Modellek és algoritmusok C szakirány
1. zárthelyi megoldások
2010 november 5

1. *Igazolja, hogy van olyan* $y \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deriválható függvény, melyre:*

$$x \cdot e^{y(x)} + \ln(x + 2y(x)) = x^3 + y^2(x) \quad (x > 0)$$

Számítsa ki $y'(1)$*-et.*

Megoldás: Legyen $f(x,y) := xe^y + \ln(x+2y) - x^3 - y^2, \quad (x > 0, y > -\frac{x}{2})$. Ekkor $f(1,0) = 0$ és az f parciális deriváltjai:

$$\partial_2 f(x,y) = xe^y + \frac{2}{x+2y} - 2y,$$

$$\partial_1 f(x,y) = e^y + \frac{1}{x+2y} - 3x^2,$$

léteznek és folytonosak a jelzett tartományon, ezért $f \in C^1$. Továbbá $\partial_2 f(1,0) = 3 \neq 0$. Teljesülnek az implicit függvény tétel feltételei, ezért ennek értelmében: $\exists\ \delta, \varepsilon > 0$ és $y : k_\delta(1) \to k_\varepsilon(0),\ \ y \in C^1$ implicit függvény, úgy, hogy:$f(x, y(x)) = 0, \quad (\forall x \in k_\delta(1))$, azaz ez éppen a kívánt egyenlőség. Továbbá $y(1) = 0$ és

$$y'(1) = -(\partial_2 f(1,0))^{-1} \cdot \partial_1 f(1,0) = -3^{-1} \cdot (-1) = \frac{1}{3}.$$

2. *A Lagrange féle multiplikátor módszert használva, határozzuk meg az* f *függvény feltételes szélsőértékeit a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan, ha:*

$$f(x,y) := xy^2, \quad g(x,y) := x^2 + xy - 1 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

Megoldás: A Lagrange függvény most a következő:

$F(x,y) := xy^2 + \lambda(x^2 + xy - 1), \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. A lehetséges szélsőértékeket az alábbi egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = y^2 + 2\lambda x + \lambda y = 0 & (1) \\ \partial_2 F(x,y) = 2xy + \lambda x = 0 & (2) \\ g(x,y) = x^2 + xy - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

A (2) egyenletből $x(2y + \lambda) = 0$. Itt $x = 0$ nem lehet (ld. (3) egyenlet) ezért $\lambda = -2y$. Ezt beírva (1)-be, kapjuk, hogy: $y^2 + 4xy = 0$, vagyis $y = 0$ vagy $y = -4x$. Ez utóbbi megint ellenmondásra vezet a (3) egyenletben, így az alábbi megoldások születnek: $x_1 = 1, y_1 = 0, \lambda_1 = 0$ vagy $x_2 = -1, y_2 = 0, \lambda_2 = 0$.

A lineáris függetlenség feltétel ellenőrzése:

$g'(x,y) = (2x + y, x) \Rightarrow g'(1,0) = (2,1) \neq (0,0)$ illetve $g'(-1,0) = (-2,-1) \neq (0,0)$.

A másodrendű elégséges feltétel vizsgálatához:

$$F''(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2y + \lambda \\ 2y + \lambda & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Ekkor a kvadratikus alakok a megfelelő pontokra:

$$Q(h) =< F''(1,0)h, h >=< \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} h, h >= 2h_2^2 > 0$$

minden $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ vektorra, így azokra is, amelyekre $g'(1,0)h = 0$. Ezért az $(1,0)$ pont feltételes lokális minimumhelye f-nek, melynek értéke: $f(1,0) = 0$.

Hasonlóan a $(-1,0)$ pont esetén:

$$Q(h) =< F''(-1,0)h, h >=< \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} h, h >= -2h_2^2 < 0$$

minden $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ vektorra, így azokra is, amelyekre $g'(-1,0)h = 0$. Ezért a $(-1,0)$ pont feltételes lokális maximumhelye f-nek, értéke $f(-1,0) = 0$.

3. *Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatot:*

$$y'(x) = -2 + \frac{2x^2+1}{x} \cdot (y(x) + 2x + 1), \quad (x \in D_y), \quad y(1) = -4;$$

Megoldás: Végezzük el a következő helyettesítést: $u(x) := y(x) + 2x + 1 \;\; (x > 0) \;\; \Rightarrow$ $u'(x) = y'(x) + 2$. Ekkor az új k.é.p.:

$$u'(x) = \frac{2x^2+1}{x} \cdot u(x), \qquad u(1) = -1.$$

A fenti egyenlet már szeparábilis,ugyanis az ismert jelölésekkel $u'(x) = g(x) \cdot h(u(x))$ alakú, ahol:

$$g(x) := \frac{2x^2+1}{x}, \quad (x \in I := (0, +\infty), \quad \tau = 1 \in I);$$

$$h(t) := t, \;\; (t \in J := (-\infty, 0), \;\; \xi = -1 \in J, \;\; 0 \notin R_h).$$

Átrendezve és integrálva mindkét oldalt, kapjuk, hogy:

$$\int \frac{1}{u} \, du = \int \frac{2x^2+1}{x} \, dx \Rightarrow$$

$\ln|\, u(x) \,| = x^2 + \ln|\, x \,| + C \;\; (u < 0, \;\; x > 0, \;\; C \in \mathbb{R}) \;\; \Rightarrow \ln(-u(x)) = x^2 + \ln x + C$ ahol $u(1) = -1$ feltétel alapján $\ln(1) = 1 + \ln 1 + C$ vagyis $C = -1$. A keresett u függvény:

$$u(x) = -e^{x^2 + \ln x - 1} = -xe^{x^2-1} \quad (x > 0))$$

Visszatérve az eredeti y ismeretlen függvényre, a megoldás tehát:

$$y(x) = u(x) - 2x - 1 = -xe^{x^2-1} - 2x - 1, \quad (x \in (0, +\infty)).$$

Megjegyzés: az egyenlet lineáris differenciálegyenletnek is felfogható, és így is kezelhető.

4. *Adja meg az alábbi k.é.p. valós megoldását:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x), & y_1(0) = 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) + e^x, & y_2(0) = -1. \end{cases}$$

Megoldás: Az együtthatómátrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek sajátértékeit szolgáltató karaktarisztikus egyenlet és megoldásai:

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm i, \;\; \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i.$$

Egy λ_1-hez tartozó sajátvektor az $As_1 = \lambda_1 s_1$ egyenlőségből pl. : $s_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Egy valós alaprendszer elemei: $\mathrm{Re}(s_1 e^{\lambda_1 x}), \mathrm{Im}(s_1 e^{\lambda_1 x})$, ahol

$$s_1 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot e^{(1+i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot e^x(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} e^x \sin x \\ -e^x \cos x \end{pmatrix}.$$

Ebből leolvasva a valós alapmátrixot:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \sin x & -e^x \cos x \end{pmatrix}.$$

A homogén megoldások: $y_h(x) = \phi(x) \cdot c$ alakúak, ahol $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Az állandók variálásával keressünk egy partikuláris megoldást $y_p(x) = \phi(x) \cdot g(x)$ alakban, ahol

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix},$$

deriválható függvény, mely eleget kell hogy tegyen a $\phi(x) \cdot g'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$ egyenlőségnek.

Ez utóbbi alapján:

$$g'(x) = \phi^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \sin x & -e^x \cos x \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} -e^x \cos x & -e^x \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} = -\frac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} -e^{2x} \sin x \\ e^{2x} \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$

Innen integrálással megkapjuk a g-t, majd ezt beírva adódik a keresett partikuláris megoldás:

$$g(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \Rightarrow y_p(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \sin x & -e^x \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a teljes megoldás:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x - e^x \\ c_1 e^x \sin x - c_2 e^x \cos x \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in I := \mathbb{R})$$

A kezdeti feltételek alapján, a fenti alakba $x = 0$-át helyettesítve, kapjuk, hogy:

$$y(0) = \begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 2, \;\; c_2 = 1.$$

Tehát a k.é.p. valós megoldásai:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x \cos x + e^x \sin x - e^x \\ 2e^x \sin x - e^x \cos x \end{pmatrix}, \quad (x \in I := \mathbb{R}).$$

5. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását:*

$$y''(x) - y'(x) = e^{ax}, \qquad (x \in D_y).$$

Megoldás: A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - \lambda = 0$ ennek megoldásai $\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = 1$, a homogén megoldások: $y_h(x) = \alpha + \beta e^x \;\; (\alpha, \beta, x \in \mathbb{R})$.

A jobboldal kvázipolinom, ezért a próbafüggvény módszerrel keresünk egy partikuláris megoldást. Mivel az alaprendszer $1, e^x$ ezért 3 esetet nézünk, annak megfelelően, hogy az e^{ax} inhomogén részben $a = 0, \;\; a = 1, \;\;$ vagy $\;a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

1. eset: Ha $a = 0 \Rightarrow y_p(x) = A \cdot x$ alakú megoldást keresünk, alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal, ami pontosan akkor felel meg, ha: $(Ax)'' - (Ax)' = 1 \Leftrightarrow A = -1$

Ekkor a teljes megoldás: $y(x) = \alpha + \beta e^x - x \quad (\alpha, \beta, x \in \mathbb{R})$.

2. eset: Ha $a = 1 \Rightarrow y_p(x) = A \cdot x \cdot e^x$ alakú megoldást keresünk, alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal, ami pontosan akkor felel meg, ha:

$$(Axe^x)'' - (Axe^x)' = e^x \Leftrightarrow 2Ae^x + Axe^x - (Ae^x + Axe^x) = e^x \Leftrightarrow Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = 1$$

Ekkor a teljes megoldás: $y(x) = \alpha + \beta e^x + xe^x \quad (\alpha, \beta, x \in \mathbb{R})$.

3. eset: Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow y_p(x) = A \cdot e^{ax}$ alakú megoldást keresünk, alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal, ami pontosan akkor felel meg, ha:

$$(Ae^{ax})'' - (Ae^{ax})' = e^{ax} \Leftrightarrow Aa^2e^{ax} - Aae^{ax} = e^{ax} \Leftrightarrow A(a^2 - a) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{a(a-1)}.$$

Ekkor a teljes megoldás: $y(x) = \alpha + \beta e^x + \dfrac{e^{ax}}{a(a-1)} \quad (\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$.