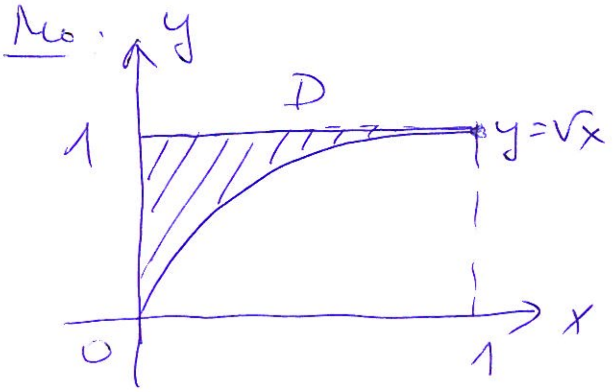
Modellek és algoritmusok B1.

1. ZH 2017. 10. 21.

① $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+1}\,dx\,dy = ?$ D: az $y=\sqrt{x}$, $x=0$ és $y=1$ egyenletű görbék által határolt zárt síkrész az első síknegyedben.

Mo.:



D normáltartomány és az

$f(x,y) := \frac{y}{x^2+1}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

fv. folytonos $\Longrightarrow$

$$\iint\limits_D f = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{x^2+1}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\cdot\left(\int_{\sqrt{x}}^1 y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{4}\cdot\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi - 2\ln 2}{8}}}.$$

---

② $f(x,y) := \begin{pmatrix} y\cdot\sin x \\ x\cdot\cos y \end{pmatrix}$ $\quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$. Bizonyítsa be, hogy f lokálisan invertálható a $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ pontban, és számítsa ki a lokális inverz deriváltját az $f\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ helyen.

Ma. $f\left(\frac{\pi}{6},0\right) = \begin{pmatrix} 0 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6}\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos x & \sin x \\ \cos y & -x\sin y \end{pmatrix} \qquad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mivel a fenti parciális deriváltak léteznek és folytonosak

$\Rightarrow \quad f \in C^1.$

$$\det f'\left(\frac{\pi}{6},0\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

$\Longrightarrow \quad \exists\, k\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ és $\tilde{k}\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ úgy:

Inv. fv. tétel

$$f\Big|_{k\left(\frac{\pi}{6},0\right)} : k\left(\frac{\pi}{6},0\right) \to \tilde{k}\left(0,\frac{\pi}{6}\right) \text{ bijekció}$$

(így invertálható is) és

$$\left(f\Big|_{k\left(\frac{\pi}{6},0\right)}^{-1}\right)'\left(0,\frac{\pi}{6}\right) = \left[f'\left(\frac{\pi}{6},0\right)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3.) $$\begin{cases} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 4 \\ (x+1)\cdot y^2 + \cos(\pi z) = z \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy (y,z) "kifejezhető" x implicit fv-ként az 1 pont alkalmas környezetében és $\varphi'(1) = ?$

tudva, hogy $\varphi(1) = (1,1)$.

Mo:

Legyen $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 4 \\ (x+1)y^2 + \cos(\pi z) - z \end{pmatrix}$ $\quad (x, y, z > 0)$

2. változó: (y, z)

1. változó: x.

$$f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2+1+1-4 \\ 2\cdot 1^2 + \cos\pi - 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\ \checkmark$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ (y,z)}}{\partial_2} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{y^2} + \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x} \\ 2(x+1)y & -\sin(\pi z)\cdot\pi - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \top & \top \\ \partial_y f & \partial_z f \end{array}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ x}}{\partial_1} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} - \frac{z}{x^2} \\ y^2 \end{pmatrix}$$

A fenti 6 db. parciális derivált létezik és folytonos $D_f = (0,+\infty)^3$ - halmazon $\Longrightarrow$ $\boxed{f \in C^1!}$

$$\det \partial_2 f(1,1,1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ $\exists\ K(1)$ és $\tilde{K}(1,1)$, $\varphi : K(1) \to \tilde{K}(1,1)$

Imp. fv. tétel. imp. fv. úgy hogy: $\varphi(1) = (1,1)$,

$\forall x \in K(1) : f(x, \varphi(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ azaz

$f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{\varphi_1(x)} + \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} + \dfrac{\varphi_2(x)}{x} - 4 = 0 \\ (x+1)\,\varphi_1^2(x) + \cos(\pi\, \varphi_2(x)) - \varphi_2(x) = 0, \end{cases}$$

továbbá $\varphi \in C^1$ és

$$\varphi'(1) = -\left[\partial_2 f(1, \varphi(1))\right]^{-1} \cdot \partial_1 f(1, \varphi(1)) =$$

$$= -\left[\partial_2 f(1,1,1)\right]^{-1} \cdot \partial_1 f(1,1,1) =$$

$$= -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}}}.$$

o

4
$$\begin{cases} f(x,y) := e^{xy} & ((x,y) \in (0,+\infty)^2) \\ g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 & (-\|-) \end{cases}$$

Határozzuk meg az f feltételes lokális szélsőérték-helyeit a $\{g=0\}$ feltétel mellett!

Mo: $F(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = e^{xy} + \lambda(x^2+y^2-1)$

$(x,y) \in (0;+\infty)^2$

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = y\, e^{xy} + 2\lambda x = 0 \\ \partial_2 F(x,y) = x \cdot e^{xy} + 2\lambda y = 0 \\ \{g=0\}: \quad x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$e^{xy}(y-x) + 2\lambda(x-y) = 0$$

$$(y-x)(e^{xy} - 2\lambda) = 0$$

$x = y$ $\Downarrow$

$x^2 + x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = -\frac{e^{1/2}}{2} \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = -\frac{e^{1/2}}{2} \end{cases}$

$e^{xy} = 2\lambda$ $\Downarrow$

$2\lambda y + 2\lambda x = 0 \quad | :2$

$\lambda(y+x) = 0$

$\lambda = 0$ $\Downarrow$ $y = 0$ $\Downarrow$ $\begin{cases} x = 0 & ↯ \\ x^2 = 1 & (!) \\ \text{kellene} \end{cases}$ ↯

$y = -x$

$2x^2 = 1$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases}$ ↯ $\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Tehát

$$\boxed{c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda = -\frac{\sqrt{e}}{2}}$$

- $g'(x,y) = (2x, 2y) \Rightarrow g'(c) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \neq (0,0)$
  $\Rightarrow g'(c)$ „lin. független"!

- $F''(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} + 2\lambda & e^{xy} + yx \cdot e^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2 e^{xy} + 2\lambda \end{bmatrix}$

$(x, y > 0)$

$$\Rightarrow F''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- $g'(c)\,h = 0 \iff h_1 + h_2 = 0 \iff h = \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix}$

$(h_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

A <u>fenti h-kal</u>.

$$Q(h) = \langle F''(c) \cdot h, h \rangle = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} -4h_1 \\ 4h_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot (-8h_1) = -4\sqrt{e}\, h_1 < 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$$

c felt. lok. maximumhely

és itt $f(c) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.