2016.06.15.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Kovács Sándor

Modellek és algoritmusok

oktatási segédanyag

Budapest, 2016

2016.06.15.

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban programtervező informatikus hallgatóknak íródik segédletként a **Modellek és algoritmusok** című tárgyhoz.

Budapest, 2016. tavasz

Kovács Sándor

2016.06.15.

Tartalomjegyzék

2016.06.15.

1. fejezet

Előismeretek

1.1. Mátrixok inverze

1.1.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **reguláris**, ha az

$$MX = E_n \qquad \text{és az} \qquad YM = E_n \tag{1.1.1}$$

mátrixegyenlet-pár megoldható. Ha nincsen az (1.1.1) mátrixegyenlet-párnak megoldása, akkor M-et **szinguláris**nak mondjuk.

Az (1.1.1)-beli mátrixegyenletek megoldásának egyértelműségére vonatkozik az

1.1.1. tétel. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix az (1.1.1)-beli mátrixegyenletek megoldása, pontosabban

$$MA = E_n \qquad \text{és} \qquad BM = E_n,$$

akkor $A = B$.

Biz. A mátrix-szorzás asszociativitását felhasználva kapjuk, hogy

$$A = E_nA = (BM)A = B(MA) = BE_n = B. \quad \blacksquare$$

Ez azt jelenti, hogy ha a (1.1.1)-beli mátrixegyenlet-párnak van megoldása, akkor az egyértelmű. Erre vonatkozik az

1.1.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **invertálható**, ha reguláris, azaz pontosan egy olyan – M^{-1}-gyel jelölt – mátrix létezik, amelyre

$$MM^{-1} = E_n = M^{-1}M.$$

Az M^{-1} mátrixot M **inverz mátrix**ának (röv. **inverz**ének) nevezzük.

1.1.1. feladat. Tegyük fel, hogy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **nilpotens mátrix**, azaz valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén $M^k = O \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $E_n - M$ invertálható és az inverzére

$$(E_n - M)^{-1} = E_n + M + \ldots + M^{k-1}$$

teljesül!

Útm.

$$\begin{aligned}(E_n - M)(E_n + M + \ldots + M^{k-1}) &= E_n + M + \ldots + M^{k-1} - M - M^2 - \ldots - M^{k-1} - M^k = \\ &= E_n - M^k = E_n - O = E_n. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.1.2. feladat. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Igazoljuk, hogy ha M reguláris, akkor inverzének determinánsára

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

teljesül!

Útm.

$$1 = \det(E_n) = \det(M \cdot M^{-1}) = \det(M) \cdot \det(M^{-1}). \quad \blacksquare$$

1.1.3. feladat. Mely $a \in \mathbb{R}$ estén reguláris az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & a \end{bmatrix}$$

mátrix?

Útm. $a \in \mathbb{R}\backslash\{7\}$. $\blacksquare$

1.1.1. példa.

1. Világos, hogy az E_n egységmátrix invertálható, és $E_n^{-1} = E_n$.
2. Bármely $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $ad - bc \neq 0$ esetén az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix invertálható, és

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}},$$

hiszen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az iménti (2×2)-es mátrix inverzére vonatkozó formula tetszőleges méretű (négyzetes) mátrixra általánosítható. Igaz ugyanis az

1.1.1. tétel. Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor reguláris, ha determinánsára

$$\det(M) \neq 0$$

teljesül, és ebben az esetben M^{-1} inverzére

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} M^{\sharp}, \qquad \text{ahol} \qquad M^{\sharp} := \left[(-1)^{i+j}\det(M_{ij})\right]^T.$$

Az iménti tételben bevezetett $M^{\sharp}$ mátrixot szokás az M mátrix **asszociált**jának, ill. andjungáltjának nevezni. Ez utóbbi elnevezés azonban kerülendő, mert M transzponáltjának konjugáltját is így hívják.

1.1.1. következmény. Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (alsó vagy felső) háromszögmátrix, úgy

$$M \text{ reguláris} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \prod_{k=1}^{n} m_{kk} \neq 0.$$

Biz. Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (alsó vagy felső) háromszögmátrix, akkor $\det(M) = \prod_{k=1}^{n} m_{kk}$. ■

1.1.2. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$\det(M) = -1,$$

ill.

$$M^{\sharp} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{így} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.4. feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét (amennyiben invertálhatók)!

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Útm.

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

1.1.5. feladat. Tekintsük a

$$B(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\,(\alpha) & \mathrm{sh}\,(\alpha) \\ 0 & \mathrm{sh}\,(\alpha) & \mathrm{ch}\,(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

mátrixot!

1. Számítsuk ki $B(\alpha)$ determinánsát!
2. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén határozzuk meg a $B(\alpha)B(\beta)$ szorzatot!
3. Milyen kapcsolat van $B(\alpha)$ és $B(-\alpha)$ között?

Útm.

1. $\det(B(\alpha)) = 1$.
2. $B(\alpha)B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
3. $B(\alpha)^{-1} = B(-\alpha)$. $\blacksquare$

Valamely M reguláris mátrix inverzének kiszámítására a gyakorlatban – nagy műveletigénye miatt – nem az 1.1.1. tételbeli képletet használjuk. M inverzét úgy is kiszámíthatjuk, hogy elemi sorátalakításokkal M-et az E_n egységmátrixszá transzformáljuk (ha ez nem lehetséges, akkor M szinguláris), és ezekkel párhuzamosan az egységmátrixon elvégezzük ugyanazokat a sorátalakításokat, amely így az M mátrix inverzébe fog transzformálódni. Mivel minden elemi sorátalakítás megfelel egy elemi mátrixszal balról való szorzásnak, ezért ha az alkalmazott átalakításokat rendre a T_1, T_2, ..., T_k mátrixokkal való szorzás jelöli, akkor a

$$T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M = E_n$$

szorzatból kiindulva

$$M^{-1} = E_n T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 = T_k \cdot T_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot E_n,$$

vagyis M^{-1} megkapható az E_n-nen végzett elemi sorátalakításokkal.

1.1.3. példa. Az 1.1.2. példabeli M mátrix esetében

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] = [E_3|M^{-1}].$$

1.1.2. tétel. Ha $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguláris mátrix, akkor

1. M^{-1} reguláris és $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$;
2. MN reguláris és $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$;
3. M^T reguláris és $\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$.

Biz.

1. $MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$.
2. A mátrixok szorzásának asszociatív tulajdonságát felhasználva kapjuk, hogy
$$N^{-1}M^{-1}(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}E_nN = N^{-1}N = E_n.$$
3. Az
$$MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$$
egyenlőséget transzponálva
$$(MM^{-1})^T = (M^{-1}M)^T = E_n^T = E_n$$
adódik, ahonnan
$$\left(M^{-1}\right)^T M^T = M^T \left(M^{-1}\right)^T = E_n. \quad \blacksquare$$

Ha tehát alkalmas $k \in \mathbb{N}$ esetén az $M_1, \ldots, M_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok regulárisak, akkor

$$(M_1 \cdot M_2 \ldots \cdot M_{k-1}M_k)^{-1} = M_k^{-1} \cdot M_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot M_2^{-1}M_1^{-1}.$$

1.1.3. tétel. Ha

$$m_{11}\cdot\ldots\cdot m_{nn}\neq 0,$$

akkor az

$$M := \operatorname{diag}\{m_{11},\ldots,\cdot m_{nn}\}$$

mátrix reguláris, és inverzére

$$M^{-1}=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{m_{11}},\ldots,\frac{1}{m_{nn}}\right\}$$

teljesül.

Biz.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{m_{nn}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}=E_n. \quad \blacksquare$$

1.1.3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **ortogonális**, ha $M^TM=E_n$, azaz $M^T=M^{-1}$ teljesül.

1.1.4. tétel. Ha $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, akkor determinánsára

$$|\det(M)|=1$$

teljesül.

Biz. Ha M ortogonális, akkor a determinánsokra vonatkozó szabályok következtében

$$\det(M)\det(M^T)=\det(MM^T)=\det(E_n)=1, \qquad \text{ill.} \qquad \det(M)=\det(M^T),$$

így

$$(\det(M))^2=1. \quad \blacksquare$$

1.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix ortogonális és $\det(M)=1$, akkor alkalmas $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén

$$M=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

teljesül!

Útm. Az $M^TM=E_2$ egyenlőségből, és abból, hogy $\det(M)=1$, az

$$m_{11}^2+m_{21}^2=1, \quad m_{12}^2+m_{22}^2=1, \quad m_{11}m_{12}+m_{21}m_{22}=0, \quad m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=1$$

összefüggések adódnak. Az első két összefüggés alapján alkalmas $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$ esetén

$$m_{11} = \cos(\alpha), \quad m_{21} = \sin(\alpha), \quad m_{12} = \sin(\beta), \quad m_{22} = \cos(\beta).$$

A harmadik és a negyedik összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\sin(\alpha + \beta) = 0 \qquad \text{és} \qquad \cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Mivel $\alpha = \beta = \pi$ nem lehetséges, ezért $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$, és ebben az intervallumban $\alpha = -\beta$ az egyetlen megoldás. ■

1.2. Mátrixok sajátértéke és sajátvektora

Mátrixok jellemzésének egyik igen hatékony eszköze olyan vektoroknak a meghatározása, amelyekre a mátrrixot ráuszítva önmagával párhuzamos vektorat kapunk. Ezzel kapcsolatos az

1.2.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám **sajátérték**e, ha van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor, hogy

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{u}^T M = \lambda\mathbf{u}^T, \tag{1.2.1}$$

és az $\mathbf{u}$ vektort az M mátrix λ sajátértékéhez tartozó **jobb oldali**, ill. **bal oldali sajátvektor**ának nevezzük. Az M sajátértékeinek halmazát az M **spektrum**ának nevezzük és $\sigma(M)$-mel jelöljük.

Az

$$M\mathbf{u} = z\mathbf{u} \tag{1.2.2}$$

összefüggést szokás **saját(érték)-egyenlet**nek, ill. **sajátérték-feladat**nak is nevezni.
Az 1.2.1. definícióban a *jobb oldali* jelző arra vonatkozik, hogy a mátrix-vektor-szorzatban a vektor a mátrixtól jobbra található. A gyakorlati alkalmazások során szükség van a bal oldali sajátvektor meghatározására is. Látható, hogy $\mathbf{u}$ pontosan akkor bal oldali sajátvektora M-nek, ha jobb oldali sajátvektora M transzponáltjának:

$$\mathbf{u}^T M = \lambda\mathbf{u}^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{u}^T M)^T = (\lambda\mathbf{u}^T)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad M^T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Ezért a továbbiakban sajátvektoron mindig jobb oldali sajátvektort értünk.

1.2.1. példa. Az
$$M := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
mátrixnak az 1 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (2{,}1)$ vektor az 1 sajátértékhez tartozó jobb oldali sajátvektor, hiszen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és
$$M\mathbf{u} = \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u}.$$

1.2.2. példa. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az αE_n mátrixnak az α szám sajátértéke és minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor sajátvektora, hiszen
$$(\alpha E_n)\mathbf{u} = \alpha(E_n\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}.$$

1.2.3. példa. Az
$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrixnak a 2 szám sajátértéke, és az $\mathbf{u} := (1, 2, -1)$ vektor a 2 sajátértékhez tartozó bal oldali sajátvektor, hiszen
$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{u}^T M = 2\mathbf{u}^T.$$

1.2.4. példa. Az
$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
annak a leképezésnek a mátrixa, amely $\mathbb{R}^3$ vektorait az (xz)-síkra tükrözi:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ c \end{bmatrix} \qquad ((a, b, c) \in \mathbb{R}^3).$$
Az 1, ill. a -1 szám sajátértéke M-nek, és az (xz)-sík zérustól különböző vektorai az M mátrix 1 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, továbbá az (xz)-síkra merőleges, $\mathbf{0}$-tól különböző vektorok az M mátrix -1 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $\mathbf{0}$-t nem tekintjük sajátvektornak. Ellenkező esetben tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$ skalár esetén teljesülne az $M\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ egyenlőség.

Az (1.2.2) sajátértékfeladat egyenértékű valamely homogén lineáris egyenletrendszer triviálistól (azaz **0**-tól) különböző megoldásának megkeresésével, hiszen

$$M\mathbf{u} = z\mathbf{u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z\mathbf{u} - M\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (zE_n - M)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ennek az egyenletrendszernek pontosan akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha

$$\operatorname{rang}(\lambda E_n - M) = \operatorname{rang}(M - \lambda E_n) < n,$$

azaz a

$$p_M(z) := \det(zE_n - M) = (-1)^n \cdot \det(M - zE_n) \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.3}$$

függvényre $p_M(\lambda) = 0$ teljesül:

$$\lambda \in \sigma(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_M(\lambda) = 0.$$

1.2.5. példa. Az 1.2.1. példa esetén a p_M függvény a következő:

$$p_M(z) := (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2-z & -2 \\ 2 & -3-z \end{bmatrix} = (2-z)(-3-z) + 4 = z^2 + z - 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az 1, ill. -2 számra

$$p_M(1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(-2) = 0.$$

1.2.6. példa. Az 1.2.3. példa esetén a p_M függvény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) \quad &:= \quad (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 \\ 1 & 1-z & -1 \\ 0 & -1 & -z \end{bmatrix} = \\ &= \quad z \cdot \{(1-z) \cdot (-z) - 1\} + 1 \cdot \{-z - 0\} + 0 = \\ &= \quad z \cdot \left\{z^2 - z - 2\right\} = z(z+1)(z-2) \qquad (z \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

így a 0, -1, ill. a 2 számra

$$p_M(0) = 0, \qquad p_M(-1) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2) = 0.$$

1.2.7. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

akkor a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-1)\cdot\{(1-z)\cdot(-z)-1\} - 1\cdot\{1\cdot(-z)+2\} - 1\cdot\{-1-2(1-z)\} = \\ &= (z-1)\left\{z^2-z-1\right\} + 1 - z = (z-1)\left\{z^2-z-2\right\} = \\ &= (z-1)(z+1)(z-2) \qquad (z\in\mathbb{C}), \end{aligned}$$

így a -1, 1, ill. a 2 számra

$$p_M(-1)=0, \qquad p_M(1)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2)=0.$$

1.2.8. példa. Az 1.2.2. példa esetén pedig a p_M függény a következő:

$$p_M(z) := \det(zE_n - \alpha E_n) = \det((z-\alpha)E_n) = (z-\alpha)^n \det(E_n) = (z-\alpha)^n \qquad (z\in\mathbb{C}),$$

így az α számra

$$p_M(\alpha) = 0.$$

1.2.1. feladat. Határozzuk meg a p_M függvényt az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében!

Útm.

$$p_M(z) := (-1)^4\cdot\det\begin{bmatrix} 2-z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} =$$

$$= (2-z)\cdot\det\begin{bmatrix} -z & -1 & 1 \\ 2 & 1-z & 0 \\ 2 & 2 & 1-z \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1-z & 0 \\ -1 & 2 & 1-z \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+2(1-z)+2+2z\right\}-\{1-z+2+1-z\}= \\
&= (2-z)\left\{-z(1-z)^2+4\right\}-(4-2z)= \\
&= (2-z)\left\{-z+2z^2-z^3+4-2\right\}=(2-z)\left\{z^2(2-z)+2-z\right\}= \\
&= (2-z)^2(z^2+1)=(2-z)^2(z+\imath)(z-\imath) \quad (z\in\mathbb{C}). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

1.2.1. gyakorló feladat. Határozzuk meg a p_M függvényt az alábbi M mátrixok esetében!

1. $M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 2. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 3. $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm.

1.2.2. definíció. Az (1.2.3)-beli p_M függvényt, azaz a

$$p_M(z) := (-1)^n \cdot \det \begin{bmatrix} m_{11}-z & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22}-z & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}-z \end{bmatrix} \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{1.2.4}$$

polinomot az M mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük. A p_M karakterisztikus polinom λ gyökének multiplicitását a λ sajátérték **algebrai mulitiplicitás**ának nevezzük, és erre az $a(\lambda)$ jelölést használjuk. Ha valamely $\lambda\in\mathbb{C}$ szám nem gyöke a p_M karakterisztikus polinomnak, akkor legyen $a(\lambda):=0$.

Az (1.2.4)-beli determináns első oszlop szerinti kifejtését végiggondva látható, hogy a p_M polinom főegyütthatója 1, z^{n-1} tag együtthatója pedig

$$-(m_{11}+\ldots+m_{nn}) = -\mathrm{Sp}\,(M).$$

A

$$p_M(0) = (-1)^n \det(M)$$

egyenlőségből pedig az adódik, hogy p_M konstans tagja $(-1)^n\det(M)$. Összefoglalva:

$$p_M(z) = z^n - \mathrm{Sp}\,(M) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(M) \qquad (z\in\mathbb{C}). \tag{1.2.5}$$

(1.2.4)-ből az is látható, hogy ha M (alsó vagy felső) háromszögmátrix, akkor sajátértékei a főátlóban lévő elemek, hiszen – mint tudjuk – az ilyen mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

Természetesen a karakterisztikus polinom többi együtthatójának kiszámítására is van formula. Ha ui. tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{S}_p$-vel jelöljük az $\{1, \ldots, p\}$ halmaz **permutáció**inak halmazát, azaz

$$\mathcal{S}_p := \{\pi : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p\} \mid \pi \text{ bijektív}\},$$

akkor az M determinánsa

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M_{k\sigma(k)}$$

Leibniz-féle alakjának felhasználásával belátható az

1.2.1. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és

$$C_r^{(n)} := \sum_{\mathbf{i} \in N^r} \det(M_{\mathbf{i}}),$$

ahol $N := \{1, \ldots, n\}$,

$$M_{\mathbf{i}} := \begin{bmatrix} m_{i_1 i_1} & \ldots & m_{i_1 i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i_r i_1} & \ldots & m_{i_r i_r} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_r) \in N^r : \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n)$$

azaz az $M_{\mathbf{i}}$ mátrix úgy keletkezik az M mátrixból, hogy M-ből elhagyjuk $(n-r)$ darab sorát és ugyanolyan indexű $(n-r)$ darab oszlopát $(r \in \{1, \ldots, n\})$, akkor

$$p_M(z) = z^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r C_r^{(n)} z^{n-r} \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{1.2.6}$$

Speciálisan $r = 1$ ill. $r = n$ esetén

$$C_1^{(n)} = \sum_{\mathbf{i} \in N} \det(M_{\mathbf{i}}) = \operatorname{Sp}(M), \qquad \text{ill.} \qquad C_n^{(n)} = \sum_{\mathbf{i} \in N^n} \det(M_{\mathbf{i}}) = \det(M).$$

A (1.2.5), ill. (1.2.6) formulák felhasználásával $n = 2$, ill. $n = 3$ esetén könnyne megjegyezhető képlet kapható a p_M karakterisztikus polinom alakjára:

1.2.2. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, ill. $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, akkor

$$\boxed{p_M(z) = z^2 - \operatorname{Sp}(M) z + \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}),}$$

ill. tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\boxed{p_M(z) = z^3 - \operatorname{Sp}(M) z^2 + \left\{\det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)})\right\} z - \det(M).}$$

$n = 3$ esetén M determinánsát úgy érdemes kiszámolni, hogy egy (determinánstartó) eleminációs lépés után egy (2×2)-szeres mátrix determinánsát kelljen csak kiszámolni, továbbá a

$$\det(M_{(12)}) + \det(M_{(13)}) + \det(M_{(23)}) =$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{Sp}\,(M^{\sharp})$$

összeg kiszámítása a legegyszerűbben úgy történik, hogy M főátlójábann minden elemet összeszorzunk minden elemmel (egyszer) és ebből kivonjuk a főátlón kívüli egymással tükrös elemek szorzatának összegét. $n = 3$ esetén a karakterisztikus polinom lineáris tagjának együtthatója előállítható az

$$C_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{Sp}\,(M))^2 - \mathrm{Sp}\,(M^2)\right)$$

alakban is.

1.2.9. példa. A szilárdságtanban gyakran előforduló

$$S := \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

mátrix esetében például a

$$p_S(z) := z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} c_2 &= -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ c_1 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xz}^2, \\ c_0 &= -\det(S) \end{aligned}$$

teljesül.

1.2.10. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(ún.) **telefonmátrix** esetében

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 18z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{6}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{6}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

1.2.11. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$p_M(z) = z^3 - 12z^2 - 27z = z\left(z - 6 + 3\sqrt{7}\right)\left(z - 6 - 3\sqrt{7}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Nagyobb n-ekre az (1.2.6) formulával való számolás helyett az alább megfogalmazott rekurzív módszerrel való számolás ajánlott.

1.2.3. tétel. A

$$p_M(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom együtthatóira:

$$\begin{aligned}
N_1 &:= E_n, & a_{n-1} &:= -\frac{1}{1} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_1), \\
N_2 &:= MN_1 + a_{n-1}E_n, & a_{n-2} &:= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_2), \\
&\vdots \\
N_n &:= MN_{n-1} + a_1 E_n, & a_0 &:= -\frac{1}{n} \cdot \mathrm{Sp}\,(MN_n), \\
O &= MN_n + a_0 E_n.
\end{aligned}$$

1.2.2. feladat. Határozzuk meg az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polnomját!

Útm. $a_3 = -\mathrm{Sp}\,(M) = -4$,

$$a_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot M\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}\mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot M\right) = -\frac{1}{3}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$a_0 = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M\right) = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

így

$$p_M(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 2z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}). \quad \blacksquare$$

Mivel a legtöbb tantermi feladat esetében a mátrixok egész eleműek, ezért a karakterisztikus polinomjuk egész együtthatós polinom lesz. Az ilyen polinomok esetében az egész gyökök – ha egyáltalán ilyenek vannak – ügyes átalakításokkal[1] vagy a Rolle-féle gyöktétel, ill. a Horner-módszer segítségével számíthatók ki a leggyorsabban.

1.2.1. tétel. Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor

$$\mathrm{Sp}\,(M) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \qquad \text{ill.} \qquad \det(M) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

azaz M nyoma éppen M sajátértékeinek összege, M determinánsa éppen M sajátértékeinek szorzata.

Biz. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az M (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor az M karakterisztikus polinomjára

$$p_M(z) = (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

[1] A karakterisztikus polinomot adó determináns kifejtése során nem szorzunk be mindent mindennel, hanem megpróbálunk $(z - \alpha)$ alakú szorzó(ka)t kiemelni (vö. 1.2.1. feladat).

teljesül. Beszorzással látható, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$p_M(z) = z^n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \cdot z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

ezért a polinomokra vonatkozó egyértelműségi tétel, ill. (1.2.5) felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. ■

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy ha

$$M \in \mathbb{C}^{n \times n} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{rang}(\lambda E_n - M) = \operatorname{rang}(M - \lambda E_n) < n,$$

akkor végtelen sok olyan $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor van, amelyre

$$(\lambda E_n - M)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{ill.} \qquad (M - \lambda E_n)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

teljesül. Ezen vektorok közül azokat nem tekintjük különbözőnek, amelyek egymás (nem-zérus) skalárszorosai. Geometriai megfogalmazással ezek azok a vektorok, amelyek egy egyenesbe esnek. Világos ui., hogy ha $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \sigma(M)$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor tetszőleges $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, ill. $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ esetén $\alpha\mathbf{u}$ is a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, hiszen

$$M(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(M\mathbf{u}) = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\alpha\mathbf{u}).$$

Ezért minden esetben **lineárisan független sajátvektorok**at keresünk.

1.2.3. feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Útm. Az A mátrix sajátértékei a

$$p_A(z) := z^2 - 6z + 5 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

– A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A B mátrix sajátértékei a

$$p_B(z) := z^2 - 4z + 6 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$.

– A $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2-\sqrt{2}\imath & \text{-3} & 0 \\ 2 & 2-\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\imath - \sqrt{2})\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}),$$

– a $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\imath$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} -2+\sqrt{2} & \text{-3} & 0 \\ 2 & 2+\sqrt{2}\imath & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2} - \imath)\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C}).$$

A C mátrix sajátértékei a

$$p_C(z) := z^2 - 25z + 150 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$.

– A $\lambda_1 = 15$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} \text{-1} & \text{-2} & 0 \\ \text{-2} & \text{-4} & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 10$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor a $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & \text{-2} & 0 \\ \text{-1} & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}).$$

A D mátrix sajátértékei a

$$p_D(z) := (1 - z)(2 - z)(3 - z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

– A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \text{-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -1\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

– a $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

1.2.2. tétel. Ha M négyzetes, reguláris mátrix, akkor M és M^{-1} sajátvektorai azonosak, sajátértékeik pedig egymás reciprokai.

Biz. Ha a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám az M mátrixnak sajátéertéke: $\lambda \in \sigma(M)$, $\mathbf{u}$ pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Innen

$$M^{-1}(M\mathbf{u}) = M^{-1}(\lambda\mathbf{u}) \ ,$$

és ebből

$$\mathbf{u} = \lambda(M^{-1}\mathbf{u})$$

következik. $\lambda \neq 0$, hiszen ellenkező esetben $\det(M) = 0$ lenne (vö. 1.2.1. tétel), ezért oszthatunk vele:

$$M^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}.$$

Eszerint $\mathbf{u}$ sajátvektora M^{-1}-nek is, az $\dfrac{1}{\lambda}$ sajátértékkel. $\blacksquare$

1.2.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix

1. szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós szám;
2. antiszimmetrikus, akkor minden sajátértéke (tisztán) képzetes szám!

Útm. Ha valamely $\lambda \in \sigma(M)$ esetén $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, és

1. $M^T = M$, akkor $\lambda\|\mathbf{u}\|^2 =$

$$= \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}, M^T\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},\lambda\mathbf{u}\rangle = \overline{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \overline{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2$$ [2]

ahonnan $\lambda = \overline{\lambda}$, azaz $\lambda \in \mathbb{R}$ következik.

[2] Komplex elemű vektorok esetén a skaláris szorzatot így értelmezzük: $\langle\mathbf{r},\mathbf{s}\rangle := \sum_{k=1}^{n} r_i\overline{s}_i$ $(\mathbf{r},\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n)$.

2. $M^T = -M$, akkor $\lambda\|\mathbf{u}\|^2 = \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle =$

$$= \langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}, M^T\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}, -M\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}, -\lambda\mathbf{u}\rangle = -\overline{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = -\overline{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2$$

ahonnan $\lambda = -\overline{\lambda}$, azaz

$$\lambda \in \mathcal{K} := \{z \in \mathbb{C} : \ z = b\imath,\ b \in \mathbb{R}\}$$

következik. ■

1.2.12. példa. Ha valamely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ és

$$M := \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

akkor az M antiszimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) \equiv z^3 + (a^2 + b^2 + c^2)z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

amelynek gyökei: $0, \pm\imath\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

1.2.3. tétel. Ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, továbbá $\mathbf{u}$, ill. $\mathbf{v}$ az M különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, akkor $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Biz. Ha $M^T = M$, és valamely $\lambda, \mu \in \sigma(M)$ sajátértékek esetén $\lambda \neq \mu$ és $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, ill. $M\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, akkor pl. $\lambda \neq 0$ esetén

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda}M\mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle\mathbf{u}, M\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle\mathbf{u},\mu\mathbf{v}\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle.$$

Így

$$\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0,$$

és ezért $\lambda \neq \mu$ miatt $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$. ■

Ez azt jelenti, hogy

szimmetrikus mátrixok különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

1.2.5. feladat. Számítsuk ki az

$$M := \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!

Útm.

1. lépés.. Meghatározzuk a p_M karakterisztikus polinomot.

1. módszer (ajánlott).. Az M mátrix elemeből könnyen kiolvasható, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(M) = 7 + 6 + 5 = 18,$$

$$\mathrm{Sp}\,(M^\sharp) = 7\cdot 6 + 7\cdot 5 + 6\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 - (-2)\cdot(-2) = 99,$$

ill.

$$\det(M) = (-2)\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 19 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2(19\cdot 5 - (-7)\cdot(-2)) = 162,$$

így a karakterisztikus polinom nem más, mint

$$\boxed{p_M(z) = z^3 - \mathrm{Sp}\,(M)z^2 + \mathrm{Sp}\,(M^\sharp)z - \det(M)} = z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

2. módszer (nem ajánlott: sok számolás, könnyű eltéveszteni)..

$$\begin{aligned}
p_M(z) &= \det(E - zM) = (-1)^3\det(M - zE) = -\begin{vmatrix} 7-z & -2 & 0 \\ -2 & 6-z & -2 \\ 0 & -2 & 5-z \end{vmatrix} = \\
&= (z-7)\begin{vmatrix} 6-z & -2 \\ -2 & 5-z \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 5-z \end{vmatrix} = \\
&= (z-7)\,\{(6-z)(5-z) - 4\} + 4(5-z) = \\
&= (z-7)\{z^2 - 11z + 26\} + 20 - 4z = \\
&= z^3 - 11z^2 + 26z - 7z^2 + 77z - 26\cdot 7 + 20 - 4z = \\
&= z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z\in\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

2. lépés.. **Kiszámítjuk p_M gyökeit, azaz M sajátértékeit.** Mivel egész együtthatós normált polinomról van szó, p_M egész gyökei (ha vannak egyáltalán ilyenek) osztói a konstans tagnak, esetünkben -162-nek. Általános iskolai ismereteink alapján érdemes tehát legalább a ±1, ±2, ±3 ill. ±6 számokkal próbálkozni. Ha valamelyik helyettesítési érték zérust ad, azaz a behelyettesített szám gyök ($=: \gamma$), akkor a p_M karakterisztikus polinomra

$$p_M(z) = (z-\gamma)\cdot q(z) \qquad (z\in\mathbb{C})$$

teljesül, ahol q másodfokú polinom. q gyökeinek meghatározása már nem okozhat nehézséget. A fenti M mátrix esetében ez a lépés a következő számolásokat tartalmazza.

1. módszer (ajánlott).. Mivel tetszőleges harmadfokú p polinomra

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = a_0 + z(a_1 + z(a_2 + a_3 z)) \qquad (z\in\mathbb{C}),$$

ezért valamely $c \in \mathbb{C}$ szám behelyettesítése a következő (Horner-)séma szerint történik:

	a_3	a_2	a_1	a_0
c	a_3	$a_3 \cdot c + a_2$	$(a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1$	$\{(a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1\}c + a_0 = p(c)$

Ha $p(c) = 0$, azaz c gyöke a p polinomnak, akkor

$$p(z) = (z - c) \cdot (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ahol a másodfokú polinom együtthatói a táblázat azon sorában vanak, ahol $p(c) = 0$ áll. Esetünkben:

$$\alpha = a_3, \qquad \beta = a_3 \cdot c + a_2, \qquad \gamma = (a_3 \cdot c + a_2) \cdot c + a_1.$$

A (fenti)

$$p_M(z) = z^3 - 18z^2 + 99z - 162 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

karakterisztikus polinom esetében ez pl. így néz ki:

	1	-18	99	$-162,$
1	1	-17	82	$-80 = p_M(1) \neq 0,$
3	$\boxed{1}$	$\boxed{-15}$	$\boxed{54}$	$0 = p_M(3).$

Tehát a 3 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z-3)(z^2 - 15z + 54) = (z-3)(z-6)(z-9) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2. módszer (nem ajánlott: sok számolás, könnyű eltéveszteni).. Pl. az 1 és a 3 számok behelyettesítése:

$$\begin{aligned} p_M(1) &= 1^3 - 18 \cdot 1^2 + 99 \cdot 1 - 162 = 1 - 18 + 99 - 162 = -80 \neq 0 \\ p_M(3) &= 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 99 \cdot 3 - 162 = 27 - 162 + 297 - 162 = \ldots = 0. \end{aligned}$$

Tehát a 3 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z-3)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Az α, β, γ együtthatók meghatározása maradékos osztással történik:

$$\begin{array}{rcl} (z^3 - 18z^2 + 99z - 162) & : & (z-3) \equiv \quad z^2 - 15z + 54 \\ -(z^3 - 3z^2) & & \\ \hline -15z^2 + 99z - 162 & & \\ -(-15z^2 + 45z) & & \\ \hline 54z - 162 & & \\ -(54z - 162) & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Tehát

$$p_M(z) = (z-3)(z^2 - 15z + 54) = (z-3)(z-6)(z-9) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

3. lépés.. **Meghatározzuk az M normált sajátvektorait.**

- **A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda_1 E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása. Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbf{u} = (t{,}2t{,}2t)$$

vektor az M mátrix $\lambda_1 = 3$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{3}(1{,}2{,}2)$$

vektor ezért a $\lambda_1 = 3$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor.

- **A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sajátvektor az

$$(M - \lambda_2 E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz az} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldása. Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mathbf{v} = (2t, t, -2t)$$

vektor az M mátrix $\lambda_2 = 6$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_2 = \frac{1}{3}(2{,}1, -2)$$

vektor ezért a $\lambda_2 = 6$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor.

- **A $\lambda_3 = 9$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor meghatározása.** Mivel M szimmetrikus mátrix, ezért (vö. 1.2.3. tétel) sajátvektorai ortogonálisak

$$/\text{pl.} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = t \cdot 2t + 2t \cdot t + 2t \cdot (-2t) = 0/\,.$$

Így tetszőleges $0 \neq t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_3 & v_3 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & 2t & 2t \\ 2t & t & -2t \end{bmatrix} = (-6t^2{,}6t^2, -3t^2)$$

vektor az M mátrix $\lambda_3 = 9$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Az

$$\mathbf{s}_3 = \frac{1}{3}(-2{,}2, -1)$$

vektor ezért a $\lambda_3 = 9$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektor. ■

1.2.4. tétel. (Cayley-Hamilton-tétel.) Ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $p_M(M)$ a nullmátrix:

$$p_M(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \ldots + a_1 M + a_0 E_n = O \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Biz. ■

1.3. Polinomok helyettesítési értéke

1.3.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $a_n \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

majd vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
c_n &:= a_n \\
c_{n-1} &:= a_{n-1} + c_n \cdot \xi \\
c_{n-2} &:= a_{n-2} + \xi \cdot c_{n-1} \\
&\vdots \\
c_{n-k} &:= a_{n-k} + \xi \cdot c_{n-k+1} \\
&\vdots \\
c_1 &:= a_1 + \xi \cdot c_2 \\
c_0 &:= a_0 + \xi \cdot c_1.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$c_0 = f(\xi) \qquad \text{és} \qquad f(x) = (x-\xi) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} x^k + f(\xi) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Biz.

1.3.2. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$: $a_n \neq 0$,

$$f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Úgy, ha valamely

- $\xi \in \mathbb{Z}$ esetén $f(\xi) = 0$, akkor $\xi | a_0$;
- $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$: $\eta \neq 0$ és $\mathrm{lnko}\,(\xi, \eta) = 1$ esetén $f(\xi/\eta) = 0$, akkor $\xi | a_0$ és $\eta | a_n$.

Biz.

1.4. Kvadratikus alakok

1.4.1. definíció. Adott

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus mátrix ($M^T = M$) esetén a

$$Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = (M\mathbf{r})^T\mathbf{r} = \mathbf{r}^T M^T \mathbf{r} = \mathbf{r}^T M \mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}x_i x_j \qquad (\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

leképezést (az M mátrix által meghatározott) **kvadratikus alak**nak nevezzük.

Világos, hogy $Q_M(\mathbf{0}) = 0$.

1.4.1. példa. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} Q_M(\mathbf{r}) &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= ax^2 + byx + bxy + cy^2 = \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad (\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

1.4.2. példa. Legyen $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} Q_M(\mathbf{r}) &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ bx+dy+ez \\ cx+ey+fz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= ax^2 + byx + czx + bxy + dy^2 + ezy + cxz + eyz + fz^2 = \\ &= ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz \qquad (\mathbf{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

A kvadratikus alakokat felvett értékeik előjele alapján szokás osztályozni (ún. definitségi osztályokba sorolni).

1.4.2. definíció. Azt mondjuk, hogy a Q_M kvadratikus alak, ill. az M mátrix

1. **pozitív definit**, ha minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) > 0$;
2. **negatív definit**, ha minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) < 0$;
3. **pozitív szemidefinit**, ha minden $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) \geq 0$;
4. **negatív szemidefinit**, ha minden $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q_M(\mathbf{r}) \leq 0$;
5. **indefinit**, ha van olyan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, hogy

$$Q_M(\mathbf{u}) > 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(\mathbf{v}) < 0$$

   teljesül.

A pozitív és a negatív definit alakokat együttesen **definit alak**oknak, a pozitív és a negatív szemidefinit alakokat pedig együttesen **szemidefinit alak**oknak nevezzük.

Az 1.4.2. definícióból látható, hogy

1. a pozitív, ill. negatív definit alakok (mátrixok) egyúttal pozitív, ill. negatív szemidefinit alakok (mátrixok).
2. a kvadratikus alakok, ill. a szimmetrikus mátrixok halmaza három osztályra bomlik: a pozitív szemidefinit, a negaív szemidefinit és az indefinit alakok osztályára. Ez a három osztály majdnem diszjunkt. Egyetlen olyan kvadratikus alak, ill. szimmetrikus mátrix van, amely benne van két osztályban is. Ha ui. M a zérusmátrix, akkor Q_M, ill. M pozitív szemidefinit és negatív szemidefinit is egyben.
3. a szemidefinit Q_M pontosan akkor nem definit, ha van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $Q_M(\mathbf{u}) = 0$ teljesül.
4. Valamely pozitív, ill. negatív (szemi)definit mátrix főátlójában csak pozitív (nemnegatív) ill. negatív (nempozitív) számok lehetnek, hiszen ha

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

   az $\mathbb{R}^n$-beli kanonikus bázis, akkor

$$Q_M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T \cdot M \cdot \mathbf{e}_i = a_{ii} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

   Ha tehát M főátlójában van pozitív és negatív előjelű elem is, akkor Q_M, ill. M indefinit.

1.4.3. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = x^2 + 4xy + 8y^2 = (x+2y)^2 + 4y^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \geq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\right)$$

és

$$Q_M(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 2y = 0 = 2y \quad \Longleftrightarrow \quad (x = y = 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{r} = \mathbf{0}),$$

ezért Q_M, ill. M pozitív definit.

1.4.4. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 = 2x^2 + (\sqrt{2}x + y)^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \geq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért Q_M, ill. M pozitív szemidefinit. Q_M, ill. M nem pozitív definit, ui.

$$Q_M(1, -\sqrt{2}) = 0.$$

1.4.5. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = x^2 - y^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Mivel

$$Q_M(2{,}1) = 3 > 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(1{,}2) = -3 < 0,$$

ezért Q_M, ill. M indefinit.

1.4.6. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = -2y^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \leq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért Q_M, ill. negatív szemidefinit. Q_M, ill. M nem negatív definit, ui.

$$Q_M(1{,}0) = 0.$$

1.4.7. példa. Az

$$M := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén

$$Q_M(\mathbf{r}) = -4x^2 + 4xy - y^2 - 3z^2 = -(2x-y)^2 - 3z^2 \qquad \left(\mathbf{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right).$$

Mivel

$$Q_M(\mathbf{r}) \leq 0 \qquad \left(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\right),$$

ezért Q_M, ill. M negatív szemidefinit. Q_M, ill. M nem negatív definit, ui.

$$Q_M(1{,}2{,}0) = 0.$$

Nem nehéz belátni, hogy ha $n = 2$, azaz ha Q_M a 1.4.1. példabeli kvadratikus alak:

$$Q_M(\mathbf{r}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \left(\mathbf{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

akkor

- $a \neq 0$ esetén

$$Q_M(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right);$$

- $c \neq 0$ esetén

$$Q_M(x,y) = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 + \frac{ac-b^2}{c}x^2 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right);$$

- $a = c = 0$ esetén

$$Q_M(x,y) = 2bxy \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

1.4.1. tétel. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$Q_M(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak, ill. az

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

mátrix pontosan akkor

1. definit, ha $ac - b^2 > 0$, mégpedig
   a) $a > 0$ esetén pozitív definit,
   b) $a < 0$ esetén negatív definit.
2. szemidefinit, ha $ac - b^2 \geq 0$, mégpedig
   a) $a \geq 0$, $c \geq 0$ esetén pozitív szemidefinit,
   b) $a \leq 0$, $c \leq 0$ esetén negatív szemidefinit.
3. indefinit, ha $ac - b^2 < 0$.

Biz.

1. *a)* Tegyük fel, hogy Q_M pozitív definit. Ekkor

$$Q_M(1{,}0) = a > 0,$$

ui. $(1{,}0) \neq \mathbf{0}$ és így

$$Q_M(-b/a{,}1) = ac - b^2 > 0,$$

ui.

$$(-b/a{,}1) \neq (0{,}0).$$

Tegyük fel, hogy

$$a > 0 \qquad \text{és} \qquad ac - b^2 > 0.$$

Ekkor

$$Q_M(\mathbf{r}) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \geq \frac{ac - b^2}{a}y^2 \geq 0 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

és

$$Q_M(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + \frac{b}{a}y = 0 = y \quad \Longleftrightarrow \quad (x = y = 0, \quad \text{azaz} \quad (x, y) = (0{,}0)).$$

b) Ezt az állítást az előjelek megfordítása után ugynúgy bizonyíthatjuk, mint az előzőt.

2. *a)* Tegyük fel, hogy Q_M pozitív szemidefinit. Ekkor

$$Q_M(1{,}0) = a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad Q_M(0{,}1) = c \geq 0.$$

Ha $a = 0$, akkor

$$Q_M(x,1) = 2bx + c \geq 0 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0,$$

ui. a fentiek miatt $c \geq 0$, továbbá $b > 0$ esetén legyen $x < -c/2b$, így $Q_M(x,1) < 0$, illetve $b < 0$ esetén legyen $x > -c/2b$, így $Q_M(x,1) < 0$. Így tehát $a = 0$ esetén $b = 0$, azaz $ac - b^2 = 0$. Ha $a > 0$, akkor

$$Q_M(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2) \geq 0,$$

ezért $ac - b^2 \geq 0$.

Tegyük fel, hogy

$$a \geq 0, \qquad c \geq 0 \qquad \text{és} \qquad ac - b^2 \geq 0.$$

Ha $a = 0$, akkor $ac - b^2 \geq 0$ miatt $b = 0$ és ekkor

$$Q_M(x,y) = cy^2 \geq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ha $a > 0$, akkor

$$\frac{ac - b^2}{a} \geq 0,$$

így

$$Q_M(x,y) \geq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

b) Ezt az állítást az előjelek megfordítása után ugynúgy bizonyíthatjuk, mint azelőzőt.

3. Tegyük fel, hogy Q_M indefinit. Ez azt jelenti, hogy Q_M nem pozitív szemidefinit és nem negatív szemidefinit. Így vagy a és c ellenkező előjelűek vagy $ac - b^2 < 0$. Ha a és c ellenkező előjelűek, akkor $ac < 0 \leq b^2$, ezért $ac - b^2 < 0$.
   Tegyük fel, hogy $ac - b^2 < 0$. Ha $a \neq 0$, akkor

   $$Q_M(1,0) = a \qquad \text{és} \qquad Q_M(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2)$$

   ellenkező előjelűek, így Q_M indefinit. Ha $a = 0$ és $c = 0$, akkor

   $$Q(1,1) = 2b \qquad \text{és} \qquad Q_M(-1,1) = -2b.$$

   Mivel ebben az esetben az $ac - b^2 < 0$ egyenlőtlenségből $b^2 > 0$ következik, ezért $b \neq 0$ és így Q_M indefinit. Ha $a = 0$ és $c \neq 0$, akkor

   $$Q(0,1) = c \qquad \text{és} \qquad Q_M(c,-b) = -2b^2c + b^2c = -b^2c$$

   ellenkező előjelűek, ezért Q_M indefinit. ■

1.4.8. példa. A

$$Q_M(x,y) := 5x^2 - 24xy + 29y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{bmatrix}, \qquad 5 \cdot 29 - 144 = 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad 5 > 0.$$

1.4.9. példa. A

$$Q_M(x,y) := 2x^2 + 2xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak indefinit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad 2 \cdot (-1) - 1 = -3 < 0.$$

1.4.3. definíció. Valamely

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix esetén a

$$d_k := \det \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ & \ddots & \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{bmatrix} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

számokat az M mátrix k-adik **sarokminor**ának nevezzük.

1.4.10. példa. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$d_1 = a, \qquad d_2 = ad - bc = \det(M).$$

1.4.11. példa. Legyen $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$,

$$M := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$d_1 = a, \qquad d_2 = ae - db = \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad d_3 = \det(M).$$

1.4.4. definíció. Valamely

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix esetén a

$$\Delta_r := \det(M_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{R} \qquad (r \in \{1, \ldots, n\})$$

számokat az M mátrix r-edrendű **főminor**ának nevezzük (vö. 1.2.1. tétel).

1.4.12. példa. Legyen $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$M := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

három darab elsőrendű főminora van:

$$a, \qquad e, \qquad i,$$

három másodrendű főminora van:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

és egy darab harmadrendű főminora van:

$$\det(M).$$

1.4.1. tétel. (**Sylvester-kritérium**.) Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, ill. az M meghatározta Q_M kvadratikus alak pontosan akkor

1. pozitív definit, ha
$$d_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\});$$
2. negatív definit, ha
$$(-1)^k d_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\});$$
3. pozitív szemidefinit, ha minden r-edrendű Δ_r főminorára $\Delta_r \geq 0$ teljesül $(r \in \{1, \ldots, n\})$;
4. negatív szemidefinit, ha minden r-edrendű Δ_r főminorára $(-1)^r \Delta_r \geq 0$ teljesül $(r \in \{1, \ldots, n\})$.

1.4.1. feladat. Vizsgáljuk meg a

$$Q_M(x, y, z, u) := 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 3u^2 + 6xy + 2xz + 2xu + 2yz + 2yu + 4zu \qquad \big((x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4\big)$$

kvadratikus alakok definitség szempontjából!

Útm. Mivel

$$M=\begin{bmatrix}5&3&1&1\\3&5&1&1\\1&1&3&2\\1&1&2&3\end{bmatrix},\qquad \text{továbbá}\qquad \det[5]=5>0,\qquad \det\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}=16>0,$$

$$\det\begin{bmatrix}5&3&1\\3&5&1\\1&1&5\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&5\\3&5&1\\5&3&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&-14\\0&-2&-24\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&-14\\0&0&-38\end{bmatrix}=76>0$$

és

$$\det(M)=72>0,$$

ezért Q_M pozitív definit. ■

1.4.2. feladat. Vizsgáljuk meg a

$$Q_M(x,y,z):=-x^2-9y^2-2z^2+6xy\quad\big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

kvadratikus alakok definitség szempontjából!

Útm. Mivel

$$M=\begin{bmatrix}-1&3&0\\3&-9&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

és

$$d_1=-1,\qquad d_2=0,\qquad d_3=0,$$

ezért Q_M nem definit. Mivel M elsőrendű főminorjaira:

$$(-1)\cdot(-1)>0,\qquad (-1)\cdot(-9)>0,\qquad (-1)\cdot(-2)>0,$$

másodrendű főminorjaira:

$$(-1)^2\det\begin{bmatrix}-1&3\\3&-9\end{bmatrix}=0,\qquad (-1)^2\det\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}=2>0,\qquad (-1)^2\det\begin{bmatrix}-9&0\\0&-2\end{bmatrix}=18>0,$$

továbbá egyetlen harmadrendű fő-, ill. sarokminorjára:

$$(-1)^3\Delta_3=(-1)^3d_3=0\geq 0$$

teljesül, azért Q_M negatív szemidefinit. ■

Mivel minden szimmetrikus mátrix sajátértéke valós szám, ezért, ha $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$M^T=M,\qquad \lambda\in\sigma(M),\qquad M\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u},$$

akkor

$$Q_M(\mathbf{u})=\langle M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\lambda\|\mathbf{u}\|^2,$$

normált sajátvektor ($\|\mathbf{u}\| = 1$) esetén pedig

$$Q_M(\mathbf{u}) = \lambda$$

teljesül.

1.4.1. tétel (Főtengelytétel). Ha $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $M^T = M$,

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle,$$

és

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

az M sajátvektoraiból álló ortonormált bázis,

$$M\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n),$$

ahol

$$\xi_k := \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_k \rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Biz. Mivel

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

bázis és

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{u}_k,$$

ezért

$$\begin{aligned}
Q_M(\mathbf{r}) &= \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \left\langle M \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k M\mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k \mathbf{u}_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l \mathbf{u}_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k \xi_l \cdot \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k \xi_l \cdot 1 = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4.2. tétel. Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix meghatározta Q_M kvadratikus alak, ill. az M mátrix pontosan akkor

1. pozitív definit, ha M minden sajátértéke pozitív;
2. negatív definit, ha M minden sajátértéke negatív;
3. pozitív szemidefinit, ha M minden sajátértéke nemnegatív;
4. negatív szemidefinit, ha M minden sajátértéke nempozitív;
5. indefinit, ha M-nak van pozitív és negatív sajátértéke.

Biz.

1. lépés.. Ha

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$$

az M sajátvektoraiból álló ortonormált bázis,

$$M\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor (vö. főtegelytétel előtti megjegyzés)

$$\lambda_k = Q_M(\mathbf{u}_k) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

így a (szemi)definitségekre vonatkozó állítások „szükséges" részeit beláttuk.

2. lépés.. A (szemi)definitségekre vonatkozó állítások „elégséges" részek belátásához a főtengelytételt fogjuk felhasználni. Világos, hogy

$$\xi_k^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_k \rangle^2 \geq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

1. Ha

$$\lambda_k > 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n,$$

akkor valamely $k \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $\xi_k \neq 0$, így

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 > 0, \qquad \text{azaz} \qquad Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 > 0 \quad (\mathbf{0} \neq \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n).$$

Ez azt jelenti, hogy Q_M, ill. M pozitív definit.

2. Ha

$$\lambda_k < 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $-\lambda_k > 0$ sajátértéke a $-M$ mátrixnak, ami a fentiek következtében pozitív definit, azaz M, ill. Q_M negatív definit.

3. Ha

$$\lambda_k \geq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \geq 0 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n),$$

azaz Q_M pozitív szemidefinit.

4. Ha

$$\lambda_k \leq 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $-\lambda_k \geq 0$ sajátértéke a $-M$ mátrixnak, ami a fentiek következtében pozitív szemidefinit, azaz M, ill. Q_M negatív szemidefinit.

3. lépés.. Mivel Q_M, ill. M pontosan akkor nem indefinit, ha szemidefinit, azaz vagy minden sajátértéke nemnegatív, vagy minden sajátértéke nempozitív. Így tehát Q_M, ill. M pontosan akkor indefinit, ha van pozitív és negatív sajátértéke is. ■

1.4.13. példa. A

$$Q_M(x, y) := 4x^2 - 12xy + 9y^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

kvadratikus alak pozitív szemidefinit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) = z^2 - 13z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei és így M sajátértékei: 0 és 13.

1.4.14. példa. A

$$Q_M(x, y, z) := x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) = z^3 - 11z^2 + 11z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei és így M sajátértékei:

$$1, \qquad 5 + \sqrt{24} \qquad \text{és} \qquad 5 - \sqrt{24}.$$

1.4.1. gyakorló feladat. Adjuk meg azokat a szimmetrikus M mátrixokat, amelyek az alábbi Q_M kvadratikus alakokat határozzák meg, majd dönstük el, hogy a „definitséget” illetően Q_M melyik kategóriába tartozik!

1. $Q_M(x,y) := 4x^2 - 4xy + y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $Q_M(x,y) := 7x^2 + 6xy - y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $Q_M(x,y) := 5x^2 + 2xy + 5y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
4. $Q_M(x,y) := -2y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
5. $Q_M(x,y) := 6xy + 8y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
6. $Q_M(\mathbf{r}) := 9x^2 + 12xy + 4y^2 \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2)$;
7. $Q_M(x,y) := 16x^2 - 24xy + 5y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
8. $Q_M(x,y,z) := 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
9. $Q_M(x,y,z) := 3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
10. $Q_M(x,y,z) := x^2 - y^2 + 2z^2 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
11. $Q_M(x,y,z) := 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
12. $Q_M(x,y,z) := y^2 - z^2 + 4xy - 4xz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

Útm.

1.4.5. definíció. Mdott $m, n \in \mathbb{N}$: $m < n$ esetén azt mondjuk, hogy a szimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ($M^T = M$), ill. a

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle$$

kvadratikus alak **feltételesen pozitív**, ill. **negatív definit a** teljes rangú $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ **mátrixra vonatkozóan**, ha Q_M pozitív, ill. negatív definit B magterén, pontosabban, ha valamely $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor

$$Q_M(\mathbf{u}) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad Q_M(\mathbf{u}) < 0$$

teljesül.

AB mátrix teljes rangú volta $m < n$ következtében azt jelenti, hogy

$$\operatorname{rang}(B) = m.$$

1.4.15. példa. Ha $m = 1$, $n = 2$, ill. $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ és

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

ill.

$$Q_M(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right), \qquad B := \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix},$$

akkor

$$\operatorname{rang}(B) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d^2 + e^2 > 0,$$

így az $\mathbf{u} = (x, y)$ pontosan akkor tartozik B magterébe, ha $dx + ey = 0$ teljesül. Ha pl. $e \neq 0$, akkor az $y = -(d/e)x$-et Q_M-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$Q_M(\mathbf{u}) = ax^2 + 2bx\left(-\frac{d}{e}x\right) + c\left(-\frac{d}{e}x\right)^2 = \frac{(ae^2 - 2bde + cd^2)x^2}{e^2} \qquad (\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mivel

$$ae^2 - 2bde + cd^2 = -\det\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} M & B^T \\ B & O \end{bmatrix},$$

ezért Q_M pozitív definitsége azzal egyenértékű, hogy az iménti determináns negatív előjelű.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy előfordulhat az az eset is, hogy Q_M ugyan indefinit kvadratikus alak, de alkalmas B mátrixra vonatkozóan már definit.

1.4.16. példa. Ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

akkor (vö. pl. 1.4.1. tétel)

$$\det(M) = -2 < 0$$

következtében indefinit. Ha

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\ker(B)\backslash\{\mathbf{0}\} = \left\{(c, -c) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \neq c \in \mathbb{R}\right\}$$

alakú. Így, ha valamely $0 \neq c \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{u} := (c, -c)$, akkor

$$Q_M(\mathbf{u}) = c^2 - 6c^2 + 7c^2 = 2c^2 > 0,$$

azaz Q_M feltételesen pozitív definit B-re vonatkozóan.

1.4.3. tétel. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$: $m < n$. A szimmetrikus $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ($M^T = M$), ill. a

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q_M(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle$$

kvadratikus alak pontosan akkor feltételesen pozitív, ill. negatív definit a teljes rangú $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixra vonatkozóan, ha a

$$C := \begin{bmatrix} M & B^T \\ B & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

ún. **szegélyezett mátrix** c_k ($k \in \{1, \ldots, n+m\}$) sarokminorjaira

$$(-1)^m c_k > 0, \quad \text{ill.} \quad (-1)^{m+k} c_k > 0 \qquad (k \in \{2m+1, \ldots, n+m\})$$

teljesül.

Biz. ■

Ha $n = m+1$, azaz $2m+1 = m+m+1 = m+n = n+m$ (vö. 1.4.15. példa), akkor csak egyetlen egy mátrixnak, magának a szegélyezett mátrixnak a determinánsát kell kiszámítani. A gyakorlatban sokszor találkozhatunk az $n = 2$, $m = 1$ esettel ($n = m+1$). Ekkor

– $\det(C) < 0$ esetén az M mátrix feltételesen pozitív definit a B mátrixra vonatkozóan,

– $\det(C) > 0$ esetén az M mátrix feltételesen negatív definit a B mátrixra vonatkozóan.

1.4.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{és} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

akkor M feltételesen pozitív definit B-re vonatkozóan!

Útm. Világos, hogy a

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

mátrix determinánsára

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \\
&= \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= -2\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= -2\cdot\det\begin{bmatrix} -13 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\cdot\det\begin{bmatrix} -13 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -18 - 3(-69) = 189 > 0
\end{aligned}
$$

teljesül, ezért

$$(-1)^2\det(C) > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az M mátrix feltételesen pozitív definit a B mátrixra vonatkozóan. ■

1.5. Többváltozós függvények szélsőértéke

1.5.1. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén a

$$K_\varepsilon(\mathbf{a}) := \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\right\}$$

halmazt az $\mathbf{a}$ pont ε sugarú környezetének nevezzük.

1.5.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$ helyen

– **lokális minimuma** van, ha alkalmas $\delta > 0$ szám esetén

$$f(\mathbf{r}) \geq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(\mathbf{a}));$$

– **lokális maximuma** van, ha alkalmas $\delta > 0$ szám esetén

$$f(\mathbf{r}) \leq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(\mathbf{a}));$$

– **lokális szélsőértéke** van, ha ha f-nek $\mathbf{a}$-ban lokális minimuma vagy lokális maximuma van;

– **abszolút minimuma** van, ha

$$f(\mathbf{r}) \geq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f);$$

– **abszolút maximuma** van, ha

$$f(\mathbf{r}) \leq f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_f);$$

– **abszolút szélsőértéke** van, ha f-nek $\mathbf{a}$-ban abszolút minimuma vagy abszolút minimuma van.

1.5.3. definíció. Ha $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ a $\mathcal{D}_f$ belső pontja /jelben $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$/, azaz alkalmas $\delta > 0$ esetén $K_\delta(\mathbf{a}) \subset \mathcal{D}_f$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[\mathbf{a}]$ és

$$f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d,$$

akkor az a pontot az f **stacionárius pont**jának nevezzük.

1.5.0. tétel (Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére.) Ha az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban lokális szélsőértéke van, továbbá $f \in \mathfrak{D}[\mathbf{a}]$, akkor $\mathbf{a}$ az f stacionárius pontja.

Biz. ■

1.5.1. feladat. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek valamely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

1. pontban szélsőértéke van, de $\mathbf{a}$ nem stacionárius pontja f-nek;
2. stacionárius pontja, de f-nek nincsnen $\mathbf{a}$-ban szélsőértéke!

Útm.

1. Az
$$f(x) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
függvénynek a $\mathbf{0}$ pontban abszolút minimuma van, de ebben a pontban nem egyik parciális deriváltja sem létezik.

2. Az
$$f(x,y) := xy \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2$$
függvénynek a $\mathbf{0}$ stacionárius pontja, hiszen
$$f'(\mathbf{0}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{0}) = (\partial_1 f(\mathbf{0}), \partial_2 f(\mathbf{0}))) = \mathbf{0},$$
de f-nek a $\mathbf{0}$ pontban nincsen szélsőértéke, hiszen $f(\mathbf{0}) = 0$ és f a $\mathbf{0}$ bármely környezetében pozitív és negatív értéket is felvesz. ■

1.5.0. tétel (Másodrendű szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére). Ha az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban lokális minimuma [maximuma] van, továbbá $f \in \mathfrak{D}^2[\mathbf{a}]$, akkor

– $f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;

– a
$$Q^f_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) := \langle f''(\mathbf{a})\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = \langle H_f(\mathbf{a})\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d)$$
kvadratikus alak pozitív [negatív] szemidefinit.

Biz. ■

1.5.0. tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére). Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre valamely $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f)$ pontban az alábbi feltételek teljesülnek:

– $f \in \mathfrak{D}^2[\mathbf{a}]$ és $f'(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;

– a $Q^f_{\mathbf{a}}$ kvadratikus alak pozitív [negatív] definit.

Ekkor f-nek az a pontban lokális minimuma [maximuma] van.

Biz. ■

1.5.2. feladat. Határozzuk meg az
$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \big(3x^2 - 6x + 2y, 2x + 2y\big) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0), (8/3, -8/3)\}\,,$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így $f''(8/3,-8/3)$ pozitív definit, tehát $(8/3,-8/3)$-ban f-nek lokális minimuma van. $f''(0{,}0)$ indefinit, így a $(0{,}0)$ pont nem szélsőértékhelye f-nek. Ez persze úgy is belátható, hogy $f(0{,}0) = {} = 0$ és $(0{,}0)$ tetszőleges környezetében f felvesz pozitív és negatív értéket is, hiszen

$$f(x,x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

1.5.3. feladat. Van-e lokális szélsőértéke az alábbi függvényeknek:

1. $f(x,y) := x^2 + 2y^2 + xy - x + 3y + 4$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y) := x^4 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y) := x^3 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$?

Útm.

1. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x + y - 1{,}4y + x + 3) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(1,-1)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(1,-1)$ pozitív definit, f-nek tehát $(1,-1)$-ben lokális minimuma van.

2. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3{,}2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(0{,}0)$ pozitív szemidefinitdefinit. Tehát ha f-nek $(0{,}0)$-ban van lokális szőlsőértéke, akkor az csak (lokális) minimum lehet. Mivel $f(0{,}0) = 0$ és tetszőleges $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ esetén $f(\mathbf{a}) > 0$, ezért f-nek $(0{,}0)$-ban lokális (sőt szigorú abszolút) minimuma van.

3. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2{,}2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(0{,}0)\}\,,$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért $f''(0{,}0)$ pozitív szemidefinitdefinit. Tehát ha f-nek $(0{,}0)$-ban van lokális szőlsőértéke, akkor az csak (lokális) minimum lehet. f-nek azonban nincsen $(0{,}0)$-ban lokális szélsőértéke, ui. f $(0{,}0)$ tetszőleges környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is. $\blacksquare$

1.5.4. feladat. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket lokális szélsőérték szempontjából!

1. $f(x,y) := 2 + 3x + 12y - x^3 - y^3$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
4. $f(x,y) := x^3 + y^3 - (x+y)^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
5. $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 6x$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
6. $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
7. $f(x,y,z) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

Útm.

1. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3 - 3x^2, 12 - 3y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \{(1,2); (1,-2); (-1,2); (-1,-2)\},$$
$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
ezért
   - $f''(1,2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ negatív definit, így f-nek $(1,2)$-ben lokális maximuma van,
   - $f''(1,-2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ indefinit, így f-nek $(1,-2)$-ben nincsen szélsőértéke,
   - $f''(-1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ indefinit, így f-nek $(-1,2)$-ben nincsen szélsőértéke,
   - $f''(-1,-2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(-1,-2)$-ben lokális minimuma van.
2. Mivel
$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x(1 - x^2 - 2y^2), 2y(2 - x^2 - 2y^2)) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0)\},$$
$$\begin{aligned} f''(x,y) &= H_f(x,y) = \\ &= e^{-x^2-y^2} \begin{bmatrix} (1 - x^2 - 2y^2)(2 - 4x^2) - 4x^2 & -4xy(3 - x^2 - 2y^2) \\ -4xy(3 - x^2 - 2y^2) & (2 - x^2 - 2y^2)(2 - 4y^2) - 8y^2 \end{bmatrix} \\ & \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$
ezért $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ pozitív definit $(2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8 > 0$ és $2 > 0)$, így f-nek $(0,0)$-ban lokális minimuma van.

3. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3 - 2x - 2y, 4y^3 - 2x - 2y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{(-1,-1),(0,0),(1,1)\}\,,^{[3]}$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

- $f''(-1,-1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(-1,-1)$-ben lokális minimuma van,
- $f''(1,1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(1,1)$-ben lokális minimuma van,
- $f''(-1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ indefinit, így f-nek $(-1,2)$-ben nincsen szélsőértéke,
- $f''(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ negatív szemidefinit, így f-nek $(0,0)$-ben legfeljebb csak lokális maximuma lehet. Mivel az $x = 0$ egyenes mentén $(0,0)$-ban lokális maximum, az $y = -$ $-x$ egyenes mentén pedig lokális minimum van, ezért ebben a pontban f-nek nincsen lokális szélsőértéke. (Vizsgáljuk meg ehhez a $\varphi(y) := f(0,y)$ és a $\psi(x) := f(x,-x)$ függvényeket!)

4. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 2(x+y), 3y^2 - 2(x+y)) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$f'(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \left\{ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (0,0) \right\},$$

$$f''(x,y) = H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 2 & -2 \\ -2 & 6y - 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért

- $f''(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$-ban lokális maximuma van,
- $f''(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ negatív szemidefinit, így f-nek $(0,0)$-ban legfeljebb lokális maximum lehet. De $f(0,0) = 0$, ezért lokális maximum esetén van olyan $r > 0$ szám, hogy

$$f(x,y) \leq 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < r).$$

[3] $(4x^3 - 2x - 2y = 0$ és $4y^3 - 2x - 2y = 0) \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$, majd x helyére y-t helyettesítve $4x^3 - 2x - 2x = 4x(x-1) =$-ból $x \in \{-1,0,1\}$, és így $x \in \{-1,0,1\}$.

Legyen $x > 0$, $-1 < \lambda < 0$, ekkor

$$\begin{aligned} f(x,\lambda x) &= x^3(1+\lambda^3) - x^2(1+\lambda)^2 = x^2\left[x(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) - (1+\lambda)^2\right] = \\ &= x^2(1+\lambda)^2\left[x\frac{\lambda^2-\lambda+1}{1+\lambda} - 1\right] =: x^2(1+\lambda)^2 P_x(\lambda) \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{\lambda^2-\lambda+1}{1+\lambda} \to +\infty \qquad (\lambda \to -1+0),$$

ezért

$$P_x(\lambda) \to +\infty \qquad (\lambda \to -1+0).$$

Továbbá bármely

$$r > 0, \qquad 0 < x < \frac{r}{\sqrt{2}}, \qquad \text{ill.} \qquad -1 < \lambda < 0$$

esetén

$$\sqrt{x^2 + (\lambda x)^2} < r, \qquad \text{azaz} \qquad f(x,\lambda x) > 0.$$

Így tehát $(0{,}0)$-ban nincsen lokális szélsőérték.

5. Mivel

$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,,zy) = (2x-6-y{,}2y-x{,}2z+2) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$f'(x,y,z) = (0{,}0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(4{,}2,-1)\},$$

$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért $f''(4{,}2,-1)$ pozitív definit, így f-nek $(4{,}2,-1)$-ben lokális minimuma van.

6. Mivel

$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x+2{,}2y+4{,}2z-6) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$f'(x,y,z) = (0{,}0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(-1,-2{,}3)\},$$

$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért $f''(0{,}0{,}0)$ pozitív definit, így f-nek $(0{,}0{,}0)$-ben lokális minimuma van.

7. Mivel

$$f'(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = (3x^2+12y{,}2y+12x{,}2z+2) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$f'(x,y,z) = (0{,}0{,}0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \{(0{,}0,-1); (24,-144,-1)\},$$

$$f''(x,y,z) = H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért

– $f''(0{,}0,-1)$ indefinit, hiszen karakterisztikus polinomja

$$p(z) := (z-2)(z^2-2z-144) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

aminek van pozitív és negatív zérushelye, így f-nek $(0{,}0,-1)$-ben nincsen szélsőértéke;

– $f''(24,-144,-1) = \begin{bmatrix} 144 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(24,-144,-1)$-ben lokális minimuma van. ■

Mérési eredmények kiértékelésekor gyakran találkozunk az alábbi feladattal.

1.5.5. feladat. Valamely mérés eredményeként a $P(x_1,y_1)$,..., $P_n(x_n,y_n)$ pontokat kapjuk. Határozzuk meg azt az $y = ax+b$ egyenletű egyenest, amely legjobban közelíti a mérési pontokat! A legjobb közelítés azt jelenti az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(A,B) = \sum_{k=1}^{n} (Ax_k + B - y_k)^2$$

függvénynek minimuma van.

Útm. Mivel

$$f'(A,B) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2x_k(Ax_k+B-y_k), \sum_{k=1}^{n} 2(Ax_k+B-y_k) \right) = (0{,}0) \qquad ((A,B) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért $f(A,B) = (0{,}0)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$A\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + B\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0 \qquad \text{és} \qquad A\sum_{k=1}^{n} x_k + nB - \sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Az

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \text{ill. az} \qquad \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$B = -A\overline{x} + \overline{y}, \qquad \text{ill.} \qquad A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x\overline{x}^2}$$

A nevező az ún. **empirikus szórásnégyzet**: σ_n^2 (a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt pozitív).

$$\det(f''(A,B)) = \det \begin{bmatrix} 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 & 2n\overline{x} \\ 2n\overline{x} & 2n \end{bmatrix} = 4n^2\sigma_n^2 > 0,$$

így valóban lokális minimum van.

Megjegyzés. Ha a mérési pontok közelítőleg az $y = be^{Ax}$ egyenletű görbére illeszkednek, A és b meghatározása az előző feladatra vezethető vissza, ui.

$$\ln(y) = \ln(b) + Ax$$

(feltéve, hogy $b > 0$, $y_k > 0$). Hasonlóan vezethető vissza az alapfeladatra az $y = bx^A$ kapcsolat is. ■

1.5.1. gyakorló feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

1. $f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
2. $f(x,y) := (1+e^y)\cos(x) - ye^y$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
3. $f(x,y) := (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;
4. $f(x,y,z) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
5. $f(x,y,z) := x^2 + y^3 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;
6. $f(x,y,z) := x + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x,y,z > 0)$.

Útm.

1.5.0. tétel (Weierstraß). Ha $d \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}^d$ kompakt (korlátos és zárt) halmaz, továbbá az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor alkalmas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$ pontokra

$$f(\mathbf{a}) = \min\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} :\ \mathbf{r} \in H\} \qquad \text{és} \qquad f(\mathbf{b}) = \max\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} :\ \mathbf{r} \in H\}$$

teljesül.

Biz. ■

1.5.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, továbbá $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ olyan nem állandó folytonos függvény, amely differenciálható Ω-n, úgy ha f állandó az Ω halmaz $\partial\Omega$ határán, akkor f-nek van stacionárius pontja az Ω halmazban!

Útm. Mivel $\overline{\Omega}$ kompakt (korlátos és zárt) és f folytonos, ezért Weierstraß tétele következtében van olyan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{\Omega}$, hogy

$$f(\mathbf{a}) = \min\left\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} :\ \mathbf{r} \in \overline{\Omega}\right\} \qquad \text{és} \qquad f(\mathbf{b}) = \max\left\{f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} :\ \mathbf{r} \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Mivel f állandó $\partial\Omega$-n, ezért

$$\mathbf{a} \in \Omega \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{b} \in \Omega,$$

így (vö. 1.5.0. tétel) $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ stacionárius pontja f-nek. ■

1.5.7. feladat. Adott $c > 0$ szám, ill.

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0, c], \, y \in [c - x, c]\right\}$$

halmaz esetén számítsuk ki az

$$f(x, y) := \sqrt{c(c - x)(c - y)(x + y - c)} \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvény abszolút maximumhelyét!

Útm. Mivel $f \geq 0$ és Ω határán $f = 0$:

$$f(x, y) = 0 \qquad ((x, y) \in \partial\Omega),$$

ezért, ha f-nek van maximuma, azt az Ω belsejében veszi fel. f folytonos az Ω kompakt (korlátos és zárt) halmazon, ezért Weierstraß tétele következményeként van olyan

$$(a, b) \in \Omega \backslash \partial\Omega$$

pont, amelyben f felveszi maximumát. Erre a pontra

$$\partial_1 f(a, b) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(a, b) = 0,$$

azaz

$$\left.\frac{c(c - y)(2c - 2x - y)}{2f(x, y)}\right|_{(x,y)=(a,b)} = 0 \qquad \text{és} \qquad \left.\frac{c(c - x)(2c - 2y - x)}{2f(x, y)}\right|_{(x,y)=(a,b)} = 0$$

vagyis

$$c(c - b)(2c - 2a - b) = 0 \qquad \text{és} \qquad c(c - a)(2c - 2b - a) = 0$$

teljesül. Mivel (a, b) belső pontja Ω-nak, ezért

$$2c - 2a - b = 0 \qquad \text{és} \qquad 2c - 2b - a = 0,$$

amiből

$$a = b = \frac{2c}{3}$$

következik. ■

1.5.8. feladat. Egy adott körbe írható háromszögek közül melyiknek lesz a

1. kerülete
2. területe

a legnagyobb?

Útm.

1. Ha R a kör sugara, akkor (vö. ábra) a háromszög kerülete:

$$K = 2R\left[\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)\right].$$

Mivel $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, ezért

$$\sin(\gamma) = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta).$$

Tehát az

$$f(\alpha, \beta) := \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha + \beta) \qquad (\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < \pi)$$

függvény abszolút minimumhelyét kell meghatároznunk. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 0, \qquad \partial_1 f(\alpha, \beta) = \cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, ezért f-nek lokális szélsőértéke csak az $\alpha = \beta$ esetben lehet, hiszen $\alpha, \beta < \pi$. Ez azt jelenti, hogy

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0,$$

azaz $\alpha = \pi/3$. Mivel

$$H_f(\alpha, \beta) \equiv \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) - \sin(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & -\sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

és

$$H_f(\pi/3, \pi/3) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

ezért f-nek az $\alpha = \beta = \pi/3$-ban lokális maximuma van és

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Azt kell már csak megmutatni, hogy ez a lokális maximum egyúttal abszolút maximum is. Ha

$$\Omega := \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha + \beta \leq \pi\right\},$$

akkor Ω határa az alábbi három szakasz egyesítése:

$$\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

ahol

$$\Omega_1 := \left\{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha \in [0, \pi]\right\}, \qquad \Omega_2 := \left\{(0, \beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \beta \in [0, \pi]\right\}$$

és

$$\Omega_3 := \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha + \beta = \pi\right\}.$$

Ha

$$g(\alpha, \beta) := \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha + \beta) \qquad ((\alpha, \beta) \in \Omega),$$

akkor a Weierstraß-tétel következtében g felveszi abszolút maximumát, továbbá

$$g(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2\sin(\alpha) & ((\alpha, \beta) \in \Omega_1), \\ 2\sin(\beta) & ((\alpha, \beta) \in \Omega_2), \\ 2\sin(\alpha) & ((\alpha, \beta) \in \Omega_3). \end{cases}$$

Mivel
$$\max\left\{g(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}:\ (\alpha,\beta)\in\partial\Omega\right\}=1<\frac{3\sqrt{3}}{2},$$
ezért g – és így f is – abszolút maximumát Ω belsejében, azaz az $(\alpha,\beta)=(\pi/3,\pi/3)$ pontban veszi fel. A keresett háromszög tehát az egyenlő oldalú háromszög.

2. Ha R a kör sugara, akkor (vö. ábra) a háromszög területe:
$$T=\frac{2R\sin(\alpha)2R\sin(\beta)\sin(\gamma)}{2}.$$
Mivel $\gamma=\pi-\alpha-\beta$, ezért
$$\sin(\gamma)=\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta).$$
Tehát az
$$f(\alpha,\beta):=\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta)\qquad(\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta<\pi)$$
függvény abszolút maximumhelyét kell meghatároznunk. Mivel
$$\begin{aligned}\partial_1 f(\alpha,\beta)&=\cos(\beta)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta)&=0,\\ \partial_2 f(\alpha,\beta)&=\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta)&=0\end{aligned}$$
pontosan akkor teljesül, ha
$$\begin{aligned}\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)\cos(\alpha+\beta)&=0,\\ \cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha+\beta)&=0,\end{aligned}$$
hiszen $\sin(\alpha)\sin(\beta)\neq 0$. A fenti két egyenlet nem más, mint
$$\sin((\alpha+\beta)+\alpha)=0\qquad\text{és}\qquad\sin((\alpha+\beta)+\beta)=0,$$
ezért
$$\partial_1 f(\alpha,\beta)=0=\partial_2 f(\alpha,\beta)$$
pontosan akkor teljesül, ha
$$2\alpha+\beta=\pi\qquad\text{és}\qquad\alpha+2\beta=\pi,$$
azaz
$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$
Ha
$$\Omega:=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\ \alpha+\beta\le\pi\right\},$$
és
$$g(\alpha,\beta):=\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta)\qquad((\alpha,\beta)\in\Omega),$$
akkor g folytonos, így a Weierstraß-tétel következtében felveszi abszolút maximumát. Mivel
$$g(\alpha,\beta)=0\qquad((\alpha,\beta)\in\partial\Omega)$$
és
$$g(\pi/3,\pi/3)=f(\pi/3,\pi/3)=\sin(\pi/3)\sin(\pi/3)\sin(2\pi/3)=2(\sin(\pi/3))^2\cos(\pi/3)>0,$$
ezért g – és így f is – abszolút maximumát Ω belsejében, azaz az $(\alpha,\beta)=(\pi/3,\pi/3)$ pontban veszi fel. A keresett háromszög tehát az egyenlő oldalú háromszög. ■

1.5.9. feladat. Tegyük fel, hogy egy elegendően vékony, félkör alakú lemezen a hőmérséklet-eloszlás

$$T(x,y) := 10 - 40\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ 0<x^2+y^2\leq 1), \qquad T(0{,}0)=10$$

alakú. A lemez mely pontja legmelegebb, ill. leghidegebb?

Útm. Mivel

$$\lim_{\mathbf{0}} T = 10,$$

ezért T az

$$\Omega := \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq u\leq 1,\ 0\leq u^2+v^2\leq 1\right\}$$

kompakt (korlátos és zárt) halmazon értelmezett folytonos függvény. Weierstraß tétele következtében tehát van T-nek legisebb és legnagyobb értéke (a lemezen van leghidegebb és legmelegebb pont). Az Ω halmaz belsejében T deriválható függvény. Ha tehát $(x,y)\in\operatorname{int}(\Omega)$, akkor a

$$\partial_1 T(x,y) = -40\frac{2xy^2(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

és

$$\partial_1 T(x,y) = -40\frac{2x^2y(x^2+y^2)-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

feltételből

$$(x=1, \quad y\in[-1{,}1]), \qquad \text{ill.} \qquad (x=\in[0{,}1], \quad y=0)$$

következik. Mivel ezekben az (x,y) pontokban $T(x,y)=10$ és T nem vesz fel 10-nél nagyobb értéket, ezért ezekben a pontokban lokális maximumok vannak. Vizsgáljuk meg most a lemez hőmérséklete-loszlását annak határán! Világos, hogy

$$\partial\Omega = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u=0,\ v\in[-1{,}1]\right\}\cup\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u>0,\ u^2+v^2=1\right\} =: \Omega_1\cup\Omega_2$$

és

$$T(x,y)=10 \qquad ((x,y)\in\Omega_1),$$

ill.

$$T(x,y) = 10-40\frac{y^2(1-y^2)}{1} =: \varphi(y) \qquad ((x,y)\in\Omega_2),$$

azaz

$$\varphi(y) = 40y^4-40y^2+10 \qquad (y\in(-1{,}1)).$$

Mivel

$$\varphi'(y) = 160y^3-80y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

és

$$T(1{,}0)=10, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,$$

ezért ezekben a pontokban lokális maximum, ill. lokális minimumok vannak. Tehát a lemez az

$$A := \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u=0,\ v\in[-1{,}1]\right\}, \qquad B := \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u=\in[0{,}1],\ v=0\right\}$$

halmazok pontjaiban a legmelegebb és

$$T(x,y) = 10 \qquad ((x,y) \in A \cup B),$$

ill. az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontokban a leghidegebb:

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \qquad T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

2. fejezet

Feltételes szélsőérték

Tegyük fel, hogy egységnyi sugarú körbe írt téglalapok között a legnagyobb területű megahtározása a feladat! Vegyük fel a koordináta-rendszert, és jelöljük (x, y)-nal az egyik csúcs koordinátáit! Ekkor a téglalap területe:

$$T(x, y) := 4xy \quad (x, y \in (0,1)).$$

Mivel a téglalap csúcsai a körön vannak, ezért $x^2 + y^2 = 1$. Ha

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y \in (0,1), \; x^2 + y^2 = 1\right\},$$

akkor a szóbanforgó feladat a T függvény H-ra vonatkozó leszűkítésének maximumhelyének megkeresését jelenti.

A következőkben valamivel általánosabb esetben megvizsgáljuk a most megfogalmazott feladatot, azaz legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ún. **célfüggvény**) és $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$, majd tegyük fel, hogy a

$$\{\mathbf{g} = \mathbf{0}\} := \{\mathbf{r} \in \Omega : \; \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\}$$

ún. **feltételi halmaz**ra $\{\mathbf{g} = \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ teljesül!

2.0.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ feltételre vonatkozóan lokális [abszolút] **feltételes szélsőértéke** van a $\mathbf{c} \in \{\mathbf{g} = \mathbf{0}\}$ pontban, ha az f függvény $\{\mathbf{g} = \mathbf{0}\}$ halmazra való leszűkítésének, azaz az

$$F(\mathbf{r}) := f(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in \{\mathbf{g} = \mathbf{0}\})$$

függvénynek lokális [abszolút] szélsőértéke van a $\mathbf{c}$ pontban.

A korábbiakkal összehangban $f(\mathbf{c})$-re használjuk a **feltételes** lokális [abszolút] **szélsőérték**, ill. $\mathbf{c}$-re a **feltételes** lokális [abszolút] **szélsőértékhely** elnevezést is.

2.0.1. tétel. (Elsőrendű szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőérték létezésére). Ha

- $f \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}^1$;
- f-nek a $\mathbf{c} \in \{\mathbf{g} = \mathbf{0}\}$ pontban feltételes lokális szélsőértéke van $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ feltételre vonatkozóan;
- $m < n$,
$$\operatorname{rang}(\mathbf{g}'(\mathbf{c})) = m,$$
azaz a $g_k'(\mathbf{c}))$ $(k \in \{1, \ldots, m\})$ vektorok lineárisan függetlenek,

akkor van olyan $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektor[1], hogy az

$$L := f + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g} \rangle := f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k : \Omega \to \mathbb{R}$$

ún. **Lagrange-függvény**re

$$L'(\mathbf{c}) = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz} \qquad \partial_l f(\mathbf{c}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial_l g_k(\mathbf{c}) = 0 \quad (1 \leq l \leq n)$$

teljesül.

Biz. ■

2.0.2. tétel. (Másodrendű elésgséges feltétel a feltételes lokális szélsőéréték létezésére). Tegyük fel, hogy

- $f \in \mathfrak{D}^2$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}^2$;
- $\mathbf{c} \in \{\mathbf{g} = \mathbf{0}\}$, $\operatorname{rang}(\mathbf{g}'(\mathbf{c})) = m < n$;
- valamely $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ vektorral az
$$L := f + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g} \rangle$$
függvényre
  - $L'(\mathbf{c}) = \operatorname{grad} L(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$;
  - a
  $$Q_{\mathbf{c}}^L := \langle L''(\mathbf{c})\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n)$$
  kvadratikus alak a $\mathbf{g}'(\mathbf{c})$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f függvénynek $\mathbf{c}$-ben a $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Biz. ■

2.0.1. feladat. Határozzuk meg az egységnyi sugarú körbe írt téglalapok között a legnagyobb területűt!

Útm. Legyen

$$f(x,y) := 4xy, \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad (x, y \in \Omega := (0,1)).$$

Így valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad ((x,y) \in \Omega)\,.$$

Ekkor a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*) \in \Omega$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*,y^*)\right) = \operatorname{rang}\,[2x^*, 2y^*] = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^*)^2 + (y^*)^2 > 0$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*,y^*) = 4y^* + 2\lambda x^* = 0, & (I.) \\[2ex] \partial_2 L(x^*,y^*) = 4x^* + 2\lambda y^* = 0, & (II.) \\[2ex] g(x^*,y^*) = (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 = 0. & (III.) \end{array}\right\}$$

Ekkor $(I.)$ és $(II.)$ különbsége

$$2(y^* - x^*) + \lambda(x^* - y^*) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^* - y^*)(\lambda - 2) = 0.$$

Ha $x^* = y^*$, akkor

$$x^* = y^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad \lambda = -2.$$

Ha $\lambda = 2$, akkor $x^* = -y^*$, ami nem lehetséges. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*,y^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 4 \\ 4 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

mátrix szemidefinit, de az

$$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{h} \mapsto \langle L''(x^*,y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 2\lambda(h_1^2 + h_2^2) + 8h_1h_2 = -4(h_1 - h_2)^2$$

kvadratikus alak definit a

$$g'(x^*,y^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad (0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2)$$

feltételre vonatkozóan, ui. $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$g'(x^*,y^*) \cdot \mathbf{h} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2x^*h_1 + 2y^*h_2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad h_1 = -\frac{y^*}{x^*} h_2.$$

Tehát

$$g'(x^*,y^*)\cdot\mathbf{h}=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathbf{h}=(\xi,-\xi)\quad(\xi\in\mathbb{R}),$$

azaz $\xi\neq 0$ esetén

$$\left\langle L''(x^*,y^*)\mathbf{h},\mathbf{h}\right\rangle=-4(2\xi)^2=-16\xi^2.$$

Így az f függvénynek az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontban a $g=0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma van. ■

2.0.2. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y,z):=x+2y+3z\qquad\left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)$$

függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2+y^2=2$, $y+z=1$ feltételekre nézve!

Útm. Legyen

$$\mathbf{g}(x,y,z):=(x^2+y^2-2,y+z-1)\qquad\left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right).$$

Ekkor valamely $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y,z)=x+2y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-1)\quad\left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*,y^*,z^*)\in\mathbb{R}^3$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{g}'(x^*,y^*,z^*)\right)=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}2x^* & 2y^* & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll}\partial_1L(x^*,y^*,z^*)=1+\lambda 2x^*=0, & (I.)\\[2ex] \partial_2L(x^*,y^*,z^*)=2+\lambda 2y^*+\mu=0, & (II.)\\[2ex] \partial_3L(x^*,y^*,z^*)=3+\mu=0, & (III.)\\[2ex] g_1(x^*,y^*,z^*)=(x^*)^2+(y^*)^2-2=0 & (IV.)\\[2ex] g_2(x^*,y^*,z^*)=y^*+z^*-1=0. & (V.)\end{array}\right\}$$

Ekkor $(x^*)^2+(y^*)^2\neq 0$, ami teljesül, ui. $(IV.)$ miatt $(x^*)^2+(y^*)^2=2$, és $(III.)$ miatt $\mu=-3$, így $(I.)$ és $(II.)$ összege $2\lambda(x^*+y^*)=0$. $(I.)$ miatt azonban $\lambda\neq 0$, így $x^*=-y^*$. Ezt $(IV.)$-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $(x^*)^2=1$, azaz $x^*=\pm 1$. Így $y^*=\mp 1$, és $y^*=1$ esetén $z^*=0$, ill. $y^*=-1$ mellett $z^*=2$. Továbbá $(I.)$-ből $x^*=1$ esetén $\lambda=-\frac{1}{2}$, ill. $x^*=-1$ esetén $\lambda=\frac{1}{2}$. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*,y^*,z^*)\in\{(1,-1,2);(-1,1,0)\}$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*,y^*,z^*)=\begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szemidefinit, de az

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{h} \mapsto \left\langle L''(x^*,y^*,z^*)\mathbf{h},\mathbf{h}\right\rangle = 2\lambda(h_1^2+h_2^2)$$

kvadratikus alak definit a

$$\mathbf{g}'(x^*,y^*,z^*)\cdot\mathbf{h}=0 \qquad (0\neq\mathbf{h}\in\mathbb{R}^3)$$

feltételre vonatkozóan, ui. $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^3$ esetén

$$\mathbf{g}'(x^*,y^*,z^*)\cdot\mathbf{h} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^*h_1+2y^*h_2 \\ h_2+h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(h_1=-\frac{y^*}{x^*}h_2 \quad \& \quad h_2=-h_3\right).$$

Tehát

$$\mathbf{g}'(x^*,y^*,z^*)\cdot\mathbf{h}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{h}=(\xi,\xi,-\xi) \quad (\xi\in\mathbb{R}),$$

azaz $\xi\neq 0$ esetén

$$\left\langle L''(x^*,y^*,z^*)\mathbf{h},\mathbf{h}\right\rangle = \begin{cases} 4\lambda\xi^2>0 & \left(\lambda=\frac{1}{2}\right), \\ \\ 4\lambda\xi^2<0 & \left(\lambda=-\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Így f-nek az $(1,-1{,}2)$, ill. a $(-1{,}1{,}0)$ pontban a $\mathbf{g}=0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van, és $f(1,-1{,}2)=5$, ill. $f(-1{,}1{,}0)=1$. ■

2.0.0. megjegyzés. Ha a $\{\mathbf{g}=\mathbf{0}\}$ feltételi halmaz kompakt (korlátos és zárt) és f folytonos függvény, akkor a Weierstraß-tétel következtében még a feltételes abszolút szélsőértékek létezése is biztosított.

2.0.1. példa. A fenti feladatban is ez az eset áll fenn, ui. azon $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pontok halmaza, amelyre $\mathbf{g}(x,y,z)=(0{,}0)$ az $x^2+y^2=2$ egyenletű körhenger és az $y+z=1$ egyenletű sík által meghatározott ellipszis, ezért a $\{\mathbf{g}=\mathbf{0}\}$ halmaz kompakt. Lévén, hogy f folytonos, $f|_{\mathbf{g}=\mathbf{0}}$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel $f(1,-1{,}2)=5$ és $f(-1{,}1{,}0)=1$, ezért az $(1,-1{,}2)$, ill. a $(-1{,}1{,}0)$ pontokban f-nek a $g=0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van.

2.0.3. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := 4x + 2y - 9 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$g(x,y) := x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) := 4x + 2y - 9 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$$

pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*, y^*)\right) = \left(2x^*, \frac{y^*}{2}\right) = 1$$

és

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 L(x^* x, y^*) &= 4 + 2\lambda x^* = 0, && (I.)\\ \partial_2 L(x^*, y^*) &= 2 + \frac{\lambda y^*}{2} = 0, && (II.)\\ g(x^*, y^*) &= (x^*)^2 + \frac{(y^*)^2}{4} - 1 = 0. && (III.) \end{aligned}\right\}$$

Ekkor $(I.) - 2 \cdot (II.)$:

$$\lambda(2x^* - y^*) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y^* = 2x^*.$$

Ez esetben $(III.)$-ba, ill. $(I.) - (II.)$-be való helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$x^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y^* = \pm\sqrt{2}, \qquad \lambda = \mp 2\sqrt{2}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad \text{ill. az} \qquad (x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. A

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen) is definit, ezért f-nek az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

pontban feltételes lokális minimuma van $/\lambda = -2\sqrt{2}/$, az

$$(x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

pontban pedig feltételes lokális maximuma van $/\lambda = 2\sqrt{2}/$.

Megjegyzés. Az

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; g(x, y) = 0\right\}$$

halmaz kompakt (korlátos és zárt). Lévén, hogy f folytonos, $f|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 9 \qquad \text{és} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 9,$$

ezért az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

pontokban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes maximuma, ill. minimuma van. ■

2.0.4. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x, y) := e^{xy} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x, y, \; x^2 + y^2 = 1)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x, y) = e^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

így a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$$

pontban teljesül, amelyre

$$\text{rang}\left(g'(x^*, y^*)\right) = (2x^*, 2y^*) = 1$$

és

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 L(x^* x, y^*) &= y^* e^{x^* y^*} + 2\lambda x^* = 0, \quad (I.) \\ \partial_2 L(x^*, y^*) &= x^* e^{x^* y^*} + 2\lambda y^* = 0, \quad (II.) \\ g(x^*, y^*) &= (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 = 0. \quad (III.) \end{aligned}\right\}$$

Ekkor $(I.)$ és $(II.)$ különbsége:

$$e^{x^* y^*}(y^* - x^*) + 2\lambda(y^* - x^*) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \left\{e^{x^* y^*} - 2\lambda\right)(y^* - x^*) = 0.$$

Két eset lehetséges:

– az első tényező zérus:

$$e^{x^*y^*} - 2\lambda = 0.$$

Így $(I.)$-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$2\lambda y^* + 2\lambda x^* = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lambda(x^* + y^*) = 0.$$

Tehát $\lambda \neq 0$ következtében $y^* = -x^*$, ami a feltételek miatt nem lehetséges.

– a második tényező zérus:

$$y^* - x^* = 0.$$

Ez esetben $(III.)$-ba, ill. $(I.) - (II.)$-be való helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda = -\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. A

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} (y^*)^2 e^{x^*y^*} & e^{x^*y^*} + y^*x^*e^{x^*y^*} \\ e^{x^*y^*} + x^*y^*e^{x^*y^*} & (x^*)^2 e^{x^*y^*} + 2\lambda \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{e}}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix indefinit, de az

$$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{h} \mapsto \big\langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h}\big\rangle = \frac{\sqrt{e}}{2}\left(-h_1^2 - h_2^2 + 6h_1h_2\right)$$

kvadratikus alak definit a

$$\big\langle g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h}\big\rangle = 0 \qquad (\mathbf{0} \neq \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2)$$

feltételre vonatkozóan, ui. bármely $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad} g(x^*, y^*), \mathbf{h}\rangle &= \begin{pmatrix} 2x^* & 2y^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x^*h_1 + 2y^*h_2 = \sqrt{2}(h_1 + h_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (h_1 = -h_2)\,. \end{aligned}$$

Tehát

$$g'(x^*, y^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{h} = (\xi, -\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

azaz $\xi \neq 0$ esetén

$$\big\langle L''(x^*, y^*)\mathbf{h}, \mathbf{h}\big\rangle = -4\sqrt{e}h_1 < 0.$$

Így f-nek az $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pontban lokális maximuma van, és

$$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{e}. \quad \blacksquare$$

2.0.5. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y,z) := x+2y+3z \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=2;\ y+z=1)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$\mathbf{g}(x,y,z) := (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) := (x^2+y^2-2, y+z-1) \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$$

Ekkor valamely $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y,z)x+2y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-1) \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*,y^*,z^*)\in\mathbb{R}^3$$

pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}(\mathbf{g}'(x^*,y^*,z^*)) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll}
\partial_1 L(x^*x,y^*,z^*) = 1+\lambda 2x^* = 0, & (I.) \\
\partial_2 L(x^*,y^*,z^*) = 2+\lambda 2y^* + \mu = 0, & (II.) \\
\partial_3 L(x^*,y^*,z^*) = 3+\mu = 0, & (III.) \\
g_1(x^*,y^*,z^*) = (x^*)^2+(y^*)^2-2 = 0, & (IV.) \\
g_2(x^*,y^*,z^*) = y^*+z^*-1 = 0. & (V.)
\end{array}\right\}$$

Ekkor

$$(x^*)^2+(y^*)^2 \neq 0,$$

ami teljesül, ui. $(IV.)$ miatt

$$(x^*)^2+(y^*)^2 = 2,$$

és $(III.)$ miatt $\mu=-3$, így $(I.)$ és $(II.)$ összege

$$2\lambda(x^*+y^*)=0.$$

$(I.)$ miatt azonban $\lambda\neq 0$, így $x^*=-y^*$. Ezt $(IV.)$-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $(x^*)^2=1$, azaz $x^*=\pm 1$. Így $y^*=\mp 1$, és $y^*=1$ esetén $z^*=0$, ill. $y^*=-1$ mellett $z^*=2$. Továbbá $(I.)$-ből

$$x^*=1 \quad \text{esetén} \quad \lambda=-\frac{1}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad x^*=-1 \quad \text{esetén} \quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$(x^*,y^*,z^*)\in\{(1,-1,2);(-1,1,0)\}$$

pontban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel:

1. módszer.. A

$$L''(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szemidefinit, de az

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{h} \mapsto \left\langle L''(x^*, y^*, z^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = 2\lambda(h_1^2 + h_2^2)$$

kvadratikus alak definit a

$$\mathbf{g}'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} = 0 \qquad (\mathbf{0} \neq \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3)$$

feltételre vonatkozóan, ui. bármely $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\mathbf{g}'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} \;=\; \begin{bmatrix} 2x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^* h_1 + 2y^* h_2 \\ h_2 + h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(h_1 = -\frac{y^*}{x^*} h_2 \quad \& \quad h_2 = -h_3 \right).$$

Tehát

$$\mathbf{g}'(x^*, y^*, z^*) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{h} = (\xi, \xi, -\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

azaz $\xi \neq 0$ esetén

$$\left\langle L''(x^*, y^*, z^*)\mathbf{h}, \mathbf{h} \right\rangle = \begin{cases} 4\lambda\xi^2 > 0 & \left(\lambda = \frac{1}{2}\right), \\[2ex] 4\lambda\xi^2 < 0 & \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Így f-nek az $(1, -1{,}2)$, ill. a $(-1{,}1{,}0)$ pontban lokális maximuma, ill. minimuma van, és

$$f(1, -1{,}2) = 5, \qquad \text{ill.} \qquad f(-1{,}1{,}0) = 1.$$

2. módszer.. Mivel azon $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontok halmaza, amelyre $\mathbf{g}(x, y, z) = (0{,}0)$ az

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{egyenletű körhenger és az} \qquad y + z = 1 \qquad \text{egyenletű sík}$$

által meghatározott ellipszis, ezért $\mathcal{D}_f$ kompakt (korlátos és zárt). Lévén, hogy f folytonos, szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel

$$f(1, -1{,}2) = 5 \qquad \text{és} \qquad f(-1{,}1{,}0) = 1,$$

ezért az

$$(1, -1{,}2), \qquad \text{ill.} \qquad (-1{,}1{,}0)$$

pontokban f-nek lokális maximuma, ill. minimuma van. ■

2.0.6. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + z = 1; \; 2x - y - 3z = 4)$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Útm. Legyen

$$\mathbf{g}(x,y,z) := (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) := (x + 2y + z - 1{,}2x - y - 3z - 4) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + z - 1) + \mu(2x - y - 3z - 4) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan

$$(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^3$$

pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{g}'(x^*, y^*, z^*)\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(x^*x, y^*, z^*) = 2x^* - \lambda - 2\mu = 0, & (I.) \\[2ex] \partial_2 L(x^*, y^*, z^*) = 2y^* + \lambda + \mu = 0, & (II.) \\[2ex] \partial_3 L(x^*, y^*, z^*) = 2z^* - \lambda + 3\mu = 0, & (III.) \\[2ex] g_1(x^*, y^*, z^*) = x^* + 2y^* + z^* - 1 = 0, & (IV.) \\[2ex] g_2(x^*, y^*, z^*) = 2x^* - y^* - 3z^* - 4 = 0. & (V.) \end{array}\right\}$$

Ekkor

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

miatt a rangfeltétel teljesül, és $(I.)$-et, ill. $(II.)$-t λ-ra, ill. μ-re megoldva

$$\lambda = \frac{2}{5}x^* + \frac{4}{5}y^*, \qquad \mu = \frac{4}{5}x^* - \frac{2}{5}y^*$$

adódik. Ezeket $(III.)$-ba írva és átrendezve kapjuk, hogy

$$x^* - y^* + z^* = 0.$$

Ez az egyenlet $(IV.)$-gyel és $(V.)$-tel olyan háromismeretlenes egyenletrendszert alkot, amelyben már csak x^*, y^* és z^* az ismeretlen:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^* + 2y^* + z^* & = & 1, \\ 2x^* - y^* - 3z^* & = & 4, \\ x^* - y^* + z^* & = & 0. \end{array}\right\}$$

Nézzük meg, hogy van-e ennek az egyenletrendszernek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Tehát ez az egyenletrendszer megoldható, és (visszahelyettesítéssel) a megoldása:

$$x^* = \frac{16}{15}, \qquad y^* = \frac{1}{3}, \qquad z^* = -\frac{11}{15}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e ebben az (x^*, y^*, z^*)-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.
Mivel az

$$L''(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, ezért ebben az (x^*, y^*, z^*) pontban f-nek lokális minimuma van és

$$f(x^*, y^*, z^*) = \frac{16^2 + 5^2 + 11^2}{15^2} = \frac{134}{75}.$$

Megjegyzés. A $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ feltétel két síkot határoz meg $\mathbb{R}^3$-ban, következésképpen a mindkét feltételt kielégítő pontok halmaza a két sík metszésvonalán helyezkedik el. Az $f(x, y, z)$ az (x, y, z) pont origótól mért távolságának a négyzete. Tehát olyan (x^*, y^*, z^*) pontot kerestünk ezen az egyenesen, amely az origóhoz legközelebb, ill. legtávolabb van. Geometrialilag nyilvánvaló, hogy van ilyen minimális távolságú pont, ill. maximális távolságú pont nincsen. ■

2.0.7. feladat. Adott $a, b \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$, ill.

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right\}$$

esetén számítsuk ki az

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \qquad ((x, y) \in H)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm.

1. módszer.. Világos, hogy $(s, t) \in H$ pontosan akkor teljesül, ha

$$t = b - \frac{b}{a}s.$$

Így, ha

$$\varphi(s) := f\left(s, b - \frac{b}{a}s\right) = s^2 + b^2 - \frac{2b^2}{a}s + \frac{b^2}{a^2}s^2 \qquad (s \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\varphi'(s) = 2s - \frac{2b^2}{a} + \frac{2b^2}{a^2}s = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Ekkor

$$t = b - \frac{b}{a} \cdot \frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2},$$

ill.

$$\varphi''(s) = 2 + \frac{2b^2}{a^2} > 0 \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jekenti, hogy f-nek az

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2 b}{a^2+b^2} \right)$$

pontban van lokális minimuma.

2. módszer..

Legyen

$$g(x,y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*, y^*)\right) = \operatorname{rang}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1$$

és

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 L(x^*, y^*) &= 2x^* + \frac{\lambda}{a} = 0, && (I.) \\ \partial_2 L(x^*, y^*) &= 2y^* + \frac{\lambda}{b} = 0, && (II.) \\ g(x^*, y^*) &= \frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} - 1 = 0. && (III.) \end{aligned}\right\}$$

$(I.)$-ből azt kapjuk, hogy $\lambda = -2ax^*$. Ezt $(II.)$-be helyettesítve

$$2y^* - \frac{2a}{b} x^* = 0, \quad \text{azaz} \quad x^* = \frac{b}{a} y^*$$

adódik. Így $(III.)$ miatt

$$\frac{b}{a^2} y^* + \frac{y^*}{b} = 1, \quad \text{azaz} \quad y^* \left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{b} \right) = 1,$$

ahonnan

$$x^* = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad y^* = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

következik. Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e (x^*, y^*)-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$L''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, így az (x^*, y^*) pontban f-nek lokális minimuma van. ∎

2.0.8. feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := x + y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit az

$$x^4 + y^4 = 1$$

feltételre nézve!

Útm. Legyen

$$g(x,y,z) := x^4 + y^4 - 1 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x,y,z) = x + y + \lambda(x^4 + y^4 - 1) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ pontban teljesül, amelyre

$$\text{rang}\,(g'(\widetilde{x}, \widetilde{y})) = \text{rang}\begin{pmatrix} 4\widetilde{x} & 4\widetilde{y} \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 > 0,$$

és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1 L(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 1 + 4\lambda\widetilde{x}^3 = 0, & (I.) \\ \\ \partial_2 L(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 1 + 4\lambda\widetilde{y}^3 = 0, & (II.) \\ \\ g(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{x}^4 + \widetilde{y}^4 - 1 = 0. & (III.) \end{array}\right\}$$

Az $(I.) - (III.)$ egyenlet-rendszer megoldása: az $(I.) - (II.)$ egyenletek különbsége:

$$0 = 4\lambda\left(\widetilde{x}^3 - \widetilde{y}^3\right) = 4\lambda\left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right)\left(\widetilde{x}^2 + \widetilde{x}\widetilde{y} + \widetilde{y}^2\right) = 4\lambda\left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right)\left[\left(\widetilde{x} + \frac{\widetilde{y}}{2}\right)^2 + \frac{3\widetilde{y}^2}{4}\right],$$

amiből $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ adódik. Ezt $(III.)$-ba helyettesítve két stacionárius pontot kapunk:

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\right\}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel:

1. módszer:. A

$$L''(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \begin{bmatrix} 8\lambda\widetilde{x}^2 & 0 \\ 0 & 8\lambda\widetilde{y}^2 \end{bmatrix}$$

(feltételesen is) definit, méghozzá

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

esetén negatív definit, hiszen ekkor $\lambda < 0$ (lásd: $(I.) - (II.)$), ill.

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

esetén pozitív definit, hiszen ekkor $\lambda > 0$ (lásd: $(I.) - (II.)$). Így tehát az

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \qquad \text{ill.} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

pontokban f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma, ill. minimuma van.

2. módszer:. Az

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ g(x, y) = 0\right\}$$

halmaz kompakt (korlátos és zárt). Lévén, hogy f folytonos, $f|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. Mivel

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \qquad \text{és} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}},$$

ezért az

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \qquad \text{ill. a} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

pontokban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes maximuma, ill. minimuma van. ■

2.0.9. feladat. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ szimmetrikus mátrix, majd határozzuk meg a

$$Q(\mathbf{r}) := \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} m_{ij}x_i x_j \qquad \left(\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{r}\| = 1\right)$$

függvény (vö. 1.4.1. definíció) lokális szélsőlrékhelyeeit!

Útm. Legyen

$$g(\mathbf{r}) := \|\mathbf{r}\| - 1 \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d).$$

Ekkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(\mathbf{r}) := Q(\mathbf{r}) + \lambda g(\mathbf{r}) = \langle M\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle + \lambda(\|\mathbf{r}\| - 1) \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d)$$

ezért a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $\widetilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^d$ pontban teljesül, amelyre

$$\operatorname{rang}\left(g'(\widetilde{\mathbf{r}}\right) = \operatorname{rang}\ (2\widetilde{\mathbf{r}}) = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \widetilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\},$$

és

$$L'(\widetilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \qquad \text{ill.} \qquad g(\widetilde{\mathbf{r}}) = 0$$

teljesül. Mivel

$$L'(\mathbf{r}) \equiv Q'(\mathbf{r}) + g'(\mathbf{r})$$

és bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_k Q(\mathbf{r}) &= \partial_k \left(\sum_{i,j=1}^{d} m_{ij} x_i x_j \right) = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_k (m_{ij} x_i x_j) = \sum_{i,j=1}^{d} m_{ij} (\partial_k x_i) x_j + \sum_{i,j=1}^{d} m_{ij} x_i (\partial_k x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{d} m_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{d} m_{ik} x_i = 2 \sum_{i=1}^{d} m_{ki} x_i, \end{aligned}$$

hiszen $M^T = M$, ezért

$$Q'(\mathbf{r}) \equiv 2M\mathbf{r}.$$

Mivel az

$$\Omega := \left\{ \mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; \|\mathbf{r}\| = 1 \right\}$$

halmaz kompakt (korlátos és zárt), L folytonos, ezért $L|_\Omega$ szélsőértékeinek létezése a Weiertraß-tétel alapján biztosított. Így alkalmas $\widetilde{\mathbf{r}} \in \Omega$ esetén

$$2M\widetilde{\mathbf{r}} + \lambda 2\widetilde{\mathbf{r}} = L'(\widetilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{0},$$

ahonnan a $\mu := -\lambda$ jelöléssel

$$M\widetilde{\mathbf{r}} = \mu\widetilde{\mathbf{r}}$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $\widetilde{\mathbf{r}}$ sajátvektora M-nek. Mivel

$$Q(\widetilde{\mathbf{r}}) = \langle M\widetilde{\mathbf{r}}, \widetilde{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mu\widetilde{\mathbf{r}}, \widetilde{\mathbf{r}} \rangle = \mu,$$

ezért Q maximumát, ill. minimumát az M mátrix olyan sajátvektorain veszi fel, amelyek M legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékeihez tartoznak.

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy minden valós elemű szimmetrikus mátrixnak van valós sajátértéke. ■

2.0.0. megjegyzés. $Q^L_{\mathbf{c}}$-nek a $\mathbf{g}'(\mathbf{c})$-re vonatkozó definitsége a következőképpen dönthető el (vö. 1.4.3. tétel): ha H_k jelöli a

$$H := \begin{bmatrix} L''(\mathbf{c}) & \mathbf{g}'(\mathbf{c})^T \\ \mathbf{g}'(\mathbf{c}) & \mathbf{O}_m \end{bmatrix}$$

mátrix első k sorából és oszlopából álló mátrixot ($k \in \{1, \ldots, m+n\}$), úgy a $Q^L_{\mathbf{c}}$ kvadratikus alak a $\mathbf{g}'(\mathbf{c})$-re vonatkozóan pozitív, ill. negatív definit, amennyiben

$$(-1)^m \det(H_k) > 0, \quad \text{ill.} \quad (-1)^{m+k} \det(H_k) > 0 \qquad (k \in \{2m+1, \ldots, m+n\}).$$

2.0.2. példa. A 2.0.1. feladat esetében $m = 1$, $n = 2$, továbbá

$$H = \begin{bmatrix} L''(\mathbf{c}) & g'(\mathbf{c})^T \\ g'(\mathbf{c}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 4 & 2x^* \\ 4 & 2\lambda & 2y^* \\ 2x^* & 2y^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\det(H) = \ldots = -8\lambda\{(x^*)^2 + (y^*)^2\} > 0,$$

ezért (x^*, y^*)-ban feltételes lokális maximum van.

2.0.10. feladat. Az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

gömbfelület mely pontjai vannak a legnagyobb (legkisebb) távolságra az

– $(4,4,2)$;

– $(1,2,2)$;

– $(-2,1,0)$;

ponttól?

Útm. Legyen $P(x, y, z)$ a gömbfelület egy pontja. Ekkor P-nek P_0-tól való távolságnégyzete:

– $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 =: f(x, y, z)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;

– $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 =: f(x, y, z)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;

– $d^2 = \overrightarrow{P_0P}^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 =: f(x, y, z)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$.

A feltételi halmaz a gömb felülete:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\},$$

– $L(x, y, z) = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;

– $L(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$;

– $L(x, y, z) = (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^2)$.

Az elsőrendű szükséges feltétel szerint

– $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x, y, z) & = & 2(x-4) + 2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x, y, z) & = & 2(y-4) + 2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x, y, z) & = & 2(z-2) + 2\lambda z & = & 0 \\ g(x, y, z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 9 & = & 0\,; \end{array}$$

– $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x, y, z) & = & 2(x-1) + 2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x, y, z) & = & 2(y-2) + 2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x, y, z) & = & 2(z-2) + 2\lambda z & = & 0 \\ g(x, y, z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 9 & = & 0\,; \end{array}$$

– $$\begin{array}{lclcl} \partial_1 L(x,y,z) & = & 2(x+2)+2\lambda x & = & 0 \\ \partial_2 L(x,y,z) & = & 2(y-1)+2\lambda y & = & 0 \\ \partial_3 L(x,y,z) & = & 2z+2\lambda z & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2-9 & = & 0\,. \end{array}$$

Ezeknek az egyenletrendszereknek a megoldása (**HF**):

- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(1{,}1,\frac{1}{2}\right);\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(\lambda \in \{3;-5\})$;
- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right);(1{,}2{,}2)\right\}$ $(\lambda \in \{-2;0\})$;
- $(x^*,y^*,z^*) \in \left\{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{-3\sqrt{5}}{5},0\right);\left(\frac{-6\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$ $(\lambda \in \{\frac{-\sqrt{5}}{3}-1,\frac{\sqrt{5}}{3}-1\})$;

$$\operatorname{rang}\left(g'(x^*,y^*,z^*)\right) = (2x^*{,}2y^*{,}2z^*) = 1,$$

továbbá

$$L''\left(x^*,y^*,z^*\right) = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

(minden esetben), így

- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = 3$, ill. negatív definit, ha $\lambda = -5$;
- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = 0$, ill. negatív definit, ha $\lambda = -2$;
- $L''\left(x^*,y^*,z^*\right)$ (feltételesen is) pozitív definit, ha $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{3}-1$, ill. negatív definit, ha $\lambda = \frac{\sqrt{-5}}{3}-1$.

Mivel a gömbfelület kompakt halmaz, f folytonos, szélsőértékeinek létezése a Weierstraß-tétel alapján biztosított. A szükséges feltéel csak két lehetséges szélsőértékhelyet szolgáltat, így ezek közül az egyikben lesz f minimális, a másikban pedig maximális a $g = 0$ feltételre vonatkozóan.

■

2016.06.15.

3. fejezet

Az inverz függvényre vonatkozó tétel

Az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozik a

3.0.1. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$$

inverz függvényre a következők igazak:

1. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(a) \neq 0;$
2. $f^{-1} \in \mathfrak{D}[f(a)] \qquad \Longrightarrow$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a)))} = \frac{1}{f'(a)}\,.}$$

Biz. ■

3.0.1. példa.

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

3.0.2. példa. Tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.0.3. példa.

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3.0.1. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, ill. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy az f leképezés **lineáris**, ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

teljesül.

3.0.2. tétel. Az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés pontosan akkor lineáris, ha alkalmas $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén

$$f(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = \sum_{k=1}^{d} a_k x_k \qquad (\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d)$$

teljesül.

Biz.

1. lépés.. Ha

$$f(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

akkor bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \langle \mathbf{a}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \rangle = \alpha\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle + \beta\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

2. lépés.. Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineáris leképezés, továbbá $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor bármely $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ esetén van olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_d\mathbf{e}_d,$$

így az

$$\mathbf{a} := (f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_d))$$

vektorral f linearitása folytán

$$f(\mathbf{r}) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_d f(\mathbf{e}_d) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle. \quad \blacksquare$$

3.0.2. definíció. Adott $p, q \in \mathbb{N}$, ill. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ esetén azt mondjuk, hogy az $\mathbf{f}$ leképezés **lineáris**, ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{v})$$

teljesül.

3.0.3. tétel. Adott $p, q \in \mathbb{N}$ esetén az $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ leképezés pontosan akkor lineáris, ha alkalmas $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mátrix esetén

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q)$$

teljesül.

Biz.

1. lépés.. Ha tetszőleges $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q$ vektorra

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = M\mathbf{r},$$

akkor bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = M(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha M\mathbf{u} + \beta M\mathbf{v} = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{v}),$$

azaz $\mathbf{f}$ lineáris.

2. lépés.. Ha $\mathbf{f}$ lineáris, akkor (vö. 3.0.2. tétel) alkalmas

$$\mathbf{m}_1 := (a_{11}, \ldots, a_{1q}), \ldots, \mathbf{m}_p := (a_{p1}, \ldots, a_{pq}) \in \mathbb{R}^q$$

vektorokkal bármely $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{r}\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{m}_p, \mathbf{r}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x_1 + \ldots, + m_{1q}x_q \\ \vdots \\ m_{p1}x_1 + \ldots, + m_{pq}x_q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \ldots & m_{pq} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r} = M\mathbf{r}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.0.4. tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineráis, azaz alkalmas $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ esetén

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$

úgy

$$\mathbf{f} \text{ invertálható} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(M) \neq 0,$$

és invertálhatóság esetén $\mathbf{f}[\mathbb{R}^d] = \mathbb{R}^d$ teljesül, továbbá az $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ inverz lineáris, és

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s}) = M^{-1}\mathbf{s} \qquad (\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d).$$

Biz.

1. lépés.. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor M reguláris. Bármely $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ esetén az $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{s})$ egyenlőségből $M\mathbf{r} = M\mathbf{s}$ következik. M regularitása következtében így

$$\mathbf{r} = E_d\mathbf{r} = (M^{-1}M)\mathbf{r} = \boxed{M^{-1}(M\mathbf{r}) = M^{-1}(M\mathbf{s})} = (M^{-1}M)\mathbf{s} = E_d\mathbf{s} = \mathbf{s},$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{f}$ injektív. Ha most $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges vektor, és $\mathbf{u} := M^{-1}\mathbf{v}$, akkor

$$M\mathbf{u} = M(M^{-1}\mathbf{v}) = (M^{-1}M)\mathbf{v} = E_d\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Innen egyrészt $\mathbf{v} \in \mathbf{f}[\mathbb{R}^d]$, másrészt pedig $\mathbf{f}$ injektivitása folytán $\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v})$ következik. Mivel $\mathbf{v}$ tetszőleges volt, ezért $\mathbf{f}[\mathbb{R}^d] = \mathbb{R}^d$, továbbá $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v}) = M^{-1}\mathbf{v}$.

2. lépés.. Ha $\det(M) = 0$, akkor van olyan $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, hogy $M\mathbf{u} = \mathbf{0}$ teljesül, ahonnan $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ következik. $\mathbf{f}$ linearitása következtében

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{0}),$$

így $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{f}$ nem injektív. ■

3.0.0. megjegyzés. A 3.0.4. tételbeli állítás tehát a következőt jelenti: tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \qquad \text{ill. az} \qquad M\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

vagy még részletesebben az

$$\begin{aligned} m_{11}x_1 + \ldots + m_{1d}x_d &= y_1 \\ &\vdots \\ m_{d1}x_1 + \ldots + m_{dd}x_d &= y_d \end{aligned}$$

egyenletnek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha M reguláris: $\det(M) \neq 0$.

3.0.1. feladat. Döntsük el, hogy az

$$\mathbf{f}(x, y, z) := (3x - y + z, 3x - y, x - z) \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény invertálható-e! Invertálhatóság esetén számítsa ki $\mathbf{f}^{-1}$-et!

Útm. Világos, hogy

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0,$$

ezért

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s}) = M^{-1}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} u - v + w \\ 3u - 4v + 3w \\ u - v \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{s} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3). \quad \blacksquare$$

A továbbiakban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy nem-lineáris egyenlet esetén mi a megoldhatóság feltétele, azaz milyen feltételeket kell teljesítenie valamely

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

függvénynek ahhoz, hogy adott $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén az

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_d) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_d(x_1, \ldots, x_d) &= y_d \end{aligned}$$

egyenlet megoldható legyen. **Ötlet:** tegyük fel, hogy $\mathbf{f}$ differenciálható, majd (valamely a pont elegendő kicsiny környezetében) helyettesítsük $\mathbf{f}$-et a

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

függvénnyel. A $\det(\mathbf{f}'(\mathbf{a})) \neq 0$ esetben ugyanis $\mathbf{T}$ invertálható, hiszen bármely $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{y}$$

egyenlet egyértelműen megoldható:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - [\mathbf{f}'(\mathbf{a})]^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}).$$

Mivel $\mathbf{T}$ (legalábbis az a pont elegendően kicsi környzetében) jól közelíti $\mathbf{f}$-et, ezért remélhető, hogy $\mathbf{T}$ injektivitása öröklődik $\mathbf{f}$-re.

3.0.5. tétel. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ folytonosan differenciálható függvény. Ha valamely $\mathbf{a} \in \Omega$ pontra $\det(\mathbf{f}'(\mathbf{a})) \neq 0$ teljesül, akkor

1. van olyan $U \subset \Omega$, ill. $V \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, hogy $\mathbf{a} \in U$, ill. $\mathbf{b} := \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$, továbbá $\mathbf{f}|_U$ injektív és $\mathbf{f}[U] = V$;
2. a $\mathbf{g} := (\mathbf{f}|_U)^{-1}$ függvényre $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}^1$, és

$$\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{y}) = \mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \left[\left(\mathbf{f}'(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))\right)\right]^{-1} \qquad (\mathbf{y} \in V).$$

Biz.

3.0.0. megjegyzés.

1. Ha $d = 1$, akkor a fenti formula
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in V)$$
alakú.

2. Az iménti állítás globális változata a következő. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, továbbá $f' > 0$ vagy $f' < 0$, akkor f invertálható, f^{-1} differenciálható és
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in f[I]).$$

3.0.4. példa. Ha
$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy),$$
akkor $\mathbf{f}$ differenciálható,
$$\mathbf{f}'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
így $\mathbf{f}$ folytonosan differenciálható. Mivel
$$\det(\mathbf{f}'((1,-1)) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0,$$
ezért az $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$ pontnak van olyan U környezete és az $\mathbf{f}(1,-1) = (0,-2)$ pontnak olyan V környezete, hogy az $\mathbf{f}|_U$ függvény injektív, $\mathbf{f}[U] = V$, továbbá
$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{f}(1,1)) = [\mathbf{f}'(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.0.0. megjegyzés. Ha $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineáris, azaz alkalmas $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ esetén
$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = M\mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$
úgy
$$\mathbf{f}'(\mathbf{r}) = M \qquad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d),$$
ezért ha $\mathbf{f}$ lokálisan invertálható, akkor globálisan is, továbbá bármely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ esetén
$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = [\mathbf{f}'(\mathbf{a})]^{-1} = M^{-1}.$$

Ha $2 \leq d \in \mathbb{R}$, akkor nem-lineáris $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ folytonosan differenciálható függvény esetén a lokális invertálhatóságból nem következik a globális invertálhatóság, még akkor sem, ha bármely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ pont esetén $\det(\mathbf{f}'(\mathbf{a})) \neq 0$ teljesül. Ezt igazolja a

3.0.5. példa. Ha

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x,y) := (e^x \cos(y), e^x \sin(y)),$$

akkor $\mathbf{f}$ deriválható,

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így $\mathbf{f}$ folytonosan deriválható, továbbá bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\det(\mathbf{f}'(x,y)) = e^{2x} \cos^2(y) - (-e^{2x} \sin^2(y)) = e^{2x} \neq 0.$$

Viszont

$$\mathbf{f}(0{,}0) = (1{,}0) = \mathbf{f}(0{,}2\pi)$$

miatt $\mathbf{f}$ nem injektív.

3.0.2. feladat. Számítsuk ki a 3.0.5. példabeli $\mathbf{f}$ függvény esetében a lokális inverz deriváltját az $\mathbf{f}(0, \pi/2)$ pontban kétféleképpen: a 3.0.4. tétel alkalmazásával, majd explicit módon is (elosztjuk a két egyenletet egymással, ill. négyzetreemelés után összeadjuk)!

Útm. coming soon

3.0.3. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x,y) := (xy^2 + x^2 y, e^{xy^2})$$

függvény lokálisan invertálható a $(2{,}1)$ pontban, majd határozzuk meg a lokális inverz deriváltját az $\mathbf{f}(2{,}1)$ pontban! Mutassuk meg, hogy a függvény globálisan nem invertálható (nem injektív), továbbá adjunk meg végtelen sok olyan pontnt, ahol a függvény lokálisan sem invertálható!

Útm. coming soon

2016.06.15.

4. fejezet

Az implicit függvényre vonatkozó tétel

Adott $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény esetében azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen esetben lesz a

$$H := \{(x, y) \in \mathcal{D}_f : \; f(x, y) = 0\}$$

halmaz valamely egyváltozós φ függvény grafikonja, feltéve, hogy $H \neq \emptyset$. Ha pl.

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor nyilván nincs olyan φ függvény, amelyre

$$\operatorname{graph}(\varphi) = H$$

teljesülne. Viszont az f helyett ennek egy leszűkítését, nevezetesen az

$$f_+(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0)$$

függvényt véve már létezik a mondott tulajdonságú φ függvény:

$$\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in [-1{,}1]),$$

hiszen

$$f_+(x, \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in [-1{,}1]).$$

Ezt a tényt gyakran úgy szokták kifejezni, hogy **a φ függvény az**

$$f_+(x, y) = 0$$

implicit egyenlet megoldása. A továbbiakban valamivel általánosabb esetben megvizsgáljuk a most felvetett kérdést.

Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ és $B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, továbbá $\mathbf{f} \in \mathfrak{C}^1(A \times B, \mathbb{R}^n)$, akkor a

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) := \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{r} \in A), \qquad\qquad \mathbf{h}(\mathbf{s}) := \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \quad (\mathbf{s} \in B)$$

utasításokkal értelmezett függvényekre

$$\mathbf{g} \in \mathfrak{C}^1(A, \mathbb{R}^n), \qquad\qquad \mathbf{h} \in \mathfrak{C}^1(B, \mathbb{R}^n),$$

és a megfelelő deriváltakra a következő jelölések használatosak:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a}) =: \partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =: \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad\qquad \mathbf{h}'(\mathbf{b}) =: \partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =: \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

4.0.1. tétel. A fenti jelöléseket megtartva, ha

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \det\left(\partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) \neq 0,$$

akkor létezik olyan $\mathcal{K}(\mathbf{a}) \subset A$ és $\mathcal{K}(\mathbf{b}) \subset B$ környezet, hogy minden $\mathbf{r} \in \mathcal{K}(\mathbf{a})$ esetén pontosan egy olyan $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \in \mathcal{K}(\mathbf{b})$ van, amelyre

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) = \mathbf{0},$$

és az így definiált

$$\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{K}(\mathbf{a}) \to \mathcal{K}(\mathbf{b})$$

függvényre $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{C}^1$, továbbá minden $\mathbf{r} \in \mathcal{K}(\mathbf{a})$ esetén

$$\det\left(\partial_2 \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})\right)\right) \neq 0,$$

ill.

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{r}) = -\left[\partial_2 \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})\right)\right]^{-1} \cdot \partial_1 \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})\right).$$

Biz.

4.0.0. megjegyzés. A 4.0.1. tételben speciálisan $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ miatt

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{a}) = -\left(\partial_2 \mathbf{f}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)\right)^{-1} \cdot \partial_1 \mathbf{f}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right).$$

4.0.0. megjegyzés. Az $m = n = 1$ speciális esetben, pontosabban ha

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \quad f \in \mathfrak{C}^1, \quad f(a,b) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(a,b) \neq 0,$$

akkor létezik olyan $\varepsilon, \delta > 0$, hogy

1. pontosan egy olyan
$$\varphi : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to (b-\delta, b+\delta)$$
függvény van, amelyre $\varphi \in \mathfrak{C}^1$ (ha f analitikus, akkor φ is analitikus) és
$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon));$$
2. a fenti φ függvény deriváltjára:
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))} \qquad (x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)).$$

4.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{C}^2$, akkor

$$\partial_{11} f(x,\varphi(x)) + \partial_{12} f(x,\varphi(x))\varphi'(x) +$$

$$+\left[\partial_{21} f(x,\varphi(x)) + \partial_{22} f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]\varphi'(x) +$$

$$+\partial_2 f(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0 \qquad (x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)),$$

ahonnan tetszőleges $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ estén

$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{11} f(x,\varphi(x)) + 2\partial_{12} f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \partial_{22} f(x,\varphi(x))[\varphi'(x)]^2}{\partial_2 f(x,\varphi(x))}.$$

Így pl. ha $\varphi'(c) = 0$, akkor
$$\varphi''(c) = -\frac{\partial_{11} f(c,\varphi(c))}{\partial_2 f(c,\varphi(c))}.$$

4.0.1. feladat. Tekintsük az
$$xy^2z^3 + 2x^2ye^{z-1} = 0$$
egyenletet! Mutassuk meg, hogy a $(-1,2) \in \mathbb{R}^2$ pontnak van olyan $\mathcal{K}$ környezete és olyan differenciálható $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\varphi(-1,2) = 1$ és minden $(x,y) \in \mathcal{K}$ mellett $(x, y, \varphi(x,y))$ megoldása az egyenletnek, majd számítsuk ki $\varphi'(-1,2)$-t!

Útm. Az
$$xy^2z^3 + 2x^2ye^{z-1} = 0$$

egyenlet megoldható, ui.

$$(-1)\cdot 2^2\cdot 1^3+2\cdot(-1)^2\cdot 2\cdot e^{1-1}=0.$$

Legyen

$$f(x,y,z):=xy^2z^3+2x^2ye^{z-1}\in\mathbb{R}\quad((x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

ekkor $f(-1{,}2{,}1)=0$ és $f\in\mathfrak{C}^1$. Mivel

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial z}f(-1{,}2{,}1)\right)=\det\left[3xy^2z^2+2x^2ye^{z-1}\right]_{x=-1,y=2,z=1}=-8\neq 0,$$

ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ. Továbbá

$$\begin{aligned}\varphi'(-1{,}2) &= -\left[\frac{\partial}{\partial z}f(-1{,}2{,}1)\right]^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial(x,y)}f(-1{,}2{,}1)=\\ &= -[-8]^{-1}\cdot\left[\begin{array}{cc} y^2z^3+4xye^{z-1} & 2xyz^3+2x^2e^{z-1}\end{array}\right]_{x=-1,y=2,z=1}=\\ &= -[-8]^{-1}\cdot\left[\begin{array}{cc}-4 & -2\end{array}\right]=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

4.0.2. feladat. Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned}7x+\sin(y)+3z &= 5,\\ x+e^y-2z &= 9\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert! Mutassuk meg, hogy van olyan $\varepsilon>0$ szám és olyan differenciálható

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2):(-3-\varepsilon,-3+\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$$

függvény, hogy $\boldsymbol{\varphi}(-3)=(2{,}0)$ és minden $x\in(-3-\varepsilon,-3+\varepsilon)$ mellett $(\varphi_1(x),\varphi_2(x),x)$ megoldása az egyenletrendszernek, majd számítsuk ki $\boldsymbol{\varphi}'(-3)$-at!

Útm. A

$$\left.\begin{aligned}7x+\sin(y)+3z &= 5,\\ x+e^y-2z &= 9\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldható, ui. $y=0$ esetén a

$$\left.\begin{aligned}7x+3z &= 5,\\ x-2z &= 8\end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása: $(2,-3)$. Legyen

$$\mathbf{f}(x,y,z):=(7x+\sin(y)+3z-5,x+e^y-2z-9)\in\mathbb{R}^2\qquad((x,y,z)\in\mathbb{R}^3),$$

ekkor $\mathbf{f}(2{,}0,-3)=(0{,}0)$ és $\mathbf{f}\in\mathfrak{C}^1$.

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x,y)}\mathbf{f}(2{,}0,-3)\right]=\det\begin{bmatrix}7 & \cos(0)\\ 1 & e^0\end{bmatrix}=7-1=6\neq 0,$$

ezért teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, azaz létezik a kívánt tulajdonságú φ.

$$\begin{aligned}
\varphi'(-3) &= -\left[\frac{\partial}{\partial(x,y)}f(2,0,-3)\right]^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}f(2,0,-3) = -\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \\
&= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 \\ 17 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.0.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

1. $\ln(x) + \varphi(x)\exp(\varphi^2(x)) = 1$ $(x \in (e-\varepsilon, e+\varepsilon))$; számítsuk ki $\varphi'(e)$-t;
2. $\ln(x^2 + \varphi^2(x)) = x\varphi(x)$ $(x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$; számítsuk ki $\varphi'(1)$-t;
3. $xe^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^x = a$ $(x \in (-\varepsilon, \varepsilon);\ a \in \mathbb{R})$; számítsuk ki $\varphi'(0)$-t;
4. $x\cos(\varphi(x)) = \varphi(x)\cos(x)$ $(x \in (-\varepsilon, \varepsilon))$; számítsuk ki $\varphi'(0)$-t!

Útm.

1. Ha
$$f(x,y) := \ln(x) + y\exp(y^2) - 1 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\right),$$
akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,
$$f(e,0) = 0, \quad \partial_y f(e,0) = e^0 + 2\cdot 0^2 \cdot e^0 = 1 \neq 0,$$
így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (e-\varepsilon, e+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$f(x,\varphi(x)) = \ln(x) + \varphi(x)\exp(\varphi^2(x)) - 1 = 0 \qquad (|x-e| < \varepsilon);$$
$\varphi(e) = 0$ és
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{1/x}{e^{\varphi^2(x)} + 2\varphi^2(x)e^{\varphi^2(x)}} = -\frac{1}{xe^{\varphi^2(x)}\left(1+2\varphi^2(x)\right)} \qquad (|x-e| < \varepsilon),$$
$$\varphi'(e) = -\frac{1}{e}.$$
2. Ha
$$f(x,y) := \ln(x^2+y^2) - xy \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 > 0\right),$$
akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,
$$f(1,0) = 0, \quad \partial_y f(1,0) = \frac{2\cdot 0}{1^2+0^2} - 1 = -1 \neq 0,$$
így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$f(x,\varphi(x)) = \ln(x^2+\varphi^2(x)) - x\varphi(x) = 0 \qquad (|x-1| < \varepsilon);$$

$\varphi(1) = 0$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{\frac{2x}{x^2+\varphi^2(x)} - \varphi(x)}{\frac{2x}{x^2+\varphi^2(x)} - x} \qquad (|x-1| < \varepsilon)\,,$$

$\varphi'(1) = 2.$

3. Ha

$$f(x,y) := xe^{-y} + ye^{x} - a \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,,$$

akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$f(0,a) = a, \quad \partial_y f(0,a) = -0 \cdot e^{-a} + e^0 = 1 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x,\varphi(x)) = xe^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^{x} - a = 0 \quad (|x| < \varepsilon)\,;$$

$\varphi(0) = a$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{e^{-\varphi(x)} + \varphi(x)e^{x}}{e^{x} - x \cdot e^{-\varphi(x)}} \quad (|x| < \varepsilon)\,,$$

$\varphi'(0) = -e^{-a} - a.$

4. Ha

$$f(x,y) := x\cos(y) - y\cos(x) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,,$$

akkor $f \in \mathfrak{C}^1$,

$$f(0{,}0) = 0, \quad \partial_y f(0{,}0) = -0 \cdot \sin(0) - \cos(0) = -1 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x,\varphi(x)) = x\cos(\varphi(x)) - \varphi(x)\cos(x) = 0 \qquad (|x| < \varepsilon)\,;$$

$\varphi(0) = 0$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{\cos(\varphi(x)) + \varphi(x)\sin(x)}{-x\sin(\varphi(x)) - \cos(x)} \qquad (|x| < \varepsilon)\,,$$

$\varphi'(0) = 1.$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény az implicit egyenlet megoldása! ■

4.0.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $a \in \mathbb{R}$ paraméter mellett az

$$x^2 + 2xy - y^2 = a$$

egyenletből y kifejezhető az x implicit függvényeként! Határozzuk meg az így kapott $x \mapsto y$ függvény deriváltját!

Útm. Legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) := x^2 + 2xy - y^2 - a \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor

$$\partial_2 F(x,y) = 2x - 2y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$$

miatt két esetet kell megkülönböztetnünk:

$\boxed{x_0 = y_0}$: az ilyen pontok környezetében nincsen implicit függvény, ha $a \neq 0$, ugyanis tetszőleges $K(x_0), K(y_0) \subset \mathbb{R}$ környezetekhez van olyan $x \in K(x_0)$, amelyhez két olyan $\varphi(x) \in K(y_0)$ is tartozik, amelyre

$$x^2 + 2x\varphi(x) - \varphi^2(x) = a^2$$

$(y = x\colon y^2 + 2y^2 - y^2 = a^2)$:

$$\varphi_1(x) := |a|/\sqrt{2}, \qquad \varphi_2(x) := -|a|/\sqrt{2} \qquad (x \in K(x_0)).$$

$a = 0$ esetén

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in K(x_0))$$

az implicit függvény.

$\boxed{x_0 \neq y_0}$: ekkor alkalmazható az implicit függvényre vonatkozó tétel, azaz van olyan $K(x_0), K(y_0) \subset \mathbb{R}$ környezet, hogy tetszőleges $x \in K(x_0)$ esetén egyetlen olyan $\varphi(x) \in K(y_0)$ van, amelyre

$$x^2 + 2x\varphi(x) - \varphi^2(x) = a^2.$$

Az így értelmezett φ függvény deriválja:

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x,\varphi(x))}{\partial_2 F(x,\varphi(x))} = -\frac{2x + 2\varphi(x)}{2x - 2\varphi(x)} = \frac{\varphi(x) + x}{\varphi(x) - x} \qquad (x \in K(x_0)). \qquad \blacksquare$$

4.0.5. feladat. Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

egyenletrendszer által meghatározott $(x,y) \mapsto (u,v)$ implicit függvény Jacobi-mátrixát az $(1{,}2)$ pontban!

Útm. Legyen $A := \mathbb{R}^2$, $B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ v \neq -1\}$, $\mathbf{F} : A \times B \to \mathbb{R}^2$,

$$F((x,y),(u,v)) := \left(xe^{u+v} + 2uv - 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \right).$$

Látható, hogy pl. $\mathbf{a} := (1{,}2)$, $\mathbf{b} := (0{,}0)$ esetén $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ és $\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$. Mivel

$$\frac{\partial}{\partial(u,v)} \mathbf{F}((x,y),(u,v)) = \begin{bmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{bmatrix},$$

ezért

$$\det \left[\frac{\partial}{\partial(u,v)} F((1{,}2),(0{,}0)) \right] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0,$$

tehát alkalmazható az implicit függvényre vonatkozó tétel, azaz vannak olyan $K(1{,}2), K(0{,}0) \subset \mathbb{R}^2$ környezetek, hogy minden $(x,y) \in K(1{,}2)$ esetén pontosan egy $\Phi(x,y) \in K(0{,}0)$ van, amelyre

$$\mathbf{F}(x,y,\Phi(x,y)) = (0{,}0).$$

$$\begin{aligned}
\Phi'(1{,}2) &= -\left(\frac{\partial}{\partial(u,v)}\mathbf{F}((1{,}2),(0{,}0))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial(x,y)}\mathbf{F}((1{,}2),(0{,}0)) = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x F_1(1{,}2{,}0{,}0) & \partial_y F_1(1{,}2{,}0{,}0) \\ \partial_x F_2(1{,}2{,}0{,}0) & \partial_y F_2(1{,}2{,}0{,}0) \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{u+v} & 0 \\ -2 & e^{u-v} \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)=(1,2,0,0)} = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.0.6. feladat. Tekintsük a

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0, \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszert! Mutassuk meg, hogy ebből x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként! Igaz-e ugyanez az x_1, x_2, x_3, x_4 közül tetszőlegesen kiválasztott három és a maradék negyedik vonatkoztatásában?

Útm. Legyen $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, ahol

$$F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) := 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2, \qquad F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) := x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4,$$

$$F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) := 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4.$$

Az

$$\left.\begin{aligned}
F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) - F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4^2 - x_4, \\
F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4
\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert tekintve jól látható, hogy csak akkor van megoldása az

$$\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0{,}0{,}0)$$

egyenletrendszernek, ha $x_4^2 + x_4 = -2x_4$, azaz ha $x_4 \in \{-3; 0\}$. Mivel 4 különböző elemből 3-at $\binom{4}{3} = 4$ féleképpen lehet kiválasztani, ezért négy esetet különböztetünk meg:

$\boxed{(x_1,x_2,x_4) = \varphi_3(x_3)}$**:**

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(x_1,x_2,x_4)}\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2x_4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -12 - 8x_4 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden olyan $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$: amelyre $d \in \{-3;0\}$ van olyan környezete, amelyben x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként.

$\boxed{(x_1,x_3,x_4) = \varphi_2(x_2)}$:

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(x_1,x_3,x_4)} F(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2x_4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 14x_4 + 21 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden olyan $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$: $d \in \{-3;0\}$ van olyan környezete, amelyben x_1, x_3, x_4 kifejezhető x_2 implicit függvényeként.

$\boxed{(x_2,x_3,x_4) = \varphi_1(x_1)}$:

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(x_2,x_3,x_4)} \mathbf{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_4 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2x_4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2x_4 + 3 \neq 0 \qquad (x_4 \in \{-3;0\}).$$

Így tehát minden olyan $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$: $d \in \{-3;0\}$ van olyan környezete, amelyben x_2, x_3, x_4 kifejezhető $x_1$implicit függvényeként.

$\boxed{(x_1,x_2,x_3) = \varphi_4(x_4)}$:

$$\det\left[\frac{\partial}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \mathbf{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_2 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) & \partial_3 F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 0,$$

ez azonban még nem bizonyítja, hogy x_1, x_2, x_3 nem fejezhető ki x_4 implicit függvényeként. További vizsgálatra van tehát szükségünk. Mivel az $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}0{,}0)$ egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha $x_4 \in \{-3; 0\}$ és az x_1, x_2, x_3 változókra az egyenletrendszer lineáris, ezért sem -3, sem pedig 0 környezetében nincsen megoldása. ■

4.0.7. feladat. Legyen $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}^1$ és valamely $(a, b, c) \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a, b, c) = 0$. Tegyük fel, hogy egy alkalmas $K(a, b, c)$ környezetben bármelyik változó kifejezhető a másik kettő implicit függvényeként, legyenek ezek az első, második, harmadik változót illetően rendre φ_1, φ_2, φ_3. Mutassuk meg, hogy teljesül a

$$\partial_1\varphi_1(b, c) \cdot \partial_2\varphi_2(a, c) \cdot \partial_1\varphi_3(a, b) = -1$$

egyenlőség!

Útm. A φ_1, φ_2, φ_3 függvényekre ekkor

$$f(\varphi_1(b, c), b, c) = 0, \quad f(a, \varphi_2(a, c), c) = 0, \quad f(a, b, \varphi_3(a, b)) = 0\ ,$$

és tetszőleges $(x, y, z) \in K(a, b, c)$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(y, z) &= -\left(\partial_1 f(x, y, z)\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(y,z)} f(x, y, z) &&= -\tfrac{1}{\partial_1 f(x,y,z)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 f(x, y, z) & \partial_3 f(x, y, z) \end{pmatrix}\ , \\
\varphi_2'(x, z) &= -\left(\partial_2 f(x, y, z)\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(x,z)} f(x, y, z) &&= -\tfrac{1}{\partial_2 f(x,y,zc)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y, z) & \partial_3 f(x, y, z) \end{pmatrix}\ , \\
\varphi_3'(x, y) &= -\left(\partial_3 f(x, y, z)\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial(x,y)} f(x, y, z) &&= -\tfrac{1}{\partial_3 f(x,y,z)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y, z) & \partial_2 f(x, y, z) \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

Így

$$\partial_1\varphi_1(b, c) = -\tfrac{\partial_2 f(a,b,c)}{\partial_1 f(a,b,c)}, \quad \partial_2\varphi_2(a, c) = -\tfrac{\partial_3 f(a,b,c)}{\partial_2 f(a,b,c)}, \quad \partial_1\varphi_3(a, b) = -\tfrac{\partial_1 f(a,b,c)}{\partial_3 f(a,b,c)}\ ,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\partial_1\varphi_1(b, c) \cdot \partial_2\varphi_2(a, c) \cdot \partial_1\varphi_3(a, b) &= \left(-\frac{\partial_2 f(a, b, c)}{\partial_1 f(a, b, c)}\right)\left(-\frac{\partial_3 f(a, b, c)}{\partial_2 f(a, b, c)}\right)\left(-\frac{\partial_1 f(a, b, c)}{\partial_3 f(a, b, c)}\right) = \\
&= (-1)(-1)(-1) = -1. \quad ■
\end{aligned}$$

4.0.0. megjegyzés. Nagy hibát követnénk el, ha az

$$a = \varphi_1(b, c), \qquad b = \varphi_2(a, c), \qquad c = \varphi_3(a, b)$$

egyenlőségekből kiindulva a

$$\partial_1\varphi_1(b, c) \cdot \partial_2\varphi_2(a, c) \cdot \partial_1\varphi_3(a, b)$$

szorzat

$$\frac{\partial a}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

alakját formálisan egyszerűsítenénk, ui. ekkor 1-et kapnánk eredményül.

4.0.0. megjegyzés. A hőtanból jól ismert, hogy a mólnyi mennyiségű ideális gáz állapotjelszői között a következő összefüggés áll fenn:

$$pV = RT$$

(p: nyomás, V: térfogat, T: abszolút hőmérséklet, R: univerzális gázállandó). Látható, hogy bármelyik állapotjelsző a másik kettőnek a függvénye:

$$p = p(V, T), \qquad V = V(p, T), \qquad T = T(p, V).$$

Ekkor

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = \left(-\frac{RT}{V^2}\right) \cdot \left(\frac{R}{p}\right) \cdot \left(\frac{V}{R}\right) = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

2016.06.15.

5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Autonóm differenciálegyenletek

5.1.1. feladat. Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill. $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén adjunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt, amely eleget tesz a $\varphi' = f$ egyenlőségnek!

Útm. Az integrálszámításból tudjuk, hogy csak azok a φ függvények tesznek eleget a $\varphi' = f$ egyenlőségnek, amelyek így írhatók:

$$\varphi(x) = \int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s + c \qquad (x \in I)$$

(**Barrow**[1]**-formula**), ahol $\tau \in I$ és $c \in \mathbb{R}$. ■

Az is viszonylag egyszerűen látható be, hogy a fenti φ függvény esetében

$$\varphi(\tau) = \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\varphi(x) = \int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s + \xi \qquad (x \in I)},$$

azaz φ teljes megoldása az

$$y'(t) = f(t) \quad (t \in I), \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.1.1}$$

kezdetiérték-feladatnak.

5.1.1. példa. A deriválható $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor teljes megoldása az

$$y' = \ln, \qquad y(1) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak, ha

$$\varphi(x) = x\ln(x) - x + 1 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

[1] Isaac Barrow $(1630 - 1677)$, Newton tanára.

5.1.2. példa. A deriválható $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor teljes megoldása az

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}), \qquad y\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak, ha

$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

5.1.2. feladat. Adott I intervallum, $\xi \in I$, $\tau \in \mathbb{R}$ és

$$f \in \mathfrak{C}(I,\mathbb{R}), \qquad f(y) \neq 0 \quad (y \in I),$$

függvény esetén határozzunk meg olyan $\varphi \in \mathbb{R} \to I$ deriválható függvényt, hogy $\mathcal{D}_\varphi$ intervallum, továbbá

$$\varphi' = f \circ \varphi, \qquad \varphi(\tau) = \xi, \tag{5.1.2}$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy ha van ilyen φ függvény, akkor az invertálható. Ezért a $\psi := \varphi^{-1}$ inverzre

$$\psi'(y) = \frac{1}{f(y)} \quad (y \in I), \qquad \psi(\xi) = \tau \tag{5.1.3}$$

teljesül, és ez fordítva is igaz: (5.1.2) és (5.1.3) ekvivalensek. Így a korábbiak értelmében

$$\boxed{\psi(y) = \int_\xi^y \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s + \tau \quad (y \in I)}.$$

5.1.3. feladat. Adott $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ esetén határozzuk meg az

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.1.4}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm. Ha

$$f(y) := 1 + y^2 \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

akkor a (5.1.4) kezdetiérték-feladat ekvivalens az

$$x'(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad (y \in \mathbb{R}), \qquad x(\xi) = \tau$$

kezdetiérték-feladattal, amelynek ψ teljes megoldására:

$$\psi(y) = \int_\xi^y \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s + \tau = \operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(\xi) + \tau \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Így tehát (5.1.4) teljes megoldása a

$$\varphi(x) = \psi^{-1}(x) = \mathrm{tg}\,(x - \tau + \mathrm{arctg}\,(\xi)) \qquad \left(x \in \mathbb{R}: \ |x - \tau + \mathrm{arctg}\,(\xi)| < \frac{\pi}{2}\right).$$

függvény. ■

5.1.1. definíció. Valamely populáció létszámváltozását leíró

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{5.1.5}$$

differenciálegyenletet klasszikus **logisztikus differenciálegyenlet**nek nevezzük, ahol $r > 0$ jelöli a **növekedési rátát**, $K > 0$ pedig a **környezet eltartóképességét**.

5.1.4. feladat. Adott $a, b, \xi \in \mathbb{R}$: $a > 0$, $b > 0$, $\xi \geq 0$ esetén határozzuk meg az

$$\dot{N} = aN - bN^2, \qquad N(0) = \xi \tag{5.1.6}$$

ún. **logisztikus kezdetiérték-feladat** φ megoldását, majd vizsgáljuk meg a φ megoldás aszimptotikáját!

Útm. Világos, hogy ha

$$a\xi - b\xi^2 = \xi(a - b\xi) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \xi \in \left\{0, \frac{a}{b}\right\},$$

akkor a

$$\varphi(t) := \xi \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvény megoldása a (5.1.6) kezdetiérték-feladatnak, továbbá $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \xi$. Ha

$$f(N) := aN - bN^2 \quad (N \in I), \qquad \text{ill.} \qquad \xi \in I,$$

ahol

$$I := \left(0, \frac{a}{b}\right) \qquad \text{vagy} \qquad I := \left(\frac{a}{b}, +\infty\right),$$

akkor $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos,

$$f(N) \neq 0 \qquad (N \in I),$$

így a (5.1.6)-beli kezdetiérték-feladat φ teljes megoldása invertálható és $\psi := \varphi^{-1}$ inverze a

$$t'(N) = \frac{1}{f(N)} \qquad (N \in I), \qquad t(\xi) = 0$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\psi(N) = \int_\xi^N \frac{1}{s(a - bs)}\,\mathrm{d}s + 0 = \frac{1}{a}\int_\xi^N \frac{bs + (a - bs)}{s(a - bs)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{s}{|a - bs|}\right)\right]_\xi^N \qquad (N \in I),$$

ahonnan $I := (0, a/b)$, ill. $I := (a/b, +\infty)$ esetén

$$\boxed{\varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{a\xi}{b\xi + (a - b\xi)e^{-at}} \qquad (t \in [0, +\infty))} \tag{5.1.7}$$

következik.

Megjegyzés. Látható, hogy

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\frac{a\xi}{b\xi}=\frac{a}{b}.$$

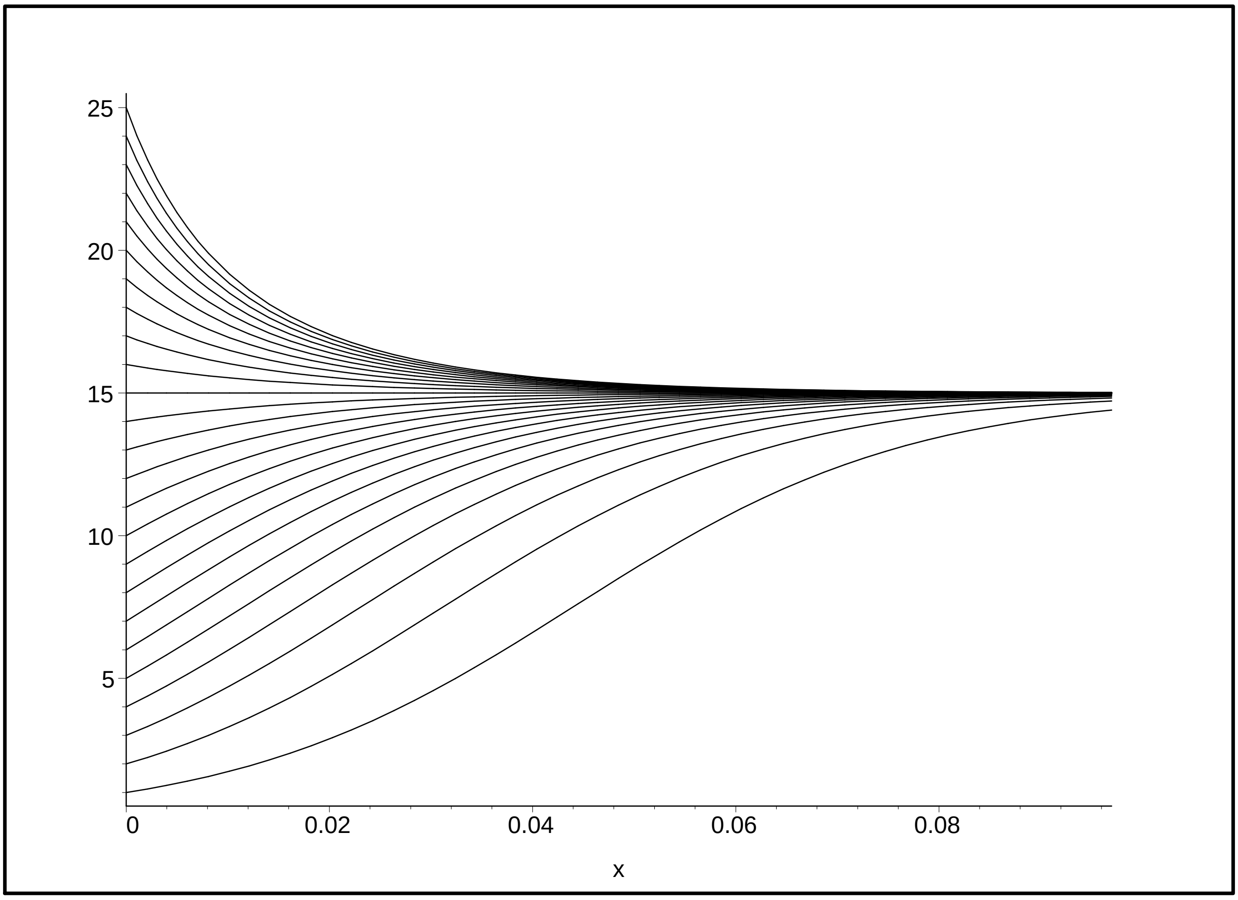
A megoldás (5.1.7) alakjából az is látható (vö. 5.1.1. ábra), hogy

1. ha $\xi\in\left(\frac{a}{b},+\infty\right)$, akkor φ szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ui. ekkor

$$\dot\varphi(t)=\frac{a^2\xi(a-b\xi)e^{-at}}{[b\xi+(a-b\xi)e^{-at}]^2}<0\quad(t\in[0,+\infty))\qquad\text{és}\qquad\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\frac{a}{b}$$

2. $\xi\in\left(0,\frac{a}{b}\right)$, akkor φ szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, ui. ekkor

$$\dot\varphi(t)>0\quad(t\in[0,+\infty))\qquad\text{és}\qquad\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\frac{a}{b}.\quad\blacksquare$$



5.1.1. ábra.

5.1.5. feladat. Adott $\tau,\xi\in\mathbb{R}$ esetén vizsgáljuk az

$$y'=\sqrt{|y|},\qquad y(\tau)=\xi\tag{5.1.8}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. (5.1.8) megoldható, hiszen ha $\xi = 0$, akkor a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény nyilván megoldás; ha viszont $\xi \neq 0$, akkor

- $\xi > 0$ esetén az
$$y' = f_+(y) := \sqrt{y}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.1.9}$$
k.é.f. minden megoldása nyilván (5.1.8)-nek is megoldása, ahol a jobb oldal $f_+ : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény. A korábbiak alapján a (5.1.9) k.é.f. teljes megoldása a
$$\psi_+(y) := \int_\xi^y \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s + \tau = 2(\sqrt{y} - \sqrt{\xi}) + \tau \qquad (y \in (0, +\infty))$$
függvény inverze:
$$\varphi_+(x) := \left(\sqrt{\xi} + \frac{x-\tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(\tau - 2\sqrt{\xi}, +\infty\right)\right).$$
- $\xi < 0$ esetén az
$$y' = f_-(y) := \sqrt{-y}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.1.10}$$
k.é.f. minden megoldása nyilván (5.1.8)-nek is megoldása, ahol a jobb oldal $f_- : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ függvény. A korábbiak alapján a (5.1.10) k.é.f. teljes megoldása a
$$\psi_-(y) := \int_\xi^y \frac{1}{\sqrt{-s}}\,\mathrm{d}s + \tau = 2(\sqrt{-\xi} - \sqrt{-y}) + \tau \qquad (y \in (-\infty, 0))$$
függvény inverze:
$$\varphi_-(x) := \left(\sqrt{-\xi} - \frac{x-\tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(-\infty, \tau + 2\sqrt{-\xi}\right)\right).$$

Világos, hogy tetszőleges $k \in \{0, 1\}$ esetén

$$\lim_{x \downarrow (\tau - 2\sqrt{\xi})} \varphi_+^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x \uparrow (\tau + 2\sqrt{-\xi})} \varphi_-^{(k)}(x).$$

Így az első, ill. a második esetben kapott (félparabola grafikonú) megoldásokat összekapcsolva ismét megoldáshoz jutunk.

5.2. Egzakt differenciálegyenletek

5.2.1. feladat. Oldjuk meg az

$$x + y(x) \cdot y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

differenciálegyenletet!

Útm. Világos, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és a

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvény megoldása az egyenletnek, akkor

$$x + \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in I).$$

Látható, hogy ennek az egyenlőségnek a bal oldala nem más, mint az

$$\omega(x) := \frac{x^2 + \varphi^2(x)}{2} \qquad (x \in I)$$

függvény deriváltja. Így alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal

$$\omega'(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

azaz

$$x^2 + \varphi^2(x) = c \qquad (x \in I)$$

teljesül. Ha $I \neq [0,0]$, akkor $c > 0$ és

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{c - x^2} \qquad \left(x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})\right). \quad \blacksquare$$

Az 5.2.1. feladatbeli differenciálegyenlet megoldását tehát úgy kapjuk meg, hogy a

$$P(x, y) :\equiv x^2 + y^2 = c$$

algebrai egyenletből kifejezzük y-t. Látható az is, hogy a differenciálegyenlet a

$$\partial_1 P(x, y(x)) + \partial_2 P(x, y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

alakba írható.

Legyen most $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, ill. $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tekintsük az alábbi feladatot:

Határozzunk meg olyan nyílt $I \subset \mathbb{R}$ intervallumot és $\varphi \in \mathfrak{D}(I, \mathbb{R})$ függvényt, amelyre igaz a

$$\boxed{g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in I)} \tag{5.2.1}$$

állítás!

5.2.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **egzakt differenciálegyenlet**nek nevezzük, ha alkalmas

$$P \in \mathfrak{D}(\Omega, \mathbb{R})$$

(primitív) függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g, h), \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1 P = g, \ \ \partial_2 P = h$$

teljesül.

Az 5.2.1. feladatra a továbbiakban a

$$g(x, y(x)) + h(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y), \tag{5.2.2}$$

ill. a hagyományos

$$g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2.3}$$

jelölést fogjuk használni.

Az 5.2.1. definícióbeli P függvény nem más, mint az

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y))$$

vektormező (skalár)potenciálja.

5.2.1. példa. Az

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x, y) \in \Omega := \mathbb{R}^2)$$

egyenlet egzakt, ui. a

$$g(x, y) := x, \quad h(x, y) := y \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x, y) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 5 \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x, y) = x = g(x, y), \quad \partial_2 P(x, y) = y = h(x, y) \qquad ((x, y) \in \Omega).$$

5.2.2. példa. A

$$(2x + 3\cos(y))\,\mathrm{d}x + (2y - 3x\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x, y) \in \Omega := \mathbb{R}^2)$$

egyenlet egzakt, ui. a

$$g(x, y) := 2x + 3\cos(y), \quad h(x, y) := 2y - 3x\sin(y) \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x, y) := x^2 + y^2 + 3x\cos(y) + 6 \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x, y) = 2x + 3\cos(y) = g(x, y), \quad \partial_2 P(x, y) = 2y - 3x\sin(y) = h(x, y) \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

teljesül.

5.2.3. példa. A

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=0 \qquad \left((x,y)\in\Omega:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u>0\right\}\right)$$

egyenlet egzakt, ui. a

$$g(x,y):=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad h(x,y):=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvények esetében a

$$P(x,y):=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényre

$$\partial_1 P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}=g(x,y),\quad \partial_2 P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}=h(x,y) \qquad ((x,y)\in\Omega).$$

5.2.1. tétel. Tegyük fel, hogy az (5.2.1) egyenlet egzakt. Valamely $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, ill.

$$\varphi: I\to\mathbb{R}$$

differenciálható függvény esetén φ pontosan akkor lesz a (5.2.1) megoldása, ha van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy az 5.2.1. definícióbeli P függvényre

$$P(x,\varphi(x))=c \qquad (x\in I)$$

teljesül.

Biz. A láncszabály következtében az

$$\omega(x):=P(x,\varphi(x)) \qquad (x\in I)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és bármely $x\in I$ esetén

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \left\langle \operatorname{grad} P(x,\varphi(x)),(1,\varphi'(x))\right\rangle=\left\langle(\partial_1 P(x,\varphi(x)),\partial_2 P(x,\varphi(x))),(1,\varphi'(x))\right\rangle= \\ &= g(x,\varphi(x))\cdot 1+h(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x).\end{aligned}$$

Az iménti egyenlőség jobb oldala pontosan akkor tűnik el I-n, ha ω állandófüggvény I-n. ■

Ez azt jelenti, hogy az (5.2.1) egzakt differenciálegyenlet megoldásait a

$$P(x,y(x))=c \qquad (x\in\mathcal{D}_y)$$

egyenlet megoldásával kapjuk meg.

Az (5.2.1) alakú differenciálegyenletekkel kapcsolatban az alábbi két kérdésre keressük a választ.

- Hogyan lehet megállapítani, hogy (5.2.1) egzakt egyenlet?
- Ha (5.2.1) egzakt egyenlet, akkor miképp lehet előállítani a P függvényt?

A gyakorlati alkalmazások nagy többségében a g, ill. a h függvény differenciálható: $g, h \in \mathfrak{D}$, ezért

$$\operatorname{grad} P = (g, h)$$

következtében $P \in \mathfrak{D}^2$. Így a Young-tétel miatt

$$\partial_2 g = \partial_{12} P = \partial_{21} P = \partial_1 h,$$

azaz a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az „egzaktsághoz”. Ha Ω csillagtartomány és

$$g, h \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

akkor ez a feltétel elégséges is. Igaz tehát az

5.2.1. tétel. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ csillagtartomány,

$$g, h : \Omega \to \mathbb{R}$$

differenciálható kétváltozós függvények, úgy az (5.2.1) egyenlet pontosan akkor egzakt, ha

$$\boxed{\partial_2 g = \partial_1 h}$$

teljesül.

5.2.0. megjegyzés. Megmutatható, hogy ha az Ω csillagtartomány csillagpontja, továbbá $(\tau, \xi) \in \Omega$, akkor az 5.2.1. tételbeli feltételek mellett a

$$\boxed{P(x, y) := \int_\tau^x g(t, \xi)\, \mathrm{d}t + \int_\xi^y h(x, s)\, \mathrm{d}s \qquad ((x, y) \in \Omega)}$$

függvényre $P(\tau, \xi) = 0$, ill.

$$\partial_1 P(x, y) = g(x, y), \quad \partial_2 P(x, y) = h(x, y) \qquad ((x, y) \in \Omega).$$

5.2.4. példa. Az

$$\ln(1+y^2)\,\mathrm{d}x + \frac{2y(x-1)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2.4}$$

egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a

$$g(x,y) := \ln(1+y^2), \quad h(x,y) := \frac{2y(x-1)}{1+y^2} \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(0{,}0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x \ln(1+0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y \frac{2s(x-1)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = (x-1)\ln(1+y^2) \qquad (x,y\in\Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz az (5.2.4) egyelet megoldása, ha alkalmas $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$(x-1)\ln(1+\varphi^2(x)) = c \qquad (x\in I)$$

teljesül.

5.2.5. példa. A

$$(3x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2.5}$$

egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a

$$g(x,y) := 3x^2+y^2, \quad h(x,y) := 2xy \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(0{,}0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^y 2xs\,\mathrm{d}s = x^3 + xy^2 \qquad (x,y\in\Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz az (5.2.5) egyelet megoldása, ha alkalmas $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$x^3 + x\varphi^2(x) = c \qquad (x\in I)$$

teljesül.

5.2.2. definíció. Ha a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, és azt is megköveteljük, hogy alkalmas $\tau,\xi\in\mathbb{R}$ esetén φ eleget tegyen a $\varphi(\tau)=\xi$ feltételnek, akkor az **egzakt egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**ról beszélünk.

5.2.2. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $(2xy+3y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+6xy-2y)\,\mathrm{d}y=0$, $y(1)=-1/2$;
2. $(2x+y)\,\mathrm{d}x+(x-2y)\,\mathrm{d}y=0$, $y(1)=1$.

Útm.

1. A
$$g(x,y):=2xy+3y^2,\quad h(x,y):=x^2+6xy-2y\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
választással
$$\partial_2 g(x,y)=2x+6y=\partial_1 h(x,y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
tehát a fenti kezdetiérték-feladat egzakt. Ha a
$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
függvényre
$$\operatorname{grad} P=(g,h),$$
akkor $\partial_1 P=g$, azaz
$$P(x,y)=x^2y+3xy^2+k(y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén
$$x^2+6xy-2y=h(x,y)=\partial_2 P(x,y)=x^2+6xy+k'(y),$$
ezért pl. a
$$k(y):=-y^2\qquad (y\in\mathbb{R})$$
választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy minden $x\in\mathcal{D}_\varphi$ esetén
$$x^2\varphi(x)+(3x-1)\varphi^2(x)=c.$$
Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1)=-1/2$, így $c=0$, és a megoldás implicit alakja:
$$x^2\varphi(x)+(3x-1)\varphi^2(x)=0\qquad (x\in\mathcal{D}_\varphi)\,.$$

2. A
$$g(x,y):=2x+y,\quad h(x,y):=x-2y\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$
választással
$$\partial_2 g(x,y)=1=\partial_1 h(x,y)\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$
tehát a fenti kezdetiérték-feladat egzakt. Ha a
$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g, h),$$

akkor $\partial_1 P = g$, azaz

$$P(x,y) = x^2 + xy + k(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ahol $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$x - 2y = h(x,y) = \partial_2 P(x,y) = x + k'(y),$$

ezért pl. a

$$k(y) := -y^2 \qquad (y \in \mathbb{R})$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$x^2 + x \cdot \varphi(x) - \varphi^2(x) = c.$$

Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 1$ és a megoldás implicit alakja:

$$x^2 + x \cdot \varphi(x) - \varphi^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad \blacksquare$$

5.2.3. feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = -\frac{1 + e^x y(x) + x e^x y(x)}{x e^x + 2} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenletet, ill. az

$$e^{-x}(2x - x^2 - y^2(x)) + 2y(x) e^{-x} y'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(1) = 1$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm.

1. lépés.. Az egyenlet

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

alakú, ahol

$$g(x,y) := 1 + e^x y + x e^x y, \quad h(x,y) := x e^x + 2 \qquad ((x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2).$$

Az egyenlet egzakt, hiszen

$$\partial_2 g(x,y) = e^x + x e^x = \partial_1 h(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega).$$

Mivel $(0{,}0)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_0^x (1 + e^t \cdot 0 + t e^t \cdot 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y (x e^x + 2)\,\mathrm{d}s = x + x y e^x + 2y \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz az egyenlet megoldása, ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + x\varphi(x)e^x + 2\varphi(x) = c, \quad \text{ill.} \quad \varphi(x) = \frac{c-x}{xe^x+2} \qquad (x \in I)$$

teljesül. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $xe^x + 2 > 0$, ezért $I = \mathbb{R}$.

2. lépés.. Az egyenlet egzakt, hiszen az $\Omega := \mathbb{R}^2$ csillagtartománnyal a

$$g(x,y) := e^{-x}(2x - x^2 - y^2), \quad h(x,y) := 2ye^{-x} \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

függvényekre $\partial_2 g = \partial_1 h$ teljesül. Mivel $(1,1)$ az Ω csillagpontja és

$$P(x,y) := \int_1^x e^{-t}(2t - t^2 - 1)\,\mathrm{d}t + \int_1^y 2se^{-x}\,\mathrm{d}s = \ldots = (x^2+y^2)e^{-x} - \frac{2}{e} \qquad (x, y \in \Omega),$$

ezért valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

(differenciálható) függvény pontosan akkor lesz az (5.2.5) egyelet megoldása, ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$(x^2 + \varphi^2(x))e^{-x} - \frac{2}{e} = c \quad (x \in I), \qquad \text{azaz} \qquad \varphi^2(x) = e^x(c + 2/e) - x^2 \quad (x \in I)$$

teljesül. Olyan megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 0$, és a megoldás explicit alakja:

$$\varphi(x) = \sqrt{2e^{x-1} - x^2} \qquad (x \in I),$$

ahol $I \subset \mathbb{R}$ valamely, az 1-et belsejében tartalmazó intervallum. Ilyen létezik, hiszen

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2e^{x-1} - x^2 = \pm\infty. \quad \blacksquare$$

Az iménti feladat útmutatójában csak azt láttuk be, hogy ha van az adott kezdetiérték-feladatnak megoldása, akkor az mely (implicit) algebrai egyenletnek tesz eleget. Azt, hogy van-e megoldás, minden esetben a megfelelő implicit egyenlet megoldásával vagy az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételeinek ellenőrzésével kaphatjuk meg.

5.2.2. tétel. Ha az (5.2.1) differenciálegyenlet egzakt, és valamely $(\tau, \xi) \in \Omega$ pontra

$$h(\tau, \xi) \neq 0,$$

akkor az (5.2.1)-ra vonatkozó k.é.f. (globálisan) egyértelműen megoldható.

Biz. Ha a

$$P : \Omega \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$\operatorname{grad} P = (g, h),$$

továbbá

$$\pi(x,y) := P(x,y) - P(\tau,\xi) \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

akkor

- π folytonosan deriválható: $\pi \in \mathfrak{C}^1$,
- $\partial_2\pi(\tau,\xi) = h(\tau,\xi) \neq 0$;
- $\pi(\tau,\xi) = 0$.

Teljesülnek tehát az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei, így alkalmas $\tau \in I \subset \mathbb{R}$ (nyílt) intervallum esetén pontosan egy olyan

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

deriválható függvény van, amelyre

$$\varphi(\tau) = \xi \qquad \text{és} \qquad \pi(x,\varphi(x)) = P(x,\varphi(x)) - P(\tau,\xi) = 0 \quad (x \in I). \quad \blacksquare$$

Előfordulhat, hogy az (5.2.1)-beli g, ill. h deriválható függvény nem tesz eleget az ún. egzaktsági feltételnek, azaz

$$\partial_2 g \neq \partial_1 h.$$

Ilyenkor megpróbáljuk (5.2.1)-et ekvivalens átalakításokkal „egzakt alakra hozni”, azaz keresünk olyan

$$\mu : \Omega \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt, amellyel (5.2.3) megszorozva egzakt lesz. Mivel a $\mu \equiv 0$-val való szorzással minden (5.2.3) egyenlet egzakt lesz, ezért ezt a függvény kizárjuk a vizsgálatokból.

5.2.3. definíció. Ha $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ tartomány és

$$\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

olyan folytonos függvény, hogy valamely $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$ esetén $\mu(x,y) \neq 0$, úgy azt mondjuk, hogy μ **integráló tényező** vagy **Euler-féle multiplikátor** az (5.2.3) egyenletre vonatkozóan, ha a

$$g(x,y)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\mu(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

egyenlet egzakt.

5.2.6. példa. A

$$4xy(x) + 3y^2(x) - x + (x^2 + 2xy(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet nem egzakt, hiszen ha $\Omega := \mathbb{R}^2$, ill.

$$g(x,y) := 4xy + 3y^2 - x, \quad h(x,y) := x^2 + 2xy \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

akkor

$$\partial_2 g(x,y) \equiv 4x + 6y \not\equiv 2x + 2y \equiv \partial_1 h(x,y).$$

A

$$\mu(x,y) := x^2 \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

függvény integráló tényező, hiszen ezzel beszorozva az

$$4x^3y(x) + 3x^2y^2(x) - x^3 + (x^4 + 2x^3y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet egzakt:

$$\partial_y(4x^3y + 3x^2y^2 - x^5) \equiv 4x^3 + 6x^2y \equiv \partial_x(x^4 + 2x^3y).$$

5.2.0. megjegyzés. Ha $\widetilde{\Omega}$ csillagtartomány és

$$\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

deriválható, úgy (vö. 5.2.1. tétel előtti megjegyzés) μ pontosan akkor integráló tényező, ha

$$\mu\partial_2 g + g\partial_2\mu = \boxed{\partial_2(g\mu) = \partial_1(h\mu)} = \mu\partial_1 h + h\partial_1\mu, \tag{5.2.6}$$

azaz

$$g\partial_2\mu - h\partial_1\mu = \mu(\partial_1 h - \partial_2 g). \tag{5.2.7}$$

5.2.7. példa.

$$y\,dx - x\,dy = 0 \tag{5.2.8}$$

egyenlet esetében a

$$g(x,y) := y, \quad h(x,y) := -x \qquad ((x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2)$$

függvényekre

$$\partial_1 g = 1 \neq -1 = \partial_1 h,$$

azaz (5.2.8) nem egzakt. Valamely μ függvény az (5.2.7) feltétel szerint tehát pontosan akkor integráló tényező a (5.2.8) egyenletre vonatkozóan, ha

$$x\partial_1\mu(x,y) + y\partial_2(x,y) = -2\mu(x,y) \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}).$$

Könnyen belátható, hogy μ-re az alábbi három függvény megfelelő lesz:

$$\textbf{(1)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{x^2}, \qquad \textbf{(2)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{y^2}, \qquad \textbf{(3)} \quad \mu(x,y) \equiv \frac{1}{xy}.$$

Az **(1)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\} \qquad \text{vagy} \qquad \widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x < 0\}$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.
A **(2)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 0\} \qquad \text{vagy} \qquad \widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y < 0\}$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.
A **(3)** esetben, ha

$$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; xy \neq 0\},$$

akkor $\mu : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ integráló tényező, az egzaktá tett egyenlet

$$\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

alakú.

5.2.4. feladat. Mutassuk meg, hogy alkalmas $m, n \in \mathbb{Z}$, ill. az

$$y(x)(x^3 - y(x)) - x(x^3 + y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenlet esetén

$$\mu(x,y) := x^m y^n \qquad ((x,y) \in \Omega := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0\})$$

integráló tényező!

Útm. Az egyenletet $x^m y^n$-nel szorozva azt kapjuk, hogy

$$(x^{m+3}y^{n+1} - x^m y^{n+2})\,\mathrm{d}x + (x^{m+4}y^n + x^{m+1}y^{n+1})\,\mathrm{d}y = 0.$$

Mivel Ω csillagtartomány, ezért ez az egyenlet pontosan akkor egzakt Ω-n, ha

$$(n+1)x^{m+3}y^n - (n+2)x^m y^{n+1} = -(m+4)x^{m+3}y^n - (m+1)x^m y^{n+1} \qquad ((x,y) \in \Omega),$$

azaz

$$(n+1 = -m-4 \quad \text{és} \quad -n-2 = -m-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (m = -2, \quad \text{ill.} \quad n = -3)$$

teljesül. ■

Az (5.2.6) vagy (5.2.7) valójában parciális differenciálegyenlet μ-re nézve, aminek megoldása lényegesen bonyolultabb feladat, mint az eredeti. Egyszerűsíthetünk a dolgon, ha μ-t a

$$\mu := \varphi \circ u,$$

alakban keressük, ahol

$$\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$$

alkalmas deriválható függvények. Ekkor ui. (5.2.6) nem más, mint

$$\varphi'(u) \cdot \partial_2 u \cdot g + \varphi(u) \cdot \partial_2 g = \varphi'(u) \cdot \partial_1 u \cdot h + \varphi(u) \cdot \partial_1 h,$$

azaz

$$\frac{\partial_1 h - \partial_2 g}{\partial_2 u \cdot g - \partial_1 u \cdot h} = \frac{\varphi'}{\varphi}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln(\varphi(u)).$$

Ha tehát az iménti egyenlőség bal oldala u függvénye, azaz alkalmas $m \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\frac{\partial_1 h - \partial_2 g}{\partial_2 u \cdot g - \partial_1 u \cdot h} = m(u),$$

és M a m egy primitív függvénye: $M' = m$, akkor

$$\mu(x,y) = e^{M(u(x,y))} \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}).$$

5.2.8. példa. Ha
$$u(x,y)=x \qquad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y)\equiv 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y)\equiv 1.$$
Így, ha $M\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M'=m$, és
$$\frac{\partial_2 g(x,y)-\partial_1 h(x,y)}{h(x,y)}\equiv m(x),$$
akkor
$$\mu(x,y):\equiv e^{M(x)}$$
integráló tényező.

5.2.9. példa. Ha
$$u(x,y)=y \qquad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y)\equiv 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y)\equiv 0.$$
Így, ha $M\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M'=m$, és
$$\frac{\partial_1 h(x,y)-\partial_2 g(x,y)}{g(x,y)}\equiv m(y),$$
akkor
$$\mu(x,y):\equiv e^{M(y)}$$
integráló tényező.

5.2.10. példa. Ha
$$u(x,y)=xy \qquad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y)\equiv x \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y)\equiv y.$$
Így, ha $M\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M'=m$, és
$$\frac{\partial_2 g(x,y)-\partial_1 h(x,y)}{yh(x,y)-xg(x,y)}\equiv m(xy),$$
akkor
$$\mu(x,y):\equiv e^{M(xy)}$$
integráló tényező.

5.2.11. példa. Ha
$$u(x,y) = x + y \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y) \equiv 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv 1.$$
Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és
$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y) - g(x,y)} \equiv m(x+y),$$
akkor
$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(x+y)}$$
integráló tényező.

5.2.12. példa. Ha
$$u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y) \equiv 2x \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv 2y.$$
Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és
$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{2xh(x,y) - 2yg(x,y)} \equiv m(x^2+y^2),$$
akkor
$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(x^2+y^2)}$$
integráló tényező.

5.2.13. példa. Ha
$$u(x,y) = \frac{y}{x} \qquad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$
akkor
$$\partial_2 u(x,y) \equiv \frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad \partial_1 u(x,y) \equiv -\frac{y}{x^2}.$$
Így, ha $M \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan deriválható függvény, amelyre $M' = m$, és
$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{-\frac{yh(x,y)}{x^2} + \frac{g(x,y)}{x}} \equiv -x^2 \cdot \frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{yh(x,y) + xg(x,y)} \equiv m(y/x),$$
akkor
$$\mu(x,y) :\equiv e^{M(y/x)}$$
integráló tényező.

5.2.5. feladat. Keressünk integráló tényezőt az alábbi feladatok esetében, majd adjuk meg egy megoldásukat is!

1. $(-y^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + xy)\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
2. $(x^2 + x + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$, $y(-1) = 1/\sqrt{6}$;
3. $y\,\mathrm{d}x - (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$;
4. $(y - x^2y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
5. $(y - xy)\,\mathrm{d}x + (x - xy)\,\mathrm{d}y = 0$;
6. $y\,\mathrm{d}x - (y^2 + x^2 + x)\,\mathrm{d}y = 0$;
7. $(2x^2 + xy^2)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^3}{y} + 3x^2y\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

Útm.

1. A

$$g(x,y) := -y^2 - xy, \quad h(x,y) := x^2 + xy \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

választással

$$\partial_2 g(x,y) = -2y - x \neq 2x + y = \partial_1 h(x,y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

tehát a fenti kezdetiérték-feladat nem egzakt. Mivel

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y)} = \frac{-3(x+y)}{x(x+y)} = -\frac{3}{x} =: m(x) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; h(x,y) \neq 0),$$

ezért pl.

$$M(x) := -3\ln(x) \qquad (x > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{-3\ln(x)} = \frac{1}{x^3} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0$ esetén is multiplikátor. Ekkor tehát az

$$\frac{-y^2 - xy}{x^3}\,\mathrm{d}x + \frac{x^2 + xy}{x^3}\,\mathrm{d}y = 0$$

egyenlet egzakt. Ha a

$$P \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$\operatorname{grad} P(x,y) \equiv \left(\frac{-y^2 - xy}{x^3}, \frac{x^2 + xy}{x^3}\right),$$

akkor

$$P(x,y) \equiv \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x} + k(y)$$

ahol $k \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel

$$\frac{x^2 + xy}{x^3} \equiv \partial_2 P(x,y) \equiv \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} + k'(y),$$

ezértalkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén $k(y) \equiv K$, azaz a

$$P(x, y) :\equiv \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x}$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$\frac{\varphi^2(x)}{2x^2} + \frac{\varphi(x)}{x} = c.$$

Azonban olyan φ megoldást keresünk, amelyre $\varphi(1) = 1$, így $c = 3/2$, és a megoldás implicit alakja:

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)\,.$$

2. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(x^2 + x + y^2) \equiv 2y \not\equiv y \equiv \partial_x(xy).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(x^2 + x + y^2) - \partial_x(xy)}{xy} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} =: m(x),$$

ezért pl.

$$M(x) := \ln(x) \qquad (x > 0)$$

esetén a

$$\mu(x, y) := e^{M(x)} = x \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor.

3. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y) \equiv 1 \not\equiv -1 \equiv \partial_x(-(x + y)).$$

Mivel

$$\frac{\partial_x(-(x + y)) - \partial_y(y)}{y} = \frac{-1 - 1}{y} = \frac{-2}{y} =: m(y),$$

ezért pl.

$$M(y) := (-2)\ln(y) \qquad (y > 0)$$

esetén a

$$\mu(x, y) := e^{M(y)} = \frac{1}{y^2} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ egész $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$-en is multiplikátor.

4. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y - x^2y^2) \equiv 1 - 2x^2y \not\equiv 1 \equiv \partial_x(x).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(y - x^2y^2) - \partial_x(x)}{yx - x(y + x^2y^2)} = \frac{1 - 2x^2y - 1}{yx - xy + x^3y^2} = \frac{-2}{xy} =: m(xy),$$

ezért pl.

$$M(x) := \ln(1/x^2) \qquad (x>0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(xy)} = \frac{1}{x^2y^2} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy – a tengelyeket kivéve – μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor.

5. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y-xy) \equiv 1-x \not\equiv 1-y \equiv \partial_x(x-xy).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(y-xy)-\partial_x(x-xy)}{x-xy-(y-xy)} = \frac{y-x}{x-y} = -1 =: m(x+y),$$

ezért pl.

$$M(x) := -x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x+y)} = e^{-x-y} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor.

6. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(y) \equiv 1 \not\equiv -2x-1 \equiv \partial_x(-y^2-x^2-x).$$

Mivel

$$\begin{aligned}\frac{\partial_y(y)-\partial_x(-y^2-x^2-x)}{2xh(-y^2-x^2-x)-2yy} &= \frac{1+2x+1}{-2x(y^2+x^2+x)-2y^2} = \\ &= -\frac{x+1}{(x+1)(x^2+y^2)} = -\frac{1}{x^2+y^2} =: m(x^2+y^2),\end{aligned}$$

ezért pl.

$$M(x) := -\ln(x) \qquad (x>0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x^2+y^2)} = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad ((0,0)\neq(x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor.

7. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(2x^2+xy^2) \equiv 2xy \not\equiv \frac{3x^2}{y}+6xy \equiv \partial_x\left(\frac{x^3}{y}+3x^2y\right).$$

Mivel

$$\begin{aligned}-x^2\cdot\frac{\partial_y(2x^2+xy^2)-\partial_x\left(\frac{x^3}{y}+3x^2y\right)}{y\left(\frac{x^3}{y}+3x^2y\right)+x(2x^2+xy^2)} &= x^2\frac{\frac{3x^2}{y}+4xy}{3x^3+4x^2y^2} = \\ &= \frac{x}{y}\cdot\frac{3x+4y^2}{3x+4y^2} = \frac{1}{\frac{y}{x}} =: m\left(\frac{y}{x}\right),\end{aligned}$$

ezért pl.

$$M(x) := \ln(x) \qquad (x > 0)$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(y/x)} = \frac{y}{x} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0)$$

függvény multiplikátor. ■

5.2.1. gyakorló feladat. Keressünk integráló tényezőt az alábbi feladatok esetében, majd adjuk meg egy megoldásukat is!

1. $(2xy^2 + e^{-x^2})\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
2. $(-2y\sin(x) + 6\sin^2(x))\,\mathrm{d}x + \left(\cos(x) + \dfrac{2y}{\cos(x)}\mathrm{ch}\,(y^2)\right)\,\mathrm{d}y = 0$;
3. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
4. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = 0$;
5. $(2x - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;
6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-x + y + 5}{y - x - 3}$;
7. $(2xy^2 + e^{-x^2})\,\mathrm{d}x + (2y - e^{-x^2}\sin(y))\,\mathrm{d}y = 0$;
8. $(6 + (6x + y)\mathrm{ctg}(x))\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
9. $(2x^3y^2 - y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\,\mathrm{d}y = 0$.

Útm.

5.3. Szeparábilis differenciálegyenletek

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok,

$$\tau \in I, \quad \xi \in J, \qquad \text{ill.} \qquad g \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \quad h \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}),$$

majd tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to J$ differenciálható függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, továbbá

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ill.

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül!

5.3.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **szétválasztható változójú vagy szeparábilis differenciálegyenlet**nek, ill. **szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**nak nevezzük, és az

$$y' = g \cdot (h \circ y) \qquad /y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_y)/\,, \tag{5.3.1}$$

ill. az

$$y' = g \cdot (h \circ y), \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.3.2}$$

szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy ha valamely

1. $\sigma \in J$ esetén $h(\sigma) = 0$, akkor a

$$\varphi(x) := \sigma \quad (x \in I)$$

függvény megoldása az (5.3.1) egyenletnek.

2. $\widetilde{J} \subset J$ nyílt intervallum esetén

$$h(y) \neq 0 \qquad (y \in \widetilde{J}),$$

akkor

a) (5.3.1) az

$$g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ((x,y) \in I \times \widetilde{J})$$

ekvivalens alakba írható. Ez a differenciálegyenlet egzakt, hiszen pl. a

$$P(x,y) := \int_\tau^x g - \int_\xi^y \frac{1}{h} \qquad ((x,y) \in I \times \widetilde{J})$$

függvényre[2] $P \in \mathfrak{D}(I \times \widetilde{J}, \mathbb{R})$ és

$$\operatorname{grad} P = (g, -1/h), \qquad \text{azaz} \qquad \partial_1 P = g, \;\; \partial_2 P = -1/h.$$

b) a $\widetilde{J}$ intervallumon fennáll a

$$g = \frac{\varphi'}{h \circ \varphi} = \left(\frac{1}{h} \circ \varphi\right) \cdot \varphi'.$$

egyenlőség, ahol $\varphi \in I \to \widetilde{J}$ az (5.3.1) egyenlet egy megoldása. Így – mivel g, $1/h$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények –, van olyan $G : I \to \mathbb{R}$, ill. $H : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $G' = g$, ill. $H' = 1/h$, továbbá

$$(H \circ \varphi)'(x) = G'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

[2] Feltéve, hogy $\xi \in \widetilde{J}$ teljesül.

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahonnan alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$H(\varphi(x)) - G(x) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{5.3.3}$$

Az $1/h$ függvény nyilvánvalóan nem veszi fel a 0-t a $\widetilde{J}$ egyetlen pontjában sem, ezért ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága következtében tehát H' állandó előjelű, azaz H szigorúan monoton függvény. Következésképpen H invertálható, és a H^{-1} inverz segítségével (5.3.3)-ből azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x) + c) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \tag{5.3.4}$$

A gyakorlatban H^{-1} explicit előállítása többnyire komoly nehézségekbe ütközik, ezért sokszor megelégszünk az (5.3.3) egyenlőség felírásával.
A $\widetilde{J}$ intervallumon a (5.3.2) kezdetiérték-feladat φ megoldására teljesül az

$$\int_\xi^{\varphi(x)} \frac{1}{h} = \int_\tau^x g \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

(implicit) egyenlőség, ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ x \in I : \inf_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^x g < \sup_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}.$$

5.3.1. feladat. Határozzuk meg azt a differenciálható φ függvényt, amelyre

$$2\varphi(x) = x\varphi'(x)(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{+\infty} \varphi = 2$$

teljesül!

Útm. Ha $x > 0$, akkor olyan

$$\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt kell meghatároznunk, amelyre

$$\psi'(x) = \frac{2}{x(1+x^2)} \cdot \psi(x) =: g(x) \cdot h(\psi(x)) \qquad (x > 0).$$

Ha pl.

$$H : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

olyan differenciálható függvény, amelyre

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y} \qquad (y > 0),$$

akkor pl.

$$H(y)=\ln(y) \qquad (y>0).$$

Ha

$$G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

olyan differenciálható függvény, amelyre

$$G'(x)=g(x)=\frac{2}{x(1+x^2)} \qquad (x>0),$$

akkor

$$\int \frac{2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int\left\{\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right\}\mathrm{d}x=\left[\ln(x^2)-\ln(1+x^2)\right]=\left[\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right]$$

következtében pl. a

$$G(x):=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \qquad (x>0)$$

függvény megfelelő. Így alkalmas $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$\psi(x)=H^{-1}(G(x)+c)=\exp\left(\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}+c\right)\right)=\frac{x^2e^c}{1+x^2} \qquad (x>0).$$

Behelyettesítéssel belátható, hogy a

$$\varphi(x):=\frac{x^2e^c}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény megoldás. Mivel

$$\lim_{+\infty}\varphi=e^c,$$

ezért $e^c=2$, azaz a megoldás a

$$\varphi(x)=\frac{2x^2}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

függvény. ■

5.3.2. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x)=xy^2(x) \quad (x\in\mathcal{D}_y), \quad y(0)=1;$
2. $y'(x)=\dfrac{e^{x-y(x)}}{1+e^x} \quad (x\in\mathcal{D}_y), \quad y(0)=1;$
3. $y'=\sqrt{|y|}, \quad y(\tau)=\xi$, ahol $\tau,\xi\in\mathbb{R}:\xi\neq 0$.

Útm.

1. A

$$\tau:=0, \quad \xi:=1, \qquad g(x):=x \quad (x\in I:=\mathbb{R}), \qquad h(y):=y^2 \quad (y\in J:=(0,+\infty))$$

választással

$$(\tau,\xi)\in I\times J,\qquad g,h\in\mathfrak{C}:\quad h(y)\neq 0\quad (y\in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g=\int_0^x t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\quad (x\in I)\,,\qquad \int_\xi^u\frac{1}{h}=\int_1^u\frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w=1-\frac{1}{u}\quad (u\in J)$$

és

$$\inf_{u\in J}\int_\xi^u\frac{1}{h}=-\infty,\qquad \text{ill.}\qquad \sup_{u\in J}\int_\xi^u\frac{1}{h}=1,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására

$$1-\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{x^2}{2}\qquad\left(x\in I:-\infty<\frac{x^2}{2}<1\right),$$

azaz

$$\varphi(x)=\frac{2}{2-x^2}\qquad\left(x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right).$$

2. A

$$\tau:=0,\quad \xi:=1,\qquad g(x):=\frac{e^x}{1+e^x}\quad (x\in I:=\mathbb{R}),\qquad h(y):=\frac{1}{e^y}\quad (y\in J:=\mathbb{R})$$

választással

$$(\tau,\xi)\in I\times J,\qquad g,h\in\mathfrak{C}:\quad h(y)\neq 0\quad (y\in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t=\ln\left(1+e^x\right)-\ln(2)\qquad (x\in I)\,,$$

$$\int_\xi^u\frac{1}{h}=\int_1^u e^w\,\mathrm{d}w=e^u-e\qquad (u\in J)$$

és

$$\inf_{u\in J}\int_\xi^u\frac{1}{h}=-e,\qquad \text{ill.}\qquad \sup_{u\in J}\int_\xi^u\frac{1}{h}=+\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására

$$e^{\varphi(x)}-e=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\qquad \left(x\in\mathbb{R}:-e<\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)<+\infty\right),$$

azaz

$$\varphi(x)=\ln\left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)+e\right)\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

3. ξ előjelét illetően két esetet különböztetünk meg:

   – $\boxed{\xi>0}$: A

   $$g(x):=1\quad (x\in I:=\mathbb{R}),\qquad h(y):=\sqrt{y}\quad (y\in J:=(0,+\infty)),$$

   választással

   $$(\tau,\xi)\in I\times J,\qquad g,h\in\mathfrak{C}:\quad h(y)\neq 0\quad (y\in J).$$

   Mivel

   $$\int_\tau^x g=\int_\tau^x 1\,\mathrm{d}t=x-\tau\qquad (x\in I)\,,$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_\xi^u \frac{1}{\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w = 2\sqrt{u} - 2\sqrt{\xi} \qquad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -2\sqrt{\xi}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldására

$$2\sqrt{\varphi(x)} - 2\sqrt{\xi} = x - \tau \quad (x \in I : -2\sqrt{\xi} < x - \tau < +\infty),$$

azaz

$$\varphi(x) = \left(\sqrt{\xi} + \frac{x-\tau}{2}\right)^2 \quad \left(x \in \left(\tau - 2\sqrt{\xi}, +\infty\right)\right).$$

– $\boxed{\xi < 0}$: A

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \sqrt{-y} \quad (y \in J := (-\infty, 0))$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C} : \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Az előző levezetéshez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = -\left(\sqrt{-\xi} - \frac{x-\tau}{2}\right)^2 \qquad \left(x \in \left(-\infty, \tau + 2\sqrt{-\xi}\right)\right). \quad \blacksquare$$

5.3.3. feladat. Adjunk példát olyan $c \in \mathbb{R}$ számra és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre

$$\varphi'(x) = \frac{e^{2\varphi(x)}}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, c)), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül!

Útm. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 0, \qquad I := \mathbb{R}, \quad J := \mathbb{R}, \qquad g(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in I), \quad h(y) := e^{2y} \quad (y \in J)$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}, \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Így tehát, ha φ az

$$y' = g \cdot (h \circ y), \quad y(\tau) = \xi$$

(szeparábilis) kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{1}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{azaz} \qquad 1 - 2\mathrm{arctg}\,(x) = e^{-2\varphi(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathrm{arctg}\,(x)}}\right) \qquad (x \in (-\infty, c)),$$

ahol $c := \mathrm{arctg}\,(1/2)$. $\blacksquare$

5.3.1. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = 2x(y(x) + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0$;
2. $y'(x) + 2xy(x) = x$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 0$.
3. $2x\sqrt{2x - x^2}y'(x) + 4 + y^2(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(2) = 2\sqrt{3}$.

Útm.

5.3.4. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$y'(x) = x\sqrt{y^2(x) - 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van, majd adjunk meg legalább négy olyan megoldást, amelyek grafikonjai a $(0,1)$ pont minden környezetében különböznek egymástól!

Útm. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := \sqrt{y^2 - 1} \quad (y \in J := [1, +\infty))$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}.$$

Világos, hogy

$$h(y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 1,$$

ill. a

$$\varphi(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak. Ha $\widetilde{J} := (1, +\infty)$ és $\xi \in \widetilde{J}$, akkor

$$\int_0^x g = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \qquad (x \in I)\,,$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_\xi^u \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}}\,\mathrm{d}w = \operatorname{arch}(u) - \operatorname{arch}(\xi) \qquad \left(u \in \widetilde{J}\right)$$

és

$$\inf_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\operatorname{arch}(\xi), \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in \widetilde{J}} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty$$

következtében a

$$y'(x) = x\sqrt{y^2(x) - 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = \xi$$

kezdetiérték-feladat ψ megoldására

$$\operatorname{arch}(\psi(x)) - \operatorname{arch}(\xi) = \frac{x^2}{2} \quad \left(x \in I : -\operatorname{arch}(\xi) < \frac{x^2}{2} < +\infty\right) = \mathbb{R},$$

azaz

$$\psi(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2} + \operatorname{arch}(\xi)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Látható, hogy a $\xi = 1$ helyettesítéssel ismét az eredeti kezdetiérték-feladat megoldásához jutunk. Így az eredeti kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen bármely $0 \leq k \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \leq k), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x > k) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldás. Így

$$\phi_1(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad \phi_2(x) := \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\phi_3(x) := \begin{cases} 1 & (x \leq 0), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x > 0) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi_4(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right) & (x \leq 0) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

négy olyan megoldása az eredeti kezdetiérték-feladatnak, amelyek grafikonjai a $(0,1)$ pont minden környezetében különböznek egymástól. ■

5.3.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$, akkor az alábbi differenciálegyenletek szeparábilis egyenletté alakíthatók!

1. $y'(x) = f(ax + by(x) + c)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$;
2. $y'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, ahol $f(z) \neq z$ $(z \in I)$.

Útm.

1. Ha a φ függvény megoldása a fenti egyenletnek és

   $$\psi(x) := ax + b\varphi(x) + c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

   akkor minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

   $$\psi'(x) = a + b\varphi'(x) = a + bf(ax + b\varphi(x) + c) = a + bf(\psi(x)).$$

   Ez azt jelenti, hogy ψ a

   $$\boxed{z' = a + bf \circ z}$$

   szeparábilis egyenlet megoldása.
2. Ha a φ függvény megoldása a fenti egyenletnek és

   $$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

   akkor minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén

   $$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) \; .$$

   Ez azt jelenti, hogy ψ az

   $$\boxed{z'(x) = \frac{f(z(x)) - z(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)}$$

   szeparábilis egyenlet megoldása. ■

5.3.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = (2x + 2y(x) - 1)^2$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
2. $y'(x) = (y(x) + 4x - 1)^2$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
3. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x}{y(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
4. $y'(x) = \dfrac{x - y(x)}{x + 2y(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$.

Útm.

5.3.3. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = \sin^2(x - y(x))$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 0$;
2. $y'(x) = \frac{y^3(x) - x^3}{xy^2(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
3. $y'(x) = 1 + \frac{y^2(x)}{x^2 + xy(x)}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$.

Útm.

5.3.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$, akkor az alábbi differenciálegyenlet szeparábilis egyenletté alakítható!

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y(x) + c_1}{a_2 x + b_2 y(x) + c_2}\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_y),$$

ahol $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$: $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ vagy $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$.

Útm.

5.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$\tau \in I, \quad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad A, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$$

függvények esetén tekintsük a következő feladatot.
Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi' = A \cdot \varphi + b,$$

ill.

$$\varphi' = A \cdot \varphi + b, \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül.

5.4.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **elsőrendű lineáris differenciálegyenlet**nek, ill. **elsőrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat**nak nevezzük, és az

$$y' = A \cdot y + b, \tag{5.4.1}$$

ill. az

$$y' = A \cdot y + b, \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.4.2}$$

szimbólummal jelöljük.

Az (5.4.1) egyenlet elnevezésében a *lineáris* jelzőt az magyarázza, hogy az

$$L : \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}), \qquad L(y) := y' - Ay$$

leképezés lineáris, azaz bármely $u, v \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R})$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)' - A(\alpha u + \beta v) = \alpha(u' - Au) + \beta(v' - Av) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Világos, hogy ha

1. $A(x) = 0$ $(x \in I)$, akkor a

$$\varphi(x) := \int_\tau^x b(s)\,\mathrm{d}s + \xi \qquad (x \in I)$$

függvény megoldása az (5.4.1) differenciálegyenletnek, ill. az (5.4.2) kezdetiérték-feladatnak.

2. $A(x) \not\equiv 0$, akkor (5.4.1) a

$$g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

ekvivalens alakba írható, ahol

$$g(x, y) := A(x)y + b(x), \quad h(x, y) := -1 \qquad ((x, y) \in I \times \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\partial_2 g = A \neq 0 = \partial_1 h,$$

ezért (5.4.1) nem egzakt. Viszont

$$\frac{\partial_2 g(x, y) - \partial_1 h(x, y)}{h(x, y)} \equiv -A(x),$$

így, ha

$$\alpha(x) := \int_\tau^x A(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I),$$

akkor $\alpha \in \mathfrak{D}(I, \mathbb{R})$: $\alpha' = A$, és

$$\mu(x, y) := e^{-\alpha(x)} \qquad ((x, y) \in I \times \mathbb{R})$$

integráló tényező, azaz az

$$y'e^{-\alpha} = Aye^{-\alpha} + be^{-\alpha} \tag{5.4.3}$$

egyenlet egzakt. Ezért az, hogy

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

teljes megoldása az (5.4.2) kezdetiérték-feladatnak azzal egyenértékű, hogy

$$\underbrace{\varphi'(x)e^{-\alpha(x)} - A(x)\varphi(x)e^{-\alpha(x)}}_{\frac{d}{dx}(\varphi(x)e^{-\alpha(x)})} = b(x)e^{-\alpha(x)} \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\tau) = \xi.$$

Innen integrálással $/\int_\tau^x \,\mathrm{d}s/$ azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x)\exp(-\alpha(x)) - \varphi(\tau)\exp(-\alpha(\tau)) = \int_\tau^x \exp(-\alpha(s))b(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I),$$

ill. az

$$\exp(-\alpha(\tau)) = 1 \qquad \text{és az} \qquad \exp(-\alpha(s)) = \exp\left(-\int_\tau^s A(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

egyenlőség figyelembevételével tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\boxed{\varphi(x) = \left\{\xi + \int_\tau^x b(s)\exp\left(-\int_\tau^s A(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\cdot\exp\left(\int_\tau^x A(s)\,\mathrm{d}s\right).} \tag{5.4.4}$$

5.4.1. tétel. Ha φ és ψ az (5.4.1) differenciálegyenlet egy-egy megoldása, akkor a $\varphi - \psi$ függvény megoldása az

$$y' = A \cdot y \tag{5.4.5}$$

homogén egyenletnek.

Biz. Mivel φ és ψ deriválható, ezért $\varphi - \psi$ is deriválható, továbbá

$$(\varphi - \psi)' = \varphi' - \psi' = A\cdot\varphi + b - (A\cdot\psi + b) = A\cdot\varphi - A\cdot\psi = A\cdot(\varphi - \psi). \quad \blacksquare$$

5.4.2. tétel. Ha

$$\varphi_H := \exp\circ\alpha, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha' = A$$

akkor az (5.4.5) homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\{c\varphi_H :\ c \in \mathbb{R}\}$$

alakú.

Biz. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $c\varphi_H$ megoldása (5.4.5)-nek, hiszen

$$(c\varphi_H)' = c\varphi_H' = cA\varphi_H = A(c\varphi_H),$$

továbbá, ha valamely ω függvény megoldása (5.4.5)-nek, akkor bármely $x \in I$ esetén

$$\left(\frac{\omega}{\varphi_H}\right)'(x) = \frac{\omega'(x)\varphi_H(x) - \omega(x)\varphi_H'(x)}{\varphi_H^2(x)} = \frac{A(x)\omega(x)\varphi_H(x) - \omega(x)A(x)\varphi_H(x)}{\varphi_H^2(x)} = 0,$$

azaz alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\omega}{\varphi_H}(x) = c \qquad (x \in I),$$

más szóval az (5.4.5) homogén lineáris d.e. minden megoldása a következő alakú:

$$c\varphi_H, \qquad \text{ahol} \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

5.4.3. tétel. Az (5.4.1) differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\{\chi + c\varphi_H : \ c \in \mathbb{R}\}$$

alakú, ahol χ a (5.4.1) egyenlet egy tetszőleges megoldása.

Biz. Ha ψ megoldása (5.4.1)-nak, akkor (vö. 5.4.1. tétel) $\psi - \chi$ megoldása (5.4.5)-nak, így a fentiek fényében van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $\psi - \chi = c\varphi_H$, ahonnan

$$\psi = \chi + c\varphi_H$$

következik. $\blacksquare$

5.4.4. tétel. Ha $m : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre

$$m \in \int \frac{b}{\varphi_H},$$

akkor a

$$\chi := m\varphi_H$$

függvény megoldása (5.4.1)-nek.

Biz. Világos, hogy

$$\chi' = (m\varphi_H) = m'\varphi_H + m\varphi_H' = \frac{b}{\varphi_H} \cdot \varphi_H + mA\varphi_H = b + A(m\varphi_H) = A\chi + b. \quad \blacksquare$$

5.4.0. megjegyzés. Az (5.4.4) formula, ill. az iméntiek alapján az(5.4.1) differenciálegyenlet megoldásának menete tehát a következő:

1. lépés.. meghatározzuk a homogén egyenlet (amikor $b \equiv 0$) egyik megoldását:

$$\varphi_H := \exp \circ \alpha \qquad /\alpha' = A/\,;$$

2. lépés.. meghatározunk egy

$$m \in \int \frac{b}{\varphi_H}$$

primitív függvényt;

3. lépés.. felírjuk a megoldáshalmazt az

$$\mathcal{M} := \{I \ni x \mapsto (c + m(x))\varphi_H(x) : \ c \in \mathbb{R}\}$$

alakban.

Az 5.4.0. megjegyzésben bemutatott eljárást az „**állandók variálása**ként” szokás emlegetni. Amíg ui. az (5.4.5) egyenlet megoldásait $c\varphi_H$ alakban kapjuk valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal (állandóval), addig az (5.4.1) ún. **inhomogén egyenlet** megoldásait a „helyről helyre változtatott (variált)” c-vel, azaz egy m függvénnyel számíthatjuk $m\varphi_H$-ként.

5.4.1. feladat. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldáshalmazát!

1. $y'(x) + x^2 y(x) = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
2. $y'(x) - \dfrac{1}{x} y(x) = x^2 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
3. $y'(x) + y(x) = \sin(2x) \ (x \in \mathcal{D}_y)$.

Útm.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := -x^2, \quad b(x) := 0 \quad (x \in I)$$

választással (homogén) lineáris differenciálegyenletet kapunk. Az

$$\alpha \in \int -x^2 \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{x \in \mathbb{R}}$$

függvénnyel az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto c\exp(-x^3/3) : \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-\infty, 0), \qquad A(x) := \frac{1}{x}, \quad b(x) := x^2 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk /$I := (0, +\infty)$ esetén hasonlóan járunk el/.

1. lépés.. Az

$$\alpha \in \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(-x)]_{x\in I}$$

függvényel a homogén egyenlet egy megoldása:

$$\varphi_H(x) = \exp(\alpha(x)) = -x \qquad (x \in I).$$

2. lépés.. Ha az $m : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $m' = b/\varphi_H$, akkor

$$m \in \int \frac{x^2}{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x\in I}$$

3. lépés.. Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \left(c - \frac{x^2}{2}\right)(-x) : \ c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ I \ni x \mapsto -cx + \frac{x^3}{2} : \ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := -1, \quad b(x) := \sin(2x) \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.

1. lépés.. Az

$$\alpha \in \int (-1)\,\mathrm{d}x = [-x]_{x\in\mathbb{R}}$$

függvényel a homogén egyenlet egy megoldása:

$$\varphi_H(x) = \exp(\alpha(x)) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ha az $m : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $m' = b/\varphi_H$, akkor

$$m \in \int \frac{\sin(2x)}{e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))\right]_{x\in\mathbb{R}}.$$

3. lépés.. Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \quad &:= \quad \left\{ I \ni x \mapsto \left(c + \frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))\right) e^{-x} : \ c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \quad \left\{ I \ni x \mapsto ce^{-x} + \frac{\sin(2x) - 2\cos(2x)}{5} : \ c \in \mathbb{R} \right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.4.1. gyakorló feladat. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldáshalmazát!

1. $y'(x) + xy(x) - x = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
2. $y'(x) + 2xy(x) + xe^{-x^2} = 0 \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
3. $xy'(x) - \dfrac{y(x)}{x+1} = x \ (x \in \mathcal{D}_y)$;
4. $y'(x)\sin(x) + \cos(x) = 1 + y(x) \ (x \in \mathcal{D}_y)$.

Útm.

5.4.2. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = x^3 \ (x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 1$;
2. $y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = x^2 \ (x \in \mathcal{D}_y)$, $y(-1) = 1$.

Útm.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad A(x) := -\frac{2}{x}, \quad b(x) := x^3 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk. A kezdetiérték-feladat megoldását „két" módon is megkaphatjuk.

1. mód.. $\alpha \in \displaystyle\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = [-2\ln(x)]_{x\in I}$,

$$\varphi_H(x) = \exp(-2\ln(x)) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in I), \qquad m \in \int \frac{x^3}{1/x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{x\in I}.$$

Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \left(c + \frac{x^6}{6}\right)\frac{1}{x^2} \ : \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. Ha valamely $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényre $\varphi(1) = 1$, akkor $c = 5/6$, azaz a k.é.f. φ teljes megoldására:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{5 + x^6}{6x^2}} \qquad (x \in I).$$

2. mód.. Az (5.4.4) összefüggésből a teljes megoldásra

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(1 + \int_1^x t^3 \exp\left(-\int_1^t -\frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)\cdot\exp\left(\int_1^x -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x t^3 \exp\left(\ln\left(t^2\right)\right)\mathrm{d}t\right)\cdot\exp\left(-\ln\left(x^2\right)\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x t^5\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{x^6+5}{6x^2}} \qquad (x \in I).
\end{aligned}$$

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (-\infty,0), \qquad A(x) := -\frac{1}{x}, \quad b(x) := x^2 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk. A kezdetiérték-feladat megoldását „két" módon is megkaphatjuk.

1. mód.. $\alpha \in \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [-\ln(-x)]_{x\in I}$,

$$\varphi_H(x) = \exp\left(-\ln(-x)\right) = -\frac{1}{x} \quad (x \in I), \qquad m \in \int \frac{x^2}{-1/x}\,\mathrm{d}x = \int -x^3\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{x\in I}.$$

Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \left(c - \frac{x^4}{4}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) :\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. Ha valamely $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényre $\varphi(-1) = 1$, akkor $c = \frac{5}{4}$, azaz a k.é.f. φ teljes megoldására:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{x^4 - 5}{4x}} \qquad (x \in I).$$

2. mód.. Az (5.4.4) összefüggésből a teljes megoldásra

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(1 + \int_{-1}^{x} t^2 \exp\left(-\int_{-1}^{t} -\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(\int_{-1}^{x} -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \left(1 + \int_{1}^{x} t^2 \exp\left(\ln(-t)\right)\mathrm{d}t\right) \cdot \exp\left(-\ln(-x)\right) = \\
&= \left(1 - \int_{1}^{x} t^3\,\mathrm{d}t\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{x^4 - 5}{4x}} \qquad (x \in I). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.4.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$;
2. $y'(x) + 2y(x) - 5 = 0$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 5/2$;
3. $y'(x)\cos(x) + y(x)\sin(x) = 1$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
4. $y'(x) + \frac{y(x)}{x}e^x = 0$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 0$;
5. $y'(x) + y(x)\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(0) = 1$;
6. $xy'(x) = x^2 + y(x)$ $(x \in \mathcal{D}_y)$, $y(1) = 2$;
7. $y' = 3y\mathrm{tg} + 1$, $y(0) = 1$.

Útm.

Az (5.4.1) lineáris egyenlet megoldásait megkaphatjuk az alább ismertetendő eljárással is (**Bernoulli-módszer**). Tegyük fel, hogy a (5.4.1) inhomogén lineáris differenciálegyenlet $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (teljes) megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények . Ekkor (5.4.1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mu'\nu + \mu\nu' = A\mu\nu + b, \qquad \text{azaz} \qquad \mu(\nu' - A\nu) + (\mu'\nu - b) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\mu(\nu' - A\nu) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mu'\nu - b = 0,$$

ahonnan a

$$\nu := \exp \circ \alpha \quad /\alpha' = A/, \qquad \text{ill. a} \qquad \mu \in \int \frac{b}{\nu} = \int \frac{b(x)}{e^{\alpha(x)}}\, \mathrm{d}x$$

függvénnyel a megoldáshalmaz már könnyen felírható.

5.4.3. feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^2 + 3x - 2 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

differenciálegyenletet!

Útm. Ha pl. $I := (-\infty, 0)$ $/I := (0, +\infty)$ esetén hasonlóan járunk el/ és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ az egyenlet (teljes) megoldása, továbbá

$$\varphi(x) =: \mu(x) \cdot \nu(x) \qquad (x \in I),$$

akkor

$$\mu'(x)\nu(x) + \mu(x)\nu'(x) - \frac{\mu(x)\nu(x)}{x} = x^2 + 3x - 2 \qquad (x \in I),$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x) - \frac{\nu(x)}{x}\right) + \mu'(x)\nu(x) - x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (x \in I).$$

Így

$$\nu'(x) - \frac{\nu(x)}{x} = 0 \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \mu'(x)\nu(x) - x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x \in I).$$

Ezért, ha

$$\nu(x) := x \quad (x \in I), \qquad \text{azaz} \qquad \mu'(x) = x + 3 - \frac{2}{x} \qquad (x \in I),$$

akkor bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(-x) + k \qquad (x \in I)$$

függvény megfelelő. Ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \left\{ I \ni x \mapsto \frac{x^3}{2} + 3x - 2x\ln(-x) + k : \; k \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú. ■

5.4.3. gyakorló feladat. Oldjuk meg

1. az
$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = (1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
differenciálegyenletet;
2. az
$$(1+x^2)\cdot y'(x) - 4x \cdot y(x) = x \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad y(0) = 0$$
kezdetiérték-feladatot!

Útm.

5.4.4. feladat. Adott $\tau \in \mathbb{R}$, ill. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvélny esetén oldjuk meg az

$$fy' + f'y = f', \qquad y(\tau) = 1$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Világos, hogy ha

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely olyan differenciálható függvény megoldás, amelyre $\varphi(\tau) = 1$ teljesül. Az alábbiakban feltesszük tehát, hogy $f \not\equiv 0$ teljesül.

1. módszer.. Ha $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, amelyre

$$f(x) \neq 0 \qquad (x \in I)$$

teljesül, akkor a egyenletet átrendezve, ill. a

$$\xi := 1, \qquad A(x) := -\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad b(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (x \in I)$$

választással lineáris kezdetiérték-feladatot kapunk, amelynek megoldása (vö. (5.4.4) formua) a

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \left\{1 + \int_\tau^x \frac{f'(s)}{f(s)} \cdot \exp\left(-\int_\tau^s -\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\} \exp\left(\int_\tau^x -\frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1 + \int_\tau^x \frac{f'(s)}{f(s)} \cdot \frac{f(s)}{f(\tau)}\right\} \frac{f(\tau)}{f(x)} = \left\{1 + \frac{f(x) - f(\tau)}{f(\tau)}\right\} \frac{f(\tau)}{f(x)} = \\
&= 1 \quad (x \in I)
\end{aligned}$$

függvény. Látható tehát, hogy a lineáris kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

2. módszer.. Mivel

$$\partial_y \left(f'(x)y - f'(x)\right) = f'(x) = \partial_x \left(f(x)\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért az egyenlet egzakt. Tehát

$$P(x,y) := f(x)y - f(x) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

primitív függvény, ezért

$$P(x,\varphi(x)) = f(x)\varphi(x) - f(x) = P(\tau,1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

3. módszer.. Vegyük észre, hogy ha φ megoldása a kezdetiérték-feladatnak, akkor a $\theta := f\varphi$ függvényre

$$\theta' = f'\varphi + f\varphi'$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f\varphi - f = c, \qquad \text{azaz} \qquad f(\varphi - 1) = c.$$

A $\varphi(\tau) = 1$ feltétel figyelembe vételével látható tehát, hogy a

$$\varphi(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. ■

5.4.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ a (5.4.1) lineáris differenciálegyenlet különböző megoldásai, akkor (5.4.1) bármely $\omega, \psi : I \to \mathbb{R}$ megoldása esetén van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{\omega(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)} = c \qquad (x \in I)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\omega(x) = \varphi(x) + \alpha\varphi_H(x) \quad \text{és} \quad \psi(x) = \varphi(x) + \beta\varphi_H(x) \qquad (x \in I)$$

(vö. 5.4.3. tétel). Így bármely $x \in I$ esetén

$$\frac{\omega(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \varphi(x)} = \frac{\alpha}{\beta} =: c. \quad ■$$

5.4.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $0 < a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\lim_{+\infty} f = b \in \mathbb{R}$ teljesül, akkor az

$$y' + ay = f$$

differenciálegyenlet minden φ megoldására fennáll a

$$\lim_{+\infty} \varphi = \frac{b}{a}$$

egyenlőség!

Útm. Ha φ a szóban forgó egyenlet megoldása, akkor alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(x) = \left\{ c + \int_0^x f(s)e^{as}\,\mathrm{d}s \right\} e^{-ax} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

– $b \neq 0$, akkor a Bernoulli-l'Hospital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)e^{at}\,\mathrm{d}t}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)e^{ax}}{ae^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a} = \frac{b}{a}.$$

– $b = 0$, akkor (nem alkalmazható a Bernoulli-l'Hospital-szabály, így), ha ψ megoldása az

$$y' + ay = 1$$

egyenletnek, akkor a fentiek következtében

$$\lim_{+\infty} \psi = \frac{1}{a}.$$

A linearitás következtében $\varphi + \psi$ megoldása az

$$y'(x) + ay(x) = f(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletnek. Ennélfogva

$$\lim_{x\to+\infty} (\varphi(x) + \psi(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+1}{a} = \frac{1}{a},$$

így

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{1}{a} - \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0. \quad \blacksquare$$

5.4.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy

$$\inf f > 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{+\infty} g = 0$$

akkor az

$$y' + fy = g$$

differenciálegyenlet minden φ megoldására

$$\lim_{+\infty} \varphi = 0$$

teljesül!

Útm. Ha $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ és φ olyan megoldása az egyenletnek, hogy $\varphi(\tau) = \xi$, akkor (vö. (5.4.4) formula)

$$\varphi(x) = \left\{\xi + \int_\xi^x g(s)\exp\left(\int_\xi^s f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\}\exp\left(-\int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha most

$$F(x) := \int_\xi^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az $\inf f > 0$ feltétel következtében van olyan $c > 0$, hogy

$$f(x) \geq c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$F(x) \geq \int_\xi^x c\,\mathrm{d}s = c(x - \xi),$$

ahonnan

$$\exp\left(-\int_\tau^x f(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{-F(x)} \leq e^{-c(x-\xi)} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Ezért bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\varphi(x)| = e^{-F(x)} \cdot \left|\xi + \int_\xi^x g(s)e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right| \leq e^{-F(x)} \cdot \left\{|\xi| + \int_\xi^x |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Két eset lehetséges:

– az

$$\omega(x) := \int_\xi^x |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény korlátos. Ekkor

$$e^{-F(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty)$$

következtében

$$\lim_{x\to\infty} |\varphi(x)| = 0$$

ahonnan

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$$

következik.

– az ω függvény nem korlátos. Ekkor $\omega' \geq 0$ következtében ω monoton növekedő és így $\lim_{+\infty} \omega = +\infty$ Alkalmazható tehát a Bernoulli-l'Hospital-szabály:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} |\varphi(x)| &= \lim_{x\to+\infty} e^{-F(x)} \cdot \left\{|\xi| + \int_\xi^x |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s\right\} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|\xi| + \int_\xi^x |g(s)|e^{F(s)}\,\mathrm{d}s}{e^{F(x)}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|g(x)|e^{F(x)}}{f(x)e^{F(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|g(x)|}{f(x)} = 0,
\end{aligned}$$

hiszen

$$g(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to +\infty) \qquad \text{és} \qquad f(x) \geq c > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez ismét azt jeloenti, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0. \quad \blacksquare$$

5.4.8. feladat. Lássuk be, hogy ha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \qquad (x \in (0,1])$$

teljesül, akkor az

$$y' = fy$$

differenciálegyenlet bármely φ megoldására fennáll a

$$\varphi(x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$

határérték-reláció!

Útm. Világos, hogy ha

$$F(x) := \int_1^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in (0,1]),$$

akkor az egyenlet minden megoldása

$$\varphi(x) := ce^{F(x)}$$

alakó, ahol $c \in \mathbb{R}$. Így

$$F(x) = -\int_x^1 f(s)\,\mathrm{d}s \leq -\int_x^1 \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\left[\ln(s)\right]_x^1 = \ln(x) \qquad (x \in (0,1])$$

következtében

$$F(x) \longrightarrow -\infty \quad (x \to 0), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0. \quad \blacksquare$$

5.5. Bernoulli-féle differenciálegyenletek

5.5.1. feladat. Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$a, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}) : \qquad a \cdot b \neq 0$$

függvények, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ valós számok esetén keressük meg az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^{\alpha}$$

Bernoulli-féle differenciálegyenlet pozitív értékkészletű megoldásait!

Útm. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén a

$$\varphi : J \to (0, +\infty)$$

függvény megoldása a fenti egyenletnek, és vezessük be a

$$\psi := \varphi^{1-\alpha}$$

jelölést. Ekkor a J intervallumon differenciálható, pozitív értékkészletű függvények halmazát kölcsönösen egyértelmű módon képeztük le önmagára, továbbá

$$\begin{aligned}\psi' &= (1-\alpha)\varphi^{-\alpha}\cdot\varphi' = (1-\alpha)\varphi^{-\alpha}\cdot[a\cdot\varphi + b\cdot\varphi^{\alpha}] = (1-\alpha)a\varphi^{1-\alpha} + (1-\alpha)b = \\ &= (1-\alpha)a\psi + (1-\alpha)b.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\psi : J \to (0,+\infty)$ függvény a

$$z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása. ■

A Bernoulli-féle differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladattal kapcsolatban igaz tehát a

5.5.1. tétel. Ha $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum, $a, b \in \mathfrak{C}(I,\mathbb{R})$: $a\cdot b \neq 0$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, továbbá $J \subset I$, $\tau \in J$ és $\xi \in (0,+\infty)$, akkor valamely

$$\varphi : J \to (0,+\infty)$$

függvény pontosan akkor lesz az

$$y' = a\cdot y + b\cdot y^{\alpha}, \qquad y(\tau) = \xi \tag{5.5.1}$$

kezdetiérték-feladat megoldása, ha a

$$\psi := \varphi^{1-\alpha}$$

függvény megoldása a

$$z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b, \qquad z(\tau) = \xi^{1-\alpha} \tag{5.5.2}$$

kezdetiérték-feladatnak.

5.5.0. megjegyzés.

1. Mivel a lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható, ezért $\xi > 0$ esetén az (5.5.1) kezdetiérték-feladatnak is pontosan egy megoldása van.
2. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\alpha \in \mathbb{Z}$, akkor $\xi < 0$ esetén az (5.5.1) kezdetiérték-feladat újabb megoldását kapjuk.

5.5.2. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) = y(x) + y^2(x)e^{-x}$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 1$;
2. $y'(x) + y(x) = xy^3(x)$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 1$;
3. $2x^3y'(x) = y(x)(y^2(x) + 3x^2)$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$;
4. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x(y(x))^3$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$;
5. $y'(x) = 4y(x) - x(y(x))^2$ $(x \in D_y)$, $y(0) = 2$;
6. $y'(x) + \frac{y(x)}{1+x} + (1+x)y^4(x) = 0$, $y(0) = -1$.

Útm.

1. Az
$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := 1, \qquad b(x) := e^{-x} \qquad (x \in I),$$
ill. az $\alpha := 2$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-1}$. Ekkor ψ a
$$z'(x) = -z(x) - e^{-x} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = 1$$
lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát
$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1 + \int_0^x \left[-e^{-t}\exp\left(-\int_0^t (-1)\,\mathrm{d}s\right)\right]\,dt\right\}\exp\left(\int_0^x (-1)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= e^{-x}\,(1-x) \quad (x \in J),\end{aligned}$$
ezért
$$\varphi(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad (x \in (-\infty,1)).$$

2. Az egyenletet átrendezve, az
$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := -1, \qquad b(x) := x \qquad (x \in I),$$
ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a
$$z'(x) = 2z(x) - 2x \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = 1$$
lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát
$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left\{1 + \int_0^x \left[(-2t)\exp\left(-\int_0^t 2\,ds\right)\right]\,\mathrm{d}t\right\}\exp\left(\int_0^x 2\,dt\right) = \\ &= e^{2x}\left[1 + \int_0^x t\left(-2te^{-2t}\right)\right] = \\ &= e^{2x}\left[1 + xe^{-2x} + \left[\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^x\right] = \frac{e^{2x}}{2} + x + \frac{1}{2} \quad (x \in J),\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{e^{2x} + 2x + 1}} \qquad (x \in J).$$

3. Az egyenletet átrendezve, az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := \frac{3}{2x}, \qquad b(x) := \frac{1}{2x^3} \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -\frac{3}{x}z(x) - \frac{1}{x^3} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(1) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left\{1 + \int_1^x \left[\left(-\frac{1}{t^3}\right\} \exp\left(-\int_1^t -\frac{3}{s}\,\mathrm{d}s\right)\right] \mathrm{d}t\right\} \exp\left(\int_1^x -\frac{3}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{1}{x^3}\left[1 + \int_1^x (-1)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{2-x}{x^3} \quad (x \in J), \end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}} \qquad (x \in (0{,}2)).$$

4. Az egyenletet átrendezve, az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := \frac{1}{x}, \qquad b(x) := x \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -\frac{2}{x}z(x) - 2x \quad (x \in J \subset I), \qquad z(1) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left\{1 + \int_1^x \left[(-2t) \exp\left(-\int_1^t -\frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)\right] \mathrm{d}t\right\} \exp\left(\int_1^x -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{1}{x^2}\left[1 - 2\int_1^x t^3\,\mathrm{d}t\right] = \frac{3-x^4}{2x^2} \quad (x \in J), \end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{3-x^4}} \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt[4]{3}\right)\right).$$

5. Az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := 4, \qquad b(x) := -x \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 2$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat globális megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-1}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -4z(x) + x \quad (x \in J \subset I), \qquad z(0) = \frac{1}{2}$$

lineáris kezdetiérték-feladat teljes megoldása. Így tehát

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \left\{\frac{1}{2}+\int_0^x \left[t\exp\left(-\int_0^t(-4)\,ds\right)\right]\,\mathrm{d}t\right\}\exp\left(\int_0^x(-4)\,dt\right)= \\
&= e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\int_0^x te^{4t}\,dt\right]=e^{-4x}\left[1+\int_0^x t\left(-2te^{-2t}\right)\right]= \\
&= e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\frac{xe^{4x}}{4}-\int_0^x\frac{e^{4t}}{4}\,dt\right]=e^{-4x}\left[\frac{1}{2}+\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{e^{4x}-1}{16}\right]= \\
&= \frac{9e^{-4x}+4x-1}{16}\qquad (x\in J),
\end{aligned}
$$

ezért

$$\varphi(x)=\frac{16}{9e^{-4x}+4x-1}\qquad (x\in J).$$

6. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I:=(-1,+\infty)\,,\qquad a(x):=-\frac{1}{1+x},\qquad b(x):=1+x\qquad (x\in I),$$

ill. az $\alpha := 4$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat globális megoldása, és legyen $\psi:=\varphi^{-3}$. Ekkor ψ a

$$z'(x)=\frac{3z(x)}{1+x}+3(1+x)\quad (x\in J\subset I),\qquad z(0)=-1$$

lineáris kezdetiérték-feladat teljes megoldása. Így tehát

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \left\{-1+\int_0^x 3(1+s)\exp\left(-\int_0^s\frac{3}{1+u}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_0^x\frac{3}{1+s}\,\mathrm{d}s\right)= \\
&= \left\{-1+\int_0^x\frac{3(1+s)}{(1+s)^3}\,\mathrm{d}s\right\}(1+x)^3=\left\{-1+\left[\frac{-3}{1+s}\right]_0^x\right\}(1+x)^3= \\
&= \left\{-1+3-\frac{3}{1+x}\right\}(1+x)^3=2(1+x)^3-3(1+x)^2= \\
&= (1+x)^2(2x-1)\quad (x\in J),
\end{aligned}
$$

ezért

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(2x-1)}}\qquad (x\in J).\quad\blacksquare$$

5.5.1. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket, ill. kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} + y^2(x) = 0$ $(x \in D_y)$;
2. $y'(x) - y(x) = \dfrac{x}{y(x)}$ $(x \in D_y)$;
3. $xy'(x) + y(x) = \dfrac{\ln(x)}{y^3(x)}$ $(x \in D_y)$;
4. $y'(x) - x^3(y(x))^3 = xy(x)$ $(x \in D_y)$;
5. $y' = -y + \dfrac{1}{y}$ $(x \in D_y)$;
6. $x^2y'(x) + 2xy(x) + y^3(x) = 0$ $(x \in D_y)$, $y(1) = 1$.

Útm.

5.5.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\tau \in I$, $a, b \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$: $a \cdot b \neq 0$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$, továbbá

$$F(x) := \int_\tau^x (\alpha - 1)a(t)\,\mathrm{d}t, \quad u(x) := e^{-F(x)} \int_\tau^x (1-\alpha)e^{F(t)}b(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in I),$$

ill.

$$u(x) > 0 \qquad (x \in I),$$

akkor a

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := [u(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

függvény megoldása az

$$y' = a \cdot y + b \cdot y^\alpha$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletnek!

Útm.

5.6. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

5.6.1. definíció. Adott $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $A : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvények esetén az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

inhomogén elsőrendű differenciálegyenletrendszer megoldáshalmazának nevezzük az

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} := \left\{\varphi \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \varphi' = A\varphi + \mathbf{b}\right\}$$

függvényhalmazt. Ha az egyenlet homogén: $\mathbf{b} \equiv 0$, akkor

$$\mathcal{M}_0 := \left\{\varphi \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \varphi' = A\varphi\right\}.$$

5.6.0. megjegyzés.

1. Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor

$$(\varphi - \psi)' = A\varphi + \mathbf{b} - (A\psi + \mathbf{b}) = A(\varphi - \psi),$$

   azaz $\varphi - \psi \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$.

2. Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor $\varphi = \psi + \underbrace{(\varphi - \psi)}_{\in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}}$.

5.6.1. tétel. Bármely $\psi \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$ (azaz bármely **partikuláris** megoldás) esetén

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \psi + \mathcal{M}_{\mathbf{0}} := \left\{\psi + \chi \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \chi \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}\right\}.$$

Biz.

1. lépés.. A fentiek következtében, ha $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, akkor

$$\varphi - \psi \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi = \psi + \underbrace{(\varphi - \psi)}_{\in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}}.$$

2. lépés.. Ha $\chi \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$, akkor $\psi + \chi \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$, hiszen

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A\psi + \mathbf{b} + A\chi + \mathbf{b} = A(\psi + \chi) + \mathbf{b}. \qquad \blacksquare$$

Az $\mathcal{M}_{\mathbf{b}}$ megoldáshalmaz meghatározása tehát egyenértékű egyetlen elemének (a szóbanforgó lineáris differenciálegyenlet valamely ún. **partikuláris megoldás**ának) és $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$-nak meghatározásával. Az $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$ megoldáshalmaz szerkezetének tanulmányozásához néhány fogalomra van szükségünk.

5.6.2. definíció. Adott $k \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, ill.

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k : I \to \mathbb{R}^m$$

függvények esetén a

1. $\{\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k\}$ rendszert **lineárisan független**nek nevezzük, ha

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \boldsymbol{\mu}_l(x) = 0 \quad (x \in I) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

2. $\{\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k\}$ rendszert **lineárisan összefüggő**nek nevezzük, ha nem független:

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 > 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \boldsymbol{\mu}_l(x) = 0 \quad (x \in I).$$

5.6.2. tétel. A

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$$

függvények pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det\left[\boldsymbol{\mu}_1(\tau), \ldots, \boldsymbol{\mu}_m(\tau)\right] \neq 0.$$

Biz.

5.6.3. definíció. Azt mondjuk, hogy a

$$\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m \in \mathcal{M}_{\mathbf{0}}$$

megoldások **alaprendszert** alkotnak, ha lineárisan függetlenek. Ebben az esetben a

$$\Phi := [\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m] : I \to \mathbb{R}^{m \times m}$$

függvényt az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

homogén rendszer egy **alapmátrix**ának nevezzük.

Mivel

$$\Phi' := [\boldsymbol{\mu}_1', \ldots, \boldsymbol{\mu}_m'],$$

ezért

$$\boldsymbol{\mu}_k' = A\boldsymbol{\mu}_k \qquad (k \in \{1, \ldots, m\}),$$

azaz Φ olyan függvény, amelyre

$$\det(\Phi(x)) \neq 0 \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \Phi' = A\Phi$$

teljesül.

5.6.1. példa. Az

$$y_1' = -y_2 + \sin, \qquad y_2' = y_1 + \cos$$

(inhomogén) egyenlet esetében a

$$\boldsymbol{\mu}_1 := \begin{bmatrix} \sin \\ -\cos \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}_2 := \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix}$$

függvények a homogén egyenlet egy alaprendszerét alkotják, ui.

– mindketten megoldásai a homogén egyenletnek:

$$\boldsymbol{\mu}_1' = \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1, \qquad \boldsymbol{\mu}_2' = \begin{bmatrix} -\sin \\ \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_2.$$

– lineárisan függetlenek:

$$\det \begin{bmatrix} \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ -\cos(\pi) & \sin(\pi) \end{bmatrix} = \cos^2(\pi) = 1 \neq 0.$$

5.6.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az

$$y_1'(x) = \frac{y_1(x)}{x} + 2xy_2(x), \qquad y_2'(x) = \frac{y_2(x)}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

egyenlet esetében a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x) := \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}_2 := \begin{bmatrix} x^3 \\ x \end{bmatrix} \qquad (x > 0)$$

függvények alaprendszert alkotnak!

Útm.

5.6.2. példa. Ha $I = \mathbb{R}$ és alkalmas $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mátrixszal

$$A(x) = M \qquad (x \in I),$$

és az M mátrix $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sajátértékei mind különbözőek:

$$\lambda_k \neq \lambda_l \qquad (k, l \in \{1, \ldots, m\} : \ k \neq l),$$

akkor a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda_1 x}\mathbf{s}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\mu}_m(x) := e^{\lambda_m x}\mathbf{s}_m \qquad (x \in I)$$

függvények alaprendszert alkotnak, azaz az

$$\left[e^{\lambda_1 x}\mathbf{s}_1, \ldots, e^{\lambda_m x}\mathbf{s}_m\right] \qquad (x \in I)$$

mátrix az

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y}$$

homogén rendszer egy alapmátrixa, ui.

– mindannyian megoldásai a homogén rendszernek:

$$\boldsymbol{\mu}_k'(x) \equiv e^{\lambda_k x}\lambda_k \mathbf{s}_k \equiv e^{\lambda_k x}M\mathbf{s}_k \equiv M\left(e^{\lambda_k x}\mathbf{s}_k\right) \equiv M\boldsymbol{\mu}_k(x) \qquad (k \in \{1, \ldots, m\}),$$

– lineárisan függetlenek, hiszen (vö. Mat. A2) a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, így

$$\det\left[e^{\lambda_1 0}\mathbf{s}_1, \ldots, e^{\lambda_m 0}\mathbf{s}_m\right] = \det\left[\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m\right] \neq 0.$$

Előfordulhat, hogy az M mátrix sajátértékei nem mind különbözőek (többszörös sajátértékek lépnek fel), ill. hogy a sajátértékek között vannak komplex konjugált párok. Ekkor is vannak módszerek az alaprendszer előállítására, amit most csak $m = 2$ esetén tárgyalunk. Ebben az esetben (vö. 1.2.2. tétel) M karakterisztikus polinomja:

$$p_M(z) = z^2 - \mathrm{Sp}\,(M)z + \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Tehát, ha az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak

1. két különböző valós sajátértéke van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 > 4\det(M)$): λ, μ és a hozzájuk tartozó sajátvektor: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, azaz

$$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad M\mathbf{v} = \mu\mathbf{v},$$

akkor a fentiek miatt a

$$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\mu x}\mathbf{v} \qquad (x \in I)$$

függvények alaprendszert alkotnak.

2. egyetlen sajátértéke van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 = 4\det(M)$): λ, és

   a) $\mathrm{rang}\,(M - \lambda E_2) = 0$, azaz λ-hoz $2 - 0 = 2$ független sajátvektor tartozik: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, azaz
   $$M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \text{ill.} \qquad M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$
   akkor a fentiekhez hasonlóan látható, hogy a
   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\lambda x}\mathbf{v} \qquad (x \in I)$$
   függvények alaprendszert alkotnak.

   b) $\mathrm{rang}\,(M - \lambda E_2) = 1$, azaz λ-hoz $2 - 1 = 1$ sajátvektor tartozik: $\mathbf{u}$, akkor van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (ún. **fővektor**), hogy $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ függetlenek (vö. Mat. A2),
   $$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u},$$
   és a
   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\lambda x}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\lambda x}(\mathbf{v} + x\mathbf{u}) \qquad (x \in I)$$
   függvények alaprendszert alkotnak, hiszen

   – mindketten megoldásai a homogén egyenletnek:
   $$\boldsymbol{\mu}_1'(x) = e^{\lambda x}\lambda\mathbf{u} = e^{\lambda x}M\mathbf{u} = M(e^{\lambda x}\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu}_1(x) \qquad (x \in I),$$
   $$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_2'(x) &= e^{\lambda x}\lambda(\mathbf{v} + x\mathbf{u}) + e^{\lambda x}\mathbf{u} = e^{\lambda x}\{\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \lambda x\mathbf{u}\} = \\ &= e^{\lambda x}\{M\mathbf{v} + xM\mathbf{u}\} = M\left\{e^{\lambda x}(\mathbf{v} + x\mathbf{u})\right\} = M\boldsymbol{\mu}_2(x) \qquad (x \in I),\end{aligned}$$

   – lineárisan függetlenek:
   $$\det\left[e^{\lambda 0}\mathbf{u}, e^{\lambda 0}(\mathbf{v} + 0\mathbf{u})\right] = \det[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \neq 0.$$

3. nincsen valós sajátértéke, pontosabban egy konjugált komplex sajátértékpárja van ($\mathrm{Sp}\,(M)^2 < 4\det(M)$): $\lambda = \alpha \pm \beta\imath$ ($\beta \neq 0$), és a hozzájuk tartozó (konjugált komplex) sajátvektorok $\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\imath$, akkor megmutatható, hogy a
   $$\boldsymbol{\mu}_1(x) := e^{\alpha x}\{\cos(\beta x)\mathbf{u} + \sin(\beta x)\mathbf{v}\}, \ \boldsymbol{\mu}_2(x) := e^{\alpha x}\{\sin(\beta x)\mathbf{u} - \cos(\beta x)\mathbf{v}\} \quad (x \in I)$$
   függvények alaprendszert alkotnak.

Miért jó, ha ismerünk egy alaprendszert, ill. alapmátrixot?

5.6.3. tétel. Ha Φ a homogén rendszer egy alapmátrixa, akkor

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \left\{\Phi\mathbf{c} \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\right\} = \left\{c_1\boldsymbol{\mu}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{\mu}_m \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m) : \ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Biz. ■

Valamely alapmátrix ismeretében nem nehéz előállítani egy partikuláris megoldást. Legyen ui.

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) : I \to \mathbb{R}^m$$

folytonosan differenciálható függvény, ekkor

$$(\Phi\mathbf{g})' = \Phi'\mathbf{g} + \Phi\mathbf{g}' = A\Phi\mathbf{g} + \Phi\mathbf{g}'.$$

Ha tehát $\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}$, akkor

$$(\Phi\mathbf{g})' = A(\Phi\mathbf{g}) + \mathbf{b},$$

azaz $\Phi\mathbf{g} \in \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$. Mivel bármely $x \in I$ esetén a $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mátrixnak van inverze, ezért

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{g}' = \Phi^{-1}\mathbf{b},$$

(ahol a Φ^{-1} leképezés

$$\Phi^{-1}(x) \qquad (x \in I)$$

helyettesítési értéke a $\Phi(x)$ mátrix inverze). Mivel $\Phi^{-1}\mathbf{b}$ folytonos függvény, ezért van olyan függvény, amelynek deriváltfüggvénye. Tehát az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának felírása az alábbi módon történik:

1. lépés.. meghatározunk egy Φ alapmátrixot,

2. lépés.. olyan differenciálható $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^m$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{g}' = \Phi^{-1}\mathbf{b},$$

3. lépés.. integrálás után az inhomogén egyenlet megoldáshalmazának egy eleme (az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása): $\Phi\mathbf{g}$,

4. lépés.. felírjuk az inhomogén egyenlet megoldáshalmazát:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{b}} = \{\Phi\mathbf{c} + \Phi\mathbf{g} : \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\} = \{\Phi(\mathbf{c} + \mathbf{g}) : \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m\}.$$

5.6.1. feladat. Írjuk fel az $\mathbf{y}' = M\mathbf{y}$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldáshalmazát!

1. $M := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$;
2. $M := \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$;
3. $M := \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$;
4. $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Útm.

1. A
$$p_M(z) := z^2 - 9z + 14 \qquad (z \in \mathbb{C})$$
karakterisztikus polinom gyökei:
$$\lambda = 2, \qquad \mu = 7.$$
A hozzájuk tartozó sajátvektorok:
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Így a megoldáshalmaz:
$$\mathcal{M}_\mathbf{0} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta e^{7x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. A
$$p_M(z) := z^2 + 8z + 16 = (z+4)^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$
karakterisztikus polinom gyöke:
$$\lambda = -4.$$
Mivel
$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} -5+4 & -1 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} = 1,$$
ezért az egyetlen sajátvektor:
$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$
ill. az
$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}$$

egyenletből a fővektor:

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_\mathbf{0} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-4x} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x \\ -1-x \end{bmatrix} \right\} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. A

$$p_M(z) := z^2 - 12z + 37 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda = -6 + \imath, \qquad \mu = -6 - \imath.$$

A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\imath$, ahol

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_\mathbf{0} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-6x} \left\{ \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \cos(x) + \left\{ \alpha \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \sin(x) \right\} \right\} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Egyetlen sajátérték van (a főátlóbeli $\lambda = 1$). Mivel

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = 0,$$

ezért két független sajátvektorunk van:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_\mathbf{0} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{x} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad \blacksquare$$

5.6.2. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{array}{rcll} y_1' & = & y_1 + 2y_2 + \exp^2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' & = & 2y_1 + y_2 + 1, & y_2(0) = 1 \end{array}\right\}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Látható, hogy a kezdetiérték-feladat

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

alakú, ahol

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^2 - 2z - 3 = (z+1)(z-3) \qquad (x \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := -1, \qquad \mu := 3.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x) := \left[e^{\lambda x}\mathbf{u}, e^{\mu x}\mathbf{v}\right] = \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} e^{x} & -e^{x} \\ e^{-3x} & e^{-3x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Az állandók variálásaként olyan differenciálható $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}.$$

Innen

$$\mathbf{g}'(x) = \Phi(x)^{-1} \cdot \mathbf{b}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} e^{3x} - e^{x} \\ e^{-x} + e^{-3x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz (pl.)

$$\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \begin{bmatrix} -e^{3x} + 3e^{x} \\ 3e^{-x} + e^{-3x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Egy $\Phi\mathbf{g}$ partikuláris megoldás tehát a következő:

$$\Phi(x)\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} e^{2x} + 2 \\ 2e^{2x} - 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \to \Phi(x) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \Phi(x)\mathbf{g}(x) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3\alpha e^{-x} + 3\beta e^{3x} - e^{2x} - 2 \\ -3\alpha e^{-x} + 3\beta e^{3x} - 2e^{2x} + 1 \end{bmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Az

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\alpha + \beta - 1 = 1, \qquad -\alpha + \beta - \frac{1}{3} = 1$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{5}{3}.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{-x} + 5e^{3x} - e^{2x} - 2 \\ -e^{-x} + 5e^{3x} - 2e^{2x} + 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

függvény. ■

5.6.0. megjegyzés. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, továbbá $A : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$ és $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor – hasonlóan a (5.4.4) formulához – az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \Phi(x)\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x \Phi(x)\Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I) \tag{5.6.1}$$

függvény, ahol a

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$$

függvény alapmátrixa az

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

homogén rendszernek.

Az 5.6.2. feladat esetében

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{s} & -e^{s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \qquad (s, x \in \mathbb{R}),$$

így a

$$\Lambda(x,s) := \Phi(x)\cdot\Phi(s)^{-1} \qquad (x, s \in \mathbb{R})$$

ún. **Cauchy-mátrix**ra

$$\begin{aligned} \Lambda(x,s) &= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{s} & -e^{s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{s-x} + e^{3x-3s} & -e^{s-x} + e^{3x-3s} \\ -e^{s-x} + e^{3x-3s} & e^{s-x} + e^{3x-3s} \end{bmatrix} \qquad (x, s \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahonnan a teljes megoldás

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(x) &= \Lambda(x,0)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Lambda(x,s)\cdot \mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{bmatrix} e^{-x}+e^{3x} & -e^{-x}+e^{3x} \\ -e^{-x}+e^{3x} & e^{-x}+e^{3x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{s-x}+e^{3x-3s} & -e^{s-x}+e^{3x-3s} \\ -e^{s-x}+e^{3x-3s} & e^{s-x}+e^{3x-3s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2s}\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}s\right\} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3x} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^x \begin{bmatrix} e^{3s-x}+e^{3x-s}-e^{s-x}+e^{3x-3s} \\ -e^{3s-x}+e^{3x-s}+e^{s-x}+e^{3x-3s}\end{bmatrix}\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{-x}+5e^{3x}-e^{2x}-2 \\ -e^{-x}+5e^{3x}-2e^{2x}+1\end{bmatrix} \qquad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

5.6.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(1)
$$
\left.\begin{aligned}
y_1'(x) &= 3y_1(x)+2y_2(x)+3e^{-x} \quad (x\in\mathbb{R}), & y_1(0)&=4, \\
y_2'(x) &= 4y_1(x)+y_2(x) \quad (x\in\mathbb{R}), & y_2(0)&=-2,
\end{aligned}\right\}
$$

(2)
$$
\left.\begin{aligned}
y_1'(x) &= 3y_1(x)-3y_2(x)+e^{x} \quad (x\in\mathbb{R}), & y_1(0)&=0, \\
y_2'(x) &= y_1(x)-y_2(x)+2e^{x} \quad (x\in\mathbb{R}), & y_2(0)&=1.
\end{aligned}\right\}
$$

Útm.

5.6.4. tétel. Ha $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^m$, $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $\omega\in\mathbb{R}\backslash\sigma(M)$, akkor a

$$\boldsymbol{\chi}(x) := -(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\mathbf{y}'(x) = M\mathbf{y}(x) + e^{\omega x}\mathbf{k} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek.

Biz. Világos, hogy bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}'(x) &= -\omega(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= (M-M-\omega E_m)(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= -M(M-\omega E_m)^{-1}e^{\omega x}\mathbf{k} + e^{\omega x}\mathbf{k} = \\
&= M\boldsymbol{\chi}(x) + e^{\omega x}\mathbf{k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.6.3. feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + 3y_3 + \exp^2, & y_1(0) = 1,\\ y_2' &= y_1 + 5y_2 + y_3 + \exp^2, & y_2(0) = 0,\\ y_3' &= 3y_1 + y_2 + y_3 + \exp^2, & y_3(0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm. Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3 - 7z^2 - 36 \qquad (x \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom (vö. 1.2.2. tétel) gyökei. Mivel egész együtthatós normált polinomról van szó, p_M egész gyökei (ha vannak egyáltalán ilyenek) osztói a konstans tagnak, esetünkben -36-nak. Ezért érdemes legalább a ±1, ±2, ±3, ill. a ±6 számokkal próbálkozni:

	1	-7	0	-36
-1	1	-8	8	$-42 = p_M(-1) \neq 0,$
1	1	-6	-6	$-42 = p_M(-1) \neq 0,$
-2	$\boxed{1}$	$\boxed{-9}$	$\boxed{18}$	$0 = p_M(3).$

Tehát a -2 gyöke p_M-nek, továbbá

$$p_M(z) = (z+2)(z^2 - 9z + 18) = (z+2)(z-3)(z-6) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A

$$\lambda := -2, \qquad \mu := 3, \qquad \nu := 6$$

sajátértékeknek megfelelő sajátvektorok az

$$(M - \lambda E_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(M - \mu E_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz a} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ill. az

$$(M-\nu E_3)\mathbf{w}=\mathbf{0},\qquad \text{azaz a}\qquad \begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

egyenletrendszerek nemtriviális megoldásai:

$$\mathbf{u}:=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}:=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{w}:=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Így a

$$\Phi(x):=\left[e^{\lambda x}\mathbf{u},e^{\mu x}\mathbf{v},e^{\nu x}\mathbf{w}\right]=\begin{bmatrix}e^{-2x} & e^{6x} & e^{3x}\\ 0 & 2e^{6x} & -e^{3x}\\ -e^{-2x} & e^{6x} & e^{3x}\end{bmatrix}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény alapmátrix. Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}=\left\{\mathbb{R}\ni x\mapsto\Phi(x)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}+\boldsymbol{\chi}(x):\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\},$$

ahol (vö. 5.6.4. tétel)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}(x) &= -(M-2E_3)^{-1}e^{2x}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\\ &= -e^{2x}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\ldots=\\ &= e^{-2x}\begin{bmatrix}-1/2\\ 0\\ -1/2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Az

$$\mathbf{y}(0)=\boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α,β együtthatókat az

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma-\frac{1}{2} &= 1,\\ 2\beta-\gamma &= 0,\\ -\alpha+\beta+\gamma-\frac{1}{2} &= 0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{3}, \qquad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3e^{2x} + 4e^{3x} + 2e^{6x} + 3e^{-2x} \\ -4e^{3x} + 4e^{6x} \\ -3e^{2x} + 4e^{3x} + 2e^{6x} - 3e^{-2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

5.6.4. feladat. Adjuk meg egy partikuláris megoldását az

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' &=& 2y_1 + y_2 + 6y_3 + \exp^2, \\ y_2' &=& 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 + \exp^2, \\ y_3' &=& 6y_1 + y_2 + 2y_3 + \exp^2 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszernek!

Útm. Látható, hogy a fenti egyenlet-rendszer a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^3 - 9z^2 - 16z + 144 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := -4, \qquad \mu := 4, \qquad \nu := 9.$$

Mivel a 2 nem sajátértéke az M mátrixnak, ezért egy partikuláris megoldás

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(x) &= -(M - 2E_3)^{-1}e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= -e^{2x} \cdot \frac{1}{-84} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 12 & -16 \\ 6 & -36 & 6 \\ -16 & 12 & -2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{e^{2x}}{42} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 6 & -18 & 6 \\ -8 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{e^{2x}}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad ■ \end{aligned}$$

5.6.5. feladat. Modellezzük Rómeó és Júlia szerelmének változását az idő függvényében, feltételezve persze, hogy – Shakespeare drámájával ellentétben – tragikus haláluk nem következik be!

Útm. Jelölje $R(t)$ Rómeó Júlia iránti érzelmeit a t időpontban, illetve $J(t)$ Júlia érzelmeit Rómeó iránt ($t \in [0, +\infty)$). Természetesen ezek pozitív értéke szerelmet, zérus értéke semlegességet, negatív értéke „nem szeretést” jelent. Az alábbi három esetben arra keressük a választ, hogy miként lehet leírni Rómeó és Júlia kapcsolatának változását.

Elsőként tekintsük a következő (nem túl ideális) esetet. Rómeó nehéz természetű: amikor Júlia szereti őt, akkor Rómeó kezdi kevésbé szeretni Júliát, ha viszont Júlia kevésbé érdeklődik iránta, akkor Rómeó egyre jobban kezdi szeretni Júliát. Júlia viselkedése ennél érthetőbb: ha Rómeó szereti Júliát, akkor Júlia egyre szerelmesebb lesz Rómeóba, de kezd barátságtalanabb lenni, ha Rómeó nem szereti őt. A szituációt leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\dot{R} = -aJ, \qquad \dot{J} = bR, \tag{5.6.2}$$

ahol $a, b > 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméterek.

Az előző esetből tanulva, Júlia változtat a hozzáállásán, és csökkenti az érzelmi reakcióit. A modellben ez azt jelenti, hogy a második egyenlet jobb oldala még egy cJ-s taggal is kibővül, ahol $c < 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméter. Például

$$\dot{R} = -0.2J, \qquad \dot{J} = 0.8R - 0.1J. \tag{5.6.3}$$

A harmadik esetben Rómeó jobban el tudja fogadni Júlia szerelmét, azaz csak akkor csökken Júlia iránti szerelme, ha Júliáé nagyon erős (például $J > 2$), Júlia pedig kontrollálja érzelmeit úgy, hogy csak akkor nőjön a Rómeó iránti szerelme, ha Rómeóé nagyon erős (például $R > 2$). Ekkor a következő rendszert kapjuk:

$$\dot{R} = -0.2(J - 2), \qquad \dot{J} = 0.8(R - 2). \tag{5.6.4}$$

Az első esetben az

$$(R, J) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$$

függvény az

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5.6.5}$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása (vö. (5.6.2)). Ekkor

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{ab}t) & \dfrac{-a\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} \\ \dfrac{b\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} & \cos(\sqrt{ab}t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Az

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0$$

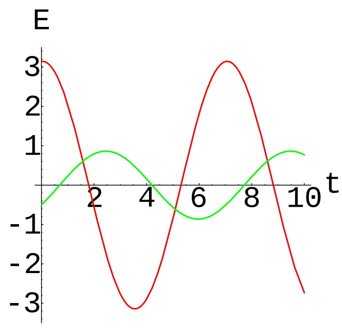
kezdeti feltételek teljesülése esetén

$$R(t) = J(t) = 0 \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

azaz Rómeó és Júlia végig közömbösek egymás iránt. Ha viszont

$$a := 0.2, \quad b := 0.4, \qquad x(0) := 3.14, \quad y(0) := -0.5,$$

akkor Rómeó és Júlia érzelmeinek alakulása a 5.6.1. ábrán látható ($E \in \{R, J\}$).

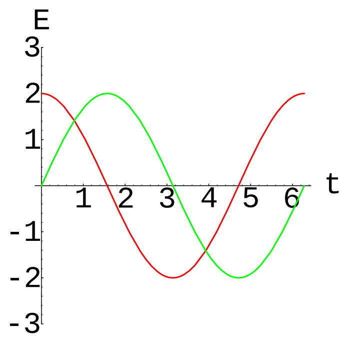


5.6.1. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei a $b := 2a := 0.4$, $x(0) := 3.14$, $y(0) := -0.5$ esetben.

Az $a = b = 1$ esetben, ill. az $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételek (Rómeó első látásra vonzódott Júliához, Júlia pedig semleges volt) teljesülése esetén pedig

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

(vö. 5.6.2. ábra). Ha pedig kezdetben mindkettőjük egyformán szimpatikus volt egymásnak,



5.6.2. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ esetben.

azaz pl.

$$x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = y(0),$$

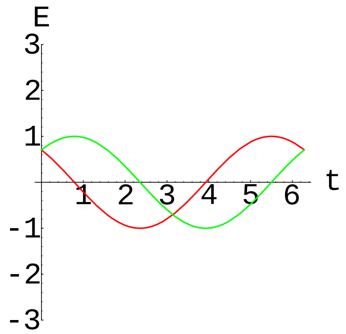
akkor ($a =: b := 1$ esetén)

$$R(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t) - \sin(t)) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

ill.

$$J(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(t) + \cos(t)) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

A 5.6.3. ábrán az ismerettségüket a $[0{,}2\pi]$ intervallumra korlátoztuk. Jól látszik, hogy a $[0, \pi/4)$ és a $(7\pi/4{,}2\pi]$ intervallumon Rómeó és Júlia szereti egymást, egyébként pedig valamelyikük nem szereti a másikat.



5.6.3. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 1 = y(0)$ esetben.

A második esetben a (5.6.3) rendszer

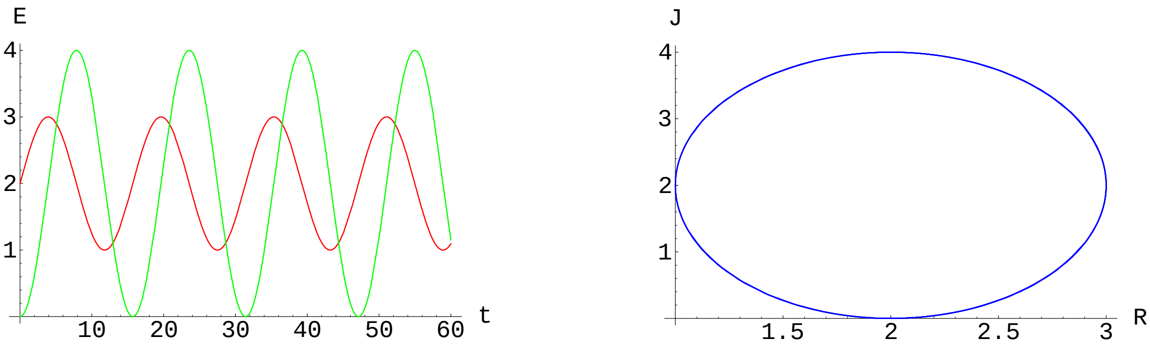
$$x(0) = 2, \qquad y(0) = 0$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását az 5.6.4. ábrán szemléltetjük. Látható, hogy ez az egész

5.6.4. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ esetben.

szerelmi életükre negatív hatással lesz.

A harmadik esetben (5.6.4) ideális állapotot kaptunk, mint ahogy azt a 5.6.5. ábra is mutatja. ■



5.6.5. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az ideális esetben.

5.7. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények esetén tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi'' + p\varphi' + q\varphi = f$$

teljesül!

5.7.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **másodrendű lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük, és az

$$y'' + py' + qy = f \tag{5.7.1}$$

szimbólummal jelöljük.

Ha

$$f(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

akkor **homogén egyenlet**ről beszélünk:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{5.7.2}$$

Mivel az (5.7.1) differenciálegyenlettel egyenértékű elsőrendű rendszer

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \tag{5.7.3}$$

alakú, ahol

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

ezért az (5.7.1) egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható. A fenti átírás úgy történik, hogy

$$z_1 := y, \qquad \text{ill.} \qquad z_2 := y',$$

ezért az (5.7.1)-re vonatkozó kezdeti feltétel alkalmas $\tau \in I$, ill. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(\tau) = \xi_1, \qquad y'(\tau) = \xi_2$$

alakú.

5.7.2. definíció. Azt mondjuk, hogy $\{\mu, \nu\}$ az (5.7.2) homogén egyenlet egy **alaprendszere**, ha

$$W := \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix} : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(**Wronszki-mátrix**) alapmátrixa (5.7.3) homogén részének.

Ez azt jelenti, hogy μ, ill. ν megoldása (5.7.2)-nek és alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det W(\tau) = \mu(\tau)\nu'(\tau) - \nu(\tau)\mu'(\tau) \neq 0 \tag{5.7.4}$$

teljesül.

5.7.1. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mu(x) := \sqrt{x}, \qquad \nu(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvények az

$$y''(x) + \frac{3}{2x}y'(x) - \frac{1}{2x^2}y(x) = 0 \qquad (x \in (0, +\infty))$$

homogén másodrendű lineáris d.e. alaprendszerét alkotják!

Útm. μ és ν lineárisan független megoldásai a d.e.-nek, hiszen

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{x} & 1/2\sqrt{x} \\ 1/x & -1/x^2 \end{bmatrix}^T = -\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{2x + x}{2x^2\sqrt{t}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}} \neq 0 \qquad (x \in (0, +\infty))$$

és tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}\sqrt{x} = 0,$$

ill.

$$\frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x^3} = 0. \quad \blacksquare$$

5.7.2. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mu(x) := x, \quad \nu(x) := x^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények az

$$y''(x) - \frac{2x}{x^2+1}y'(x) + \frac{2}{x^2+1}y(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

homogén másodrendű lineáris d.e. alaprendszerét alkotják!

Útm. μ és ν lineárisan független megoldásai a d.e.-nek, hiszen

$$\det \begin{bmatrix} x & 1 \\ x^2-1 & 2x \end{bmatrix}^T = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1 \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \cdot x = 0,$$

ill.

$$2 - \frac{2x}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{2}{x^2+1} \cdot (x^2-1) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^2 - 2}{x^2+1} = 0. \quad \blacksquare$$

5.7.1. tétel. Ha μ és ν megoldása az (5.7.2) homogén egyenletnek, továbbá

$$\omega := \det W = \mu\nu' - \nu\mu',$$

akkor

$$\boxed{\omega' + p\omega = 0}\,.$$

Biz.

$$\begin{aligned} \omega' &= (\mu\nu' - \nu\mu')' = \mu'\nu' + \mu\nu'' - \nu'\mu' - \nu\mu'' = \mu\nu'' - \nu\mu'' = \\ &= \mu\left(-p\nu' - q\nu\right) - \nu\left(-p\mu' - q\mu\right) = -p\left(\mu\nu' - \mu'\nu\right) - q\left(\mu\nu - \mu\nu\right) = \\ &= -p\omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A

$$\omega = \mu\nu' - \nu\mu'$$

összefüggésből $\mu \neq 0$ esetén

$$\nu' = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \nu + \frac{\omega}{\mu}$$

következik. Tehát az (5.7.2) homogén lineáris másodrendű egyenlet $\{\mu, \nu\}$ alaprendszerének meghatározása a következő módon történik:

1. lépés.. Valahonnan szert teszünk a μ megoldás ismeretére (sok esetben igen könnyű kitalálni).

2. lépés.. Valamely

$$\tau \in I \subset \mathcal{D}_y : \qquad \mu(\tau) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

esetén kiszámítjuk w-t a

$$\omega' + p\omega = 0, \quad \omega(\tau) = \xi$$

összefüggésből:

$$\omega(x) = \xi \exp\left(\int_\tau^x -p(s)\,ds\right) \qquad (x \in I).$$

3. lépés.. Kiszámítjuk ν-t a

$$\nu'(x) \equiv \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \cdot \nu(x) + \frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$$

összefüggésből.

5.7.3. feladat. Határozzuk meg az

$$(x^2+1)y''(x) - 2y(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenlet egy alaprendszerét!

Útm. Vegyük észre, hogy

$$\mu(x) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldás, és

$$p(x) = 0, \quad q(x) = -\frac{2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{továbbá legyen} \quad \tau := 0, \quad \xi := 1.$$

Ekkor

$$\omega(x) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^x -0\,ds\right) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\nu'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \nu(x) + \frac{1}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha pl. $\nu(0) = 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \left(0 + \int_0^x \frac{1}{s^2+1} \exp\left(-\int_0^s \frac{2u}{u^2+1}\,du\right) ds\right) \exp\left(\int_0^x \frac{2s}{s^2+1}\,ds\right) = \\
&= (x^2+1) \cdot \int_0^x \frac{1}{(s^2+1)^2}\,ds = (x^2+1) \cdot \int_0^x \frac{1+s^2-s^2}{(s^2+1)^2}\,ds = \\
&= (x^2+1) \cdot \int_0^x \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{2} \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) ds = \\
&= (x^2+1) \cdot \left\{\operatorname{arctg}(x) + \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right]_0^x - \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{s^2+1}\,ds\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left(x + (x^2+1) \cdot \operatorname{arctg}(x)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.7.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a 5.7.1. definíció előtti feltételek mellett még $p \in \mathfrak{C}^1$ is teljesül és $\tau \in I$, továbbá valamely

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^2$$

függvény esetén

$$\psi(x) := \varphi(x) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in I)$$

úgy φ pontosan akkor megoldása a (5.7.2) homogén egyenletnek, ha az

$$A := q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

függvénnyel

$$\psi'' + A\psi = 0$$

teljesül!

Útm. Mivel az

$$I \ni x \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható, ezért

$$\psi \in \mathfrak{C}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^2.$$

Ha

$$P(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}\int_\tau^x p(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (x \in I),$$

akkor

$$P'(x) = -\frac{1}{2}p(x)P(x) \qquad (x \in I),$$

így tetszőleges $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= P(x)\psi(x), \\
\varphi'(x) &= P(x)\left\{-\frac{1}{2}p(x)\psi(x) + \psi'(x)\right\}, \\
\varphi''(x) &= P(x)\left\{\psi''(x) - p(x)\psi'(x) + \left(\frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Innen pedig az következik, hogy bármely $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) &= P(x)\left\{\psi''(x) - p(x)\psi'(x) + \left(\frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}p^2(x)\psi(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x)\right\} \\
&= P(x)\left\{\psi''(x) + \left(q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)\psi(x)\right\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ha p, q állandófüggvény, azaz alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \alpha, \quad q(x) = \beta \qquad (x \in I),$$

akkor a korábbiakban (a lineáris differenciálegyenlet-rendszereknél) bemutatott eljárás alapján az (5.7.2) megoldáshalmazának meghatározása a következő módon történik:

1. lépés.. Meghatározzuk (5.7.2) egy alaprendszerét, azaz az (5.7.3)-hoz tartozó homogén rendszer egy alapmátrixát. A

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökeit illetően három eset lehetséges:

1. $\alpha^2 > 4\beta$, azaz két különböző valós gyök van:

$$\lambda_- = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \qquad \lambda_+ = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2},$$

   és

$$\mu(x) := e^{\lambda_- x}, \quad \nu(x) := e^{\lambda_+ x} \qquad (x \in I)$$

   alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (5.8.4).

2. $\alpha^2 = 4\beta$, azaz egyetlen valós gyök van:

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \alpha/2 & 1 \\ -\alpha^2/4 & -\alpha/2 \end{bmatrix} = 1,$$

   így

$$\mu(x) := e^{\lambda x}, \quad \nu(x) := xe^{\lambda x} \qquad (x \in I)$$

   alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (5.8.4).

3. $\alpha^2 < 4\beta$, azaz egy konjugált komplex gyökpár van:

$$\lambda_- = \frac{-\alpha - \sqrt{4\beta - \alpha^2}\imath}{2}, \qquad \lambda_+ = \frac{-\alpha + \sqrt{4\beta - \alpha^2}\imath}{2},$$

   és

$$\mu(x) := e^{-\alpha x/2}\cos\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}x\right), \quad \nu(x) := e^{-\alpha x/2}\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}x\right) \quad (x \in I)$$

   alaprendszer, hiszen mindkettő megoldás, és teljesül rájuk (5.8.4).

2. lépés.. Olyan differenciálható $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix} \mathbf{g}' = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu\nu' - \mu'\nu} \cdot \begin{bmatrix} \nu' & -\nu \\ -\mu' & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu\nu' - \mu'\nu} \cdot \begin{bmatrix} -\nu b \\ \mu b \end{bmatrix}.$$

3. lépés.. Mivel tetszőleges $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$W\mathbf{c} + W\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mu c_1 + \nu c_2 + \mu g_1 + \nu g_2 \\ \ldots \end{bmatrix},$$

ezért az (5.7.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M}_{(5.7.1)} = \{c_1\mu + c_2\nu + \mu g_1 + \nu g_2 : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad \blacksquare$$

5.7.5. feladat. Írjuk fel az

$$y'' + 4y' + 3y = \sin \circ \exp$$

egyenlet megoldáshalmazát!

Útm.

1. lépés.. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 4z + 3 = (z+1)(z+3) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $-1, -3$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x}, \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-3x}\right\}.$$

2. lépés.. Olyan differenciálható

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

függvényt keresünk, amelyre tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{-3e^{-x}e^{-3x} + e^{-x}e^{-3x}} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-3x}\sin(e^x) \\ e^{-x}\sin(e^x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^x \sin(e^x) \\ -e^{3x}\sin(e^x) \end{bmatrix},$$

azaz

$$g_1 \in \int \frac{e^x \sin(e^x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}$$

és

$$\begin{aligned} g_2 \in \int \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\sin(e^x)\right)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int u^2 \sin(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=e^x} = \\ &= -\frac{1}{2}\left\{-u^2\cos(u) + \int 2u\cos(u)\,\mathrm{d}u\right\}_{u=e^x} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{u^2\cos(u) - 2u\sin(u) + \int 2\sin(u)\,\mathrm{d}u\right\}_{u=e^x} = \\ &= \left[\frac{e^{2x}\cos(e^x)}{2} - e^x\sin(e^x) - \cos(e^x)\right]_{x\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

3. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$\chi(x) := -e^{-2x}\sin(e^x) - e^{-3x}\cos(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ill. az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto c_1 e^{-x} + (c_2 - \cos(e^x))e^{-3x} - e^{-2x}\sin(e^x) : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}. \quad \blacksquare$$

5.7.1. gyakorló feladat. Oldjuk meg az

$$y'' + y = \frac{1}{\cos}, \qquad y(0) = 0 = y'(0)$$

kezdetiérték-feladatot!

Útm.

Sok esetben χ alakja megsejthető, ha a b jobb oldal speciális alakú. Erre vonatkozik a

5.7.2. tétel. Ha

1. a jobb oldal
$$f(x) = P(x)e^{\lambda x} \qquad (x \in I)$$
alakú, ahol P polinom, akkor az (5.7.1) inhomogén egyenletnek van
$$\chi(x) := x^m Q(x)e^{\lambda x} \quad (x \in I)$$
alakú megoldása, ahol λ m-szeres gyöke a p karakterisztikus polinomnak ($m \in \{0,1,2\}$), Q pedig olyan polinom, melynek fokszáma megegyezik P fokszámával, így az (5.7.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza
$$\mathcal{M}_{(5.7.1)} = \{c_1\varphi + c_2\nu + \chi : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2. a jobb oldal
$$f(x) = e^{\omega_1 x}(P_1(x)\cos(\omega_2 x) + P_2(x)\sin(\omega_2 x)) \qquad (x \in I)$$
alakú, ahol P_1, P_2 legfeljebb másodfokú polinomok, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, akkor az (5.7.1) inhomogén egyenletnek van
$$\chi(x) := x^m e^{\omega_1 x}\{Q_1(x)\cos(\omega_2 x) + Q_2(x)\sin(\omega_2 x)\} \quad (x \in I)$$
alakú megoldása, ahol $\omega_1 + \omega_2\imath$ m-szeres gyöke a p karakterisztikus polinomnak ($m \in \{0,1\}$), Q_1, Q_2 pedig legfeljebb másodfokú polinomok, így az (5.7.1) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza
$$\mathcal{M}_{(5.7.1)} = \{c_1\varphi + c_2\nu + \chi : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Biz. ■

5.7.0. megjegyzés.

1. Az 5.7.2. tételt úgy alkalmazzuk, hogy a Q, ill. a Q_1 és a Q_2 polinomokat határozatlan együtthatókkal vesszük fel és az együtthatókat a differenciálegyenletbe való behelyettesítés útján határozzuk meg.
2. Ha az f inhomogenitás két vagy több függvény összege, akkor a χ partikuláris megoldás az összeg minden tagjának külön-külön képzett inhomogén egyenletek partikuláris megoldásának összege.

5.7.6. feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 2e^{-3x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
2. $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
3. $y''(x) - 2y'(x) = 3x + e^{4x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$.

Útm.

1. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 6z + 9 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom egyetlen gyöke: -3, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-3x}, \mathbb{R} \ni x \mapsto xe^{-3x}\right\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta xe^{-3x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := Ax^2 e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni. Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $A = 1$.

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta xe^{-3x} + x^2 e^{-3x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = -3\alpha + \beta$$

így

$$\alpha = \beta = 0,$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = x^2 e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $2\imath$, $-2\imath$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos(2x), \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(2x)\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni. Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$A = 0 \qquad \text{és} \qquad B = \frac{1}{4}.$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) + \frac{x}{4}\sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\beta,$$

így

$$\alpha = \beta = 0,$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = \frac{x}{4}\sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. **1. lépés.**. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 - 2z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: 0, 2, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha, \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{2x}\right\},$$

megoldáshalmaza pedig

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy megoldását a

$$\chi(x) := x(Ax + B) + Ce^{4x} = Ax^2 + Bx + Ce^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban érdemes keresni, hiszen

$$2x = 2x \cdot e^{0 \cdot x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$A = -\frac{3}{4}, \qquad B = -\frac{3}{4} \qquad \text{és} \qquad C = \frac{1}{8}.$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^{2x} - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} - \frac{e^{4x}}{8} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ha a φ függvény a kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta - \frac{1}{8} \qquad \text{és} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\beta - \frac{3}{4} - \frac{1}{2},$$

így

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{5}{8},$$

azaz a teljes megoldás

$$\varphi(x) = \frac{-4 + 5e^{2x} - 6x^2 - 6x - e^{4x}}{8} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

5.7.2. gyakorló feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

1. $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -9$;
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
3. $y'' - 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
4. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
5. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
6. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2 + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
7. $y''(x) - y(x) = e^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 0 = y'(0)$;
8. $y'' - 2y' - 5y = 3x^2 e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = \frac{5}{8}$, $y'(0) = -\frac{11}{8}$;
9. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 4e^{2x} + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 15$.

Útm.

5.7.7. feladat. Egy $m(>0)$ tömegű anyagi pont egyenes vonalú egyenes mozgást végez, miközben az alábbi erők hatnak rá:

- valamilyen (időtől is függhető) külső $F\ (\in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ erő,
- rugalmas visszatérítő erő, amelynek nagysága egy ún. nyugalmi ponttól mért kitéréssel egyenesen arányos (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $D\ (>0)$), iránya pedig ellentétes az elmozdulással; valamint
- a mindenkori sebességgel egyenesen arányos fékező erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $k\ (\geq 0)$).

Írjuk le a tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyzetét és az akkori sebességét!

Útm. Jelöljük y-nal az elmozdulás-idő-függvényt, és tegyük fel, hogy $\mathcal{D}_F$ és $I := \mathcal{D}_y \subset \mathcal{D}_F$ nyílt intervallumok, $0 \in I$, $y \in \mathfrak{D}^2$, továbbá legyen $s_0 := y(0)$, ill. $v_0 := y'(0)$ a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, ill. sebesség. A Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az

$$\boxed{\begin{array}{l} my'' = F - Dy - ky', \\ y(0) = s_0,\ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{5.7.5}$$

matematikai modell adódik. Az alábbi speciális eseteket különböztetjük meg:

I. eset (harmonikus rezgés):. a súrlódás elhanyagolható és külső erő nem hat a pontra, azaz $k = 0$, $F(t) \equiv 0$. Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} my'' + Dy = 0, \\ y(0) = s_0,\ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{5.7.6}$$

Mivel a

$$p(z) := z^2 + \frac{D}{m} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karekterisztikus polinomnak csak komplex gyökei vannak: $\pm\imath\sqrt{D/m}$, ezért az

$$\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

jelöléssel az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, továbbá $y(0) = s_0$, ill. $y'(0) = v_0$, akkor

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + s_0 \cos(\omega t) \qquad (t \in I).$$

Megjegyzések.

1. Elemi trigonometrikus összefüggések felhasználásával a fenti függvény az

$$y(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (t \in I)$$

alakra is hozható, ahol

$$A := \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + s_0^2} \qquad \text{ill.} \qquad \delta := \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{s_0\omega}{v_0}\right) & (v_0 > 0), \\ \frac{\pi}{2} & (v_0 = 0). \end{cases}$$

Ha például úgy indítjuk a mozgást, ahogy a 0-nak választott időpontban a tömegpontot a nyugalmi helyzetben ($s_0 = 0$) adott sebességgel meglökjük ($v_0 > 0$), akkor $A = v_0/\omega$, $\delta = 0$. Ha viszont a mozgást úgy indítjuk, hogy kitérítjük a testet ($s_0 > 0$), azután elengedjük ($v_0 = 0$), akkor $A = s_0$, ill. $\delta = \pi/2$.

2. A tömegpont helyzete periodikusan változik az időben a nyugalmi pont körül, a $-A$ és A határok között. Az ilyen mozgást **(lineáris) harmonikus rezgés**nek, a mozgó tömegpontot pedig **harmonikus oszcillátor**nak nevezzük. Az A neve: a rezgés **amplitúdó**ja, δ pedig a **fázisszög** (**kezdőfázis**, ill. **fázisállandó**). A **rezgésidő** az az időtartam, amely alatt az $\omega t + \delta$ **fázis** 2π-vel változik meg: $\omega(t+T) + \delta = \omega t + \delta + 2\pi$, így

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Az időegységre eső rezgések száma:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

amelyet **frekvenciának** (**rezgésszám**nak) is szokás nevezni. Az utóbbi két összefüggés egybevetéséből látszik, hogy

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Az ω-t a rezgés **körfrekvenciájának** hívják.

II. eset (csillapítás nélküli kényszerrezgés, periodikus külső kényszer esetén):. $k = 0$,

$$F(t) = f\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in \mathbb{R},\ f > 0,\ \Omega > 0,\ \delta \in [0{,}2\pi)).$$

Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} my''(t) + Dy(t) = f\sin(\Omega t + \delta) \quad (t \in I), \\ y(0) = s_0,\ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{5.7.7}$$

Ω-t gerjesztési vagy **kényszerfrekvenciának** hívják, szemben a már korábban bevezetett ω **sajátfrekvenciával**. A homogén egyenlet megoldáshalmaza most is

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

ahol $\omega := \sqrt{D/m}$. Az inhomogén egyenlet megoldáshalmazának vizsgálatához $|\Omega - \omega|$ előjele alapján a következő két fontos (al-)esetet különböztetjük meg:

1. eset $(\Omega \neq \omega)$.. Ekkor $\imath\Omega$ nem gyöke a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomnak, ezért alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az (5.7.7)-beli inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldása az

$$\chi(t) := a\cos(\Omega t + \delta) + b\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I)$$

függvény. Ez mechanikailag azt jelenti, hogy ha a mozgó pontra egy Ω frekvenciával periodikus külső kényszererő hat, akkor a rendszer egy periodikus választ ad, ugyanazzal az Ω frekvenciával. Az (5.7.7)-beli inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}, \qquad b = 0,$$

azaz

$$\chi(t) = \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ezért az (5.7.7)-beli inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ I \ni t \mapsto \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, akkor az (5.7.7)-beli kezdeti feltételek felhasználásával

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \quad \left\{ s_0 - \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\delta) \right\}\cos(\omega t) + \\ &+ \frac{1}{\omega}\left\{ v_0 - \frac{f\Omega}{m(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\delta)} \right\}\sin(\omega t) + \\ &+ \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I). \end{aligned}$$

A harmonikus rezgéshez hasonlóan

$$y(t) = r\sin(\omega t + \vartheta) + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ahol

$$r := \sqrt{\left\{ s_0 - \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right\}^2 + \left\{ v_0 - \frac{f\Omega}{m(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\delta)} \right\}^2}, \qquad \text{ill.} \qquad \vartheta := \ldots$$

Ez mechanikailag azt jelenti, hogy a tömegpont mozgása két harmonikus rezgés összege: a harmonikus rezgőmozgásra „ráratódik” még egy periodikus mozgás. Ha az Ω kényszerfrekvencia nagyon eltér a rendszer ω sajátfrekvenciájától, akkor ez a hatás nem jelentős. Ha azonban a kényszerfrekvencia elég közel van a sajátfrekvenciához, akkor ez a hatás tetszőlegesen nagy lehet, ami adott mechanikai rendszerek esetében igen könnyen katasztrófához vezethet.

2. eset $(\Omega = \omega)$.. Ekkor $\imath\Omega$ (egyszeres) gyöke a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomnak, ezért alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az (5.7.7) egyenlet egy (partikuláris) megoldása a

$$\chi(t) := t\,\{a\cos(\Omega t + \delta) + b\sin(\Omega t + \delta)\} \qquad (t \in I)$$

függvény. Az (5.7.7)-beli inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$a = -\frac{f}{2m\Omega}, \qquad b = 0,$$

azaz

$$\chi(t) = -\frac{f}{2m\omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I),$$

ezért az (5.7.7)-beli inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ I \ni t \mapsto \alpha\sin(\Omega t) + \beta\cos(\Omega t) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\omega t + \delta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Így, ha $y \in \mathcal{M}$, akkor az (5.7.7)-beli kezdeti feltételek felhasználásával

$$y(t) = \frac{1}{\Omega}\left\{ v_0 + \frac{f}{2m\Omega}\cos(\delta) \right\}\sin(\Omega t) + s_0\cos(\Omega t) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I).$$

Ismét elemi trigonometrikus összefüggéseket felhasználva

$$y(t) = r\sin(\Omega t + \vartheta) - \frac{f}{2m\Omega} t\cos(\Omega t + \delta) \qquad (t \in I)$$

adódik, ahol

$$r := \sqrt{\frac{1}{\Omega^2}\left\{ v_0 + \frac{f}{2m\Omega}\cos(\delta) \right\}^2 + s_0^2}, \qquad \text{ill.} \qquad \vartheta := \ldots,$$

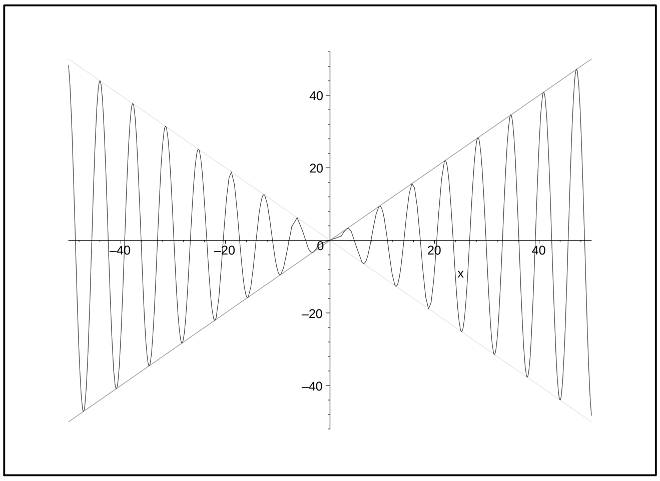
azaz egy harmonikus rezgésre egy nem harmonikus, hanem egy aperiodikus mozgás „rakódik rá”. Mechanikailag ez azt jelenti, hogy ha I nem-korlátos intervallum, akkor az anyagi pont kitérése minden határon túl nő (vö. 5.7.1. ábra), ún. „**rezonancia** jön létre”. Ez nyilván lehetetlen: a mechanikai rendszer előbb-utóbb összeomlik: katasztrófa következik be.

III. eset (csillapított (kényszer)rezgés).. A súrlódás teljes egészében sohasem kiküszöbölhető. Bizonyos helyzetekben (pl. lökésgátlók) éppen a súrlódás fékező hatásának kihasználása a cél. Vizsgáljuk tehát most a rendszert abban az esetben, amikor az F külső erő mellett súrlódás is van! Olyan $y : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt keresünk, amelyre

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \dfrac{k}{m}y' + \dfrac{D}{m}y = F, \\[2em] y(0) = s_0, \ y'(0) = v_0. \end{array}} \tag{5.7.8}$$

A

$$p(z) := z^2 + \frac{k}{m}z + \frac{D}{m} \qquad (z \in \mathbb{C})$$



5.7.1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni t \mapsto -t\cos(t)$ függvény grafikonjának egy részlete

karekterisztikus polinom gyökei a következők:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}.$$

Az alábbi (al-)eseteket érdemes megkülönböztetni:

1. eset ($k^2 > 4mD$**)..** Ekkor a karakterisztikus polinomnak két (egyszeres) valós gyöke van:

$$\lambda_+ := \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}, \qquad \lambda_- := \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m}$$

ezért az (5.7.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto \alpha\exp(\lambda_+ t) + \beta\exp(\lambda_- t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t F(s)\exp(-\lambda_1 s)\,\mathrm{d}s,$$

$$g_2(t) = \frac{1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t F(s)\exp(-\lambda_2 s)\,\mathrm{d}s,$$

akkor az (5.7.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto (\alpha + g_1(t))\exp(\lambda_1 t) + (\beta + g_2(t))\exp(\lambda_2 t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. eset ($k^2 = 4mD$**)..** Ekkor a karakterisztikus polinomnak egyetlen (kétszeres) valós gyöke van:

$$\lambda := -\frac{k}{2m},$$

ezért az (5.7.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} := \{I \ni t \mapsto \alpha \exp(\lambda t) + \beta t \exp(\lambda t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(s) \exp(-\lambda s)\,\mathrm{d}s, \qquad g_2(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t F(s) s \exp(-\lambda_2 s)\,\mathrm{d}s,$$

akkor az (5.7.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto (\alpha + g_1(t)) \exp(\lambda t) + (\beta t + g_2(t)) \exp(\lambda t) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

3. eset ($k^2 < 4mD$).. Ekkor a karakterisztikus polinomnak egyetlen konjugált komplex gyökpárja van:

$$\lambda_1 := \frac{-k + \imath\sqrt{4mD - k^2}}{2m} =: \Re + \Im\imath, \qquad \lambda_2 := \frac{-k - \imath\sqrt{4mD - k^2}}{2m} =: \Re - \Im\imath,$$

ezért az (5.7.8)-beli homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \{I \ni t \mapsto \alpha \exp\left(\Re t\right) \cos\left(\Im t\right) + \beta t \exp\left(\Re t\right) \sin\left(\Im t\right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ha a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ függvényre tetszőleges $t \in I$ esetén

$$g_1(t) = \frac{1}{m\Im} \int_0^t F(s) \exp(-\Re s) \sin(\Im s)\,\mathrm{d}s,$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{m\Im} \int_0^t F(s) s \exp(-\Re s) \cos(\Im s)\,\mathrm{d}s$$

a (5.7.8) inhomogén egyenlet megoldáshalmaza a fentiekben tárgyaltak alapján könnyen meghatározható.

Megjegyzés. Ha nincs „kényszer”, azaz $F(t) \equiv 0$, akkor **csillapított rezgőmozgás**ról beszélünk. Ekkor az első két esetben olyan erős a (többnyire súrlódásból származó) fékező hatás, hogy nincsen rezgés, a harmadik esetben pedig ugyan van rezgés, de az amplitúdó „exponenciálisan lecseng”. ■

5.7.8. feladat. Legyen $a, b, A, B, q \in \mathbb{R}$, és tekintsük az

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = A\sin(qx) + B\cos(qx) \quad (x \in \mathcal{D}_y)$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy ha $\pm\imath$ a karakterisztikus polinomnak k-szoros ($k \in \{0; 1\}$) gyöke, akkor létezik az egyenletnek $\varphi(x) := x^k(A_1 \sin(qx) + B_1 \cos(qx))$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú megoldása, alkalmas $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ együtthatókkal!

Útm.

5.8. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

Adott $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $a_k, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $(k \in \{1, \ldots, n\})$ esetén tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1}\varphi'(x) + a_n\varphi(x) = f(x) \qquad (x \in I).$$

teljesül!

5.8.1. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **n-edrendű lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük és az

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f \tag{5.8.1}$$

szimbólummal jelöljük.

Ha

$$f(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

akkor **homogén egyenlet**ről beszélünk:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \tag{5.8.2}$$

Mivel az (5.8.1) differenciálegyenlettel egyenértékű elsőrendű rendszer

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \tag{5.8.3}$$

alakú, ahol

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

ezért az (5.8.1) egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat egyértelműen megoldható. A fenti átírás úgy történik, hogy

$$z_1 := y, \qquad z_2 := y', \qquad \ldots, \qquad z_{n-1} := y^{(n-2)}, \qquad z_n := y^{(n-1)},$$

ezért az (5.7.1)-re vonatkozó kezdeti feltétel alkalmas $\tau \in I$, ill. $\xi_1, \ldots \xi_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(\tau) = \xi_1, \qquad y'(\tau) = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-2)}(\tau) = \xi_{n-1}, \qquad y^{(n-1)}(\tau) = \xi_n$$

alakú.

5.8.2. definíció. Azt mondjuk, hogy $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ az (5.8.2) homogén egyenlet egy **alaprendszere**, ha

$$W := \begin{bmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1' & \ldots & \mu_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{(n-1)} & \ldots & \mu_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

alapmátrixa (5.8.3) homogén részének.

Valamely négyzetes mátrix oszlopai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a mátrix determinánsa nem tűnik el. Ezt felhasználva könnyen belátható a

5.8.1. tétel. Ha a $\mu_1, \ldots, \mu_n$ függvények az (5.8.2) homogén egyenlet megoldásai, akkor egyenértékűek az alábbi állítások.

(1). A $\mu_1, \ldots, \mu_n$ függvények lineárisan függetlenek, azaz $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ alaprendszere (5.8.2)-nek.

(2). Bármely $x \in I$ esetén

$$\omega(x) := \det(W(x)) \neq 0.$$

(3). Van olyan $\tau \in I$ hogy

$$\omega(\tau) \neq 0.$$

Az (5.6.1) formula alapján

$$\boldsymbol{\lambda}(x) := W(x)\left\{[W(\tau)]^{-1}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^x [W(s)]^{-1}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s\right\} \qquad (x \in I)$$

az (5.8.3) rendszer teljes megoldása, ahol $\boldsymbol{\xi} := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.
Ez azt jelenti, hogy a $\mu_1, \ldots, \mu_n$ függvények megoldásai (5.8.2)-nek és alkalmas $\tau \in I$ esetén

$$\det W(\tau) \neq 0 \tag{5.8.4}$$

teljesül.
Ha $a_1, \ldots, a_n$ állandófüggvények, azaz alkalmas $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{R}$, ill. $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$a_k(x) = m_k \quad \text{ill.} \quad A(x) = M \qquad (x \in I,\ k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor az

$$y^{(N)} + m_1 y^{(N-1)} + \ldots + m_{N-1}y' + m_N y = 0 \tag{5.8.5}$$

állandó együtthatós, n-edrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet megoldáshalmazának meghatározása az M mátrix p karakterisztikus polinomjának segítségével történik.

5.8.1. tétel. Az M mátrix karakterisztikus polinomja

$$p(z) := z^n + m_1 z^{n-1} + \ldots + m_{n-1} z + m_n \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{5.8.6}$$

alakú.

Biz. $\det(zE_N - M) =$

$$= \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_n & m_{n-1} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} = z \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} +$$

$$+(-1)^{(n-1)} m_n \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ z & -1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ldots & 0 & z & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= z \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z & -1 \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots & m_2 & z+m_1 \end{bmatrix} +$$

$$+m_n.$$

Innen n-re vonatkozó teljes indukcióval az állítás könnyen belátható. ■

5.8.2. tétel. Ha $\rho \in \mathbb{R}$ k-szoros gyöke a p karakterisztikus polinomnak, akkor az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t},\ te^{\rho t}, \ldots,\ t^{k-1} e^{\rho t}$$

függvények a $(**)$ egyenlet lineárisan független megoldásai. Ha valamely $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ esetén a $\rho + \imath\sigma$ komplex szám l-szeres gyöke a p karekterisztikus polinomnak, akkor az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t} \cos(\sigma t), \quad te^{\rho t} \cos(\sigma t), \quad \ldots \quad t^{l-1} e^{\rho t} \cos(\sigma t),$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\rho t} \sin(\sigma t), \quad te^{\rho t} \sin(\sigma t), \quad \ldots \quad t^{l-1} e^{\rho t} \sin(\sigma t)$$

függvények az (5.8.5) egyenlet lineárisan független megoldásai. Így az (5.8.5) egyenlet n lineárisan független megoldásait, azaz (5.8.5) egy alaprendszerét kapjuk.

Biz. ■

5.8.1. feladat. Adjuk meg az

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0;$
2. $2y''' - 5y'' + 6y' - 2y = 0;$
3. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y'' - 4y' + 4y = 0;$
4. $y''' - y'' - y' + y = 0;$
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$
6. $y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0$
   egyenletek megoldáshalmazát, ill. az
7. $y''' - y' = 0,\, y(0) = 0,\, y'(0) = -1,\, y''(0) = 1$
   kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

Útm.

1. – A karakterisztikus polinom:

   $$p(z) := z^3 - 6z^2 + 11z - 6 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

   melynek gyökei:

   $$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

   – Ezért a megoldáshalmaz:

   $$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x} + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

   $$p(z) := 2z^3 - 5z^2 + 6z - 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

   melynek gyökei:

   $$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = 1 + \imath, \qquad \lambda_3 = 1 - \imath.$$

   – Ezért a megoldáshalmaz:

   $$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{\frac{x}{2}} + \beta e^{x}\cos(x) + \gamma e^{x}\sin(x) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

   $$p(z) := z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

   melynek gyökei:

   $$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = \imath, \qquad \lambda_4 = -\imath.$$

   – Ezért a megoldáshalmaz:

   $$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + \gamma\cos(x) + \delta\sin(x) :\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z^2 - z + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{-x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z^2 + 4z - 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta x e^x + \gamma x^2 e^x : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^5 + 8z^3 + 16z = z(z^4 + 8z^2 + 16) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2\imath, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = -2\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta \cos(2x) + \gamma \sin(2x) + \delta x \cos(2x) + \eta x \sin(2x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R} \}.$$

7. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta e^x + \gamma e^{-x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\varphi(x) = -1 + e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

5.8.1. gyakorló feladat. Adjuk meg az

1. $y^{(4)} - 5y'' + 4y' = 0$;
2. $y''' - y'' + y' + 3y = 0$;
3. $y''' - 27y = 0$;
4. $y^{(4)} + y = 0$
   egyenletek megoldáshalmazát!

Útm.

5.8.3. tétel. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, p_c, p_s k-adfokú polinom, és tegyük fel, hogy

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p_c(x)\cos(\beta x) + p_s(x)\sin(\beta x)\right) \qquad (x \in I).$$

Ekkor az (5.8.1) inhomogén egyenletnek van

$$\varphi_p(x) := x^r e^{\alpha x}\left(q_c(x)\cos(\beta x) + q_s(x)\sin(\beta x)\right) \qquad (x \in I)$$

(ún. **partikuláris**) **megoldás**a, ahol az $\alpha + \beta\imath$ az (5.8.6) karakterisztikus polinom r-szeres gyöke, q_c, q_s k-adfokú polinom.

Biz. ■

Ezt a tételt úgy alkalmazzuk, hogy a q_c és q_s polinomokat határozatlan együtthatókkal vesszük fel és az együtthatókat a differenciálegyenletbe való helyettesítés útján határozzuk meg.

5.8.4. tétel. Az (5.8.1) inhomogén egyenlet $\mathcal{M}_{IH}$ megoldáshalmazára:

$$\mathcal{M}_{IH} = \mathcal{M}_H + \varphi_p$$

teljesül, ahol $\mathcal{M}_H$ az (5.8.2) homogén egyenlet megoldáshalmaza és φ_p az (5.8.1) inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldása.

Biz. ■

5.8.2. feladat. Határozzuk meg az

1. $y'''(x) - 4y''(x) + 3y(x) = xe^{2x}$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin$
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x(\cos(x) + x\sin(x))$ $(x \in \mathbb{R})$
   egyenletek megoldáshalmazát, ill. az
4. $y''' - 3y' - 2y = 9\exp^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$;
5. $y^{(4)} + y'' = 2\cos$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$;
   kezdetiérték-feladatok teljes megoldását!

Útm.

1. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 4z^2 + 3 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}x} + \gamma e^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := e^{2x}(a + bx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}x} + \gamma e^{\frac{3-\sqrt{21}}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{25} - \frac{x}{5}\right) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + 5z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \imath, \qquad \lambda_2 = -\imath, \qquad \lambda_3 = 2\imath, \qquad \lambda_4 = -2\imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma\cos(2x) + \delta\sin(2x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := x(a\sin(x) + b\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza: $\mathcal{M} :=$

$$\left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma\cos(2x) + \delta\sin(2x) - \frac{1}{6}x\cos(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^2 - 2z + 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1 + \imath, \qquad \lambda_2 = 1 - \imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x\cos(x) + \beta e^x\sin(x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := xe^x((a + bx)(\cos(x) + (c + dx)\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) + xe^x\left(-\frac{1}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z - 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 2.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta xe^{-x} + \gamma e^{2x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := axe^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta xe^{-x} + \gamma e^{2x} + xe^{2x} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldására:

$$\varphi(x) = (x - 1)(e^{2x} - e^{-x}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + z^2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \imath, \qquad \lambda_4 = -\imath.$$

– Ezért a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma \cos(x) + \delta \sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

– Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\varphi_p(x) := x(a\cos(x) + b\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük.

– Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza: $\mathcal{M} :=$

$$\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma \cos(x) + \delta \sin(x) - x\sin(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

– A kezdetiérték-feladat teljes megoldására:

$$\varphi(x) = -3 + x(1 + \sin(x) + 3\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Adott $(0, +\infty) \supset I$, ill. $(-\infty, 0) \supset I$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, ..., n\})$ számok esetén tekintsük a következő feladatot.

Határozzunk meg olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényt, amelyre

$$x^n \varphi^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1} x \varphi'(x) + a_n \varphi(x) = f(x) \qquad (x \in I)$$

teljesül!

5.8.3. definíció. Az imént megfogalmazott feladatot **Euler-féle differenciálegyenlet**nek nevezzük, és az

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = f(x) \qquad (x \in I) \qquad (5.8.7)$$

szimbólummal jelöljük.

5.8.5. tétel. Ha $I \subset (0, +\infty)$ intervallum, úgy az n-szer differenciálható $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor megoldása a (5.8.7) Euler-féle differenciálegyenletnek, ha alkalmas $b_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, ..., n\})$ számok esetén a

$$\psi := \varphi \circ \exp$$

függvény megoldása a

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + ... + b_{n-1} z' + b_n z = f \circ \exp$$

állandó együtthatós, n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek.

Biz. Mivel

$$\varphi = \psi \circ \ln$$

teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $c_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, ..., n\})$ valós szám, hogy

$$x^k \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_i \psi^{(k)}(\ln(x)) \qquad (x \in I). \quad \blacksquare$$

5.8.0. megjegyzés.

1. Ha $I \subset (-\infty,0)$, akkor
$$\psi := \varphi \circ (-\exp)$$
függvényről ez előbbihez hasonlót állíthatunk.
2. $n = 2$ esetén: $b_1 = a_1 - 1$, $b_2 = a_2$;
$n = 3$ esetén: $b_1 = a_1 - 3$, $b_2 = a_2 - a_1 + 2$, $b_3 = a_3$.
3. Némely esetben más helyettesítéssel is célt érünk, pl.
$$I \subset (0, +\infty)$$
és alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén legyen
$$\psi(x) := \varphi(x^\lambda) \qquad (x \in I).$$

5.8.3. feladat. Határozzuk meg az

1. $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
2. $x^3 y'''(x) - 2xy'(x) + 4y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
3. $x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 13y(x) = x \ln(x)$ $(x \in I := (0, +\infty))$
egyenletek megoldáshalmazát!

Útm.

1. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen
$$\psi := \varphi \circ \exp .$$
Ekkor
$$\varphi = \psi \circ \ln, \quad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \qquad (x \in I).$$
Így
$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \quad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Tehát

$$x^2\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \psi''(\ln(x)) - 3\psi'(\ln(x)) + \psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Ezért a ψ függvény a

$$z'' - 3z' + 2z = 0$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^2 - 3z + 2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. A lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{2t} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \alpha x + \beta x^2 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz.

2. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen

$$\psi := \varphi \circ \exp.$$

Ekkor

$$\varphi = \psi \circ \ln, \qquad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \quad (x \in I),$$

$$\varphi'''(x) = \psi'''(\ln(x))\frac{1}{x^3} - \psi''(\ln(x))\frac{2}{x^3} - \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^3} + \psi'(\ln(x))\frac{2}{x^3} \qquad (x \in I).$$

Így bármely $x \in I$ esetén

$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \qquad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)),$$

ill.

$$x^3\varphi'''(x) = \psi'''(\ln(x)) - 3\psi''(\ln(x)) + 2\psi'(\ln(x))$$

Tehát

$$x^3\varphi'''(x) - 2x\varphi'(x) + 4\varphi(x) = \psi'''(\ln(x)) - 3\psi''(\ln(x)) + 4\psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Ezért a ψ függvény a

$$z''' - 3z'' + 4z = 0$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 3z^2 + 4 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. A lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \alpha\frac{2}{x} + \beta x^2 + \gamma x^2 : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz.

2016.06.15.

3. Tegyük fel, hogy a φ függvény megoldása az egyenletnek, és legyen

$$\psi := \varphi \circ \exp .$$

Ekkor

$$\varphi = \psi \circ \ln, \qquad \varphi'(x) = \psi'(\ln(x))\frac{1}{x}, \quad \varphi''(x) = \psi''(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \psi'(\ln(x))\frac{1}{x^2} \quad (x \in I).$$

Így

$$x\varphi'(x) = \psi'(\ln(x)), \quad x^2\varphi''(x) = \psi''(\ln(x)) - \psi'(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Tehát

$$x^2\varphi''(x) + 7x\varphi'(x) + 13\varphi(x) = \psi''(\ln(x)) - 3\psi'(\ln(x)) + \psi(\ln(x)) \qquad (x \in I).$$

Ezért a ψ függvény a

$$z''(t) + 6z'(t) + 13z(t) = te^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. Az egyenlet homogén részéhez tartozó karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^2 + 6z + 13 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = -3 + 2\imath$, $\lambda_2 = -3 - 2\imath$. A lineáris egyenlet homogén részének megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^{-3t}\cos(2t) + \beta e^{-3t}\sin(2t) + \gamma t e^{2t} : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\psi_p(t) := (at + b)e^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Az (inhomogén) lineáris egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} := \left\{\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-3t}(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t))\frac{1}{40}(2t - 8)e^t : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az

$$\left\{I \ni x \mapsto \frac{\alpha\cos(\ln(x^2))}{x^3} + \beta\sin(\ln(x^2))\left(\frac{1}{20}\ln(x) - \frac{1}{50}\right) : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

függvényhalmaz. ■

5.8.1. házi feladat. Határozzuk meg az

1. $x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 1 + x^2$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
2. $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x^2$ $(x \in I := (0, +\infty)0)$;
3. $x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x) = 2\cos\ln(x)$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
4. $x^2y'' - xy'(x) + 2y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
5. $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\ln^2(x)$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
6. $4x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = \sqrt{x}$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
7. $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
8. $x^3y'''(x) + 4x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
9. $x^3y'''(x) - 2x^2y''(x) + 5xy'(x) - 5y(x) = 0$ $(x \in I := (0, +\infty))$;
10. $x^3y'''(x) - x^2y''(x) + 5xy'(x) = 1$ $(x \in I := (0, +\infty))$

egyenletek megoldáshalmazát!

2016.06.15.

6. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

6.0.1. definíció. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ill. $f_n : H \to \mathbb{R}$.

- Azt mondjuk, hogy az (f_n) **függvénysorozat konvergens az** $a \in H$ **pontban**, ha az $(f_n(a))$ számsorozat konvergens.
- A
$$KH(f_n) := \{x \in H : \ (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$
halmazt az (f_n) függvénysorozat **konvergenciahalmaz**ának nevezzük.
- $KH(f_n) \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az $\emptyset \neq A \subset KH(f_n)$ **halmazon pontonként konvergens** és **határfüggvény**e az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény (jelben: $f_n \to_A f \ (n \to \infty)$), ha minden $x \in A$ esetén
$$\lim(f_n(x)) = f(x).$$

Az az állítás, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens az A halmazon azzal egyenértékű, hogy van olyan $f : A \to \mathbb{R}$ fügvény, hogy

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$[1]

6.0.1. példa. Az
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$
függvénysorozat esetében $KH(f_n) = (-1,1]$,
$$f : (-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in (-1,1)), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

[1] Ezt úgy is írjuk, hogy $\forall x \in A \forall \varepsilon > 0\ \exists N := N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $(N \leq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

6.0.1. feladat. Az alábbi függvénysorozatok esetében határozzuk meg a konvergenciahalmazt és a határfüggvényt!

1. $f_n := \sin^n \ (n \in \mathbb{N})$;
2. $f_n(x) := \dfrac{1}{1+x^n} \ (-1 \neq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
3. $f_n(x) := n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \ (0 \leq x \in \mathbb{R},\ 0 < n \in \mathbb{N})$;
4. $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n} \ (0 \leq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$;
5. $f_n(x) := \cos(nx) \ (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $|\sin(x)| \leq 1$, ezért a $(\sin^n(x))$ számsorozat pontosan akkor divergens, ha $\sin(x) = -1$, azaz ha
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
Így
$$KH(f_n) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
és
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right), \\[2ex] 1 & \left(x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi :\ l \in \mathbb{Z}\right\}\right). \end{cases}$$

2. Ha
   - $|x| < 1$, akkor $\lim(x^n) = 0$, így
   $$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty);$$
   - $x = 1$, akkor
   $$f_n(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty);$$
   - $|x| > 1$, akkor $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$, így
   $$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{x^n} + 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n + 1} \longrightarrow 0 \cdot 1 = 0 \qquad (n \to \infty).$$

   Így $KH(f_n) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ és
   $$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in (-1,1)), \\[2ex] \dfrac{1}{2} & (x = 1), \\[2ex] 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

3. Mivel
$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$
ezért $KH(f_n) = (0, +\infty)$ (ui. $x = 0$ esetén $f_n(0) = \sqrt{n}$) és
$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Ha
   - $0 \leq x \leq 1$, akkor
   $$1 \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{2} \qquad (n \in \mathbb{N});$$
   - $1 < x \in \mathbb{R}$, akkor
   $$x < f_n(x) < \sqrt[n]{2}x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Így
   $$KH(f_n) = [0, +\infty), \qquad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1]), \\ x & (x \in (1, +\infty)). \end{cases}$$

5. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen
$$a_n := \cos(na) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$a_{n\pm1} = \cos((n \pm 1)a) = \cos(na)\cos(a) \mp \sin(na)\sin(a) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Így, ha (a_n) konvergens és $\alpha := \lim(a_n)$, akkor $\lim(a_{n\pm1}) = \alpha$, sőt $\lim(a_{2n}) = \alpha$, azaz
$$2\alpha = \lim(a_{n+1}) + \lim(a_{n-1}) = 2\cos(a)\lim(\cos(na)) = 2\cos(a)\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(\cos(a) - 1) = 0.$$
Tehát két esetet kell megkülönböztetnünk:

$\boxed{\alpha = 0}$. ebben az esetben
$$0 = \lim(a_{2n}) = \lim(\cos(2na)) = \lim(2\cos^2(na) - 1) = 2\alpha^2 - 1,$$
ami nem lehetséges.

$\boxed{\cos(a) = 1}$. $a = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ezért
$$KH(f_n) = \{2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad f : \{2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1. \quad \blacksquare$$

Előfordulhat az, hogy
$$f_n \to_A f \qquad (n \to \infty),$$

de a konvergencia az A halmazon különböző pontjaiban nem „egyformán gyors”, nem „egyenletes”. Ennek szemléltetésére alkalmas a

6.0.2. példa. Az

$$f_n(x) := \frac{nx}{nx+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében $KH(f_n) = [0, +\infty)$ és

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ 1 & (x > 0), \end{cases}$$

azaz minden $x > 0$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor

$$\left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = 1 - \frac{nx}{nx+1} < \varepsilon.$$

Számítsuk ki ezt a N küszöbindexet! Ha

$$1 - \frac{nx}{nx+1} < \varepsilon,$$

akkor

$$nx + 1 - nx < \varepsilon nx + \varepsilon,$$

ahonnan

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} < n.$$

Ekkor

$$N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} \right] + 1.$$

N tehát nemcsak ε-tól, hanem x-től is függ. Adott $\varepsilon > 0$-hoz tehát a $[0, +\infty)$ intervallumon nem található minden x-re egyszerre érvényes küszöbindex, vagyis itt a konvergencia nem egyenletes.

6.0.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergens az $A \subset H$ halmazon**, ha létezik olyan $f : A \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \forall N \leq n \in \mathbb{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

6.0.1. megjegyzések.

1. Ilyen azt is mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen tart** az f függvényhez az A halmazon: $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty)$.
2. Világos, hogy minden egyenletesen konvergens függvénysorozat pontonként is konvergens, mégpedig ugyanazon határfüggvénnyel. Figyeljük meg, hogy az egyenletes konvergencia abban különbözik a konvergenciától, hogy itt N nem függ x-től, azaz minden ponthoz ugyanolyan küszöbindex található.
3. A **konvergencia nem egyenletes**, ha
   $\exists \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists x \in A\, \exists N \leq n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.
4. $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty) \iff$
   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in A\, \forall N \leq m, n \in \mathbb{N}: \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
   („**egyenletes Cauchy-feltétel**”).
5. $f_n \rightrightarrows_A f$ $(n \to \infty) \iff$
   a (ξ_n) sorozat nullsorozat, ahol
   $$\xi_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : \; x \in A\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

6.0.2. feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvénysorozatokat konvergencia, ill. egyenletes konvergencia szempontjából!

1. $f_n(x) := \dfrac{1}{n+x}$ $(-1 < x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$;
2. $f_n(x) := \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $(1 \leq x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$;
3. $f_n(x) := \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$;
4. $f_n(x) := x^n - x^{n+1}$ $(x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$;
5. $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ $(x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$;
6. $f_n(x) := \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$ $(x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Mivel minden $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén
   $$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$
   ezért
   $$KH(f_n) = (-1, +\infty) \qquad \text{és} \qquad f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n-1} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N};\; x \in (-1, +\infty))$$

és $\lim \left(\dfrac{1}{n-1}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ van olyan $2 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{1}{n-1} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$

2. Mivel minden $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = [1, +\infty)$ és

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n} \qquad (n \in \mathbb{N};\; 1 \leq x \in \mathbb{R})$$

és $\lim \left(\dfrac{2}{n}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $1 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n \geq N$-re $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [-1, +\infty)).$$

3. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N};\; x \in \mathbb{R}),$$

(hiszen $(1 - n|x|)^2 \geq 0$) és $\lim \left(\dfrac{1}{2n}\right) = 0$, így minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $1 \leq N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n \geq N$-re $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, azaz

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel

$$f_n(x) = x^n(1-x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $KH(f_n) = (-1,1]$ és

$$f : (-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0.$$

A konvergencia nem egyenletes, ui.

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| :\; x \in (-1,1]\} = \sup\{|x|^n \cdot |1-x| :\; x \in (-1,1]\} = 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

5. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) \longrightarrow |x| \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x|.$$

A konvergencia egyenletes, ui.

$$\begin{aligned}
\sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in \mathbb{R}\} &= \sup\left\{\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n}\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|} : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy ha $\alpha > 0$, $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A).$$

6. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n(x) \to x^2 \qquad (n \to \infty),$$

ezért $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2.$$

A konvergencia nem egyenletes, ui.

$$\begin{aligned}
\sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in \mathbb{R}\} &= \sup\left\{\left|\left(x + \frac{1}{n} - x\right)\left(x + \frac{1}{n} + x\right)\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sup\left\{\left|\frac{1}{n} + 2x\right| : \ x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

6.0.3. feladat. Állapítsuk meg az

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{nx}}{1+nx} \qquad (x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}_0)$$

függvénysorozat konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e az (f_n) ill. az (f_n') sorozat?

Útm. Mivel

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{nx}} + \sqrt{n}} & (x \in (0,1]) \end{array}\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1]),$$

azaz

$$\lim(f_n(x)) = 0 \qquad (x \in [0,1]),$$

ezért a függvénysorozat konvergenciahalmaza a $[0,1]$ intervallum, határfüggvénye pedig az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvény. A konvergencia egyenletes, ui.

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(1+nx) - \sqrt{n}xn}{(1+nx)^2} = \frac{\sqrt{n}}{(1+nx)^2} \qquad (x \in [0,1])$$

és

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty \qquad (n \to \infty),$$

így (f_n') nemcsak, hogy egyenletesen nem, de még pontonként sem konvergens. ■

6.0.1. tétel. Ha

$$f_n \in \mathfrak{C}(A) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \rightrightarrows_A f \quad (n \to \infty), \qquad \text{akkor} \qquad f \in \mathfrak{C}(A).$$

Biz.

6.0.2. megjegyzések.

1. A 6.0.1. tételben a konvergencia egyenletessége nem hagyható el, ui. pl. az

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében $f_n \in \mathfrak{C}$, $KH(f_n) = [0, +\infty)$,

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ 0 & (x > 0) \end{cases} \qquad \text{így} \quad f \notin \mathfrak{C}.$$

A konvergencia tehát nem egyenletes, ami közvetlenül is belátható:

$$\sup_{0 \leq x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Egyébként megmutatható, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén (f_n) egyenletesen konvergens az $A := (\delta, +\infty)$ halmazon, ui. minden $x \in A$ ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta},$$

és

$$\lim \left(\frac{1}{n\delta} \right) = 0,$$

ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$\frac{1}{n\delta} < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in A).$$

2. Van azonban olyan folytonos függvényekből álló nem egyenletesen konvergens függvénysorozat, amelynek határfüggvénye folytonos. Az

$$f_n(x) := n^2 x (1 - x^2)^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat konvergenciahalmaza: $KH(f_n) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és határfüggvénye:

$$f : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0,$$

ui. tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(n^k q^n)$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor $\lim(n^k q^n) = 0$. Így bármely $nqin\mathbb{N}$ esetén $f_n, f \in \mathfrak{C}$, de a konvergencia nem egyenletes, ui. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

hiszen

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty), \quad \text{mivel} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

6.0.2. tétel. Ha

$$f_n \in \mathfrak{R}[a,b] \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \rightrightarrows_{[a,b]} f \quad (n \to \infty),$$

akkor $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és

$$\int_a^b f = \lim \left(\int_a^b f_n \right).$$

Biz.

6.0.2. megjegyzés. A 6.0.2. tételben a konvergencia egyenletessége nem hagyható el, ui. pl. az

$$f_n(x) := nx(1-x^2)^n \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében a konvergenciahalmaz: $KH(f_n) = [0,1]$ ill. a határfüggvény:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 0,$$

továbbá

$$f_n \in \mathfrak{R}[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és $f \in \mathfrak{R}[0,1]$, de

$$\int_0^1 f = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim \left(\frac{n}{2n+2} \right) = \lim \left(\int_0^1 f_n \right).$$

A konvergencia tehát nem egyenletes, ui. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 > 0 \qquad (n \to \infty).$$

6.0.3. definíció. Adott

$$f_n : H \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetén a $\sum(f_n)$ függvénysor

– **konvergens, ill. abszolút konvergens az** $a \in H$ **pontban**, ha a $\sum(f_n(a))$ numerikus sor konvergens ill. abszolút konvergens /$\sum(f_n)$ abszolút konvergens a-ban, ha $\sum(|f_n(a)|)$ konvergens/;

– **pontonként ill. abszolút konvergens az** $A \subset H$ **halmazon**, ha minden $a \in A$ esetén konvergens ill. abszolút konvergens a-ban;

– **konvergenciahalmaza**

$$KH\left(\sum(f_n)\right) := \left\{x \in H : \sum(f_n(x)) \text{ konvergens}\right\}$$

halmaz, ill. $KH(\sum(f_n)) \neq \emptyset$ esetén **összegfüggvénye** a

$$f : KH\left(\sum(f_n)\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

függvény;

– **egyenletesen konvergens az** $A \subset H$ **halmazon**, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens A-n, ahol

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

6.0.3. megjegyzések.

1. Ha $f_n \in \mathfrak{C}(A)$, $\sum(f_n)$ egyenletesen konvergens A-n, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathfrak{C}(A)$.
2. Ha $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre
$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad (x \in A, n \in \mathbb{N})$$
és $\sum(a_n)$ konvergens, akkor $\sum(f_n)$ egyenletesen konvergens A-n (Weierstraß-tétel).
3. A $\sum(f_n)$ függvénysoe pontosan akkor egyenletesen konvergens A-n, ha
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in A \; \forall N \leq m, n \in \mathbb{N} : \quad |s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$
("egyenletes Cauchy-kritérium"). Az $m := n - 1$ választással azt kapjuk, hogy
$$|s_m(x) - s_n(x)| = |f_n(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon \quad (x \in A, N \leq n \in \mathbb{N}),$$
így az alábbi fontos **Következményre** jutunk:
$$\sum(f_n) \quad \text{egyenletesen konvergens } A\text{-n} \quad \Longrightarrow \quad f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0 \qquad (n \to \infty).$$

6.0.4. feladat. Az alábbi függvénysorok esetében adjuk meg a konvergencia-halmazt és az összegfüggvényt! Egyenletes-e a konvergencia?

1) $\sum (x^n) \quad (x \in \mathbb{R})$; 2) $\sum \left(\frac{1}{2^n(1+x^2)^n} \right) \quad (x \in \mathbb{R})$;

3) $\sum \left(\frac{x}{(1+x)^n} \right) \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Tudjuk, hogy
$$KH\left(\sum (x^n)\right) = (-1{,}1)$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1{,}1)).$$
A konvergencia nem egyenletes, ui. bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén
$$\sup\{|f_n(x) - 0| : \; x \in (-1{,}1)\} = \sup\{|x^n| : \; x \in (-1{,}1)\} = (\sup\{|x| : \; x \in (-1{,}1)\})^n = 1.$$
Megjegyzés. Ha $f \geq 0$, akkor
$$\sup(f^n) = (\sup(f))^n.$$

2. Mivel
$$\left|\frac{1}{2(1+x^2)}\right|<1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{1}{1+x^2}<2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2>-1/2,$$
ezért
$$KH\left(\sum\left(\frac{1}{2^n(1+x^2)^n}\right)\right)=\mathbb{R}$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+x^2)^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2(1+x^2)}}=1+\frac{1}{1+2x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$
A Weierstraß-kritérium következményeként a konvergencia egyenletes, ui. minden $x\in\mathbb{R}$ esetén
$$0<\frac{1}{2^n(1+x^2)^n}\leq\frac{1}{2^n(1+0)^n}=\frac{1}{2^n}$$
és $\sum\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konvergens.

3. Mivel
$$\left|\frac{1}{1+x}\right|<1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty),$$
ezért
$$KH\left(\sum\left(\frac{x}{(1+x)^n}\right)\right)=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$$
(mértani sor) és az összegfüggvény
$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}=\begin{cases}-1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases} \qquad (x\in(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)),$$
ui $x=0$ esetén
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{(1+0)^n}=0,$$
és ha $x\neq 0$, akkor
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}=\frac{x}{1-(1+x)}.$$
A konvergencia nem egyenletes, ui. az összegfüggvény nem folytonos. ■

6.0.4. definíció. Ha
$$f_n(x):=a_n(x-c)^n \quad (x\in\mathbb{R}),$$
akkor a $\sum(f_n)$ függvénysort hatványsornak nevezzük.

6.0.4. megjegyzések.

1. Hatványsor konvergenciahalmaza mindig intervallum.
2. Ha valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén

$$KH(\sum(a_n(x-c)^n)) = I \qquad \text{és} \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (x \in I),$$

akkor a

$$\sum_{n=0} \left(na_n(x-c)^{n-1}\right), \quad \text{ill. a} \quad \sum_{n=0} \left(\frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}\right)$$

hatványsornak is az I intervallum a konvergenciahalmaza és

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = f'(x), \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} = F(x) - F(c),$$

ahol $F' = f$.

6.0.5. feladat. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciahalmazát és összegfüggvényét!

1) $\sum_{n=1} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$, 2) $\sum_{n=0} ((n+1)(n+2)x^n) \quad (x \in \mathbb{R})$,

3) $\sum_{n=1} \left((-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. A

$$\sum_{n=1} \left(x^{2n-2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sor konvergenciahalmaza: $(-1,1)$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Ha $|x| > 1$, akkor az eredeti sor divergens, ui. ha konvergens volna valamely $(-a,a)$ $(a > 1)$ intervallumon, akkor a derivált sor is konvergens volna ugyanezen az intervallumon. Az $x = -1$ és az $x = 1$ helyeken a sor triviálisan divergens, így konvergenciahalmaza $(-1,1)$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (x \in (-1,1)).$$

2. A

$$\sum_{n=0} \left(x^{n+2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sor konvergenciahalmaza: $(-1,1)$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} =: f(x) \qquad (x \in (-1,1)).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (x \in (-1,1)).$$

3. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^2)^{n-1} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in (-1,1)),$$

ezért bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x -\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{arctg}\,(x)$$

Az $x = -1$ ill. az $x = 1$ pontokban divergens harmonikus sort kapunk. ■

2016.06.15.

7. fejezet

Fourier-sorok

7.0.1. definíció. Ha $p > 0$ és

$$f \in \mathfrak{R}_{2p}/\mathfrak{C}_{2p} := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; g \in \mathfrak{R}[0,2p]/\mathfrak{C}[0,2p]; \; g \; 2p\text{-periodikus}\},$$

akkor az

$$a_n(f) := \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,\mathrm{d}x, \quad b_n(f) := \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

számok az f függvény (trigonometrikus) **Fourier-együtthatói**, és

$$S_n^f(x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k(f)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

az f (trigonometrikus) **Fourier-sor**ának n-edik részletösszege ($n \in \mathbb{N}_0$).

7.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathcal{R}_{2p}$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_c^{c+2p} f = \int_0^{2p} f.$$

7.0.0. megjegyzés. Legyen $p > 0$, ill. $f \in \mathfrak{R}[-p,p]$. Ekkor, ha

– f páratlan, úgy $\displaystyle\int_{-p}^{p} f = 0$;

– f páros, úgy $\displaystyle\int_{-p}^{p} f = 2\int_0^p f$.

Ezért

$$\boxed{\text{páros} \quad f \quad \text{esetében} \quad b_n(f) = 0, \quad \text{ill. páratlan} \quad f\text{-re} \quad a_n(f) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)}\,.$$

7.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{R}_{2p} \cap \mathfrak{C}[a]$ és $S_n^f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ konverens, akkor

$$\lim(S_n^f(a)) = f(a).$$

7.0.0. megjegyzés. Ha $f \in \mathfrak{R}_{2p} \cap \mathfrak{D}_{\pm}[a]$, akkor

$$\lim(S_n^f(a)) = f(a).$$

7.0.1. feladat. Írjuk fel annak az $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := |x| \qquad (|x| \leq \pi)$$

teljesül!

Útm.

– $b_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui. f páros;

– $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi^2}{2} = \pi$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \\ &= \begin{cases} 0 & (n = 2k,\ k \in \mathbb{N}), \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{(2k-1)}-1}{(2k-1)^2} = \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2} & (n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}). \end{cases} \end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Megjegyzés. A nyilvánvaló

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség (és az egyenletes konvergenciára vonatkozó Weierstraß-kritérium alapján) a fenti Fourier sor egyenletesen konvergens, $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, következésképpen

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} \qquad (|x| \leq \pi).$$

Így, ha $x = 0$, akkor

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2},$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \blacksquare$$

7.0.2. feladat. Írjuk fel annak a 2π-szerint periodikus f függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := x \qquad (|x| < \pi) \quad \text{és} \quad f(\pi) = 0$$

teljesül!

Útm.

- $a_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui. f páratlan;
- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right\} = \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Megjegyzés. Világos, hogy f deriválható az

$$A := \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

halmaz minden pontjában, így minden $a \in A$ esetén $\lim(S_n^f(a)) = f(a)$. A Fourier-sor azonban az

$$x_k := (2k+1)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontban is konvergens: $\lim(S_n^f(x_k)) = f(x_k)$, ui.

$$f(x_k) = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin(nx_k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Következésképpen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így, ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Mivel

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (n = 2k,\ 0 < k \in \mathbb{N}), \\ \underbrace{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)}_{\sin(k\pi)\cos(\pi/2)-\cos(k\pi)\sin(\pi/2)=-(-1)^k=(-1)^k} & (n = 2k-1,\ 0 < k \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ahonnan

$$(-1)^{2k-1+1}(-1)^{k+1} = (-1)^{3k+1} = (-1)^{k+1}$$

miatt

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1}, \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

7.0.3. feladat. Írjuk fel annak a 2π-szerint periodikus f függvénynek a Fourier-sorát, amelyre

$$f(x) := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (-\pi \leq x < \pi)$$

teljesül!

Útm. Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$, és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx =} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \boxed{\frac{1}{\pi}}\left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \boxed{\frac{1}{2n^2}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx}\right\}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = -\frac{2(-1)^n}{n\pi},$$

azaz

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

Így az f függvény Fourier-sora:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}\left(\frac{n(-1)^n}{1-4n^2}\sin(nx)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7.0.4. feladat. Fejtsük Fourier-sorba az alábbi $f\in\mathfrak{C}_{2\pi}$ függvényt!

1) $f(x):=\begin{cases} x/2 & (x\in[0,\pi]),\\ (2\pi-x)/2 & (x\in[\pi,2\pi]);\end{cases}$ 2) $f(x):=\begin{cases} x^2/2 & (x\in[0,\pi]),\\ \left((x-2\pi)^2\right)/2 & (x\in[\pi,2\pi]).\end{cases}$

Útm.

1. Mivel
$$f(x)=\frac{1}{2}|x|\quad(x\in[-\pi,\pi]),\qquad f(x+2\pi)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$
ezért f Fourier együtthatói az alábbi módon számolhatók:
   - $b_n(f)=0$ $(n\in\mathbb{N})$, hiszen f páros függvény,
   - ha $n=0$, akkor
$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$
ill. $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$a_n(f)\;=\;\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\pi}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{0+\left[\frac{\cos(nx)}{n^2\pi}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

   Ezért
$$S_n^f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}\qquad(x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$
f Fourier-sora egyenletesen konvergens, így a sor előállítja f-et.

2. Mivel
$$f(x)=\frac{x^2}{2}\quad(x\in[-\pi,\pi]),\qquad f(x+2\pi)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$
ezért f Fourier együtthatói az alábbi módon számolhatók:
   - $b_n(f)=0$ $(n\in\mathbb{N})$, hiszen f páros függvény,
   - ha $n=0$, akkor
$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3},$$
ill. $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$a_n(f)\;=\;\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{0+\left[\frac{x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\right\}=$$
$$=\;\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi(-1)^n}{n^2}-\left[\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

Ezért

$$S_n^f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

f Fourier-sora egyenletesen konvergens, így a sor előállítja f-et. ■

7.0.5. feladat. Adott $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén számítsuk ki a

$$g(x) := f(x+t) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény Fourier-együtthatóit!

Útm.

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_t^{2\pi+t} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f = a_0(f).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi+t} f(y)\cos(n(y-t))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(n(y-t))\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left\{\cos(ny)\cos(nt) + \sin(ny)\sin(nt)\right\}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\cos(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(ny)\,\mathrm{d}y + \frac{\sin(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin(nt)\,\mathrm{d}y = \\
&= a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt).
\end{aligned}$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$b_n(g) = b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyzések.

1. A folytonosságot az integrálban való helyettesítésnél használtuk ki.
2. $\begin{bmatrix} a_n(g) \\ b_n(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -\sin(nt) & \cos(nt) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{bmatrix}$ (nt "szöggel" való forgatás).

7.0.1. házi feladat. Legyen $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$. Mit állíthatunk f, ill. g Fourier-együtthatóiról, ha

1. $f(x+\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, ill. $f(x+\pi) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $f(-x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, ill. $f(-x) = -g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$?

7.0.1. emlékeztető. Legyen

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

1. (φ_n) egyenletesen korlátos, pontosabban

$$|\varphi_n(x)| \leq 1 + \pi \qquad (x \in \mathbb{R},\ 0 < n \in \mathbb{N});$$

2. bármely $[\alpha, \beta] \subset (0{,}2\pi)$ kompakt intervallum esetén

$$\varphi_n \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \varphi \qquad (n \to \infty),$$

ahol

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & (x \in (0{,}2\pi)), \\[2ex] 0 & (x \in \{0{,}2\pi\}). \end{cases}$$

7.0.6. feladat. Legyen $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, és igazoljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

egyenlőséget!

Útm.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(f)}{k} &= \lim \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x \right) = \lim \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi_n \right) = \frac{1}{\pi} \lim \left(\int_0^{2\pi} f\varphi_n \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\pi - x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az

$$f(x) := \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0{,}2\pi]), \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre alkalmazva az előbbi feladatot azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cdot \frac{\pi - x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(x - \pi)^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

2016.06.15.

7.0.7. feladat. Legyen $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, és igazoljuk hogy a

$$\sum \left(\frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} \right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvénysor egyenletesen konvergens és összegfüggvényére

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)(\pi - x)\,\mathrm{d}x \qquad (t \in \mathbb{R})$$

teljesül!

Útm. Legyen

$$g(x) := f(x+t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor bármely $t \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} \right| &\leq \frac{|b_n(f)| \cdot |\cos(nt)| + |a_n(f)| \cdot |\sin(nt)|}{n} \leq \\ &\leq \frac{|b_n(f)| + |a_n(f)|}{n}, \end{aligned}$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n(f)| + |a_n(f)|}{n} < +\infty$$

és a Weiertraß-kritérium felhasználásával az egyenletes konvergencia bizonyított. Továbbá bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\sin(nt)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x+t)\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

7.0.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{R}_{2\pi}$, akkor a

$$\left(\int_0^x S_n^f(t)\,\mathrm{d}t \right) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

sor egyenletesen konvergens!

Útm.

$$\begin{aligned} \int_0^x S_n^f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{a_0(f)x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) \frac{\sin(kx)}{k} - b_k(f) \frac{\cos(kx)}{k} \right) = \\ &= \frac{a_0(f)x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(f)\sin(kx) - b_k(f)\cos(kx)}{k} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.0.2. emlékeztető.

1. Ha $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ és $\left(S_n^f(x)\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenletesen konvergens, akkor $\lim \left(S_n^f\right) = f$, azaz ha $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ olyan függvény, amelynek trigonometrikus Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor a Fourier-sor összege maga az f függvény.
2. Ha $f \in \mathfrak{C}_{2\pi} \cap \mathfrak{C}^2$, akkor
$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$
azaz f-et Fourier-sora „előállítja" (f „Fourier-sorba fejthető").

7.0.9. feladat. Számítsuk ki az
$$f := |\sin|$$
függvény Fourier-sorát, majd mutassuk meg, hogy
$$|S_n^f(x) - f(x)| \le \frac{2}{\pi n} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$
teljesül!

Útm. Mivel f páros, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n(f) = 0$. Világos, hogy
$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin = \frac{2}{\pi}[-\cos]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{4}{\pi},$$
$$\begin{aligned} a_1(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin| \cos = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\cos - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin\cos = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$
A további együtthatók kiszámításához felhasználjuk a tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén fennálló
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$
egyenlőséget. Ha $2 \le n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{2}\,\mathrm{d}x = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_{\pi}^{2\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_{\pi}^{2\pi} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(n+1)}\left\{\cos((n+1)\pi) - \cos(0) - \cos((n+1)2\pi) + \cos((n+1)\pi)\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi(n-1)}\left\{\cos((n-1)\pi) - \cos(0) - \cos((n-1)2\pi) + \cos((n-1)\pi)\right\} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(n+1)}\left\{2 - (-1)^{n+1} - 2\right\} + \frac{1}{2\pi(n-1)}\left\{2(-1)^{n-1} - 2\right\} = \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi}\left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \cdot \frac{2}{n^2 - 1}.
\end{aligned}
$$

Így

$$
S_n^f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^2 - 1}\cos(kx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2 - 1}\cos(2lx) \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).
$$

Mivel

$$
\left|S_n^f(x)\right| \le \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2 - 1}|\cos(2lx)| \le \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R},\ 2 \le n \in \mathbb{N}),
$$

ezért a Weierstraß-kritérium következnényeként a f Fourier-sora egyenletesen konvergens, ui.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2 - 1}\cos(2lx)\right| &\le \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{|\cos(2lx)|}{4l^2 - 1} \le \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2 - 1} = \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l+1)(2l-1)} = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l-1}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) \longrightarrow \frac{4}{\pi} \quad (n \to \infty) \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Az előző tétel miatt így

$$
\lim\left(S_n(f,x)\right) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{azaz} \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).
$$

Tehát, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$|S_n^f(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4l^2-1}\cos(2lx) - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2lx)}{4l^2-1}\right| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{|\cos(2lx)|}{4l^2-1} \leq$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{1}{4l^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1} \leq \frac{2}{n\pi}. \quad \blacksquare$$

7.0.10. feladat. Írjuk fel az alábbi (2π-periodikus) f függvény Fourier-sorát!

$$1)\; f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in (-\pi,0]), \\ \\ \pi & (x \in (0,\pi]), \end{cases} \qquad\qquad 2)\; f(x) := x \quad (-\pi < x \leq \pi).$$

Konvergens-e a szóban forgó Fourier-sor?

Útm.

1. Világos, hogy

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\pi\,\mathrm{d}x\right\} = \pi.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\pi\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0,$$

ill.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\pi\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-\pi\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos(n\pi)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Így

$$S_n^f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{l=0}^{n}\frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} \qquad (x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}).$$

Konvergenciavizsgálat a $[0,2\pi]$ intervallumon:

– ha $x \in \{0,\pi,2\pi\}$, akkor

$$S_{2n+2}^f(x) = S_{2n+1}^f(x) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

– ha $x \in (0,\pi)$, akkor $2x \in (0,2\pi)$, így

$$\frac{\pi}{2} + 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} = \frac{\pi}{2} + 2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k)x)}{2k}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\left\{\frac{\pi-x}{2} - \frac{\pi-2x}{4}\right\} = \ldots = \pi;$$

– ha $x \in (\pi{,}2\pi)$, akkor $2x \in (2\pi{,}4\pi)$, így

$$\frac{\pi}{2} - 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2l+1)x)}{2l+1} = \frac{\pi}{2} - 2\left\{\frac{\pi - x}{2} - \frac{3\pi - 2x}{4}\right\} = \ldots = 0.$$

Megjegyzés. Látható, hogy ha $f \notin \mathfrak{C}[x]$, akkor $\lim\left(S_n^f(x)\right) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

2. Mivel f páratlan, ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n(f) = 0$, továbbá

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Így

$$S_n^f(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Konvergenciavizsgálat a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

– ha $x \in \{-\pi{,}0{,}\pi\}$, akkor $S_n^f(x) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ahonnan $\lim\left(S_n^f(x)\right) = 0$ következik;

– ha $x \in (0, \pi)$, akkor

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) = &= 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2l+1}}{2l}\sin(2lx) + 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2l}}{2l-1}\sin((2l-1)x) = \\ &= -2\cdot\frac{\pi - 2x}{4} + 2\cdot\left\{\frac{\pi - x}{2} - \frac{\pi - 2x}{4}\right\} = x; \end{aligned}$$

– ha $x \in (-\pi{,}0)$, akkor $x + 2\pi \in (\pi{,}2\pi)$, így

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\sin(kx) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k(x+2\pi)}{k}\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k(x+2\pi)}{k}\sin(kx) = \\ &= \frac{\pi - (x+2\pi)}{2} = \frac{-x-\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ezért

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2lx)}{2l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x-\pi}{2} = \frac{-2x-\pi}{4},$$

ill.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)x)}{2l-1} = \frac{-x-\pi}{2} - \frac{-2x-\pi}{4} = \frac{-\pi}{4},$$

azaz

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) = 2\cdot\left\{-\frac{-2x-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4}\right\} = x.$$

Megjegyzés. Látható, hogy ha $f \notin \mathfrak{C}[x]$, akkor

$$\lim\left(S_n^f(x)\right) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \quad \blacksquare$$

7.0.11. feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π-periodikus, páratlan függvény, amelyre

$$f(x) = x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x \quad (0 \le x < \pi).$$

Írjuk fel f Fourier-sorát, majd indokoljuk meg, hogy ez a Fourier-sor konvergál f-hez, továbbá számítsuk ki a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

összeget!

Útm.

Mivel f páratlan, ezért minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $a_n(f) = 0$ és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\sin(nx)\,dx = \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)\cos(nx)\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(6x - 6\pi)\sin(nx)\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi n^3}\left[(6x - 6\pi)\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi} 6\cos(nx)\,dx = \frac{12}{n^3}.
\end{aligned}$$

Így f Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{k^3}\sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}_{2\pi} \cap \mathfrak{C}^2$, ezért

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

ami a nyilvánvaló

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^3}\sin(kx)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{12}{k^3}\sin(kx)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^3} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség (ill. az egyenletes konvergenciára vonatkozó Weiertraß-kritérium) felhasználásával is jól látható. Következésképpen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^3}\sin(kx) = x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^3}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \pi^3\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1\right),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{12(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{3\pi^3}{8},$$

amiből

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

következik. ■

7.0.3. emlékeztető.

1. Ha $f \in \mathfrak{R}[-p,p]$, akkor fennál az

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

   Parseval-egyenlőség.

2. Ha $f \in \mathfrak{C}[-p,p]$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f)) < +\infty$, akkor

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty)$$

   teljesül.

7.0.12. feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π-periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Írjuk fel f Fourier-sorát, majd indokoljuk meg, hogy ez a Fourier-sor konvergál f-hez, továbbá számítsuk ki a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

összeget!

Útm. Mivel f páros függvény, ezért $b_n(f) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Világos, hogy

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}(0-0) - \frac{2}{\pi n}\left\{\left[x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left\{[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi n^2}[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - 0 = \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(-n\pi)) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Így f Fourier-sorának n-edik részletösszege:

$$S_n^f(x) = \frac{2\pi^2}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(kx) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(kx) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} < +\infty \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért a Weierstraß-kritérium látható, hogy

$$S_n^f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

Felhasználva a Parseval-egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\frac{4\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5},$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \cdot \left\{ \frac{2\pi^4}{5} - \frac{4\pi^4}{18} \right\} = \frac{1}{16} \cdot \frac{36\pi^4 - 20\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{90}$$

következik. ∎

2016.06.15.

A függelék

Jelölések jegyzéke

$:=$	definiáló egyenlőség
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{N}$	$:= \mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} : \ x > 0\}$, a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$, a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$
$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény ($\mathcal{D}_f = A$)
$f \in A \to B$	azoknak az f függvényeknek a halmaza, amelyekre $\mathcal{D}_f \subset A$, $\mathcal{R}_f \subset B$
$f\|_H$	az f függvénynek a H halmazra való leszűkítése
$f[H]$	a H halmaz f függvény szerinti képe
$f^{-1}[H]$	a H halmaz f függvény szerinti ősképe
$f \circ g$	az f (külső) és a g (belső) függvény összetett vagy közvetett függvénye
$\mathbb{E}_n$	$(n \times n)$-es egységmátrix

Görög betűk

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ, ϱ	ró
B	β	béta	K	$\kappa, \varkappa$	kappa	Σ	σ, ς	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε, ϵ	epszilon	N	ν	nű	Φ	ϕ, φ	fí
Z	ζ	(d)zéta	Ξ	ξ	kszí	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszí
Θ	θ, ϑ	théta	Π	π, ϖ	pí	Ω	ω	ómega
						$\digamma$		digamma

Gót betűk

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	a	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	h	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	o	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	v (fau)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	b	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	i	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	p	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	w (vé)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	c	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	j (jot,jé)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	q	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	x
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	d	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	k	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	r	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	y (üpszilon)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	e	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	l	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	s (esz)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	z (cet)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	f	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	m	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	t			
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	g	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	n	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	u			

2016.06.15.

B függelék

Útmutató a gyakorló feladatok megoldásához

B.1. Előismeretek

A 1.2.1. gyakorló feladat.

1. Az
$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
mátrix esetén a p_M függény a következő:
$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-2)\cdot\{(-2-z)\cdot(2-z)+3\} - 1\cdot\{3\cdot(2-z)-3\} + 1\cdot\{3-(2+z)\} = \\ &= (z-2)(z^2-1)+2z-2 = (z-2)(z-1)(z+1)+2(z-1) = \\ &= (z-1)(z^2-z) = z(z-1)^2 \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$
Így a 0, ill. az 1 számra
$$p_M(0)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(1)=0.$$

2. Az
$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén a p_M függény a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= (z-1)\cdot\{(1-z)\cdot(2-z)-1\}+1\cdot\{(-1)\cdot(2-z)+1\} = \\ &= (z-1)(z^2-3z+1)+z-1=(z-1)(z^2-3z+2)= \\ &= (z-1)(z-1)(z-2)=(z-1)^2(z-2) \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Így az 1, ill. a 2 számra

$$p_M(1)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(2)=0.$$

3. Az

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén a p_M függény (a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel) a következő:

$$\begin{aligned} p_M(z) &:= 1\cdot\{0-3(1-z)\}+0+(z-1)\cdot\{(1-z)^2+1\} = \\ &= (z-1)(z^2-2z+5) = \\ &= (z-1)(z-1-2\imath)(z-1+2\imath) \qquad (z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Így az 1, $1+2\imath$, ill. a $1-2\imath$ számra

$$p_M(1)=0, \qquad p_M(1+2\imath)=0, \qquad \text{ill.} \qquad p_M(1-2\imath)=0. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 1.4.1. gyakorló feladat.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

10.

11.

12.

vissza a feladathoz

Az 1.5.1. gyakorló feladat.

1.

2.

3. Mivel

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (-(1+e^y)\sin(x), e^y\cos(x) - e^y - ye^y) \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) \in \{(2k\pi,0), ((2k+1)\pi,-2):\ k\in\mathbb{Z}\},$$

továbbá

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -(1+e^y)\cos(x) & -e^y\sin(x) \\ -e^y\sin(x) & e^y\cos(x) - 2e^y - ye^y \end{bmatrix} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és

$$H_f(2k\pi,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad H_f((2k+1)\pi,-2) = \begin{bmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{bmatrix},$$

ezért f-nek a $(2k\pi,0)$ pontokban lokális maximuma van, a $((2k+1)\pi,-2)$ pontokban pedig nincsen lokális szélsőértéke ($k\in\mathbb{Z}$).

4. Némi számolással látható, hogy bármely $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \left(2x - 2x(x^2+y^2), 2y - 2y(x^2+y^2)\right) e^{-(x^2+y^2)} = \\ &= 2\left(x(1-(x^2+y^2)), y(1-(x^2+y^2))\right) e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

és

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) \in \left\{(0,0), \left\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2:\ \|\mathbf{r}\| = 1\right\}\right\},$$

továbbá tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{H_f(x,y)}{e^{-(x^2+y^2)}} &= \begin{bmatrix} 2 - 10x^2 + 4x^4 + 4x^2y^2 - 2y^2 & 4xy^3 - 8xy + 4x^3y \\ 4xy^3 - 8xy + 4x^3y & 2 - 10y^2 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 2y^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4x^2(x^2+y^2) - 12x^2 + 2 & 4xy(x^2+y^2) - 8xy \\ 4xy(x^2+y^2) - 8xy & 4y^2(x^2+y^2) - 12y^2 + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel

$$H_f(0{,}0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ezért f-nek a $(0{,}0)$ pontokban lokális maximuma van. Ez egyébként abból is következik, hogy $f(0{,}0) = 0$, míg $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \neq (0{,}0)$ esetén $f(x,y) > 0$. Mivel a

$$g(t) := te^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$g'(t) \equiv (1-t)e^{-t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 1$$

és

$$g''(t) = (-1+t-1)e^{-t} = (t-2)e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért $g''(1) = -\frac{1}{e} < 0$ következtében g-nek 1-ben lokális maximuma van. Ez azt jelenti, hogy f-nek az

$$\left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\mathbf{r}\| = 1\right\}$$

halmaz pontjaiban lokális maximuma van.

5.

6.

vissza a feladathoz

B.2. Feltételes szélsőérték

B.3. Differenciálegyenletek

A 5.2.1. gyakorló feladat.

1. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y \left(2xy^2 + e^{-x^2}\right) \equiv 4xy \not\equiv 2xe^{-x^2}\sin(y) \equiv \partial_x \left(2y - e^{-x^2}\sin(y)\right).$$

Mivel

$$\frac{\partial_2 g(x,y) - \partial_1 h(x,y)}{h(x,y)} = \frac{4xy - 2xe^{-x^2}\sin(y)}{2y - e^{-x^2}\sin(y)} = 2x =: m(x),$$

ezért pl.

$$M(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

esetén a

$$\mu(x,y) := e^{M(x)} = e^{x^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény multiplikátor: az

$$(2xy^2e^{x^2}+1)\,\mathrm{d}x+(2ye^{x^2}-\sin(y))\,\mathrm{d}y=0$$

egyenlet egzakt. Ha a $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényre

$$\operatorname{grad}P(x,y)=\left(2xy^2e^{x^2}+1,2ye^{x^2}-\sin(y)\right)\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

akkor $\partial_1 P(x,y)\equiv 2xy^2e^{x^2}+1$, azaz

$$P(x,y)=y^2e^{x^2}+x+k(y)\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény. Mivel tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$2ye^{x^2}-\sin(y)=\partial_2P(x,y)=2ye^{x^2}+k'(y),$$

ezért pl. a

$$k(y)=\cos(y)\qquad(y\in\mathbb{R})$$

választás megfelelő. Ha tehát a φ függvény megoldása az egzakt egyenletnek, akkor van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy minden $x\in\mathcal{D}_\varphi$ esetén

$$\varphi^2(x)e^{x^2}+x+\cos(\varphi(x))=c.$$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. Az egyenlet nem egzakt, hiszen

$$\partial_y(2x^3y^2-y)\equiv 4x^3y-1\not\equiv 4xy^3-1\equiv\partial_x(2x^2y^3-x).$$

Mivel

$$\frac{\partial_y(2x^3y^2-y)-\partial_x(2x^2y^3-x)}{y(2x^2y^3-x)-x(2x^3y^2-y)}=\frac{4x^3y-1-4xy^3+1}{2x^2y^4-xy-2x^4y^2+xy}=\frac{-2}{xy}=:m(xy),$$

ezért pl.

$$M(x):=\ln(1/x^2)\qquad(x>0)$$

esetén a

$$\mu(x,y):=e^{M(xy)}=\frac{1}{x^2y^2}\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^2:xy>0)$$

függvény multiplikátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy – a tengelyeket kivéve – μ egész $\mathbb{R}^2$-en is multiplikátor. ■

vissza a feladathoz

A 5.3.1. gyakorló feladat.

1. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 0, \qquad g(x) := 2x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := y+1 \quad (y \in J := (-1, +\infty))$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatot kell megoldani, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \quad g \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}), \quad h \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 2t \, \mathrm{d}t = x^2 \quad (x \in I), \qquad \int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_0^u \frac{1}{s+1} \, \mathrm{d}s = \ln(u+1) \quad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \quad \text{ill.} \quad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat φ megoldására

$$x^2 = \ln(\varphi(x) + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = e^{x^2} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x^2 < +\infty \right\} = \mathbb{R}.$$

2. A

$$\tau := 0, \quad \xi := 1, \qquad g(x) := x \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(y) := 1-2y \quad (y \in J := (1/2, +\infty))$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatra jutunk, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J \qquad \text{és} \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x t \, \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \qquad (x \in I)$$

és

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u \frac{1}{1-2s} \, \mathrm{d}s = -\frac{\ln(2u-1)}{2} \qquad (u \in J),$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldására

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{\ln(2\varphi(x) - 1)}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1 + e^{-x^2}}{2} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < \frac{x^2}{2} < +\infty \right\} = \mathbb{R}.$$

3. A

$$\tau := 2, \quad \xi := 2\sqrt{3},$$

ill.

$$g(x) := -\frac{1}{2x\sqrt{2x-x^2}} \quad (x \in I := (0,2)), \qquad h(y) := 4 + y^2 \quad (y \in J := \mathbb{R})$$

választással olyan szeparábilis kezdetiérték-feladatra jutunk, ahol

$$(\tau, \xi) \in I \times J \qquad \text{és} \qquad h(y) \neq 0 \quad (y \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_1^x \frac{-1}{2t\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}} \frac{-1}{\frac{4}{u^2+1}\cdot\frac{2u}{u^2+1}} \cdot \frac{-4u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_1^{\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} - \frac{1}{2} \qquad (x \in I)$$

(vö. 3. Euler-féle helyettesítés) és

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_{2\sqrt{3}}^u \frac{1}{4+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\pi}{6} \qquad (u \in J),$$

és

$$\inf_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u\in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12},$$

ezért a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldására

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\varphi(x)}{2}\right) - \frac{\pi}{6} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$\varphi(x) = 2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}: \; -\frac{5\pi}{12} < \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{12}\right\} = \left(\frac{72}{35+49\pi^2}, \frac{72}{35+\pi^2}\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 5.3.2. gyakorló feladat.

1. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = (2x + 2\varphi(x) - 1)^2 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(0) = 1,$$

továbbá

$$\psi(x) := 2x + 2\varphi(x) - 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = 2 + 2z^2(x) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(0) = 0 + 2 - 1 = 1$$

(autonóm, ill. szeparábilis) kezdetiérték-feladatnak. A $\tau := 0$, $\xi := 1$, ill.

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(z) := 2 + 2z^2 \quad (z \in J := \mathbb{R})$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \qquad h(z) \neq 0 \quad (z \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = x \qquad (x \in I),$$

$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_1^u \frac{1}{2 + 2w^2} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\,(u) - \mathrm{arctg}\,(1)\right) \qquad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{8}, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8},$$

továbbá

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \ -\infty < \int_\tau^x g < +\infty\right\} = \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \mathrm{tg}\,\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\,\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - 2x\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

következik.

2.

3.

4.

5.

vissza a feladathoz

A 5.3.3. gyakorló feladat.

1. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = \sin^2(x - \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(0) = 0,$$

továbbá

$$\psi(x) := x - \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = 1 - \sin^2(z(x)) = \cos^2(z(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(0) = 0 - 0 = 0$$

(autonóm, ill. szeparábilis) kezdetiérték-feladatnak. A $\tau := 0$, $\xi := 0$, ill.

$$g(x) := 1 \quad (x \in I := \mathbb{R}), \qquad h(z) := \cos^2(z) \quad \left(z \in J := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

választással

$$(\tau, \xi) \in I \times J, \qquad g, h \in \mathfrak{C}: \qquad h(z) \neq 0 \quad (z \in J).$$

Mivel

$$\int_\tau^x g = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \quad (x \in I), \qquad \int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_0^u \frac{1}{\cos^2(w)}\,\mathrm{d}w = \mathrm{tg}\,(u) \quad (u \in J)$$

és

$$\inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} = +\infty,$$

továbbá

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ -\infty < \int_\tau^x g < +\infty\right\} = \mathbb{R},$$

ezért

$$\psi(x) = \mathrm{arctg}\,(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x - \mathrm{arctg}\,(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik.

2. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi^3(x) - x^3}{x\varphi^2(x)} = \frac{\varphi(x)}{x} + \frac{x^2}{\varphi(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(1) = 1,$$

továbbá

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = -\frac{1}{xz^2(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(1) = 1$$

szeparábilis kezdetiérték-feladatnak. Mivel

$$\int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = -\ln(x) \quad (x > 0), \qquad \int_1^u w^2 \,\mathrm{d}w = \frac{u^3-1}{3} \quad (u > 0)$$

és

$$\inf_{u>0} \int_1^u w^2 \,\mathrm{d}w = -\frac{1}{3}, \qquad \sup_{u>0} \int_1^u w^2 \,\mathrm{d}w = +\infty$$

továbbá

$$\left\{x > 0 : \ -\frac{1}{3} < \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t < +\infty\right\} = \left(0, \sqrt[3]{e}\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \sqrt[3]{1 - 3\ln(x)} \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt[3]{e}\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\ln(x)} \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt[3]{e}\right)\right)$$

következik.

3. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, azaz

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{\varphi^2(x)}{x^2 + x\varphi(x)} = 1 + \frac{\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^2}{1 + \frac{\varphi(x)}{x}} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \qquad \text{és} \qquad \varphi(1) = 0,$$

továbbá

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor ψ megoldása a

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{z^2(x)}{1 + z(x)} - z(x)\right) = \ldots = \frac{1}{x(1 + z(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_y), \qquad z(1) = 0$$

szeparábilis kezdetiérték-feladatnak. Mivel

$$\int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln(x) \quad (x > 0), \qquad \int_0^u (1 + w) \,\mathrm{d}w = u + \frac{u^2}{2} \quad (u > -1)$$

és

$$\inf_{u>-1} \int_0^u (1 + w) \,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}, \qquad \sup_{u>-1} \int_0^u (1 + w) \,\mathrm{d}w = +\infty$$

továbbá

$$\left\{x > 0 : \ -\frac{1}{2} < \int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t < +\infty\right\} = \left(1/\sqrt{e}, +\infty\right),$$

ezért

$$\psi(x) = \sqrt{1 + 2\ln(x)} - 1 \qquad \left(x \in \left(1/\sqrt{e}, +\infty\right)\right),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = x\sqrt{1 + 2\ln(x)} - x \qquad \left(x \in \left(1/\sqrt{e}, +\infty\right)\right)$$

következik. ■

vissza a feladathoz

A 5.3.4. gyakorló feladat.

Ha

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0,$$

akkor alkalmas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számokkal

$$a_1 = \lambda a_2 \quad \text{és} \quad b_1 = \lambda b_2 \qquad \text{vagy} \qquad a_2 = \mu a_1 \quad \text{és} \quad b_2 = \mu b_1.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a_1x + b_1y(x) + c_1}{a_2x + b_2y(x) + c_2}\right) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ha

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

akkor

vissza a feladathoz

A 5.4.1. gyakorló feladat.

1.
2.
3.
4.

vissza a feladathoz

A 5.4.2. gyakorló feladat.

1.
2.
3.
4.

5. φ pontosan akkor a kezdetiérték-feladat teljes megoldása, ha bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left(1 + \int_0^x \sin(t)\cos(t)\exp\left(-\int_0^t -\cos(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = e^{-\sin(x)}\left\{1 + \int_0^x \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right\} = \\
&= e^{-\sin(x)}\left\{1 + \left[\sin(t)e^{\sin(t)}\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right\} = \\
&= e^{-\sin(x)}\left\{1 + \sin(x)e^{\sin(x)} - \left[e^{\sin(t)}\right]_0^x\right\} = 2e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1.
\end{aligned}$$

6. Ha $x > 0$, akkor olyan

$$\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt kell meghatároznunk, amelyre

$$\psi'(x) = \frac{1}{x}\psi(x) + x \qquad (x > 0).$$

Így bármely $x > 0$ esetén (vö. (5.4.4) formula)

$$\psi(x) = \left\{2 + \int_1^x s\exp\left(-\int_1^s \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\}\exp\left(\int_1^x \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right) = \{2 + x - 1\}\cdot x = x + x^2.$$

Behelyettesítéssel látható, hogy a

$$\varphi(x) := x + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a kezdetiérték-feladat megoldása.

7. φ pontosan akkor a kezdetiérték-feladat teljes megoldása, ha bármely $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left\{1 + \int_0^x \exp\left(-\int_0^s 3\mathrm{tg}\,(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s\right\} \cdot \exp\left(\int_0^x 3\mathrm{tg}\,(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \left\{1 + \int_0^x \exp\left([\ln(\cos(u)]_0^s\right)\,\mathrm{d}s\right\} \cdot \exp\left([-3\ln(\cos(s)]_0^x\right) = \\
&= \left\{1 + \int_0^x \cos^3(s)\,\mathrm{d}s\right\} \cdot \frac{1}{\cos^3(x)} = \\
&= \left\{1 + \int_0^x \cos(s)[1 - \sin^2(s)]\,\mathrm{d}s\right\} \cdot \frac{1}{\cos^3(x)} = \\
&= \left\{1 + \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\right\} \cdot \frac{1}{\cos^3(x)}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 5.4.3. gyakorló feladat.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := \frac{2x}{1+x^2}, \quad b(x) := (1+x^2)^2 \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.

1. **módszer.**

1. lépés.. A homogén egyenlet egy megoldása a $\varphi_H := \exp \circ \alpha$ függvény, ahol

$$\alpha'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\varphi_H(x) = \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = 1 + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. A $\dfrac{b}{\varphi_H}$ tetszőleges m primitív függvényére

$$m \in \int (1+x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{x\in\mathbb{R}}.$$

3. lépés.. Így a differenciálegyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto c\left(1+x^2\right) + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \cdot \left(1+x^2\right) : \; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. **módszer.**

1. lépés.. Tegyük fel, hogy az egyenlet φ megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mu'(x) \cdot \nu(x) + \mu(x) \cdot \nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\mu(x) \cdot \nu(x) = (1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\nu(x)\right) + \left(\mu'(x)\nu(x) - (1+x^2)^2\right) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\nu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\nu(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \mu'(x)\nu(x) - (1+x^2)^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ezért, ha

$$\nu(x) := \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = 1+x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\mu'(x) = 1+x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x) := x + \frac{x^3}{3} + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelelő, azaz a differenciálegyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \mu(x)\nu(x) = (1+x^2)^2\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right) : \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. A $0 \neq 1+x^2$ számmal osztva, mjad az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad A(x) := \frac{4x}{1+x^2}, \quad b(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

választással lineáris differenciálegyenletet kapunk.

1. **módszer.**

1. lépés.. A homogén egyenlet egy megoldása a $\varphi_H := \exp\circ\alpha$ függvény, ahol

$$\alpha'(x) = \frac{4x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\varphi_H(x) = \exp\left(2\cdot\ln(1+x^2)\right) = \left(1+x^2\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. A $\dfrac{b}{\varphi_H}$ tetszőleges m primitív függvényére

$$m \in \int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]_{x\in\mathbb{R}}.$$

3. lépés.. Így tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az inhomogén differenciálegyenlet megoldása tehát a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (c+m(x))\varphi_H(x) = \left(c - \frac{1}{4(1+x^2)^2}\right)\cdot\left(1+x^2\right)^2 = \\ &= c\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

függvény.

4. lépés.. Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy $c = \frac{1}{4}$, azaz a kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\boxed{\varphi(x)} = \frac{1}{4}\left((1+x^2)^2 - 1\right) = \boxed{\frac{1}{4}\left(2x^2 + x^4\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

2. **módszer**:

Az integrálos képletből kifejezzük a megoldást:

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \left(0 + \int_0^x h(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)dt\right)\cdot\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) = \\
&= \left(\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\exp\left(-2\ln(1+t^2)\right)\,dt\right)\cdot\exp\left(2\ln(1+x^2)\right) = \\
&= \left(\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^3}\,dt\right)\cdot(1+x^2)^2 = \\
&= \left[\frac{-1}{4(1+t^2)^2}\right]_0^x\cdot(1+x^2)^2 = \boxed{\frac{(1+x^2)^2-1}{4}} \qquad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

3. **módszer**:

1. lépés.. Tegyük fel, hogy az egyenlet φ megoldása

$$\varphi = \mu \cdot \nu$$

alakú, ahol $\mu, \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mu'(x)\nu(x) + \mu(x)\nu'(x) = \frac{4x}{1+x^2}\cdot\mu(x)\nu(x) + \frac{x}{1+x^2},$$

ill.

$$\mu(x)\left(\nu'(x) - \frac{4x}{1+x^2}\cdot\nu(x)\right) + \mu'(x)\nu(x) - \frac{x}{1+x^2} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\nu'(x) - \frac{4x}{1+x^2}\cdot\nu(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \mu'(x)\nu(x) - \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.. Ezért, ha

$$\nu(x) := \exp\left(2\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\mu'(x) = \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\mu(x) := -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelelő, azaz

$$\varphi(x) := \mu(x)\nu(x) = -(1+x^2)^2 \frac{1}{4(1+x^2)^2} + c(1+x^2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a differenciálegyenlet megoldása.

3. lépés.. Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy $c = \frac{1}{4}$, azaz a kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\boxed{\varphi(x) \;=\; -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1+x^2)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény. ■

vissza a feladathoz

A 5.5.1. gyakorló feladat.

1. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{1}{x}, \qquad b(x) := -1 \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := 2$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^{-1}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = \frac{z(x)}{x} + 1 \qquad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(\ln(x)) = x \qquad (x \in J),$$

$$m'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{így} \qquad m(x) = \ln(x) \quad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = (c + \ln(x))x \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \frac{1}{(c+\ln(x))x} \qquad (x \in (0{,}1/e^c))$$

függvény.

2. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := 1, \qquad b(x) := x \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := -1$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^2$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = 2z(x) + 2x \quad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = e^{2x} \quad (x \in J), \qquad m'(x) = 2xe^{-2x},$$

így

$$m(x) = -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = \left(c - xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right)e^{2x} \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{2ce^{2x} - 2x - 1}{2}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

3. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{1}{x}, \qquad b(x) := \frac{\ln(x)}{x} \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := -3$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^4$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = \frac{-4z(x)}{x} + \frac{4\ln(x)}{x} \qquad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-4\ln(x)) = \frac{1}{x^4} \quad (x \in J), \qquad m'(x) = 4x^3\ln(x),$$

így

$$m(x) = x^4\ln(x) - \frac{x^4}{4} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = \left(\frac{c}{x^4} + \ln(x) - \frac{1}{4}\right) \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt[4]{\frac{c}{x^4} + \ln(x) - \frac{1}{4}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

4. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := \mathbb{R}, \qquad a(x) := x, \qquad b(x) := x^3 \quad (x \in I), \qquad \text{ill. az} \qquad \alpha := 3$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -2xz(x) - 2x^3 \qquad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-x^2) \quad (x \in J), \qquad m'(x) = -2x^3 e^{x^2} = -x^2(2x)e^{x^2},$$

így

$$m(x) = e^{x^2}(1 - x^2) \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = ce^{-x^2} + 1 - x^2 \qquad (x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{1}{ce^{-x^2} + 1 - x^2}} \qquad (x \in J)$$

függvény.

5. Az

$$I := \mathbb{R}, \quad a(x) := -1, \quad b(x) := -1 \quad (x \in I) \quad \text{ill.} \quad \alpha := -1$$

választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy valamely $J \subset I$ intervallum esetén $\varphi : I \to (0, +\infty)$ a differenciálegyenlet megoldása és legyen $\psi := \varphi^2$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -2z(x) - 2 \quad (x \in J)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása.

$$\psi_H(x) = \exp(-2x) \qquad \text{és} \qquad m'(x) = -2e^{-2x} \qquad (x \in J).$$

Ekkor tehát

$$\psi(x) = ce^{2x} - 1 \qquad (c \in \mathbb{R},\ x \in J),$$

ezért az eredeti egyenlenek megoldása a

$$\varphi(x) := \sqrt{ce^{2x} - 1} \qquad \left(0 < c \in \mathbb{R},\ x \in \left(0, \ln\left(\sqrt{c}\right)\right)\right)$$

függvény.

6. Az egyenletet átrendezve, ill. az

$$I := (0, +\infty), \qquad a(x) := -\frac{2}{x}, \qquad b(x) := -\frac{1}{x^2} \qquad (x \in I),$$

ill. az $\alpha := 3$ választással Bernoulli-féle egyenletet kapunk. Tegyük fel, hogy φ a kezdetiérték-feladat megoldása, és legyen $\psi := \varphi^{-2}$. Ekkor ψ a

$$z'(x) = -\frac{4}{x}z(x) + \frac{2}{x^2} \quad (x \in J \subset I), \qquad z(1) = 1$$

lineáris kezdetiérték-feladat megoldása. Így tehát

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \left(1 + \int_1^x \left[\left(\frac{2}{t^2}\right)\exp\left(-\int_1^t -\frac{4}{s}\,ds\right)\right]\,dt\right)\exp\left(\int_1^x -\frac{4}{t}\,dt\right) = \\
&= \left(1 + \int_1^x \frac{2}{t^6}\,\mathrm{d}t\right)x^4 = \left(1 - \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{5}\right)x^4\frac{7x^5-2}{5x} \quad (x \in J),
\end{aligned}$$

ezért

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{5x}{7x^5-2}} \qquad \left(x \in \left(\sqrt[5]{\frac{2}{7}}, +\infty\right)\right).$$

vissza a feladathoz

A 5.5.2. gyakorló feladat.

Az a tény, hogy a $\varphi : I \to (0, +\infty)$ függvény a Bernoulli-féle differenciálegyenlet megoldása, azt jelenti, hogy

$$\varphi'(x) = a(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \cdot \varphi^\alpha(x) \qquad (x \in I).$$

Mindkét oldalt $[\varphi(x)]^{-\alpha}$-val beszorozva azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} = a(x) \cdot \varphi(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} + b(x) \cdot \varphi^\alpha(x)[\varphi(x)]^{-\alpha} \qquad (x \in I).$$

Így az

$$u(x) := [\varphi(x)]^{1-\alpha} \qquad (x \in I)$$

jelöléssel a beszorzott egyenlet az

$$\frac{1}{1-\alpha}u'(x) = a(x)u(x) + b(x) \qquad (x \in I)$$

pontosabban az

$$u'(x) + (\alpha - 1)a(x)u(x) = (1-\alpha)b(x) \qquad (x \in I)$$

egyenlettel egyenértékű. ■

vissza a feladathoz

A 5.6.1. gyakorló feladat.

Világos, hogy

– mindketten megoldásai a homogén egyenletnek, ui. bármely $x > 0$ esetén

$$\boldsymbol{\mu}_1'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x & 2x \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1(x), \quad \boldsymbol{\mu}_2'(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x & 2x \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_2(x).$$

lineárisan függetlenek:

$$\det \begin{bmatrix} x & x^3 \\ 0 & x \end{bmatrix}_{x=1} = 1. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 5.6.2. gyakorló feladat.

(1). Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} 3e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^2 - 4z - 5 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := -1, \qquad \mu := 5.$$

A megfelelő sajátvektorok (pl.)

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ezek nyilván lineárisan függetlenek, így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ e^{5x} & -2e^{-x} \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{-5x} & e^{-5x} \\ e^{x} & -e^{x} \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az állandók variálásaként olyan differenciálható $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvényt keresünk, amelyre

$$\Phi\mathbf{g}' = \mathbf{b}.$$

Innen

$$\mathbf{g}'(x) = \Phi(x)^{-1} \cdot \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 2e^{-6x} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azaz (pl.)

$$\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} e^{-6x} \\ -3x \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Egy $\Phi\mathbf{g}$ partikuláris megoldás tehát a következő:

$$\Phi(x)\mathbf{g}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 - 3x \\ 1 + 6x \end{bmatrix} e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Így az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{R} \ni x \to \Phi(x) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \Phi(x)\mathbf{g}(x) : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Az

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

kezdeti feltételt figyelembe véve a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta - \frac{1}{3} &= 4 \\ \alpha - 2\beta - \frac{1}{3} &= -2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből nyerjük:

$$\alpha = \frac{7}{3}, \qquad \beta = 2.$$

Így a fenti kezdetiérték-feladat teljes megoldása a

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 7e^{5x} + (5 + 3x)e^{-x} \\ 7e^{5x} - (13 + 6x)e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

(2). Látható, hogy a fenti kezdetiérték-feladat a következő alakú:

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\xi},$$

ahol

$$M := \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}(x) := \begin{bmatrix} e^{x} \\ 2e^{x} \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az M mátrix sajátértékei a

$$p_M(z) := z^2 - 2z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda := 0, \qquad \mu := 2.$$

A megfelelő sajátvektorok (pl.)

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ezek nyilván lineárisan függetlenek, így egy alapmátrix, ill. inverze:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} 1 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ e^{-2x} & -e^{-2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így a

$$\Lambda(x,s) := \Phi(x) \cdot \Phi(s)^{-1} \qquad (x, s \in \mathbb{R})$$

ún. **Cauchy-mátrix**ra

$$\begin{aligned} \Lambda(x,s) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ e^{-2s} & -e^{-2s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 + 3e^{2x-2s} & 3 - 3e^{2x-2s} \\ -1 + e^{2x-2s} & 3 - e^{2x-2s} \end{bmatrix} \qquad (x, s \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahonnan a teljes megoldás

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(x) &= \Lambda(x,0)\boldsymbol{\xi} + \int_0^x \Lambda(x,s) \cdot \mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} -1 + 3e^{2x} & 3 - 3e^{2x} \\ -1 + e^{2x} & 3 - e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\qquad \left. + \int_0^x \begin{bmatrix} -1 + 3e^{2x-2s} & 3 - 3e^{2x-2s} \\ -1 + e^{2x-2s} & 3 - e^{2x-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 2e^s \end{bmatrix} \mathrm{d}s \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 - 3e^{2x} \\ 3 - e^{2x} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \begin{bmatrix} -e^s + 3e^{2x-s} + 6e^s - 6e^{2x-s} \\ -e^s + e^{2x-s} + 6e^s - 2e^{2x-s} \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \\ &= \begin{bmatrix} 4e^x - 1 - 3e^{2x} \\ 3e^x - 1 - e^{2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 5.7.1. gyakorló feladat.

1. lépés.. A homogén egyenlethez tartozó

$$p(z) := z^2 + 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\imath, -\imath$, így homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$\{\cos,\, \sin\}\,.$$

2. lépés.. Ha $I := (-\pi/2, \pi/2)$, akkor olyan differenciálható

$$\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^2$$

függvényt keresünk, amelyre

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} g_1' \\ g_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\sin' - \cos'\sin} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{tg} \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz

$$g_1 \in \int (-\mathrm{tg}\,) = \int \left(\frac{-\sin}{\cos}\right) = [\ln(\cos)], \qquad g_2 \in \int 1\,\mathrm{d}x = [x]_{x\in I}.$$

3. lépés.. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$\chi(x) := \cos(x)\ln(\cos(x)) + x\sin(x) \quad (x \in (\pi/2, \pi/2)),$$

ill. az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza

$$\mathcal{M} = \{I \ni x \mapsto c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

4. lépés.. Ha a φ függvény megoldása a kezdetiérték-feladatnak, akkor egyrészt $\varphi \in \in \mathcal{M}$, másrészt

$$\varphi(0) = 0 = \varphi'(0),$$

azaz

$$\varphi(x) = \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) \qquad (x \in (-\pi/2, \pi/2)). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 5.7.2. gyakorló feladat.

1. – a karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_\pm = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow -1, \\ \searrow -4; \end{matrix}$

– az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{-4x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor a

$$3 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad -9 = \varphi'(0) = -\alpha - 4\beta$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^{-x} + 2e^{-4x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. – a karakterisztikus egyenlet (egyetlen valós) gyöke: $\lambda = -2$;

– az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$1 = \varphi(0) = \alpha, \qquad \text{ill. a} \qquad 3 = \varphi'(0) = -2\alpha + \beta$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 5,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^{-2x} + 5xe^{-2x} = (1 + 5x)e^{-2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. – a karakterisztikus egyenletnek csak komplex gyökei vannak:

$$\lambda_- := -1 - \sqrt{3}\imath, \qquad \lambda_+ := -1 + \sqrt{3}\imath;$$

– az egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x} \cos(\sqrt{3}x) + \beta e^{x} \sin(\sqrt{3}x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$1 = \varphi(0) = \alpha, \qquad \text{ill. a} \qquad 2 = \varphi'(0) = \alpha + \sqrt{3}\beta$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1/\sqrt{3},$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = e^{x} \cos(\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{x} \sin(\sqrt{3}x) = \frac{e^{x}}{3}\left[3\cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)\right] \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei: $\lambda_- = 1$, $\lambda_+ = 2$;
   – a homogén egyenlet megoldáshalmaza:
   $$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni xt \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$
   – az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a
   $$\chi(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
   alakban keressük:
   $$\chi'(x) = xe^x \left\{\beta\gamma(2+x) + \alpha x(3+x)\right\} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
   $$\chi''(x) = e^x \left\{\beta\gamma(2 + x(4+x)) + \alpha x(6 + x(6+x))\right\} \qquad (x \in \mathbb{R});$$
   az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy
   $$\chi(x) = -\frac{x}{3}\left(x^2 + 3x + 6\right)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).(???)$$
   – az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:
   $$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} - \frac{x}{3}\left(x^2 + 3x + 6\right)e^x : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$
   – ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az
   $$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) =$$
   kezdeti feltételből
   $$\alpha =, \qquad \beta =,$$
   így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:
   $$\varphi(x) = \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének egyetlen valós gyöke van: $\lambda = -1$;
   – a homogén egyenlet megoldáshalmaza:
   $$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$
   – az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a
   $$\chi(t) = A \in \mathbb{R} \qquad (t \in \mathbb{R})$$
   alakban keressük:
   $$\chi'(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \chi''(x) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R});$$
   az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy
   $$\chi(x) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} + 2 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) =, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) =$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

6. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének egyetlen valós gyöke van: $\lambda = 2$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) = Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = 2Ax + B \qquad \text{és} \qquad \chi''(x) = 2A \qquad (x \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \frac{7}{8}, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) = 2\alpha + \beta + \frac{1}{2}$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = -\frac{7}{8}, \qquad \beta = \frac{5}{4},$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \frac{-7e^{2x} + 10xe^{2x} + 2x^2 + 4x + 7}{8} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei: $\lambda_- = -1$, $\lambda_+ = 1$;

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^x : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásáta

$$\chi(x) = Axe^{-x} \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük:

$$\chi'(x) = Ae^{-x} - Axe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\chi''(x) = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = -\frac{x}{2}e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^x - \frac{x}{2}e^{-x} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$0 = \varphi(0) = \alpha + \beta, \qquad \text{ill. a} \qquad 0 = \varphi'(0) = -\alpha + \beta - \frac{1}{2}$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \quad (x \in \mathbb{R}).$$

8. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_- = 1 - 2\imath, \qquad \lambda_+ = 1 + 2\imath;$$

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x \cos(2x) + \beta e^x \sin(2x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) := e^x(Ax^2 + Bx + C) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. A χ függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\chi(x) = e^x\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + e^{x}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$\frac{5}{8} = \varphi(0) =, \qquad \text{ill. a} \qquad -\frac{11}{8} = \varphi'(0) =$$

kezdeti feltételből

$$\alpha =, \qquad \beta =,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \alpha e^{x}\cos(2x) + \beta e^{x}\sin(2x) + e^{x}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

9. – a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_- = 1 - \imath, \qquad \lambda_+ = 1 + \imath;$$

– a homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x}\cos(x) + \beta e^{x}\sin(x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

– az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$\chi(x) := Ae^{2x} + B \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. A χ függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $A = 2$, $B = 1$, azaz

$$\chi(x) = 2e^{2x} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

– az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{IH} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{x}\sin(x) + \beta e^{x}\cos(x) + 2e^{2x} + 1 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

– ha $\varphi \in \mathcal{M}_H$, akkor az

$$5 = \varphi(0) = \beta + 2 + 1, \qquad \text{ill. a} \qquad 15 = \varphi'(0) = \alpha + 4$$

kezdeti feltételből

$$\alpha = 11, \qquad \beta = 2,$$

így a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$\varphi(x) = 3e^{x}\cos(x) + 1e^{x}\sin(x) + 2e^{2x} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10.

11.

vissza a feladathoz

A 5.8.1. gyakorló feladat.

1. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 - 5z^2 + 4z = (z^2 - 1)(z^2 - 4) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 2, \qquad \lambda_4 = -2.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma e^{2x} + \delta e^{-2x} :\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - z^2 + z + 3 = (z+1)[(z-1)^2 + 2] \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\imath, \qquad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^x \cos(\sqrt{2}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{2}x) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^3 - 27 = (z-3)(z^2 + 3z + 9) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\imath, \qquad \lambda_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\imath.$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\mu_1(x) + \beta\mu_2(x) + \gamma\mu_3(x) :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &:= e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_2(x) &:= e^{-3x/2}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\mu_3(x) &:= e^{-3x/2}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

4. – A karakterisztikus polinom:

$$p(z) := z^4 + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath), \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath), \qquad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\imath), \qquad \lambda_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\imath).$$

– Ezért a megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha\mu_1(x) + \beta\mu_2(x) + \gamma\mu_3(x) + \delta\mu_4(x) : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &:= e^{\sqrt{2}x/2} \cos\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\mu_2(x) &:= e^{\sqrt{2}x/2} \sin\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\mu_3(x) &:= e^{-\sqrt{2}x/2} \cos\left(\sqrt{2}x/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \\
\mu_4(x) &:= e^{-\sqrt{2}t/2} \sin\left(\sqrt{2}t/2\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

2016.06.15.

Irodalomjegyzék

[1] VEZETÉKNÉV, M. N.: *Maci Laci kalandjai*, A magyar irodalom remekei c. újság **76**(3) (1969), 289–292.

[2] VEZETÉKNÉV, M. N2.: *Jó könyv*, 2009 (https://www.xxx.pdf).

[3] IPAFAI, P.: *Fapipa*, Kiadó, 2005.

[4] KOVÁCS, S.:*Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

Tárgymutató

2016.06.15.

Dr. Kovács Sándor, adjunktus,
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Numerikus Analízis Tanszék,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
alex@numanal.inf.elte.hu,
alex@ludens.elte.hu
http://numanal.inf.elte.hu/~alex