

Modellek és algoritmusok, 2013/2014 ősz

Gyakorló feladatok I.

Többszörös integrálok

1. $\int_0^1 \int_1^2 xy e^x \, dy \, dx$

2. $\int_A xy^3(1+x^2)^{-1} \, dx \, dy$, $A = [0, 1] \times [0, 2]$

3. $\int_A (x+y+z) \, dx \, dy \, dz$, $A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$

4. $\int_0^\pi \int_0^x x \sin y \, dy \, dx$

5. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \, dz \, dy \, dx$

6. $\int_A x/y \, dx \, dy$, A az $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ és $x = 2$ egyenesek által határolt síkrész

7. $\int_A (2x+y) \, dx \, dy$, A a sík $y = \frac{5}{x}$ és $y = 6-x$ görbék által határolt része

8. $\int_A x e^y \, dx \, dy$, A a sík $y = |x|$ és $y = 1$ görbék által határolt része

9. $\int_A y \, dx \, dy \, dz$, A a $z = y^2$ felület és a $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ síkok által határolt térrész

10. Mekkora a térfogata annak a térrésznek, amit felülről a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, alulról az xy síkon az $y = x$, $x = 0$, $y = 2 - x$ egyenesek által közrezárt háromszög határol?

11. $\int_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

12. $\int_{x^2+y^2 \leq 1} 2(1+x^2+y^2)^{-2} dx dy$

13. $\int_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$

14. Mekkora a térfogata annak a térrésznek, amit a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ felületek zárnak közre?

15. Mekkora az $x^2 + y^2 = 2z$ és a $z = 2$ felületek által határolt paraboloid térfogata?

Inverz függvény

1. Legyen $f(x, y) = (x \cos(y/x), x \sin(y/x))$ ($x > 0, y \in \mathbb{R}$). Bizonyítsuk be, hogy f az értelmezési tartomány bármely pontja körül lokálisan invertálható! Mennyi a lokális inverz deriváltja a $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ pontban?

2. Legyen $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$). Bizonyítsuk be, hogy f az értelmezési tartomány bármely pontja körül lokálisan invertálható! Mennyi a lokális inverz deriváltja az $f(2, 3)$ pontban?

Implicit függvény

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg(y/x)$ egyenletből y kifejezhető x implicit függvényeként! Mennyi ennek az implicit függvénynek a deriváltja 1-ben?

2. Tekintsük a

$$3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$$

egyenletrendszer. Mutassuk meg, hogy x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként!

3. Tekintsük a

$$t^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

$$t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$t + x + y + z = 0$$

egyenletrendszer. Mutassuk meg, hogy x, y, z kifejezhető t implicit függvényeként! Mennyi ennek az implicit függvénynek a deriváltja 0-ban?

4. Tekintsük a

$$7x + \cos y + 3z = 6$$

$$x + \ln(1 - y) - 2z = 8$$

egyenletrendszer. Mutassuk meg, hogy y, z kifejezhető x implicit függvényeként 2 körül! (A φ implicit függvény értéke 2-ben $(0, -3)$.) Mennyi $\varphi'(2)$?

Feltételes szélsőérték

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = 3x - y$ függvény abszolút szélsőértékeit a $3x^2 + 2y^2 = 6$ ellipszis mentén!

2. Határozzuk meg az $f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2 + 1)$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ egységgörön!

3. Az $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ gömbfelületnek melyik a legközelebbi és legtávolabbi pontja az $(1, 2, 2)$ ponthoz?

4. Az origó középpű, 1 sugarú gömbbe írt téglatestek közül határozzuk meg a maximális térfogatút!

5. Határozzuk meg az $f(x, y) = e^{x+y}$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x^2 + 4y^2 = 2$ ellipszisen!

Szeeparábilis (és arra vezető) differenciálegyenlet

1. $y' = (1 + y)e^x$

2. $y(x + 1)y' = x(y^2 + 1)$

3. $y' = 1/(2\sqrt{xy})$

4. $y' = xye^{x^2} + 2x\sqrt{y}e^{x^2}$

5. $y' = e^{2x-y}/e^{x+y}$

6. $y' = xe^{x+2y}, \quad y(0) = 0$

7. $2xyy' = 1 - y^2, \quad y(1) = 1/2$

8. $y' = \sin^2(x - y), \quad y(0) = 0$

9. $y' = 2y + x + 1$

Készítette: Chripkó Ágnes