Logika és számításelmélet zárthelyi megoldásai
2008. IV. 3., csütörtök 16 óra

1. Az ítéletváltozók mely interpretációira lesz az alábbi ítéletlogikai formulák helyettesítési értéke *hamis*?

   (a) $X \vee Y \supset X \wedge \neg Y$

   (b) $(X \supset Y) \wedge (Y \supset \neg Z)$

   Megoldás:

X	Y	$X \vee Y$	$X \wedge \neg Y$	$X \vee Y \supset X \wedge \neg Y$
i	i	i	h	h
i	h	i	i	i
h	i	i	h	h
h	h	h	h	i

X	Y	Z	$X \supset Y$	$Y \supset \neg Z$	$(X \supset Y) \wedge (Y \supset \neg Z)$
i	i	i	i	h	h
i	i	h	i	i	i
i	h	i	h	i	h
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	h	h
h	i	h	i	i	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

2. Formalizáljuk nulladrendben az alábbi állításokat és lássuk be, hogy $\{A_1, A_2, A_3\} \models_0 B$!

   A1: Ha elutazunk nyaralni, akkor jót fürdünk a tengerben, de nem látjuk az augusztus 20-ai tüzijátokot.
   A2: Ha nem fürdünk a tengerben, akkor tüzijátékot se nézünk.
   A3: A tengerben csak úgy tudunk fürödni, hogy elmegyünk nyaralni.
   B: Nem nézzük meg a tüzijátékot.

   Megoldás:

   N: Elutazunk nyaralni.

   F: Fürdünk a tengerben.

   T: Megnézzük a tüzijátékot.

   $A1$: $N \supset F \wedge \neg T$

   $A2$: $\neg F \supset \neg T$

   $A3$: $F \supset N$

   B: $\neg T$

   Indirekt. (1) $I(N \supset F \wedge \neg T)$ =i, (2) $I(\neg F \supset \neg T)$ =i, (3) $I(F \supset N)$=i, (4) $I(\neg\neg T) = i$.

   (4)-ből $I(T)$ =i. Tehát (2)-ből $I(F)$ =i. (3)-ból $I(N)$ =i. Tehát $I(N \supset F \wedge \neg T)$ =h, ellentmondva (1)-nek.

3. Egy elsőrendű logika logikán kívüli jeleit és szignatúráját (egyetlen fajta van) a következőképpen definiáljuk:

   Pr=$\{P, Q\}$, $\nu(P) = 2$, $\nu(Q) = 1$,

   Fn=$\{f, g, h\}$, $\nu(f) = 2$, $\nu(g) = 2$, $\nu(h) = 1$,

   Cnst=$\{a\}$.

   Individuumváltozók: $\{x, y, \ldots\}$.

   Melyek a termek az alábbiak közül?

   $\underline{f(g(f(g(x, x), x), x), x)}$; $h(f(g(x, a), y), x)$; $\underline{h(f(x, a))}$; $\forall x f(x, y)$; $Q(h(x))$

   Melyek a formulák az alábbiak közül?

   $\underline{Q(h(x))}$; $\underline{\neg Q(a)}$; $\forall x P(f(x, y))$; $\underline{\neg\neg\neg\exists x\exists y\exists z P(x, g(y, z))}$; $\underline{(Q(a) \supset (\exists x P(x, y) \wedge Q(a)))}$

   Melyek a prímformulák az alábbiak közül?

   $\forall x f(x, y)$; $\underline{\forall x P(a, a)}$; $\underline{\forall x(Q(x) \vee \neg Q(x))}$; $\underline{Q(f(f(x, x), x))}$; $\underline{\exists x\exists y\exists z\neg P(x, g(y, z))}$

4. Lássuk be a következő elsőrendű logikai törvény helyességét!

   Ha x nem szabad változója A-nak, akkor $A \vee \forall x B \sim \forall x(A \vee B)$.

   Megoldás: Minden I-re és κ-ra $|A \vee \forall x B|^{I,\kappa} =$i $\Leftrightarrow$

   minden I-re és κ-ra $|A|^{I,\kappa} =$i vagy $|\forall x B|^{I,\kappa} =$i $\Leftrightarrow$

   $|A|^{I,\kappa^*} =$i minden I-re és κ minden κ^* x-variánsára vagy pedig $|B|^{I,\kappa^*} =$i minden I-re és κ minden κ^* x-variánsára $\Leftrightarrow$

   $|A \vee B|^{I,\kappa^*} =$i minden I-re és κ minden κ^* x-variánsára $\Leftrightarrow$

   minden I-re és κ-ra $|\forall x(A \vee B)|^{I,\kappa} =$i.

5. Rezolúciós levezetéssel igazoljuk, hogy a $\{X \vee W, Y \vee W, \neg X \vee U \vee \neg Y, \neg W, \neg X \vee W \vee \neg U\}$ klózhalmaz kielégíthetelen!

   Megoldás: $K = \{X \vee W, Y \vee W, \neg X \vee U \vee \neg Y, \neg W, \neg X \vee W \vee \neg U\}$

   1. $\neg X \vee U \vee \neg Y$ $(\in K)$
   2. $\neg X \vee W \vee \neg U$ $(\in K)$
   3. $\neg X \vee W \vee \neg Y$ $(= \mathrm{res}(1, 2))$
   4. $\neg W$ $(\in K)$
   5. $\neg X \vee \neg Y$ $(= \mathrm{res}(3, 4))$
   6. $X \vee W$ $(\in K)$
   7. X $(= \mathrm{res}(4, 6))$
   8. $Y \vee W$ $(\in K)$
   9. Y $(= \mathrm{res}(4, 8))$
   10. $\neg X$ $(= \mathrm{res}(5, 9))$
   11. $\Box$ $(= \mathrm{res}(7, 10))$