Modellek és algoritmusok (C), 1. zárthelyi minta

1. Integrálja az
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$
függvényt az $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 4$ tartományon!

2. Tekintsük az
$$f(x,y) = \left(\tfrac{e^{x+y}}{x^2},\ y\sin\left(xy+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$
függvényt. Igazolja, hogy f lokálisan invertálható az $(1,0)$ pont körül, és határozza meg a lokális inverz deriváltját az $f(1,0)$ pontban!

3. Igazolja, hogy x_2, x_3 kifejezhető az 1 körüli alkalmas környezetben az x_1 implicit függvényeként az alábbi egyenletrendszerből:
$$e^{x_1+x_2x_3} - x_2^2 = 0$$
$$2x_1x_3 + x_2 - x_3^2 = 0.$$
(A φ implicit függvény értéke 1-ben $(-1,1)$.) Számítsa ki $\varphi'(1)$-et!

4. Lagrange-multiplikátor módszerrel határozza meg az $f(x,y) = 3x+2y$ függvény abszolút szélsőértékeit az $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszisen!

5. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát:
$$y' = xe^{x^2-y} + \frac{2x}{e^y}, \qquad y(1) = 1-\ln 2$$

Ez csak egy minta. Az 1. feladatban bármilyen többszörös integrál lehet, amit vettünk gyakorlaton, tehát kettős/hármas integrál intervallumon, normáltartományon, vagy körön/gömbön. Az 5. feladatban szereplő differenciálegyenlet vagy szeparábilis, vagy szeparábilisre visszavezethető lesz.

Végeredmények:

1. $\iint\limits_T f = \frac{16}{9}$

2. $(f^{-1})'(f(1,0)) = \begin{pmatrix} -1/e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\varphi'(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. $f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}, -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right) = -\sqrt{34}$ (absz. min.), $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right) = \sqrt{34}$ (absz. max.)

5. $y(x) = \ln\left(\frac{e^{x^2}}{2} + x^2 - 1\right) \qquad (x \in K(1))$