Modellek és algoritmusok C mintazárthelyi dolgozat (2016. ősz)

Név: ....

NEPTUN-kód: ....

1. **Bizonyítsa be**, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre
$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{és} \qquad x^4\varphi^6(x) + x = 2x^2\varphi^4(x) \quad (x \in \mathbb{R} : \ |x-1| < \varepsilon),$$
majd **számítsa ki** $\varphi'(1)$-t!

2. Adott $a, b \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$ esetén **számítsa ki** az
$$f(x,y) := x^2 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$
függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, ha
$$g(x,y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \ !$$

3. **Határozza meg** a
$$\sum_{n=0} \left((t-3)^n\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$
függvénysor konvergenciahalmazát és összegfüggvényét, majd tetszőleges $x \in (2,4)$ esetén számítsa ki a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\right)$$
összeget!

4. **Adjon** példát olyan $c \in \mathbb{R}$ számra és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre
$$\varphi'(x) = \frac{e^{2\varphi(x)}}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, c)), \qquad \varphi(0) = 0$$
teljesül!

5. **Határozza meg** az összes olyan kétszer deriválható $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$\Phi''(x) + 4\Phi'(x) + 13\Phi(x) = 25e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 5$$

teljesül!

Modellek és algoritmusok C mintazárthelyi dolgozat feladatainak a megoldása

1. **Bizonyítsa be**, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{és} \qquad x^4\varphi^6(x) + x = 2x^2\varphi^4(x) \quad (x \in \mathbb{R}: \ |x-1| < \varepsilon),$$

majd **számítsa ki** $\varphi'(1)$-t!

Útm.

Ha

$$f(x,y) := x^4y^6 + x - 2x^2y^4 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}^1, \qquad f(1,1) = 0, \qquad \partial_y f(1,1) = 6 \cdot 1^4 \cdot 1^5 - 8 \cdot 1^2 \cdot 1^3 = -2 \neq 0,$$

így van olyan olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan differenciálható $\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x,\varphi(x)) = x^4\varphi^6(x) + x - 2x^2\varphi^4(x) = 0 \quad (|x-1| < \varepsilon);$$

$\varphi(1) = 1$ és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{4x^3\varphi^6(x) + 1 - 4x\varphi^4(x)}{6x^4\varphi^5(x) - 8x^2\varphi^3(x)} \quad (|x-1| < \varepsilon),$$

$\varphi'(1) = \dfrac{1}{2}$. $\blacksquare$

2. Adott $a, b \in \mathbb{R}$: $ab \neq 0$ esetén **számítsa ki** az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, ha

$$g(x,y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \ !$$

Útm.

Legyen

$$\mathcal{L}(x,y) := x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel olyan $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ pontban teljesül, amelyre $\operatorname{rang}(g'(x^*, y^*)) = \operatorname{rang}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1$ és

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_1\mathcal{L}(x^*, y^*) = 2x^* + \dfrac{\lambda}{a} = 0 & \text{(I.)} \\ \partial_2\mathcal{L}(x^*, y^*) = 2y^* + \dfrac{\lambda}{b} = 0 & \text{(II.)} \\ g(x^*, y^*) = \dfrac{x^*}{a} + \dfrac{y^*}{b} - 1 = 0 & \text{(III.)} \end{array}\right\}$$

(I.)-ből azt kapjuk, hogy $\lambda = -2ax^*$. Ezt (II.)-be helyettesítve

$$2y^* - \frac{2a}{b}x^*, \quad \text{azaz} \quad x^* = \frac{b}{a}y^*$$

adódik. Így (III.) miatt

$$\frac{b}{a^2}y^* + \frac{y^*}{b} = 1, \quad \text{azaz} \quad y^*\left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{b}\right) = 1,$$

ahonnan

$$x^* = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \qquad y^* = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

következik.

Most megvizsgáljuk, hogy teljesül-e (x^*, y^*)-ban a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel. Az

$$\mathcal{L}''(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix (feltételesen is) pozitív definit, így f-nek az (x^*, y^*) pontban a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma van. ■

3. **Határozza meg** a

$$\sum_{n=0} ((t-3)^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvénysor konvergenciahalmazát és összegfüggvényét, majd tetszőleges $x \in (2,4)$ esetén számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \right)$$

összeget!

Útm.

Világos, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} (t-3)^n \in \mathbb{R}$ pontosan akkor teljesül, ha $|t-3| < 1$, azaz $t \in (2,4)$. Mivel a

$$\varphi(x) := \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $\varphi'(x) = (x-3)^n$ $(x \in \mathbb{R})$, ezért a $\sum_{n=0} \left(\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \right)$ sor is konvergens a $(2,4)$ halmazon. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t-3)^n = \frac{1}{1-(t-3)} = \frac{1}{4-t} \quad (t \in (2,4))$$

miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} = \int_3^x \frac{1}{4-t}\, dt = [-\ln(4-t)]_3^x = -\ln(4-x) \qquad (x \in (2,4)). \quad \blacksquare$$

4. **Adjon** példát olyan $c \in \mathbb{R}$ számra és olyan differenciálható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre

$$\varphi'(x) = \frac{e^{2\varphi(x)}}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, c)), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül!

Útm.

A $\tau := 0$, $\xi := 0$, $I := \mathbb{R}$, $J := \mathbb{R}$, ill.

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in I), \qquad h(y) := e^{2y} \quad (y \in J)$$

választással $(\tau, \xi) \in I \times J$, $g, h \in \mathfrak{C}$: $0 \notin \mathcal{R}_h$.

Így tehát, ha φ az

$$y' = g(h \circ y), \quad y(\tau) = \xi$$

(szeparábilis) kezdetiérték-feladat megoldása, akkor

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{1}{e^{2s}}\,ds = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{azaz} \qquad 1 - 2\,\mathrm{arctg}(x) = e^{-2\varphi(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\,\mathrm{arctg}(x)}}\right) \quad (x \in (-\infty, c)),$$

ahol $c := \mathrm{tg}(1/2)$. ■

5. **Határozza meg** az összes olyan kétszer deriválható $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$\Phi''(x) + 4\Phi'(x) + 13\Phi(x) = 25e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 5$$

teljesül!

Útm.

- A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + 4\lambda + 13$.
- A karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda = -2 \pm 3\imath$
- A homogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_H = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-2x}\cos(3x) + \beta e^{-2x}\sin(3x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$\omega(x) = Ae^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Ezt az inhomogén egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $A = 1$. Tehát

$$\omega(x) = e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- Az inhomogén egyenlet megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{IH}} = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha e^{-2x}\cos(3x) + \beta e^{-2x}\sin(3x) + e^{2x} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Az

$$1 = \Phi(0) = \alpha + 1 \qquad \text{ill. az} \qquad 5 = \Phi'(0) = -2\alpha + 3\beta + 2$$

feltételből

$$\alpha = 0 \quad \text{ill.} \quad \beta = 1,$$

így a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$\Phi(x) = e^{-2x}\sin(3x) + e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$