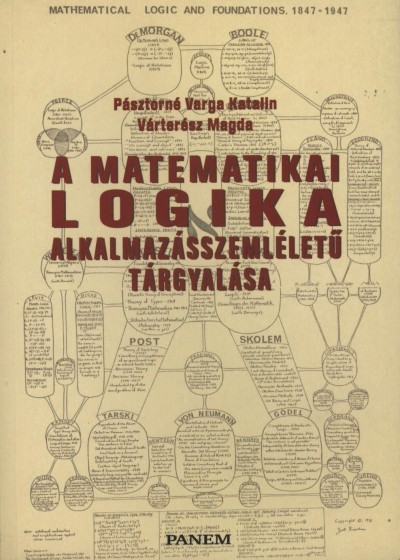
# Logika és számításelmélet

## I. rész Logika

Tejfel Máté

Déli épület, 2.606 [matej@inf.elte.hu](mailto:matej@inf.elte.hu) [http://matej.web.elte.hu](http://matej.web.elte.hu/)



[Bevezető fogalmak](#_bookmark1)

[ítéletlogika](#_bookmark3)

[ítéletlogika leíró nyelve – A´bécé](#_bookmark5)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

#### Halmazok direktszorzata



A és B tetszőleges halmazok direkt vagy Descartes szorzata A × B

az összes olyan (a, b) párok hamaza, ahol a ∈ A és b ∈ B.

U *n*-nel jelöljük U -nak önmagával vett n-szeres direktszorzatát, ami az U elemeiből képezhető összes n elemű sorozatok halmaza

(U 2 = U × U ).



Függvény  
Legyenek D ´es R (nem feltétlenül különböző) halmazok.

egy R-beli elemet rendel˝o) lek´epez´est. D a lek´epez´es ´ertelmez´esi

tartom´anya, R az ´ert´ekk´eszlete.

Fu¨ggv´enynek nevezu¨nk egy D → R (D halmaz minden elem´ehez

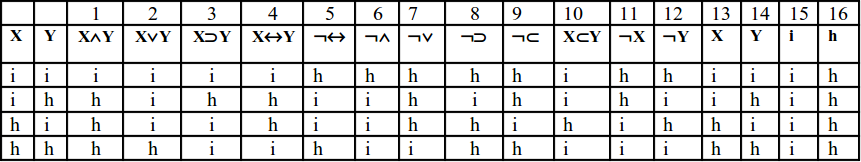
#### Függvény fajtái



Legyen D a függvény értelmezési tartománya, R az értékkészlete. Valamint legyen U egy tetszőleges (individuum)halmaz.

* Ha D = U , akkor a függvény egyváltozós,
* ha D = U *n* (n > 1), akkor n változós,
* ha R = N, akkor a függvény egészértékű,
* ha R = {i, h}, akkor a függvény logikai függvény, más néven reláció,
* ha D = R*n* (azaz a függvény általános alakja: U *n* → U ), akkor a függvény matematikai függvény, más néven művelet,
* az {i, h}*n* → {i, h} alaku´ függvény logikai művelet.

A lehetséges **kétváltozós** logikai műveletek közös igazságtáblája.



A táblázat tartalmazza a 16 db 2-változós műveletet (a 4 db 1- és a 2 db 0-változós művelet is köztük van). Ezekből a logika tárgyalásánál a ¬, ∧, ∨, ⊃ műveleteket használjuk csak.

## Nyelv =

A´bécé + Szintaxis + Szemantika

Szerkezeti rekurzió

* definíciós módszer
* alaplépés + rekurzív lépés
* példa: logikai formulákon értelmezett függvények definíciója Szerkezeti indukció
* bizonyítási módszer rekurzívan definiált struktu´rák tulajdonságairól
* alaplépés + indukciós lépés
* speciális példa: teljes indukció
* példa: logikai formulák tulajdonságainak bizonyítása
* A logika tárgya az emberi gondolkodás vizsgálata.
* A logika célkitűzése.

Gondolkodási folyamatok vizsgálata során

a helyes következtetés törvényeinek feltárása, u´jabb helyes következtetési módszerek kidolgozása.



Gondolkod´asforma vagy ko¨vetkeztet´esforma

Egy F = {A1, A2, . . . , A*n*} ´all´ıt´ashalmazb´ol ´es egy A ´all´ıt´asb´ol ´all´o

(F, A) p´ar.



Helyes k¨ovetkeztet´esforma

Egy F = {A1, A2, . . . , A*n*} ´all´ıt´ashalmazb´ol ´es egy A ´all´ıt´asb´ol ´all´o

(F, A) p´ar, ha l´etezik olyan eset, hogy az F ´all´ıt´ashalmazban

szerepl˝o mindegyik ´all´ıt´as igaz ´es minden ilyen esetben az A ´all´ıt´as is igaz.

[Bevezető fogalmak](#_bookmark1)

[ítéletlogika](#_bookmark3)

[ítéletlogika leíró nyelve – A´bécé](#_bookmark5)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

Tárgya az egyszerű állítások és a belőlük logikai műveletekkel kapott összetett állítások vizsgálata.



Egyszeru˝ ´all´ıt´as

Egy olyan kijelent´es, amelynek tartalm´ar´ol eld¨onthet˝o, hogy igaz-e vagy nem. Egy ´all´ıt´ashoz hozz´arendelju¨k az igazs´ag´ert´ek´et: az i vagy h ´ert´eket.



O¨ sszetett ´all´ıt´as

Egy egyszeru˝ ´all´ıt´asokb´ol ´all´o ¨osszetett mondat, amelynek az igazs´ag´ert´eke csak az egyszeru˝ ´all´ıt´asok igazs´ag´ert´ekeit˝ol fu¨gg. Az

¨osszetett ´all´ıt´asok csak olyan nyelvtani ¨osszek¨ot˝oszavakat tartalmazhatnak amelyek logikai mu˝veleteknek feleltethet˝ok meg.

**´It´eletlogika vagy ´all´ıt´aslogika**

### Tartalom

[ítéletlogika](#_bookmark3)

[ítéletlogika leíró nyelve – A´bécé](#_bookmark5)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

**Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek ´ab´ec´eje (**V0**)**



Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek ´ab´ec´eje (V0)

* ´It´eletv´altoz´ok (V*v*): X, Y, X*i*, . . .
* Un´er ´es bin´er logikai mu˝veleti jelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* Elv´alaszt´ojelek: ( )

### Tartalom

[ítéletlogika](#_bookmark3)

[ítéletlogika leíró nyelve – A´bécé](#_bookmark5)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

ítéletlogikai formula (Tk.4.1.2 def.)

**Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek szintaxisa (**L0**)**



1. (alaplépés) Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (*prímformula*)
2. (rekurziós lépés)
   * Ha A ítéletlogikai formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor (A ◦ B) is ítéletlogikai formula ”◦” a három binér művelet bármelyike.
3. Minden ítéletlogikai formula az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

ítéletlogikában a következő formulaszerkezeteket különböztetjük meg:

* ¬A negációs
* A ∧ B konjukciós
* A ∨ B diszjunkciós
* A ⊃ B implikációs



Kozvetlen r´eszformula (Tk.4.1.6. def.)

1. Pr´ımformul´anak nincs k¨ozvetlen r´eszformul´aja.
2. ¬A k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

3 Az (A ◦ B) k¨ozvetlen r´eszformul´ai az A (*baloldali*) ´es a B

(*jobboldali*).



P´elda

A (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y ) formula baloldali r´eszformul´aja: ¬(Z ⊃ ¬X),

jobboldali r´eszformul´aja: Y .



Szerkezeti fa (Tk. 49.o)

Egy adott formul´ahoz tartoz´o szerkezeti fa egy olyan fa, melynek gy¨okere a formula, minden csu´cs gyerekei a csu´cshoz tartoz´o formula k¨ozvetlen r´eszformul´ai, a fa levelei pedig ´ıt´eletv´altoz´ok.

**Szerkezeti fa** egy példa formulához:

(((X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z))⊃(¬X ∨ Z))

((X ⊃ Y )∧(Y ⊃ Z)) (¬X∨Z)

(X⊃Y )

XY

(Y ⊃Z)

YZ

¬X Z

X

A teljesen zárójelezett formulákat kevesebb zárójellel írhatjuk fel, ha bevezetjük a műveletek prioritását: ¬, ∧, ∨, ⊃ (csökkenő sorrend).

A **zárójelelhagyás**1 célja egy formulából a legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének megtartása mellett.

1Tk. 52. o.

Lépései:

1. A formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van ilyen).
2. Egy binér logikai összekötő hatáskörébe eső részformulák külső zárójelei akkor hagyhatók el, ha a részformula fő logikai

összekötőjele nagyobb prioritásu´ nála.



P´elda

(X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z) ⊃ ¬X ∨ Z

(((X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z)) ⊃ (¬X ∨ Z)) a z´ar´ojelelhagy´as ut´an:

* **Konjunkciós**: A1 ∧ A2 ∧ . . . ∧ A*n* (tetszőlegesen zárójelezhető)
* **Diszjunkciós**: A1 ∨ A2 ∨ . . . ∨ A*n* (tetszőlegesen zárójelezhető)
* **Implikációs**: A1 ⊃ A2 ⊃ . . . ⊃ A*n* (default zárójelezése jobbról-balra) A1 ⊃ (A2 ⊃ . . . (A*n*−1 ⊃ A*n*) . . .)



Liter´al

Ha X ´ıt´eletv´altoz´o, akkor az X ´es a ¬X formul´akat liter´alnak

liter´alok.)

nevezzu¨k. Az ´ıt´eletv´altoz´o a liter´al alapja. (X ´es ¬X azonos alapu´



Elemi konjunkci´o

Ku¨l¨onb¨oz˝o liter´alok konjunkci´oja. Pl.: X ∧ ¬Y ∧ ¬W ∧ Z



Elemi diszjunkci´o

Ku¨l¨onb¨oz˝o liter´alok diszjunkci´oja. Pl.: ¬X ∨ Y ∨ ¬W ∨ ¬Z

Egy A formula **logikai összetettsége**: A(A)



Szerkezeti rekurzi´ot alkalmaz´o defin´ıcio´ (Tk.4.1.12)

Alapl´ep´es

Rekurzi´os l´ep´esek

* Ha A ´ıt´eletv´altoz´o, akkor A(A) = 0
* A(¬A) = A(A) + 1
* A(A ◦ B) = A(A) + A(B) + 1



Defin´ıci´o (Tk.4.1.17.)

**Logikai mu˝veletek hat´ask¨ore** a formula r´eszformul´ai k¨ozu¨l az a legkisebb logikai ¨osszetetts´egu˝, amelyben az adott logikai

¨osszek¨ot˝ojel el˝ofordul.

Példa



A (X Y ) (Y Z) X Z formula műveletet tartalmazó részformulái:

⊃ ∧ ⊃ ⊃ ¬ ∨ ∧

1 A[(X Y ) (Y Z) X Z] = 6

⊃ ∧ ⊃ ⊃ ¬ ∨

2 A[(X Y ) (Y Z)] = 3

⊃ ∧ ⊃

Ezek közül a 2. formula az hatásköre. Egy művelet hatáskörébe eső formulák egyben *közvetlen komponensek* is.

∧



Defin´ıci´o (Tk.4.1.18.)

Egy formula **f˝o logikai ¨osszek¨ot˝ojele** az az ¨osszek¨ot˝ojel, amelynek a hat´ask¨ore maga a formula.

[ítéletlogika](#_bookmark3)

[ítéletlogika leíró nyelve – A´bécé](#_bookmark5)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[ítéletlogika leíró nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

A nyelv ábécéjének értelmezése (interpretációja - modellezése).

Az ítéletlogika ábécéjében már csak az ítéletváltozókat kell interpretálni. Az ítéletváltozók befutják az állítások halmazát. Ha megmondjuk melyik ítéletváltozó melyik állítást jelenti, akkor a változó igazságértékét adtuk meg. Annak rögzítését melyik

ítéletváltozó i(gaz) és melyik h(amis) igazságértékű

**interpretáció**nak nevezzük.



Igazs´agki´ert´ekel´es, interpret´aci´o (Tk.4.2.1.)

I = V*v* → {i, h}

I(x) jelöli az x ítéletváltozó értékét az I interpretációban.

n db ítéletváltozó interpretációinak száma 2*n*.

*Megadása*:

* Felsorolással
* Szemantikus fával
* Stb.

n = 3 esetén legyenek az ítéletváltozók X, Y, Z. Ezen változók egy sorrendjét **bázis**nak nevezzük. Legyen most a bázis X, Y, Z. Ekkor az összes interpretációt megadhatjuk táblázatos felsorolással, vagy szemantikus fával is.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | Z |
| i | i | i |
| i | i | h |
| i | h | i |
| i | h | h |
| h | i | i |
| h | i | h |
| h | h | i |
| h | h | h |

táblázat: Interpretácio´

megadása táblázattal *X, Y, Z* bázis esetén

#### Szemantikus fa



Egy n-változós **szemantikus fa** egy n-szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfeleltetve. Egy X változó szintjén a csu´csokból kiinduló élpárokhoz X, ¬X címkéket rendelünk. X jelentése X *igaz*, ¬X jelentése X *hamis* az élhez tartozó interpretációkban, így egy n-szintű szemantikus fa ágain az

összes (2*n* ) lehetséges igazságkiértékelés (I interpretáció) megjelenik.

Szemantikus fa az X, Y, Z logikai változókra, mint bázisra:

X

¬X

Y

¬Y

Y

¬Y

Z ¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

iii iih ihi ihh hii hih hhi hhh

Formula helyettesítési értéke I interpretációban: BI (C).



BI(C) defin´ıci´oja szerkezeti rekurzi´oval (Tk.4.2.2.)

1. Ha C formula ´ıt´eletv´altoz´o, akkor BI (C) = I(C).
2. Ha C formula neg´aci´os, akkor BI (¬A) = ¬BI (A).
3. Ha C formula (A ◦ B) alaku´, akkor

BI (A ◦ B) = BI (A) ◦ BI (B).

#### Formula igazságtáblája



Egy n**-változós formula igazságtáblája** egy olyan n + 1 oszlopból

és 2*n* + 1 sorból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis (a formula változói rögzített sorrendben) és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az **interpretációk** (a **változók igazságkiértékelései**), a formula alatt **a formula helyettesítési**

**értékei** találhatók.

Egy n-változós formula az igazságtáblájával megadott i, h *n* i, h n-változós logikai műveletet ír le.

{ } → { }

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y ) |
| i | i | i | i |
| i | i | h | i |
| i | h | i | i |
| i | h | h | h |
| h | i | i | i |
| h | i | h | i |
| h | h | i | h |
| h | h | h | h |

táblázat: A (¬(*Z* ⊃ ¬*X*) ∨ *Y* ) formula igazságtáblája

Egy formula **igazhalmaza** azon interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke igaz.

I

Egy formula **hamishalmaza** azon interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke hamis.

I

# Logika és számításelmélet

## rész Logika

Második előadás

[ítéletlogika - Szemantika (folytatás)](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark4)

[Szemantikus következményfogalom](#_bookmark7)

[Formalizálás az ítéletlogikában](#_bookmark10)

Egy formula **igaz-/hamis**halmazának előállításához keressük a formula bázisának interpretációira azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy ő az igazhalmaz illetve a hamishalmaz eleme legyen.

Ennek eszköze a ϕA*α* **igazságértékelés függvény** (α = **i** vagy **h**), amely egy A formula esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül az A interpretációira vonatkozó ϕA**i** és a ϕA**h** feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke **i** vagy **h** lesz.

A ϕA*α* függvény értelmezési tartománya a formulák halmaza

értékkészlete a formula interpretációira vonatkozó feltételek.

#### A ϕ-igazságértékelés függvény definiálása szerkezeti rekurzióval



1. Ha A prímformula (ítéletváltozó), akkor ϕA**i** feltételt pontosan azok az I interpretációk teljesítik, amelyekben I(A) = i, a ϕA**h** feltételt pedig azok, amelyekben I(A) = h.
2. A ϕ( A) feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a ϕA**h** feltételek.

¬

**i**

1. A ϕ(A B)**i** feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek mind a ϕA**i**, mind a ϕB**i** feltételek.

∧

1. A ϕ(A B)**i** feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a ϕA**i** vagy a ϕB**i** feltételek.

∨

1. A ϕ(A B)**i** feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a ϕA**h** vagy a ϕB**i** feltételek.

⊃

A ϕ(¬A)**h**, a ϕ(A ∧ B)**h**, a ϕ(A ∨ B)**h**, és a ϕ(A ⊃ B)**h** feltételek

értelemszerűen adódnak.

ϕ(A ∧ B)**i**

ϕ(¬A)**i**

ϕA**h**

ϕA**i**

ϕB**i**

ϕ(A ∨ B)**i**

ϕA**i** ϕB**i**

ϕ(A ⊃ B)**i**

ϕA**h** ϕB**i**

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkciós)

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukciós)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(negációs)

ϕX**h**

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkciós)

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukciós)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(negációs)

ϕX**h**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.ág | | | 2.ág | | | 3.ág | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *h* | ∼ | ∼ | ∼ | *i* | *i* | *h* | ∼ | ∼ |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(implikácios)

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkciós)

Az igazhalmaz:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* |
| *h* | *h* | *i* |
| *h* | *h* | *h* |

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukciós)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(negációs)

ϕX**h**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.ág | | | 2.ág | | | 3.ág | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *h* | ∼ | ∼ | ∼ | *i* | *i* | *h* | ∼ | ∼ |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implikációs)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkciós)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implikációs)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkciós)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.ág | | | 2.ág | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *h* | ∼ | *i* | ∼ | *h* |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implikációs)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkciós)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

A hamishalmaz:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *i* | *h* |
| *i* | *h* | *i* |
| *i* | *h* | *h* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.ág | | | 2.ág | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *h* | ∼ | *i* | ∼ | *h* |

[ítéletlogika - Szemantika (folytatás)](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark4)

[Szemantikus következményfogalom](#_bookmark7)

[Formalizálás az ítéletlogikában](#_bookmark10)



Interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy formul´at

Az ´ıt´eletlogik´aban egy I **interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy** B **formul´at**

(I |=0 B). ha a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke i az I

interpret´aci´oban. A formul´at kiel´eg´ıt˝o I interpret´aci´ot a formula

modellj´enek is szok´as nevezni.

#### Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra



(Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** (|=0 B), ha minden interpretáció kielégíti. A tautologiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.



P´eld´ak ´ıt´eletlogikai t¨orv´enyekre (Tk 71.o ´es 74.o)

|=0 A ⊃ (B ⊃ A)

|=0 A ⊃ B ⊃ (A ∧ B)

|=0 (A ⊃ B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ B) ⊃ A ⊃ C

|=0 ((A ⊃ B) ⊃ A) ⊃ A

Legyen F = {A1, A2, . . . , A*n*} formulahalmaz.



Interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy formulahalmazt

Az ´ıt´eletlogik´aban egy I interpret´aci´o **kiel´eg´ıt** egy F formulahalmazt (I |=0 F), ha a formulahalmaz minden formul´aj´anak helyettes´ıt´esi ´ert´eke i az I interpret´aci´oban.

#### Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség formulahalmazokra



(Tk.4.3.12.)

Egy F formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy F formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája h (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).

[ítéletlogika - Szemantika (folytatás)](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark4)

[Szemantikus következményfogalom](#_bookmark7)

[Formalizálás az ítéletlogikában](#_bookmark10)

Szemantikus következmény (Tk.4.4.1.)



Egy tt formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye**

az F = {F1, F2, . . . , F*n*} formulahalmaznak,

ha minden olyan I interpretációra, amelyre I |=0 {F1, F2, . . . , F*n*} fennáll, I |=0 tt is fennáll (ha I modellje {F1, F2, . . . , F*n*}-nek, akkor modellje tt-nek is).

Jelölés: {F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt



T´etel

Ha egy tt formula b´armely F felt´etelhalmaznak k¨ovetkezm´enye, akkor tt tautol´ogia (|=0 tt).

Tehát (F, tt) akkor helyes következtetésforma, ha teljesül, hogy

F |=0 tt és létezik olyan I interpretáció, melyre I |=0 F .



T´etel (Tk.4.4.3.)

Ha F-nek k¨ovetkezm´enye tt1 (F |=0 tt1) ´es

F-nek k¨ovetkezm´enye tt2 (F |=0 tt2) valamint

{tt1, tt2}-nek k¨ovetkezm´enye A ({tt1, tt2} |=0 A), akkor F-nek k¨ovetkezm´enye A (F |=0 A).



Eldont´esprobl´ema

Eld¨ont´esprobl´em´anak nevezik a logik´aban annak eld¨ont´es´et, hogy egy (F, tt) p´ar a szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom szerint helyes gondolkod´asforma-e.



T´etel (Tk.4.4.4.)

F-nek akkor ´es csak akkor k¨ovetkezm´enye tt, ha az F ∪ ¬tt vagy

F1 ∧ F2 ∧ . . . ∧ F*n* ∧ ¬tt kiel´eg´ıthetetlen.

Ennek alapján azegyik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.



T´etel (dedukci´os) (Tk.4.4.7.)

{F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt akkor ´es csak akkor, ha

{F1, F2, . . . , F*n*−1} |=0 (F*n* ⊃ tt)



T´etel (eld¨ont´esprobl´ema) (Tk.4.4.8.)

{F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt akkor ´es csak akkor, ha

|=0 F1 ⊃ (F2 ⊃ . . . (F*n*−1 ⊃ (F*n* ⊃ tt)) . . .)

Ennek alapján amásik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy tautológia-e.



Defin´ıci´o 1. v´altozat (Tk.4.3.7.)

K´et vagy t¨obb formula igazs´agt´abl´aja lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formul´ak **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jel¨ol´es´ere a ∼0 szimb´olumot haszn´aljuk.



Defin´ıci´o 2. v´altozat

Az A ´es B formul´ak **tautologikusan ekvivalensek**, ha A |=0 B ´es B |=0 A.

Ekkor |=0 (A ⊃ B) ∧ (B ⊃ A).

Példák átalakítási szabályokra



X ⊃ Y ∼0 ¬X ∨ Y

¬¬X ∼0 X

De Morgan szabályok:

1 ¬(X ∧ Y ) ∼0 ¬X ∨ ¬Y

2 ¬(X ∨ Y ) ∼0 ¬X ∧ ¬Y

Egyszerűsítési szabályok:

1 (X ∨ d) ∧ (¬X ∨ d) ∼0 d

2 (X k) ( X k) 0 k

∧ ∨ ¬ ∧ ∼

ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjunkció.



Defin´ıci´o (Tk.4.4.14.)

Legyen a F felt´etelhalmazban szerepl˝o v´altoz´ok sz´ama n. Ekkor a

**legszu˝kebb k¨ovetkezm´eny** az az {i, h}*n* → {i, h} lek´epez´es,

amely pontosan azokhoz az interpret´aci´okhoz rendel i ´ert´eket,

amelyek kiel´eg´ıtik az F-et.



El˝orek¨ovetkeztet´es

Ismert az F felt´etelhalmaz, ´es keressu¨k F lehets´eges k¨ovetkezm´enyeit. Megkeressu¨k F legszu˝kebb k¨ovetkezm´eny´et, R-t.

K¨ovetkezm´eny minden olyan tt formula, amelyre R ⊃ tt

tautol´ogia, azaz R igazhalmaza r´esze tt igazhalmaz´anak.

F = {Z ⊃ M ∨ P, Z, ¬P }

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | M | Z | Z ⊃ M ∨ P | Z | ¬P | lszk. | köv. |
| i | i | i | i | i | h | h | h/i |
| i | i | h | i | h | h | h | h/i |
| i | h | i | i | i | h | h | h/i |
| i | h | h | i | h | h | h | h/i |
| h | i | i | i | i | i | i | i |
| h | i | h | i | h | i | h | h/i |
| h | h | i | h | i | i | h | h/i |
| h | h | h | i | h | i | h | h/i |

Csak egy igazságértékre kielégíthető a feltételhalmaz.

#### Visszakövetkeztetés



Az F feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e F-nek. Mivel F |=0 B pontosan akkor, ha az F ∪ {¬B} formulahalmaz kielégíthetetlen.

Más szóval B pontosan akkor következménye F-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis, az F kielégíthetetlen.



P´elda

Be kell l´atni, hogy, ha ¬M igaz egy interpret´aci´oban, akkor F nem lesz

Legyen F = {Z ⊃ M ∨ P, Z, ¬P } ´es l´assuk be, hogy M k¨ovetkezm´eny.

kiel´eg´ıthet˝o. Ahhoz,hogy minden felt´etelformula i legyen Z = i, P = h

mellett Z ⊃ M ∨ P -nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis,

akkor Z ⊃ M ∨ P = h lehet csak. Teh´at M k¨ovetkezm´enye F-nek.

[ítéletlogika - Szemantika (folytatás)](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark4)

[Szemantikus következményfogalom](#_bookmark7)

[Formalizálás az ítéletlogikában](#_bookmark10)

Tegyük fel, hogy adott valamilyen köznapi vagy matematikai probléma. Ennek természetes nyelvű egyszerű vagy összetett kijelentő mondatokkal való leírását ismerjük.

**Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban** 1

Az **egyszerű kijelentő mondatok** formalizálására bevezetünk egy

##### azonosítót (állításjel, ítéletváltozó).

Az **összetett mondatot** analizáljuk, átalakítjuk azonos értelmű, de egyszerű kijelentő mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felírt mondattá, ahol **a nyelvtani összekötők egyben logikai**

**összekötők** (logikai műveletek).

1Tk.54-55.o.

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:

Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.

Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.

A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.

Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanu´ vallomása hiteles akkor az ablakon mászott be.

A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be.

A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:

Ha férfi a tettes( F ), akkor kistermetű( K). F ⊃ K

Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be( A). K ⊃ A

A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott( R). F ∨ R

Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanu´ vallomása hiteles (H), akkor az ablakon mászott be. (R ∧ H) ⊃ A

A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be. ¬A

A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi. ¬F

A feltételhalmaz: {F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A}

A feltételezés szerinti következmény: ¬F

Előrekövetkeztetés:

Az {F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A} formulahalmazt egyetlen interpretáció elégíti ki:

A = h, F = h, K = h, R = i, H = h, azaz a legszűkebb következényt leíró formula: ¬A ∧ ¬F ∧ ¬K ∧ R ∧ ¬H (¬A ∧ ¬F ∧ ¬K ∧ R ∧ ¬H) ⊃ ¬F tautológia, így ¬F következmény.

Visszakövetkeztetés:

¬F következmény, mivel a negáltját hozzávéve a feltételhalmazhoz, a kapott formulahalmaz:

{F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A, F } kielégíthetetlen.

# Logika és számításelmélet

## rész Logika

Harmadik előadás

[Elsőrendű logika – bevezetés](#_bookmark0)

[Az elsőrendű logika szintaxisa](#_bookmark7)

Az ítéletlogikában nem foglalkoztunk az állítások minősítésével és az

állítások leírásával. Az állítás definíciója szerint az állítást egy kijelentő mondattal ki lehet fejezni.

Ha a kijelentő mondat *alanya valamely konkrét dolog*, akkor az állítást **nulladrendű állítás**nak hívjuk. Az ilyen állítások formális leírására egy relációt (logikai függvényt) definiálunk.



P´eld´ak

* E(x) = i, ha x eg´esz sz´am
* P (x) = i, ha x pr´ımsz´am
* L(x, y, z) = i,ha z az x ´es az y legnagyobb k¨oz¨os oszt´oja

Az állítás konkrét egyedekkel behelyettesített reláció. Pl.: E(9) vagy L(9,6,3) állítások, de L(9,6,z) nem állítás (paraméteres állítás).

Ha a kijelentő mondat *alanya egy halmaz*, akkor az állítást

**elsőrendű állítás**nak hívjuk.

Ilyenkor az állítás az összes elemre egyidejűleg fennálló megállapítást/általánosítást vagy a halmaz bizonyos elemeire (nem feltétlenül mindre) fennálló megállapítást/létezést fogalmaz meg.

Leírásukhoz a kvantorokat (∀,∃) használjuk.



P´elda

* ∀xE(x) azt jelenti, hogy a halmaz minden eleme eg´esz sz´am.
* ∃xP (x) azt jelenti, hogy a halmazban van olyan elem, ami

pr´ımsz´am.

Az 1800-as évek végén és az 1900-as évek elején a matematikai struktu´rák (halmazelmélet és az aritmetika – számelmélet) logikai vizsgálatához meg kellett teremteni mind a nulladrendű, mind az elsőrendű állítások leírására szolgáló eszközöket. Szükségessé vált a matematikai struktu´rákat leíró nyelv definiálása.

#### Definíció



A matematikai struktu´ra egy (U, R, M, K) halmaznégyes, ahol

* U : nem üres halmaz, a struktu´ra értelmezési tartománya (amennyiben U egyfajtáju´ elemekből áll)
* R: az U -n értelmezett n-változós (n = 1, 2, . . . , k) logikai függvények (**alaprelációk**) halmaza
* M : az U -n értelmezett n-változós (n = 1, 2, . . . , k) matematikai függvények (**alapműveletek**) halmaza
* K: az U megjelölt elemeinek egy (esetleg üres) részhalmaza



A **struktu´ra szignatu´r´aja** (ν1, ν2, ν3 eg´esz´ert´eku˝ fgv.egyu¨ttes) megadja az alaprel´aci´ok ´es az alapmu˝veletek arit´as´at, valamint K elemsz´am´at.

Adott matematikai struktu´ra leíró nyelv ábécéjének logikán kívüli része áll:

* az R halmazbeli alaprelációk *nevei*ből
* az M halmazbeli alapműveletek *nevei*ből
* a K halmazbeli elemek *nevei*ből

Ezekkel a nevekkel már lehet egyszerű (nulladrendű és paraméteres) állításokat leírni. Az R, M, K-beli nevek a leíró nyelv **logikán kívüli** részét képezik.

Az összetett állítások és az elsőrendű állítások leírására kibővítjük az ábécét a **logikai szimbólumok**kal (az ábécé logikai része):

* individuumváltozók
* unér és binér logikai műveleti jelek ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok ∀, ∃
* elválasztójelek ( ) ,

Ez együtt egy adott matematikai struktu´ra logikai leíró nyelvének az ábécéje.

(N0; =; s, +, ∗; 0) együttes, ahol

**P´elda – elemi aritmetika** 1

* x, y, . . .: individuumvátozók befutják a természetes számok halmazát (N0-t)

• =: az {(x, x)} igazhalmazu´ alapreláció neve

* s: az egyváltozós rákövetkezés függvény neve

• + és ∗: rendre az összeadás és a szorzás műveletek nevei

* 0: a megjelölt univerzumelem neve (az az elem, amely nem tartozik a rákövetkezés függvény értékkészletébe)

1Tk.36-37.o.

A **struktu´ra szignatu´rája** alatt az alaprelációk és az alapműveletek aritásait, valamint a konstansok számát megadó ν1, ν2, ν3 egész értékű függvényeket értjük.

Esetünkben: ν1(=) = 2, ν2(s) = 1, ν2(+) = 2, ν2(∗) = 2, ν3 = 1

Felsorolással megadva:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| = | s | + | ∗ | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Az elemi aritmetika leíró nyelvének ábécéjében az N0 kezelésére a

**változók** (x, y, . . .) szolgálnak (individuumváltozók), az

{=, s, +, ∗; 0} jelek a megfelelő **leképezések azonosítói**. A leíró nyelv szignatu´rája ugyanaz, mint a struktu´ráé.

Az alaprelációkkal (itt az = relációval) lehet állításokat leírni, pl.

2 = 3, 5 = 5. De nem állítás pl. y = 5 vagy z = w (paraméteres

állítások). Egyéb ismert egyszerű állításokat pl. a kisebb egyenlő relációt ezen a nyelven csak összetett állítás formájában lehet felírni (formalizálni). Ehhez a nyelv ábécéjét logikai résszel bővítjük ki. Ezek:

* individuumváltozók: x, y, . . .
* logikai összekötőjelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok: ∀, ∃
* elválasztójelek: ( ) ,

Definiáljuk (formalizáljuk) az aritmetika logikai leíró nyelvén a ≤

relációt:



x ≤ y

x ≤ y =*def* ∃z((x + z) = y)

*Megjegyzés*: Az aritmetika univerzuma *egyfajtáju´* elemekből, a természetes számokból állt. Egy matematikai struktu´ra univerzuma *többfajtáju´* elemekből is állhat. Például a térgeometriában pontok, egyenesek és síkok alkotják az értelmezési tartományt. Ekkor a leíró nyelv ábécéjében a fajták elnevezésére is bevezetünk jeleket. Esetünkben ezek a nevek: p, e, s. így az értelmezési tartomány

U*p* ∪ U*e* ∪ U*s* lesz, a struktu´ra pedig az (U*p* ∪ U*e* ∪ U*s*, R, M, K)

együttes.

Olyan ábécével kell hogy rendelkezzen, melynek a logikán kívüli szimbólumai és azok szignatu´rája paraméterezéssel bármely adott matematikai struktu´ra szignatu´rájával megfeleltethető kell legyen,

**Az elso˝rendu˝ logika le´ır´o nyelve (**L**) –**

**k¨ovetelm´enyek**

és ennélfogva a szimbólumok lehessenek a struktu´ra relációinak, műveleteinek és megjelölt elemeinek a nevei. Más szóval a nyelv alkalmas kell, hogy legyen tetszőleges szignatu´ráju´ matematikai struktu´rák leírására.

**Egyféle elemből álló** U **esetén** az (U, R, M, K) struktu´ra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az L nyelv ábécéje: (P r, F n, Cnst), szignatu´rája: (ν1, ν2, ν3).

* P r: predikátumszimbólumok halamaza

ν1: P ∈ P r-re megadja P aritását (k)

* F n: függvényszimbólumok halamaza

ν2: f ∈ F n-re megadja f aritását (k)

* Cnst: konstansszimbólumok halamaza

ν3: megadja a konstansok számát

**Többféle elemből álló** U **esetén** az (U, R, M, K) struktu´ra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az L nyelv ábécéje: (Srt, P r, F n, Cnst), szignatu´rája: (ν1, ν2, ν3).

* Srt: nemüres halmaz, melynek π*j* elemei fajtákat szimbolizálnak
* P r: predikátumszimbólumok halamaza

ν1: P ∈ P r-re megadja P aritását (k), és hogy milyen fajtájuák az egyes argumentumok (π1, π2, . . . , π*k*)

* F n: függvényszimbólumok halamaza

ν2: f ∈ F n-re megadja f aritását (k), és hogy milyen fajtájuák az egyes argumentumok, valamint a függvény értéke (π1, π2, . . . , π*k*; π*f* )

* Cnst: konstansszimbólumok halamaza

ν3: megadja minden fajtához a konstansok számát.

* különböző fajtáju´ individuumváltozók (minden fajtához megszámlálhatóan végtelen sok): x, y, y*k*, . . .
* unér és binér logikai műveleti jelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok: ∀, ∃
* elválasztójelek: ( ) ,

Az L nyelv ábécéjére V [V*ν* ]-vel hivatkozunk, ahol V*ν* adja meg a

(ν1, ν2, ν3) szignatu´ráju´ (Srt, P r, F n, Cnst) halmaznégyest.

[Elsőrendű logika – bevezetés](#_bookmark0)

[Az elsőrendű logika szintaxisa](#_bookmark7)

A nyelv kifejezései informálisan:

* **termek**: a matematikai leképezéseket szimbolizálják
* **formulák**: a logikai leképezéseket szimbolizálják

**Egyfajtáju´** eset.

**Az elso˝rendu˝ logika szintaxisa** 2 **– term I.**

#### Termek – L*t*(V*ν*)



1. (alaplépés) Minden individuumváltozó és konstans szimbólum term.
2. (rekurzív lépés) Ha az f ∈ F n k-változós függvényszimbólum

és t1, t2, . . . , t*k* termek, akkor f (t1, t2, . . . , t*k*) is term.

1. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával

áll elő.

2Tk.112.o.

**Egyfajtáju´** eset.

#### Formulák – L*f* (V*ν*)



1. (alaplépés) Ha a P ∈ P r k-változós predikátumszimbólum és t1, t2, . . . , t*k* termek, akkor P (t1, t2, . . . , t*k*) formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
   * Ha A formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A és B formulák, akkor (A B) is formula, ahol a három binér művelet bármelyike.

◦ ◦

1. Ha A formula, akkor ∀xA és ∃xA is az.
2. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

**Többfajtáju´** eset.

#### Termek – L*t*(V*ν*)



1. (alaplépés) Minden π ∈ Srt fajtáju´ individuumváltozó és konstans szimbólum π fajtáju´ term.
2. (rekurzív lépés) Ha az f ∈ F n (π1, π2, . . . , π*k*; π*f* ) fajtáju´ függvényszimbólum és t1, t2, . . . , t*k* rendre π1, π2, . . . , π*k* fajtáju´ termek, akkor f (t1, t2, . . . , t*k*) π*f* fajtáju´ term.
3. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával

áll elő.

**Többfajtáju´** eset.

#### Formulák – L*f* (V*ν*)



1. (alaplépés) Ha a P ∈ P r (π1, π2, . . . , π*k*) fajtáju´ predikátumszimbólum és t1, t2, . . . , t*k* rendre π1, π2, . . . , π*k* fajtáju´ termek, akkor P (t1, t2, . . . , t*k*) formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
   * Ha A formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A és B formulák, akkor (A B) is formula, ahol a három binér művelet bármelyike.

◦ ◦

1. Ha A formula, akkor ∀xA és ∃xA is az.
2. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Elsőrendű logikai nyelv: L(V*ν* ) = L*t*(V*ν* ) ∪ L*f* (V*ν* ).

* ¬A negációs
* A ∧ B konjukciós
* A ∨ B diszjunkciós
* A ⊃ B implikációs
* ∀xA univerzálisan kvantált
* ∃xA egzisztenciálisan kvantált

A ∀xAés ∃xA formulák esetén az A formula a kvantált formula törzse - mátrixa.

Vezessük be a ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, ⊃ prioritási sorrendet, ekkor az

ítéletlogikához hasonlóan definiáljuk:

* a zárójelelhagyásokat
* a műveletek és a kvantorok hatáskörét
* a komponens és prímkomponens fogalmakat
* egy formula fő műveleti jelét



Az ´ıt´eletlogik´aban minden formul´at fel lehet ´ırni a pr´ımformul´ak (azaz ´ıt´eletv´altoz´ok) ´es a mu˝veletek seg´ıts´eg´evel. Az els˝orendu˝ nyelvben is vannak ilyen formul´ak. **Pr´ımformul´ak***a* az els˝orendu˝ nyelvben az atomi formul´ak ´es a kvant´alt formul´ak.

*a*Tk.113.o.



Kozvetlen r´eszterm

1. Konstansnak ´es individuumv´altoz´onak nincs k¨ozvetlen r´esztermje.
2. Az f (t1, t2, . . . , t*k*) term k¨ozvetlen r´esztermjei a t1, t2, . . . , t*k*

termek.



Kozvetlen r´eszformula

1. Egy atomi formul´anak nincs k¨ozvetlen r´eszformul´aja.
2. ¬A k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

3 Az (A ◦ B) k¨ozvetlen r´eszformul´ai az A (baloldali) ´es a B

(jobboldali) formul´ak.

4 A QxA (Q ∈ {∀, ∃}) k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

Egy formulában egy logikai művelet hatáskörében lévő részformulá(ka)t **komponens formuláknak** nevezzük.



1. Egy atomi formul´anak nincs k¨ozvetlen komponense

(**pr´ımformula**).

1. ¬A k¨ozvetlen komponense az A formula.
2. Az (A ◦ B) k¨ozvetlen komponensei az A ´es a B formul´ak.

4 A QxA (Q ∈ {∀, ∃}) formul´anak nincs k¨ozvetlen komponense

(**pr´ımformula**).

*Megjegyzés*: **prímkomponens**nek nevezzük azokat a prímformulákat, amelyekből a formula kizárólag a ¬, ∧, ∨, ⊃ műveletek segítségével épül fel.



Ennek megfelel˝oen a **pr´ımformul´ak**:

1. Egy atomi formula pr´ımformula.
2. Egy QxA formula pr´ımformula.

#### Term szerkezeti fája.

**Szerkezeti f´ak** 3



Egy t term szerkezeti fája egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

* a gyökeréhez a t term van rendelve,
* ha valamelyik csu´csához egy tj term van rendelve, akkor az adott csu´cs gyerekeihez a tj term közvetlen résztermjei vannak rendelve,
* leveleihez individuumváltozók vagy konstansok vannak rendelve.

3Tk. 116-118.o.

#### Formula szerkezeti fája.



Egy F formula szerkezeti egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

* a gyökeréhez az F formula van rendelve,
* ha valamelyik csu´csához egy F j formula van rendelve, akkor az adott csu´cs gyerekeihez az F j formula közvetlen részformulái vannak rendelve,
* leveleihez atomi formulák vannak rendelve.

Egy A formula **logikai összetettsége**: A(A)



Szerkezeti rekurzi´o szerinti defin´ıci´o (Tk.5.1.15)

1 Ha A atomi formula, akkor A(A) = 0

2 A(¬A) = A(A) + 1

3 A(A ◦ B) = A(A) + A(B) + 1

4 A(QxA) = A(A) + 1



**Egy formul´aban egy** x **v´altoz´o egy el˝ofordul´asa**

* **szabad**, ha nem esik x-re vonatkoz´o kvantor hat´ask¨or´ebe
* **k¨ot¨ott**, ha x-re vonatkoz´o kvantor hat´ask¨or´ebe esik



**Egy** x **v´altoz´o egy formul´aban**

* **k¨ot¨ott v´altoz´o**, ha x minden el˝ofordul´asa k¨ot¨ott
* **szabad v´altoz´o**, ha x minden el˝ofordul´asa szabad
* **vegyes v´altoz´o**, ha x-nek van szabad ´es k¨ot¨ott el˝ofordul´asa is

*Megjegyzés*: Ha egy formulában egy változó kötött, akkor

átnevezve ezt a változót a formulában elő nem forduló változónévvel a formula ekvivalens marad az eredetivel. Ily módon minden formula átírható változóátnevezésekkel *vegyes változót* már *nem tartalmazó formulává*.



Szabad ´es k¨ot¨ott v´altoz´ok

A formula: ∀xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

A pr´ımkomponensek: ∀xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)

A szabad individuumv´altoz´ok: v, w



Z´arts´ag

* **Egy formula z´art**, ha minden v´altoz´oja k¨ot¨ott.
* **Egy formula nyitott**, ha legal´abb egy individuumv´altoz´onak

van legal´abb egy szabad el˝ofordul´asa.

* **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

1. **rendű állítások**at szimbolizálnak az L nyelven a zárt formulák vagy **mondatok**.

#### Alapkifejezés



**Alapkifejezés** a változót nem tartalmazó L kifejezés (alapformula, alapterm). Ezeket alappéldányoknak is nevezik. Az atomi formulák alappéldányait két csoportba soroljuk:

* 1. Egy atomi formula **alapatom**, ha argumentumai konstans szimbólumok vagy egy megadott univerzum elemei (pl. P (c))
  2. Egy atomi formulát **az atomi formula alappéldányának**

nevezzük, ha argumentumai **alaptermek** (pl. Q(f (a, b), a))

*Megjegyzés*: Egy atomi formulát (nem alappéldány) egyébként paraméteres állításnak is neveznek.

# Logika és számításelmélet

## rész Logika

Negyedik előadás

[Az elsőrendű logika szemantikája](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark9)

Egy elsőrendű logikai nyelv L[V*ν*] interpretációja egy, az L nyelvvel azonos szignatu´ráju´ (U, R, M, K) matematikai struktu´ra.

*Másik megfogalmazás*: egy, a szignatu´rának megfelelő U halmaz megadása, ezen a P r, F n, Cnst szimbólumhalmazok szignatu´rájával megegyező R, M , K reláció-, művelet- és konstanshalmaz definiálása.

Az interpretáció működése: = *Srt*, *P r*, *F n*, *Cnst*



I I (I I I I )

függvénynégyes, ahol:

* *Srt* : π *π*, ahol ha Srt egyelemű, akkor az interpretáció U

I ›→ U

univerzuma egyfajtáju´ elemekből áll

* az I*P r* : P ›→ P I, ahol P I a struktu´ra R halmaza
* az I*F n* : f ›→ f I, ahol f I a struktu´ra M halmaza
* az I*Cnst* : c ›→ cI, ahol cI a struktu´ra K halmaza



V´altoz´oki´ert´ekel´es

az interpret´aci´o univerzuma.

Egy κ : V → U lek´epez´es, ahol V a nyelv v´altoz´oinak halmaza, U pedig

|x|I*,κ* az U univerzumbeli κ(x) elem.

Legyen egy formula valamely L(P1, P2, . . . , P*n*; f1, f2, . . . , f*k*) formalizált nyelven, ahol (r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*) az L nyelv, típusa/szignatu´rája (ν1, ν2, ν3).

1. lépésVálasztunk egy S = U (R1, R2, . . . , R*n*; o1, o2, . . . , o*k*) matematikai struktu´rát, amelynek a típusa/szignatu´rája

(r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*)/(ν1, ν2, ν3) megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációknak illetve műveleteknek feleltetjük meg: P*i* = P*i*I , f*k* = f*k*I (ha az interpretáló struktu´rának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktu´ra leíró nyelvét, akkor P*i*I = R*i* neve és f*k*I = o*k* neve. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R*i* és o*k* jelentése egyértelmű).

1. lépésA nem kötött individuumváltozók kiértékelése ( x I*,κ*) és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

| |



Termek szemantik´aja

1 ha c konstansszimb´olum, |c|I*,κ* az U -beli cI elem

2 ha x individuumv´altoz´o, |x|I*,κ* a κ(x) ∈ U elem

(ahol κ egy v´altoz´oki´ert´ekel´es)

3 |f (t1, t2, . . . , t*n*)|I*,κ* = f I((|t1|I*,κ*, |t2|I*,κ*, . . . , |t*n*|I*,κ*))

#### Formulák szemantikája



1 P (t1, t2, . . . , t*n*) I*,κ* = i, ha ( t1 I*,κ*, t2 I*,κ*, . . . , t*n* I*,κ*) P I, ahol a P I jelöli a P I reláció igazhalmazát.

| | | | | | | | ∈

2 |¬A|I*,κ* = ¬|A|I*,κ*

|A ∧ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ∧ |B|I*,κ*

|A ∨ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ∨ |B|I*,κ*

|A ⊃ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ⊃ |B|I*,κ*

* 1. |∀xA|I*,κ* = i, ha|A|I*,κ*∗ = i κ minden κ∗ x variánsára

|∃xA|I*,κ* = i, ha|A|I*,κ*∗ = i κ legalább egy κ∗ x variánsára

A továbbiakban egyfajtáju´ struktu´rákkal és egyfajtáju´ nyelvvel (Srt egyelemű halmaz) foglalkozunk az elsőrendű logika tárgyalása során.

L

∀xP (x, y) formula kifejtése



U = {a, b, c}, formulakifejtés κ(y) = a, b, c-re:

* + κ(y) = a

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, a)|I = P I(a, a) ∧ P I(b, a) ∧ P I(c, a)

* + κ(y) = b

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, b)|I = P I(a, b) ∧ P I(b, b) ∧ P I(c, b)

* + κ(y) = c

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, c)|I = P I(a, c) ∧ P I(b, c) ∧ P I(c, c)

∀x∃y(P (x, y) ⊃ R(x, y)) formula kifejtése



U = {a, b, c}

|∀x∃y(P (x, y) ⊃ R(x, y))|I

=

|∃y(P (a, y) ⊃ R(a, y))|I ∧

|∃y(P (b, y) ⊃ R(b, y))|I ∧

|∃y(P (c, y) ⊃ R(c, y))|I

=

(P I(a, a) ⊃ RI(a, a))∨(P I(a, b) ⊃ RI(a, b))∨(P I(a, c) ⊃ RI(a, c)) ∧

. Σ

(P I(b, a) ⊃ RI(b, a)) ∨ (P I(b, b) ⊃ RI(b, b)) ∨ (P I(b, c) ⊃ RI(b, c))

∧

.(P I(c, a) ⊃ RI(c, a)) ∨ (P I(c, b) ⊃ RI(c, b)) ∨ (P I(c, c) ⊃ RI(c, c))Σ ∧

* + L nyelv:

= (=, P1, P2; a, b, f1, f2)

L

szignatu´ra: (2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)

* + A struktu´ra leíró nyelve:

S = N(=, <, >; 0, 1, +, )

∗

szigantu´ra: (2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I*P r* : P → P I | = | P1 | P2 |
|  | = | < | > |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| I*F n* : f → f I | a | b | f1 | f2 |
|  | 0 | 1 | + | ∗ |

I*Cnst*: nincs konstans, csak két db 0 változós függvény

*Az* t = f1(x, f2(x, y)) *term jelentésének megállapítása*:

|t|I*,κ* = |f1(x, f2(x, y))|I*,κ* =

|f1|I (|x|I*,κ*, |f2(x, y)|I*,κ*) =

+(x, ∗(x, y)) =

x + x ∗ y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x + x ∗ y |
| κ1 | 1 | 1 | 2 |
| κ2 | 2 | 3 | 8 |
| κ3 | 0 | 4 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |

*A* P1(t, f1(y, f2(x, y))) *formula jelentésének megállapítása*:

|P1(t, f1(y, f2(x, y)))|I*,κ* =

|P1|I (|t|I*,κ*, |f1|I (|y|I*,κ*, |f2|I (|x|I*,κ*, |y|I*,κ*))) =

< (+(x, ∗(x, y)), +(y, ∗(x, y))) =

< (x + x ∗ y, y + x ∗ y) = (x + x ∗ y) < (y + x ∗ y)

Egy kvantormentes formula kiértékelése: a formula minden alap előfordulását generáljuk és így minden állítás előáll I-ben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | *y* | (*x* + *x* ∗ *y*) *<* (*y* + *x* ∗ *y*) |
| 1 | 1 | (1 + 1 ∗ 1) *<* (1 + 1 ∗ 1) = *h* |
| 2 | 3 | (2 + 2 ∗ 3) *<* (3 + 2 ∗ 3) = *i* |
| . . . | *. . .* | *. . .* |

*Egzisztenciális formula jelentésének megállapítása*:

xP1(a, f1(x, x)) I*,κ* = i, ha P1(a, f1(x, x)) I*,κ*∗ = i κ legalább egy κ∗ variánsára.

|∃ | | |

Azaz ebben az interpretációban, ha 0 < (x + x) = i

legalább egy u ∈ N esetén.

Nézzük meg a formula értéktábláját:

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 < (x + x) |
| 0 | h |
| 1 | i |
| . . . | . . . |

Mivel az x = 1-re a formula törzse i, ezért a ∃x(0 < (x + x)) formula is i.

*Univerzális formula jelentésének megállapítása*:

xP1(a, f1(b, x))) I*,κ* = i, ha P1(a, f1(b, x))) I*,κ*∗ = i κ minden κ∗ x variánsára.

|∀ | | |

Nézzük meg a formula értéktábláját:

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 < (1 + x) |
| 0 | i |
| 1 | i |
| . . . | . . . |

Mivel minden egészre a formula törzse i, ezért a x(0 < (1 + x)) formula

∀

értéke i.

Egy 1. rendű formula prímformulái az atomi formulák (ezek paraméteres

állítások az interpretációkban) és a kvantált formulák (ezek állítások, ha zártak).

Egy 1. rendű formula prímkomponensei a formula azon prímformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Az **igazságtáblában** (ítéletlogika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula prímkomponensei) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket (interpretáció) írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

Egy 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a formula szabad változói, a prímkomponensek és a formula kerülnek. (Mivel a prímformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az individuumváltozók kiértékelése után válnak

állításokká.) Az individuumváltozók alá a lehetséges változókiértékelések, a prímformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a formulának a prímformulák értékei alapján kiszámított helyettesítési értékei találhatók.

* + Legyen az interpretáló struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

**A formula értéktáblája – példa**

A formula: F = ∃xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

* + A prímkomponensek: ∃xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)
  + A szabad individuumváltozók: v,w
  + Legyen az interpretáló struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

* + Ekkor |∃xP (x))|I = i, a többiek paraméteres állítások.

A formula: F = ∃xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

* + A prímkomponensek: ∃xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)
  + A szabad individuumváltozók: v,w
  + Legyen az interpretáló struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

* + Ekkor |∃xP (x))|I = i, a többiek paraméteres állítások. Az értéktábla:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* | *w* | |∃*xP* (*x*))|*I* | |∃*yQ*(*w, y*)|*I* | |*P* (*v*)|*I* | |∀*zQ*(*w, z*)|*I* | *F* |
| 1 | 1 | *i* | |∃*yQ*(1*, y*)|*I,κ* = *i* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(1*, z*)|*I,κ* = *h* | *h* |
| 1 | 2 | *i* | |∃*yQ*(2*, y*)|*I,κ* = *i* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(2*, z*)|*I,κ* = *i* | *i* |
| 1 | 3 | *i* | |∃*yQ*(3*, y*)|*I,κ* = *h* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(3*, z*)|*I,κ* = *h* | *h* |
| 2 | 1 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 2 | 2 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 2 | 3 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 1 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 2 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 3 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |

[Az elsőrendű logika szemantikája](#_bookmark0)

[Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai](#_bookmark9)



I, κ |= A

Az L **egy** I **interpret´aci´oja adott** κ **v´altoz´oki´ert´ekel´es mellett**

´ert´eke i. Ha az A formula mondat (z´art formula) ´es I |= A, akkor azt

**kiel´eg´ıt egy 1. rendu˝** A **formul´at** (I, κ |= A) , ha a formula |A|I*,κ*

mondjuk, hogy az I ´altal megadott S struktu´ra el´eg´ıti ki A-t, ´ıgy S |= A.

M´as sz´oval S **modellje** A**-nak**.



I |= F

Ha L egy I interpret´aci´oj´ara az F = {F1, F2, . . . , F*n*} z´art

**kiel´eg´ıti** F-et. Jel¨ol´es: I |= F.

formulahalmazban |F*k*|I ´ert´eke i, minden 1 ≤ k ≤ n ´ert´ekre, akkor I



Kiel´eg´ıthet˝o formula

egy I interpret´aci´o ´es κ v´altoz´oki´ert´ekel´es, hogy I, κ |= tt.

Azt mondjuk, hogy egy tt **formula kiel´eg´ıthet˝o** ha L-hez van legal´abb



Kiel´eg´ıthet˝o formulahalmaz

Azt mondjuk, hogy F **z´art formulahalmaz kiel´eg´ıthet˝o** ha L-nek

legal´abb egy I interpret´aci´oja kiel´eg´ıti, azaz I |= F.



Logikailag igaz

Azt mondjuk, hogy egy tt formula **logikailag igaz (logikai t¨orv´eny)**, ha

v´altoz´oki´ert´ekel´esre. Ez azt jelenti, hogy tt igaz minden lehets´eges

interpret´al´o struktu´r´aban. Jel¨ol´es: |= tt.

tt igaz minden lehets´eges I interpret´aci´ora ´es minden κ



Tautol´ogia

Azt mondjuk, hogy egy tt formula **tautol´ogia**, ha tt ´ert´ekt´abl´aj´aban a pr´ımkomponensekhez rendelhet˝o ¨osszes lehets´eges igazs´ag´ert´ek hozz´arendel´es eset´en a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke i. Jel¨ol´es: |=0 tt



P´elda

∀xP (x) ∧ ∀xQ(x) ⊃ ∀xP (x) formula pr´ımkomponens alakja

p ∧ q ⊃ p. ami tautol´ogia, de

∀x(P (x) ∧ Q(x)) ⊃ ∀xP (x) pr´ımkomponens alakja

r ⊃ p nem tautol´ogia (viszont mindkett˝o logikailag igaz!)

#### Kielégíthetetlenség



Azt mondjuk, hogy tt formula illetve formulahalmaz **kielégíthetetlen** (nem kielégíthető), ha -hez nincs olyan interpretáció, hogy = tt illetve, hogy = . Más szóval egy tt formula kielégíthetetlen, ha minden interpretációban a tt értéktáblájának minden sorában tt helyettesítési értéke h(amis). Az formulahalmaz kielégíthetetlen, ha az

F

I | F

L I I |

F

közös értéktáblájában minden sorban van legalább egy eleme -nek, amelynek a helyettesítési értéke h(amis).

F F

A két szemantikus tulajdonság fennállásának vizsgálatához az összes inerpretáló struktu´rára szükség van.

Legyenek rendre az L nyelv szignatu´rája szerint

**Lehets´eges interpret´al´o struktu´r´ak sz´ama adott**

U **´es adott szignatu´ra mellett**

(r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*) a predikátumszimbólumok és függvényszimbólumok aritásai. Legyen U az univerzum, ahol |U | = M .

A´llapítsuk meg hány különböző (r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*)

szignatu´ráju´ struktu´ra létezik U felett?

Ezekkel az aritásokkal relációkat

*n*

*j*=1

Q

2*M rj*

, míg műveleteket

*k*

*t*=1

Q

M *M st*

féleképp lehet definiálni. Az összes definiálható struktu´ra száma a kettő

Q

Q

szorzata: (

*n j*=1

2*Mrj* ) ∗

*k t*=1

M *Mst* .

*Alsó becslés* esetén csak a lehetséges relációk számát állapítjuk meg. Egy

n változós reláció esetén az értelmezési tartomány elemszáma

U *n* = M *n*, a relációt megadhatjuk az U *n* halmaz egy részhalmazának kijelölésével. A lehetséges n-változós relációk száma megegyezik az

| |

értelmezési tartomány hatványhalmaza (összes részalmazai halmaza) számosságával (U *n*) -el, ez ha U megszámlálhatóan végtelen, akkor kontínuum számosságu´ (több mint megszámlálhatóan végtelen), ami algoritmikusan nem kezelhető.

|P |

Legyenek rendre az nyelv szignatu´rája szerint (r1, r2, . . . , r*n*) a predikátumszimbólumok aritásai.

L

Előállítjuk minden j = 1, . . . , n értékre az U *rj* értékeinek felhazsnálásával P*rj* összes alapatomját, tekintsük ezek egy rögzitett sorrendjét (bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy-egy szint minden csu´csából pontosan két él indul ki, az egyik a szinthez rendelt alapatommal (ez jelenti, hogy az alapatom igaz az élhez tartozó interpretációkban), a másik ennek negáltjával van címkézve (ez jelenti, hogy az alapatom hamis az élhez tartozó interpretációkban). A bináris fa ágai adják meg a lehetséges interpretációkat.

Adott nyelv esetén a predikátumszimbólumokra az összes interpretáció megadása szemantikus fával.

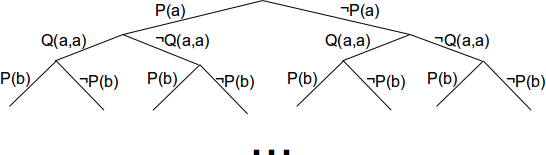
Legyen

* + a formulahalmaz:

K = {∀xP (x), ∀y∀z(¬Q(y, z) ∨ ¬P (z)), ∀u∀vQ(u, v)}

* + U = {a, b, c}
  + a B bázis: P (a), Q(a, a), P (b), Q(a, b), . . ., Q(c, c) alapatom sorozat

A szemantikus fa a B bázis alapján:



# Logika és számításelmélet

## rész Logika

O¨ tödik előadás

[Következményfogalom az elsőrendű logikában](#_bookmark0)

[Formulák logikailag ekvivalens átalakításai](#_bookmark2)

[Rezolu´ciós elv- rezolu´ciós kalkulus](#_bookmark8)

#### Logikai vagy szemantikus következmény



Azt mondjuk, hogy a tt formula logikai (szemantikus) következménye az F formulahalmaznak, ha minden olyan I interpretációra, amelyre I |= F teljesül, az I |= tt is fennáll.

Más szóval F |= tt teljesül, ha minden interpretáló struktu´rában, az F, tt közös értéktáblájában minden olyan sorban, ahol az F elemeinek helyettesítési értéke igaz, a tt helyettesítési értéke is igaz.

*Jelölés*: F |= tt vagy {F1, F2, . . . , F*n*} |= tt.



T´etel (logikailag igaz)

Ha egy tt formula b´armely F felt´etelhalmaznak k¨ovetkezm´enye,

akkor tt **logikailag igaz**.

Az ítéletlogikában bebizonyított tételek itt is igazak.



T´etel

F-nek szemantikus k¨ovetkezm´enye tt, akkor ´es csak akkor, ha az

F ∪ {¬tt} kiel´eg´ıthetetlen.

Egyik **eldöntésprobléma**: tetszőleges 1.rendű formulahalmazról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.



T´etel

Ha F-nek k¨ovetkezm´enye tt1 ´es F-nek k¨ovetkezm´enye tt2,

k¨ovetkezm´enye A.

valamint, {tt1, tt2}-nek k¨ovetkezm´enye A, akkor az F-nek

A következményfogalom alapján, annak eldöntése, hogy F |= tt

*elméletileg* megoldható az interpretáló struktu´rákban az

F1, F2, . . . , F*n* és tt-re kapott közös értéktábla alapján.



Legszu˝kebb ko¨vetkezm´eny

Ha minden interpret´al´o struktu´r´aban, a tt a k¨oz¨os ´ert´ekt´abl´anak pontosan azokban a soraiban igaz, ahol F1, F2, . . . , F*n* mindegyike igaz, akkor tt **a legszu˝kebb k¨ovetkezm´enye** F**-nek**.



Ekvivalencia

Az A ´es B els˝orendu˝ formul´ak **logikailag ekvivalensek**, ha

{A} |= B ´es {B} |= A.

#### Tétel



tt elsőrendű formula. Ha |=0 tt, akkor |= tt. (Ha tt tautológia, akkor tt logikailag igaz.)

**Biz.:** Ha |=0 tt, akkor tt igaz a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére. Tekintsük a tt egy I interpretációját, az individuumváltozók egy κ kiértékelése mellett. Ekkor a prímkomponensek igazságértéke kiszámolható és bármi is lesz a konkrét értékük, ezután a tt helyettesítési értéke i lesz (mivel a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére igaz).

#### Tétel



Ha F |=0 tt, akkor F |= tt.

**Biz.:** Az F prímkomponenseinek minden, az F-et kielégítő I interpretációjára (I |=0 F) I kielégíti tt-t is. Ha az I interpretáció kielégíti F-et, akkor kielégíti tt-t is mivel az egyidejűleg a prímkomponensekre vonatkozó igazságkiértékelés is.



T´etel

Ha A ´es B tautologikusan ekvivalens (A ∼0 B), akkor A ´es B

logikailag ekvivalens (A ∼ B).



Dedukci´os t´etel

**Biz.:** ugyanaz, mint ´ıt´eletlogik´aban

{F1, F2, . . . , F*n*} |= tt ⇐⇒ {F1, F2, . . . , F*n*−1} |= F*n* ⊃ tt.



T´etel

{F1, F2, . . . , F*n*} |= tt ⇐⇒

|= F1 ⊃ (F2 ⊃ (. . . ⊃ (F*n*−1 ⊃ (F*n* ⊃ tt)) . . .)) (logikailag igaz).

**Biz.:** A dedukci´os t´etel n-szeres alkalmaz´as´aval.

**A másik eldöntésprobléma a predikátumlogikában**: tetszőleges

1. rendű formuláról el kell tudni dönteni, hogy logikailag igaz-e.

Egy n változós ítéletlogikai B formula tautológia, ha

**Eld¨ont´esprobl´ema megold´asa szemantikai eszk¨oz¨okkel**

* + hamishalmaza üres. Ez azt jelenti, hogy ¬B kielégíthetetlen.
  + az ítéletváltozók minden kiértékelésére (minden interpretációban) a helyettesítési érték i.

Elsőrendű n változós B formula logikailag igaz, ha

* + minden U univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott Bj alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktu´rában.
  + ¬B kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban, egyetlen változókiértékelés mellett sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel. Szintaktikai eszközökre van szükség a megoldáshoz.

Gödel bebizonyította, hogy

##### A szemantikus eldöntésprobléma ”

**algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális**

**eldöntési algoritmus”**.

Kutatások

**eldönthető formulaosztályok”** keresésére. Logikailag

##### ”

ekvivalens formulaátalakítások alkalmazása mellett.

Az egyik lehetőség, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus (döntési eljárás) keresése (tabló, rezolu´ciós elv).

A másik lehetőség, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása. (Erre nem térünk ki az előadás keretein belül.)

[Következményfogalom az elsőrendű logikában](#_bookmark0)

[Formulák logikailag ekvivalens átalakításai](#_bookmark2)

[Rezolu´ciós elv- rezolu´ciós kalkulus](#_bookmark8)

Az ítéletlogika eldönthető formulaosztályai a konjunktív normálforma és a diszjunktív normálforma.



Liter´al

Egy pr´ımformula (´ıt´eletv´altoz´o) vagy annak neg´altja. A liter´al alapja a benne szerepl˝o pr´ımformula. A liter´alt egys´egkonjunkci´onak vagy egys´egdiszjunkci´onak (egys´egkl´oz) is nevezhetu¨nk.



Elemi konjunkci´o/diszjunkci´o

Egys´egkonjunkci´o/diszjunkci´o, illetve ku¨l¨onb¨oz˝o alapu´ liter´alok konjunkci´oja/diszjunkci´oja. Az elemi diszjunkci´ot kl´oznak is nevezzu¨k.



Teljes elemi konjunkci´o/diszjunkci´o

Egy elemi konjunkci´o/diszjunkci´o teljes egy adott n v´altoz´os logikai mu˝veletre n´ezve, ha mind az n ´ıt´eletv´altoz´o alapja valamelyik benne szerepl˝o liter´alnak.



Konjunkt´ıv norm´alforma (KNF)/ kitu¨ntetett konjunkt´ıv norm´alforma (KKNF)

A KNF elemi diszjunkci´ok (kl´ozok) konjunkci´oja. KKNF, ha teljes elemi diszjunkci´ok konjunkci´oja.



Diszjunkt´ıv norm´alforma (DNF)/ kitu¨ntetett diszjunkt´ıv norm´alforma (KDNF)

A DNF elemi konjunkci´ok diszjunkci´oja. KDNF, ha teljes elemi konjunkci´ok diszjunkci´oja.



Egyszeru˝s´ıt´esi szab´alyok (Tk.98.o.)

(1) (X ∨ d) ∧ (¬X ∨ d) = d

ahol d elemi diszjunkci´o ´es k elemi konjukci´o.

(2) (X ∧ k) ∨ (¬X ∧ k) = k

KDNF felírása a formula igazságtáblája alapján:

* + a formula igazhalmazbeli interpretációihoz felírjuk az interpretációban igaz teljes elemi konjunkciót,
  + felírjuk a kapott teljes elemi konjunkciókból álló diszjunkciós láncformulát.
  + Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy DNF-et. KKNF felírása a formula igazságtáblája alapján:
  + a formula hamishalmazbeli interpretációihoz felírjuk az

interpretációban hamis teljes elemi diszjunkciót,

* + felírjuk a kapott teljes elemi diszjunkciókból álló konjunkciós láncformulát.
  + Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy KNF-et

A (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y formula igazságtáblája:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |  |
| *i* | *i* | *i* | *i* (*X* ∧ *Y* ∧ *Z*) |
| *i* | *i* | *h* | *i* (*X* ∧ *Y* ∧ ¬*Z*) |
| *i* | *h* | *i* | *i* (*X* ∧ ¬*Y* ∧ *Z*) |
| *i* | *h* | *h* | *h* (¬*X* ∨ *Y* ∨ *Z*) |
| *h* | *i* | *i* | *i* (¬*X* ∧ *Y* ∧ *Z*) |
| *h* | *i* | *h* | *i* (¬*X* ∧ *Y* ∧ ¬*Z*) |
| *h* | *h* | *i* | *h* (*X* ∨ *Y* ∨ ¬*Z*) |
| *h* | *h* | *h* | *h* (*X* ∨ *Y* ∨ *Z*) |

KKNF: (¬X ∨ Y ∨ Z) ∧ (X ∨ Y ∨ ¬Z) ∧ (X ∨ Y ∨ Z)

KNF (egyszerűsítés után): (Y ∨ Z) ∧ (X ∨ Y )

KDNF:

(X ∧Y ∧Z)∨(X ∧Y ∧¬Z)∨(X ∧¬Y ∧Z)∨(¬X ∧Y ∧Z)∨(¬X ∧Y ∧¬Z) 16/36

Az előzőek alapján tetszőleges ítéletlogikai formula átírható KNF vagy DNF alakba. Gödel szerint az eldöntésprobléma nem algoritmizálható, de ha egy eldönthető formulaosztályhoz tartozó formulává írjuk át az eldöntésproblémában vizsgált formulát, akkor bár nem algoritmussal hanem egy speciális levezetési eljárással (kalkulussal) sikeres döntésre juthatunk.

##### Döntési

**algoritmus”, levezető eljárás** egy olyan

##### ”

algoritmus/lépéssorozat, amely adott input adatokkal dolgozik,

azokat a megfelelő szabályok szerint használja fel, a levezetési szabály szerint alakítja át, és akkor áll meg, amikor a **kitűzött célt** (az eljárás megállási feltétele) elérte. A megállással egy kétesélyes döntés egyik kimenetét igazolja. Azonban, ha az algoritmus nem

éri el a kitűzött célt, az nem feltétlenül jelenti azt, hogy meghozta a másik eshetőségre a döntést. Egy ilyen eljárást **kalkulusnak** hívunk.

Az egyik eldöntésprobléma megoldására - egy formula **kielégíthetetlen**ségének eldöntésére **több döntési algoritmus** ismert. Ezekről bebizonyítható, hogy ha a formula felhasználásával az algoritmus eléri a megállási feltételt, akkor a formula kielégíthetetlen (vagyis, ha a formula az F1 ∧ F2 ∧ · · · ∧ F*n* ∧ ¬tt, akkor bebizonyítottuk, hogy {F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt.)

Azt is mondjuk, hogy az ilyen kalkulusok **automatikus tételbizonyító** kalkulusok.

[Következményfogalom az elsőrendű logikában](#_bookmark0)

[Formulák logikailag ekvivalens átalakításai](#_bookmark2)

[Rezolu´ciós elv- rezolu´ciós kalkulus](#_bookmark8)

Egy KNF alaku´ formula kielégíthetetlenségének vizsgálata a KNF-ben szereplő klózok S halmaza kielégíthetetlenségének vizsgálatával ekvivalens. Hogyan lehet eldönteni, hogy egy S klózhalmaz kielégíthetetlen? Meg kell mutatni, hogy az S

ítéletváltozóinak tetszőleges interpretációjában legalább egy C ∈ S hamis. Egy C klóz hamis egy interpretációban, ha minden literálja hamis.

Ha az összes interpretációt az S összes ítéletváltozóinak rögzített sorrendje/bázis alapján előálló szemantikus fával adjuk meg, akkor egy C ítéletlogikai klóz abban az interpretációban hamis, amelyikben a klóz mindegyik literáljai ellenkező negáltságu´. Az

X ∨ Z klóz hamis az ¬XY ¬Z és az ¬X¬Y ¬Z interpretációkban, az interpretáció kiválasztását a klóz szemantikus fára **illesztésének** hívjuk.

#### Fogalmak



Egy **klóz illesztése** a szemantikus fára az olyan ágak kiválasztása, amelyeken a klóz minden literálja negálva szerepel. Ezekben az interpretációkban ez a klóz hamis.

**Cáfoló csu´cs**nak nevezzük a szemantikus fa azon csu´csát, amelyiket elérve egy klóz (amely azt megelőzően még nem volt hamis) hamissá válik.

**Levezető csu´cs**nak nevezzük a szemantikus fa azon csu´csát, amelyiket követő mindkét csu´cs cáfoló csu´cs.

A szemantikus fa egy **ága zárt**, ha cáfoló csu´csban végződik.

**A szemantikus fa zárt**, ha minden ága zárt.

S = Y ∨ ¬Z, X ∨ Z, ¬X ∨ ¬Y, ¬X ∨ Z, ¬Z kielégíthetlen klózhalmaz.

. Σ

Jelölések: cáfoló csu´cs (•), levezető csu´cs (◦)

Zárt szemantikus fa:

G

X

¬X

X1 X2

Y

¬Y

Y

¬Y

Y1

Y2

Y3

Y4

¬X ∨ ¬Y

Z

¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

Z3

Z4

Z5

Z6

Z7

Z8

Y ∨ ¬Z ¬X ∨ Z ¬Z X ∨ Z Y ∨ ¬Z X ∨ Z



T´etel

Ha egy S v´eges kl´ozhalmaz szemantikus f´aja z´art, akkor S

kiel´eg´ıthetetlen.

A klózhalmaz kielégíthetetlenségének eldöntésére nem a szemantikus fát használjuk, de fontos háttéreszköz marad a **rezolu´ciós kalkulus** tulajdonságainak vizsgálatában.

##### Elnevezések:

* n-változós klóz n-argumentumos klóz
* 1-változós klóz egységklóz
* 0-változós klóz üres klóz: Q

*Egyszerűsítési szabály:* ha X ítéletváltozó és C egy X-et nem tartalmazó klóz, akkor (X ∨ C) ∧ (¬X ∨ C) ∼0 C

Az (X) ∧ (¬X) ∼0 Q – azonosan hamis.



Rezolvens

Legyenek C1, C2 olyan kl´ozok, amelyek pontosan egy komplemens liter´alp´art tartalmaznak: C1 = C1j ∨ L1 ´es C2 = C2j ∨ L2 ´es

L1 = ¬L2, ekkor l´etezik a rezolvensu¨k: a res(C1, C2) = C kl´oz,

ami C = C1j ∨ C2j .



T´etel (Tk.227-228.o.)

{C1, C2} |=0 C A rezolvensk´epz´es a rezolu´ci´os kalkulus levezet´esi

szab´alya (helyes k¨ovetkeztet´esforma).

Rezolu´ciós levezetés (Tk.229.o.)



Egy S klózhalmazból való **rezolu´ciós levezetés** egy olyan véges

k1, k2, . . . , k*m* (m ≥ 1) klózsorozat, ahol minden j = 1, 2, . . . , m-re

1. vagy k*j* ∈ S,
2. vagy van olyan 1 ≤ s, t < j, hogy k*j* a (k*s*, k*t*) klózpár rezolvense.

A levezetés célja az üres klóz levezetése (ez a megállási feltétel).



Egy rezolu´ci´os levezet´es

Pr´ob´aljuk meg az u¨res kl´ozt levezetni az

S = {¬A ∨ B, ¬A ∨ C, A ∨ C, ¬B ∨ ¬C, ¬C} kl´ozhalmazb´ol.

1. ¬C [∈ S]

2. A ∨ C [∈ S]

3. A [res(1, 2)]

4. ¬A ∨ C [∈ S]

5. C [res(3, 4)]

6. Q [res(1, 5)]

S klózhalmazból való rezolu´ciós levezetés **döntési eljárás**. **Eldöntésproblémája**: *levezethető-e egy S klózhalmazból az üres klóz?*

Rezolu´ciós cáfolatnak nevezzük azt a tényt, hogy S-ből levezethető az üres klóz.

A rezolu´ciós kalkulus helyes (Tk.230.o.)



(6.3.12) Lemma: Legyen S tetszőleges klózhalmaz és k1, k2 . . . , k*n*

klózsorozat rezolu´ciós levezetés S-ből. Ekkor minden

k*j*, j = 1, 2 . . . , n-re szemantikus következménye S-nek.

(6.3.13) Tétel: Legyen S tetszőleges klózhalmaz. Ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

Bizonyítások indukcióval, illetve indirekt bizonyítással.



A rezolu´ci´os kalkulus teljes (Tk.230.o.)

(6.3.14). T´etel: Ha az S v´eges kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen, akkor

S-b˝ol levezethet˝o az u¨res kl´oz.

Bizony´ıt´as: tetsz˝oleges z´art szemantikus fa eset´en el˝o´all´ıtunk egy rezolu´ci´os c´afolatot. (Tk.231-233.o.)

1 j := 0, S*j* := S, *LIST* := ∅.

1. A´llítsuk elő S*j* szemantikus fáját. n*j* := a szemantikus fa szintjeinek száma. Ha n*j* = 0, akkor levezettük az üres klózt, a levezetés *LIST* -ből kiolvasható.
2. Egyébként válasszuk ki a fa egy levezető csu´csát. A levezető

csu´csot tartalmazó két ágra illesztett klózok legyenek k*j*j és

k*j*jj, rezolvensük pedig k*j*. Tegyük a *LIST* végére a k*j*j , k*j*jj, k*j*

klózokat.

1. S*j*+1 := S*j* ∪ {k*j*}, j := j + 1. Folytassuk a 2. lépéssel.



P´elda

S = {X ∨ ¬Z, ¬X ∨ Y, ¬X ∨ Z, X ∨ Z, ¬Y ∨ ¬Z}, b´azis: Z, X, Y .



Levezet´esi fa Tk.235-236.o.

Egy rezolu´ci´os levezet´es szerkezet´et mutatja. Olyan gr´af, amelynek csu´csaiban kl´ozok vannak. K´et csu´csb´ol akkor vezet ´el egy harmadik csu´csba, ha abban a k´et csu´csban l´ev˝o kl´ozok rezolvense tal´alhat´o.

Példa - adott rezolu´ciós levezetés levezetési fája



X ∨ Z ¬X ∨ Z X ∨ ¬Z ¬X ∨ ¬Z

Z ¬Z

Q

*S*1 = {*X* ∨ ¬*Z,* ¬*X* ∨ *Z, X* ∨ *Z,* ¬*X* ∨ ¬*Z*}

1*. X* ∨ *Z* [ ∈ *S*1 ]

2*.* ¬*X* ∨ *Z* [ ∈ *S*1 ]

1. *Z* [ 1, 2 rezolvense ]

4*. X* ∨ ¬*Z* [ ∈ *S*1 ]

5*.* ¬*X* ∨ ¬*Z* [ ∈ *S*1 ]

1. ¬*Z* [ 4, 5 rezolvense ]
2. Q [ 3, 6 rezolvense ]



kl´ozsorozat, ahol k1, l1 ∈ S ´es minden i = 2, 3, . . . , m) esetben a k*i* a

Line´aris rezolu´ci´os levezet´es

Egy S kl´ozhalmazb´ol egy olyan k1, l1, k2, l2, . . . , k*m*−1, l*m*−1, k*m*

centr´alis kl´oz (rezolvense valamely k*s*, l*s* (s < i)-nek).

k*i*−1, l*i*−1 rezolvense, ahol l*i*−1 ∈ S, vagy egy kor´abban megkapott

centrális klózok mellékklózok

k1 A1

k2 A2

k3

k*i*−1 A*i*−1

k*i*

k1 A1

k2 A2

k3

k*m*−1

A*m*−1

k*m*

lineáris rezolu´ció



Line´aris inputrezolu´ci´os levezet´es

S kl´ozhalmazb´ol egy olyan k1, l1, k2, l2, . . . , k*m*−1, l*m*−1, k*m* kl´ozsorozat, ahol k1, l1 ∈ S, ´es minden i = 2, 3, . . . , m − 1 esetben l*i* ∈ S, a k*i* pedig a k*i*−1, l*i*−1 rezolvense.



Egys´egrezolu´ci´os strat´egia

Rezolvens csak akkor k´epezhet˝o, ha legal´abb az egyik kl´oz egys´egkl´oz.

*Reuzolu´ciós stratégiák*: lineáris rezolu´ció (helyes és teljes), lineáris input-, egység rezolu´ció (helyes de nem teljes) - Tk.236-238.o.

Az előadásban nem szereplő további rezolu´ciós stratégiák: Tk.281-300.o.



Defin´ıci´o

Egy kl´ozt **Horn kl´oz**nak nevezu¨nk, ha legfeljebb egy liter´alja nem neg´alt.



Defin´ıci´o

**Horn logika** az ¨osszes, csak Horn kl´ozokat tartalmaz´o KNF alaku´ formul´ak halmaza.



P´elda

S = {B ∨ ¬C, A ∨ ¬C, ¬A ∨ ¬B, ¬A ∨ C, C} Horn kl´ozok halmaza.



T´etel

A line´aris input ´es az egys´egrezolu´ci´os strat´egia teljes a Horn logik´aban.

S = {B ∨ ¬C, A ∨ ¬C, ¬A ∨ ¬B, ¬A ∨ C, C}

1. B ∨ ¬C ∈ S 1. B ∨ ¬C ∈ S

2. ¬A ∨ ¬B ∈ S 2. C ∈ S

3. ¬A ∨ ¬Crez (1, 2) 3. B rez(1, 2)

4. A ∨ ¬C ∈ S 4. ¬A ∨ ¬B ∈ S

5. ¬Crez (3, 4) 5. ¬A rez(3, 4)

6. C ∈ S 6. A ∨ ¬C ∈ S

7. Q rez(5, 6) 7. ¬C rez(5, 6)

8. Q rez(2, 7)

lineáris input rez. egységrezolu´ció



T´etel

Ha az Q levezethet˝o line´aris input rezolu´ci´oval egy K kl´ozhalmazb´ol, akkor K-ban van legal´abb egy egys´egkl´oz. **Biz.:** Az Q-t az utols´o l´ep´esben csak egy kl´ozhalmazbeli egys´egkl´oz felhaszn´al´as´aval kaphatjuk meg.



T´etel

Kiel´eg´ıthetetlen Horn kl´ozhalmazban van legal´abb egy egys´egkl´oz.

Teljes levezetési fa adott klózzal kezdődő összes lineáris levezetés megadására.

Legyen S = {X ∨ Z, ¬X ∨ Z, ¬Y ∨ ¬Z, ¬X ∨ Y, ¬Z}.

X ∨ Z

¬X ∨ Y

¬X ∨ Z

¬Z

¬Y ∨ ¬Z

Y ∨ Z Z X ∨ ¬Y X

¬Z ¬Y ∨ ¬Z ¬Z ¬X ∨ Z ¬X ∨ Z ¬X ∨ Y

Y ¬Y Q ¬Y ∨ Z Z Y

¬X ∨ Y ¬Z ¬Z

¬X ¬Y Q

# Logika és számításelmélet

## rész Logika

Hatodik előadás

[Elsőrendű rezolu´ciós kalkulus - előkészítő fogalmak](#_bookmark0)

Eldönthető formulaosztályok keresése elsőrendű logikában.



Prenex formula

Legyen Q tetsz˝oleges kvantor, a Q1x1Q2x2 . . . Q*n*x*n*B formula. Q1x1Q2x2 . . . Q*n*x*n* a prefixum, B, kvantormentes formula a formula magja, t¨orzse.



Skolem formula

Skolem formula a ∀x1∀x2 . . . ∀x*n*A Prenex formula, ahol a

prefixumban csak univerz´alis kvantorok szerepelnek. Ez eld¨onthet˝o

formulaoszt´aly els˝orendben.



Els˝orendu˝ kl´oz

Olyan z´art Skolem formula, aminek a magja az els˝orendu˝ nyelv liter´aljainak (azaz atomi formul´ainak vagy annak neg´altjainak) diszjunkci´oja.

Pl. ∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y))).

Az ítéletlogikai klózhalmaz (KNF) elsőrendű megfelelője az elsőrendű klózhalmaz (elsőrendű klózok konjunkciója) lehetne.

A **feladat** tetszőleges elsőrendű formula átírása elsőrendű klózok konjunkciós formulájává. Az **eldöntésprobléma elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének** eldöntése.

Ha egy univerzális formulát kifejtünk egy U univerzum felett, akkor a mag alappéldányainak konjunkciója lesz U -ekvivalens az eredeti formulával.

Ha elsőrendű klózok halmazával tesszük ugyanezt, akkor alapklózok hamazát kapjuk. A kifejtett klózhalmaz kielégíthetetlensége a kapott U feletti alapklózok halmazának kielégíthetetlenségével ekvivalens.

Az alapklózokra a rezolu´ciós kalkulust ugyanu´gy definiálhatjuk mint az ítéletlogikában – alaprezolu´ció (Tk.251-254.o.). Alaprezolu´cióval bármely adott U univerzumon való kielégíthetetlenség eldönthető.

Elsőrendű klózhalmaz:

S = {∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y)), ∀u¬P (u), ∀z∀wQ(z, f (w))}

U = {a, b, c} univerzum feletti kifejtett klózhalmaz:

.

P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)), P (a) ∨ ¬Q(a, f (b)), P (a) ∨ ¬Q(a, f (c)),

P (b) ∨ ¬Q(b, f (a)), P (b) ∨ ¬Q(b, f (b)), P (b) ∨ ¬Q(b, f (c)),

P (c) ∨ ¬Q(c, f (a)), P (c) ∨ ¬Q(c, f (b)), P (c) ∨ ¬Q(c, f (c)),

¬P (a), ¬P (b), ¬P (c), Q(a, f (a)), Q(a, f (b)), Q(a, f (c)), Σ

Q(b, f (a)), Q(b, f (b)), Q(b, f (c)), Q(c, f (a)), Q(c, f (b)), Q(c, f (c))

Alaprezolu´ciós levezetés:

1 P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)) ∈ S

2 Q(a, f (a)) ∈ S

3 P (a) res(1,2)

4 ¬P (a) ∈ S

5 Q res(3,4)

Hogyan lehet előállítani a vizsgálandó formulát elsőrendű klózok konjunkciójaként?

**Formula fel´ır´asa elso˝rendu˝ kl´ozok konjunkcio´jak´ent**

1. Tetszőleges formula átírható prenex alakba.
2. Tetszőleges prenex formula átírható Skolem alakba.
3. Tetszőleges Skolem normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként.

Az átalakításhoz szükséges átalakítási szabályok.

*A´ltalános De Morgan szabályok*

¬∀xA ∼ ∃x¬A

¬∃xA ∼ ∀x¬A

*Kvantorkiemelési szabályok*

(1) ∀xA[x] ∧ B ∼ ∀x(A[x] ∧ B)

∀xA[x] ∨ B ∼ ∀x(A[x] ∨ B)

(2) ∃xA[x] ∧ B ∼ ∃x(A[x] ∧ B)

∃xA[x] ∨ B ∼ ∃x(A[x] ∨ B)

*Kvantorkiemelési szabályok*

(3) ∀xA[x] ∧ ∀xB[x] ∼ ∀x(A[x] ∧ B[x]) , de ∨-re nem

(4) ∃xA[x] ∨ ∃xB[x] ∼ ∃x(A[x] ∨ B[x]) , de ∧-re nem

(5) Q1xA[x] ∧ Q2xB[x] ∼ Q1xQ2z(A[x] ∧ B[x/z])

(6) Q1xA[x] ∨ Q2xB[x] ∼ Q1xQ2z(A[x] ∨ B[x/z])

1. A logikai összekötőjelek átírása ¬, ∧, ∨-ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása addig amíg a ¬

hatásköre atomi formula nem lesz.

1. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül (a formula törzse kvantormentes formula).

∀x(∀yP (x, y) ∧ ∃y¬(Q(y) ⊃ P (x, a))) ⊃ ¬∀x∃y(P (y, x) ⊃ R(x, y))

* + 1. lépés

¬(∀x(∀yP (x, y)∧∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨¬∀x∃y(¬P (y, x)∨R(x, y))

* + 2. lépés

∃x¬(∀yP (x, y)∧∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x¬∃y(¬P (y, x)∨R(x, y))

∃x(¬∀yP (x, y)∨¬∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x∀y¬(¬P (y, x)∨R(x, y))

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y¬¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x∀y(P (y, x)∧¬R(x, y))

∃x(∃y¬P (x, y) ∨ ∀y(¬Q(y) ∨ P (x, a))) ∨ ∃x∀y(P (y, x) ∧ ¬R(x, y))

* + 3. lépés (kvantorkiemelési szabályok)

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y(¬Q(y)∨P (x, a))∨∀y(P (y, x)∧¬R(x, y))).

∃y kiemeléséhez először végrehajtjuk az y/y1 helyettesítést a

∀y-al kezdődő első részformulában és az y/y2 helyettesítést a

∀y-al kezdődő második részformulában.

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y1(¬Q(y1)∨P (x, a))∨∀y2(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

∃x∃y(¬P (x, y)∨∀y1(¬Q(y1)∨P (x, a))∨∀y2(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

Utolsó lépés:

∃x∃y∀y1∀y2(¬P (x, y)∨(¬Q(y1)∨P (x, a))∨(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

Megkaptuk a prenex formulát. A mag DNF.

Ha a prenex formula törzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a formula normálforma: prenex konjunktív / prenex diszjunktív formula.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez

∃x*j*. Ha a formula igaz egy interpretációban, akkor az x1, x2, . . . , x*j*−1 változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x*j* változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az f (x1, x2, . . . , x*j*−1) = x*j* (Skolem) függvénnyel fejezzük ki. Ez a függvény rendeli az x*j* -hez a megfelelő értéket az x1, x2, . . . , x*j*−1 változók minden változókiértékelése esetén. Ezt a lépést végrehajtjuk a soronkövetkező egzisztenciális kvantorra addig amíg, minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.



P´elda 1.

∀x∃yP (x, y)

Skolem alak: ∀xP (x, f (x))



P´elda 2.

∃x∃y∀y1∀y2(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1) ∨ P (x, a) ∨ P (y2, x) ∧ ¬R(x, y2))

x ´es y-hoz tartoz´o Skolem fu¨ggv´enyek 0 v´altoz´osak (Skolem konstansok), pl. q, r. Skolem alak:

∀y1∀y2(¬P (q, r) ∨ ¬Q(y1) ∨ P (q, a) ∨ P (y2, q) ∧ ¬R(q, y2))

A Skolem normálforma magja KNF, az elsőrendű nyelv literáljaiból felírt klózok konjunkciós lánca.

**(3) Tetsz˝oleges Skolem norm´alforma fel´ırhat´o els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´ojak´ent**

Példa



∀x∀y∀y1((¬P (x, y) ∨ Q(y1)) ∧ (R(y, f (x) ∨ P (x, a))

∧ (P (x, y1) ∨ ¬R(x, y)))

A konjunkciós láncban a 3. kvantorkiemelési szabály alkalmazható. így a formula elsőrendű klózok konjunkciós láncaként felírt alakja:

∀x∀y∀y1(¬P (x, y) ∨ Q(y1)) ∧ ∀x∀y∀y1(R(y, f (x)) ∨ P (x, a))

∧ ∀x∀y∀y1(P (x, y1) ∨ R(x, y))

Elsőrendű klózokból álló konjunkciós lánc kielégíthetetlenségének vizsgálata.

Mivel egy kvantált formula értéke **nem függ a benne szereplő kötött változó értékétől**, ezeket a változókat át lehet nevezni.



P´elda

∀x∀y∀y1(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1)) ∧ ∀z∀w∀y1(R(w, f (z)) ∨ P (z, a))

v´altoz´oidegen kl´ozok konjunkci´oja.

∧ ∀v∀z1∀y3(P (v, y3) ∨ ¬R(v, z1))

A´talakítható változóidegen elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének vizsgálatává.



P´elda

{(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1)), (R(w, f (z)) ∨ P (z, a)), (P (v, y3) ∨ ¬R(v, z1))}

Ha egy formula azonosan igaz |U | = n számosságon, akkor ennél kisebb számosságon is azonosan igaz. (Tk.257.o.)



Ha egy formula kielégíthető |U | = n számosságon, akkor ennél nagyobb számosságon is kielégíthető.(Tk.258.o.)

Löwenheim-Skolem tétel Tk.258.o.

Ha egy formula kielégíthető egyáltalán, akkor kielégíthető legfeljebb megszámlálhatóan végtelen U -n.

A kielégíthetetlenségre hasonló tételek nincsenek.

**Egy** S **elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen**, ha minden interpretációban **legalább egy klóza hamis**.

Egy **elsőrendű klóz hamis** egy interpretációban, ha az interpretáló struktu´ra U univerzumán kifejtve a magból kapott **alapklózok közül legalább egy hamis** ebben az interpretációban.

**Egy** S **elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen** U felett, ha az U -n definiálható minden struktu´rában az **alapklózok** halmaza kielégíthetetlen. Ha az S elsőrendű klózhalmazból az adott számosságu´ univerzumon a kifejtéssel megkapott alapklózok halmazából alaprezolu´cióval levezethető az üres klóz, akkor a klózhalmaz **ezen az univerzumon** kielégíthetetlen. Ha egy S kielégíthetetlen egy |U | = n számosságu´ univerzumon, még lehet nagyobb számosságon kielégíthető.



P´elda, TK. 254.o. / 6.3.45.

∀x∀y∃z((P (x, y) ⊃ ¬P (y, x)) ∧ (P (x, z) ∨ P (z, y)))

Bebizony´ıthat´o, hogy a formula nem el´eg´ıthet˝o ki k´etelemu˝ univerzumon, de h´aromelemu˝ univerzumon m´ar kiel´eg´ıthet˝o.

Herbrand megmutatta, hogy ha tekintjük az **elsőrendű klózhalmaz leíró nyelvének alaptermjei**ből álló halmazt a Herbrand-univerzumot (H-t), akkor a klózhalmaz akkor lesz kielégíthetetlen, ha H-n kielégíthetetlen. Minden elsőrendű nyelvhez (elsőrendű klózhalmazhoz) létezik **legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságu´ Herbrand-univerzum**.

*Egy elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Herbrand-univerzumán kielégíthetetlen.*

Herbrand-univerzum konstrukciója lépésről lépésre:

1. H0 = {S-ben előforduló konstansok halmaza} vagy ha a klózhalmazban nincs konstans szimbólum, akkor egy szimbolikus konstans {a}.
2. H*i*+1 = H*i* ∪ F*i*, ahol F*i* azon alaptermek halmaza, amelyeket H*i* elemeinek a klózhalmazban lévő függvényszimbólumokba való behelyettesítésével kapjuk.
3. H∞ = H*k k*∈**N**

S



Példa

Tekintsük az S = {P (x), ¬Q(y, z) ∨ ¬P (z), Q(u, f (u))} klózhalmazt.

H0 = {a} - fiktív konstans

H1 = {a, f (a)}

H*j* = {a, f (a), f (f (a)), . . . , f (. . . f (a) . . .)} - j-szeres iteráció

H∞ = {a, f (a), f (f (a)), . . . , f (. . . f (a) . . .), . . .}

Alapklózhalmaz a Herbrand-univerzum felett:

S = {P (a), ¬Q(a, a) ∨ ¬P (a), Q(a, f (a)), P (f (a)),

¬Q(a, f (a)) ∨ ¬P (f (a)), . . .}

Alaprezolu´ciós levezetés:

1 Q(a, f (a)) P (f (a)) S

¬ ∨ ¬ ∈

2 P (f (a)) S

∈

3 Q(a, f (a)) res(1,2)

¬

4 Q(a, f (a)) S

∈

5 Q res(3,4)



Herbrand-b´azis

Legyen S egy els˝orendu˝ kl´ozhalmaz ´es H a kl´ozhalmazhoz tartoz´o

Herbrand-univerzum. A H Herbrand-univerzum feletti alapatomok

egy r¨ogz´ıtett sorrendj´et *Herbrand-b´azisnak* nevezzu¨k.



P´elda

egy lehets´eges Herbrand-b´azis:

Az el˝oz˝o S = {P (x), ¬Q(y, z) ∨ ¬P (z), Q(u, f (u)) kl´ozhalmaz eset´en

{P (a), Q(a, a), P (f (a)), Q(a, f (a)), Q(f (a), a), Q(f (a), f (a)),

P (f (f (a))), . . .}

#### Herbrand-interpretáció



Legyen az S klózhalmaz leíró nyelve (*Pr*, *Fn*, *Cnst* ),

Herbrand-univerzuma pedig H. *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és IH-vel jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek univerzuma éppen H, és

* minden c ∈ *Cnst* konstansszimbólumhoz a c ∈ H

univerzumelemet (önmagát) rendeli, és

* minden k aritásu´ f ∈ F n függvényszimbólumhoz hozzárendeli azt az f I*H* : H*k* → H műveletet, amelyikre minden h1, h2, . . . , h*k* ∈ H esetén

f I*H* (h1, h2, . . . , h*k*) = f (h1, h2, . . . , h*k*).

Egy S elsőrendű klózhalmaz Herbrand-interpretációi tehát csak az S-ben előforduló predikátumszimbólumok interpretálásában különböznek.

Az előzőek alapján, ha adva van az S elsőrendű klózhalmaz egy IH Herbrand-interpretációja, azt a következő módon is leírhatjuk: Legyen {A1, A2, . . .} az S klózhalmaz Herbrand-bázisa és legyen

*i* .

L = A*i*, ha A*i* igaz IH-ban,

¬A*i*, ha A*i* hamis IH-ban.

Ekkor a IH Herbrand-interpretációt az {L1, L2, . . . }

alapliterál-halmaz egyértelműen megadja.

Példa



Legyen S = {P (x) ∨ Q(x), R(f (y))}. S Herbrand-univerzuma:

H = {a, f (a), f (f (a)), f (f (f (a))), . . .}.

S egy Herbrand-bázisa:

{P (a), Q(a), R(a), P (f (a)), Q(f (a)), R(f (a)), . . .}.

Néhány Herbrand-interpretáció:

I1 = {P (a), Q(a), R(a), P (f (a)), Q(f (a)), R(f (a)), . . . }

I2 = {¬P (a), ¬Q(a), ¬R(a), ¬P (f (a)), ¬Q(f (a)), ¬R(f (a)), . . . }

I3 = {P (a), Q(a), ¬R(a), ¬P (f (a)), Q(f (a)), ¬R(f (a)), . . . }

Az I1, I2 és I3 interpretációk szemléltetése az előző Herbrand-bázis felhasználásával készül szemantikus fán:

P (a) ¬P (a)

Q(a) ¬Q(a) Q(a) ¬Q(a)

R(a) ¬R(a) ¬R(a)

P (f (a)) ¬P (f (a)) ¬P (f (a))



T´etel Tk.6.3.61

Egy els˝orendu˝ kl´ozhalmaz akkor ´es csak akkor kiel´eg´ıthetetlen, ha a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpret´aci´o sem el´eg´ıti ki. Nincs Herbrand-modellje.



A 6.3.61 t´etel csak **els˝orendu˝ kl´ozhalmaz** eset´en ´all fenn. P´elda:

Legyen egy nem els˝orendu˝ kl´ozhalmaz S = {P (a), ∃x¬P (x)}.

Herbrand-interpret´aci´ok: P (a), ¬P (a). Egyiku¨k sem el´eg´ıti ki S-et.

S Herbrand-univerzuma: {a}, Herbrand-b´azisa {P (a)},

Ugyanakkor S kiel´eg´ıthet˝o p´eld´aul az U = {0, 1}(P (x)) struktu´r´aban,

ahol P (0) = i ´es P (1) = h.



H1 Tk.263.o.

Egy S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen akkor ´es csak akkor, ha S b´armely szemantikus f´aj´ahoz van v´eges z´art szemantikus f´aja.



H2 Tk.264.o.

Egy S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen akkor ´es csak akkor, ha S kl´ozai alapel˝ofordul´asainak van v´eges kiel´eg´ıthetetlen Sj r´eszhalmaza.

Előállítjuk az elsőrendű klózok magjainak összes alappéldányát és az alapklózok halmazán ítéletlogikai rezolu´cióval levezetjük az üres klózt.

Az elsőrendű klózhalmaz:

{∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y))),

∀z∀v(¬P (g(z)) ∨ ¬P (v)),

∀u(Q(g(u), u))}

Herbrand-univerzum:

{a, g(a), f (a), g(f (a)), g(g(a)), f (f (a)), f (g(a)), . . . }

(A klózhalmaz leíró nyelvének összes alaptermje)

Alapklózok különböző helyettesítések esetén:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | v | u | {P (x) ∨ ¬Q(x, f (y)),  ¬P (g(z)) ∨ ¬P (v),  Q(g(u), u)} |
| a | a | a | a | a | {P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (a),  Q(g(a), a)} |
| g(a) | a | a | g(a) | a | {P (g(a)) ∨ ¬Q(g(a), f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (g(a)), Q(g(a), a)} |
| g(a) | a | a | g(a) | f (a) | {P (g(a)) ∨ ¬Q(g(a), f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (g(a)),  Q(g(f (a)), f (a))} |
| g(f (a)) | a | f (a) | g(f (a)) | f (a) | {P (g(f (a))) ∨ ¬Q(g(f (a)), f (a)),  ¬P (g(f (a))) ∨ ¬P (g(f (a))),  Q(g(f (a)), f (a))} |

Alaprezolu´ció:

1. Q(g(f (a)), f (a)) u f (a) 1. X

"

2. P (g(f (a))) Q(g(f (a)), f (a)) x g(f (a)), y a 2. Y X

∨ ¬ " " ∨ ¬

3. P (g(f (a))) 3. Y

4. P (g(f (a))) z f (a), v g(f (a)) 4. Y

¬ " " ¬

5. Q 5. Q

Legyen a bázis első két eleme P (g(f (a))), Q(g(f (a)), f (a)). Illesszük szemantikus fára az alapklózhalmazt.