Gyakorló feladatok a "Logika és számításelmélet" tárgyhoz

A feladatok formalizmusa kissé eltér attól, amit a gyakorlaton és az előadáson megszokhattunk (például az implikációt itt $\rightarrow$ jelöli. Ettől függetlenül úgy gondolom, hogy a feladatok értelemszerűek és gyakorlásra alkalmasak.

1. Írjuk fel az igazságtábláját a kizáró vagynak (p vagy q, de nem mindkettő), majd fejezzük ki ezt a logikai műveletet a $\neg, \vee, \wedge$ műveletek segítségével.
2. Mutassuk meg, hogy a következő formulák tautológiák.
   a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$;
   b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$;
   c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G))$;
   d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F))$.
3. Legyenek F és G formulák. Mutassuk meg, hogy $F \leftrightarrow G$ akkor és csak akkor tautológia, ha $\{F\} \models G$ és $\{G\} \models F$!
4. a) Legyen F egy olyan formula, melyben csak a $\neg$ műveleti jel szerepel. Lehet F tautológia? Indokoljuk a választ!
   b) Legyen F egy olyan formula, melyben csak a $\vee$ műveleti jel szerepel. Lehet F tautológia? Indokoljuk a választ!
5. Tegyük fel, hogy $\models (F \rightarrow G)$, továbbá, hogy F-nek és G-nek nincsen közös ítéletváltozója. Mutassuk meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy $\models G$. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni azt, hogy ne legyen F-nek és G-nek közös ítéletváltozója.
6. Kielégíthetők-e a következő formula halmazok?
   - $\{p, q, p \rightarrow r, \neg r\}$;
   - $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \ldots\}$.
7. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra, amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.
8. Bizonyítsuk be vagy adjunk ellenpéldát!
   a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;
   b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.
9. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz és F, G két formula. Bizonyítsuk be a következőket!
   a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
   b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$;
   c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;
   d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
   e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen!
10. Mutassuk meg, hogy a következő 3 állítás ekvivalens!

a) $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$;

b) $\models (F_1 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G$;

c) $F_1 \wedge \dots \wedge F_k \wedge \neg G$ kielégíthetetlen.

11. Hozzuk konjunktív és diszjunktív normál alakra a következő formulákat:

   a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg r$;

   b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$;

   c) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$;

   d) $(\neg p \rightarrow q) \vee ((p \wedge \neg r) \leftrightarrow q)$;

   e) $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$.

12. Hozzuk konjunktív (diszjunktív) normál alakra a következő formulákat:

   a) $\neg(\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(s \wedge r)) \vee (p \rightarrow \neg s))$;

   b) $((p \vee q \vee r) \wedge \neg p \wedge \neg r) \rightarrow p$;

   c) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow (q \wedge r)))$;

   d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

13. Egy konjunktív normálforma diszjunkciós tagjait klózoknak nevezzük. Egy klóz pozitív (negatív), ha csak pozitív (negatív) literálokat tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha egy klóz halmaz nem tartalmaz pozitív (negatív) klózt, akkor az kielégíthető.

14. Legyen F egy klózhalmaz. Jelölje $Res^0(F)$ az F-et. Továbbá, minden $n > 0$ számra jelölje $Res^n(F)$ a $Res^{n-1}(F)$ halmaznak és a $Res^{n-1}(F)$-ből rezolúcióval megkapható klózok halmazának unióját. Eleme-e az üres klóz a $Res^2(F)$-nek, ha $F = \{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$.

15. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők:

   a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

   b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$;

   c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

16. Adjuk meg a $Res^2(F)$ klózhalmazt!

   a) $F = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{p\}, \{q, r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\}$;

   b) $F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}$.

17. Adjuk meg az üres klóz két különböző lépésszámú, rezolúcióval történő levezetését a következő klózhalmazból:

$$F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{q, \neg p\}, \{p\}\}.$$

   (A lépésszám az üres klóz levezetésekor kapott klózhalmaz számossága.)

18. Minden formulához adjunk meg interpretációt ami kielégíti és olyat is ami nem.

   a) $\forall x \forall y P(x, y, f(z))$;

   b) $\forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$;

   c) $\forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg(y = z)))$.

19. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát amelyet ha kielégít egy iterpretáció, akkor annak az alaphalmaza legalább 3 elemű! Az $=$ reláció felhasználható. Adjunk meg olyan formulát is, amelyben a predikátumszimbólumok legfeljebb egyváltozósak (az $=$ így nem használható).

20. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát amelyet ha kielégít egy iterpretáció, akkor annak az alaphalmaza legfeljebb 2 elemű! Az $=$ reláció felhasználható.

21. Tekintsük az

$$\begin{array}{lll} F_1 & = & \forall x p(x,x) \\ F_2 & = & \forall x \forall y p(x,y) \to p(y,x) \\ F_3 & = & \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z) \end{array}$$

formulákat. Mutassuk meg, hogy semelyik F_i nem következménye a másik kettőnek.

22. Az alábbi interpretációk közül melyik elégíti ki és melyik nem a $\exists x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(z,x))$ formulát?

   a) $U = \{0,1,2,\ldots\}(= N)$, minden $m, n \in N$-re $I(p)(m,n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$,

   b) $U = N$, minden $m, n \in N$-re $I(p)(m,n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$,

   c) $U = 2^N$, minden $A, B \subseteq N$-re $I(p)(A,B) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

23. Adjunk meg olyan F formulát, amelyben egy kétváltozós f függvény és az $=$ reláció van, és F azt fejezi ki, hogy az alaphalmaznak van egységeleme az f-re nézve.

24. Adjunk meg olyan F formulát, amelyben egy kétváltozós f függvény és az $=$ reláció van, és F azt fejezi ki, hogy az alaphalmaz minden elemének van inverze az f-re nézve. (Használd az e konstanst a formulában, mint azt az elemet, ami az alaphalmaz egységelemét jelöli.)

25. Mutassuk meg, hogy a következő formulák érvényesek.

   a) $\forall x(F \to G) \to (\forall x F \to \forall G)$,

   b) $\forall x(F \to G) \to (\exists x F \to \exists G)$,

   c) $\forall x(F \to G) \to (\forall x F \to \exists G)$.

26. Mutassuk meg, hogy a következő formulák közül melyik érvényes, melyik nem. Amelyik nem érvényes ahhoz adjunk meg olyan interpretációt, amely nem elégíti ki.

   a) $\exists x \forall y((p(x,y) \wedge \neg p(y,x)) \to (p(x,x) \leftrightarrow p(y,y)))$

   b) $\forall x \forall y \forall z(p(x,x) \wedge (p(x,z) \to (p(x,y) \vee p(y,z)))) \to \exists y \forall z p(y,z)$.

   c) $\neg(p(x) \wedge p(y)) \to (\neg p(x) \vee \neg p(y))$.