Számításelmélet defek, tételek

1. Church-Turing tézis

A kiszámíthatóság küönböző matematikai modelljei mind az effektíven kiszámítható függvények osztályát definiálják.

2. Tétel (Church, 1936)

Két λ-kalkulusbeli kifejezés ekvivalenciája algoritmikusan eldönthetetlen.

3. Tétel (Turing, 1936)

Turing-gépek megállási problémája algoritmikusan eldönthetetlen.

4. Turing gép

Turing gépnek nevezünk egy
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetest, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$ rendre a kezdő-, elfogadó-, elutasítóállapotok,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek, illetve szalagszimbólumok ábécéi, melyekre $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ az átmeneti függvény.

5. Konfiguráció

- Adott TG egy **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*, v \neq \varepsilon$
- A gép egy $u \in \Sigma^*$ szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. Azaz $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$ egyébként.
- **elfogadó konfigurációi** azon konfigurációk, melyekre $q = q_i$
- **elutasító konfigurációi** azon konfigurációk, melyekre $q = q_n$
- **megállási konfiguráció**k az elfogadó és elutasító konfigurációk

6. Egylépéses konfigurációátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát.
Ekkor az M-nek $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet-relációját** az alábbiak szerint definiáljuk egy adott $uqav$ konfiguráció ($a \in \Gamma \quad u, v \in \Gamma^*$) esetén:

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$ akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol

- ha $v \neq \varepsilon$, akkor $v' = v$
- ha $v = \varepsilon$, akkor $v' = \sqcup$

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$
- Ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol
  - $c \in \Gamma$
  - ha $u \neq \varepsilon$, akkor $u'c = u$,
  - ha $u = \varepsilon$, akkor $u' = u$ és $c = \sqcup$

7. Többlépéses konfigurációátmenet

A többlépéses konfigurációátmenet a $\vdash$ reflexív, tranzitív, lezártja, azaz
$\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$, és
$C \vdash^* C' \iff$

- $C = C'$, vagy
- $\exists 0 < n \in \mathbb{N}, \exists C_1, C_2, \ldots, C_n \in C_M : i = 1, \ldots, n-1 : C_i \vdash C_{i+1}, C_1 = C, C_n = C'$

8. Turing gép által felismert nyelv

Az M TG által felismert $L(M)$ nyelv:

$$L(M) = \{u \in \Sigma^* | \quad q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y, \quad x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon\}$$

9. Felismerhetőség, eldönthetőség

- Amh.: egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha létezik M TG, melyre: $L = L(M)$
- Amh.: egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut, és $L = L(M)$

A Turng-felismerhető nyelveket szokás **rekurzívan felsorolható**nak (RE), az eldönthető nyelveket pedig **rekurzív**nak (R) is nevezni.

10. futási idő, időigény

- Egy M TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szón $n \in \mathbb{N}$, ha az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból n lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba.
  Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje u-n végtelen.
- Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy fgv. Ekkor amh.: M-nek **időigénye** az $f(n)$ (azaz M $f(n)$ időkorlátos), ha minden $u \in \Sigma^*$ inputszóra, M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.

11. k-szalagos TG

k-szalagos Turing gépnek nevezünk egy
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetest, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$ rendre a kezdő-, elfogadó-, elutasítóállapotok,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek, illetve szalagszimbólumok ábécéi, melyekre $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ az átmeneti függvény. (csak itt van eltérés a sima TG-től)

12. k-szalagos konfiguráció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k)$ szó, ahol

- $q \in Q$
- $u_i, v_i \in \Gamma^* \quad (i = 1, \dots, k)$
- $v_i \neq \varepsilon \quad (i = 1, \dots, k)$

13. k-szalagos kezdőkonfiguráció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfigráció**: $(q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \sqcup, \dots, \varepsilon, \sqcup)$

14. k-szalagos elfogadó, elutasító, megállási konfiguráció

Egy $(q, u, u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ konfiguráció $(q \in Q; u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon \quad (i = 1, \dots, k))$

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,
- **elutasítási konfiguráció**, ha $q = q_n$
- **megállási konfigurcáió**, ha elfogadó, vagy elutasító.

15. k-szalagos TG által felismert nyelv

$$L(M) = \{u \in \Sigma^* | (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \dots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k), x_i, \varepsilon \neq y_i \in \Gamma^* \quad (i = 1, \dots, k)\}$$

16. k-szalagos futási idő

Egy k-szalagos M TG **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett $n \in \mathbb{N}$ lépésszám.
Az **időigény** definíciója a sima TG-ével megegyező.

17. TG-k ekvivalenciája

Amh.: két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

18. Tétel: egy és k szalagos TG ekvivalenciája

Minden M k-szalagos TG-hez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos TG.
Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű, $O(f(n))$ időkorlátos gép, akkor $M' \quad O(f^2(n))$ időkorátos.

19. egy irányban végtelen szalagos TG

- Az egyirányban végtelen szalagos TG egy, a bal oldalán zárt szalaggal rendelkezik
- A fej nem tud „leesni” a bal oldalon, még ha az állapotátmeneti fgv. balra lépést ír is elő a legbaloldalibb cellán, ilyenkor a fej helyben marad.

20. Tétel: egy irányban végtelen szalagos TG

Minden egyszalagos M TG-hez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' TG.

21. Nemdeterminisztikus Turing-gép (NTG)

A **nemdeterminisztikus Turing-gép (NTG)** egy olyan
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$ rendre a kezdő-, elfogadó-, elutasítóállapotok,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek, illetve szalagszimbólumok ábécéi, melyekre $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\})$ az átmeneti függvény. (csak itt van eltérés a sima TG-től)

22. NTG egylépéses konfigurációátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát.
Ekkor az M-nek $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet-relációját** az alábbiak szerint definiáljuk adott $uqav$ konfiguráció ($a \in \Gamma; u, v \in \Gamma^*$) esetén:

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$ akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol
  - Ha $v \neq \varepsilon$, akkor $v' = v$
  - Ha $v = \varepsilon$, akkor $v' = \sqcup$
- Ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$
- Ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol
  - $c \in \Gamma$
  - ha $u \neq \varepsilon$, akkor $u'c = u$,
  - ha $u = \varepsilon$, akkor $u' = u$ és $c = \sqcup$

23. NTG többlépéses konfigurációátmenet

A többlépéses konfigurációátmenet a $\vdash$ reflexív, tranzitív, lezártja, azaz
$\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$, és
$C \vdash^* C' \iff$

- $C = C'$, vagy
- $\exists 0 < n \in \mathbb{N}, \exists C_1, C_2, \dots, C_n \in C_M : i = 1, \dots, n-1 : C_i \vdash C_{i+1}, C_1 = C, C_n = C'$

24. NTG által felismert nyelv

Az M TG által felismert $L(M)$ nyelv:

$$L(M) = \{u \in \Sigma^* | \quad q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y, \quad x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon\}$$

Fontos, hogy egy NTG-nek tübb számítása is lehet ugyanarra a szóra. Akkor fogad el egy szót, ha legalább egy számítása q_i-ben ér véget.

25. inputszó nemdeterminisztikus számítási fája

Adott $u \in \Sigma^*$ inputszó **számítási fája** olyan irányított fa, melynek:

- csúcsai konfigurációkkal címkézettek
- a gyökér címkéje a kezdőonfiguráció $q_0 u \sqcup$
- Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' : C \vdash C'\}|$ számú gyermeke van és ezek címkéi éppen $\{C' : C \vdash C'\}$ elemei.

26. Eldöntés (NTG)

Az M NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet

- ha felismeri, és
- minden $u \in \Sigma^*$ szóra az M számítási fája véges, és
- minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

27. Időigény (NTG)

Az M NTG $f(n)$ időignyű, ha minden $u \in \Sigma^*, |u| = n \in \mathbb{N}$ szóra a számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

28. Tétel: TG és NTG

Minden M $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy vele ekvivalens $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG

29. Halmazok számossága

- Amh.: az A és B halmazok számossága megegyezik, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Jel.: $|A| = |B|$
- Amh.: A halmaz számossága legalább annyi, mint a B halmaz számossága, ha $\exists f : B \to A$ injektív leképezés.
  Jel.: $|A| \geq |B|$.
- Amh.: A halmaz számossága (szigorúan) nagyobb, mint a B halmaz számossága, ha $\exists f : B \to A$ injektív leképezés, de ezek közül egyik sem bijektív.
  Jel.: $|A| > |B|$

30. Cantor-Bernstein tétel

Tétel. Ha A-ból van injektív leképezés B-be, és van B-ből A-ba is, akkor A és B között bijekció is van. Speciálisan ez azt jelenti, hogy ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \geq |B|$, akkor $|A| = |B|$.

31. Megszámlálhatóan végtelen számosság

A(z) $\mathbb{N}$ számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük.
Egy halmazt pedig, **megszámlálható**nak nevezünk, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen

32. Megszámlálható halmazok úniója

Tétel. Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz úniója is megszámlálható.

33. Continuum számosság

A(z) $\mathbb{R}$ számosságát **continuum**nak nevezzük (megszámlálhatatlanul végtelen).

34. Continuum számosságra von. állítások

Tétel. A continuum számosság nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen számosság.
Következmény. Több $\{0, 1\}$ feletti nyelv van mint $\{0, 1\}$ feletti szó (számosság értelemben).

35. Halmaz hatványhalmazának számossága

Tétel. Tetszőleges H halmazra: $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

36. Szófüggvényt kiszámító TG

Amh.: az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ TG kiszámítja az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha $\forall u \in \Sigma^*$ szóra megáll, és ekkor utolsó szalagján az $f(u) \in \Delta^*$ szó olvasható.

37. Eldöntési, kiszámítási probléma

Ha I egy bemenet melynek kódját az $\langle I \rangle$ jelöli, akkor

- Eldöntési problémának nevezzük annak eldöntését, hogy:
  $L = \{\langle I \rangle : I$ a probléma igen példánya$\}$ eldönthető-e TG-el.
- Kiszámítási problémának nevezzük annak eldöntését, hogy:
  Van-e olyan TG, ami f-t, ill. $\langle I \rangle \mapsto \langle f(I) \rangle$ függvényt kiszámítja.

38. TG-k elkódolása

Tfh.: $\Sigma = \{0, 1\}$. Ekkor egy M TG **kódját** (jel.: $\langle M \rangle$) a következőképpen definiáljuk:
Legyen $M = \langle Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}, \Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}, D_1 = R, D_2 = S, D_3 = L;$
- $k \geq 3, \quad p_1 = q_0, p_{k-1} = q_i, p_k = q_n;$
- $m \geq 3, \quad X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = \sqcup.$

$\Rightarrow$ Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja: $0^i10^j10^r10^s10^t$

$\Rightarrow$ Az $\langle M \rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

Ha pedig w egy {0,1} feletti szó, akkor $\langle M, w \rangle := \langle M \rangle 111w$

39. Spec nyelvek felismerhetősége, eldönthetősége

1. $L_{\text{átló}} = \{\langle M \rangle | \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$
2. $L_u = \{\langle M, w \rangle | w \in L(M)\} \in RE,$ de $L_u \notin R$
3. $L_h = \{\langle M, w \rangle | M$ megáll a w bemeneten$\} \in RE,$ de $L_h \notin R$

40. Komplementer

- **Definíció.** Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor $\bar{L} := \{u \in \Sigma^* | u \notin L\}$
- **Tétel.** Ha $L \in RE$ és $\bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$.
- **Következmény.** RE nem zárt a komplementerképzésre.
- **Tétel.** R zárt a komplementerképzésre.

41. Kiszámítható szófüggvény

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt **kiszámítható**, ha van olyan TG, ami kiszámítja.

42. Visszavezetés

Amh.: $L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** az $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, melyre: $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jel.: $L_1 \leq L_2$

43. Visszavezetés és felismerhetőség/eldönthetőség kapcsolata

- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin RE$, akkor $L_2 \notin RE$.
- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$.

44. Rekurzíve felsorolható nyelvek tulajdonságai

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük.
A $\mathcal{P}$ triviális, ha $\mathcal{P} = \varnothing$ vagy $\mathcal{P} = RE$

45. Rice tétel, és következményei

- **Definíció.** $L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle | L(M) \in \mathcal{P}\}$
- **Tétel(Rice).** Ha $\mathcal{P} \subseteq RE$ egy nem triviális tulajdonság, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$
- **Következmény.** Eldönthetetlen, hogy egy M TG
  - az üres nyelvet ismeri-e fel ($\mathcal{P} = \{\varnothing\}$),
  - véges nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L : L \text{ véges}\}$),
  - környezetfüggetlen nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L : L \text{ környezetfüggetlen}\}$),
  - elfogadja-e az üres szót ($\mathcal{P} = \{L \in RE : \varepsilon \in L\}$).

46. Post megfelelkezési probléma

- Legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^+ \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$.
  A $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ halmazt **dominókészlet**nek nevezzük, ha $d_i = \left[\frac{u_i}{v_i}\right] \quad (i = 1, \ldots, n)$.
  A $d_{i_1}, \ldots, d_{i_m} \quad (1 \leq m \in \mathbb{N})$ a D egy **megoldása**, ha $d_{i_j} \in D \quad (j = 1, \ldots, m)$ és
  $u_{i_1}, \ldots, u_{i_m} = v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$.
- **Definíció.** $L_{\text{PMP}} = \{\langle D \rangle : D\text{-nek van megoldása}\}$ (Post Megfelelkezési Probléma).
- **Tétel.** $L_{\text{PMP}} \in RE$
- **Tétel.** $L_{\text{PMP}} \notin R$

47. CF nyelvtanokkal kapcsolatos problémák

- Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) nyelvtan **egyértelmű**, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (Baloldali levezetés: mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)
- **Definíció.** $L_{\text{ECF}} = \{\langle G \rangle : G \text{ egy egyértelmű CF nyelvtan}\}$.
- **Tétel.** $L_{\text{ECF}} \notin R$
- **Tétel.** Eldönthetetlenek az alábbi CF nyelvtanokkal kapcsolatos kérdések:
  Ha G_1, G_2 két CF nyelvtan, akkor
  - $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \varnothing$
  - $L(G_1) = \Gamma^*$, valamely Γ ábécére
  - $L(G_1) = L(G_2)$
  - $L(G_1) \subseteq L(G_2)$

48. Elsőrendű logikával kapcsolatos problémák

- **Tétel.** Eldönthetetlen, hogy az A elsőrendű logikai formulára $\models A$ teljesül-e (logikailag igaz-e).
- **Következmény.** Legyen $\mathcal{F}$ egy elsőrendű formulahalmaz, és A egy elsőrendű formula. Ekkor eldönthetetlen, hogy:
    1. A kielégíthetetlen-e,
    2. A kielégíthető-e,
    3. $\mathcal{F} \models A$ teljesül-e.

49. Bonyolultságelméleti alapfogalmak

- $\mathrm{TIME}(f(n)) = \{L : L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű determinisztikus TG-el$\}$
- $\mathrm{NTIME}(f(n)) = \{L : L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű NTG-el$\}$
- $\mathrm{P} = \bigcup_{k\leq 1} \mathrm{TIME}(n^k)$
- $\mathrm{NP} = \bigcup_{k\leq 1} \mathrm{NTIME}(n^k)$.
- Észrevétel: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.
- Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$

50. Polinom időben kiszámítható szófüggvény

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan polinom időigényű TG, mely kiszámítja.

51. Visszavezetés polinom időben

Az $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **polinom időben visszavezethető** valamely $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre (jel.: $L_1 \leq_p L_2$), ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy:

$$w \in L_1 \Longleftrightarrow f(w) \in L_2$$

52. Tétel: Visszavezetés kapcsolata a P, és NP osztályokkal

- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{P}$, akkor $L_1 \in \mathrm{P}$
- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$, akkor $L_1 \in \mathrm{NP}$

53. Adott problémaosztályra nehéz nyelv

Legyen $\mathcal{C}$ (cé) egy problémaosztály. Egy L problémát $\mathcal{C}$-**nehéz**nek nevezünk (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha

$$\forall L' \in \mathcal{C} : L' \leq_p L$$

54. Adott problémaosztályban teljes nyelv

Amh.: egy L probléma (nyelv) $\mathcal{C}$-**teljes**, ha

- L $\mathcal{C}$-nehéz, és
- $L \in \mathcal{C}$

55. Tétel: P=NP egy elégséges feltétele

Legyen L egy NP-teljes probléma. Ha $L \in \mathrm{P}$, akkor $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

56. SAT probléma

- **Definíció.** $\mathrm{SAT} = \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ kielégíthető nulladrendű KNF$\}$
- **Tétel(Cook).** SAT NP-teljes.

57. NP-teljes problémák

Tétel. Ha L NP-teljes, $L \leq_p L'$ és $L' \in \mathrm{NP}$, akkor L' NP-teljes.

- **Definíció.** $k\mathrm{SAT} = \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ kielégíthető KNF, és minden tagban k különböző literál van$\}$
- **Tétel.** 3SAT NP-teljes.
- **Tétel.** $3\textsc{Szinezes} = \{\langle G\rangle : G$ 3-színezhető gráf$\}$ NP-teljes.

58. 3 irányítatlan gráfokkal kapcsolatos probléma

Az alábbi nyelvek esetén G egyszerű, irányítatlan grág k pedig egy nemnegatív egész.
G egy teljes részgráfját **klikk**nek, egy üres részgráfját **független ponthalmaz**nak nevezzük.

- $\textsc{Klikk} = \{\langle G, k\rangle : G$-nek van k méretű klikkje$\}$
- $\textsc{FuggetlenPonthalmaz} = \{\langle G, k\rangle : G$-nek van k méretű független ponthalmaza$\}$

Legyen $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ és $E \in \mathrm{E}(G)$.
Ha $S \cap E \neq \varnothing$, akkor amh. a csúcshalmaz **lefogja** E-t.
Ha S minden $E \in \mathrm{E}(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó ponthalmaz**

- $\textsc{LefogoPonthalmaz} = \{\langle G, k\rangle : G$-nek van k méretű lefogó ponthalmaza$\}$
- **Tétel.** Klikk, FuggetlenPonthalmaz, LefogoPonthalmaz NP-teljes.

59. Hipergráf

$\mathcal{S}$ egy **hipergráf** (másnéven halmazrendszer), ha $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, ahol $A_i \subseteq U \quad (i = 1, \ldots, n)$, valamely U alaphalmazra.
Amh.: valamely $H \subseteq U$ egy **lefogó ponthalmaz**, ha $H \cap A_i \neq \varnothing \quad (i = 1, \ldots, n)$.

- $\textsc{HipergrafLefogoPonthalmaz} = \{\langle \mathcal{S}, k\rangle : \mathcal{S}$ hipergráfhoz, van k elemű lefogó ponthalmaz$\}$
- **Tétel.** HipergrafLefogoPonthalmaz NP-teljes.

60. Hamilton út/kör

Legyen adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan [irányított] gráf, melyre $|V| = n$.
Egy $P = v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ felsorolását a csúcsoknak **Hamilton út**nak nevezzük, ha

- $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\} = V$, és
- $\{v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\} \in E$ $[(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E]$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.

Ha még $\{v_{i_n}, v_{i_1}\} \in E$ $[(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E]$ is teljesül, akkor P **Hamilton kör**.

61. HÚ, IHÚ, IHK

- $\text{HU} = \{\langle G, s, t\rangle : G$ irányított gráfban, van s-ből t-be H-út$\}$
- $\text{IHU} = \{\langle G, s, t\rangle : G$ irányítatlan gráfban, van s-ből t-be H-út$\}$
- $\text{IHK} = \{\langle G, s, t\rangle : G$ irányítatlan gráfban, van H-kör$\}$
- **Tétel.** HU, IHU, IHK NP-teljes.

62. Utazóügynök probléma

- *Számítási (optimalizálási) verzó:* Adott egy G élsúlyozott irányítatla gráf, nemnegatív élsúlyokkal. Határozzuk meg a legkisebb összsúlyú H-kört (ha van).
- *Eldöntési verzió:* $\text{TSP} = \{\langle G, K\rangle : G$-ben van legfeljebb K súlyú H-kör$\}$
- **Tétel.** TSP NP-teljes.

63. NP-köztes nyelvek

- **Definíció.** L egy NP-köztes nyelv, ha $L \in \text{NP}, L \notin \text{P}$ és L nem NP-teljes.
- **Tétel(Ladner).** Ha $\text{P} \neq \text{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

Ha $\text{P} \neq \text{NP}$, akkor a következő nyelvek lehetnek NP-köztes nyelvek:

- $\textsc{Grafizomorfizmus} = \{\langle G_1, G_2\rangle :\ G_1, G_2$ irányítatlan izomorf gráfok$\}$
- $\textsc{Primfaktorizacio}$: adjuk meg egy egész szám prímtényezős felbontását [számítási feladat].

64. coC

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály, akkor $\text{co}\mathcal{C} = \{L : \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

65. Bonyolultsági osztály és polinom idejű visszavezetés

Amh.: $\mathcal{C}$ **zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben:

$$L_2 \in \mathcal{C} \text{ és } L_1 \leq_p L_2 \quad \Longrightarrow \quad L_1 \in \mathcal{C}$$

66. coC tételek

- **Tétel.** Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve, akkor $\text{co}\mathcal{C}$ is.
- **Következmény.** coNP zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve.
- **Tétel.** L $\mathcal{C}$-teljes $\Longleftrightarrow$ $\bar{L}$ $\text{co}\mathcal{C}$-teljes.

67. Példák coNP-teljes nyelvekre

- $\text{UNSAT} := \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$
- $\text{TAUT} := \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ nulladrendű formula tautológia$\}$
- **Tétel.** UNSAT és TAUT coNP-teljesek.

Informálisan: coNP tartalmazza a polinom időben cáfolható problémákat.

68. Off-line TG

Az **off-line TG** egy legalább 3 szalagos gép, melynek:

- első szalagja csak olvasható,
- utolsó szalagja csak írható,
- a további szalagok(at) munkaszalagok(nak nevezzük).

69. Off-line TG-ek tárigénye

Az off-line TG **tárigénye** egy adott inputra a munkaszalagjain felhasznált cellák száma.
Egy TG $f(n)$ **tárkorlátos**, ha bármely $u \in \Sigma^*$ inputra legfeljebb $f(|u|)$ tárat használ.

70. Tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}(f(n)) = \{L : L$ eldönthető $O(f(n))$ tárkorlátos, determinisztikus off-line TG-el$\}$
- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) = \{L : L$ eldönthető $O(f(n))$ tárkorlátos, nemdeterminisztikus off-line TG-el$\}$
- $\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{SPACE}(n^k)$
- $\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{NSPACE}(n^k)$
- $\mathrm{L} = \mathrm{SPACE}(\log(n))$.
- $\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log(n))$.

71. Az ELÉR probléma

- $\mathrm{ELER} = \{\langle G, s, t\rangle :$ A G irányított gráfban van s-től t-be út$\}$
- **Tétel.** $\mathrm{ELER} \in \mathrm{SPACE}(\log^2(n))$.

72. Konfigurációs gráf

Egy M TG-hez tartozó G_M **konfigurációs gráf** olyan gráf, hogy:

- csúcsai M konfigurációi, és
- $(C_1, C_2) \in \mathrm{E}(G_M) \iff C_1 \vdash C_2$

73. Savitch tétele

- **Tétel(Savitch).** Ha $f(n) \geq \log(n)$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.
- **Következmény.** $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$
- **Tétel.** $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

74. ELÉR NL-beli

Tétel. $\mathrm{ELER} \in \mathrm{NL}$

75. Log táras visszavezetés

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre ($L_1 \leq_\ell L_2$), ha:

- $L_1 \leq L_2$, és
- a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus tárigényű determinisztikus (off-line) TG-el.

76. NL-nehéz, NL-teljes nyelv

Egy L nyelvet **NL-nehéz**nek mondunk (a log. táras visszavezetésre nézve), ha

$$\forall L' \in \mathrm{NL} : L' \leq_\ell L$$

Ha még $L \in \mathrm{NL}$, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve).

77. Log tárral való visszavezetésre von. tételek

- **Tétel.** Az L tárbonyolultsági osztály zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve.
- **Következmény.** Ha az L nyelv NL teljes, akkor L = NL

78. ELER NL-teljessége

Tétel. ELER NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

79. Immerman-Szelepcsényi tétel

Tétel. NL = coNL

80. Hierarchia tételek

- **Definíció.** EXPTIME := $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{n^k})$
- **Tétel.** NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.
- **Tétel.** L $\subseteq$ coNL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME.