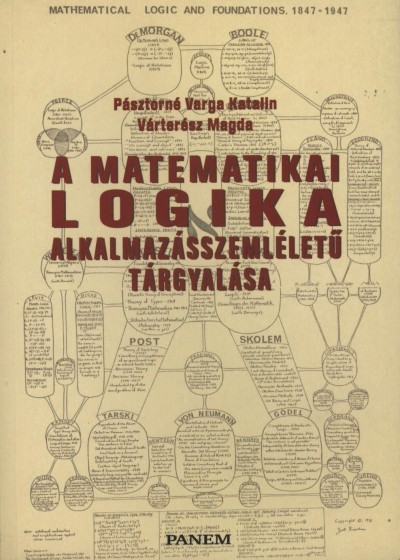
# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## I. r´esz Logika

Tejfel M´at´e

D´eli ´epu¨let, 2.606 [matej@inf.elte.hu](mailto:matej@inf.elte.hu) [http://matej.web.elte.hu](http://matej.web.elte.hu/)



[Bevezet˝o fogalmak](#_bookmark1)

[´It´eletlogika](#_bookmark3)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – A´b´ec´e](#_bookmark5)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

#### Halmazok direktszorzata



A ´es B tetsz˝oleges halmazok direkt vagy Descartes szorzata A × B

az ¨osszes olyan (a, b) p´arok hamaza, ahol a ∈ A ´es b ∈ B.

U *n*-nel jel¨olju¨k U -nak ¨onmag´aval vett n-szeres direktszorzat´at, ami az U elemeib˝ol k´epezhet˝o ¨osszes n elemu˝ sorozatok halmaza

(U 2 = U × U ).



Fu¨ggv´eny

Legyenek D ´es R (nem felt´etlenu¨l ku¨l¨onb¨oz˝o) halmazok.

egy R-beli elemet rendel˝o) lek´epez´est. D a lek´epez´es ´ertelmez´esi

tartom´anya, R az ´ert´ekk´eszlete.

Fu¨ggv´enynek nevezu¨nk egy D → R (D halmaz minden elem´ehez

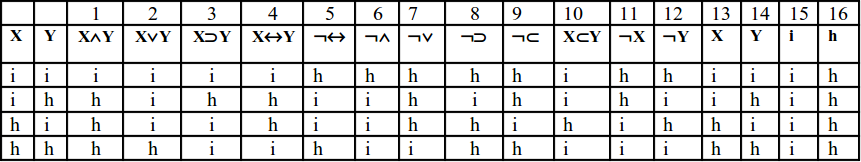
#### Fu¨ggv´eny fajt´ai



Legyen D a fu¨ggv´eny ´ertelmez´esi tartom´anya, R az ´ert´ekk´eszlete. Valamint legyen U egy tetsz˝oleges (individuum)halmaz.

* Ha D = U , akkor a fu¨ggv´eny egyv´altoz´os,
* ha D = U *n* (n > 1), akkor n v´altoz´os,
* ha R = N, akkor a fu¨ggv´eny eg´esz´ert´eku˝,
* ha R = {i, h}, akkor a fu¨ggv´eny logikai fu¨ggv´eny, m´as n´even rel´aci´o,
* ha D = R*n* (azaz a fu¨ggv´eny ´altal´anos alakja: U *n* → U ), akkor a fu¨ggv´eny matematikai fu¨ggv´eny, m´as n´even mu˝velet,
* az {i, h}*n* → {i, h} alaku´ fu¨ggv´eny logikai mu˝velet.

A lehets´eges **k´etv´altoz´os** logikai mu˝veletek k¨oz¨os igazs´agt´abl´aja.



A t´abl´azat tartalmazza a 16 db 2-v´altoz´os mu˝veletet (a 4 db 1- ´es a 2 db 0-v´altoz´os mu˝velet is k¨oztu¨k van). Ezekb˝ol a logika t´argyal´as´an´al a ¬, ∧, ∨, ⊃ mu˝veleteket haszn´aljuk csak.

## Nyelv =

A´b´ec´e + Szintaxis + Szemantika

Szerkezeti rekurzi´o

* defin´ıci´os m´odszer
* alapl´ep´es + rekurz´ıv l´ep´es
* p´elda: logikai formul´akon ´ertelmezett fu¨ggv´enyek defin´ıci´oja Szerkezeti indukci´o
* bizony´ıt´asi m´odszer rekurz´ıvan defini´alt struktu´r´ak tulajdons´agair´ol
* alapl´ep´es + indukci´os l´ep´es
* speci´alis p´elda: teljes indukci´o
* p´elda: logikai formul´ak tulajdons´againak bizony´ıt´asa
* A logika t´argya az emberi gondolkod´as vizsg´alata.
* A logika c´elkitu˝z´ese.

Gondolkod´asi folyamatok vizsg´alata sor´an

a helyes k¨ovetkeztet´es t¨orv´enyeinek felt´ar´asa, u´jabb helyes k¨ovetkeztet´esi m´odszerek kidolgoz´asa.



Gondolkod´asforma vagy ko¨vetkeztet´esforma

Egy F = {A1, A2, . . . , A*n*} ´all´ıt´ashalmazb´ol ´es egy A ´all´ıt´asb´ol ´all´o

(F, A) p´ar.



Helyes k¨ovetkeztet´esforma

Egy F = {A1, A2, . . . , A*n*} ´all´ıt´ashalmazb´ol ´es egy A ´all´ıt´asb´ol ´all´o

(F, A) p´ar, ha l´etezik olyan eset, hogy az F ´all´ıt´ashalmazban

szerepl˝o mindegyik ´all´ıt´as igaz ´es minden ilyen esetben az A ´all´ıt´as is igaz.

[Bevezet˝o fogalmak](#_bookmark1)

[´It´eletlogika](#_bookmark3)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – A´b´ec´e](#_bookmark5)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

T´argya az egyszeru˝ ´all´ıt´asok ´es a bel˝olu¨k logikai mu˝veletekkel kapott ¨osszetett ´all´ıt´asok vizsg´alata.



Egyszeru˝ ´all´ıt´as

Egy olyan kijelent´es, amelynek tartalm´ar´ol eld¨onthet˝o, hogy igaz-e vagy nem. Egy ´all´ıt´ashoz hozz´arendelju¨k az igazs´ag´ert´ek´et: az i vagy h ´ert´eket.



O¨ sszetett ´all´ıt´as

Egy egyszeru˝ ´all´ıt´asokb´ol ´all´o ¨osszetett mondat, amelynek az igazs´ag´ert´eke csak az egyszeru˝ ´all´ıt´asok igazs´ag´ert´ekeit˝ol fu¨gg. Az

¨osszetett ´all´ıt´asok csak olyan nyelvtani ¨osszek¨ot˝oszavakat tartalmazhatnak amelyek logikai mu˝veleteknek feleltethet˝ok meg.

**´It´eletlogika vagy ´all´ıt´aslogika**

### Tartalom

[´It´eletlogika](#_bookmark3)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – A´b´ec´e](#_bookmark5)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

**Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek ´ab´ec´eje (**V0**)**



Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek ´ab´ec´eje (V0)

* ´It´eletv´altoz´ok (V*v*): X, Y, X*i*, . . .
* Un´er ´es bin´er logikai mu˝veleti jelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* Elv´alaszt´ojelek: ( )

### Tartalom

[´It´eletlogika](#_bookmark3)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – A´b´ec´e](#_bookmark5)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

´It´eletlogikai formula (Tk.4.1.2 def.)

**Az ´ıt´eletlogika le´ır´o nyelv´enek szintaxisa (**L0**)**



1. (alapl´ep´es) Minden ´ıt´eletv´altoz´o ´ıt´eletlogikai formula. (*pr´ımformula*)
2. (rekurzi´os l´ep´es)
   * Ha A ´ıt´eletlogikai formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A ´es B ´ıt´eletlogikai formul´ak, akkor (A ◦ B) is ´ıt´eletlogikai formula ”◦” a h´arom bin´er mu˝velet b´armelyike.
3. Minden ´ıt´eletlogikai formula az 1, 2 szab´alyok v´eges sokszori alkalmaz´as´aval ´all el˝o.

´It´eletlogik´aban a k¨ovetkez˝o formulaszerkezeteket ku¨l¨onb¨oztetju¨k meg:

* ¬A neg´aci´os
* A ∧ B konjukci´os
* A ∨ B diszjunkci´os
* A ⊃ B implik´aci´os



Kozvetlen r´eszformula (Tk.4.1.6. def.)

1. Pr´ımformul´anak nincs k¨ozvetlen r´eszformul´aja.
2. ¬A k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

3 Az (A ◦ B) k¨ozvetlen r´eszformul´ai az A (*baloldali*) ´es a B

(*jobboldali*).



P´elda

A (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y ) formula baloldali r´eszformul´aja: ¬(Z ⊃ ¬X),

jobboldali r´eszformul´aja: Y .



Szerkezeti fa (Tk. 49.o)

Egy adott formul´ahoz tartoz´o szerkezeti fa egy olyan fa, melynek gy¨okere a formula, minden csu´cs gyerekei a csu´cshoz tartoz´o formula k¨ozvetlen r´eszformul´ai, a fa levelei pedig ´ıt´eletv´altoz´ok.

**Szerkezeti fa** egy p´elda formul´ahoz:

(((X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z))⊃(¬X ∨ Z))

((X ⊃ Y )∧(Y ⊃ Z)) (¬X∨Z)

(X⊃Y )

XY

(Y ⊃Z)

YZ

¬X Z

X

A teljesen z´ar´ojelezett formul´akat kevesebb z´ar´ojellel ´ırhatjuk fel, ha bevezetju¨k a mu˝veletek priorit´as´at: ¬, ∧, ∨, ⊃ (cs¨okken˝o sorrend).

A **z´ar´ojelelhagy´as**1 c´elja egy formul´ab´ol a legt¨obb z´ar´ojel elhagy´asa a formula szerkezet´enek megtart´asa mellett.

1Tk. 52. o.

L´ep´esei:

1. A formula ku¨ls˝o z´ar´ojel p´arj´anak elhagy´asa (ha m´eg van ilyen).
2. Egy bin´er logikai ¨osszek¨ot˝o hat´ask¨or´ebe es˝o r´eszformul´ak ku¨ls˝o z´ar´ojelei akkor hagyhat´ok el, ha a r´eszformula f˝o logikai

¨osszek¨ot˝ojele nagyobb priorit´asu´ n´ala.



P´elda

(X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z) ⊃ ¬X ∨ Z

(((X ⊃ Y ) ∧ (Y ⊃ Z)) ⊃ (¬X ∨ Z)) a z´ar´ojelelhagy´as ut´an:

* **Konjunkci´os**: A1 ∧ A2 ∧ . . . ∧ A*n* (tetsz˝olegesen z´ar´ojelezhet˝o)
* **Diszjunkci´os**: A1 ∨ A2 ∨ . . . ∨ A*n* (tetsz˝olegesen z´ar´ojelezhet˝o)
* **Implik´aci´os**: A1 ⊃ A2 ⊃ . . . ⊃ A*n* (default z´ar´ojelez´ese jobbr´ol-balra) A1 ⊃ (A2 ⊃ . . . (A*n*−1 ⊃ A*n*) . . .)



Liter´al

Ha X ´ıt´eletv´altoz´o, akkor az X ´es a ¬X formul´akat liter´alnak

liter´alok.)

nevezzu¨k. Az ´ıt´eletv´altoz´o a liter´al alapja. (X ´es ¬X azonos alapu´



Elemi konjunkci´o

Ku¨l¨onb¨oz˝o liter´alok konjunkci´oja. Pl.: X ∧ ¬Y ∧ ¬W ∧ Z



Elemi diszjunkci´o

Ku¨l¨onb¨oz˝o liter´alok diszjunkci´oja. Pl.: ¬X ∨ Y ∨ ¬W ∨ ¬Z

Egy A formula **logikai ¨osszetetts´ege**: A(A)



Szerkezeti rekurzi´ot alkalmaz´o defin´ıcio´ (Tk.4.1.12)

Alapl´ep´es

Rekurzi´os l´ep´esek

* Ha A ´ıt´eletv´altoz´o, akkor A(A) = 0
* A(¬A) = A(A) + 1
* A(A ◦ B) = A(A) + A(B) + 1



Defin´ıci´o (Tk.4.1.17.)

**Logikai mu˝veletek hat´ask¨ore** a formula r´eszformul´ai k¨ozu¨l az a legkisebb logikai ¨osszetetts´egu˝, amelyben az adott logikai

¨osszek¨ot˝ojel el˝ofordul.

P´elda



A (X Y ) (Y Z) X Z formula mu˝veletet tartalmaz´o r´eszformul´ai:

⊃ ∧ ⊃ ⊃ ¬ ∨ ∧

1 A[(X Y ) (Y Z) X Z] = 6

⊃ ∧ ⊃ ⊃ ¬ ∨

2 A[(X Y ) (Y Z)] = 3

⊃ ∧ ⊃

Ezek k¨ozu¨l a 2. formula az hat´ask¨ore. Egy mu˝velet hat´ask¨or´ebe es˝o formul´ak egyben *k¨ozvetlen komponensek* is.

∧



Defin´ıci´o (Tk.4.1.18.)

Egy formula **f˝o logikai ¨osszek¨ot˝ojele** az az ¨osszek¨ot˝ojel, amelynek a hat´ask¨ore maga a formula.

[´It´eletlogika](#_bookmark3)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – A´b´ec´e](#_bookmark5)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szintaxis](#_bookmark6)

[´It´eletlogika le´ır´o nyelve – Szemantika](#_bookmark11)

A nyelv ´ab´ec´ej´enek ´ertelmez´ese (interpret´aci´oja - modellez´ese).

Az ´ıt´eletlogika ´ab´ec´ej´eben m´ar csak az ´ıt´eletv´altoz´okat kell interpret´alni. Az ´ıt´eletv´altoz´ok befutj´ak az ´all´ıt´asok halmaz´at. Ha megmondjuk melyik ´ıt´eletv´altoz´o melyik ´all´ıt´ast jelenti, akkor a v´altoz´o igazs´ag´ert´ek´et adtuk meg. Annak r¨ogz´ıt´es´et melyik

´ıt´eletv´altoz´o i(gaz) ´es melyik h(amis) igazs´ag´ert´eku˝

**interpret´aci´o**nak nevezzu¨k.



Igazs´agki´ert´ekel´es, interpret´aci´o (Tk.4.2.1.)

I = V*v* → {i, h}

I(x) jel¨oli az x ´ıt´eletv´altoz´o ´ert´ek´et az I interpret´aci´oban.

n db ´ıt´eletv´altoz´o interpret´aci´oinak sz´ama 2*n*.

*Megad´asa*:

* Felsorol´assal
* Szemantikus f´aval
* Stb.

n = 3 eset´en legyenek az ´ıt´eletv´altoz´ok X, Y, Z. Ezen v´altoz´ok egy sorrendj´et **b´azis**nak nevezzu¨k. Legyen most a b´azis X, Y, Z. Ekkor az ¨osszes interpret´aci´ot megadhatjuk t´abl´azatos felsorol´assal, vagy szemantikus f´aval is.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | Z |
| i | i | i |
| i | i | h |
| i | h | i |
| i | h | h |
| h | i | i |
| h | i | h |
| h | h | i |
| h | h | h |

t´abl´azat: Interpret´acio´

megad´asa t´abl´azattal *X, Y, Z* b´azis eset´en

#### Szemantikus fa



Egy n-v´altoz´os **szemantikus fa** egy n-szintu˝ bin´aris fa, ahol a szintek a b´azisbeli v´altoz´oknak vannak megfeleltetve. Egy X v´altoz´o szintj´en a csu´csokb´ol kiindul´o ´elp´arokhoz X, ¬X c´ımk´eket rendelu¨nk. X jelent´ese X *igaz*, ¬X jelent´ese X *hamis* az ´elhez tartoz´o interpret´aci´okban, ´ıgy egy n-szintu˝ szemantikus fa ´again az

¨osszes (2*n* ) lehets´eges igazs´agki´ert´ekel´es (I interpret´aci´o) megjelenik.

Szemantikus fa az X, Y, Z logikai v´altoz´okra, mint b´azisra:

X

¬X

Y

¬Y

Y

¬Y

Z ¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

iii iih ihi ihh hii hih hhi hhh

Formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke I interpret´aci´oban: BI (C).



BI(C) defin´ıci´oja szerkezeti rekurzi´oval (Tk.4.2.2.)

1. Ha C formula ´ıt´eletv´altoz´o, akkor BI (C) = I(C).
2. Ha C formula neg´aci´os, akkor BI (¬A) = ¬BI (A).
3. Ha C formula (A ◦ B) alaku´, akkor

BI (A ◦ B) = BI (A) ◦ BI (B).

#### Formula igazs´agt´abl´aja



Egy n**-v´altoz´os formula igazs´agt´abl´aja** egy olyan n + 1 oszlopb´ol

´es 2*n* + 1 sorb´ol ´all´o t´abl´azat, ahol a fejl´ecben a b´azis (a formula v´altoz´oi r¨ogz´ıtett sorrendben) ´es a formula szerepel. A sorokban a v´altoz´ok alatt az **interpret´aci´ok** (a **v´altoz´ok igazs´agki´ert´ekel´esei**), a formula alatt **a formula helyettes´ıt´esi**

**´ert´ekei** tal´alhat´ok.

Egy n-v´altoz´os formula az igazs´agt´abl´aj´aval megadott i, h *n* i, h n-v´altoz´os logikai mu˝veletet ´ır le.

{ } → { }

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y ) |
| i | i | i | i |
| i | i | h | i |
| i | h | i | i |
| i | h | h | h |
| h | i | i | i |
| h | i | h | i |
| h | h | i | h |
| h | h | h | h |

t´abl´azat: A (¬(*Z* ⊃ ¬*X*) ∨ *Y* ) formula igazs´agt´abl´aja

Egy formula **igazhalmaza** azon interpret´aci´ok halmaza, amelyekre a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke igaz.

I

Egy formula **hamishalmaza** azon interpret´aci´ok halmaza, amelyekre a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke hamis.

I

# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## r´esz Logika

M´asodik el˝oad´as

[´It´eletlogika - Szemantika (folytat´as)](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark4)

[Szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom](#_bookmark7)

[Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban](#_bookmark10)

Egy formula **igaz-/hamis**halmaz´anak el˝o´all´ıt´as´ahoz keressu¨k a formula b´azis´anak interpret´aci´oira azokat a felt´eteleket, amelyek biztos´ıtj´ak, hogy ˝o az igazhalmaz illetve a hamishalmaz eleme legyen.

Ennek eszk¨oze a ϕA*α* **igazs´ag´ert´ekel´es fu¨ggv´eny** (α = **i** vagy **h**), amely egy A formula eset´en az igazs´agt´abla fel´ır´asa n´elku¨l megadja a formula k¨ozvetlen r´eszformul´ain keresztu¨l az A interpret´aci´oira vonatkoz´o ϕA**i** ´es a ϕA**h** felt´eteleket, amelyeket teljes´ıt˝o interpret´aci´okban a formula ´ert´eke **i** vagy **h** lesz.

A ϕA*α* fu¨ggv´eny ´ertelmez´esi tartom´anya a formul´ak halmaza

´ert´ekk´eszlete a formula interpret´aci´oira vonatkoz´o felt´etelek.

#### A ϕ-igazs´ag´ert´ekel´es fu¨ggv´eny defini´al´asa szerkezeti rekurzi´oval



1. Ha A pr´ımformula (´ıt´eletv´altoz´o), akkor ϕA**i** felt´etelt pontosan azok az I interpret´aci´ok teljes´ıtik, amelyekben I(A) = i, a ϕA**h** felt´etelt pedig azok, amelyekben I(A) = h.
2. A ϕ( A) felt´etelek pontosan akkor teljesu¨lnek, ha teljesu¨lnek a ϕA**h** felt´etelek.

¬

**i**

1. A ϕ(A B)**i** felt´etelek pontosan akkor teljesu¨lnek, ha teljesu¨lnek mind a ϕA**i**, mind a ϕB**i** felt´etelek.

∧

1. A ϕ(A B)**i** felt´etelek pontosan akkor teljesu¨lnek, ha teljesu¨lnek a ϕA**i** vagy a ϕB**i** felt´etelek.

∨

1. A ϕ(A B)**i** felt´etelek pontosan akkor teljesu¨lnek, ha teljesu¨lnek a ϕA**h** vagy a ϕB**i** felt´etelek.

⊃

A ϕ(¬A)**h**, a ϕ(A ∧ B)**h**, a ϕ(A ∨ B)**h**, ´es a ϕ(A ⊃ B)**h** felt´etelek

´ertelemszeru˝en ad´odnak.

ϕ(A ∧ B)**i**

ϕ(¬A)**i**

ϕA**h**

ϕA**i**

ϕB**i**

ϕ(A ∨ B)**i**

ϕA**i** ϕB**i**

ϕ(A ⊃ B)**i**

ϕA**h** ϕB**i**

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkci´os)

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukci´os)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(neg´aci´os)

ϕX**h**

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkci´os)

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukci´os)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(neg´aci´os)

ϕX**h**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.´ag | | | 2.´ag | | | 3.´ag | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *h* | ∼ | ∼ | ∼ | *i* | *i* | *h* | ∼ | ∼ |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(implik´acios)

ϕX**h** ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**i**

(diszjunkci´os)

Az igazhalmaz:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* |
| *h* | *h* | *i* |
| *h* | *h* | *h* |

ϕ(Y ∧ Z)**i**

(konjukci´os)

ϕY **i**

ϕZ**i**

ϕ¬X**i**

(neg´aci´os)

ϕX**h**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.´ag | | | 2.´ag | | | 3.´ag | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *h* | ∼ | ∼ | ∼ | *i* | *i* | *h* | ∼ | ∼ |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implik´aci´os)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkci´os)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implik´aci´os)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkci´os)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.´ag | | | 2.´ag | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *h* | ∼ | *i* | ∼ | *h* |

ϕ(X ⊃ Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬implik´aci´os)

ϕX**i**

ϕ(Y ∧ Z ∨ ¬X)**h** (¬diszjunkci´os)

ϕ(¬X)**h** ϕ(Y ∧ Z)**h**

ϕX**i**

ϕY **h** ϕZ**h**

A hamishalmaz:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *i* | *h* |
| *i* | *h* | *i* |
| *i* | *h* | *h* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.´ag | | | 2.´ag | | |
| *X* | *Y* | *Z* | *X* | *Y* | *Z* |
| *i* | *h* | ∼ | *i* | ∼ | *h* |

[´It´eletlogika - Szemantika (folytat´as)](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark4)

[Szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom](#_bookmark7)

[Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban](#_bookmark10)



Interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy formul´at

Az ´ıt´eletlogik´aban egy I **interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy** B **formul´at**

(I |=0 B). ha a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke i az I

interpret´aci´oban. A formul´at kiel´eg´ıt˝o I interpret´aci´ot a formula

modellj´enek is szok´as nevezni.

#### Kiel´eg´ıthet˝os´eg/kiel´eg´ıthetetlens´eg/tautol´ogia formul´akra



(Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kiel´eg´ıthet˝o**, ha legal´abb egy interpret´aci´o kiel´eg´ıti.

Egy B formula **kiel´eg´ıthetetlen**, ha egyetlen interpret´aci´o sem el´eg´ıti ki.

Egy B formula **tautol´ogia** (|=0 B), ha minden interpret´aci´o kiel´eg´ıti. A tautologi´at **´ıt´eletlogikai t¨orv´eny**nek is nevezik.



P´eld´ak ´ıt´eletlogikai t¨orv´enyekre (Tk 71.o ´es 74.o)

|=0 A ⊃ (B ⊃ A)

|=0 A ⊃ B ⊃ (A ∧ B)

|=0 (A ⊃ B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ B) ⊃ A ⊃ C

|=0 ((A ⊃ B) ⊃ A) ⊃ A

Legyen F = {A1, A2, . . . , A*n*} formulahalmaz.



Interpret´aci´o kiel´eg´ıt egy formulahalmazt

Az ´ıt´eletlogik´aban egy I interpret´aci´o **kiel´eg´ıt** egy F formulahalmazt (I |=0 F), ha a formulahalmaz minden formul´aj´anak helyettes´ıt´esi ´ert´eke i az I interpret´aci´oban.

#### Kiel´eg´ıthet˝os´eg/kiel´eg´ıthetetlens´eg formulahalmazokra



(Tk.4.3.12.)

Egy F formulahalmaz **kiel´eg´ıthet˝o**, ha legal´abb egy interpret´aci´o kiel´eg´ıti.

Egy F formulahalmaz **kiel´eg´ıthetetlen**, ha b´armely interpret´aci´oban legal´abb egy formul´aja h (nincs olyan interpret´aci´o, ami kiel´eg´ıten´e).

[´It´eletlogika - Szemantika (folytat´as)](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark4)

[Szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom](#_bookmark7)

[Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban](#_bookmark10)

Szemantikus k¨ovetkezm´eny (Tk.4.4.1.)



Egy tt formula **szemantikus** vagy **tautologikus k¨ovetkezm´enye**

az F = {F1, F2, . . . , F*n*} formulahalmaznak,

ha minden olyan I interpret´aci´ora, amelyre I |=0 {F1, F2, . . . , F*n*} fenn´all, I |=0 tt is fenn´all (ha I modellje {F1, F2, . . . , F*n*}-nek, akkor modellje tt-nek is).

Jel¨ol´es: {F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt



T´etel

Ha egy tt formula b´armely F felt´etelhalmaznak k¨ovetkezm´enye, akkor tt tautol´ogia (|=0 tt).

Teh´at (F, tt) akkor helyes k¨ovetkeztet´esforma, ha teljesu¨l, hogy

F |=0 tt ´es l´etezik olyan I interpret´aci´o, melyre I |=0 F .



T´etel (Tk.4.4.3.)

Ha F-nek k¨ovetkezm´enye tt1 (F |=0 tt1) ´es

F-nek k¨ovetkezm´enye tt2 (F |=0 tt2) valamint

{tt1, tt2}-nek k¨ovetkezm´enye A ({tt1, tt2} |=0 A), akkor F-nek k¨ovetkezm´enye A (F |=0 A).



Eldont´esprobl´ema

Eld¨ont´esprobl´em´anak nevezik a logik´aban annak eld¨ont´es´et, hogy egy (F, tt) p´ar a szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom szerint helyes gondolkod´asforma-e.



T´etel (Tk.4.4.4.)

F-nek akkor ´es csak akkor k¨ovetkezm´enye tt, ha az F ∪ ¬tt vagy

F1 ∧ F2 ∧ . . . ∧ F*n* ∧ ¬tt kiel´eg´ıthetetlen.

Ennek alapj´an azegyik **szemantikus eld¨ont´esprobl´ema**: tetsz˝oleges ´ıt´eletlogikai formul´ar´ol eld¨onteni, hogy kiel´eg´ıthetetlen-e.



T´etel (dedukci´os) (Tk.4.4.7.)

{F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt akkor ´es csak akkor, ha

{F1, F2, . . . , F*n*−1} |=0 (F*n* ⊃ tt)



T´etel (eld¨ont´esprobl´ema) (Tk.4.4.8.)

{F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt akkor ´es csak akkor, ha

|=0 F1 ⊃ (F2 ⊃ . . . (F*n*−1 ⊃ (F*n* ⊃ tt)) . . .)

Ennek alapj´an am´asik **szemantikus eld¨ont´esprobl´ema**: tetsz˝oleges ´ıt´eletlogikai formul´ar´ol eld¨onteni, hogy tautol´ogia-e.



Defin´ıci´o 1. v´altozat (Tk.4.3.7.)

K´et vagy t¨obb formula igazs´agt´abl´aja lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formul´ak **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jel¨ol´es´ere a ∼0 szimb´olumot haszn´aljuk.



Defin´ıci´o 2. v´altozat

Az A ´es B formul´ak **tautologikusan ekvivalensek**, ha A |=0 B ´es B |=0 A.

Ekkor |=0 (A ⊃ B) ∧ (B ⊃ A).

P´eld´ak ´atalak´ıt´asi szab´alyokra



X ⊃ Y ∼0 ¬X ∨ Y

¬¬X ∼0 X

De Morgan szab´alyok:

1 ¬(X ∧ Y ) ∼0 ¬X ∨ ¬Y

2 ¬(X ∨ Y ) ∼0 ¬X ∧ ¬Y

Egyszeru˝s´ıt´esi szab´alyok:

1 (X ∨ d) ∧ (¬X ∨ d) ∼0 d

2 (X k) ( X k) 0 k

∧ ∨ ¬ ∧ ∼

ahol d elemi diszjunkci´o ´es k elemi konjunkci´o.



Defin´ıci´o (Tk.4.4.14.)

Legyen a F felt´etelhalmazban szerepl˝o v´altoz´ok sz´ama n. Ekkor a

**legszu˝kebb k¨ovetkezm´eny** az az {i, h}*n* → {i, h} lek´epez´es,

amely pontosan azokhoz az interpret´aci´okhoz rendel i ´ert´eket,

amelyek kiel´eg´ıtik az F-et.



El˝orek¨ovetkeztet´es

Ismert az F felt´etelhalmaz, ´es keressu¨k F lehets´eges k¨ovetkezm´enyeit. Megkeressu¨k F legszu˝kebb k¨ovetkezm´eny´et, R-t.

K¨ovetkezm´eny minden olyan tt formula, amelyre R ⊃ tt

tautol´ogia, azaz R igazhalmaza r´esze tt igazhalmaz´anak.

F = {Z ⊃ M ∨ P, Z, ¬P }

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | M | Z | Z ⊃ M ∨ P | Z | ¬P | lszk. | k¨ov. |
| i | i | i | i | i | h | h | h/i |
| i | i | h | i | h | h | h | h/i |
| i | h | i | i | i | h | h | h/i |
| i | h | h | i | h | h | h | h/i |
| h | i | i | i | i | i | i | i |
| h | i | h | i | h | i | h | h/i |
| h | h | i | h | i | i | h | h/i |
| h | h | h | i | h | i | h | h/i |

Csak egy igazs´ag´ert´ekre kiel´eg´ıthet˝o a felt´etelhalmaz.

#### Visszak¨ovetkeztet´es



Az F felt´etelhalmaz ´es a B k¨ovetkezm´enyformula ismeret´eben eld¨ontju¨k, hogy B val´oban k¨ovetkezm´enye-e F-nek. Mivel F |=0 B pontosan akkor, ha az F ∪ {¬B} formulahalmaz kiel´eg´ıthetetlen.

M´as sz´oval B pontosan akkor k¨ovetkezm´enye F-nek, ha minden olyan interpret´aci´oban, ahol B hamis, az F kiel´eg´ıthetetlen.



P´elda

Be kell l´atni, hogy, ha ¬M igaz egy interpret´aci´oban, akkor F nem lesz

Legyen F = {Z ⊃ M ∨ P, Z, ¬P } ´es l´assuk be, hogy M k¨ovetkezm´eny.

kiel´eg´ıthet˝o. Ahhoz,hogy minden felt´etelformula i legyen Z = i, P = h

mellett Z ⊃ M ∨ P -nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis,

akkor Z ⊃ M ∨ P = h lehet csak. Teh´at M k¨ovetkezm´enye F-nek.

[´It´eletlogika - Szemantika (folytat´as)](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark4)

[Szemantikus k¨ovetkezm´enyfogalom](#_bookmark7)

[Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban](#_bookmark10)

Tegyu¨k fel, hogy adott valamilyen k¨oznapi vagy matematikai probl´ema. Ennek term´eszetes nyelvu˝ egyszeru˝ vagy ¨osszetett kijelent˝o mondatokkal val´o le´ır´as´at ismerju¨k.

**Formaliz´al´as az ´ıt´eletlogik´aban** 1

Az **egyszeru˝ kijelent˝o mondatok** formaliz´al´as´ara bevezetu¨nk egy

##### azonos´ıt´ot (´all´ıt´asjel, ´ıt´eletv´altoz´o).

Az **¨osszetett mondatot** analiz´aljuk, ´atalak´ıtjuk azonos ´ertelmu˝, de egyszeru˝ kijelent˝o mondatokb´ol olyan nyelvtani ¨osszek¨ot˝okkel fel´ırt mondatt´a, ahol **a nyelvtani ¨osszek¨ot˝ok egyben logikai**

**¨osszek¨ot˝ok** (logikai mu˝veletek).

1Tk.54-55.o.

Bet¨ortek egy ´aruh´azba. A nyomoz´asi jegyz˝ok¨onyv a k¨ovetkez˝oket tartalmazza:

Ha f´erfi a tettes, akkor kistermetu˝.

Ha kistermetu˝, akkor az ablakon m´aszott be.

A tettes f´erfi vagy legal´abbis f´erfiruh´at hordott.

Ha f´erfiruh´at hordott ´es felt´eve, hogy a szemtanu´ vallom´asa hiteles akkor az ablakon m´aszott be.

A helysz´ıni szemle meg´allap´ıtotta, hogy az ablakon senki sem m´aszott be.

A nyomoz´ok azt sejtik, hogy a tettes nem f´erfi.

Bet¨ortek egy ´aruh´azba. A nyomoz´asi jegyz˝ok¨onyv a k¨ovetkez˝oket tartalmazza:

Ha f´erfi a tettes( F ), akkor kistermetu˝( K). F ⊃ K

Ha kistermetu˝, akkor az ablakon m´aszott be( A). K ⊃ A

A tettes f´erfi vagy legal´abbis f´erfiruh´at hordott( R). F ∨ R

Ha f´erfiruh´at hordott ´es felt´eve, hogy a szemtanu´ vallom´asa hiteles (H), akkor az ablakon m´aszott be. (R ∧ H) ⊃ A

A helysz´ıni szemle meg´allap´ıtotta, hogy az ablakon senki sem m´aszott be. ¬A

A nyomoz´ok azt sejtik, hogy a tettes nem f´erfi. ¬F

A felt´etelhalmaz: {F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A}

A felt´etelez´es szerinti k¨ovetkezm´eny: ¬F

El˝orek¨ovetkeztet´es:

Az {F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A} formulahalmazt egyetlen interpret´aci´o el´eg´ıti ki:

A = h, F = h, K = h, R = i, H = h, azaz a legszu˝kebb k¨ovetkez´enyt le´ır´o formula: ¬A ∧ ¬F ∧ ¬K ∧ R ∧ ¬H (¬A ∧ ¬F ∧ ¬K ∧ R ∧ ¬H) ⊃ ¬F tautol´ogia, ´ıgy ¬F k¨ovetkezm´eny.

Visszak¨ovetkeztet´es:

¬F k¨ovetkezm´eny, mivel a neg´altj´at hozz´av´eve a felt´etelhalmazhoz, a kapott formulahalmaz:

{F ⊃ K, K ⊃ A, F ∨ R, (R ∧ H) ⊃ A, ¬A, F } kiel´eg´ıthetetlen.

# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## r´esz Logika

Harmadik el˝oad´as

[Els˝orendu˝ logika – bevezet´es](#_bookmark0)

[Az els˝orendu˝ logika szintaxisa](#_bookmark7)

Az ´ıt´eletlogik´aban nem foglalkoztunk az ´all´ıt´asok min˝os´ıt´es´evel ´es az

´all´ıt´asok le´ır´as´aval. Az ´all´ıt´as defin´ıci´oja szerint az ´all´ıt´ast egy kijelent˝o mondattal ki lehet fejezni.

Ha a kijelent˝o mondat *alanya valamely konkr´et dolog*, akkor az ´all´ıt´ast **nulladrendu˝ ´all´ıt´as**nak h´ıvjuk. Az ilyen ´all´ıt´asok form´alis le´ır´as´ara egy rel´aci´ot (logikai fu¨ggv´enyt) defini´alunk.



P´eld´ak

* E(x) = i, ha x eg´esz sz´am
* P (x) = i, ha x pr´ımsz´am
* L(x, y, z) = i,ha z az x ´es az y legnagyobb k¨oz¨os oszt´oja

Az ´all´ıt´as konkr´et egyedekkel behelyettes´ıtett rel´aci´o. Pl.: E(9) vagy L(9,6,3) ´all´ıt´asok, de L(9,6,z) nem ´all´ıt´as (param´eteres ´all´ıt´as).

Ha a kijelent˝o mondat *alanya egy halmaz*, akkor az ´all´ıt´ast

**els˝orendu˝ ´all´ıt´as**nak h´ıvjuk.

Ilyenkor az ´all´ıt´as az ¨osszes elemre egyideju˝leg fenn´all´o meg´allap´ıt´ast/´altal´anos´ıt´ast vagy a halmaz bizonyos elemeire (nem felt´etlenu¨l mindre) fenn´all´o meg´allap´ıt´ast/l´etez´est fogalmaz meg.

Le´ır´asukhoz a kvantorokat (∀,∃) haszn´aljuk.



P´elda

* ∀xE(x) azt jelenti, hogy a halmaz minden eleme eg´esz sz´am.
* ∃xP (x) azt jelenti, hogy a halmazban van olyan elem, ami

pr´ımsz´am.

Az 1800-as ´evek v´eg´en ´es az 1900-as ´evek elej´en a matematikai struktu´r´ak (halmazelm´elet ´es az aritmetika – sz´amelm´elet) logikai vizsg´alat´ahoz meg kellett teremteni mind a nulladrendu˝, mind az els˝orendu˝ ´all´ıt´asok le´ır´as´ara szolg´al´o eszk¨oz¨oket. Szu¨ks´egess´e v´alt a matematikai struktu´r´akat le´ır´o nyelv defini´al´asa.

#### Defin´ıci´o



A matematikai struktu´ra egy (U, R, M, K) halmazn´egyes, ahol

* U : nem u¨res halmaz, a struktu´ra ´ertelmez´esi tartom´anya (amennyiben U egyfajt´aju´ elemekb˝ol ´all)
* R: az U -n ´ertelmezett n-v´altoz´os (n = 1, 2, . . . , k) logikai fu¨ggv´enyek (**alaprel´aci´ok**) halmaza
* M : az U -n ´ertelmezett n-v´altoz´os (n = 1, 2, . . . , k) matematikai fu¨ggv´enyek (**alapmu˝veletek**) halmaza
* K: az U megjel¨olt elemeinek egy (esetleg u¨res) r´eszhalmaza



A **struktu´ra szignatu´r´aja** (ν1, ν2, ν3 eg´esz´ert´eku˝ fgv.egyu¨ttes) megadja az alaprel´aci´ok ´es az alapmu˝veletek arit´as´at, valamint K elemsz´am´at.

Adott matematikai struktu´ra le´ır´o nyelv ´ab´ec´ej´enek logik´an k´ıvu¨li r´esze ´all:

* az R halmazbeli alaprel´aci´ok *nevei*b˝ol
* az M halmazbeli alapmu˝veletek *nevei*b˝ol
* a K halmazbeli elemek *nevei*b˝ol

Ezekkel a nevekkel m´ar lehet egyszeru˝ (nulladrendu˝ ´es param´eteres) ´all´ıt´asokat le´ırni. Az R, M, K-beli nevek a le´ır´o nyelv **logik´an k´ıvu¨li** r´esz´et k´epezik.

Az ¨osszetett ´all´ıt´asok ´es az els˝orendu˝ ´all´ıt´asok le´ır´as´ara kib˝ov´ıtju¨k az ´ab´ec´et a **logikai szimb´olumok**kal (az ´ab´ec´e logikai r´esze):

* individuumv´altoz´ok
* un´er ´es bin´er logikai mu˝veleti jelek ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok ∀, ∃
* elv´alaszt´ojelek ( ) ,

Ez egyu¨tt egy adott matematikai struktu´ra logikai le´ır´o nyelv´enek az ´ab´ec´eje.

(N0; =; s, +, ∗; 0) egyu¨ttes, ahol

**P´elda – elemi aritmetika** 1

* x, y, . . .: individuumv´atoz´ok befutj´ak a term´eszetes sz´amok halmaz´at (N0-t)

• =: az {(x, x)} igazhalmazu´ alaprel´aci´o neve

* s: az egyv´altoz´os r´ak¨ovetkez´es fu¨ggv´eny neve

• + ´es ∗: rendre az ¨osszead´as ´es a szorz´as mu˝veletek nevei

* 0: a megjel¨olt univerzumelem neve (az az elem, amely nem tartozik a r´ak¨ovetkez´es fu¨ggv´eny ´ert´ekk´eszlet´ebe)

1Tk.36-37.o.

A **struktu´ra szignatu´r´aja** alatt az alaprel´aci´ok ´es az alapmu˝veletek arit´asait, valamint a konstansok sz´am´at megad´o ν1, ν2, ν3 eg´esz ´ert´eku˝ fu¨ggv´enyeket ´ertju¨k.

Esetu¨nkben: ν1(=) = 2, ν2(s) = 1, ν2(+) = 2, ν2(∗) = 2, ν3 = 1

Felsorol´assal megadva:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| = | s | + | ∗ | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Az elemi aritmetika le´ır´o nyelv´enek ´ab´ec´ej´eben az N0 kezel´es´ere a

**v´altoz´ok** (x, y, . . .) szolg´alnak (individuumv´altoz´ok), az

{=, s, +, ∗; 0} jelek a megfelel˝o **lek´epez´esek azonos´ıt´oi**. A le´ır´o nyelv szignatu´r´aja ugyanaz, mint a struktu´r´a´e.

Az alaprel´aci´okkal (itt az = rel´aci´oval) lehet ´all´ıt´asokat le´ırni, pl.

2 = 3, 5 = 5. De nem ´all´ıt´as pl. y = 5 vagy z = w (param´eteres

´all´ıt´asok). Egy´eb ismert egyszeru˝ ´all´ıt´asokat pl. a kisebb egyenl˝o rel´aci´ot ezen a nyelven csak ¨osszetett ´all´ıt´as form´aj´aban lehet fel´ırni (formaliz´alni). Ehhez a nyelv ´ab´ec´ej´et logikai r´esszel b˝ov´ıtju¨k ki. Ezek:

* individuumv´altoz´ok: x, y, . . .
* logikai ¨osszek¨ot˝ojelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok: ∀, ∃
* elv´alaszt´ojelek: ( ) ,

Defini´aljuk (formaliz´aljuk) az aritmetika logikai le´ır´o nyelv´en a ≤

rel´aci´ot:



x ≤ y

x ≤ y =*def* ∃z((x + z) = y)

*Megjegyz´es*: Az aritmetika univerzuma *egyfajt´aju´* elemekb˝ol, a term´eszetes sz´amokb´ol ´allt. Egy matematikai struktu´ra univerzuma *t¨obbfajt´aju´* elemekb˝ol is ´allhat. P´eld´aul a t´ergeometri´aban pontok, egyenesek ´es s´ıkok alkotj´ak az ´ertelmez´esi tartom´anyt. Ekkor a le´ır´o nyelv ´ab´ec´ej´eben a fajt´ak elnevez´es´ere is bevezetu¨nk jeleket. Esetu¨nkben ezek a nevek: p, e, s. ´Igy az ´ertelmez´esi tartom´any

U*p* ∪ U*e* ∪ U*s* lesz, a struktu´ra pedig az (U*p* ∪ U*e* ∪ U*s*, R, M, K)

egyu¨ttes.

Olyan ´ab´ec´evel kell hogy rendelkezzen, melynek a logik´an k´ıvu¨li szimb´olumai ´es azok szignatu´r´aja param´eterez´essel b´armely adott matematikai struktu´ra szignatu´r´aj´aval megfeleltethet˝o kell legyen,

**Az elso˝rendu˝ logika le´ır´o nyelve (**L**) –**

**k¨ovetelm´enyek**

´es enn´elfogva a szimb´olumok lehessenek a struktu´ra rel´aci´oinak, mu˝veleteinek ´es megjel¨olt elemeinek a nevei. M´as sz´oval a nyelv alkalmas kell, hogy legyen tetsz˝oleges szignatu´r´aju´ matematikai struktu´r´ak le´ır´as´ara.

**Egyf´ele elemb˝ol ´all´o** U **eset´en** az (U, R, M, K) struktu´ra le´ır´o nyelv **logik´an k´ıvu¨li** r´esze lehet a k¨ovetkez˝o.

Az L nyelv ´ab´ec´eje: (P r, F n, Cnst), szignatu´r´aja: (ν1, ν2, ν3).

* P r: predik´atumszimb´olumok halamaza

ν1: P ∈ P r-re megadja P arit´as´at (k)

* F n: fu¨ggv´enyszimb´olumok halamaza

ν2: f ∈ F n-re megadja f arit´as´at (k)

* Cnst: konstansszimb´olumok halamaza

ν3: megadja a konstansok sz´am´at

**T¨obbf´ele elemb˝ol ´all´o** U **eset´en** az (U, R, M, K) struktu´ra le´ır´o nyelv **logik´an k´ıvu¨li** r´esze lehet a k¨ovetkez˝o.

Az L nyelv ´ab´ec´eje: (Srt, P r, F n, Cnst), szignatu´r´aja: (ν1, ν2, ν3).

* Srt: nemu¨res halmaz, melynek π*j* elemei fajt´akat szimboliz´alnak
* P r: predik´atumszimb´olumok halamaza

ν1: P ∈ P r-re megadja P arit´as´at (k), ´es hogy milyen fajt´aju´ak az egyes argumentumok (π1, π2, . . . , π*k*)

* F n: fu¨ggv´enyszimb´olumok halamaza

ν2: f ∈ F n-re megadja f arit´as´at (k), ´es hogy milyen fajt´aju´ak az egyes argumentumok, valamint a fu¨ggv´eny ´ert´eke (π1, π2, . . . , π*k*; π*f* )

* Cnst: konstansszimb´olumok halamaza

ν3: megadja minden fajt´ahoz a konstansok sz´am´at.

* ku¨l¨onb¨oz˝o fajt´aju´ individuumv´altoz´ok (minden fajt´ahoz megsz´aml´alhat´oan v´egtelen sok): x, y, y*k*, . . .
* un´er ´es bin´er logikai mu˝veleti jelek: ¬, ∧, ∨, ⊃
* kvantorok: ∀, ∃
* elv´alaszt´ojelek: ( ) ,

Az L nyelv ´ab´ec´ej´ere V [V*ν* ]-vel hivatkozunk, ahol V*ν* adja meg a

(ν1, ν2, ν3) szignatu´r´aju´ (Srt, P r, F n, Cnst) halmazn´egyest.

[Els˝orendu˝ logika – bevezet´es](#_bookmark0)

[Az els˝orendu˝ logika szintaxisa](#_bookmark7)

A nyelv kifejez´esei inform´alisan:

* **termek**: a matematikai lek´epez´eseket szimboliz´alj´ak
* **formul´ak**: a logikai lek´epez´eseket szimboliz´alj´ak

**Egyfajt´aju´** eset.

**Az elso˝rendu˝ logika szintaxisa** 2 **– term I.**

#### Termek – L*t*(V*ν*)



1. (alapl´ep´es) Minden individuumv´altoz´o ´es konstans szimb´olum term.
2. (rekurz´ıv l´ep´es) Ha az f ∈ F n k-v´altoz´os fu¨ggv´enyszimb´olum

´es t1, t2, . . . , t*k* termek, akkor f (t1, t2, . . . , t*k*) is term.

1. Minden term az 1, 2 szab´alyok v´eges sokszori alkalmaz´as´aval

´all el˝o.

2Tk.112.o.

**Egyfajt´aju´** eset.

#### Formul´ak – L*f* (V*ν*)



1. (alapl´ep´es) Ha a P ∈ P r k-v´altoz´os predik´atumszimb´olum ´es t1, t2, . . . , t*k* termek, akkor P (t1, t2, . . . , t*k*) formula (atomi formula).
2. (rekurz´ıv l´ep´es)
   * Ha A formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A ´es B formul´ak, akkor (A B) is formula, ahol a h´arom bin´er mu˝velet b´armelyike.

◦ ◦

1. Ha A formula, akkor ∀xA ´es ∃xA is az.
2. Minden formula az 1, 2, 3 szab´alyok v´eges sokszori alkalmaz´as´aval ´all el˝o.

**T¨obbfajt´aju´** eset.

#### Termek – L*t*(V*ν*)



1. (alapl´ep´es) Minden π ∈ Srt fajt´aju´ individuumv´altoz´o ´es konstans szimb´olum π fajt´aju´ term.
2. (rekurz´ıv l´ep´es) Ha az f ∈ F n (π1, π2, . . . , π*k*; π*f* ) fajt´aju´ fu¨ggv´enyszimb´olum ´es t1, t2, . . . , t*k* rendre π1, π2, . . . , π*k* fajt´aju´ termek, akkor f (t1, t2, . . . , t*k*) π*f* fajt´aju´ term.
3. Minden term az 1, 2 szab´alyok v´eges sokszori alkalmaz´as´aval

´all el˝o.

**T¨obbfajt´aju´** eset.

#### Formul´ak – L*f* (V*ν*)



1. (alapl´ep´es) Ha a P ∈ P r (π1, π2, . . . , π*k*) fajt´aju´ predik´atumszimb´olum ´es t1, t2, . . . , t*k* rendre π1, π2, . . . , π*k* fajt´aju´ termek, akkor P (t1, t2, . . . , t*k*) formula (atomi formula).
2. (rekurz´ıv l´ep´es)
   * Ha A formula, akkor ¬A is az.
   * Ha A ´es B formul´ak, akkor (A B) is formula, ahol a h´arom bin´er mu˝velet b´armelyike.

◦ ◦

1. Ha A formula, akkor ∀xA ´es ∃xA is az.
2. Minden formula az 1, 2, 3 szab´alyok v´eges sokszori alkalmaz´as´aval ´all el˝o.

Els˝orendu˝ logikai nyelv: L(V*ν* ) = L*t*(V*ν* ) ∪ L*f* (V*ν* ).

* ¬A neg´aci´os
* A ∧ B konjukci´os
* A ∨ B diszjunkci´os
* A ⊃ B implik´aci´os
* ∀xA univerz´alisan kvant´alt
* ∃xA egzisztenci´alisan kvant´alt

A ∀xA´es ∃xA formul´ak eset´en az A formula a kvant´alt formula t¨orzse - m´atrixa.

Vezessu¨k be a ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, ⊃ priorit´asi sorrendet, ekkor az

´ıt´eletlogik´ahoz hasonl´oan defini´aljuk:

* a z´ar´ojelelhagy´asokat
* a mu˝veletek ´es a kvantorok hat´ask¨or´et
* a komponens ´es pr´ımkomponens fogalmakat
* egy formula f˝o mu˝veleti jel´et



Az ´ıt´eletlogik´aban minden formul´at fel lehet ´ırni a pr´ımformul´ak (azaz ´ıt´eletv´altoz´ok) ´es a mu˝veletek seg´ıts´eg´evel. Az els˝orendu˝ nyelvben is vannak ilyen formul´ak. **Pr´ımformul´ak***a* az els˝orendu˝ nyelvben az atomi formul´ak ´es a kvant´alt formul´ak.

*a*Tk.113.o.



Kozvetlen r´eszterm

1. Konstansnak ´es individuumv´altoz´onak nincs k¨ozvetlen r´esztermje.
2. Az f (t1, t2, . . . , t*k*) term k¨ozvetlen r´esztermjei a t1, t2, . . . , t*k*

termek.



Kozvetlen r´eszformula

1. Egy atomi formul´anak nincs k¨ozvetlen r´eszformul´aja.
2. ¬A k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

3 Az (A ◦ B) k¨ozvetlen r´eszformul´ai az A (baloldali) ´es a B

(jobboldali) formul´ak.

4 A QxA (Q ∈ {∀, ∃}) k¨ozvetlen r´eszformul´aja az A formula.

Egy formul´aban egy logikai mu˝velet hat´ask¨or´eben l´ev˝o r´eszformul´a(ka)t **komponens formul´aknak** nevezzu¨k.



1. Egy atomi formul´anak nincs k¨ozvetlen komponense

(**pr´ımformula**).

1. ¬A k¨ozvetlen komponense az A formula.
2. Az (A ◦ B) k¨ozvetlen komponensei az A ´es a B formul´ak.

4 A QxA (Q ∈ {∀, ∃}) formul´anak nincs k¨ozvetlen komponense

(**pr´ımformula**).

*Megjegyz´es*: **pr´ımkomponens**nek nevezzu¨k azokat a pr´ımformul´akat, amelyekb˝ol a formula kiz´ar´olag a ¬, ∧, ∨, ⊃ mu˝veletek seg´ıts´eg´evel ´epu¨l fel.



Ennek megfelel˝oen a **pr´ımformul´ak**:

1. Egy atomi formula pr´ımformula.
2. Egy QxA formula pr´ımformula.

#### Term szerkezeti f´aja.

**Szerkezeti f´ak** 3



Egy t term szerkezeti f´aja egy olyan v´eges fa, melyre teljesu¨l, hogy

* a gy¨oker´ehez a t term van rendelve,
* ha valamelyik csu´cs´ahoz egy tj term van rendelve, akkor az adott csu´cs gyerekeihez a tj term k¨ozvetlen r´esztermjei vannak rendelve,
* leveleihez individuumv´altoz´ok vagy konstansok vannak rendelve.

3Tk. 116-118.o.

#### Formula szerkezeti f´aja.



Egy F formula szerkezeti egy olyan v´eges fa, melyre teljesu¨l, hogy

* a gy¨oker´ehez az F formula van rendelve,
* ha valamelyik csu´cs´ahoz egy F j formula van rendelve, akkor az adott csu´cs gyerekeihez az F j formula k¨ozvetlen r´eszformul´ai vannak rendelve,
* leveleihez atomi formul´ak vannak rendelve.

Egy A formula **logikai ¨osszetetts´ege**: A(A)



Szerkezeti rekurzi´o szerinti defin´ıci´o (Tk.5.1.15)

1 Ha A atomi formula, akkor A(A) = 0

2 A(¬A) = A(A) + 1

3 A(A ◦ B) = A(A) + A(B) + 1

4 A(QxA) = A(A) + 1



**Egy formul´aban egy** x **v´altoz´o egy el˝ofordul´asa**

* **szabad**, ha nem esik x-re vonatkoz´o kvantor hat´ask¨or´ebe
* **k¨ot¨ott**, ha x-re vonatkoz´o kvantor hat´ask¨or´ebe esik



**Egy** x **v´altoz´o egy formul´aban**

* **k¨ot¨ott v´altoz´o**, ha x minden el˝ofordul´asa k¨ot¨ott
* **szabad v´altoz´o**, ha x minden el˝ofordul´asa szabad
* **vegyes v´altoz´o**, ha x-nek van szabad ´es k¨ot¨ott el˝ofordul´asa is

*Megjegyz´es*: Ha egy formul´aban egy v´altoz´o k¨ot¨ott, akkor

´atnevezve ezt a v´altoz´ot a formul´aban el˝o nem fordul´o v´altoz´on´evvel a formula ekvivalens marad az eredetivel. Ily m´odon minden formula ´at´ırhat´o v´altoz´o´atnevez´esekkel *vegyes v´altoz´ot* m´ar *nem tartalmaz´o formul´av´a*.



Szabad ´es k¨ot¨ott v´altoz´ok

A formula: ∀xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

A pr´ımkomponensek: ∀xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)

A szabad individuumv´altoz´ok: v, w



Z´arts´ag

* **Egy formula z´art**, ha minden v´altoz´oja k¨ot¨ott.
* **Egy formula nyitott**, ha legal´abb egy individuumv´altoz´onak

van legal´abb egy szabad el˝ofordul´asa.

* **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

1. **rendu˝ ´all´ıt´asok**at szimboliz´alnak az L nyelven a z´art formul´ak vagy **mondatok**.

#### Alapkifejez´es



**Alapkifejez´es** a v´altoz´ot nem tartalmaz´o L kifejez´es (alapformula, alapterm). Ezeket alapp´eld´anyoknak is nevezik. Az atomi formul´ak alapp´eld´anyait k´et csoportba soroljuk:

* 1. Egy atomi formula **alapatom**, ha argumentumai konstans szimb´olumok vagy egy megadott univerzum elemei (pl. P (c))
  2. Egy atomi formul´at **az atomi formula alapp´eld´any´anak**

nevezzu¨k, ha argumentumai **alaptermek** (pl. Q(f (a, b), a))

*Megjegyz´es*: Egy atomi formul´at (nem alapp´eld´any) egy´ebk´ent param´eteres ´all´ıt´asnak is neveznek.

# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## r´esz Logika

Negyedik el˝oad´as

[Az els˝orendu˝ logika szemantik´aja](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark9)

Egy els˝orendu˝ logikai nyelv L[V*ν*] interpret´aci´oja egy, az L nyelvvel azonos szignatu´r´aju´ (U, R, M, K) matematikai struktu´ra.

*M´asik megfogalmaz´as*: egy, a szignatu´r´anak megfelel˝o U halmaz megad´asa, ezen a P r, F n, Cnst szimb´olumhalmazok szignatu´r´aj´aval megegyez˝o R, M , K rel´aci´o-, mu˝velet- ´es konstanshalmaz defini´al´asa.

Az interpret´aci´o mu˝k¨od´ese: = *Srt*, *P r*, *F n*, *Cnst*



I I (I I I I )

fu¨ggv´enyn´egyes, ahol:

* *Srt* : π *π*, ahol ha Srt egyelemu˝, akkor az interpret´aci´o U

I ›→ U

univerzuma egyfajt´aju´ elemekb˝ol ´all

* az I*P r* : P ›→ P I, ahol P I a struktu´ra R halmaza
* az I*F n* : f ›→ f I, ahol f I a struktu´ra M halmaza
* az I*Cnst* : c ›→ cI, ahol cI a struktu´ra K halmaza



V´altoz´oki´ert´ekel´es

az interpret´aci´o univerzuma.

Egy κ : V → U lek´epez´es, ahol V a nyelv v´altoz´oinak halmaza, U pedig

|x|I*,κ* az U univerzumbeli κ(x) elem.

Legyen egy formula valamely L(P1, P2, . . . , P*n*; f1, f2, . . . , f*k*) formaliz´alt nyelven, ahol (r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*) az L nyelv, t´ıpusa/szignatu´r´aja (ν1, ν2, ν3).

1. l´ep´esV´alasztunk egy S = U (R1, R2, . . . , R*n*; o1, o2, . . . , o*k*) matematikai struktu´r´at, amelynek a t´ıpusa/szignatu´r´aja

(r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*)/(ν1, ν2, ν3) megegyezik a nyelv´evel ´es a logik´an k´ıvu¨li szimb´olumokat a megfelel˝o rel´aci´oknak illetve mu˝veleteknek feleltetju¨k meg: P*i* = P*i*I , f*k* = f*k*I (ha az interpret´al´o struktu´r´anak nincs le´ır´o nyelve, vagy nem akarjuk azt haszn´alni. Ha felhaszn´aljuk az interpret´al´o struktu´ra le´ır´o nyelv´et, akkor P*i*I = R*i* neve ´es f*k*I = o*k* neve. Ez a nyelv szimb´olumainak interpret´aci´oja, ahol R*i* ´es o*k* jelent´ese egy´ertelmu˝).

1. l´ep´esA nem k¨ot¨ott individuumv´altoz´ok ki´ert´ekel´ese ( x I*,κ*) ´es a kifejez´esek helyettes´ıt´esi ´ert´ekeinek kisz´am´ıt´asa.

| |



Termek szemantik´aja

1 ha c konstansszimb´olum, |c|I*,κ* az U -beli cI elem

2 ha x individuumv´altoz´o, |x|I*,κ* a κ(x) ∈ U elem

(ahol κ egy v´altoz´oki´ert´ekel´es)

3 |f (t1, t2, . . . , t*n*)|I*,κ* = f I((|t1|I*,κ*, |t2|I*,κ*, . . . , |t*n*|I*,κ*))

#### Formul´ak szemantik´aja



1 P (t1, t2, . . . , t*n*) I*,κ* = i, ha ( t1 I*,κ*, t2 I*,κ*, . . . , t*n* I*,κ*) P I, ahol a P I jel¨oli a P I rel´aci´o igazhalmaz´at.

| | | | | | | | ∈

2 |¬A|I*,κ* = ¬|A|I*,κ*

|A ∧ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ∧ |B|I*,κ*

|A ∨ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ∨ |B|I*,κ*

|A ⊃ B|I*,κ* = |A|I*,κ* ⊃ |B|I*,κ*

* 1. |∀xA|I*,κ* = i, ha|A|I*,κ*∗ = i κ minden κ∗ x vari´ans´ara

|∃xA|I*,κ* = i, ha|A|I*,κ*∗ = i κ legal´abb egy κ∗ x vari´ans´ara

A tov´abbiakban egyfajt´aju´ struktu´r´akkal ´es egyfajt´aju´ nyelvvel (Srt egyelemu˝ halmaz) foglalkozunk az els˝orendu˝ logika t´argyal´asa sor´an.

L

∀xP (x, y) formula kifejt´ese



U = {a, b, c}, formulakifejt´es κ(y) = a, b, c-re:

* + κ(y) = a

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, a)|I = P I(a, a) ∧ P I(b, a) ∧ P I(c, a)

* + κ(y) = b

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, b)|I = P I(a, b) ∧ P I(b, b) ∧ P I(c, b)

* + κ(y) = c

|∀xP (x, y)|I*,κ* = |∀xP (x, c)|I = P I(a, c) ∧ P I(b, c) ∧ P I(c, c)

∀x∃y(P (x, y) ⊃ R(x, y)) formula kifejt´ese



U = {a, b, c}

|∀x∃y(P (x, y) ⊃ R(x, y))|I

=

|∃y(P (a, y) ⊃ R(a, y))|I ∧

|∃y(P (b, y) ⊃ R(b, y))|I ∧

|∃y(P (c, y) ⊃ R(c, y))|I

=

(P I(a, a) ⊃ RI(a, a))∨(P I(a, b) ⊃ RI(a, b))∨(P I(a, c) ⊃ RI(a, c)) ∧

. Σ

(P I(b, a) ⊃ RI(b, a)) ∨ (P I(b, b) ⊃ RI(b, b)) ∨ (P I(b, c) ⊃ RI(b, c))

∧

.(P I(c, a) ⊃ RI(c, a)) ∨ (P I(c, b) ⊃ RI(c, b)) ∨ (P I(c, c) ⊃ RI(c, c))Σ ∧

* + L nyelv:

= (=, P1, P2; a, b, f1, f2)

L

szignatu´ra: (2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)

* + A struktu´ra le´ır´o nyelve:

S = N(=, <, >; 0, 1, +, )

∗

szigantu´ra: (2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I*P r* : P → P I | = | P1 | P2 |
|  | = | < | > |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| I*F n* : f → f I | a | b | f1 | f2 |
|  | 0 | 1 | + | ∗ |

I*Cnst*: nincs konstans, csak k´et db 0 v´altoz´os fu¨ggv´eny

*Az* t = f1(x, f2(x, y)) *term jelent´es´enek meg´allap´ıt´asa*:

|t|I*,κ* = |f1(x, f2(x, y))|I*,κ* =

|f1|I (|x|I*,κ*, |f2(x, y)|I*,κ*) =

+(x, ∗(x, y)) =

x + x ∗ y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x + x ∗ y |
| κ1 | 1 | 1 | 2 |
| κ2 | 2 | 3 | 8 |
| κ3 | 0 | 4 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |

*A* P1(t, f1(y, f2(x, y))) *formula jelent´es´enek meg´allap´ıt´asa*:

|P1(t, f1(y, f2(x, y)))|I*,κ* =

|P1|I (|t|I*,κ*, |f1|I (|y|I*,κ*, |f2|I (|x|I*,κ*, |y|I*,κ*))) =

< (+(x, ∗(x, y)), +(y, ∗(x, y))) =

< (x + x ∗ y, y + x ∗ y) = (x + x ∗ y) < (y + x ∗ y)

Egy kvantormentes formula ki´ert´ekel´ese: a formula minden alap el˝ofordul´as´at gener´aljuk ´es ´ıgy minden ´all´ıt´as el˝o´all I-ben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | *y* | (*x* + *x* ∗ *y*) *<* (*y* + *x* ∗ *y*) |
| 1 | 1 | (1 + 1 ∗ 1) *<* (1 + 1 ∗ 1) = *h* |
| 2 | 3 | (2 + 2 ∗ 3) *<* (3 + 2 ∗ 3) = *i* |
| . . . | *. . .* | *. . .* |

*Egzisztenci´alis formula jelent´es´enek meg´allap´ıt´asa*:

xP1(a, f1(x, x)) I*,κ* = i, ha P1(a, f1(x, x)) I*,κ*∗ = i κ legal´abb egy κ∗ vari´ans´ara.

|∃ | | |

Azaz ebben az interpret´aci´oban, ha 0 < (x + x) = i

legal´abb egy u ∈ N eset´en.

N´ezzu¨k meg a formula ´ert´ekt´abl´aj´at:

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 < (x + x) |
| 0 | h |
| 1 | i |
| . . . | . . . |

Mivel az x = 1-re a formula t¨orzse i, ez´ert a ∃x(0 < (x + x)) formula is i.

*Univerz´alis formula jelent´es´enek meg´allap´ıt´asa*:

xP1(a, f1(b, x))) I*,κ* = i, ha P1(a, f1(b, x))) I*,κ*∗ = i κ minden κ∗ x vari´ans´ara.

|∀ | | |

N´ezzu¨k meg a formula ´ert´ekt´abl´aj´at:

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 < (1 + x) |
| 0 | i |
| 1 | i |
| . . . | . . . |

Mivel minden eg´eszre a formula t¨orzse i, ez´ert a x(0 < (1 + x)) formula

∀

´ert´eke i.

Egy 1. rendu˝ formula pr´ımformul´ai az atomi formul´ak (ezek param´eteres

´all´ıt´asok az interpret´aci´okban) ´es a kvant´alt formul´ak (ezek ´all´ıt´asok, ha z´artak).

Egy 1. rendu˝ formula pr´ımkomponensei a formula azon pr´ımformul´ai, amelyekb˝ol a formula logikai ¨osszek¨ot˝ojelek seg´ıts´eg´evel ´epu¨l fel.

Az **igazs´agt´abl´aban** (´ıt´eletlogika) az els˝o sorba az ´all´ıt´asv´altoz´ok (ezek a formula pr´ımkomponensei) ´es a formula keru¨lnek. A v´altoz´ok al´a igazs´ag´ert´ekeiket (interpret´aci´o) ´ırjuk. A formula alatt a megfelel˝o helyettes´ıt´esi ´ert´ekek tal´alhat´ok.

Egy 1. rendu˝ formula **´ert´ekt´abl´aj´aban** az els˝o sorba a formula szabad v´altoz´oi, a pr´ımkomponensek ´es a formula keru¨lnek. (Mivel a pr´ımformul´ak t¨obb esetben param´eteres ´all´ıt´asok, ez´ert az interpret´aci´oban az individuumv´altoz´ok ki´ert´ekel´ese ut´an v´alnak

´all´ıt´asokk´a.) Az individuumv´altoz´ok al´a a lehets´eges v´altoz´oki´ert´ekel´esek, a pr´ımformul´ak al´a a megfelel˝o helyettes´ıt´esi ´ert´ekek keru¨lnek. A formula alatt a formul´anak a pr´ımformul´ak ´ert´ekei alapj´an kisz´am´ıtott helyettes´ıt´esi ´ert´ekei tal´alhat´ok.

* + Legyen az interpret´al´o struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

**A formula ´ert´ekt´abl´aja – p´elda**

A formula: F = ∃xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

* + A pr´ımkomponensek: ∃xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)
  + A szabad individuumv´altoz´ok: v,w
  + Legyen az interpret´al´o struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

* + Ekkor |∃xP (x))|I = i, a t¨obbiek param´eteres ´all´ıt´asok.

A formula: F = ∃xP (x) ⊃ ∃yQ(w, y) ∨ P (v) ⊃ ∀zQ(w, z)

* + A pr´ımkomponensek: ∃xP (x), ∃yQ(w, y), P (v), ∀zQ(w, z)
  + A szabad individuumv´altoz´ok: v,w
  + Legyen az interpret´al´o struktu´ra:

U = {1, 2, 3}, |P |I = {1, 3},

|Q|I = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

* + Ekkor |∃xP (x))|I = i, a t¨obbiek param´eteres ´all´ıt´asok. Az ´ert´ekt´abla:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* | *w* | |∃*xP* (*x*))|*I* | |∃*yQ*(*w, y*)|*I* | |*P* (*v*)|*I* | |∀*zQ*(*w, z*)|*I* | *F* |
| 1 | 1 | *i* | |∃*yQ*(1*, y*)|*I,κ* = *i* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(1*, z*)|*I,κ* = *h* | *h* |
| 1 | 2 | *i* | |∃*yQ*(2*, y*)|*I,κ* = *i* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(2*, z*)|*I,κ* = *i* | *i* |
| 1 | 3 | *i* | |∃*yQ*(3*, y*)|*I,κ* = *h* | |*P* (1)|*I* = *i* | |∀*zQ*(3*, z*)|*I,κ* = *h* | *h* |
| 2 | 1 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 2 | 2 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 2 | 3 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 1 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 2 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 3 | 3 | *i* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |

[Az els˝orendu˝ logika szemantik´aja](#_bookmark0)

[Formul´ak ´es formulahalmazok szemantikus tulajdons´agai](#_bookmark9)



I, κ |= A

Az L **egy** I **interpret´aci´oja adott** κ **v´altoz´oki´ert´ekel´es mellett**

´ert´eke i. Ha az A formula mondat (z´art formula) ´es I |= A, akkor azt

**kiel´eg´ıt egy 1. rendu˝** A **formul´at** (I, κ |= A) , ha a formula |A|I*,κ*

mondjuk, hogy az I ´altal megadott S struktu´ra el´eg´ıti ki A-t, ´ıgy S |= A.

M´as sz´oval S **modellje** A**-nak**.



I |= F

Ha L egy I interpret´aci´oj´ara az F = {F1, F2, . . . , F*n*} z´art

**kiel´eg´ıti** F-et. Jel¨ol´es: I |= F.

formulahalmazban |F*k*|I ´ert´eke i, minden 1 ≤ k ≤ n ´ert´ekre, akkor I



Kiel´eg´ıthet˝o formula

egy I interpret´aci´o ´es κ v´altoz´oki´ert´ekel´es, hogy I, κ |= tt.

Azt mondjuk, hogy egy tt **formula kiel´eg´ıthet˝o** ha L-hez van legal´abb



Kiel´eg´ıthet˝o formulahalmaz

Azt mondjuk, hogy F **z´art formulahalmaz kiel´eg´ıthet˝o** ha L-nek

legal´abb egy I interpret´aci´oja kiel´eg´ıti, azaz I |= F.



Logikailag igaz

Azt mondjuk, hogy egy tt formula **logikailag igaz (logikai t¨orv´eny)**, ha

v´altoz´oki´ert´ekel´esre. Ez azt jelenti, hogy tt igaz minden lehets´eges

interpret´al´o struktu´r´aban. Jel¨ol´es: |= tt.

tt igaz minden lehets´eges I interpret´aci´ora ´es minden κ



Tautol´ogia

Azt mondjuk, hogy egy tt formula **tautol´ogia**, ha tt ´ert´ekt´abl´aj´aban a pr´ımkomponensekhez rendelhet˝o ¨osszes lehets´eges igazs´ag´ert´ek hozz´arendel´es eset´en a formula helyettes´ıt´esi ´ert´eke i. Jel¨ol´es: |=0 tt



P´elda

∀xP (x) ∧ ∀xQ(x) ⊃ ∀xP (x) formula pr´ımkomponens alakja

p ∧ q ⊃ p. ami tautol´ogia, de

∀x(P (x) ∧ Q(x)) ⊃ ∀xP (x) pr´ımkomponens alakja

r ⊃ p nem tautol´ogia (viszont mindkett˝o logikailag igaz!)

#### Kiel´eg´ıthetetlens´eg



Azt mondjuk, hogy tt formula illetve formulahalmaz **kiel´eg´ıthetetlen** (nem kiel´eg´ıthet˝o), ha -hez nincs olyan interpret´aci´o, hogy = tt illetve, hogy = . M´as sz´oval egy tt formula kiel´eg´ıthetetlen, ha minden interpret´aci´oban a tt ´ert´ekt´abl´aj´anak minden sor´aban tt helyettes´ıt´esi ´ert´eke h(amis). Az formulahalmaz kiel´eg´ıthetetlen, ha az

F

I | F

L I I |

F

k¨oz¨os ´ert´ekt´abl´aj´aban minden sorban van legal´abb egy eleme -nek, amelynek a helyettes´ıt´esi ´ert´eke h(amis).

F F

A k´et szemantikus tulajdons´ag fenn´all´as´anak vizsg´alat´ahoz az ¨osszes inerpret´al´o struktu´r´ara szu¨ks´eg van.

Legyenek rendre az L nyelv szignatu´r´aja szerint

**Lehets´eges interpret´al´o struktu´r´ak sz´ama adott**

U **´es adott szignatu´ra mellett**

(r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*) a predik´atumszimb´olumok ´es fu¨ggv´enyszimb´olumok arit´asai. Legyen U az univerzum, ahol |U | = M .

A´llap´ıtsuk meg h´any ku¨l¨onb¨oz˝o (r1, r2, . . . , r*n*; s1, s2, . . . , s*k*)

szignatu´r´aju´ struktu´ra l´etezik U felett?

Ezekkel az arit´asokkal rel´aci´okat

*n*

*j*=1

Q

2*M rj*

, m´ıg mu˝veleteket

*k*

*t*=1

Q

M *M st*

f´elek´epp lehet defini´alni. Az ¨osszes defini´alhat´o struktu´ra sz´ama a kett˝o

Q

Q

szorzata: (

*n j*=1

2*Mrj* ) ∗

*k t*=1

M *Mst* .

*Als´o becsl´es* eset´en csak a lehets´eges rel´aci´ok sz´am´at ´allap´ıtjuk meg. Egy

n v´altoz´os rel´aci´o eset´en az ´ertelmez´esi tartom´any elemsz´ama

U *n* = M *n*, a rel´aci´ot megadhatjuk az U *n* halmaz egy r´eszhalmaz´anak kijel¨ol´es´evel. A lehets´eges n-v´altoz´os rel´aci´ok sz´ama megegyezik az

| |

´ertelmez´esi tartom´any hatv´anyhalmaza (¨osszes r´eszalmazai halmaza) sz´amoss´ag´aval (U *n*) -el, ez ha U megsz´aml´alhat´oan v´egtelen, akkor kont´ınuum sz´amoss´agu´ (t¨obb mint megsz´aml´alhat´oan v´egtelen), ami algoritmikusan nem kezelhet˝o.

|P |

Legyenek rendre az nyelv szignatu´r´aja szerint (r1, r2, . . . , r*n*) a predik´atumszimb´olumok arit´asai.

L

El˝o´all´ıtjuk minden j = 1, . . . , n ´ert´ekre az U *rj* ´ert´ekeinek felhazsn´al´as´aval P*rj* ¨osszes alapatomj´at, tekintsu¨k ezek egy r¨ogzitett sorrendj´et (b´azis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendelju¨k hozz´a az alapatomokat. Egy-egy szint minden csu´cs´ab´ol pontosan k´et ´el indul ki, az egyik a szinthez rendelt alapatommal (ez jelenti, hogy az alapatom igaz az ´elhez tartoz´o interpret´aci´okban), a m´asik ennek neg´altj´aval van c´ımk´ezve (ez jelenti, hogy az alapatom hamis az ´elhez tartoz´o interpret´aci´okban). A bin´aris fa ´agai adj´ak meg a lehets´eges interpret´aci´okat.

Adott nyelv eset´en a predik´atumszimb´olumokra az ¨osszes interpret´aci´o megad´asa szemantikus f´aval.

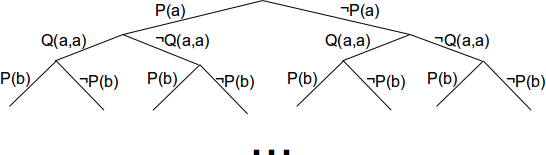
Legyen

* + a formulahalmaz:

K = {∀xP (x), ∀y∀z(¬Q(y, z) ∨ ¬P (z)), ∀u∀vQ(u, v)}

* + U = {a, b, c}
  + a B b´azis: P (a), Q(a, a), P (b), Q(a, b), . . ., Q(c, c) alapatom sorozat

A szemantikus fa a B b´azis alapj´an:



# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## r´esz Logika

O¨ t¨odik el˝oad´as

[K¨ovetkezm´enyfogalom az els˝orendu˝ logik´aban](#_bookmark0)

[Formul´ak logikailag ekvivalens ´atalak´ıt´asai](#_bookmark2)

[Rezolu´ci´os elv- rezolu´ci´os kalkulus](#_bookmark8)

#### Logikai vagy szemantikus k¨ovetkezm´eny



Azt mondjuk, hogy a tt formula logikai (szemantikus) k¨ovetkezm´enye az F formulahalmaznak, ha minden olyan I interpret´aci´ora, amelyre I |= F teljesu¨l, az I |= tt is fenn´all.

M´as sz´oval F |= tt teljesu¨l, ha minden interpret´al´o struktu´r´aban, az F, tt k¨oz¨os ´ert´ekt´abl´aj´aban minden olyan sorban, ahol az F elemeinek helyettes´ıt´esi ´ert´eke igaz, a tt helyettes´ıt´esi ´ert´eke is igaz.

*Jel¨ol´es*: F |= tt vagy {F1, F2, . . . , F*n*} |= tt.



T´etel (logikailag igaz)

Ha egy tt formula b´armely F felt´etelhalmaznak k¨ovetkezm´enye,

akkor tt **logikailag igaz**.

Az ´ıt´eletlogik´aban bebizony´ıtott t´etelek itt is igazak.



T´etel

F-nek szemantikus k¨ovetkezm´enye tt, akkor ´es csak akkor, ha az

F ∪ {¬tt} kiel´eg´ıthetetlen.

Egyik **eld¨ont´esprobl´ema**: tetsz˝oleges 1.rendu˝ formulahalmazr´ol eld¨onteni, hogy kiel´eg´ıthetetlen-e.



T´etel

Ha F-nek k¨ovetkezm´enye tt1 ´es F-nek k¨ovetkezm´enye tt2,

k¨ovetkezm´enye A.

valamint, {tt1, tt2}-nek k¨ovetkezm´enye A, akkor az F-nek

A k¨ovetkezm´enyfogalom alapj´an, annak eld¨ont´ese, hogy F |= tt

*elm´eletileg* megoldhat´o az interpret´al´o struktu´r´akban az

F1, F2, . . . , F*n* ´es tt-re kapott k¨oz¨os ´ert´ekt´abla alapj´an.



Legszu˝kebb ko¨vetkezm´eny

Ha minden interpret´al´o struktu´r´aban, a tt a k¨oz¨os ´ert´ekt´abl´anak pontosan azokban a soraiban igaz, ahol F1, F2, . . . , F*n* mindegyike igaz, akkor tt **a legszu˝kebb k¨ovetkezm´enye** F**-nek**.



Ekvivalencia

Az A ´es B els˝orendu˝ formul´ak **logikailag ekvivalensek**, ha

{A} |= B ´es {B} |= A.

#### T´etel



tt els˝orendu˝ formula. Ha |=0 tt, akkor |= tt. (Ha tt tautol´ogia, akkor tt logikailag igaz.)

**Biz.:** Ha |=0 tt, akkor tt igaz a pr´ımkomponenseinek minden igazs´agki´ert´ekel´es´ere. Tekintsu¨k a tt egy I interpret´aci´oj´at, az individuumv´altoz´ok egy κ ki´ert´ekel´ese mellett. Ekkor a pr´ımkomponensek igazs´ag´ert´eke kisz´amolhat´o ´es b´armi is lesz a konkr´et ´ert´eku¨k, ezut´an a tt helyettes´ıt´esi ´ert´eke i lesz (mivel a pr´ımkomponenseinek minden igazs´agki´ert´ekel´es´ere igaz).

#### T´etel



Ha F |=0 tt, akkor F |= tt.

**Biz.:** Az F pr´ımkomponenseinek minden, az F-et kiel´eg´ıt˝o I interpret´aci´oj´ara (I |=0 F) I kiel´eg´ıti tt-t is. Ha az I interpret´aci´o kiel´eg´ıti F-et, akkor kiel´eg´ıti tt-t is mivel az egyideju˝leg a pr´ımkomponensekre vonatkoz´o igazs´agki´ert´ekel´es is.



T´etel

Ha A ´es B tautologikusan ekvivalens (A ∼0 B), akkor A ´es B

logikailag ekvivalens (A ∼ B).



Dedukci´os t´etel

**Biz.:** ugyanaz, mint ´ıt´eletlogik´aban

{F1, F2, . . . , F*n*} |= tt ⇐⇒ {F1, F2, . . . , F*n*−1} |= F*n* ⊃ tt.



T´etel

{F1, F2, . . . , F*n*} |= tt ⇐⇒

|= F1 ⊃ (F2 ⊃ (. . . ⊃ (F*n*−1 ⊃ (F*n* ⊃ tt)) . . .)) (logikailag igaz).

**Biz.:** A dedukci´os t´etel n-szeres alkalmaz´as´aval.

**A m´asik eld¨ont´esprobl´ema a predik´atumlogik´aban**: tetsz˝oleges

1. rendu˝ formul´ar´ol el kell tudni d¨onteni, hogy logikailag igaz-e.

Egy n v´altoz´os ´ıt´eletlogikai B formula tautol´ogia, ha

**Eld¨ont´esprobl´ema megold´asa szemantikai eszk¨oz¨okkel**

* + hamishalmaza u¨res. Ez azt jelenti, hogy ¬B kiel´eg´ıthetetlen.
  + az ´ıt´eletv´altoz´ok minden ki´ert´ekel´es´ere (minden interpret´aci´oban) a helyettes´ıt´esi ´ert´ek i.

Els˝orendu˝ n v´altoz´os B formula logikailag igaz, ha

* + minden U univerzumon, a v´altoz´ok minden behelyettes´ıt´ese mellett kapott Bj alapformul´ak igazak minden, a nyelvnek megfelel˝o struktu´r´aban.
  + ¬B kiel´eg´ıthetetlen. Egyetlen interpret´aci´oban, egyetlen v´altoz´oki´ert´ekel´es mellett sem igaz.

Ezek a probl´em´ak szemantikailag vil´agosak, de megold´asuk a teljes kipr´ob´al´ast t´etelezi fel. Szintaktikai eszk¨oz¨okre van szu¨ks´eg a megold´ashoz.

G¨odel bebizony´ıtotta, hogy

##### A szemantikus eld¨ont´esprobl´ema ”

**algoritmikusan nem oldhat´o meg – nem l´etezik univerz´alis**

**eld¨ont´esi algoritmus”**.

Kutat´asok

**eld¨onthet˝o formulaoszt´alyok”** keres´es´ere. Logikailag

##### ”

ekvivalens formula´atalak´ıt´asok alkalmaz´asa mellett.

Az egyik lehet˝os´eg, eld¨onthet˝o formulaoszt´alyokhoz tartoz´o formul´akkal le´ırt szemantikus eld¨ont´esprobl´em´ara kalkulus (d¨ont´esi elj´ar´as) keres´ese (tabl´o, rezolu´ci´os elv).

A m´asik lehet˝os´eg, a logika szintaktikai alapon val´o fel´ep´ıt´ese, szintaktikus eld¨ont´esprobl´ema megad´asa ´es arra kalkulus kidolgoz´asa. (Erre nem t´eru¨nk ki az el˝oad´as keretein belu¨l.)

[K¨ovetkezm´enyfogalom az els˝orendu˝ logik´aban](#_bookmark0)

[Formul´ak logikailag ekvivalens ´atalak´ıt´asai](#_bookmark2)

[Rezolu´ci´os elv- rezolu´ci´os kalkulus](#_bookmark8)

Az ´ıt´eletlogika eld¨onthet˝o formulaoszt´alyai a konjunkt´ıv norm´alforma ´es a diszjunkt´ıv norm´alforma.



Liter´al

Egy pr´ımformula (´ıt´eletv´altoz´o) vagy annak neg´altja. A liter´al alapja a benne szerepl˝o pr´ımformula. A liter´alt egys´egkonjunkci´onak vagy egys´egdiszjunkci´onak (egys´egkl´oz) is nevezhetu¨nk.



Elemi konjunkci´o/diszjunkci´o

Egys´egkonjunkci´o/diszjunkci´o, illetve ku¨l¨onb¨oz˝o alapu´ liter´alok konjunkci´oja/diszjunkci´oja. Az elemi diszjunkci´ot kl´oznak is nevezzu¨k.



Teljes elemi konjunkci´o/diszjunkci´o

Egy elemi konjunkci´o/diszjunkci´o teljes egy adott n v´altoz´os logikai mu˝veletre n´ezve, ha mind az n ´ıt´eletv´altoz´o alapja valamelyik benne szerepl˝o liter´alnak.



Konjunkt´ıv norm´alforma (KNF)/ kitu¨ntetett konjunkt´ıv norm´alforma (KKNF)

A KNF elemi diszjunkci´ok (kl´ozok) konjunkci´oja. KKNF, ha teljes elemi diszjunkci´ok konjunkci´oja.



Diszjunkt´ıv norm´alforma (DNF)/ kitu¨ntetett diszjunkt´ıv norm´alforma (KDNF)

A DNF elemi konjunkci´ok diszjunkci´oja. KDNF, ha teljes elemi konjunkci´ok diszjunkci´oja.



Egyszeru˝s´ıt´esi szab´alyok (Tk.98.o.)

(1) (X ∨ d) ∧ (¬X ∨ d) = d

ahol d elemi diszjunkci´o ´es k elemi konjukci´o.

(2) (X ∧ k) ∨ (¬X ∧ k) = k

KDNF fel´ır´asa a formula igazs´agt´abl´aja alapj´an:

* + a formula igazhalmazbeli interpret´aci´oihoz fel´ırjuk az interpret´aci´oban igaz teljes elemi konjunkci´ot,
  + fel´ırjuk a kapott teljes elemi konjunkci´okb´ol ´all´o diszjunkci´os l´ancformul´at.
  + Egyszeru˝s´ıt´essel el˝o´all´ıthatunk egy DNF-et. KKNF fel´ır´asa a formula igazs´agt´abl´aja alapj´an:
  + a formula hamishalmazbeli interpret´aci´oihoz fel´ırjuk az

interpret´aci´oban hamis teljes elemi diszjunkci´ot,

* + fel´ırjuk a kapott teljes elemi diszjunkci´okb´ol ´all´o konjunkci´os l´ancformul´at.
  + Egyszeru˝s´ıt´essel el˝o´all´ıthatunk egy KNF-et

A (¬(Z ⊃ ¬X) ∨ Y formula igazs´agt´abl´aja:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* |  |
| *i* | *i* | *i* | *i* (*X* ∧ *Y* ∧ *Z*) |
| *i* | *i* | *h* | *i* (*X* ∧ *Y* ∧ ¬*Z*) |
| *i* | *h* | *i* | *i* (*X* ∧ ¬*Y* ∧ *Z*) |
| *i* | *h* | *h* | *h* (¬*X* ∨ *Y* ∨ *Z*) |
| *h* | *i* | *i* | *i* (¬*X* ∧ *Y* ∧ *Z*) |
| *h* | *i* | *h* | *i* (¬*X* ∧ *Y* ∧ ¬*Z*) |
| *h* | *h* | *i* | *h* (*X* ∨ *Y* ∨ ¬*Z*) |
| *h* | *h* | *h* | *h* (*X* ∨ *Y* ∨ *Z*) |

KKNF: (¬X ∨ Y ∨ Z) ∧ (X ∨ Y ∨ ¬Z) ∧ (X ∨ Y ∨ Z)

KNF (egyszeru˝s´ıt´es ut´an): (Y ∨ Z) ∧ (X ∨ Y )

KDNF:

(X ∧Y ∧Z)∨(X ∧Y ∧¬Z)∨(X ∧¬Y ∧Z)∨(¬X ∧Y ∧Z)∨(¬X ∧Y ∧¬Z) 16/36

Az el˝oz˝oek alapj´an tetsz˝oleges ´ıt´eletlogikai formula ´at´ırhat´o KNF vagy DNF alakba. G¨odel szerint az eld¨ont´esprobl´ema nem algoritmiz´alhat´o, de ha egy eld¨onthet˝o formulaoszt´alyhoz tartoz´o formul´av´a ´ırjuk ´at az eld¨ont´esprobl´em´aban vizsg´alt formul´at, akkor b´ar nem algoritmussal hanem egy speci´alis levezet´esi elj´ar´assal (kalkulussal) sikeres d¨ont´esre juthatunk.

##### D¨ont´esi

**algoritmus”, levezet˝o elj´ar´as** egy olyan

##### ”

algoritmus/l´ep´essorozat, amely adott input adatokkal dolgozik,

azokat a megfelel˝o szab´alyok szerint haszn´alja fel, a levezet´esi szab´aly szerint alak´ıtja ´at, ´es akkor ´all meg, amikor a **kitu˝z¨ott c´elt** (az elj´ar´as meg´all´asi felt´etele) el´erte. A meg´all´assal egy k´etes´elyes d¨ont´es egyik kimenet´et igazolja. Azonban, ha az algoritmus nem

´eri el a kitu˝z¨ott c´elt, az nem felt´etlenu¨l jelenti azt, hogy meghozta a m´asik eshet˝os´egre a d¨ont´est. Egy ilyen elj´ar´ast **kalkulusnak** h´ıvunk.

Az egyik eld¨ont´esprobl´ema megold´as´ara - egy formula **kiel´eg´ıthetetlen**s´eg´enek eld¨ont´es´ere **t¨obb d¨ont´esi algoritmus** ismert. Ezekr˝ol bebizony´ıthat´o, hogy ha a formula felhaszn´al´as´aval az algoritmus el´eri a meg´all´asi felt´etelt, akkor a formula kiel´eg´ıthetetlen (vagyis, ha a formula az F1 ∧ F2 ∧ · · · ∧ F*n* ∧ ¬tt, akkor bebizony´ıtottuk, hogy {F1, F2, . . . , F*n*} |=0 tt.)

Azt is mondjuk, hogy az ilyen kalkulusok **automatikus t´etelbizony´ıt´o** kalkulusok.

[K¨ovetkezm´enyfogalom az els˝orendu˝ logik´aban](#_bookmark0)

[Formul´ak logikailag ekvivalens ´atalak´ıt´asai](#_bookmark2)

[Rezolu´ci´os elv- rezolu´ci´os kalkulus](#_bookmark8)

Egy KNF alaku´ formula kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek vizsg´alata a KNF-ben szerepl˝o kl´ozok S halmaza kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek vizsg´alat´aval ekvivalens. Hogyan lehet eld¨onteni, hogy egy S kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen? Meg kell mutatni, hogy az S

´ıt´eletv´altoz´oinak tetsz˝oleges interpret´aci´oj´aban legal´abb egy C ∈ S hamis. Egy C kl´oz hamis egy interpret´aci´oban, ha minden liter´alja hamis.

Ha az ¨osszes interpret´aci´ot az S ¨osszes ´ıt´eletv´altoz´oinak r¨ogz´ıtett sorrendje/b´azis alapj´an el˝o´all´o szemantikus f´aval adjuk meg, akkor egy C ´ıt´eletlogikai kl´oz abban az interpret´aci´oban hamis, amelyikben a kl´oz mindegyik liter´aljai ellenkez˝o neg´alts´agu´. Az

X ∨ Z kl´oz hamis az ¬XY ¬Z ´es az ¬X¬Y ¬Z interpret´aci´okban, az interpret´aci´o kiv´alaszt´as´at a kl´oz szemantikus f´ara **illeszt´es´enek** h´ıvjuk.

#### Fogalmak



Egy **kl´oz illeszt´ese** a szemantikus f´ara az olyan ´agak kiv´alaszt´asa, amelyeken a kl´oz minden liter´alja neg´alva szerepel. Ezekben az interpret´aci´okban ez a kl´oz hamis.

**C´afol´o csu´cs**nak nevezzu¨k a szemantikus fa azon csu´cs´at, amelyiket el´erve egy kl´oz (amely azt megel˝oz˝oen m´eg nem volt hamis) hamiss´a v´alik.

**Levezet˝o csu´cs**nak nevezzu¨k a szemantikus fa azon csu´cs´at, amelyiket k¨ovet˝o mindk´et csu´cs c´afol´o csu´cs.

A szemantikus fa egy **´aga z´art**, ha c´afol´o csu´csban v´egz˝odik.

**A szemantikus fa z´art**, ha minden ´aga z´art.

S = Y ∨ ¬Z, X ∨ Z, ¬X ∨ ¬Y, ¬X ∨ Z, ¬Z kiel´eg´ıthetlen kl´ozhalmaz.

. Σ

Jel¨ol´esek: c´afol´o csu´cs (•), levezet˝o csu´cs (◦)

Z´art szemantikus fa:

G

X

¬X

X1 X2

Y

¬Y

Y

¬Y

Y1

Y2

Y3

Y4

¬X ∨ ¬Y

Z

¬Z

Z ¬Z

Z ¬Z

Z3

Z4

Z5

Z6

Z7

Z8

Y ∨ ¬Z ¬X ∨ Z ¬Z X ∨ Z Y ∨ ¬Z X ∨ Z



T´etel

Ha egy S v´eges kl´ozhalmaz szemantikus f´aja z´art, akkor S

kiel´eg´ıthetetlen.

A kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek eld¨ont´es´ere nem a szemantikus f´at haszn´aljuk, de fontos h´att´ereszk¨oz marad a **rezolu´ci´os kalkulus** tulajdons´againak vizsg´alat´aban.

##### Elnevez´esek:

* n-v´altoz´os kl´oz n-argumentumos kl´oz
* 1-v´altoz´os kl´oz egys´egkl´oz
* 0-v´altoz´os kl´oz u¨res kl´oz: Q

*Egyszeru˝s´ıt´esi szab´aly:* ha X ´ıt´eletv´altoz´o ´es C egy X-et nem tartalmaz´o kl´oz, akkor (X ∨ C) ∧ (¬X ∨ C) ∼0 C

Az (X) ∧ (¬X) ∼0 Q – azonosan hamis.



Rezolvens

Legyenek C1, C2 olyan kl´ozok, amelyek pontosan egy komplemens liter´alp´art tartalmaznak: C1 = C1j ∨ L1 ´es C2 = C2j ∨ L2 ´es

L1 = ¬L2, ekkor l´etezik a rezolvensu¨k: a res(C1, C2) = C kl´oz,

ami C = C1j ∨ C2j .



T´etel (Tk.227-228.o.)

{C1, C2} |=0 C A rezolvensk´epz´es a rezolu´ci´os kalkulus levezet´esi

szab´alya (helyes k¨ovetkeztet´esforma).

Rezolu´ci´os levezet´es (Tk.229.o.)



Egy S kl´ozhalmazb´ol val´o **rezolu´ci´os levezet´es** egy olyan v´eges

k1, k2, . . . , k*m* (m ≥ 1) kl´ozsorozat, ahol minden j = 1, 2, . . . , m-re

1. vagy k*j* ∈ S,
2. vagy van olyan 1 ≤ s, t < j, hogy k*j* a (k*s*, k*t*) kl´ozp´ar rezolvense.

A levezet´es c´elja az u¨res kl´oz levezet´ese (ez a meg´all´asi felt´etel).



Egy rezolu´ci´os levezet´es

Pr´ob´aljuk meg az u¨res kl´ozt levezetni az

S = {¬A ∨ B, ¬A ∨ C, A ∨ C, ¬B ∨ ¬C, ¬C} kl´ozhalmazb´ol.

1. ¬C [∈ S]

2. A ∨ C [∈ S]

3. A [res(1, 2)]

4. ¬A ∨ C [∈ S]

5. C [res(3, 4)]

6. Q [res(1, 5)]

S kl´ozhalmazb´ol val´o rezolu´ci´os levezet´es **d¨ont´esi elj´ar´as**. **Eld¨ont´esprobl´em´aja**: *levezethet˝o-e egy S kl´ozhalmazb´ol az u¨res kl´oz?*

Rezolu´ci´os c´afolatnak nevezzu¨k azt a t´enyt, hogy S-b˝ol levezethet˝o az u¨res kl´oz.

A rezolu´ci´os kalkulus helyes (Tk.230.o.)



(6.3.12) Lemma: Legyen S tetsz˝oleges kl´ozhalmaz ´es k1, k2 . . . , k*n*

kl´ozsorozat rezolu´ci´os levezet´es S-b˝ol. Ekkor minden

k*j*, j = 1, 2 . . . , n-re szemantikus k¨ovetkezm´enye S-nek.

(6.3.13) T´etel: Legyen S tetsz˝oleges kl´ozhalmaz. Ha S-b˝ol levezethet˝o az u¨res kl´oz, akkor S kiel´eg´ıthetetlen.

Bizony´ıt´asok indukci´oval, illetve indirekt bizony´ıt´assal.



A rezolu´ci´os kalkulus teljes (Tk.230.o.)

(6.3.14). T´etel: Ha az S v´eges kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen, akkor

S-b˝ol levezethet˝o az u¨res kl´oz.

Bizony´ıt´as: tetsz˝oleges z´art szemantikus fa eset´en el˝o´all´ıtunk egy rezolu´ci´os c´afolatot. (Tk.231-233.o.)

1 j := 0, S*j* := S, *LIST* := ∅.

1. A´ll´ıtsuk el˝o S*j* szemantikus f´aj´at. n*j* := a szemantikus fa szintjeinek sz´ama. Ha n*j* = 0, akkor levezettu¨k az u¨res kl´ozt, a levezet´es *LIST* -b˝ol kiolvashat´o.
2. Egy´ebk´ent v´alasszuk ki a fa egy levezet˝o csu´cs´at. A levezet˝o

csu´csot tartalmaz´o k´et ´agra illesztett kl´ozok legyenek k*j*j ´es

k*j*jj, rezolvensu¨k pedig k*j*. Tegyu¨k a *LIST* v´eg´ere a k*j*j , k*j*jj, k*j*

kl´ozokat.

1. S*j*+1 := S*j* ∪ {k*j*}, j := j + 1. Folytassuk a 2. l´ep´essel.



P´elda

S = {X ∨ ¬Z, ¬X ∨ Y, ¬X ∨ Z, X ∨ Z, ¬Y ∨ ¬Z}, b´azis: Z, X, Y .



Levezet´esi fa Tk.235-236.o.

Egy rezolu´ci´os levezet´es szerkezet´et mutatja. Olyan gr´af, amelynek csu´csaiban kl´ozok vannak. K´et csu´csb´ol akkor vezet ´el egy harmadik csu´csba, ha abban a k´et csu´csban l´ev˝o kl´ozok rezolvense tal´alhat´o.

P´elda - adott rezolu´ci´os levezet´es levezet´esi f´aja



X ∨ Z ¬X ∨ Z X ∨ ¬Z ¬X ∨ ¬Z

Z ¬Z

Q

*S*1 = {*X* ∨ ¬*Z,* ¬*X* ∨ *Z, X* ∨ *Z,* ¬*X* ∨ ¬*Z*}

1*. X* ∨ *Z* [ ∈ *S*1 ]

2*.* ¬*X* ∨ *Z* [ ∈ *S*1 ]

1. *Z* [ 1, 2 rezolvense ]

4*. X* ∨ ¬*Z* [ ∈ *S*1 ]

5*.* ¬*X* ∨ ¬*Z* [ ∈ *S*1 ]

1. ¬*Z* [ 4, 5 rezolvense ]
2. Q [ 3, 6 rezolvense ]



kl´ozsorozat, ahol k1, l1 ∈ S ´es minden i = 2, 3, . . . , m) esetben a k*i* a

Line´aris rezolu´ci´os levezet´es

Egy S kl´ozhalmazb´ol egy olyan k1, l1, k2, l2, . . . , k*m*−1, l*m*−1, k*m*

centr´alis kl´oz (rezolvense valamely k*s*, l*s* (s < i)-nek).

k*i*−1, l*i*−1 rezolvense, ahol l*i*−1 ∈ S, vagy egy kor´abban megkapott

centr´alis kl´ozok mell´ekkl´ozok

k1 A1

k2 A2

k3

k*i*−1 A*i*−1

k*i*

k1 A1

k2 A2

k3

k*m*−1

A*m*−1

k*m*

line´aris rezolu´ci´o



Line´aris inputrezolu´ci´os levezet´es

S kl´ozhalmazb´ol egy olyan k1, l1, k2, l2, . . . , k*m*−1, l*m*−1, k*m* kl´ozsorozat, ahol k1, l1 ∈ S, ´es minden i = 2, 3, . . . , m − 1 esetben l*i* ∈ S, a k*i* pedig a k*i*−1, l*i*−1 rezolvense.



Egys´egrezolu´ci´os strat´egia

Rezolvens csak akkor k´epezhet˝o, ha legal´abb az egyik kl´oz egys´egkl´oz.

*Reuzolu´ci´os strat´egi´ak*: line´aris rezolu´ci´o (helyes ´es teljes), line´aris input-, egys´eg rezolu´ci´o (helyes de nem teljes) - Tk.236-238.o.

Az el˝oad´asban nem szerepl˝o tov´abbi rezolu´ci´os strat´egi´ak: Tk.281-300.o.



Defin´ıci´o

Egy kl´ozt **Horn kl´oz**nak nevezu¨nk, ha legfeljebb egy liter´alja nem neg´alt.



Defin´ıci´o

**Horn logika** az ¨osszes, csak Horn kl´ozokat tartalmaz´o KNF alaku´ formul´ak halmaza.



P´elda

S = {B ∨ ¬C, A ∨ ¬C, ¬A ∨ ¬B, ¬A ∨ C, C} Horn kl´ozok halmaza.



T´etel

A line´aris input ´es az egys´egrezolu´ci´os strat´egia teljes a Horn logik´aban.

S = {B ∨ ¬C, A ∨ ¬C, ¬A ∨ ¬B, ¬A ∨ C, C}

1. B ∨ ¬C ∈ S 1. B ∨ ¬C ∈ S

2. ¬A ∨ ¬B ∈ S 2. C ∈ S

3. ¬A ∨ ¬Crez (1, 2) 3. B rez(1, 2)

4. A ∨ ¬C ∈ S 4. ¬A ∨ ¬B ∈ S

5. ¬Crez (3, 4) 5. ¬A rez(3, 4)

6. C ∈ S 6. A ∨ ¬C ∈ S

7. Q rez(5, 6) 7. ¬C rez(5, 6)

8. Q rez(2, 7)

line´aris input rez. egys´egrezolu´ci´o



T´etel

Ha az Q levezethet˝o line´aris input rezolu´ci´oval egy K kl´ozhalmazb´ol, akkor K-ban van legal´abb egy egys´egkl´oz. **Biz.:** Az Q-t az utols´o l´ep´esben csak egy kl´ozhalmazbeli egys´egkl´oz felhaszn´al´as´aval kaphatjuk meg.



T´etel

Kiel´eg´ıthetetlen Horn kl´ozhalmazban van legal´abb egy egys´egkl´oz.

Teljes levezet´esi fa adott kl´ozzal kezd˝od˝o ¨osszes line´aris levezet´es megad´as´ara.

Legyen S = {X ∨ Z, ¬X ∨ Z, ¬Y ∨ ¬Z, ¬X ∨ Y, ¬Z}.

X ∨ Z

¬X ∨ Y

¬X ∨ Z

¬Z

¬Y ∨ ¬Z

Y ∨ Z Z X ∨ ¬Y X

¬Z ¬Y ∨ ¬Z ¬Z ¬X ∨ Z ¬X ∨ Z ¬X ∨ Y

Y ¬Y Q ¬Y ∨ Z Z Y

¬X ∨ Y ¬Z ¬Z

¬X ¬Y Q

# Logika ´es sz´am´ıt´aselm´elet

## r´esz Logika

Hatodik el˝oad´as

[Els˝orendu˝ rezolu´ci´os kalkulus - el˝ok´esz´ıt˝o fogalmak](#_bookmark0)

Eld¨onthet˝o formulaoszt´alyok keres´ese els˝orendu˝ logik´aban.



Prenex formula

Legyen Q tetsz˝oleges kvantor, a Q1x1Q2x2 . . . Q*n*x*n*B formula. Q1x1Q2x2 . . . Q*n*x*n* a prefixum, B, kvantormentes formula a formula magja, t¨orzse.



Skolem formula

Skolem formula a ∀x1∀x2 . . . ∀x*n*A Prenex formula, ahol a

prefixumban csak univerz´alis kvantorok szerepelnek. Ez eld¨onthet˝o

formulaoszt´aly els˝orendben.



Els˝orendu˝ kl´oz

Olyan z´art Skolem formula, aminek a magja az els˝orendu˝ nyelv liter´aljainak (azaz atomi formul´ainak vagy annak neg´altjainak) diszjunkci´oja.

Pl. ∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y))).

Az ´ıt´eletlogikai kl´ozhalmaz (KNF) els˝orendu˝ megfelel˝oje az els˝orendu˝ kl´ozhalmaz (els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´oja) lehetne.

A **feladat** tetsz˝oleges els˝orendu˝ formula ´at´ır´asa els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´os formul´aj´av´a. Az **eld¨ont´esprobl´ema els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek** eld¨ont´ese.

Ha egy univerz´alis formul´at kifejtu¨nk egy U univerzum felett, akkor a mag alapp´eld´anyainak konjunkci´oja lesz U -ekvivalens az eredeti formul´aval.

Ha els˝orendu˝ kl´ozok halmaz´aval tesszu¨k ugyanezt, akkor alapkl´ozok hamaz´at kapjuk. A kifejtett kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlens´ege a kapott U feletti alapkl´ozok halmaz´anak kiel´eg´ıthetetlens´eg´evel ekvivalens.

Az alapkl´ozokra a rezolu´ci´os kalkulust ugyanu´gy defini´alhatjuk mint az ´ıt´eletlogik´aban – alaprezolu´ci´o (Tk.251-254.o.). Alaprezolu´ci´oval b´armely adott U univerzumon val´o kiel´eg´ıthetetlens´eg eld¨onthet˝o.

Els˝orendu˝ kl´ozhalmaz:

S = {∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y)), ∀u¬P (u), ∀z∀wQ(z, f (w))}

U = {a, b, c} univerzum feletti kifejtett kl´ozhalmaz:

.

P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)), P (a) ∨ ¬Q(a, f (b)), P (a) ∨ ¬Q(a, f (c)),

P (b) ∨ ¬Q(b, f (a)), P (b) ∨ ¬Q(b, f (b)), P (b) ∨ ¬Q(b, f (c)),

P (c) ∨ ¬Q(c, f (a)), P (c) ∨ ¬Q(c, f (b)), P (c) ∨ ¬Q(c, f (c)),

¬P (a), ¬P (b), ¬P (c), Q(a, f (a)), Q(a, f (b)), Q(a, f (c)), Σ

Q(b, f (a)), Q(b, f (b)), Q(b, f (c)), Q(c, f (a)), Q(c, f (b)), Q(c, f (c))

Alaprezolu´ci´os levezet´es:

1 P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)) ∈ S

2 Q(a, f (a)) ∈ S

3 P (a) res(1,2)

4 ¬P (a) ∈ S

5 Q res(3,4)

Hogyan lehet el˝o´all´ıtani a vizsg´aland´o formul´at els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´ojak´ent?

**Formula fel´ır´asa elso˝rendu˝ kl´ozok konjunkcio´jak´ent**

1. Tetsz˝oleges formula ´at´ırhat´o prenex alakba.
2. Tetsz˝oleges prenex formula ´at´ırhat´o Skolem alakba.
3. Tetsz˝oleges Skolem norm´alforma fel´ırhat´o els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´ojak´ent.

Az ´atalak´ıt´ashoz szu¨ks´eges ´atalak´ıt´asi szab´alyok.

*A´ltal´anos De Morgan szab´alyok*

¬∀xA ∼ ∃x¬A

¬∃xA ∼ ∀x¬A

*Kvantorkiemel´esi szab´alyok*

(1) ∀xA[x] ∧ B ∼ ∀x(A[x] ∧ B)

∀xA[x] ∨ B ∼ ∀x(A[x] ∨ B)

(2) ∃xA[x] ∧ B ∼ ∃x(A[x] ∧ B)

∃xA[x] ∨ B ∼ ∃x(A[x] ∨ B)

*Kvantorkiemel´esi szab´alyok*

(3) ∀xA[x] ∧ ∀xB[x] ∼ ∀x(A[x] ∧ B[x]) , de ∨-re nem

(4) ∃xA[x] ∨ ∃xB[x] ∼ ∃x(A[x] ∨ B[x]) , de ∧-re nem

(5) Q1xA[x] ∧ Q2xB[x] ∼ Q1xQ2z(A[x] ∧ B[x/z])

(6) Q1xA[x] ∨ Q2xB[x] ∼ Q1xQ2z(A[x] ∨ B[x/z])

1. A logikai ¨osszek¨ot˝ojelek ´at´ır´asa ¬, ∧, ∨-ra.
2. A De Morgan szab´alyok alkalmaz´asa addig am´ıg a ¬

hat´ask¨ore atomi formula nem lesz.

1. A kvantorkiemel´esi szab´alyok alkalmaz´asa addig am´ıg minden kvantor a formula elej´ere nem keru¨l (a formula t¨orzse kvantormentes formula).

∀x(∀yP (x, y) ∧ ∃y¬(Q(y) ⊃ P (x, a))) ⊃ ¬∀x∃y(P (y, x) ⊃ R(x, y))

* + 1. l´ep´es

¬(∀x(∀yP (x, y)∧∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨¬∀x∃y(¬P (y, x)∨R(x, y))

* + 2. l´ep´es

∃x¬(∀yP (x, y)∧∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x¬∃y(¬P (y, x)∨R(x, y))

∃x(¬∀yP (x, y)∨¬∃y¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x∀y¬(¬P (y, x)∨R(x, y))

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y¬¬(¬Q(y)∨P (x, a)))∨∃x∀y(P (y, x)∧¬R(x, y))

∃x(∃y¬P (x, y) ∨ ∀y(¬Q(y) ∨ P (x, a))) ∨ ∃x∀y(P (y, x) ∧ ¬R(x, y))

* + 3. l´ep´es (kvantorkiemel´esi szab´alyok)

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y(¬Q(y)∨P (x, a))∨∀y(P (y, x)∧¬R(x, y))).

∃y kiemel´es´ehez el˝osz¨or v´egrehajtjuk az y/y1 helyettes´ıt´est a

∀y-al kezd˝od˝o els˝o r´eszformul´aban ´es az y/y2 helyettes´ıt´est a

∀y-al kezd˝od˝o m´asodik r´eszformul´aban.

∃x(∃y¬P (x, y)∨∀y1(¬Q(y1)∨P (x, a))∨∀y2(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

∃x∃y(¬P (x, y)∨∀y1(¬Q(y1)∨P (x, a))∨∀y2(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

Utols´o l´ep´es:

∃x∃y∀y1∀y2(¬P (x, y)∨(¬Q(y1)∨P (x, a))∨(P (y2, x)∧¬R(x, y2)))

Megkaptuk a prenex formul´at. A mag DNF.

Ha a prenex formula t¨orzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a formula norm´alforma: prenex konjunkt´ıv / prenex diszjunkt´ıv formula.

Tekintsu¨k az els˝o egzisztenci´alis kvantort a prefixumban, legyen ez

∃x*j*. Ha a formula igaz egy interpret´aci´oban, akkor az x1, x2, . . . , x*j*−1 v´altoz´ok minden ´ert´ekkombin´aci´oj´ahoz l´etezik legal´abb egy ´ert´eke az x*j* v´altoz´onak amelyre a formula ´ert´eke i. Ezt a t´enyt az f (x1, x2, . . . , x*j*−1) = x*j* (Skolem) fu¨ggv´ennyel fejezzu¨k ki. Ez a fu¨ggv´eny rendeli az x*j* -hez a megfelel˝o ´ert´eket az x1, x2, . . . , x*j*−1 v´altoz´ok minden v´altoz´oki´ert´ekel´ese eset´en. Ezt a l´ep´est v´egrehajtjuk a soronk¨ovetkez˝o egzisztenci´alis kvantorra addig am´ıg, minden egzisztenci´alis kvantort nem elimin´altunk.



P´elda 1.

∀x∃yP (x, y)

Skolem alak: ∀xP (x, f (x))



P´elda 2.

∃x∃y∀y1∀y2(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1) ∨ P (x, a) ∨ P (y2, x) ∧ ¬R(x, y2))

x ´es y-hoz tartoz´o Skolem fu¨ggv´enyek 0 v´altoz´osak (Skolem konstansok), pl. q, r. Skolem alak:

∀y1∀y2(¬P (q, r) ∨ ¬Q(y1) ∨ P (q, a) ∨ P (y2, q) ∧ ¬R(q, y2))

A Skolem norm´alforma magja KNF, az els˝orendu˝ nyelv liter´aljaib´ol fel´ırt kl´ozok konjunkci´os l´anca.

**(3) Tetsz˝oleges Skolem norm´alforma fel´ırhat´o els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´ojak´ent**

P´elda



∀x∀y∀y1((¬P (x, y) ∨ Q(y1)) ∧ (R(y, f (x) ∨ P (x, a))

∧ (P (x, y1) ∨ ¬R(x, y)))

A konjunkci´os l´ancban a 3. kvantorkiemel´esi szab´aly alkalmazhat´o. ´Igy a formula els˝orendu˝ kl´ozok konjunkci´os l´ancak´ent fel´ırt alakja:

∀x∀y∀y1(¬P (x, y) ∨ Q(y1)) ∧ ∀x∀y∀y1(R(y, f (x)) ∨ P (x, a))

∧ ∀x∀y∀y1(P (x, y1) ∨ R(x, y))

Els˝orendu˝ kl´ozokb´ol ´all´o konjunkci´os l´anc kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek vizsg´alata.

Mivel egy kvant´alt formula ´ert´eke **nem fu¨gg a benne szerepl˝o k¨ot¨ott v´altoz´o ´ert´ek´et˝ol**, ezeket a v´altoz´okat ´at lehet nevezni.



P´elda

∀x∀y∀y1(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1)) ∧ ∀z∀w∀y1(R(w, f (z)) ∨ P (z, a))

v´altoz´oidegen kl´ozok konjunkci´oja.

∧ ∀v∀z1∀y3(P (v, y3) ∨ ¬R(v, z1))

A´talak´ıthat´o v´altoz´oidegen els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlens´eg´enek vizsg´alat´av´a.



P´elda

{(¬P (x, y) ∨ ¬Q(y1)), (R(w, f (z)) ∨ P (z, a)), (P (v, y3) ∨ ¬R(v, z1))}

Ha egy formula azonosan igaz |U | = n sz´amoss´agon, akkor enn´el kisebb sz´amoss´agon is azonosan igaz. (Tk.257.o.)



Ha egy formula kiel´eg´ıthet˝o |U | = n sz´amoss´agon, akkor enn´el nagyobb sz´amoss´agon is kiel´eg´ıthet˝o.(Tk.258.o.)

L¨owenheim-Skolem t´etel Tk.258.o.

Ha egy formula kiel´eg´ıthet˝o egy´altal´an, akkor kiel´eg´ıthet˝o legfeljebb megsz´aml´alhat´oan v´egtelen U -n.

A kiel´eg´ıthetetlens´egre hasonl´o t´etelek nincsenek.

**Egy** S **els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen**, ha minden interpret´aci´oban **legal´abb egy kl´oza hamis**.

Egy **els˝orendu˝ kl´oz hamis** egy interpret´aci´oban, ha az interpret´al´o struktu´ra U univerzum´an kifejtve a magb´ol kapott **alapkl´ozok k¨ozu¨l legal´abb egy hamis** ebben az interpret´aci´oban.

**Egy** S **els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen** U felett, ha az U -n defini´alhat´o minden struktu´r´aban az **alapkl´ozok** halmaza kiel´eg´ıthetetlen. Ha az S els˝orendu˝ kl´ozhalmazb´ol az adott sz´amoss´agu´ univerzumon a kifejt´essel megkapott alapkl´ozok halmaz´ab´ol alaprezolu´ci´oval levezethet˝o az u¨res kl´oz, akkor a kl´ozhalmaz **ezen az univerzumon** kiel´eg´ıthetetlen. Ha egy S kiel´eg´ıthetetlen egy |U | = n sz´amoss´agu´ univerzumon, m´eg lehet nagyobb sz´amoss´agon kiel´eg´ıthet˝o.



P´elda, TK. 254.o. / 6.3.45.

∀x∀y∃z((P (x, y) ⊃ ¬P (y, x)) ∧ (P (x, z) ∨ P (z, y)))

Bebizony´ıthat´o, hogy a formula nem el´eg´ıthet˝o ki k´etelemu˝ univerzumon, de h´aromelemu˝ univerzumon m´ar kiel´eg´ıthet˝o.

Herbrand megmutatta, hogy ha tekintju¨k az **els˝orendu˝ kl´ozhalmaz le´ır´o nyelv´enek alaptermjei**b˝ol ´all´o halmazt a Herbrand-univerzumot (H-t), akkor a kl´ozhalmaz akkor lesz kiel´eg´ıthetetlen, ha H-n kiel´eg´ıthetetlen. Minden els˝orendu˝ nyelvhez (els˝orendu˝ kl´ozhalmazhoz) l´etezik **legfeljebb megsz´aml´alhat´oan v´egtelen sz´amoss´agu´ Herbrand-univerzum**.

*Egy els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen akkor ´es csak akkor, ha Herbrand-univerzum´an kiel´eg´ıthetetlen.*

Herbrand-univerzum konstrukci´oja l´ep´esr˝ol l´ep´esre:

1. H0 = {S-ben el˝ofordul´o konstansok halmaza} vagy ha a kl´ozhalmazban nincs konstans szimb´olum, akkor egy szimbolikus konstans {a}.
2. H*i*+1 = H*i* ∪ F*i*, ahol F*i* azon alaptermek halmaza, amelyeket H*i* elemeinek a kl´ozhalmazban l´ev˝o fu¨ggv´enyszimb´olumokba val´o behelyettes´ıt´es´evel kapjuk.
3. H∞ = H*k k*∈**N**

S



P´elda

Tekintsu¨k az S = {P (x), ¬Q(y, z) ∨ ¬P (z), Q(u, f (u))} kl´ozhalmazt.

H0 = {a} - fikt´ıv konstans

H1 = {a, f (a)}

H*j* = {a, f (a), f (f (a)), . . . , f (. . . f (a) . . .)} - j-szeres iter´aci´o

H∞ = {a, f (a), f (f (a)), . . . , f (. . . f (a) . . .), . . .}

Alapkl´ozhalmaz a Herbrand-univerzum felett:

S = {P (a), ¬Q(a, a) ∨ ¬P (a), Q(a, f (a)), P (f (a)),

¬Q(a, f (a)) ∨ ¬P (f (a)), . . .}

Alaprezolu´ci´os levezet´es:

1 Q(a, f (a)) P (f (a)) S

¬ ∨ ¬ ∈

2 P (f (a)) S

∈

3 Q(a, f (a)) res(1,2)

¬

4 Q(a, f (a)) S

∈

5 Q res(3,4)



Herbrand-b´azis

Legyen S egy els˝orendu˝ kl´ozhalmaz ´es H a kl´ozhalmazhoz tartoz´o

Herbrand-univerzum. A H Herbrand-univerzum feletti alapatomok

egy r¨ogz´ıtett sorrendj´et *Herbrand-b´azisnak* nevezzu¨k.



P´elda

egy lehets´eges Herbrand-b´azis:

Az el˝oz˝o S = {P (x), ¬Q(y, z) ∨ ¬P (z), Q(u, f (u)) kl´ozhalmaz eset´en

{P (a), Q(a, a), P (f (a)), Q(a, f (a)), Q(f (a), a), Q(f (a), f (a)),

P (f (f (a))), . . .}

#### Herbrand-interpret´aci´o



Legyen az S kl´ozhalmaz le´ır´o nyelve (*Pr*, *Fn*, *Cnst* ),

Herbrand-univerzuma pedig H. *Herbrand-interpret´aci´oinak* nevezzu¨k ´es IH-vel jel¨olju¨k a nyelv azon interpret´aci´oit, melyek univerzuma ´eppen H, ´es

* minden c ∈ *Cnst* konstansszimb´olumhoz a c ∈ H

univerzumelemet (¨onmag´at) rendeli, ´es

* minden k arit´asu´ f ∈ F n fu¨ggv´enyszimb´olumhoz hozz´arendeli azt az f I*H* : H*k* → H mu˝veletet, amelyikre minden h1, h2, . . . , h*k* ∈ H eset´en

f I*H* (h1, h2, . . . , h*k*) = f (h1, h2, . . . , h*k*).

Egy S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz Herbrand-interpret´aci´oi teh´at csak az S-ben el˝ofordul´o predik´atumszimb´olumok interpret´al´as´aban ku¨l¨onb¨oznek.

Az el˝oz˝oek alapj´an, ha adva van az S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz egy IH Herbrand-interpret´aci´oja, azt a k¨ovetkez˝o m´odon is le´ırhatjuk: Legyen {A1, A2, . . .} az S kl´ozhalmaz Herbrand-b´azisa ´es legyen

*i* .

L = A*i*, ha A*i* igaz IH-ban,

¬A*i*, ha A*i* hamis IH-ban.

Ekkor a IH Herbrand-interpret´aci´ot az {L1, L2, . . . }

alapliter´al-halmaz egy´ertelmu˝en megadja.

P´elda



Legyen S = {P (x) ∨ Q(x), R(f (y))}. S Herbrand-univerzuma:

H = {a, f (a), f (f (a)), f (f (f (a))), . . .}.

S egy Herbrand-b´azisa:

{P (a), Q(a), R(a), P (f (a)), Q(f (a)), R(f (a)), . . .}.

N´eh´any Herbrand-interpret´aci´o:

I1 = {P (a), Q(a), R(a), P (f (a)), Q(f (a)), R(f (a)), . . . }

I2 = {¬P (a), ¬Q(a), ¬R(a), ¬P (f (a)), ¬Q(f (a)), ¬R(f (a)), . . . }

I3 = {P (a), Q(a), ¬R(a), ¬P (f (a)), Q(f (a)), ¬R(f (a)), . . . }

Az I1, I2 ´es I3 interpret´aci´ok szeml´eltet´ese az el˝oz˝o Herbrand-b´azis felhaszn´al´as´aval k´eszu¨l szemantikus f´an:

P (a) ¬P (a)

Q(a) ¬Q(a) Q(a) ¬Q(a)

R(a) ¬R(a) ¬R(a)

P (f (a)) ¬P (f (a)) ¬P (f (a))



T´etel Tk.6.3.61

Egy els˝orendu˝ kl´ozhalmaz akkor ´es csak akkor kiel´eg´ıthetetlen, ha a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpret´aci´o sem el´eg´ıti ki. Nincs Herbrand-modellje.



A 6.3.61 t´etel csak **els˝orendu˝ kl´ozhalmaz** eset´en ´all fenn. P´elda:

Legyen egy nem els˝orendu˝ kl´ozhalmaz S = {P (a), ∃x¬P (x)}.

Herbrand-interpret´aci´ok: P (a), ¬P (a). Egyiku¨k sem el´eg´ıti ki S-et.

S Herbrand-univerzuma: {a}, Herbrand-b´azisa {P (a)},

Ugyanakkor S kiel´eg´ıthet˝o p´eld´aul az U = {0, 1}(P (x)) struktu´r´aban,

ahol P (0) = i ´es P (1) = h.



H1 Tk.263.o.

Egy S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen akkor ´es csak akkor, ha S b´armely szemantikus f´aj´ahoz van v´eges z´art szemantikus f´aja.



H2 Tk.264.o.

Egy S els˝orendu˝ kl´ozhalmaz kiel´eg´ıthetetlen akkor ´es csak akkor, ha S kl´ozai alapel˝ofordul´asainak van v´eges kiel´eg´ıthetetlen Sj r´eszhalmaza.

El˝o´all´ıtjuk az els˝orendu˝ kl´ozok magjainak ¨osszes alapp´eld´any´at ´es az alapkl´ozok halmaz´an ´ıt´eletlogikai rezolu´ci´oval levezetju¨k az u¨res kl´ozt.

Az els˝orendu˝ kl´ozhalmaz:

{∀x∀y(P (x) ∨ ¬Q(x, f (y))),

∀z∀v(¬P (g(z)) ∨ ¬P (v)),

∀u(Q(g(u), u))}

Herbrand-univerzum:

{a, g(a), f (a), g(f (a)), g(g(a)), f (f (a)), f (g(a)), . . . }

(A kl´ozhalmaz le´ır´o nyelv´enek ¨osszes alaptermje)

Alapkl´ozok ku¨l¨onb¨oz˝o helyettes´ıt´esek eset´en:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | v | u | {P (x) ∨ ¬Q(x, f (y)),  ¬P (g(z)) ∨ ¬P (v),  Q(g(u), u)} |
| a | a | a | a | a | {P (a) ∨ ¬Q(a, f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (a),  Q(g(a), a)} |
| g(a) | a | a | g(a) | a | {P (g(a)) ∨ ¬Q(g(a), f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (g(a)), Q(g(a), a)} |
| g(a) | a | a | g(a) | f (a) | {P (g(a)) ∨ ¬Q(g(a), f (a)),  ¬P (g(a)) ∨ ¬P (g(a)),  Q(g(f (a)), f (a))} |
| g(f (a)) | a | f (a) | g(f (a)) | f (a) | {P (g(f (a))) ∨ ¬Q(g(f (a)), f (a)),  ¬P (g(f (a))) ∨ ¬P (g(f (a))),  Q(g(f (a)), f (a))} |

Alaprezolu´ci´o:

1. Q(g(f (a)), f (a)) u f (a) 1. X

"

2. P (g(f (a))) Q(g(f (a)), f (a)) x g(f (a)), y a 2. Y X

∨ ¬ " " ∨ ¬

3. P (g(f (a))) 3. Y

4. P (g(f (a))) z f (a), v g(f (a)) 4. Y

¬ " " ¬

5. Q 5. Q

Legyen a b´azis els˝o k´et eleme P (g(f (a))), Q(g(f (a)), f (a)). Illesszu¨k szemantikus f´ara az alapkl´ozhalmazt.