötés)
- Ha $\neg X_i \in C_j$, akkor $(w_{i,k+1}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,k}) :\in E(G_\varphi)$. (negatív bekötés)

Az $u_i v_i$ út pozitív bejárása: $u_i \rightsquigarrow v_i$.
Az $u_i v_i$ út negatív bejárása: $u_i \leftsquigarrow v_i$.

Irányított $s-t$-Hamilton út NP teljessége

- Egy $s-t$ H-út $\forall 1 \leq i \leq n$-re az (x_{i-1}, u_i) és (x_{i-1}, v_i) közül pontosan egyiket tartalmazza, előbbi esetben az $u_i v_i$ utat pozitív, utóbbi esetben negatív irányban járja be.
- Egy $s-t$ H-út minden C_j-t pontosan egyszer köt be, meggondolható, hogy az $u_i v_i$ út pozitív bejárása esetén csak pozitív, negatív bejárása esetén csak negatív bekötés lehetséges.
- Ha van H-út, akkor az $u_i v_i$ utak pozitív/negatív bejárása meghatároz egy változókiértékelést, a $\forall 1 \leq j \leq m : C_j$ klóz bekötése mutat C_j-ben egy igaz literált.
- Ha φ kielégíthető, válasszunk egy őt igazra kiértékelő interpretációt és ebben minden klózhoz egy igaz literált. Az $u_i v_i$ utaknak válasszuk igaz változók esetén a pozitív, egyébként a negatív bejárását. Ha a kiválasztott literálokhoz rendre bekötjük a C_j csúcsokat H-utat kapunk.

G_φ polinom időben megkonstruálható így SAT$\leq_p$ HÚ, azaz HÚ NP-nehéz, de láttuk, hogy NP-beli, így NP-teljes is.

Irányítatlan $s-t$-Hamilton út NP teljessége

Megjegyzés: IHÚ és IHK NP-belisége az előzőekhez hasonlóan adódik.

Tétel

IHÚ NP-teljes

Bizonyítás: HÚ$\leq_p$ IHÚ. Adott G, s, t, ahol G irányított. Kell G', s', t', ahol G' irányítatlan és akkor és csak akkor van G-ben s-ből t-be H-út, ha G'-ben van s'-ből t'be.
G minden v csúcsának feleljen meg G'-ben 3 csúcs $v_{\text{be}}, v_{\text{közép}}$ és v_{ki}. és G' élei közé vegyük be a $\{v_{\text{be}}, v_{\text{közép}}\}$ és $\{v_{\text{közép}}, v_{\text{ki}}\}$ éleket. Továbbá minden $E=(u,v)$ G-beli él estén adjuk hozzá $E(G')$-höz $\{u_{\text{ki}}, v_{\text{be}}\}$-t.
$s' := s_{\text{be}}, t' := t_{\text{ki}}$.
Könnyű látni, hogy ha P H-út G-ben, akkor P' H-út G'-ben, ahol P'-t úgy kapjuk P-ből, hogy minden v csúcsot v_{be}, $v_{\text{közép}}$ és v_{ki}-vel helyettesítünk, ebben a sorrendben.

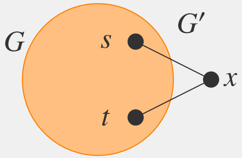
Irányítatlan Hamilton út/kör NP teljes

Fordítva, könnyen látható, hogy ha P egy H-út G'-ben akkor v_{be}, $v_{\text{közép}}, v_{\text{ki}}$ sorrendű 3-asok követik egymást (különben a $v_{\text{közép}}$-eket nem tudnánk felfűzni). Ezeket a 3-asokat v-vel helyettesítve egy G-beli utat kapunk.
Az utak kezdetére és végére vonatkozó feltételek is teljesülnek.

Tétel

IHK NP-teljes

Bizonyítás: IHÚ$\leq_p$ IHK. Adott G, s, t. G' konstrukciójában adjunk hozzá egy új x csúcsot és két új élt $\{s, x\}$-et és $\{t, x\}$-t G-hez. Könnyen meggondolható, hogy akkor és csak akkor van G-ben s-t H-út, ha G'-ben van H-kör.



Az utazóügynök probléma

Számítási (optimalizálási) verzió: Adott egy G élsúlyozott irányítatlan gráf nemnegatív élsúlyokkal. Határozzuk meg a legkisebb összsúlyú H-kört (ha van).

Eldöntési verzió:

TSP=$\{\langle G, K\rangle \mid G$-ben van $\leq K$ súlyú H-kör$\}$.

Tétel

TSP NP-teljes

Bizonyítás: TSP$\in$ NP, hasonló érvek miatt, mint HÚ, az összköltségfeltétel is polinom időben ellenőrizhető.

IHK$\leq_p$ TSP. Adott egy G gráf. G függvényében konstruálunk egy G' élsúlyozott gráfot és megadunk egy K számot. $G' := G$, minden élsúly legyen 1 és $K := |V|$. Könnyen látható, hogy G-ben van H-kör $\Leftrightarrow$ G'-ben van legfeljebb K összsúlyú H-kör.

NP szerkezete

NP-köztes nyelv

L NP-köztes, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

Ladner tétele

Ha $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

(biz. nélkül)

NP-köztes jelöltek (persze egyikről se tudhatjuk):

- GRÁFIZOMORFIZMUS=$\{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.
- PRÍMFAKTORIZÁCIÓ: adjuk meg egy egész szám prímtényezős felbontását [számítási feladat],

Egy új eredmény: Babai László, magyar matematikus (még nem lektorált) eredménye: GRÁFIZOMORFIZMUS $\in$ QP, ahol

$$\mathrm{QP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{(\log n)^c})$$

a "kvázipolinom időben" megoldható problémák osztálya.

co$\mathfrak{C}$

co$\mathfrak{C}$ bonyolultsági osztály

Ha $\mathfrak{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathfrak{C} = \{L \mid \bar{L} \in \mathfrak{C}\}$.

Bonyolultsági osztály polinom idejű visszavezetésre való zártsága

$\mathfrak{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathfrak{C}$ és $L_1 \leq_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathfrak{C}$.

Volt: P és NP zártak a polinomidejű visszavezetésre nézve.

Tétel

Ha $\mathfrak{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathfrak{C}$ is.

Bizonyítás: Legyen $L_2 \in \mathrm{co}\mathfrak{C}$ és L_1 tetszőleges nyelvek, melyekre $L_1 \leq_p L_2$. Utóbbiból következik, hogy $\overline{L_1} \leq_p \overline{L_2}$ (ugyananaz a visszavezetés jó!). Mivel $\overline{L_2} \in \mathfrak{C}$, ezért a tétel feltétele miatt $\overline{L_1} \in \mathfrak{C}$. Azaz $L_1 \in \mathrm{co}\mathfrak{C}$.

co$\mathfrak{C}$

Igaz-e, hogy P=coP? Igen. (L-et polinom időben eldöntő TG q_i és q_n állapotát megcseréljük: $\overline{L}$-t polinom időben eldöntő TG.)

Igaz-e, hogy NP=coNP? A fenti konstrukció NTG-re nem feltétlen $\overline{L}$-t dönti el.

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve.

Tétel

L $\mathfrak{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ co$\mathfrak{C}$-teljes.

Bizonyítás:

- Ha $L \in \mathfrak{C}$, akkor $\overline{L} \in$ co$\mathfrak{C}$.
- Legyen $L' \in \mathfrak{C}$, melyre $L' \leq_p L$. Ekkor $\overline{L'} \leq_p \overline{L}$.
  Ha L' befutja $\mathfrak{C}$-t akkor $\overline{L'}$ befutja co$\mathfrak{C}$-t. Azaz minden co$\mathfrak{C}$-beli nyelv polinom időben visszavezethető $\overline{L}$-re.

Tehát $\overline{L}$ co$\mathfrak{C}$-beli és co$\mathfrak{C}$-nehéz, így co$\mathfrak{C}$-teljes.

Példák coNP teljes nyelvekre

UNSAT := $\{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

TAUT := $\{\langle\varphi\rangle \,|\,$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

UNSAT és TAUT coNP-teljesek.

Bizonyítás: ÁLTSAT = $\{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ kielégíthető nulladrendű formula$\}$ is NP-teljes (NP-beli és SAT speciális esete neki.)
$\overline{\text{ÁLTSAT}}$ = UNSAT, az előző tétel alapján UNSAT coNP-teljes.
UNSAT $\leq_p$ TAUT, hiszen $\varphi \mapsto \neg\varphi$ polinom idejű visszavezetés.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben *c*áfolható problémákat.

Megjegyzések: Sejtés, hogy NP $\neq$ coNP. Egy érdekes osztály ekkor a NP $\cap$ coNP. Sejtés: P $\neq$ NP $\cap$ coNP. Bizonyított, hogy ha egy coNP-teljes problémáról kiderülne, hogy NP-beli, akkor NP = coNP.

Tárbonyolultság

Probléma a tárbonyolultság mérésénél: Hiába "takarékos" a felhasznált cellákkal a gép, az input hossza mindig alsó korlát lesz a felhasznált tárterületre. Egy megoldási lehetőség: A valódi tárigény az **ezen felül** igénybevett cellák száma. A csak az input területét használó számításoknak 0 legyen a tárigénye? Ez se az igazi.

Off-line Turing-gép

Az **off-line Turing-gép** egy legalább 3 szalagos gép, amelynek az első szalagja csak olvasható, az utolsó szalagja csak írható. További szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Off-line TG-ek tárigénye

Az off-line TG **tárigénye** egy adott inputra a munkaszalagjain felhasznált cellák száma. Egy TG $f(n)$ **tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ tárat használ.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

Így az off-line TG-pel **szublineáris** (lineáris alatti) tárbonyolultságot is mérhetünk.

- SPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ tárkorlátos determinisztikus off-line TG-pel$\}$
- NSPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ tárkorlátos nemdeterminisztikus off-line TG-pel$\}$
- PSPACE:=$\bigcup_{k\geq 1}$SPACE (n^k).
- NPSPACE:=$\bigcup_{k\geq 1}$NSPACE (n^k).
- L:=SPACE $(\log n)$.
- NL:=NSPACE $(\log n)$.

Az ELÉR probléma

ELÉR=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ A G irányított gráfban van s-ből t-be út$\}$.
ELÉR $\in$ P (valójában $O(n^2)$), lásd Algoritmusok és adatszerk. II., szélességi/mélységi bejárás)

Tétel

ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$.

Bizonyítás:

- Rögzítsük a csúcsok egy tetszőleges sorrendjét.
- ÚT(x, y, i) :=igaz, ha létezik x-ből y-ba legfeljebb 2^i hosszú út.
- s-ből van t-be út G-ben $\iff$ ÚT$(x, y, \lceil \log n \rceil)$=igaz.
- ÚT(x, y, i)=igaz $\iff \exists z($ ÚT$(x, z, i-1)$=igaz $\wedge$ ÚT$(z, y, i-1)$=igaz).
- Ez alapján egy rekurzív algoritmust készítünk, melynek persze munkaszalagján tárolnia kell, hogy a felsőbb szinteken milyen (x, y, i)-kre létezik folyamatban lévő hívás.

ELÉR: az ÚT(x, y, i) algoritmus

- ha $i = 0$, akkor $2^0 = 1$ hosszú út (megnézi az inputot).
- A munkaszalagon (x, y, i) típusú hármasok egy legfeljebb $\lceil \log n \rceil$ hosszú sorozata áll. A hármasok 3. attribútuma 1-esével csökkenő sorozatot alkot $\lceil \log n \rceil$-től
- ÚT(x, y, i) meghívásakor az utolsó hármas (x, y, i) a munkaszalagon. Az algoritmus felírja az $(x, z, i-1)$ hármast a munkaszalagra (x, y, i) utáni helyre majd kiszámítja ÚT$(x, z, i-1)$ értékét.
- Ha hamis, akkor kitörli $(x, z, i-1)$-et és z értékét növeli.
- Ha igaz, akkor is kitörli $(x, z, i-1)$-et és $(z, y, i-1)$-et ráírja, (y-t tudja az előző (x, y, i) hármasból).
  • Ha igaz, akkor ÚT(x, y, i) igaz, visszalép ((x, y, i) és $(z, y, i-1)$ 2. argumentumának egyezéséből látja)
  • Ha hamis akkor kitörli és z értékét eggyel növelve ÚT$(x, z, i-1)$-en dolgozik tovább.
- Ha egyik z se volt jó, akkor ÚT(x, y, i) hamis.

Konfigurációs gráf

Az ÚT$(s, t, \lceil \log n \rceil)$ algoritmus a munkaszalagján $O(\log n)$ darab tagból álló egyenként $O(\log n)$ hosszú (x, y, i) hármast tárol, így ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$.

Konfigurációs gráf

Egy M TG G_M **konfigurációs gráfjának** csúcsai M konfigurációi és $(C, C') \in E(G_M) \Leftrightarrow C \vdash_M C'$.

Elérhetőségi módszer: bonyolultsági osztályok közötti összefüggéseket lehet bizonyítani az ELÉR $\in$ P vagy ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$ tételeket alkalmazva a konfigurációs gráfra, vagy annak egy részgráfjára.

Savitch tétele

Savitch tétele

Ha $f(n) \geq \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Bizonyítás: Legyen M egy $f(n)$ tárigényű NTG és w az M egy n hosszú bemenete.
Ekkor M egy konfigurációját $O(f(n) + \log n)$ tárral eltárolhatjuk (aktuális állapot, a munkaszalagok tartalma, fejek pozíciója, az első szalag fejének pozíciója n féle lehet, ezért $\geq \log n$ tár kell ennek eltárolásához). Ha $f(n) \geq \log n$, akkor ez $O(f(n))$.
Feltehető, hogy M-nek csak egy elfogadó konfigurációja van. (Törölje le a TG a munkaszalagjait, mielőtt q_i-be lép!)
A legfeljebb ekkora méretű konfigurációkat tartalmazó konfigurációs gráf mérete $2^{df(n)}$ valamely $d > 0$ konstansra. Így az előző tétel szerint $O(\log^2(2^{df(n)})) = O(f^2(n))$ tárral egy determinisztikus TG eldönti, hogy
$\text{ÚT}(c_{\text{kezdő}}, c_{\text{elfogadó}}, \lceil \log(2^{df(n)}) \rceil)$ igaz-e.

Savitch tétele

Következmények

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Bizonyítás: polinom négyzete is polinom.

Tétel

NL$\subseteq$ P

Bizonyítás

Legyen $L \in$NL és M L-et $f(n) = O(\log n)$ tárral eldöntő NTG.
Meggondolható, hogy egy n méretű inputra M legfeljebb $f(n)$ méretű szalagtartalmakat tartalmazó konfigurációinak a száma legfeljebb $cnd^{\log n}$ alkalmas c, d konstansokkal, ami egy $p(n)$ polinommal felülről becsülhető. Így a G konfigurációs gráfnak legfeljebb $p(n)$ csúcsa van. G polinom időben megkonstruálható.
Feltehető, hogy G-ben egyetlen elfogadó konfiguráció van. G-ben a kezdőkonfigurációból az elfogadó konfiguráció elérhetősége $O(p^2(n))$ idejű determinisztikus TG-pel eldönthető, azaz $L \in$ P.

L és NL

ELÉR fontos szerepet tölt be az $L \stackrel{?}{=} NL$ kérdés vizsgálatában is.

Tétel

ELÉR $\in$ NL

Bizonyítás: Az M 3-szalagos NTG a (G, s, t) inputra ($n = |V(G)|$) a következőt teszi:

- ráírja s-t a második szalagra
- ráírja a 0-t a harmadik szalagra
- Amíg a harmadik szalagon n-nél kisebb szám áll
  - Legyen u a második szalagon lévő csúcs
  - Nemdeterminisztikusan felírja u helyére egy v ki-szomszédját a második szalagra
  - Ha $v = t$, akkor elfogadja a bemenetet, egyébként növeli a harmadik szalagon lévő számot binárisan eggyel
- Elutasítja a bemenetet
- Mindkét szalag tartalmát $O(\log n)$ hosszú kóddal tárolhatjuk.

L és NL

Log. táras visszavezetés

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre $L_1 \leq_\ell L_2$, ha $L_1 \leq L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus táras determinisztikus (off-line) Turing-géppel

NL-nehéz, NL-teljes nyelv

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \text{NL}$ nyelvre, $L' \leq_\ell L$; ha ráadásul $L \in \text{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Tétel

L zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $L_1 \leq_\ell L_2$ és $L_2 \in \text{NL}$.
Legyen M_2 az L_2-t eldöntő, M pedig a visszavezetésben használt f függvényt kiszámoló logaritmikus táras determinisztikus TG.

L és NL

Az M_1 TG egy tetszőleges u szóra a következőképpen működik

- A második szalagján egy bináris számlálóval nyomon követi, hogy M_2 feje hányadik betűjét olvassa az $f(u)$ szónak; legyen ez a szám i (kezdetben 1)
- Amikor M_2 lépne egyet, akkor M_1 az M-et szimulálva előállítja a harmadik szalagon $f(u)$ i-ik betűjét (de csak ezt a betűt!!!)
- Ezután M_1 szimulálja M_2 aktuális lépését a harmadik szalagon lévő betű felhasználásával és aktualizálja a második szalagon M_2 fejének újabb pozícióját
- Ha eközben M_1 azt látja, hogy M_2 elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M_1 is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába, egyébként folytatja a szimulációt a következő lépéssel

Belátható, hogy M_1 L_1-et dönti el és a működése során csak logaritmikus méretű tárat használ, azaz $L_1 \in \mathrm{L}$.

ELÉR NL-teljessége

Következmény

Ha L NL-teljes és $L \in$ L, akkor L = NL.

Bizonyítás: Legyen $L' \in$NL tetszőleges, ekkor $L \leq_\ell L$ és $L \in$ L, így L logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve zártsága miatt $L' \in$NL. Tehát L=NL.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Bizonyítás:

- Korábban láttuk, hogy ELÉR $\in$ NL
- Legyen $L \in$ NL, megmutatjuk, hogy $L \leq_\ell$ ELÉR
- Legyen M egy L-et eldöntő $O(\log n)$ táras NTG és $|u| = n$
- Az $O(\log n)$ tárat használó konfigurációk $\leq c \cdot \log n$ hosszúak (alkalmas c-re)

ELÉR NL-teljessége; Immerman-Szelepcsényi

- A G_M konfigurációs gráfban akkor és csak akkor lehet a kezdőkonfigurációból az elfogadóba jutni (feltehető, hogy csak 1 ilyen van), ha $u \in L(G)$. Így $L \leq$ ELÉR.

Kell még, hogy a visszavezetés log. tárat használ, azaz G_M megkonstruálható egy log. táras N determinisztikus TG-pel:

- N sorolja fel a hossz-lexikografikus rendezés szerint az összes legfeljebb $c \cdot \log n$ hosszú szót az egyik szalagján, majd tesztelje, hogy az legális konfigurációja-e M-nek, ha igen, akkor a szót írja ki a kimenetre
- Az élek (konfiguráció párok) hasonlóképpen felsorolhatók, tesztelhetők és a kimenetre írhatók

Immerman-Szelepcsényi tétel

NL = coNL

(biz. nélkül)

Hierarchia tétel

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(2^{n^k}).

Tétel

NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.

(biz. nélkül)

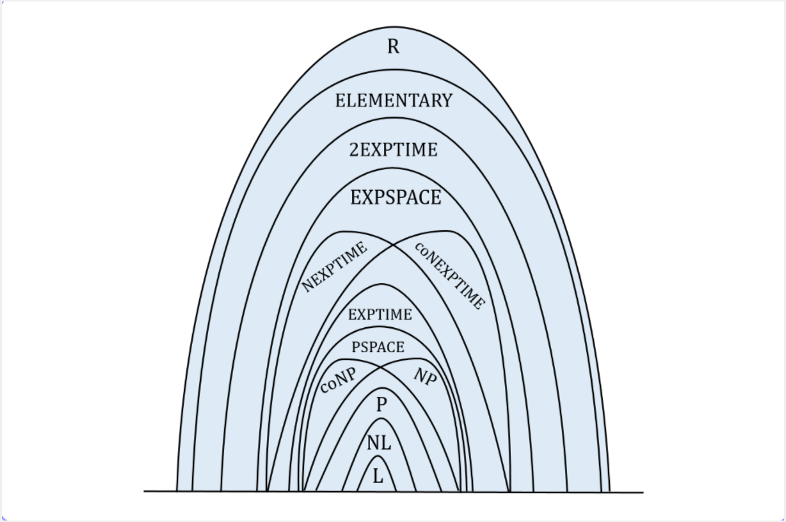
Tétel

L $\subseteq$ NL=coNL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

Bizonyítás: 1 és 4 definíció szerint, 2-es Immerman-Szelepcsényi, 3-ast előbb bizonyítottuk. 5-ös: egy TG-nek "nincs ideje" több tárat használni, mint időt. 6-os: elérhetőségi módszerrel. A használt tárban exponenciális méretű lesz a konfigurációs gráf, a gráf méretében négyzetes (azaz összességében a tár méretében exponenciális) időben tudjuk az elérhetőséget tesztelni a kezdőkonfigurációból az elfogadóba konfigurációba.

Sejtés: Utóbbiban minden tartalmazás valódi.

R szerkezete



R szerkezete P≠NP esetén [ábra: Gazdag Zs. jegyzet]