Modellek és algoritmusok B, 1. zárthelyi gyakorló feladatsor

1. Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) := (e^{x^2-y} \cdot (5-2x+y); \sqrt{x^2+y^2}) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény lokálisan invertálható az $(1,0)$ pontban és adja meg a lokális inverz deriváltját a $(3e,1)$ pontban.

2. Bizonyítsa be, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám és olyan deriválható $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre :

$$\varphi(-2) = 1, \text{ illetve } x^2 \cdot \varphi^3(x) + x^3 \cdot \varphi^2(x) = x \cdot \ln(\varphi(x)) - 4 \cdot \varphi(x), \quad \forall x \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon),$$

és számítsa ki $\varphi'(-2)$-t.

3. Határozza meg az $f(x,y) := x-y, \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény feltételes lokális szélsőértékeit a $g=0$ feltételre vonatkozóan, ha : $g(x,y) = x^2+y^2-1, \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

4. Oldja meg a következő kezdetiérték-problémát :

$$y'(x) = \frac{1+x^2}{y(x)}, \quad y(1) = 2, \quad (y \in D_y).$$