Modellek és algoritmusok B, 1. zárthelyi gyakorló feladatsor III.

1. Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) := (\ln(y^2+\sqrt{1+x^2}); e^{\sqrt{1+x^2}-y^2})$, $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény lokálisan invertálható a $(\sqrt{3},\sqrt{2})$ pontban. Adja meg az inverz deriváltját az $f((\sqrt{3},\sqrt{2}))$ pontban. Adja meg explicit módon az inverz függvényt a fenti pont környezetében.

2. Bizonyítsa be, hogy az következő egyenletrendszerből (u,v) kifejezhető az (x,y) implicit függvényeként az $(1,0)$ pont valamely környezetében.

$$x\cdot \mathrm{tg} y = \frac{\sin u}{\sin v},$$
$$y\cdot \mathrm{arctg} x = u^2+\pi-2v.$$

Adja meg az implicit függvény deriváltját is itt.

3. Az $x-2y+z=0$ egyenletű sík mely pontja van legközelebb a $P(1,-1,0)$ ponthoz? A megoldáshoz használjuk a Lagrange féle multiplikátor módszert, a tanult első és másodrendű feltételeket.

4. Oldja meg a következő kezdetiérték-problémát :

$$(y'(x)+2)\cdot\cos^2 x = \sqrt{1-(y(x)+2x)^2},\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-\pi}{2},\quad (x\in D_y).$$