MODELLEK ÉS ALGORITMUSOK C gyakorlatok, 2017/2018 tavaszi félév

## $\boxed{\textbf{1. gyakorlat}}$ többszörös integrál

**1.** Legyen $f(x,y) := x^2y \quad (0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2)$. Számítsuk ki az $f$ integrálját a megadott téglalapon!

**2.** $\int\limits_H (x+y)\,dx\,dy$ =?, ahol $H$ az $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ egyenlőtlenségekkel megadott síkbeli tartomány.

**3.** $\int\limits_H xy^2\,dx\,dy$ =?, ahol $H$ az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.

**4.** $\int\limits_H \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ =?, ahol $H$ a koordinátasíkok és az $x+y+z=1$ egyenletű sík által határolt kompakt térrész.

## $\boxed{\textbf{2. gyakorlat}}$ többszörös integrál

**1.** i) $\int\limits_{1\le x^2+y^2\le 2} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ =? ii) $\int\limits_{x^2+y^2\le 4} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ =?

**2.** $\int\limits_H \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ =?, ahol $H$ az $x^2+y^2+z^2=4$ egyenletű felület által határolt gömb.

**3.** Számítsuk ki egy $R > 0$ sugarú félgömb térfogatát!

**4.** Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ görbék által határolt síktartomány tömegét és tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvény i) konstans; ii) egyenes arányos az $y$-tengelytől mért távolsággal!

## $\boxed{\textbf{3. gyakorlat}}$ többszörös integrál; inverz függvény

**1.** Számítsuk ki az $x^2+y^2 = 2z$ és a $z = 2$ felületek által határolt paraboloid térfogatát! Mennyi ennek a tömege, ha a sűrűségfüggvény egyenes arányos a $z$-tengelytől mért távolság négyzetével?

**2.** Legyen $f(x,y) = (\cos(y-x), xe^{xy})$. Igazoljuk, hogy $f$ invertálható a $(0,\pi/2)$ pont körül, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját az $f(0,\pi/2)$ pontban!

**3.** Legyen

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Invertálható-e a függvény (globálisan, illetve lokálisan)? Számoljuk ki a lokális inverz deriváltját az $f(0,\frac{\pi}{3})$ pontban! Számoljuk ki az inverzet explicit módon is, és ellenőrizzük így az előző deriváltat!

## $\boxed{\textbf{4. gyakorlat}}$ implicit függvény

**1.** Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+2xy-y^2 = 7$ egyenletből $y$ kifejezhető $x$ implicit függvényeként a $(2,1)$ pont egy környezetében! Határozzuk meg az implicit függvény deriváltját az $x = 2$ helyen!

**2.** Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $y \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\ln x + y(x) \exp\big(y^2(x)\big) = 1 \ \ (x > 0)!$$

Számítsuk ki $y'(e)$-t!

**3.** Kifejezhető-e $x_2, x_3$ az 1 körüli alkalmas környezetben $x_1$ implicit függvényeként az alábbi egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 x_3 &= 0 \\ 3x_1^3 - x_2 - 2x_3 &= 0\,? \end{aligned}$$

Ha igen, számítsuk ki a kapott implicit függvény deriváltját az 1-ben!

**4.** Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

egyenletrendszer által meghatározott $(x, y) \mapsto (u, v)$ implicit függvény Jacobi-mátrixát az $(1, 2)$ pontban!

|**5. gyakorlat**| feltételes szélsőérték

**1.** Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

**2.** Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$ körbe írható téglalapok közül a legnagyobb területűnek az oldalait!

**3.** Határozzuk meg az $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ függvény feltételes abszolút szélsőértékhelyeit az $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ feltételek mellett!

**4.** Határozzuk meg az $f(x, y) = x + 2y$ függvény abszolút szélsőértékeit a $2x^2 + y^2 = 4$ ellipszisen!

**5.** Az $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ gömbfelület mely pontjai vannak a legnagyobb (legkisebb) távolságra az

i) $(1, 5, -10)$ ; ii) $(1, 2, 2)$ ; iii) $(-2, 1, 0)$ ponttól?

|**6. gyakorlat**| szeparábilis differenciálegyenlet

**1.** Oldjuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenleteket!

i) $y'(x) = \dfrac{x^3}{(1 + y(x))^2} \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

ii) $y' = y + y^2$

**2.** Oldjuk meg az alábbi d.e.-ket szeparábilisra való visszavezetéssel!

i) $y'(x) = \cos\,(x + y(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(0) = \pi/2$

ii) $y'(x) = \sqrt{y(x) - 2x} \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

iii) $y'(x) = 2y(x) + x + 1 \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

iv) $y'(x) = -2\,(2x + 3y(x))^2 \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

**3.** Egy $m > 0$ tömegű rakétát $v_0 > 0$ kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Feltételezzük, hogy mozgás közben a rakétára csupán a nehézségi erő és a sebesség négyzetével egyenesen arányos fékező erő hat. Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

$\boxed{\textbf{7. gyakorlat}}$ konzultáció, elmaradt anyagok pótlása

$\boxed{\textbf{8. gyakorlat}}$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

**1.** Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

i) $y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = x^3 \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(1) = 1$

ii) $y'(x) \sin x - y(x) \cos x = -1 \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(\pi/2) = 1$

iii) $y'(x) + y(x) \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x} \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(\pi/2) = -4$

iv) $y'(x) + \dfrac{2 - 3x^2}{x^3} y(x) = 1 \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

**2.** Határozzuk meg a radioaktív bomlás felezési idejét, azaz azt az időt, amely alatt a kezdeti időpontban $m_0 > 0$ tömegű radioaktív anyag fele elbomlik! Feltesszük, hogy a bomlás sebessége minden pillanatban a még el nem bomlott anyag tömegével egyenesen arányos.

$\boxed{\textbf{9. gyakorlat}}$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer

**1.** Keressük meg az alábbi d.e.-rendszerek valós értékű megoldásait!

i) $\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + e^{2x} \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 6y_2(x) \end{aligned} \quad (x \in \mathcal{D}_y);$ ii) $\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 2y_2(x) + e^{x} \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + y_2(x) \end{aligned} \quad (x \in \mathcal{D}_y);$

iii) $\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2(x) + e^{2x} \end{aligned} \quad (x \in \mathcal{D}_y);$ iv) $\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$

$\boxed{\textbf{10. gyakorlat}}$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet

**1.** Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek valós értékű megoldásait!

$$\text{i) } y'' - y' - 6y = 0 \ ; \ \text{ii) } y'' - 8y' + 16y = 0 \ ; \ \text{iii) } 4y'' + 4y' + 37y = 0$$

**2.** Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek egy partikuláris megoldását!

$$\text{i) } y'' - 4y' + 3y = \exp^2 \ ; \quad \text{ii) } y'' - 3y' + 2y = \exp \ ; \ \text{iii) } y''(x) - y(x) = (2x+3)e^x$$

**3.** Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x} \quad (x \in \mathcal{D}_y); \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

$\boxed{\textbf{11. gyakorlat}}$ függvénysorozatok, függvénysorok

**1.** Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergencia-halmazát és határfüggvényét!

$$\text{i) } \sin^n \ (n \in \mathbf{N}^+) \ ; \ \text{ii) } \frac{1}{x^2 + n} \ (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}^+) \ ; \ \text{iii) } \frac{1}{1 + x^n} \ (-1 \neq x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}^+)$$

**2.** Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = x^n$ $(x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}^+)$ függvénysorozatot pontonkénti, illetve egyenletes konvergencia szempontjából!

**3.** Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergencia-halmazát és határfüggvényét! Egyenletes-e a konvergencia?

$$\text{i)}\ \frac{1}{n+x}\ (x > -1,\, n \in \mathbf{N}^+)\ \ ;\ \ \text{ii)}\ \frac{1}{1+nx}\ (x \geq 0,\, n \in \mathbf{N})$$

**4.** Vizsgáljuk meg a $\sum(x^n)$ $(x \in \mathbf{R})$ függvénysort pontonkénti, illetve egyenletes konvergencia szempontjából!

## $\overline{\underline{\textbf{12. gyakorlat}}}$ | Fourier-sorok

**1.** Írjuk fel az alábbi ($2\pi$-szerint periodikus) $f$ függvények Fourier-sorát, és vizsgáljuk azt meg pontonkénti konvergencia szempontjából!

$$\text{i)}\ f(x) := \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}\ \ ;\ \ \text{ii)}\ f(x) := x \quad (-\pi < x \leq \pi);$$

$$\text{iii)}\ f(x) := \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \quad (0 \leq x < 2\pi);\ \ ;\ \ \text{iv)}\ f(x) := \frac{\pi - x}{2} \quad (0 \leq x < 2\pi);$$

$$\text{v)}\ f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2} & (0 \leq x < \pi) \\ \frac{2\pi - x}{2} & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}\ \ ;\ \ \text{vi)}\ f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{2} & (0 \leq x < \pi) \\ \frac{(x-2\pi)^2}{2} & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}.$$

## $\overline{\underline{\textbf{13. gyakorlat}}}$ | konzultáció