Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Programtervező Informatikus Szak

MATEMATIKAI ALAPOZÁS

oktatási segédanyag

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez az anyag a „Matematikai alapozás” tantárgy segédanyagául készült, felhasználva a 2006-os (59 oldalas), a 2008-as (60 oldalas) és a 2009-es (70 oldalas) anyagot.

Az egyes témakörök tárgyalásához igen hasznos előzetesen felkészülni az elméleti anyagból. Az elméletet a középiskolás tankönyvekből és füzetekből, valamint az egyes fejezetekhez írt „Kiegészítés az elmélethez” c. részből javasoljuk átnézni.

A két legelterjedtebben használt tankönyvcsalád 12. osztályos könyvére az anyagban az alábbi módon hivatkozunk (természetesen elég, ha az egyik tankönyv van meg):

SZ-TK:
Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 12, tankönyv a középiskolák 12. osztálya számára (Mozaik Kiadó).

H-TK:
Hajnal Imre – Számadó László – Békéssy Szilvia: Matematika 12. a gimnáziumok számára (Nemzeti Tankönyvkiadó).

Ajánljuk továbbá gyakorlásra az alábbi példatárat:
Bagota Mónika – Kovács Zoltán – Krisztin Német István: Matematikai praktikum feladatgyűjtemény (Polygon jegyzettár).

Néhány jelölés:

- a valós számok halmaza: $\mathbb{R}$;
- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- a pozitív egész számok halmaza: $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N}\}$;
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \ \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$;
- a sík pontjai, számpárok: $\mathbb{R}^2 := \{(x,\, y) \ \mid \ x, y \in \mathbb{R}\}$;
- a tér pontjai, számhármasok: $\mathbb{R}^3 := \{(x,\, y,\, z) \ \mid \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- A vektorokat latin kisbetűkkel fogjuk jelölni, tehát nem használjuk a középiskolában megszokott kiemeléseket (félkövér betű, aláhúzás, fölétett nyíl, stb.)
- Az intervallumok nyíltságát gömbölyű zárójellel, és nem kifelé fordított szögletes zárójellel fogjuk jelölni.
- Részhalmaz jelölésére a $\subset$ és nem a $\subseteq$ jelet fogjuk használni.

1. Lineáris rendszerek (1. hét)

Cél: Lineáris egyenletrendszerek megoldásának és grafikus szemléltetésének átismétlése.

1.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni: SZ-TK 213-217., 270-274. oldal.
H-TK -, 212-216. oldal

Lineáris egyenletrendszer megoldásához a helyettesítéses módszert használjuk.

1.2. Feladatok

1.2.1. Órai feladatok

Egyenesek

1. Az e egyenes egyenlete: $4x + 2y = 3$.

(a) Adjuk meg síkbeli ponthalmazként!

(b) Mely lineáris függvény grafikonja?

(c) Ábrázoljuk!

(d) Olvassuk ki az alábbi adatait: normálvektor, irányvektor, meredekség (iránytangens), irányszög, néhány pontja!

2. Milyen síkbeli ponthalmazt jelölnek ki az alábbi egyenlőtlenségek? Ábrázoljuk ezeket a halmazokat!

$a)\quad 4x + 2y \leq 3 \qquad\qquad b)\quad 4x + 2y \geq 3$

3. Oldjuk meg az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenletrendszereket! Szemléltessük őket grafikusan!

$a)\ \begin{array}{l} x - 3y = -11 \\ 2x + y = -1 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 2y = -6 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{array}$

4. Az előző feladathoz kapcsolódva, szemléltessük az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmazát:

a) $\begin{aligned} x - 3y &\geq -11 \\ 2x + y &\leq -1 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 3x - 2y &\leq 2 \\ 3x - 2y &\geq -6 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} 2x + y &\leq 2 \\ 6x + 3y &\leq 6 \end{aligned}$

(Cserélgessük a relációjelek irányát!)

5. Szemléltessük az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq 0 \\ 4x + 5y + 11 &\geq 0 \\ 2x - y + 9 &\geq 0 \\ x + 3y - 13 &\leq 0 \end{aligned}$$

Háromismeretlenes egyenletrendszer

6. Oldjuk meg az alábbi (háromismeretlenes) lineáris egyenletrendszereket! Írjuk fel a megoldáshalmazt!

a) $\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= -1 \\ 3x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x - y + 2z &= 5 \\ x - 5y - 4z &= -3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ -2x - y + z &= -1 \\ 4x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$ *d)* $\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= -2 \\ x - 4y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$

(A látottak alapján utalhatunk arra, hogy a megoldhatóság és a megoldások száma nem azon múlik, hogy hány egyenlet és hány ismeretlen van.)

Paraméteres egyenletrendszer

7. Oldjuk meg az alábbi (kétismeretlenes) paraméteres lineáris egyenletrendszereket (p jelöli a paramétert):

a) $\begin{aligned} 2x + py &= 3 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x + py &= 4 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} 2x + py &= p \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x + py &= p + 10 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$

1.2.2. További feladatok

Egyenesek

1. Az e egyenes egyenlete: $3x - y = 2$.

(a) Adjuk meg síkbeli ponthalmazként!

(b) Mely lineáris függvény grafikonja?

(c) Ábrázoljuk!

(d) Olvassuk ki az alábbi adatait: normálvektor, irányvektor, meredekség (iránytangens), irányszög, néhány pontja!

2. Ábrázoljuk az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott síkbeli ponthalmazokat:

$$a)\quad 3x - y \le 2 \qquad\qquad b)\quad 3x - y \ge 2$$

3. Oldjuk meg az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenletrendszereket! Szemléltessük őket grafikusan!

$$a)\ \begin{aligned} 2x + 3y &= -4 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} -3x + 4y &= 2 \\ 6x - 8y &= -4 \end{aligned}$$

4. Az előző feladathoz kapcsolódva, szemléltessük az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmazát:

$$a)\ \begin{aligned} 2x + 3y &\ge -4 \\ 3x - y &\le 5 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x - 2y &\le 4 \\ x - 2y &\ge 0 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} -3x + 4y &\le 2 \\ 6x - 8y &\le -4 \end{aligned}$$

(Cserélgessük a relációjelek irányát!)

5. Szemléltessük az alábbi (kétismeretlenes) lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\le 0 \\ 2x - 4y + 5 &\le 0 \\ y &\ge 0 \\ 4x + y + 16 &\ge 0 \\ 2x + 3y - 12 &\le 0 \\ 2x - 2y + 13 &\ge 0 \end{aligned}$$

Háromismeretlenes egyenletrendszer

6. Oldjuk meg az alábbi (háromismeretlenes) lineáris egyenletrendszereket! Írjuk fel a megoldáshalmazt!

a)
$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ 4y + z &= 5 \\ 5x + 4y + 3z &= -6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 5y - 3z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6x - 9y + 12z &= 9 \\ 2x - 3y + 4z &= 3 \\ -4x + 6y - 8z &= -6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -3 \\ 3x + 8y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - z &= 4 \end{aligned}$$

Paraméteres egyenletrendszer

7. Oldjuk meg az alábbi (kétismeretlenes) paraméteres lineáris egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{aligned} px + y &= 4 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} px + (p+2)y &= 5 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2py &= p + 3 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

2. Vektorok, becslések (2. hét)

Ezen a foglalkozáson két témakört nézünk át.

Az óra első felében célunk a vektorműveletek átismétlése, néhány egyszerű alkalmazásuk.

Az óra második felében a polinomok és racionális törtfüggvények növekedési ütemével foglalkozunk: ún. nagyságrend-őrző becsléseket adunk.

2.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni: SZ-TK 248-256. oldal.
H-TK -, 200-205. oldal

Vektorok

Amint azt a bevezetőben említettük, a vektorokat latin kisbetűkkel fogjuk jelölni: a, b, c, stb. Nem használjuk tehát a középiskolában megszokott kiemelt írásmódokat, mint pl. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, **a**, **b**, **c**, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, stb. Célszerű ugyanis hozzászoknunk ahhoz, hogy egy betű jelentését nem a megjelenési módja adja meg, hanem az, hogy mit jelöl. Természetesen, ha szükségesnek gondoljuk, használhatjuk a kiemelt írásmódot.

A vektorokat néha oszlop-írásmódban írjuk. Ez főleg műveletvégzéskor hasznos.

Figyeljük meg, hogy ha vektorokkal és számokkal dolgozunk, akkor a szorzás jele, a $\cdot$ többféle szerepben is előjöhet. Például, ha a, b, c vektorokat jelöl:
$2 \cdot 3$ a 2 és a 3 számok szozata;
$5 \cdot a$ az a vektor megszorzása 5-tel;
$a \cdot b$ az a és a b vektorok skaláris szorzata;
$(a \cdot b) \cdot c$ a c vektor megszorzása az a és a b vektorok skaláris szorzatával (az $a \cdot b$ számmal).

Alkalmazhatjuk továbbá azt a konvenciót (megállapodást) is, hogy – ha nem értelemzavaró – a szorzás jele elhagyható, pl.:

$$5a, \qquad 3a - 2b, \qquad ab, \qquad (a \cdot b)c, \qquad (ab) \cdot c, \qquad (ab)c\,.$$

Polinomok

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együttható*i), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyüttható*ja. x jelöli a polinom ún. *változó*ját, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Polinomok nagyságrendi becslése

Tekintsünk egy pozitív főegyütthatós polinomot.

Érzéseink azt sugallják, hogy ha az x változó „nagy" pozitív szám, akkor a polinom „nagyságrendileg úgy viselkedik", mint a legmagasabb fokú tagja. Ezen pontosabban a következőt értjük. Ha

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n > 0),$$

akkor megadhatók olyan $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok, hogy minden $x \geq R$ esetén

$$m \cdot x^n \leq P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Kissé lazábban fogalmazva:

Elég nagy x-ek esetén $P(x)$ értéke az x^n hatvány konstans-szorosai közé esik.

Az $m \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) a P *nagyságrend-őrző alsó becslésének* (NRA-becslésének), az $M \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) pedig a P *nagyságrend-őrző felső becslésének* (NRF-becslésének) nevezzük. Nevezzük e két becslés együttesét NR-becslésnek (*nagyságrend-őrző becslés*).

A becslés végrehajtására (vagyis az $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok megkeresésére) a Függelék 11.1. szakaszában adunk módszert és példát.

Racionális törtkifejezések becslése

Két polinom hányadosát racionális törtkifejezésnek (röviden: törtkifejezésnek) nevezzük. Az ilyen típusú kifejezésekre is adhatunk nagyságrend-őrző (NR) becsléseket. Ha ugyanis P_1 n-edfokú és P_2 k-adfokú pozitív főegyütthatós polinomok, melyeknek NR-becsléseit már előállítottuk:

$$m_1 \cdot x^n \leq P_1(x) \leq M_1 \cdot x^n \qquad (x \geq R_1) \qquad \text{és}$$

$$m_2 \cdot x^k \leq P_2(x) \leq M_2 \cdot x^k \qquad (x \geq R_2),$$

akkor $x \geq \max\{R_1, R_2\}$ esetén nyilvánvalóan

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \leq \frac{M_1 \cdot x^n}{m_2 \cdot x^k} = \frac{M_1}{m_2} \cdot x^{n-k},$$

továbbá

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \geq \frac{m_1 \cdot x^n}{M_2 \cdot x^k} = \frac{m_1}{M_2} \cdot x^{n-k}.$$

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

Vektorok a koordinátasíkon

1. Ábrázoljuk a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az alábbi pontok helyvektorait:

$$A(1;\,-1) \qquad B(2;\,1) \qquad C(-5;\,3) \qquad D(0;\,6) \qquad E(-3;\,0)$$

2. Adottak az

$$a = (2;\,1) \quad b = (-4;\,3) \quad c = (5;\,-2)\,.$$

vektorok. Számítsuk ki az alábbiakat, és ahol lehet, szemléltessük grafikusan:

a) $a + c$ *b)* $a - b$ *c)* $a + b + c$
d) $c - a + b$ *e)* $4a$ *f)* $2a - b + 3c$
g) $|\,a\,|$ *h)* $|\,4a + 3b\,|$ *i)* $a \cdot b$
j) $(a \cdot c) \cdot b$

k) a és b hajlásszöge
l) c $+\,90°$-os elforgatottja
m) c $-\,90°$-os elforgatottja

3. Képezzük tetszőleges a vektor és tetszőleges $u \neq 0$ vektor esetén az

$$a_p = \frac{u \cdot a}{|u|^2} \cdot u, \qquad \text{és az} \qquad a_m = a - a_p$$

vektorokat! Igazoljuk, hogy

$$a_p \parallel u; \qquad a_m \perp u; \qquad a_p + a_m = a$$

(párhuzamos és merőleges komponensekre bontás)!

Ennek alapján bontsuk fel az $a = (5; -4)$ vektort az $u = (3; 1)$ vektor szerint párhuzamos és merőleges komponensekre!

4. Igazoljuk, hogy ha az A pont helyvektora a, a B pont helyvektora b, akkor (O-val jelölve az origót):

$$T_{OAB\triangle} = \frac{\sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - |a \cdot b|^2}}{2} \,.$$

Ennek alapján számítsuk ki az alábbi háromszögek területét:

a)	$A(5;1)$	$B(10;-4)$	$C(0;0)$
b)	$A(-5;-1)$	$B(1;-3)$	$C(4;3)$

NR-becslések

5. Adjunk NRF-becslést az alábbi polinomokra!

(*Azaz:* adjunk meg olyan $M > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \leq M \cdot x^n$ egyenlőtlenség!

Más szóval: adjunk meg olyan $M > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \leq M \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,.$

6. Adjunk NRA-becslést az alábbi polinomokra!

(*Azaz:* adjunk meg olyan $m > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség!

Más szóval: adjunk meg olyan $m > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,.$

7. Adjunk NRF- és NRA-becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 10x^2 + 20x - 15}{7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 9}\,.$

8. Adjunk NRF- és NRA-becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = 7n^3 - 4n^2 + 5n - 17 \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{3n^4 + 7n^3 - 10n^2 - 13n + 6}{2n^5 - 8n^3 + 5n^2 + 9n - 7} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

2.2.2. További feladatok

Vektorok a koordinátasíkon

1. Adottak az

$$a = (-4;\ 1) \quad b = (5;\ 2) \quad c = (-3;\ 7)\,.$$

vektorok. Számítsuk ki az alábbiakat, és ahol lehet, szemléltessük grafikusan:

a) $a - c$	*b)* $a + c - b$	*c)* $a - b - c$
d) $-5a$	*e)* $4a - 3b + 2c$	*f)* $\lvert\, b \,\rvert$
g) $\lvert -2a + b \,\rvert$	*h)* $a \cdot c$	*i)* $(b \cdot c) \cdot a$

k) b és c hajlásszöge
l) b $+\,90°$-os elforgatottja
m) b $-\,90°$-os elforgatottja

2. Bontsuk fel az $a = (-3; 2)$ vektort az $u = (4; -1)$ vektor szerint párhuzamos és merőleges komponensekre!

3. Számítsuk ki az alábbi négyszögek területét:

a) $A(-2; 5)$	$B(0; 0)$	$C(7; 2)$	$D(6; 10)$
b) $A(4; -2)$	$B(-3; 7)$	$C(-5; 5)$	$D(-5; 1)$

NR-becslések

4. Adjunk NRF- és NRA-becslést az alábbi polinomokra:

(a) $P(x) = 7x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x - 10\,;$

(b) $P(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 6x - 20\,;$

(c) $P(x) = x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 10^2 + 11x + 33\,;$

(d) $P(x) = 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 10x + 5\,;$

(e) $P(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 20\,;$

(f) $P(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - 99x^4 - 88x^3 - 67x^2 - 61x - 60\,.$

5. Adjunk NRF- és NRA-becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + x + 8}{3x^2 - 5x - 7}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 9x^2 + 8x - 12}{4x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 3x + 6}\,.$

6. Adjunk NRF- és NRA-becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = n^3 - 7n^2 + 9n - 13 \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{5n^4 + 3n^3 - 14n^2 - 9n + 7}{2n^5 + 11n^3 - 4n^2 + 5n - 17} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

3. Algebrai és gyökös kifejezések I. (3. hét)

3.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 167-182. oldal;
H-TK 146-153. oldal.

Néhány nevezetes szorzattá alakítás

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

Polinomok gyökei

Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot a P polinom *gyök*ének nevezzük, ha $P(\alpha) = 0$. Az $x - \alpha$ elsőfokú polinom az α gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Az $a^n - b^n$ különbség szorzattá alakítási szabályának segítségével bebizonyítható, hogy az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor gyöke a P polinomnak, ha az $x - \alpha$ gyöktényező kiemelhető P-ből, azaz, ha van olyan Q polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az említett azonosság segítségével a kiemelés a gyakorlatban is végrehajtható (ld. Függelék 11.2. szakasz).

A gyöktényezők sorozatos kiemelésével belátható, hogy egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n db gyöke van.

3.2. Feladatok

Valamennyi feladatban alapértelmezés, hogy a formulákban szereplő betűk olyan számokat jelentenek, amelyekre a kifejezések értelmesek (kifejezés értelmezési tartománya). Természetesen ez a halmaz tovább szűkülhet, ha a feladatban feltételeket adunk meg ezekre a betűkre.

3.2.1. Órai feladatok

Azonosságok igazolása

1. Mutassuk meg, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^2 + ab + b^2 = 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Számítsuk ki ennek alapján $a^3 - b^3$ pontos értékét, ha $a - b = 2$ és $a + b = \sqrt{5}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) + \dfrac{2}{ab(a+b)^2} = \dfrac{1}{a^2b^2}$;

(b) $\dfrac{a}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \dfrac{b}{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3} + \dfrac{1}{a^2 - b^2} - \dfrac{1}{a^2 + b^2} - \dfrac{a^2 + 3b^2}{a^4 - b^4} = 0$;

(c) $\dfrac{1}{a(a-b)(c-a)} + \dfrac{1}{b(a-b)(b-c)} + \dfrac{1}{c(c-a)(b-c)} = -\dfrac{1}{abc}$;

(d) $\dfrac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b^2 - ac}{(a+b)(b+c)} + \dfrac{c^2 - ab}{(a+c)(b+c)} = 0.$

3. Lássuk be, hogy

(a) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \qquad (a, b \geq 0)$;

(b) $a \pm b = \left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$.

Azonosság, feltétellel

4. Igazoljuk, hogy ha

(a) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a + b + c = 0$, akkor $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$;

(b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a + b + c = 0$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

(c) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, akkor $a = b = c$.

Kifejezés átalakítása: egyszerűbb alakra hozás, szorzattá alakítás

5. Alakítsuk szorzattá az

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

különbséget!

6. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést, és számítsuk ki az értékét, ha $x = 0,5$:

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1 + x} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right) \qquad (0 < x < 1) .$$

7. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

(a) $\dfrac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \dfrac{a}{a^2 - b^2} + \dfrac{1}{a+b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq |b|)$;

(b) $\dfrac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b < a)$.

8. Írjuk fel szorzatalakban az alábbi összegeket:

(a) $x^3 + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Polinomból gyöktényező kiemelése

9. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből:

(a) $x_0 = 2, \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$;

(b) $x_0 = 3, \quad P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18$;

(c) $x_0 = -1, \quad P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.

10. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(2x^2 + x + k)$-ból $(x + 3)$-at $\quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $(4x^2 - 6x + k)$-ból $(x - 3)$-at $\quad (x \in \mathbb{R})$

kiemelni? Emeljük is ki!

3.2.2. További feladatok

Azonosságok igazolása

1. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\left(\frac{a}{a+2b}-\frac{a+2b}{2b}\right)\left(\frac{a}{a-2b}-1+\frac{8b^3}{8b^3-a^3}\right)=\frac{a}{2b-a}$$

$(a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq 2|b|,\ b \neq 0)$.

2. Lássuk be, hogy minden $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(a+b)(b+c)(c+a)$;

(b) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$;

(c) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-3(a+b)(b+c)(a+c)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

(b) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=0$;

(c) $(a^2-bc)^3+(b^2-ac)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)=$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$;

(d) $(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=$
$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

4. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}) \quad (a, b \geq 0)$;

(b) $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b) \quad (a, b \geq 0)$;

(c) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(a-\sqrt{ab}+b\right) \quad (a, b \geq 0)$.

Azonosság, feltétellel

5. Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c>0$ és $abc=1$, akkor

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1 .$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ és

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1,$$

akkor $xyz = 0$.

7. Adjuk meg

$$a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$$

értékét, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a + b = 1$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha két egész szám különbsége 2, akkor a köbeik különbsége felbontható három egész szám négyzetének összegére!

Kifejezés átalakítása: egyszerűbb alakra hozás, szorzattá alakítás

9. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:

(a) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a^2+ab}{a^2-2ab+b^2}} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b < a);$

(b) $\left(\dfrac{4}{3x} - \dfrac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \dfrac{3(x-2)}{2(x-1)}\right) \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0; 1)$.

10. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

(a) $4x^2 - 9b^2$;

(b) $y^3 + 1$;

(c) $8a^3 - 27$;

(d) $27a^3 + 8$;

(e) $8a^3 + b^6$;

(f) $27a^6x^{12} - 64b^9y^{15}$;

(g) $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$.

11. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

(a) $\dfrac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)}$, ha $a = 10$;

(b) $\left(\dfrac{8+b^3}{x^2-y^2} : \dfrac{4-2b+b^2}{x-y}\right)\left(x + \dfrac{xy+y^2}{x+y}\right)$, ha $b = 8,\ x = 997{,}5,\ y = -0{,}75$;

(c) $\dfrac{2\sqrt{xy} + 4\sqrt{y} - 3\sqrt{x} - 6}{2-2y} : \left(\dfrac{4y+19-2\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}} - 5\right)$, ha $x = 16,\ y = 9$.

12. Igazoljuk, hogy

(a) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

(b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

(c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

(d) $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$

egész számok!

Polinomból gyöktényező kiemelése

13. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből:

(a) $x_0 = 1, \quad P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10$;

(b) $x_0 = -2, \quad P(x) = 3x^3 + 10x^2 + 8x$.

14. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(x^3 - 4x + 2k)$-ból $(x-4)$-et;

(b) $(x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 3k)$-ból $(x+1)$-et

kiemelni? Emeljük is ki!

4. Kijelentések, kvantorok (4. hét)

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

4.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 10-27. oldal és 146-151. oldal;
H-TK 101-113. oldal.

Kijelentések

Az „*állítás*” és a „*kijelentés*” szavakat azonos értelemben használjuk, és alapfogalomnak tekintjük. Szintén alapfogalomnak tekintjük az állítások *igazságtartalmá*nak, más szóval *logikai értéké*nek fogalmát, ami kétféle lehet: igaz, hamis. Néhány példa:

1. $5 > 4$. Logikai értéke: igaz. Más szóval: az állítás igaz.
2. $10 \geq 25$. Ez az állítás hamis.

Néha a kijelentés egy vagy több változótól függ, amely változók egy megadott halmazból (ez az ún. *alaphalmaz*) vehetik értéküket. Például:

1. $x + 3 \leq 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$,
2. $x^2 + y^2 > 1 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

Az ilyen kijelentéseket *nyitott*nak is szokás nevezni. A nyitott kijelentés igazságtartalma attól függ, hogy a változója helyére milyen értéket írunk. Például az előbb felírt $x + 3 \leq 5$ állítás $x = 1$ esetén igaz, $x = 8$ esetén hamis.

A változók azon értékeinek halmazát, amelyre a kijelentés igaz, *igazsághalmaz*nak nevezzük.

Kvantorok

Vezessük be a $\forall$ jelet a „minden”, a $\exists$ jelet a „létezik” („van olyan”) szó rövidítésére. Ezeket a jeleket *kvantorjelek*nek, röviden *kvantorok*nak nevezzük. A kvantorok segítségével egy nyitott kijelentésből új állítások képezhetők. Példák:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x^2 + 1 > 0.$

   Logikai értéke nyilvánvalóan igaz.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Logikai értéke hamis, mivel pl. $x = 6$ esetén nem igaz.

3. $\exists\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Ez az állítás igaz, mivel pl. $x = 0$ esetén igaz.

4. $\exists\, x \in [7,\, +\infty):\quad x+3 \le 5.$

   Az állítás hamis, mivel $x \ge 7$ esetén $x+3 \ge 10$.

5. $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2:\quad x^2+y^2 > 1.$

   Logikai értéke: hamis, mivel pl. $(x,y)=(0,0)$ esetén nem igaz.

6. $\forall\, y \in \mathbb{R}:\quad x^2+y^2 > 1.$

   Az állítás nyitott, változója $x \in \mathbb{R}$.

7. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R}:\quad x^2+y^2 > 1.$

   E kijelentés logikai értéke: igaz. Ugyanis pl. $x=2$ esetén az egyenlőtlenség így néz ki:

   $$4+y^2 > 1,$$

   ami minden $y \in \mathbb{R}$ esetén igaz.

8. $\forall\, x \in [y,\, +\infty):\quad x+3 \le 5 \qquad (y \in \mathbb{R}).$

   Az állítás nyitott, változója y.

9. $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y,\, +\infty):\quad x+3 \le 5.$

   A kapott kijelentés már nem nyitott, logikai értéke eldönthető, mégpedig: hamis. Vegyünk ugyanis egy $y \in \mathbb{R}$ számot. Ha $y \le 2$, akkor pl. $x := 3$ választással $3 \in [y,\, +\infty)$, de $3+3 \le 5$ nem igaz. Ha pedig $y > 2$, akkor pl. $x := y+1$ választással $y+1 \in [y,\, +\infty)$, de $y+1+3 \le 5$ nem igaz. Tehát valóban nem létezik ilyen $y \in \mathbb{R}$.

Kvantoros kifejezések tagadása

Tekintsük az utolsó példában szereplő

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y,\, +\infty):\quad x+3 \le 5$$

állítást. Könnyen meggondolható, hogy ennek tagadása:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in [y,\, +\infty):\quad x+3 > 5.$$

Formálisan: a kvantorjeleket megcseréljük, s a végén az állítás tagadását vesszük.

„ha-akkor” szerkezetű állítások (következtetések)

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol az x változó az Ω alaphalmazból veheti az értékeit. Ekkor a

„ha az $A(x)$ állítás igaz, akkor a $B(x)$ állítás is igaz”

kijelentést *következtetés*nek nevezzük, és röviden így jelöljük:

$$A(x) \Longrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazásai:

- „Az $A(x)$ állításból következik a $B(x)$ állítás.”
- „$A(x)$-ből következik $B(x)$.”
- „Az $A(x)$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $B(x)$ igaz legyen.”
- „$A(x)$ elégséges feltétele $B(x)$-nek.” Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ bal oldalán áll az elégséges feltétel.
- „A $B(x)$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $A(x)$ igaz legyen.”
- „$B(x)$ szükséges feltétele $A(x)$-nek.” Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ jobb oldalán áll a szükséges feltétel.
- „Minden olyan $x \in \Omega$ esetén, amelyre az $A(x)$ állítás igaz, igaz a $B(x)$ állítás is.”

  Ezt tömören is felírhatjuk a $\forall$ kvantorral:
  $$\forall\, x \in \Omega,\ A(x): \quad B(x).$$

Megjegyezzük, hogy a „ha-akkor” szerkezetű állításnak a $\forall$ kvantorral való átfogalmazása sokszor megkönnyíti a megértést, a bizonyítást, továbbá az állítás tagadását.

Például tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ következtetést. Ennek néhány megfogalmazása:

- Ha $x \geq 3$, akkor $x > 1$.
- $x \geq 3$-ból következik, hogy $x > 1$.
- Az $x \geq 3$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $x > 1$ igaz legyen.
- $x \geq 3$ elégséges feltétele $x > 1$-nek.
- Az $x > 1$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $x \geq 3$ igaz legyen.
- $x > 1$ szükséges feltétele $x \geq 3$-nak.
- Minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre az $x \geq 3$ állítás igaz, igaz az $x > 1$ állítás is. Tömör felírása:
  $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 3: \quad x > 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a vizsgált következtetés igaz.

„akkor és csak akkor” szerkezetű állítások (ekvivalenciák):

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol $x \in \Omega$. A „$B(x) \Longrightarrow A(x)$” állítást az „$A(x) \Longrightarrow B(x)$” állítás *megfordításá*nak nevezzük. Ha egy igaz következtetés megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy a következtetés *megfordítható.*

Példaként tekintsük az előbbiekben vizsgált

$$x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$$

(igaz) következtetést. Ennek megfordítása az $x > 1 \Longrightarrow x \geq 3$ állítás, ami szintén sokféleképpen megfogalmazható. Például így:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 1 : \quad x \geq 3.$$

Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy hamis állításhoz jutottunk, mivel pl. $x = 2$ esetén $2 \in \mathbb{R}$ és $2 > 1$ is teljesül, azonban $2 \geq 3$ már nem igaz. Tehát az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ állítás nem fordítható meg.

Ha az $A(x) \Longrightarrow B(x)$ következtetés is és a megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy

„$A(x)$ *ekvivalens* $B(x)$-szel".

Ez tehát az alábbit jelenti:

$$(\,A(x) \Longrightarrow B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,B(x) \Longrightarrow A(x)\,).$$

Az így kapott állítást *ekvivalenciá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazások:

- „$A(x)$ és $B(x)$ ekvivalensek."
- „Az $A(x)$ állítás *akkor és csak akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."
- „Az $A(x)$ feltétel *szükséges és elégséges* ahhoz, hogy a $B(x)$ állítás igaz legyen."
- „Az $A(x)$ állítás *pontosan akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."

Mivel az ekvivalencia két „ha-akkor" szerkezetű állításból épül fel, a „ha-akkor" szerkezetű állítások pedig megfogalmazhatók a $\forall$ kvantorjellel, ezért az ekvivalencia is megfogalmazható kvantorjelekkel. Az

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x)$$

ekvivalencia így fogalmazható át:

$$(\,\forall\, x \in \Omega,\ A(x) : \quad B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,\forall\, x \in \Omega,\ B(x) : \quad A(x)\,).$$

Ez az átfogalmazás különösen az ekvivalenciák bizonyításánál hasznos.

Példaként tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$$

következtetést. Ennek megfordítása az $x^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 0$ állítás. Könnyen megmutatható, hogy az állítás is és a megfordítása is igaz. Tehát igaz az alábbi ekvivalencia:

$$x \neq 0 \Longleftrightarrow x^2 > 0\,.$$

Néhány megfogalmazása:

- Az $x \neq 0$ és az $x^2 > 0$ állítások ekvivalensek.
- $x \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $x^2 > 0$.
- Az $x \neq 0$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy $x^2 > 0$ igaz legyen.
- $x \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 > 0$.

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

Kijelentések, kvantorok

1. Tekintsük az

i) $n \geq 5 \quad (n \in \mathbb{N})$;

ii) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03 \quad (n \in \mathbb{N})$;

iii) $x^2 + x - 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

nyitott kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

2. Tekintsük az

$$\frac{1}{n} < 0,01 \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

nyitott kijelentést!

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\forall\, n \geq N: \quad \frac{1}{n} < 0,01 \qquad (N \in \mathbb{N}^+).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+\ \forall\, n \geq N: \quad \frac{1}{n} < 0,01.$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

3. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat! Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz-e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

Megjegyzés: A (c) pontbeli állítást az alábbi két megfogalmazásban is szokás mondani:

1. Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

2. Az $\dfrac{n^2}{10n-7}$ *tört nagyobb* 100*-nál, ha n elég nagy természetes szám.*

4. Fogalmazzuk meg kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntsük el, hogy igazak-e vagy sem! Írjuk fel tagadásukat is!

(a) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$n^4 - 35n^3 - 15n^2 + 13n + 10 > 2000.$$

(b) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^3+3}{n^5 - 3n^4 - 7n^3 + 2n^2 - 10n + 1} < 0,05.$$

(c) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^6 - 20n^5 + 3n^4 - 6n^3 + 3}{13n^3 + 100n^2 + 200} > 230.$$

Következtetések, ekvivalenciák

5. Fogalmazzuk meg különféle módokon az alábbi állításokat („ha-akkor”, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

(a) Bármely x valós szám esetén az $x > 0$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $x^2 > 0$.

(b) Legyen x és y valós szám. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az xy szorzat nulla, az, hogy $x = 0$ vagy $y = 0$.

6. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

(a) két valós szám négyzete egyenlő legyen?

(b) két valós szám köbe egyenlő legyen?

Fogalmazzuk meg különféle módokon a kapott állításokat („ha-akkor”, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

7. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás megfordítását! Döntsük el, hogy a következtetés vagy a megfordítása igaz-e, esetleg egyik sem! (x és y valós számokat jelöl.)

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ vagy } y = 0.$$

4.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok

1. Tekintsük az

$$\frac{n^2}{2n+1} > 100 \quad (n \in \mathbb{N})$$

nyitott kijelentést!

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

2. Tekintsük az

i) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03 \quad (n \in \mathbb{N});$

ii) $\dfrac{n^2+5}{2n-1} > 213 \quad (n \in \mathbb{N});$

iii) $\dfrac{n^2}{2n+1} > 308 \quad (n \in \mathbb{N});$

iv) $\dfrac{73+10n-n^2}{2n+1} < -157 \quad (n \in \mathbb{N});$

kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:
$$\forall n \geq N: \quad A(n) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$
Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:
$$\exists N \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq N: \quad A(n).$$
Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

3. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat. Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz-e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(d) Minden elég nagy természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(e) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy
$$\frac{1}{2}n^3 - 25n^2 - 14n + 9 > 1000.$$

(f) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy
$$\frac{n^3+4n^2-3n+20}{3n^5-7n^4+4n^3-12n^2-12n+5} < 0,01.$$

(g) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{2n^5 - 25n^4 - 17n^3 + 4n^2 + 5n - 4}{18n^3 + 17n^2 - 16n + 15} > 185.$$

Következtetések, ekvivalenciák

4. Fogalmazzuk meg különféle módokon a megadott állításokat („ha-akkor”, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

(a) Két valós szám egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a négyzetük is egyenlő legyen.

(b) Egy másodfokú egyenlet diszkriminánsának a pozitivitása elégséges ahhoz, hogy az egyenletnek legyen valós gyöke.

(c) Egy négyszög oldalainak egyenlősége szükséges ahhoz, hogy az illető négyszög négyzet legyen.

(d) Egy négyszög szögeinek egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a szóban forgó négyszög deltoid legyen.

(e) Három szakasz hosszának az egyenlősége elégséges ahhoz, hogy ebből a három szakaszból, mint oldalakból háromszöget szerkeszthessünk.

(f) Ahhoz, hogy két valós szám összege hét legyen, elégséges, de nem szükséges, hogy az egyik szám öt, a másik pedig kettő legyen.

5. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

(a) egy valós szám négyzete pozitív legyen?

(b) az $ax^2 + bx + c$ másodfokú kifejezés minden x valós szám esetén pozitív (nemnegatív) (negatív) (nem-pozitív) legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok.

(c) az a, b befogójú és c átfogójú háromszög derékszögű legyen?

(d) valamely konvex négyszög érintőnégyszög legyen?

(e) adott szakasz egy térbeli pontból derékszög alatt látsszék?

(f) az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok és $a \neq 0$.

(g) az x valós számhoz legyen olyan y valós szám, hogy $y^2 = x$?

Fogalmazzuk meg különféle módokon a kapott állításokat („ha-akkor”, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

6. Legyen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ és $D(x)$ a következő négy nyitott kijelentés az $\mathbb{R}$ alaphalmazon:

$A(x):$ x pozitív valós szám;

$B(x):$ x olyan valós szám, amelyre igaz, hogy $x^2 + x - 6 = 0$;

$C(x): x = -3;$

$D(x): x = 2.$

Fogalmazzuk meg különféle módokon az alábbi állításokat, és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

1. $C \Longrightarrow B$;	2. $C \Longrightarrow \overline{A}$;	3. $D \Longrightarrow A$;
4. $D \Longrightarrow B$;	5. $\overline{B \Longrightarrow (C \vee D)}$;	6. $B \iff (C \vee D)$;
7. $(A \wedge B) \iff D$;	8. $\overline{\overline{A} \wedge D}$;	9. $(\overline{A} \wedge B) \iff C$.

7. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén tekintsük az alábbi kijelentéseket:

$A(n):$ n osztható 10-zel;

$B(n):$ n osztható 5-tel;

$C(n):$ n osztható 2-vel.

Fogalmazzuk meg különféle módokon a következő állításokat:

(a) $A \Longrightarrow B$;

(b) $A \iff B \vee C$.

Ellenőrizzük, hogy az első állítás megfordítása, azaz a $B \Longrightarrow A$ következtetés nem igaz!

8. Az ebben a feladatban szereplő nyitott kijelentések közös alaphalmaza $\mathbb{R}$. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\iff$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\iff$ írható, oda csak azt írjuk):

(a) $x = \sqrt{4} \quad \square \quad x = 2;$

(b) $x^2 = 4 \quad \square \quad x = 2;$

(c) $x^2 > 0 \quad \square \quad x > 0;$

(d) $x^2 < 9 \quad \square \quad x < 3;$

(e) $x(x^2 + 1) = 0 \quad \square \quad x = 0;$

(f) $x(x + 3) < 0 \quad \square \quad x > -3$.

9. Tekintsük az alábbi következtetéseket (minden változó a valós számok halmazából veszi az értékét):

(a) $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0;$

(b) $xy = xz \Longrightarrow y = z;$

(c) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$.

Fogalmazzuk meg ezeknek az állításoknak a megfordítását! Mindegyik esetben döntsük el, hogy a következtetés vagy a megfordítása igaz-e, esetleg egyik sem!

5. Teljes indukció (5. hét)

5.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 28-34. oldal;
H-TK 11-14. oldal.

Teljes indukció:

Rögzítsünk egy $m \in \mathbb{Z}$ számot, és legyen $A(n)$ az $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számokra vonatkozó olyan állítás, amelyre egyrészt

- $A(m)$ igaz, másrészt,
- ha valamely $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számra $A(n)$ teljesül (vagyis igaz az ún. *indukciós feltevés*), akkor $A(n+1)$ is fennáll.

Ekkor $A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$ számra.

Mivel m a legkisebb egész szám, amelyre az állítást igazoljuk, azt mondjuk, hogy *az indukció m-ről indul.* Leggyakoribb az 0-ról, az 1-ről és a 2-ről való indulás.

Például az 1-ről való indulás esete így szól:
Tegyük fel, hogy $A(n)$ az $n \in \mathbb{N}^+$ számokra vonatkozó olyan állítás, amelyre egyrészt

- $A(1)$ igaz, másrészt,
- ha valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra $A(n)$ teljesül (vagyis igaz az indukciós feltevés), akkor $A(n+1)$ is fennáll.

Ekkor $A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Binomiális együtthatók:

Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ és

$$0! := 1 , \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (1 \leq n) , \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

A binomiális együtthatók nevezetes tulajdonságai:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

továbbá

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad (k = 1, \dots, n) .$$

5.2. Feladatok

E szakasz feladatait teljes indukcióval oldjuk meg. Megjegyezzük, hogy köztük több feladat is van, ami teljes indukció nélkül is megoldható, sőt olyan is, melynek az indukció nélküli megoldása még egyszerűbb is.

5.2.1. Órai feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

2. (*Binomiális tétel.*)

(a) Bizonyítsuk be a *binomiális tétel*t:
Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

(b) A binomiális tétel alkalmas szereposztásával lássuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ ; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}^+) \ .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, akkor

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(a mértani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Igazoljuk, hogy

(a) $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$.

5. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.)* Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Következmény: Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $h := \dfrac{1}{n}$ szereposztással kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

6. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-egyenlőtlenség $-2 \leq h < -1$ valós számokra is igaz!

Megjegyzés: Itt nem működik a „klasszikus” indukciós bizonyítási módszer.

5.2.2. További feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$;

(d) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(f) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(g) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$;

(h) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = n + 1$;

(i) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

2. Lássuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\prod_{k=0}^{n}(1+2^{2^k}) = 2^{2^{n+1}} - 1\ .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá $a_1,\, d \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-1)d) = \frac{n}{2}\,[\,2a_1 + (n-1)d\,]$$

(a számtani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $2^n > n^2 \quad (4 < n \in \mathbb{N})$;

(b) $3^n > n^3 \quad (4 \le n \in \mathbb{N})$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{2n-1}{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{2} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(f) $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)! > ((n+1)!)^n \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(g) $2^n > 1 + n \cdot \sqrt{2^{n-1}} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$.

5. *(Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n \in [-1,\, +\infty)$, továbbá az $x_1, \ldots, x_n$ számok azonos előjelűek, akkor

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n\ .$$

6. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(b) $\prod\limits_{k=1}^{n} (k + \frac{1}{2}) < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n+1} \quad (3 \le n \in \mathbb{N})$.

6. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek (6. hét)

6.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 190-193. oldal;
H-TK 175-176. oldal.

$\boxed{\textit{Másodfokú polinomok}}$

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és

$$P(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

1. (*teljes négyzetté kiegészítés*)

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x-u)^2 + v \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $u := -\dfrac{b}{2a}$, $v := \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

A teljes négyzetté kiegészítés segítségével tudjuk

(a) ábrázolni a P függvényt;

(b) levezetni P abszolút szélsőértékének helyét:

$$x^* = -\frac{b}{2a},$$

ami $a > 0$ esetén minimum, $a < 0$ esetén maximum.

(c) levezetni a $P(x) = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletét.

2. (*másodfokú polinom előjele*)

Ha $a > 0$ (azaz P grafikonja egy felfelé nyitott parabola), akkor

- $P(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbf{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 - 4ac \leq 0,$
- $P(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 - 4ac < 0,$

- $b^2 - 4ac > 0$ esetén $\begin{cases} P(x) > 0 & (x \in (-\infty,\, x_1) \cup (x_2,\, +\infty))\,, \\ P(x) < 0 & (x \in (x_1,\, x_2))\,, \end{cases}$

  ahol x_1 és x_2 jelöli a P polinom két (különböző) gyökét úgy, hogy $x_1 < x_2$.

Analóg állítás fogalmazható meg $a < 0$ esetén (P helyett $(-P)$-re alkalmazva az előbbieket). Szemléltessük mindezeket derékszögű koordinátarendszerben!

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

Teljes négyzetté kiegészítés, Viète-képletek

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x) = x^2 - 6x + 3; \qquad P(x) = 2x^2 + 7x - 1.$$

2. A *Viète*-képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

Egyenlőtlenségek megoldása

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

(a) $x^2 - 5x + 6 > 0\,;$

(b) $\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2\,;$

(c) $\dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{3x+4}{1-2x}\,;$

(d) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{3x-2}{1-2x} \leq 0$

egyenlőtlenség?

Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek

4. Adjuk meg azokat a $p \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekre

(a) az $x^2 + 6x + p > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(b) az $x^2 - px > \dfrac{2}{p}$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(c) az $(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(d) az $\dfrac{x^2 - px + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

5. Valamely $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett a $2x^2 - 3(p-1)x + 1 - p^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\dfrac{5}{4}$. Mi a p?

6. Adjuk meg a p paraméter értékeit úgy, hogy az $(1-p)x^2 + 2px = p + 3$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke legyen!

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $x^2 - (p-2)x + p - 3 = 0$ másodfokú egyenletet! Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy az egyenlet gyökeinek a négyzetösszege minimális legyen!

8. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek p is gyöke és q is gyöke?

6.2.2. További feladatok

Teljes négyzetté kiegészítés, Viète-képletek

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x) = x^2 + 10x + 26; \qquad P(x) = -x^2 + 2x + 3; \qquad P(x) = -3x^2 + 8x + 5.$$

2. A *Viète*-képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

Egyenlőtlenségek megoldása

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\dfrac{2x^2+5x-18}{x-2} \leq 0$;

(b) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \geq 0$.

Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek

4. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2+px+q=0$ egyenletnek

(a) olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke?

(b) minden gyöke olyan, hogy annak a reciproka is gyöke?

(c) minden gyökének a négyzete is gyöke?

(d) minden gyökének az ellentettje is gyöke?

5. Adott $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett oldjuk meg a valós számok halmazán az

(a) $x(x+3)+p(p-3)=2(px-1)$;

(b) $\dfrac{x(x-p)}{x+p} - x + p = \dfrac{10x}{x+p} - 10$

egyenleteket!

6. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén lesz az $(m-1)x^2-2mx+m-2=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke?

7. Határozzuk meg $\mathbb{R} \ni m$-et úgy, hogy az $x^2+2(m-3)x+m^2-4=0$ egyenletnek két pozitív gyöke legyen!

8. Mi lehet a $p \in \mathbb{R}$ paraméter, ha az $(1-p)x^2-4px+4(1-p)=0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van?

9. Adjuk meg $\mathbb{R} \ni q$-t úgy, hogy az $x^2-4x+q=0$ egyenletnek

(a) legyen olyan gyöke, amelynek a háromszorosa is gyöke;

(b) egyetlen gyöke legyen!

10. Melyek azok a $k \in \mathbb{R}$ számok, amelyekkel az

$$x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + x + k = 0$$

egyenletnek van közös gyöke?

11. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$(2x^2 + 7x - 8) \cdot (2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$$

egyenletet!

12. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy az $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ egyenletnek -2 gyöke és van olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke. Határozzuk meg az a, b paramétereket!

7. Algebrai és gyökös kifejezések II., egyenletek, egyenlőtlenségek (7 – 8 – 9. hét)

Ebben a fejezetben először – mintegy a 3. fejezetben tanultak alkalmazásaként – törtkifejezések „célirányos" egyszerűsítését gyakoroljuk. Ez a gyakorlás igen hasznos lesz majd a függvények határértékének számításakor.

A fejezet további részében pedig abszolútértékes, gyökös, exponenciális ill. logaritmusos egyenleteket, egyenlőtlenségeket oldunk meg.

7.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 183-204. oldal;
H-TK 170-182. oldal.

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

Törtkifejezések egyszerűsítése

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$;

(b) $\dfrac{x^4+5x^2+4}{x^4-16}$;

(c) $\dfrac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}$;

(d) $\dfrac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3}$;

(e) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$;

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}$;

(c) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$;

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek ill. egyenlőtlenségek?

(a) $|2x-7|+|2x+7|=14$;

(b) $|2x-7|+|2x+7|=x+15$;

(c) $|x^2-4x-5|+|x-2|=7$;

(d) $|x^2+3x|=|2x-6|$;

(e) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$;

(f) $|2x-1|<|x-1|$;

(g) $|x(1-x)|<\dfrac{1}{4}$;

(h) $\dfrac{1+|x-2|}{|x-3|}\le\dfrac{1}{2}$;

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$;

(b) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$;

(c) $x-1=\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$;

(d) $\sqrt{6x^2+8x-8}-\sqrt{3x-2}=0$;

(e) $\sqrt{3x+13}\le x+1$;

(f) $\sqrt{x^2+4x}>2-x$;

(g) $\sqrt{x^2-1}<5-x$;

(h) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}>3$.

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$2^x=128; \qquad 2^x\ge 128; \qquad 2^x<128; \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^x=81; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x>\frac{25}{9}.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $9 \cdot 3^{x-2} + 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1} + 18\,;$

(b) $16 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^{2x}\,;$

(c) $3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0\,;$

(d) $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{x+1}\,;$

(e) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0\,.$

Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\log_5 x = -1; \qquad \log_5 x \le -1; \qquad \log_5 x \ge -1;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x > -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x = -2.$$

8. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_3 (\log_2 (\lg(2x))) = 0\,;$

(b) $\log_{25} \left[\dfrac{1}{5} \cdot \log_3 \left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\dfrac{1}{2}\,;$

(c) $\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2\log_3 4,5 - 4\,;$

(d) $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2\log_4 3\,;$

(e) $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3\,;$

(f) $\log_x(8) - \log_{4x}(8) = \log_{2x}(16)\,;$

(g) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} > 1\,;$

(h) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} < 1\,;$

(i) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \ge 0\,;$

(j) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \le 0\,.$

7.2.2. További feladatok

Törtkifejezések egyszerűsítése

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{x^2+2x-3}{5x^2+16x+3}\,;$

(b) $\dfrac{x^4+8x^2+15}{x^4+6x^2+9}\,;$

(c) $\dfrac{27x^3-1}{6x^2+x-1}\,;$

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket, ha lehet:

(a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+5}-2}\,;$

(b) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}+4}-2}\,;$

(c) $\dfrac{x^2-26x-27}{\sqrt[3]{x}-3}\,;$

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x\in\mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

(a) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right|=2\,;$

(b) $||x+1|-2|=||x-2|+1|\,;$

(c) $|x+3|+|x-1|=3x-5\,;$

(d) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2\,;$

(e) $|x+3|+\sqrt{x^2-2x+1}=8\,.$

(f) $\left|\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2}{3}\right|\le\dfrac{|x-2|}{1+|x-2|}\,;$

(g) $x^2-6|x|-7<0\,;$

(h) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\le 2\,;$

(i) $|\,|x+1|-|x-1|\,|<1\,;$

(j) $|x|>|x-1|\,;$

(k) $|x+2|-|x|\ge 1\,.$

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{5+\sqrt{x+1}}+\sqrt{3-\sqrt{x+1}}=\sqrt{7}+1\,;$

(b) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}\,.$

(c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3}=1;$

(d) $\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2-12x+9}=4;$

(e) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+3};$

(f) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2.$

(g) $\sqrt{3x+10}\le x+4\,;$

(h) $\sqrt{3x+7}<x-1\,;$

(i) $\sqrt{5x+16}>x+2\,;$

(j) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\le 5\,.$

5. Van-e olyan x racionális szám, amelyre

(a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-10}}=\dfrac{\sqrt{3x+22}}{\sqrt{3x-14}}\,;$

(b) $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x\,?$

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

6. Adjuk meg azokat az $x\in\mathbb{R}$ valós számokat, amelyekre

(a) $8^{x-1}-2^{3x-2}+8=0;$

(b) $2^{3x+1}+3^{2x+2}=11\,.$

(c) $2^{x+1}\cdot 5^{x+1}=0.01^{-x};$

(d) $2^x-0.5^x=3.75;$

(e) $3^x+3^{-x}=p \quad (p\in\mathbb{R}$ paraméter);

(f) $(x-1)^x=\sqrt[3]{x-1}\,.$

(g) $5^{3x-4} < \dfrac{1}{25}$;

(h) $\dfrac{3}{7}^{4-3x} \geq \dfrac{49}{9}$;

(i) $2^x + 2^{1-x} < 3$.

Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_{4-x}(x^2+16) + \log_{4-x}(2x+1) = \log_{4-x}(2x) + \log_{4-x}(x^2+21)$;

(b) $\log_{x+1}(2x^2+8x+6) = 2$;

(c) $\log_3(x^3-1) - \log_3(x^2+x+1) = 2$;

(d) $\lg(x^4) + \lg(x^2) = 6$;

(e) $\log_{x-1}(x^2-2x+1) = 2$;

(f) $\lg(x+24) = 2 - 2\lg(\sqrt{x+3})$;

(g) $4\log_a(x) - 4\log_{a^2}(x) + 4\log_{a^4}(x) = 3 \quad (a \in \mathbb{R})$;

(h) $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$;

(i) $2 \cdot \lg(2) + \lg(2x+1) - \lg(-12x) = \lg(1-2x)$;

(j) $\dfrac{\log_3(2x)}{\log_3(4x-15)} = 2$;

(k) $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$;

(l) $\log_2(x) + 2 \cdot \log_4(x) = 3 \cdot \log_8(x) + 1$;

(m) $(\log_2(x)) \cdot (\log_4(2x)) = 2 \cdot \log_4(2)$;

(n) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;

(o) $x^{\lg(x)} = 0.1 \cdot x^2$;

(p) $\log_3\left(\log_3^2(x) - 3 \cdot \log_2(x) + 5\right) = 2$.

(q) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+x-30) < 0$;

(r) $\log_3 x \geq \log_x 3$.

Polinomok egész gyökei

8. Igazoljuk, hogy ha a k egész szám gyöke a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

egész együtthatós polinomnak (tehát $k,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$), akkor k osztója a_0-nak!

9. Határozzuk meg az alábbi polinomok egész gyökeit:

(a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 4$;

(b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 6$;

(c) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

(d) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

(e) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.

Megjegyzés: Igazolható, hogy ha a polinom főegyütthatója $a_n = 1$ vagy $a_n = -1$, akkor a polinom valós gyökei vagy egész számok, vagy pedig irracionális számok.

Egyenlőtlenségek igazolása

10. Mutassuk meg, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenség!

11. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \in [0, +\infty))$;

(b) $\left| a + \dfrac{1}{a} \right| \geq 2 \quad (a \neq 0)$.

Mikor van egyenlőség az előbbi egyenlőtlenségekben?

12. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$$

egyenlőtlenség! Mikor van itt egyenlőség?

13. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, x, $y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|ax + by| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ *(Cauchy-egyenlőtlenség)*;

(b)
$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2},$$

és itt egyenlőség pontosan akkor van, ha létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy

$$(x = \lambda a \text{ és } y = \lambda b) \quad \text{vagy} \quad (a = \lambda x \text{ és } b = \lambda y)\ .$$

Mi a geometriai jelentése ennek az egyenlőtlenségnek?

14. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\log_2(\pi)}+\frac{1}{\log_\pi(2)}>2.$$

15. Lássuk be, hogy minden $1\le n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül a

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenségpár!

16. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sqrt{ab}\ge\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\quad(a,b\in(0,+\infty))$;

(b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc\quad(a,b,c\in\mathbb{R})$.

Mikor van egyenlőség az előbbi egyenlőtlenségekben?

17. Igazoljuk, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $\left|\dfrac{1}{a-b}\right|<\dfrac{2}{|a|}\quad(a,b\in\mathbb{R},\ 2|b|<|a|)$;

(b) $\left|\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right|\ge 2\quad(a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$;

(c) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2\quad(x\in\mathbb{R})$;

(d) $\dfrac{x^2}{1+x^4}\le\dfrac{1}{2}\quad(x\in\mathbb{R})$;

(e) $a^2+b^2-ab-a-b+1\ge 0\quad(a,b\in\mathbb{R})$;

(f) $2<\left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2\quad(a,b\in(0,+\infty),\ a^2<2b^2)$.

18. Bizonyítsuk be, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $0 < a + b - ab < 1 \quad (a, b \in (0, 1));$

(b) $a^2 + b^2 \geq 2|ab| \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(c) $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $ab - 5a^2 - 3b^2 \leq 0 \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(e) $|a + b| < |1 + ab| \quad (a, b \in \mathbb{R},\ |a|, |b| < 1);$

(f) $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b| \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(g) $|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a| \quad (a, b, c \in \mathbb{R});$

(h) $\left(\dfrac{a + 2b}{a + b}\right)^2 - 2 < 2 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \quad (a, b \in (0, +\infty),\ a^2 < 2b^2)\ .$

19. Mutassuk meg, hogy

$$\log_a(a^2 + 1) + \log_{a^2+1}(a^2) > 3 \quad (a \in (1, +\infty))\ .$$

8. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (10. hét)

8.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni:
SZ-TK 248-256. oldal, 204-211. oldal;
H-TK 206-211. oldal.

1. Szög, szögmérés (fok, ívmérték).
2. Szögfüggvények értelmezése (hegyesszög, tetszőleges szög).
3. Nevezetes szögek szögfüggvényei.
4. Alapvető trigonometrikus azonosságok (a többi ezekből levezethető):
   (a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
   (b) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
   (c) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$;
   (d) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;
   (e) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
   (f) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad$ (*linearizáló formulák*).
5. A sin, cos, tg , ctg függvények grafikonja, jellemző tulajdonságaik.

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

Egyenletek

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\sin x = -\frac{1}{2}; \qquad \sin(x+\frac{\pi}{7}) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos(3x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \qquad \operatorname{tg}(2x-\frac{2\pi}{3}) = -1; \qquad \operatorname{ctg}^2(2x-\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{3}.$$

2. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

(a) $\sin 4x = \sin x$;
(b) $\cos 10x = \cos 2x$;
(c) $\cos 4x = \sin 3x$;
(d) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;
(e) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$;
(f) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{3}{2}$;
(g) $\dfrac{4}{\cos^2 x} - 5\operatorname{tg}^2 x = 1$;
(h) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$;
(i) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$?

Egyenlőtlenségek

3. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\sin x < -\frac{1}{2}; \qquad \sin x > -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \leq -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \geq -\frac{1}{2}.$$

4. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \ ?$$

5. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$;
(b) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;
(c) $\dfrac{2\sin x + 1}{2\cos x} \leq 0$.

8.2.2. További feladatok

Azonosságok

1. Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol az alábbi egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}$;
(b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

(c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$

(d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x;$

(e) $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $0 < z < \dfrac{\pi}{2}$ valós szám, hogy

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5} \cdot \sin(z + x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

Egyenletek

3. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0;$

(b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x};$

(c) $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x;$

(d) $\sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x - 3\cos^2 x = 0;$

(e) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}};$

(f) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2$.

4. Az $y \in \mathbb{R}$ paramétertől függően oldjuk meg az $y + \dfrac{1}{y} = 2\sin x$ egyenletet a valós számok halmazán!

Teljes indukciós feladat

5. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:
$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \cdot x) = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}$.

Egyenlőtlenségek

6. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

$$\cos x < \cos^4 x .$$

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|\sin x - \cos x| \le \sqrt{2};$

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \dfrac{1}{2};$

(c) $\dfrac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1$.

9. Függvények, sorozatok, számhalmazok (11 – 12. hét)

9.1. Kiegészítés az elmélethez

Függvényekhez ajánlott átnézni:
SZ-TK 218-229. oldal;
H-TK 153-165. oldal.

Az f függvény *értelmezési tartományát* D_f-fel, az *értékkészletét* R_f-fel jelöljük. Ha A és B olyan halmazok, hogy $D_f \subset A$ és $R_f \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy f egy $A \to B$ *típusú függvény*. Azt, hogy f egy $A \to B$ típusú függvény, így is kifejezésre juttathatjuk:

$$f \in A \to B.$$

Tantárgyunk keretében $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel fogunk foglalkozni.

Fontosabb $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénytípusok: polinomok (különös tekintettel az első- és másodfokú polinomokra), reciprok, lineáris tört, négyzetgyök, abszolút érték, exponenciális, logaritmus. A trigonometrikus függvényeket a „Trigonometria” c. fejezetben tárgyaljuk.

Alapvető függvénytranszformációk

Legyen $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c, u, v \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk, hogyan kapható meg φ derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonjából az f függvény grafikonja, ha

1. $f(x) = \varphi(x) + v$: eltolás v-vel az y-tengellyel párhuzamosan;
2. $f(x) = -\varphi(x)$: tükrözés az x-tengelyre;
3. $f(x) = c{\cdot}\varphi(x)$: c-szeres nyújtás/zsugorítás az y-tengellyel párhuzamosan (másképp: c arányú, x-tengelyű merőleges affinitás);
4. $f(x) = \varphi(x + u)$: eltolás $-u$-val az x-tengellyel párhuzamosan;
5. $f(x) = \varphi(-x)$: tükrözés az y-tengelyre;
6. $f(x) = \varphi(c{\cdot}x)$: $\frac{1}{c}$-szeres nyújtás/zsugorítás az x-tengellyel párhuzamosan (másképp: $\frac{1}{c}$ arányú, y-tengelyű merőleges affinitás);

Sorozatokhoz ajánlott átnézni:
SZ-TK 36-64. oldal;
H-TK 5-38. oldal és 166-170. oldal.

Sorozatok alapfogalmai, elnevezések

1. Ha $A \neq \emptyset$ halmaz, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ egy *A-beli sorozat*;
2. $a_n := a(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ a sorozat *n-edik tag*ja;
3. a helyett ilyenkor szokásos az (a_n) szimbólum használata is;
4. az (a_n) sorozat *számsorozat*, ha az előbbi A a valós számok részhalmaza;
5. számsorozatok esetén értelmezhetjük a *korlátos*, ill. a *monoton* sorozatokat.

   (SZ-TK 45. oldal, H-TK 17-19. oldal. Figyelem: a két tankönyvben eltérőek a monotonitás definíciói.)

Megjegyezzük, hogy néha $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}^+$ szerepel, ami azt jelenti, hogy a sorozat tagjainak kezdőindexe nem 0, hanem 1.

Sorozatok megadása

1. *Explicit* megadás, pl. $a_n := 3n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$;
2. *rekurzív* megadás, pl.

   - $a_0 := 1,\ a_{n+1} := a_n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$.
     Ez egy ún. *egylépéses rekurzió*. Az egylépéses rekurzió általánosan úgy adható meg, hogy megadunk egy f függvényt és egy $a_0 \in D_f$ kezdőértéket. A sorozat tagjait pedig így számítjuk ki:

     $$a_{n+1} = f(a_n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

     feltéve, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \in D_f$.

   - $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_{n+2} := a_n + a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ez az ún. *Fibonacci-sorozat*.

Gyakorlásképpen kiszámíthatjuk e sorozatok első öt-öt tagját.
Megjegyezzük még, hogy a SZ-TK 45-46. oldalán szép ábrákat láthatunk az egylépéses rekurziók grafikus szemléltetésére.

Számhalmazok

Ebben a fejezetben a számhalmazokat korlátosság szempontjából vizsgáljuk. A felhasznált definíciók:
Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a H (szám)halmaz

1. *felülről korlátos*, ha $\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, h \in H: \quad h \le K$.
   A K számot a H halmaz egy *felső korlátjának* nevezzük.
2. *felülről nem korlátos*, ha $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, h \in H: \quad h > K$.
   (Ekkor természetesen H-nak nincs felső korlátja.)
3. *alulról korlátos*, ha $\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, h \in H: \quad h \ge K$.
   A K számot a H halmaz egy *alsó korlátjának* nevezzük.
4. *alulról nem korlátos*, ha $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, h \in H: \quad h < K$.
   (Ekkor természetesen H-nak nincs alsó korlátja.)
5. *korlátos*, ha alulról is és felülről is korlátos.
6. *nem korlátos*, ha alulról nem korlátos vagy felülről nem korlátos.

Összevetve e definíciókat a sorozat és a függvény korlátosságának középiskolában tanult definícióival megállapíthatjuk, hogy

- a függvény korlátosságával kapcsolatos definíciók egyenértékűek a függvény értékkészletére mint számhalmazra vonatkozó megfelelő definícióval;
- a sorozat korlátosságával kapcsolatos definíciók egyenértékűek a sorozat tagjainak halmazára (a sorozat mint függvény értékkészletére) vonatkozó megfelelő definícióval.

9.2. Feladatok

9.2.1. Órai feladatok

Függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, grafikonja

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \sqrt{\dfrac{2x^3-1}{x}} \quad (x \in D)$;

(b) $f(x) := \sqrt{\lg\left(x^2-5x+7\right)} \quad (x \in D)$;

(c) $f(x) := \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\lg(\sin x)} \quad (x \in D)$?

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (-1 \le x \le 6)$.

3. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := 2(x+3)^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := -x^2 + 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := |x^2 - 5x + 6| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{x+3}{x+5} \quad (-5 \ne x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := \dfrac{2x-1}{3x+2} \quad (-\dfrac{2}{3} \ne x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} + 2 \quad \left(\dfrac{1}{5} \le x \in \mathbb{R}\right)$;

(g) $f(x) := \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(h) $f(x) := \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Szélsőérték

4. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

(a) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad \left(\dfrac{1}{2} \le x \le 3\right)$.

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $P(x) := x^2 + ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$. Milyen a, b esetén lesz igaz, hogy $P(3) = \min\{P(x) : x \in \mathbb{R}\} = -2$?

6. 24 m hosszú kerítéssel téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldalát a ház fala alkotja (tehát azon a szakaszon nincs szükség kerítésre). Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha maximális területű részt akarunk elkeríteni?

7. Egy derékszögű háromszög befogói 10 cm és 15 cm. A háromszögbe téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalap egyik szöge a háromszög derékszögével esik egybe, a téglalap egyik csúcsa pedig az átfogón van. Határozzuk meg e téglalapok közül a legnagyobb területűt (adjuk meg az oldalait)!

Sorozat korlátossága, monotonitása

8. Korlátosság, ill. monotonitás szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorozatot:

$$x_n := \frac{8n+3}{5n+4} \qquad (n \in \mathbb{N}) \, .$$

Rekurzív sorozat korlátossága, monotonitása

9. Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy az

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} := \sqrt{x_n + 2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton növekedő és korlátos: $0 \leq x_n \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Szemléltessük a sorozat tagjainak képzését az

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad (x \geq -2) \qquad \text{és a} \qquad g(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények ábrázolásával!

10. Mutassuk meg, hogy az

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} := \frac{x_n^3 + 1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív megadású sorozat monoton növekedő és korlátos!

(Pl. az 1 egy felső korlát, de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}(< 1)$ is az.)

Szemléltessük a sorozat tagjainak képzését az

$$f(x) = \frac{x^3+1}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és a} \qquad g(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények ábrázolásával!

Domináns tagok

11. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f(\dfrac{1}{n})$ alakban:

(a) $\dfrac{5n^3 - 3n^2 + 2n + 7}{8n^3 + 7n - 3}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n+1} + 3 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2 + 2}}{\sqrt[3]{n^2} - 1}$;

12. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f(\dfrac{1}{n})$ alakban:

(a) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$;

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n - 1}}$;

(c) $\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt[3]{n^2 + n + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1})$;

Hányados- és gyök-sorozat

13. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados-sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \dfrac{3^n \cdot n^2}{(n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n = \dfrac{n^n \cdot (-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(e) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{(1+\sqrt{1}) \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot (1+\sqrt{n})} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

14. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök-sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n^2+1)^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{1-n}+2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Számhalmazok

15. Vizsgáljuk meg az alábbi halmazokat korlátosság szempontjából (alulról korlátosság, alsó korlát, felülről korlátosság, felső korlát, korlátosság). Mindegyik feladat esetén fogalmazzuk meg a kérdéseket és a kapott eredményeket a „függvények nyelvén” is, és ahol lehet, a „sorozatok nyelvén” is.

Útmutatás: Alakítsuk át a megadott halmazok elemeit úgy, hogy a számlálóból kiküszöböljük a változót.

(a) $H = \left\{ \dfrac{10n+7}{15n+12} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \right\}$;

(b) $H = \left\{ \dfrac{3x^2+7}{9x^2+3} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq -1 \right\}$;

(c) $H = \left\{ \dfrac{3x^2+7}{9x^2+3} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq 1 \right\}$;

(d) $H = \left\{ \dfrac{3(x-1)^2+7}{9(x-1)^2+3} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \leq 2 \right\}$;

(e) $H = \left\{ \dfrac{|x|-1}{5|x|-2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq 1 \right\}$;

(f) $H = \left\{ \dfrac{1-3\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq 1 \right\}$;

(g) $H = \left\{ \dfrac{2^{n+1}+2}{3\cdot 2^n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

(h) $H = \left\{ \dfrac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \leq 0 \right\}$.

9.2.2. További feladatok

Függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, grafikonja

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \dfrac{|x|+10}{|x|-10} \quad (x \in D)$;

(b) $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+2x}}{\lg(x^2+1)} \quad (x \in D)$;

(c) $f(x) := \lg(x^2-x-6) + \lg(4-x^2) \quad (x \in D)$;

(d) $f(x) := \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \quad (x \in D)$

(e) $f(x) := \sqrt{\sin\dfrac{2x}{3}} \quad (x \in D)$?

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := x^2+4x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^2+4x+1 \quad (-3 \le x \le 1)$;

(c) $f(x) := \sqrt{4x^2-1} \quad \left(\dfrac{1}{2} \le x < 1\right)$;

(d) $f(x) := \lg(2x+1) \quad \left(-\dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{9}{2}\right)$.

3. Milyen $k \in \mathbb{R}$ esetén lesz az

$$f(x) := \sqrt{x^2+4x+k} \qquad (|x| \le 3)$$

függvény értékkészlete a $[0,5]$ zárt intervallum?

4. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := |2x-1| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2 + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (0 \ne x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{3x-13}{x-5} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 5);$

(e) $f(x) := \dfrac{3}{4x+5} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq -\frac{5}{4});$

(f) $f(x) := 3^{2-x} \quad (x \in \mathbb{R});$

(g) $f(x) := \dfrac{4^x-4}{2^x+2} \quad (x \in \mathbb{R});$

(h) $f(x) := \log_{\frac{1}{3}}(|x-2|) \quad (2 < x \in \mathbb{R});$

(i) $f(x) := \dfrac{2x+1}{3x-4} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{4}{3});$

(j) $f(x) := \log_2(8x^4) - 4\log_2(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R});$

(k) $f(x) := 3 \cdot 2^{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

(l) $f(x) := \sin x \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R});$

(m) $f(x) := \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x \quad (x \in \mathbb{R});$

(n) $f(x) := \cos x - \sin x \quad (x \in \mathbb{R});$

(o) $f(x) := \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \quad \left(x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right);$

(p) $f(x) := \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Szélsőérték

5. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

(a) $f(x) := -x^2 + 2x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := -x^2 + 2x - 3 \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right)$.

6. Adjuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy a

$$P(x) := -x^2 + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

másodfokú polinomra

$$P(-1) = \max\{P(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 3$$

legyen!

7. Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyek befogóinak összege 12 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

Sorozat korlátossága, monotonitása

8. Korlátosság, ill. monotonitás szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat:

(a) $x_n := \dfrac{n-1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})\,;$

(b) $x_n := \dfrac{1-7n^2}{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$

Rekurzív sorozat korlátossága, monotonitása

9. Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy adott $0 \le p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett az

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} := x_n^2 + p \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton növekedő és

- korlátos, ha $p \le \dfrac{1}{4}$, nevezetesen ekkor: $x_n \le \dfrac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$;
- nem korlátos, ha $p > \dfrac{1}{4}$, nevezetesen ekkor: $x_n \ge n\left(p - \dfrac{1}{4}\right) \quad (n \in \mathbb{N})\,.$

10. Valamely $x_0 \in [0,1]$ mellett tekintsük azt az (x_n) sorozatot, amelyre

$$x_{n+1} := \frac{4x_n^2 + 3}{8} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Igazoljuk, hogy

- ha $x_0 = \dfrac{1}{2}$, akkor $x_n = \dfrac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$;
- $x_0 > \dfrac{1}{2}$ esetén (x_n) monoton fogyó és $x_n > \dfrac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$;
- ha viszont $x_0 < \dfrac{1}{2}$, akkor (x_n) monoton növekedő és $x_n < \dfrac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$!

Domináns tagok

11. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f(\frac{1}{n})$ alakban:

(a) $\dfrac{3n^4+5n^3-7n+4}{5n^4-10n^2+2}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{2n^2+5n}}{\sqrt{n^2+6}+3n+1}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}+\sqrt[3]{n^2+6}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^2-1}}$;

12. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f(\frac{1}{n})$ alakban:

(a) $\sqrt{n^4+n^2+5}-\sqrt{n^4-2n^2-7}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n^2+2}-\sqrt{n^3-n^2+3}}$;

(c) $\sqrt[3]{n^3+n^2+3}-n$;

Hányados- és gyök-sorozat

13. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados-sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{5^{n+2}}{(n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \dfrac{(n+2)!}{4^n \cdot (n^2+3)} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n = \dfrac{(-n-2)^n}{(2n+2)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

14. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök-sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{3^{2n-1}}{(n^3+1)^{5n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{2-n}+3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{3n^2-n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Számhalmazok

15. Vizsgáljuk meg az alábbi halmazokat korlátosság szempontjából (alulról korlátosság, alsó korlát, felülről korlátosság, felső korlát, korlátosság). Mindegyik feladat esetén fogalmazzuk meg a kérdéseket és a kapott eredményeket a „függvények nyelvén” is, és ahol lehet, a „sorozatok nyelvén” is.

Útmutatás: Alakítsuk át a megadott halmazok elemeit úgy, hogy a számlálóból kiküszöböljük a változót.

(a) $H = \left\{ \dfrac{4n-3}{7n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$;

(b) $H = \left\{ \dfrac{6x^2+1}{9x^2+2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq -2 \right\}$;

(c) $H = \left\{ \dfrac{6x^2+1}{9x^2+2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq 2 \right\}$;

(d) $H = \left\{ \dfrac{6(x+1)^2+1}{9(x+1)^2+2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \leq 1 \right\}$;

(e) $H = \left\{ \dfrac{2|x|+1}{7|x|+6} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq -1 \right\}$;

(f) $H = \left\{ \dfrac{5-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\, x \geq 4 \right\}$;

(g) $H = \left\{ \dfrac{3^{n-1}+5}{4 \cdot 3^n+6} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

10. Összegzés, ponthalmazok (13. hét)

10.1. Kiegészítés az elmélethez

Alapvató ponthalmazok a koordinátarendszerben: egyenes, kör, parabola, az ezek által határolt síkrészek.

A ponthalmazokhoz ajánlott átnézni:
SZ-TK 270-276. oldal;
H-TK 212-216. oldal.

10.2. Feladatok

10.2.1. Órai feladatok

Összegzések

1. Határozzuk meg az alábbi összegeket (ahol $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges):

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k(2k+1)}{k(k+1)}$.

Ponthalmazok a koordinátasíkon

2. Ábrázoljuk a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az alábbi feltételeknek megfelelő $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ számpárok halmazát:

a) $x + |x| = y + |y|$; b) $x^2 - y^2 = x - y$; c) $|x| + |y| = 4$;

d) $|x| + |y| < 4$; e) $(x-3)(y+5) \le 0$; f) $x^2 + y^2 \le 16$ és $y \ge -x^2 + 3$.

3. Ábrázoljuk a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az alábbi kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszernek eleget tévő $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ számpárok halmazát:

i) $\begin{matrix} (x-1)^2 + y^2 \le 4 \\ y + 2(x+1)^2 - 2 \le 0 \end{matrix}$; ii) $\begin{matrix} (x+1)^2 + y^2 \le 4 \\ (x-1)^2 + y - 1 \le 0 \end{matrix}$.

4. Legyen

$$A := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 1\}, \qquad B := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2\}.$$

Szemléltessük derékszögű koordinátarendszerben az A, B, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$, $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cap B)$ halmazokat!

5. Döntsük el, hogy a következő egyenletek kör egyenletei-e! Ha igen, akkor írjuk fel az adott körrel koncentrikus, de kétszer akkora sugarú kör egyenletét:

a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $2x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;

c) $3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$; d) $x^2 - y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.

6. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely átmegy a megadott A, B, C ponton és a tengelye párhuzamos az y-tengellyel:

$$A(1;\, 18), \quad B(2;\, 20), \quad C(3;\, 22).$$

7. Adott az $x^2 + y^2 = 5$ egyenletű kör és a $2x + y = c$ egyenletű egyenes ($c \in \mathbb{R}$).

(a) A c paraméter mely értékei mellett lesz a körnek és az egyenesnek 2, 1, 0 közös pontja?

(b) Mit jelent c növelése a $2x + y$ kifejezés értékeire nézve ($x, y \in \mathbb{R}$)?

(c) Határozzuk meg a megadott körnek azt az $(x,\, y)$ pontját, ahol a $2x+y$ kifejezés értéke maximális, ill. ahol minimális!

8. Adott az $y = x^2 - 4x + 1$ egyenletű parabola és a $2x - y = c$ egyenletű egyenes ($c \in \mathbb{R}$).

(a) A c paraméter mely értékei mellett lesz a parabolának és az egyenesnek 2, 1, 0 közös pontja?

(b) Mit jelent c növelése a $2x - y$ kifejezés értékeire nézve ($x, y \in \mathbb{R}$)?

(c) Határozzuk meg a megadott parabolának azt az $(x,\, y)$ pontját, ahol a $2x - y$ kifejezés értéke maximális, ill. ahol minimális!

10.2.2. További feladatok

$\boxed{\textit{Összegzések}}$

1. Határozzuk meg az alábbi összegeket:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad (n \in \mathbb{N}^+);$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \quad (n \in \mathbb{N});$

(c) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)(k+4)} \quad (n \in \mathbb{N});$

(d) $\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right) \quad (n \in \mathbb{N});$

(e) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)} \quad (n \in \mathbb{N});$

(f) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{9k^2-3k-2} \quad (n \in \mathbb{N});$

(g) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad (n \in \mathbb{N}^+);$

(h) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} \quad (n \in \mathbb{N}^+);$

(i) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} \quad (n \in \mathbb{N}^+);$

(j) $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k \quad (n \in \mathbb{N}^+)\ .$

$\boxed{\textit{Ponthalmazok a koordinátasíkon}}$

2. Ábrázoljuk a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az alábbi feltételeknek megfelelő $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ számpárok halmazát:

a) $y > |2x-4|$ és $y < -x^2+4x+1;$ b) $x^2 \geq 9$ és $y^2 \geq 4;$

c) $xy(y+1)^2 \geq 0;$ d) $|x| - 2 \leq y$ és $y^2 \leq 2|x| - x^2.$

3. Legyen

$$A := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}, \qquad B := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 1\},$$

$$C := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}.$$

(a) Ábrázoljuk síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az

$$A,\ B,\ C,\ A\cap B,\ A\cap C,\ B\cap C,\ A\setminus C,\ C\setminus A,\ B\setminus A,\ \mathbb{R}^2\setminus A,\ \mathbb{R}^2\setminus B,\ \mathbb{R}^2\setminus C$$

halmazokat!

(b) Ellenőrizzük az

$$\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B) = \big(\mathbb{R}^2 \setminus A\big) \cap \big(\mathbb{R}^2 \setminus B\big)$$

és az

$$\mathbb{R}^2 \setminus (A \cap B) = \big(\mathbb{R}^2 \setminus A\big) \cup \big(\mathbb{R}^2 \setminus B\big)$$

egyenlőségeket!

4. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely átmegy a megadott A, B, C ponton és a tengelye párhuzamos az y-tengellyel:

(a) $A(1;\,6),\quad B(2;\,5),\quad C(3;\,0);$

(b) $A(1;\,1),\quad B(\frac{9}{4};\,\frac{3}{2}),\quad C(4;\,2)\ .$

5. Adott az $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ egyenletű kör és a $2x - 3y = c$ egyenletű egyenes ($c \in \mathbb{R}$).

(a) A c paraméter mely értékei mellett lesz a körnek és az egyenesnek 2, 1, 0 közös pontja?

(b) Mit jelent c növelése a $2x - 3y$ kifejezés értékeire nézve ($x, y \in \mathbb{R}$)?

(c) Határozzuk meg a megadott körnek azt az $(x,\, y)$ pontját, ahol a $2x - 3y$ kifejezés értéke maximális, ill. ahol minimális!

11. Függelék: néhány módszer és példa

11.1. Nagyságrend-őrző (NR) becslések

$\boxed{\textit{NRF-becslés}}$

Egy pozitív főegyütthatós, n-edfokú P polinom nagyságrend-őrző felső (NRF) becslésén az alábbi feladatot értjük:

Határozzuk meg az $M > 0$ számot úgy, hogy minden, elég nagy $x > 0$ szám esetén igaz legyen, hogy:

$$P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Az „elég nagy $x > 0$ szám esetén” azt jelenti, hogy meg kell adni olyan $R > 0$ számot, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $x \geq R$ esetén teljesüljön.

Az M és R számok megkeresése egyszerű. Tegyük fel, hogy $x \geq 1$, és alkalmazzuk az alábbi két lépést:

1. lépés: A negatív együtthatójú tagokat – ha vannak – elhagyjuk (azaz: 0-val helyettesítjük). Ekkor ($x \geq 1 > 0$ miatt) $P(x)$ növekszik. Természetesen, ha nincs negatív együtthatójú tag, akkor az 1. lépés elmarad.

Ezek után feltehető, hogy a polinom minden együtthatója pozitív.

2. lépés: A polinom minden, az n-nél alacsonyabb fokú tagjának kitevőjét n-re növeljük. Ezzel (mivel $x \geq 1$) $P(x)$ tovább nő.

A második lépés után a tagok már összevonhatók egyetlen $M \cdot x^n$ alakú kifejezéssé. Így tehát M megvan, R pedig választható 1-nek.

Szemléltessük mindezt az alábbi példán:

Feladat: Adjunk NRF-becslést az alábbi polinomra:

$$P(x) = x^4 + 30x^3 - 10x^2 + 43x - 8.$$

Megoldás: Tegyük fel, hogy $x \geq 1$. Mivel van két negatív együtthatós tag ($-10x^2$ és -8), ezeket elhagyjuk (1. lépés), így a polinomot növeljük:

$$P(x) = x^4 + 30x^3 - 10x^2 + 43x - 8 < x^4 + 30x^3 + 43x\,.$$

Kaptunk egy pozitív együtthatós polinomot. A 2. lépés következik, a 4-nél alacsonyabb kitevőket 4-gyel helyettesítjük, ezáltal tovább növelünk:

$$x^4 + 30x^3 + 43x \leq x^4 + 30x^4 + 43x^4 = 74x^4\,.$$

Mindezek alapján $P(x) \leq 74x^4$ ha $x \geq 1$. Tehát $M = 74$, $R = 1$ jó választás.

Megjegyezzük, hogy nem a lehető legkisebb M és R értékekre törekedtünk.

NRA-becslés

Térjünk rá az alsó becslésre. Egy pozitív főegyütthatós, n-edfokú P polinom nagyságrend-őrző alsó (NRA) becslésén az alábbi feladatot értjük:

Határozzuk meg az $m > 0$ számot úgy, hogy minden, elég nagy $x > 0$ szám esetén igaz legyen, hogy:

$$P(x) \geq m \cdot x^n.$$

Az „elég nagy $x > 0$ szám esetén” itt is azt jelenti, hogy meg kell adni olyan $R > 0$ számot, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $x \geq R$ esetén teljesüljön.

Az m és R számok megkeresésére itt is két lépést alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $x \geq 1$. Az 1. lépés a felső becslésnél megismert 1. lépés – értelemszerűen módosított – megfelelője:

1. lépés: A pozitív együtthatójú, n-nél alacsonyabb fokú tagokat – ha vannak – elhagyjuk (azaz: 0-val helyettesítjük). Ekkor ($x \geq 1 > 0$ miatt) $P(x)$ értéke csökken.

Ezek után feltehető, hogy a polinom minden, n-nél alacsonyabb fokú tagjának együtthatója negatív vagy 0, azaz hogy a polinom ilyen alakú:

$$P(x) = a_n \cdot x^n - a_{n-1} \cdot x^{n-1} - \ldots - a_1 \cdot x - a_0,$$

ahol $a_n > 0$ és $a_k \geq 0 \qquad (k = 1, \ldots n-1)$.

Ha $n \geq 2$ és $a_{n-1} = 0$, akkor a_{n-1}-et helyettesítsük egy tetszőleges negatív számmal, pl. -1-gyel. Ezáltal a polinom tovább csökken.

Feltehető tehát, hogy $n \geq 2$ és

$$P(x) = a_n \cdot x^n - a_{n-1} \cdot x^{n-1} - \ldots - a_1 \cdot x - a_0,$$

ahol $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$ és $a_k \geq 0 \qquad (k = 1, \ldots n-2)$.

Most következik a 2. lépés, amely kicsit bonyolultabb, mint a felső becslésnél.

2A. lépés: A polinom negatív együtthatós tagjaiból kiemelünk -1-et, s az így keletkező

$$a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

pozitív főegyütthatós polinomra NRF-becslést adunk, azaz meghatározzuk az $M_1 > 0$ és $R_1 > 0$ számokat úgy, hogy

$$a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 < M_1 \cdot x^{n-1}$$

teljesüljön, ha $x \geq R_1$.

2B. lépés: Ennek felhasználásával P így becsülhető alulról (az $x \geq R_1$ feltétel mellett):

$$P(x) = a_n \cdot x^n - (a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0) \geq a_n \cdot x^n - M_1 \cdot x^{n-1} =$$
$$= \frac{a_n}{2} \cdot x^n + \frac{a_n}{2} \cdot x^n - M_1 \cdot x^{n-1} = \frac{a_n}{2} \cdot x^n + x^{n-1} \cdot (\frac{a_n}{2} \cdot x - M_1).$$

Ha x-et olyan nagyra választjuk, hogy

$$\frac{a_n}{2} \cdot x - M_1 \geq 0 \qquad \text{azaz} \qquad x \geq \frac{2M_1}{a_n}$$

teljesüljön, akkor az utolsó tag elhagyásával a polinomot csökkentjük, vagyis

$$P(x) \geq \frac{a_n}{2} \cdot x^n, \qquad (\text{ha } x \geq R),$$

ahol R jelöli az R_1 és a $\frac{2M_1}{a_n}$ számok közül a nagyobbikat.

Szemléltessük mindezt az alábbi példán:

Feladat: Adjunk NRA-becslést az alábbi polinomra:

$$P(x) = x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12.$$

Megoldás: Tegyük fel először, hogy $x \geq 1$. Mivel – az ötödfokú tag kivételével – vannak pozitív együtthatós tagok ($31x^2$ és 12), ezeket elhagyjuk (1. lépés), így a polinomot csökkentjük:

$$P(x) = x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x\,.$$

A 2A. lépés következik, Kiemelünk -1-et

$$x^5 - (71x^4 + 100x^3 + 25x),$$

majd NRF-becslést adunk a

$$71x^4 + 100x^3 + 25x$$

polinomra:

$$71x^4 + 100x^3 + 25x \leq 71x^4 + 100x^4 + 25x^4 = 196x^4 \qquad (\text{ha } x \geq 1)$$

Mindezeket összevetve, és a 2B. lépést is alkalmazva:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x = \\ &= x^5 - (71x^4 + 100x^3 + 25x) \geq x^5 - 196x^4 = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^5 - 196x^4 = \\ &= \frac{1}{2}x^5 + x^4 \cdot (\frac{1}{2}x - 196). \end{aligned}$$

Válasszuk meg x-et úgy, hogy az $x \geq 1$ feltétel mellett még $\frac{1}{2}x - 196 \geq 0$ is teljesüljön, azaz legyen $x \geq 392$. Az ilyen x-ekre teljesül, hogy

$$P(x) \geq \frac{1}{2}x^5,$$

azaz $m = \frac{1}{2}$, $R = 392$ jó választás.

Megjegyezzük, hogy most sem törekedtünk lehető legkisebb R és a lehető legnagyobb m értékekre. Továbbá, hogy az $a_n x^n$ tagot tetszőleges módon oszthatjuk két részre, tehát nem szükséges a fele-fele arányban való felosztás, mint ahogy az a kidolgozott példában történt.

11.2. Gyöktényező kiemelése

A gyöktényező kiemelésére több módszer is ismeretes. Az alábbiakban az

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosságra épülő módszert mutatjuk be. Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

egy n-edfokú polinom, $\alpha \in \mathbb{R}$ pedig a P egy gyöke, azaz $P(\alpha) = 0$. Az $(x-\alpha)$ gyöktényezőt az alábbi módon emelhetjük ki P-ből:

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén induljunk ki az alábbi egyenlőségekből:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0\,, \\ 0 = P(\alpha) &= a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \alpha + a_0\,. \end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót, és rendezzük át a kapott kifejezést:

$$P(x) = P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) = a_n \cdot (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} \cdot (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1 \cdot (x - \alpha).$$

Jól látható, hogy – az idézett azonosság alkalmazásával – minden tagból ki tudunk emelni $(x-\alpha)$-t.

Mindezt egy példával is szemléltetjük:

Feladat: A $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ polinomnak a 2 gyöke. Emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt.

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(2) = 2(x^4 - 2^4) - 3(x^3 - 2^3) - 7(x^2 - 2^2) + 13(x-2) = \\ &= 2(x-2)(x^3 + x^2 \cdot 2 + x \cdot 2^2 + 2^3) - 3(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) - \\ &- 7(x-2)(x+2) + 13(x-2) = \\ &= (x-2)(2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 - 3x^2 - 6x - 12 - 7x - 14 + 13) = \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 - 5x + 3). \end{aligned}$$