I. Gyakorlat

Nagyságrendileg nem nagyobb

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f \in O(g)$, $f(n) \in O(g(n))$, $f = O(g)$

→ f nagyságrendileg nem ~~na~~ nagyobb g-nél

$\exists c \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$

→ van olyan N küszöbindex, melyre ez teljesül

Példa:

f	g	
$n+2$	$5n$	$N=1$, $c=1$
$5n$	$n+2$	$N=1$, $c=5$
$5n$	n^2	$N=5$, $c=1$

Nagyságrendileg nem kisebb

$f \in \Omega(g)$ → f nagyságrendileg nem kisebb g-nél

$\exists c \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$

Nagyságrendileg határozottan kisebb

$f \in O(g) \wedge f \notin \Omega(g) \Rightarrow f \in o(g)$ → f nagyságrendileg hat. k. mint g

Nagyságrendileg határozottan nagyobb

$f \in \omega(g) \Leftarrow f \notin O(g) \wedge f \in \Omega(g)$

másik jel: $f \gg g$

Nagyságrendileg egyenlő

$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 \cdot |g(n)|$

$\boxed{T}$ Ezek a tulajdonságok tranzitívak

$\boxed{T}$ Konstans 0 (nulla) fv. mindennél kisebb nagyságrendileg

- $0 \ll c \quad , \quad c \neq 0$
- jel.: $\Theta(1)$

Bármely fv.-re:

$$f \in \Theta(a \cdot f + b)$$

$\rightarrow$ akkor $a \neq 0$

Tulajdonságok

- $f+g \in \Theta(f) \Longleftrightarrow g \in o(f)$
- logaritmus fv.-ek $\ll n$

  ↳ $\lg(n) \ll n$
- $\underset{\Theta(1)}{0} \ll c \ll \lg(n) \ll \underbrace{n \ll n^k}_{k \geq 2} \ll n^{k+1} \ll c^n \; (c \neq 0)$

↳ exponenciális fv. a legnagyobb, ha kitevője >1

Szorgalmi

Van 12 külsőre megkülönböztethetetlen 12 golyó

- ebből 11 egyforma súlyú
- egy egy picit eltér → 2 karú mérleg által meghatározható

  ↳ nem tudjuk, könnyebb-e /nehezebb
- kell: 3 mérésből: melyik az a golyó, könnyebb/nehezebb

Számozott golyók

↳ előre mondd meg, melyeket fogod lemérni a mérés során

8. Gyakorlat

1) Állítás

$x \in \mathbb{R}^+ : x \le 2^x$

Biz.:

Segédtétel: $n \in \mathbb{N} : n+1 \le 2^n$

Biz.: teljes indukcióval

- $0+1 = 1 \le 2^0$ ✓
- tfh. hogy $i \in \mathbb{N}$-ig igaz az áll.: $n = i$-ig ✓
- $n = i+1$-re:

$$(i+1)+1 \le 2\cdot(i+1) \le 2\cdot 2^i = 2^{i+1}$$

Tehát: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists n \in \mathbb{N} : n \le x \le n+1$

$$x \le n+1 \le 2^n \le 2^x \quad \blacksquare$$

2. Állítás

$\forall c > 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : \underline{2}^* \le c^n$

Biz.: $\varepsilon := c - 1 > 0$

$$c^n = (1+\varepsilon)^n = 1 + n\cdot\varepsilon + \underbrace{\delta}_{>0} \qquad N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \blacksquare$$

Mj.: Bármilyen x-et írhatunk volna 2^* helyére, az esetben: $N := \left\lceil \frac{x-1}{\varepsilon} \right\rceil$.

3. Állítás

$k \in \mathbb{N},\ c > 1 \Longrightarrow n^k \in O(c^n)$

Biz.: 2-es állításhoz tartozó küszöbindex

$$N^{(2)} : 2 \le c^n \ (n \ge N);\quad n \ge N\cdot k : n^k = (N\cdot k)^k \cdot \left(\frac{n}{N\cdot k}\right)^k \le$$

$$\le (N\cdot k)^k \cdot \left(2^{\frac{n}{N\cdot k}}\right)^k = (N\cdot k)^k \cdot 2^{\frac{n}{N}} \le (N\cdot k)^k \cdot (c^n)^{\frac{n}{N}} =$$

1. állítás felhasználása

$$= \underline{(N\cdot k)^k} \cdot c^n \ ✓ \quad \blacksquare$$

8. Gyakorlat

1. Állítás

$x \in \mathbb{R}^+ : x \le 2^x$

Biz.:

Segédtétel: $n \in \mathbb{N} : n+1 \le 2^n$

Biz.: teljes indukcióval

- $0+1 = 1 \le 2^0$ ✓
- tfh. hogy $i \in \mathbb{N}$-ig igaz az áll.: $n = i$-ig ✓
- $n = i+1$-re:

$$(i+1)+1 \le 2\cdot(i+1) \le 2\cdot 2^i = 2^{i+1}$$

Tehát: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists n \in \mathbb{N} : n \le x \le n+1$

$$x \le n+1 \le 2^n \le 2^x \quad \blacksquare$$

2. Állítás

$\forall c > 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : \underline{2}^* \le c^n$

Biz.: $\varepsilon := c-1 > 0$

$$c^n = (1+\varepsilon)^n = 1 + n\cdot\varepsilon + \underbrace{\sigma}_{>0} \qquad N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \blacksquare$$

Mj.: Bármilyen x-et írhatnánk valami 2^* helyére, az esetben: $N := \left\lceil \frac{x-1}{\varepsilon} \right\rceil$.

3. Állítás

$k \in \mathbb{N},\ c > 1 \Longrightarrow n^k \in O(c^n)$

Biz.: 2-es állításhoz tartozó küszöbindex

$$N^{(2)} : 2 \le c^n \ (n \ge N); \quad n \ge N\cdot k : n^k = (N\cdot k)^k \cdot \left(\frac{n}{N\cdot k}\right)^k \le$$

$$\le (N\cdot k)^k \cdot \left(2^{\frac{n}{N\cdot k}}\right)^k = (N\cdot k)^k \cdot 2^{\frac{n}{N}} \le (N\cdot k)^k \cdot (c^N)^{\frac{n}{N}} =$$

1. állítás felhasználása

$$= \underline{(N\cdot k)^k} \cdot c^n \ ✓ \quad \blacksquare$$

4. Állítás

$k \in \mathbb{N},\ c > 1:\ n^k \notin \Omega(c^n)$

(k nem nagyságrendileg nem kisebb mint c)

Biz: Indirekt!

Tfh. $n^k \in \Omega(c^n): \exists d_1 \in \mathbb{R}^+, N_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: n^k \geq d_1 \cdot c^n$

$\exists c_1: 1 < c_1 < c \overset{\uparrow\ 3.\text{áll.}}{:} \exists d_2 \in \mathbb{R}^+, N_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: n^k \leq d_2 \cdot c_1^n$

$\forall n \geq \max(N_1, N_2): d_1 \cdot c^n \leq n^k \leq d_2 \cdot c_1^n$

$\Rightarrow \left(\frac{c}{c_1}\right)^n \leq \frac{d_2}{d_1}$ 2 $\lightning$

↑ kivatkozás 2. állítására

Végtelen halmazok számossága

Két végtelen halmaz azonos számossága

$|A| = |B|$ ha létezik bijekció A és B között

$A' \subseteq A \Rightarrow |A'| \leq |A|$

↳ ha A' részhalmaza A-nak számossága kisebb-egyenlő

Tulajdonságok:

$A' \subseteq A,\ B' \subseteq B,\ |A'| = |B|,\ |B'| = |A| \Rightarrow |A| = |B|$

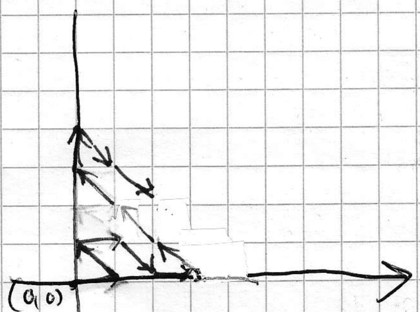
Megszámlálható végtelen halmazok

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

mivel $\exists$ bijekció köztük $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}: f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}: g(z) = \begin{cases} 2z, & \text{ha } z > 0 \\ -2 \cdot z - 1, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$



Állítás

I. $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{R}|$ ✓

II. $|\mathbb{N}| \ne |\mathbb{R}|$

$\Big\} \Longrightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Biz.: Indirekt!

Tfh. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = |H|$

$H = \{ h_0, h_1, h_2, \dots \}$ $\quad x := x^{(k)} = \overline{h_k^{(k)}}$

$x \in H \Longrightarrow \exists N \cdot x = h_N \quad h_N^{(N)} = x^{(N)} = \overline{h_N^{(N)}}$ ↯

ellentmondás!

Szorgalmi: ugyan az

9. Gyakorlat

1/ – $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ közötti bijekció

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & \text{ha páratlan} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad g(z) = \begin{cases} 2 \cdot z, & \text{ha } z \geq 0 \\ -2 \cdot z - 1, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$$

Turing-gép

- Állapotok halmaza
  - véges, legalább 3 elemű

    $3 \leq |Q| < +\infty$
- Ábécé
  - véges, legalább 1 elemű

    $1 \leq |\Sigma| < +\infty$
- Szalagábécé

  $2 \leq |\Gamma| < +\infty$; $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$
- Input ábécé
- Állapotok

  alapáll.? elutasító

  $q_0, q_i, q_n \in Q$

  elfogadó
- ~~ala~~

  $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \underbrace{\{L, R\}}_{\text{irányok (left, right)}}$

Pl.:

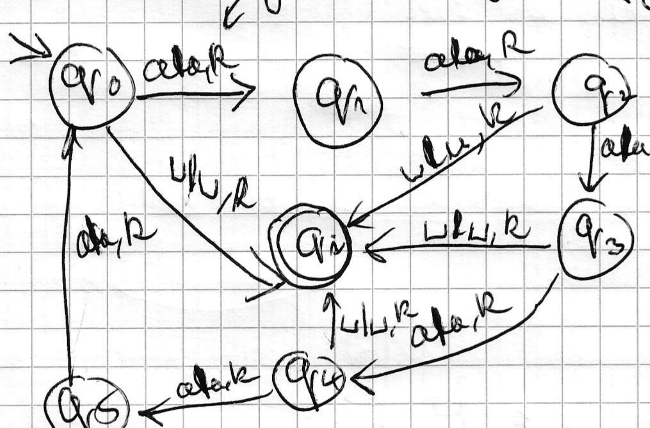
$\sqcup | \sqcup | x_1 | \dots | x_n | \sqcup | \sqcup$

↑ író/olvasó fej

- beolvassa a szalagábécé egy tagját
- ezt átírhatja is
- elfogadja/nem
- majd elmozdul jobbra vagy balra
- elfogadja a szót: q_i állapotba kerül
  ↳ általa elfogadott nyelvbe tartozik, akkor jó.
- elutasítja a szót: q_n állapotba kerül
- felismer egy nyelvet, ha minden szavát elfogadja és amit nem, az nem tartozik a nyelvbe

Példa

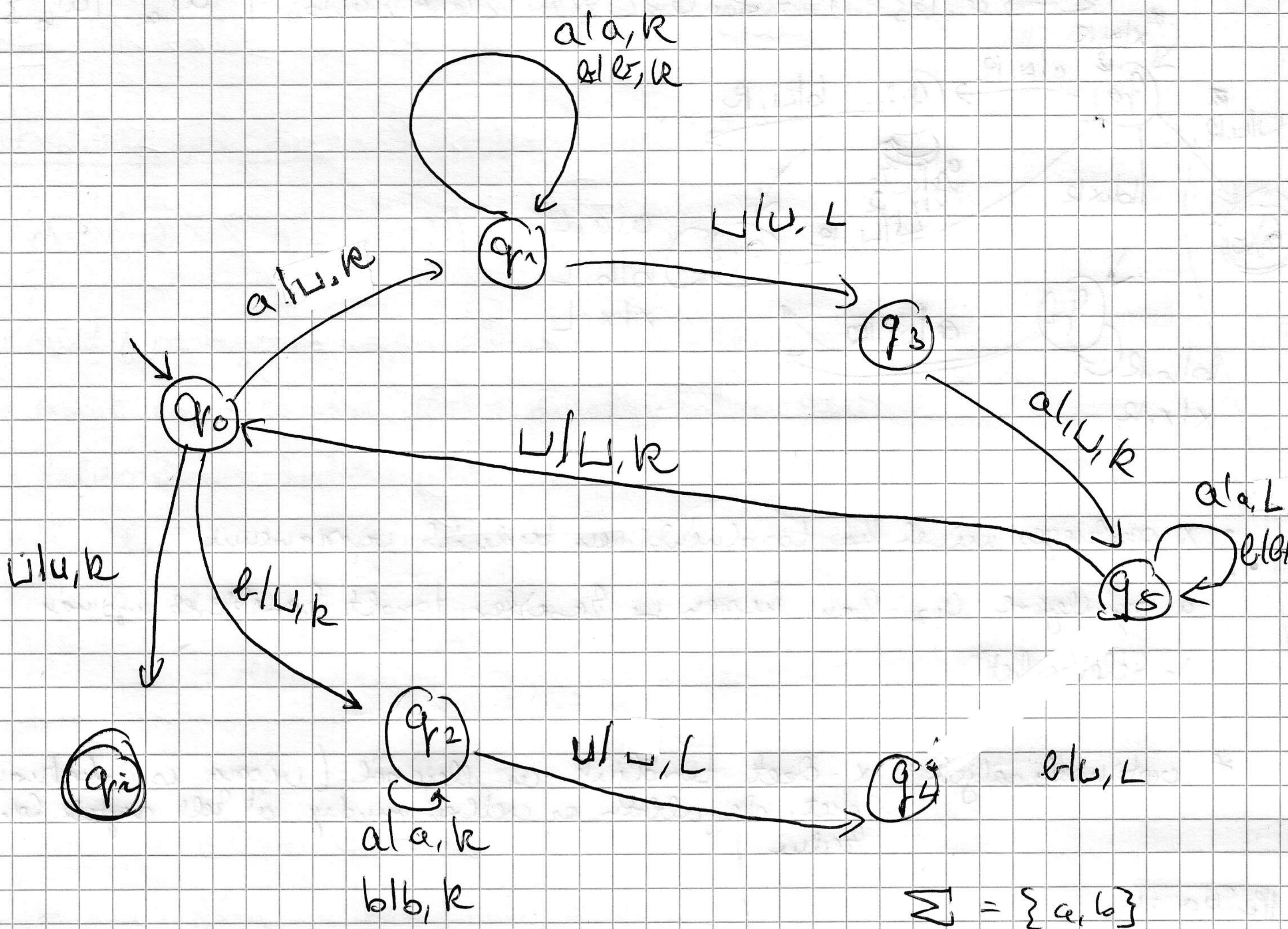
jobbra léptetjük a fejet



itt nem módosítunk és jobbra lépünk

- olyan csupa a-ból álló szót fogad el ami 0/2/3/4 hosszú
- a|a,R ← jobbra lépünk
  ↑ a-t olvasunk
  ↑ visszaírjuk az a-t
- ⊔|⊔,R ← jobbra olvasunk
  ↳ üreset írunk vissza
  ↳ üreset olvasunk
- 2/3-al osztható hosszúságú szavak

Példa2:



$\Sigma = \{a, b\}$
$\Gamma = \Sigma \cup \{⊔\}$

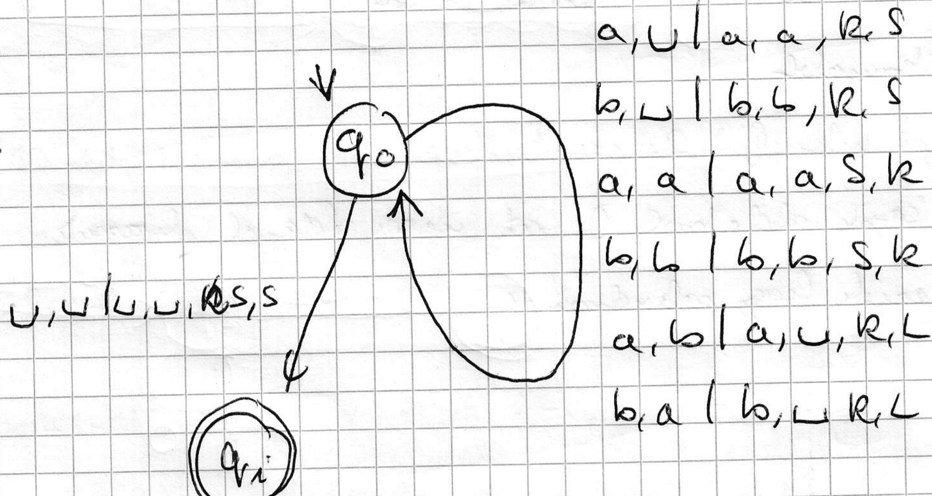
Csak a páros hosszú palindromokat fogadja el

↳ letörlöm a/b-t, majd - ha b volt az első, akkor fogadja el, ha az utolsó betű is b, hasonlóan a-hoz

<u>Feladat</u>: 2 szalaggal elfogadni ugyan annyi a-t mint b-t tartalmazó szavakat elfogadó Turing-gép (többszalagos)

$\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$

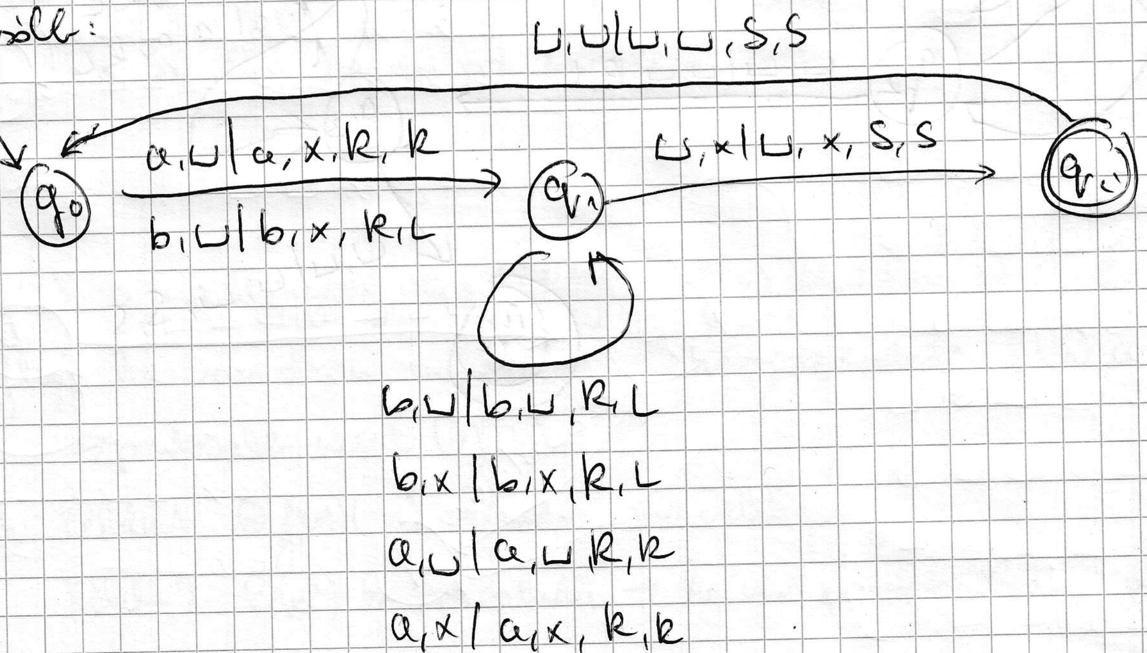
M.: veremautomatát szimuláljuk (helyes zárójelezés)



Vagy: a-kat egyik szalagra b-ket másik szalagra írjuk át, majd megnézzük ugyan annyi van-e belőlük (1,5 × átmegy)

Vagy: átmásoljuk odafele 2. szalagra a-kat, visszafele 2. szalagról törlünk 1 a-t, valahányszor az 1.-ön b-t olvasunk.

Legjobb:



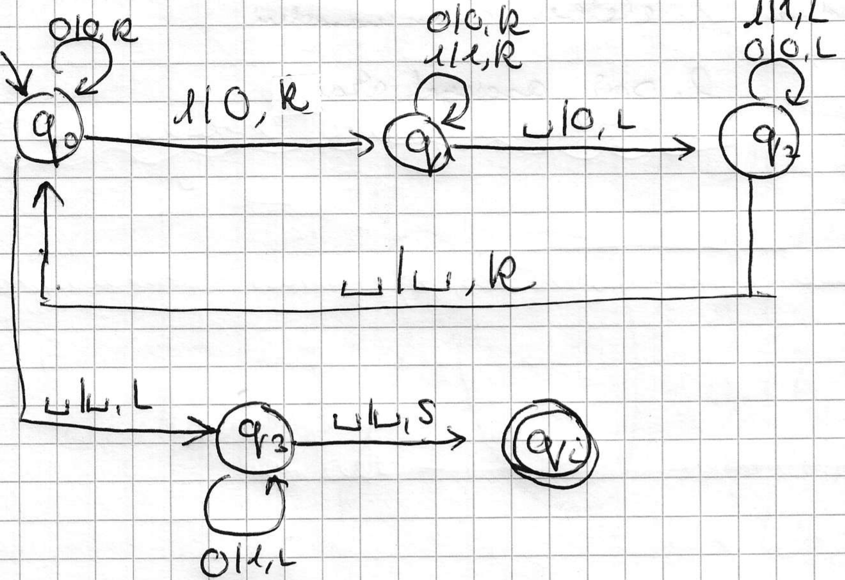
10. Gyakorlat

Fv-ek kiszámítása Turing-gépekkel

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$w \in \Sigma^*$ $f(w)$

$1^n \to 1^{2n}$

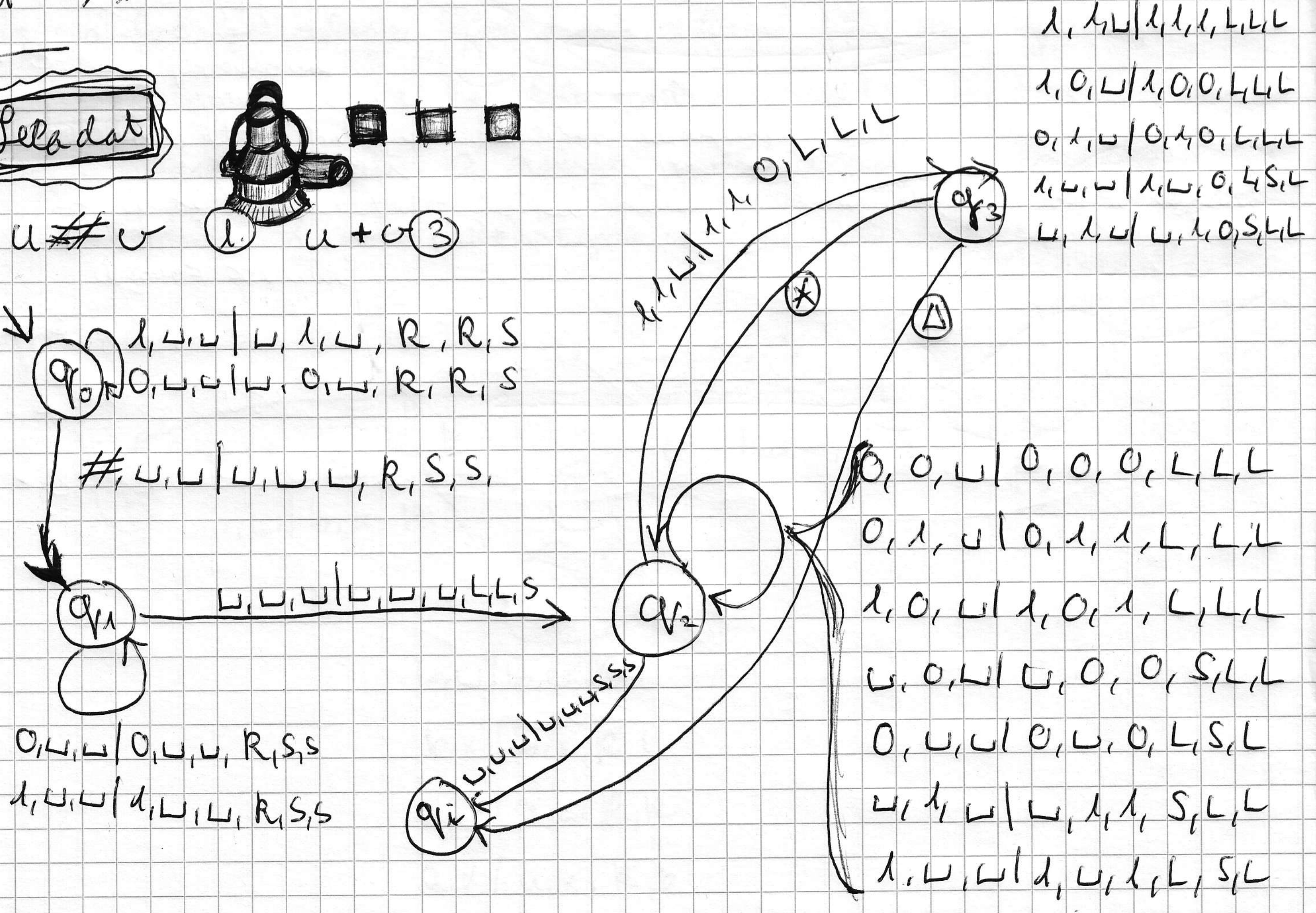


000
111000
111111

$1^n \to 1^{2^n}$

Feladat

u#v (1.) u+v (3)



- u-t átírjuk a 2. szalagra

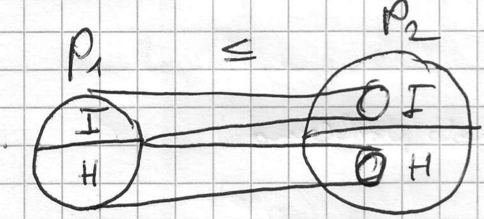
↳ u és v egy bináris szám, a 3. szalagra készítjük el az összegüket

(*) 0, 0, ⊔ | 0, 0, 1, L, L, L

0, ⊔, ⊔ | 0, ⊔, 1, L, S, L

⊔, 0, ⊔ | ⊔, 0, 1, S, L, L

(△) ⊔, ⊔, ⊔ | ⊔, ⊔, 1, S, S, S



Nevezetes eldönthetetlen problémák

$$L_u = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{turing gép}}}{\langle M}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tetsz. input}}}{w \rangle} \mid M \text{ elfogadja } w\text{-t} \}$$

$$L_{HALT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ megáll } w\text{-n} \}$$

Visszavezetéssel

$$\langle M, w \rangle \rightsquigarrow \langle M', w' \rangle$$

$$L_u \iff L_{HALT}$$

$w' = w$

$M' \stackrel{\Delta}{=}$: szimulálja M-t

- ha M elfogad ⇒ M' is
- ha M elutasít ⇒ ∞-ciklus

$L_{NE} = \{\langle m\rangle \mid L(m) = \emptyset\}$

$L_u \leq L_{NE}$

$\langle m, w\rangle \leadsto \langle m'\rangle$ M'-ha az input $\neq w \Rightarrow$ elutasít

- egyébként ~~...~~ szimul M w-n

P_1 visszavezetése polinomidőben P_2-re

$P_1 \leq_p P_2$

determinisztikus turing-géppel polinom időben eldönthető/kiszámítható probléma

P

NP

nem det —||—

- NP teljes P ha $P \in NP$ és $\forall P' \in NP: P' \leq_p P$
- $P \neq NP$
  SEJTÉS
- 3-szín probléma
  ↳ adott tetsz. gráf (nem felt. síkba rajzolható)
  ↳ csúcsai kiszínezhetőek-e 3 küil. színnel, h szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek
- $P' \in NP \Rightarrow P'$ NP-teljes
- 4-szín $\in NP$
- 3-szín $\leq_p$ 4-szín

11. Gyakorlat

$\boxed{1.}$ Mi az alábbi halmazok számossága? (megszámlálhatóan végtelen vagy kontinuum sok?) Válaszodat indokold!

ⓐ $\mathbb{Z}$

Megszámlálhatóan végtelen, mivel

$\exists$ bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ között, azaz $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ és $\mathbb{N}$ megszáml. so

bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ között:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : g(z) = \begin{cases} 2z, & \text{ha } z > 0 \\ -2 \cdot z - 1, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$$

ⓑ $(0,1)$ nyílt intervallum pontjai

Kontinuum sok, mivel:

$|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ és $\mathbb{R}$ kontinuum számosságú.

Bijekció: $f: (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = \operatorname{tg}(\pi \cdot (x - \frac{1}{2}))$

$g: \mathbb{R} \to (0,1) : g(r) = \frac{\operatorname{arctg} r}{\pi} - \frac{1}{2}$

ⓒ véges hosszú bináris szavak halmaza

~~Megszámlálhatóan~~ Kontinuum sok, mivel:

$|\{\text{véges hosszú bin. szavak halmaza}\}| = |\mathbb{R}|$

~~bijekció~~

2. Milyen nyelvet ismer fel az alábbi Turing-gép? (10p)

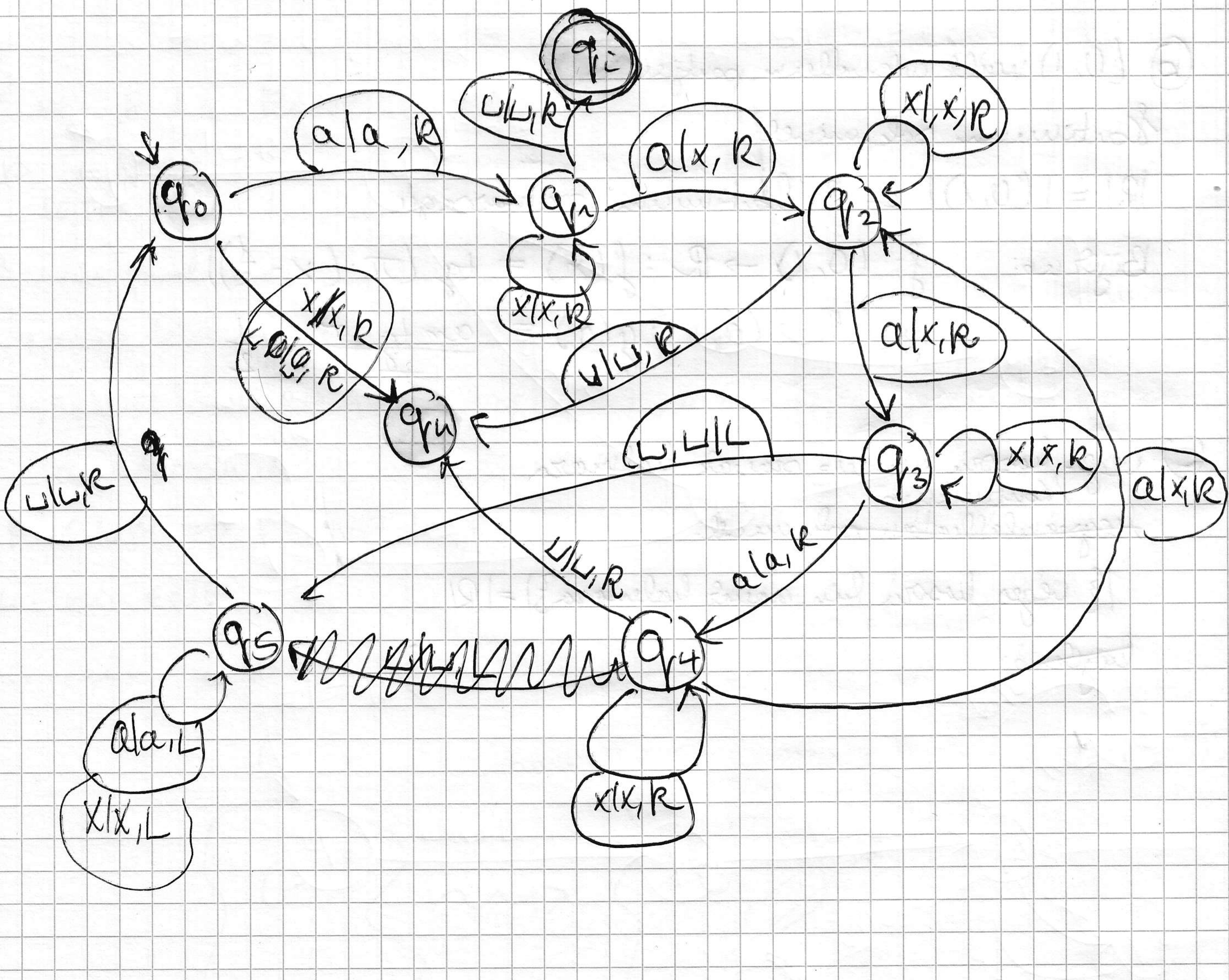
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, $Q = \{q_0, q_i, q_n, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$,

$\Sigma = \{a\}$

$\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup, x\}$, $\delta =$

$\delta =$

.	a	x	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, R)	(q_n, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_1	(q_2, x, R)	(q_1, x, R)	$(q_i, \sqcup, R)$
q_2	(q_3, x, R)	(q_2, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_3	(q_4, a, R)	(q_3, x, R)	$(q_5, \sqcup, L)$
q_4	(q_2, x, R)	(q_4, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_5	(q_5, a, L)	(q_5, x, L)	$(q_0, \sqcup, R)$



Megoldások

1

(a) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad g(z) = \begin{cases} 2 \cdot z, & \text{ha } z \geq 0 \\ -2 \cdot z - 1, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$$

(b) $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

$$tg(\pi(x - \tfrac{1}{2})) \quad ; \quad \frac{arctg(y)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

(c) $|\{\text{véges h. bin. szavak}\}| = |\mathbb{N}|$
mivel felsorolhatók pl.: hossz szerint, azon belül lexikografikusan
$\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 000, \dots$

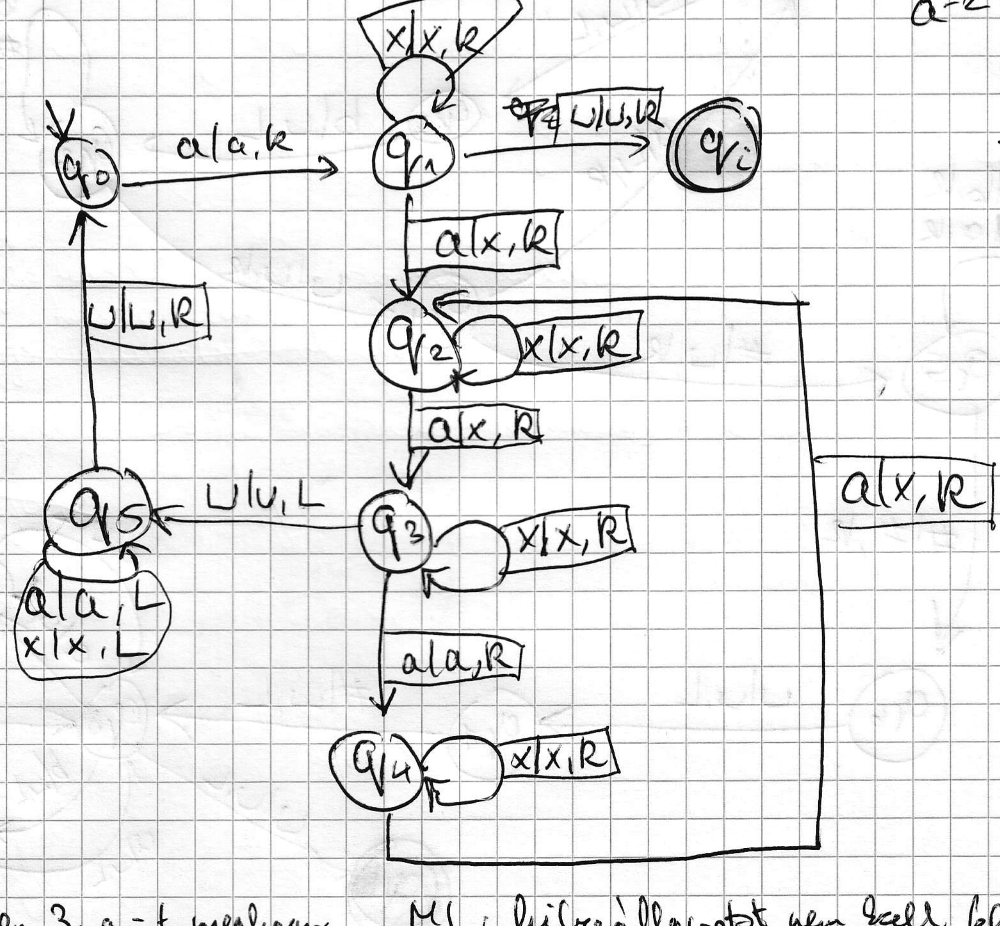
2.

3 hatványát fogadja el
a-k számossága szerint

$L(M) = \{ a^{3^n} \mid n \geq 0 \}$

$\Sigma = \{a\}$

$\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup, x\}$

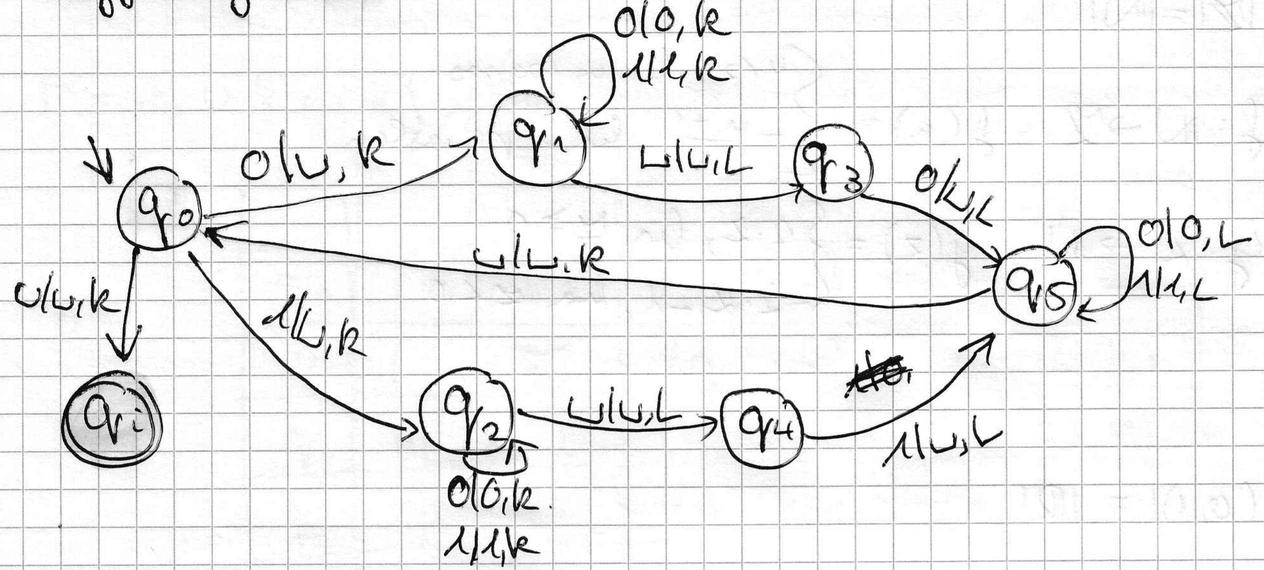


· minden 3. a-t meghagy   Mj.: hibaállapotot nem kell felrajzolni

3

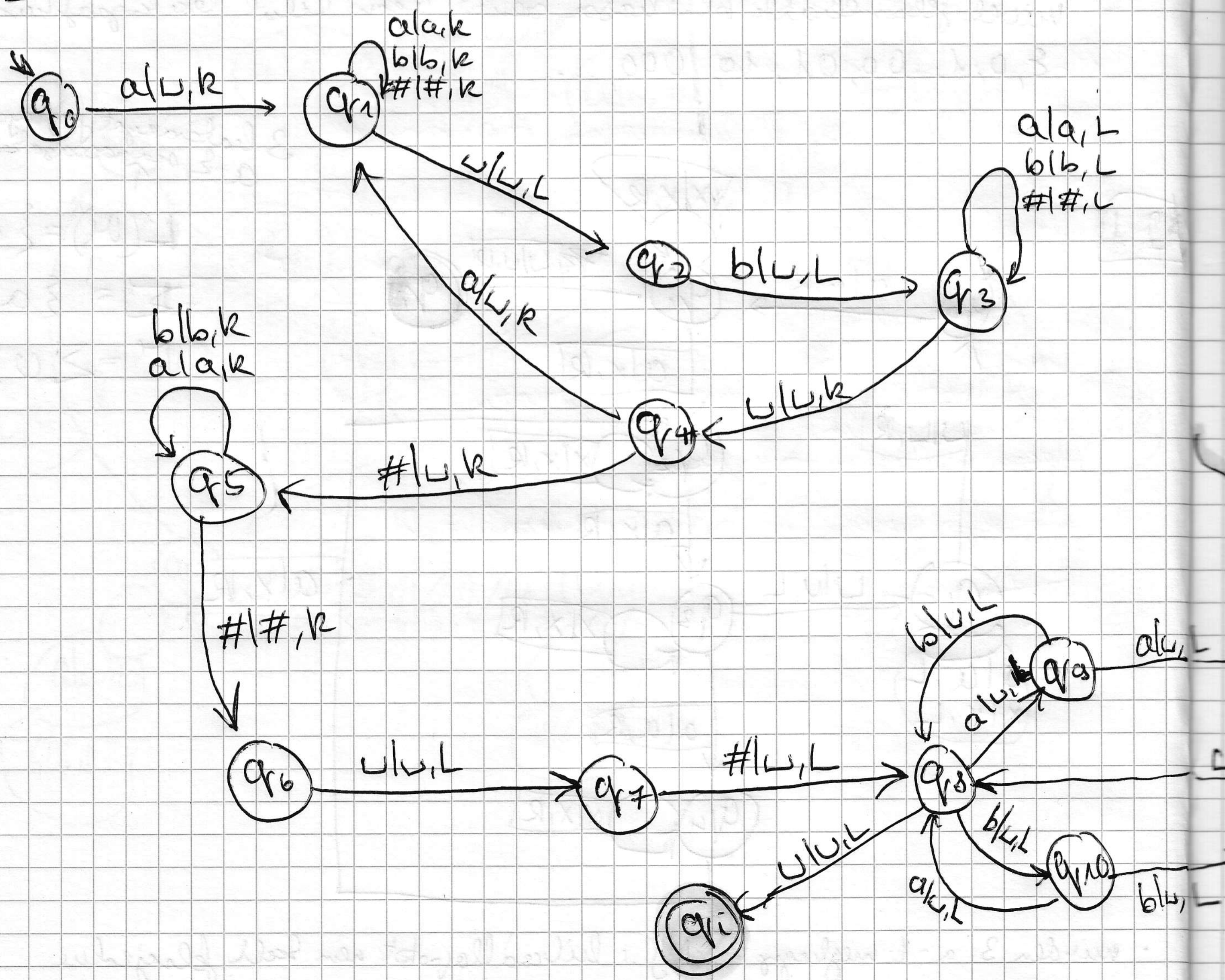
(a) $\cdot \{ u u^{-1} \mid u \in \{0,1\}^* \}$

· egyszalagos kell



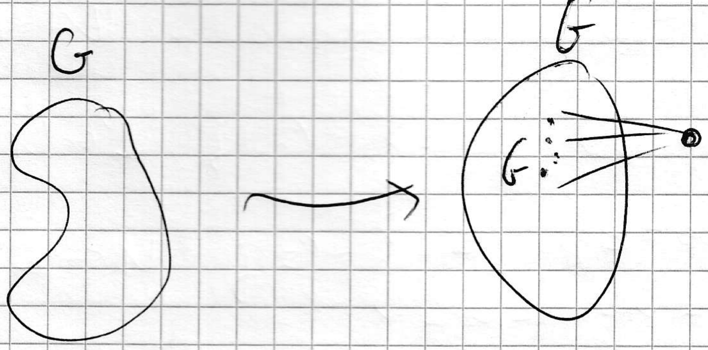
Műveletigény: $\Theta(n^2)$

(b) $\{ a^n \# u \# b^n \mid |u|_a = |u|_b,\ u \in \{a,b\}^*,\ n \geq 1 \}$



Műveletigény: $O(n^2)$

$\boxed{4}$ 3-Szín $\leq_p$ 4-Szín



- felvesszük +1 csúcsot → n ∀ másik csúccsal összekötjük
- Akkor G csak akkor színezhető ki 3 színnel, ha G' kiszínezhető 4 színnel

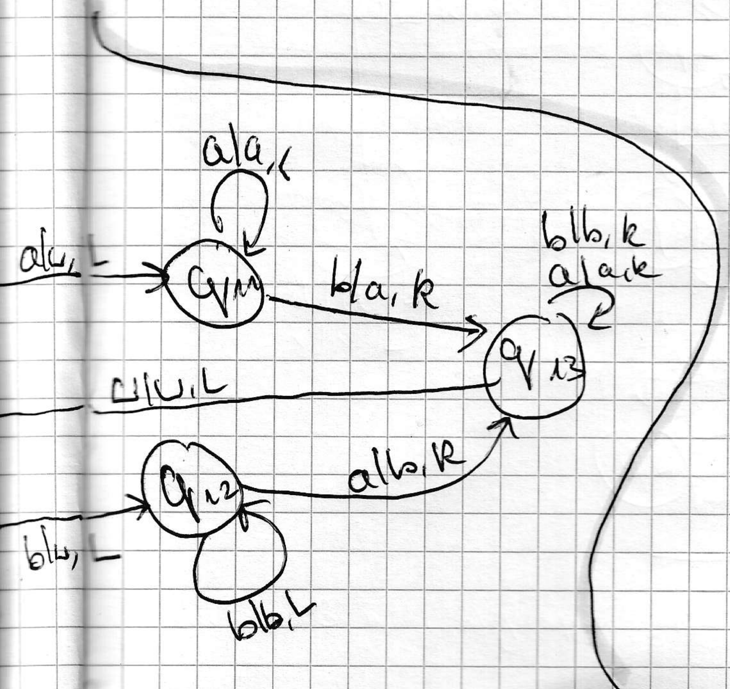
ui. izomorf rész kiszínezhető 3 színnel (megegyező)

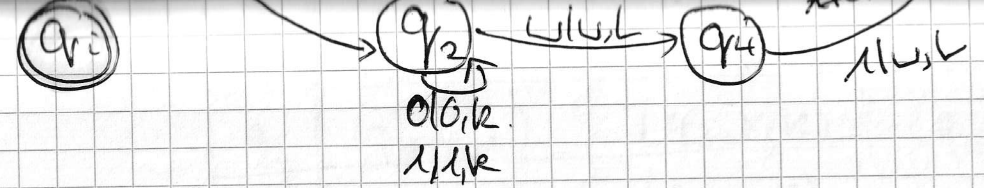
és a + élekhez + egy szín kell

- polinom idejű: +1 csúcs (konstans)

  + n db. él: lineáris műv.

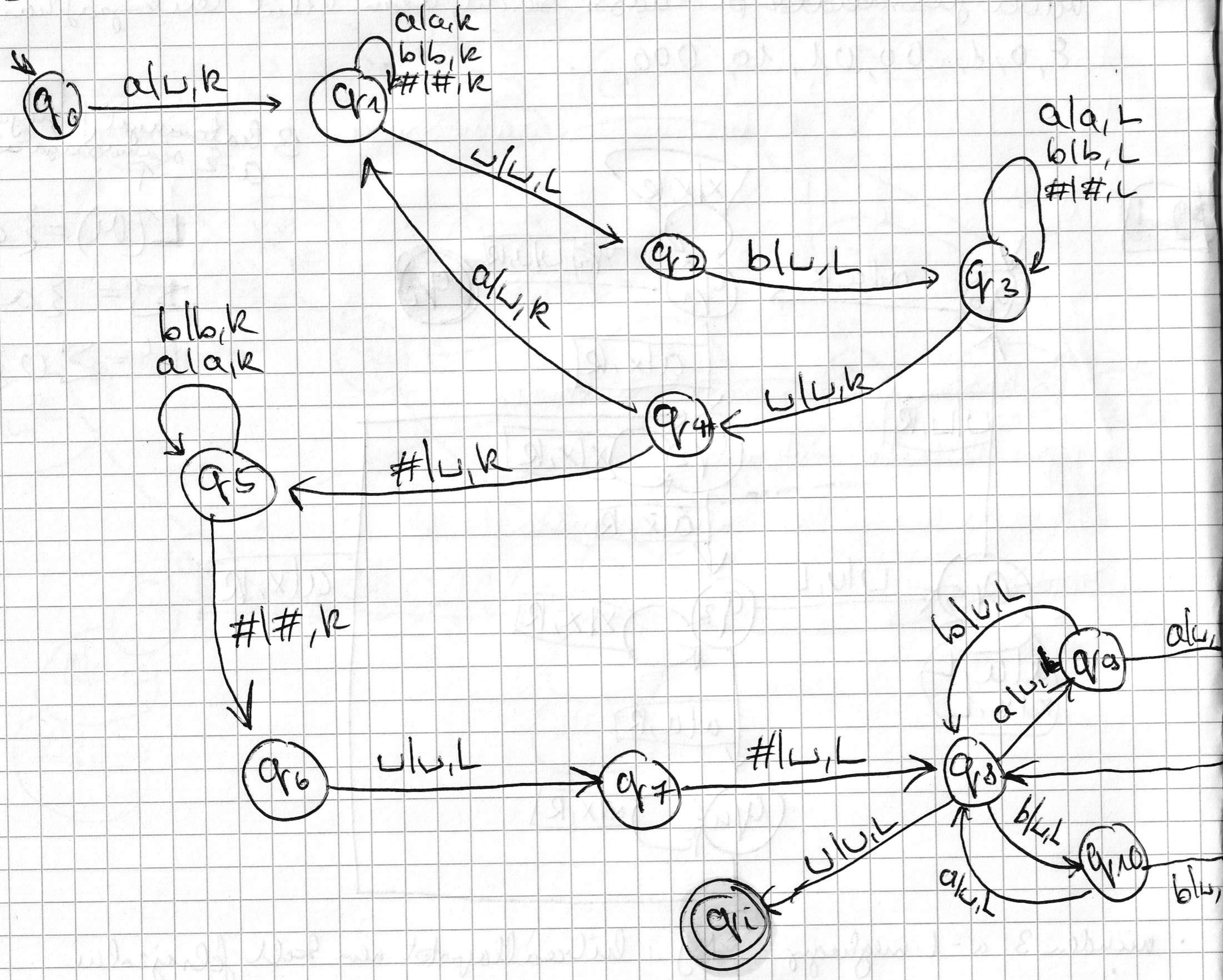
ZH-ban: szavakkal kell leírni

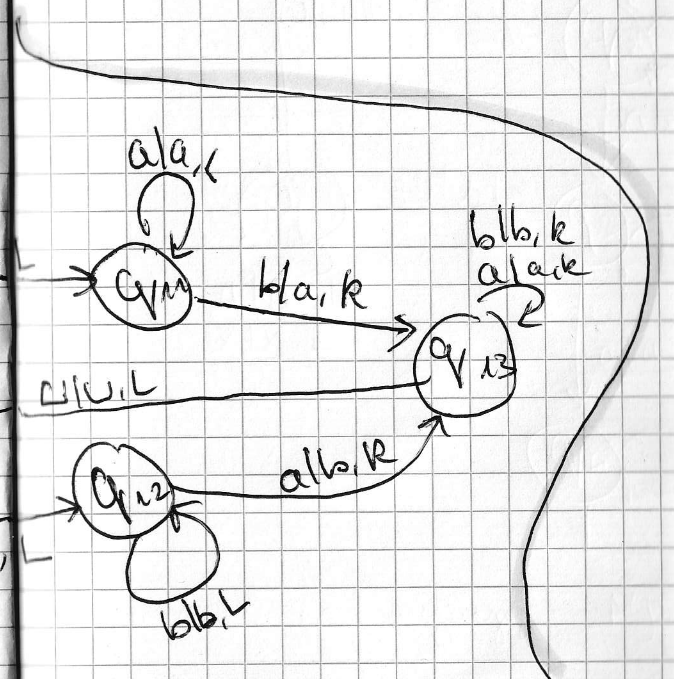




Műveletigény: $\Theta(n^2)$

b) $\{ a^n \# u \# b^n \mid |u|_a = |u|_b,\ u \in \{a,b\}^*,\ n \geq 1 \}$





• felvesszük +1 csúcsot → u ...

• akkor G csak akkor színez...

ui. izomorf ... színezhe...

és a + élekkel + egy szín...

• polinom idejű: +1 csúc...

+ u db.

ZH-ban: szavakkal kell le...

Logika és Számításelmélet Javító ZH - Számításelmélet rész - 2016. december

1. Mi az alábbi halmazok számossága (megszámlálhatóan végtelen, vagy kontinuum sok)? Válaszodat indokold! (12 pont)

   (a) $\mathbb{Z}$

   (b) $(0; 1)$ nyílt intervallum pontjai

   (c) véges hosszú bináris szavak halmaza

2. Milyen nyelvet ismer fel az alábbi Turing-gép? (10 pont)

   $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, $Q = \{q_0, q_i, q_n, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{a\}$,

   $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup, x\}$, $\delta =$

	a	x	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, R)	(q_n, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_1	(q_2, x, R)	(q_1, x, R)	$(q_i, \sqcup, R)$
q_2	(q_3, x, R)	(q_2, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_3	(q_4, a, R)	(q_3, x, R)	$(q_5, \sqcup, L)$
q_4	(q_2, x, R)	(q_4, x, R)	$(q_n, \sqcup, R)$
q_5	(q_5, a, L)	(q_5, x, L)	$(q_0, \sqcup, R)$

3. Adj meg olyan egyszalagos Turing gépeket, amik az alábbi nyelveket ismerik fel, és add meg a gépek időigényét is: (18 pont)

   (a) $\{uu^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*\}$

   (b) $\{a^n \# u \# b^n \mid n \geq 1,\ u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = |u|_b\}$

4. Mint ismeretes, a $3Szín$ probléma (egy adott gráf csúcsai kiszínezhetők-e 3 színnel úgy, hogy szomszédos csúcsoknak különböző legyen a színe) $NP-teljes$. Visszavezetés segítségével igazold az $NP-beli$ $4Szín$ problémáról (egy adott gráf csúcsai kiszínezhetők-e 4 színnel úgy, hogy szomszédos csúcsoknak különböző legyen a színe), hogy szintén $NP-teljes$! (10 pont)