MODELLEK ÉS ALGORITMUSOK B gyakorlat

|**1. gyakorlat**| többszörös integrál

1. Legyen $f(x,y) := x^2y \quad (0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2)$. Számítsuk ki az f integrálját a megadott téglalapon (szukcesszív integrálás).
2. $\int_H x + y\,dx\,dy = ?$, ahol H az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott síkbeli tartomány: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1 - x$.
3. $\int_H xy^2\,dx\,dy = ?$, ahol H az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.
4. $\int_H \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = ?$, ahol H a koordinátasíkok és az $x + y + z = 1$ egyenletű sík által határolt kompakt térrész.

|**2. gyakorlat**| többszörös integrál, inverz függvény

1. i) $\int_{1 \le x^2+y^2 \le 2} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = ?$ ii) $\int_{x^2+y^2 \le 4} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = ?$
2. $\int_H \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = ?$, ahol H az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű felület által határolt gömb.
3. Legyen
$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$
Invertálható-e a függvény? Számoljuk is ki az inverz deriváltját az $f(1,1,1)$ -ben!

Házi feladatok:

1. $\int_H y^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = ?$, ahol H az origó körüli, 1 sugarú kompakt körlemez.
2. Határozzuk meg a következő improprius integrált: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Legyen ehhez $a > 0$, ekkor $\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{[0,a]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{A_a} \ldots + \int_{B_a} \ldots$, ahol A_a az $x^2+y^2 \le a^2$ $(0 \le x, y \le a)$ negyedkörlemez, $B_a := [0,a]^2 \setminus A$. Lássuk be, hogy $\int_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \to 0$, ill. $\int_{A_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \to \pi/4$ $(a \to +\infty)$.

|**3. gyakorlat**| inverz függvény, implicit függvény

1. Legyen
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$
Invertálható-e a függvény? Számoljuk is ki az inverz deriváltját az $f(0, \frac{\pi}{3})$ -ban! Számoljuk ki az inverzet explicit módon is (elosztjuk a két egyenletet egymással illetve négyzetreemelés után összeadjuk), és ellenőrizzük így az előző deriváltat.
2. Rövid elmélet: implicit függvény probléma, implicit függvény tétel, szemléltetés az $x^2 + y^2 = 1$ példáján, stb.

3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenletből y kifejezhető x implicit függvényeként a $(2,1)$ pont egy környezetében is és a $(2,3)$ pont egy környezetében is:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7.$$

Határozzuk meg mindkét függvény deriváltját az $x = 2$ helyen.

4. Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $y \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\ln x + y \exp\left(y^2\right) = -1 \quad (x > 0).$$

Számítsuk ki $y'(1/e)$-t.

5. Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $y \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan(y/x) = 0.$$

Számítsuk ki $y'(1)$-t.

| **4. gyakorlat** | implicit függvény

1. Rövid elmélet: implicit függvény tétel "többdimenziós" esetben

2. Kifejezhető-e x_2, x_3 az 1 körüli alkalmas környezetben x_1 implicit függvényeként az alábbi egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 x_3 &= 0 \\ 3x_1^3 - x_2 - 2x_3 &= 0? \end{aligned}$$

Ha igen, számítsuk ki a kapott implicit függvény deriváltját az 1-ben.

3. Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

egyenletrendszer által meghatározott $(x, y) \mapsto (u, v)$ implicit függvény *Jacobi-mátrixát* az $(1, 2)$ pontban.

4. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Mutassuk meg, hogy ebből x_1, x_2, x_4 kifejezhető x_3 implicit függvényeként a 0 körül. Kifejezhető-e x_1, x_2, x_3 az x_4 implicit függvényeként?

| **5. gyakorlat** | feltételes szélsőérték

1. Rövid elmélet: feltételes szélsőérték, Lagrange-multiplikátorok

2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$ körbe írható téglalapok közül a legnagyobb területűnek az oldalait.

3. Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

4. Határozzuk meg az $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ függvény feltételes abszolút szélsőértékhelyeit az $x > 0$, $y < 0$, $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ feltételek mellett.

5. Az $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ gömbfelület mely pontjai vannak a legnagyobb (legkisebb) távolságra az

i) $(1, 5, -10)$; ii) $(1, 2, 2)$; iii) $(-2, 1, 0)$ ponttól?

$\boxed{\textbf{6. gyakorlat}}$ szeparábilis differenciálegyenlet

1. Rövid elmélet: differenciálegyenlet, kezdetiérték-feladat fogalma, megoldása, szeparábilis d. e.

2. szeparábilis d. e.

i) $y'(x) = \dfrac{x^3}{(1 + y(x))^2} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$

ii) $y' = y + y^2$

3. Az $y' = f\,(ax + by + c)$ d. e. megoldása szeparábilisra való visszavezetéssel

i) $y'(x) = \cos\,(x + y(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(0) = \pi/2$

ii) $y'(x) = \sqrt{y(x) - 2x} \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$

iii) $y'(x) = 2y(x) + x + 1 \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

iv) $y'(x) = -2\,(2x + 3y(x))^2 \quad (x \in \mathcal{D}_y)$

$\boxed{\textbf{7. gyakorlat}}$ egzakt differenciálegyenlet

1. Az előző hétről elmaradt feladatok

2. Rövid elmélet: egzakt differenciálegyenlet

3. egzakt d. e.

i) $(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - 2y)\,dy = 0,\ \ y(1) = -1/2$

ii) $(2x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0,\ \ y(1) = 1$

iii) $3x^2(1 + \ln\,y)\,dx = (2y - x^3/y)\,dy,\ \ y(0) = 1$

$\boxed{\textbf{8. gyakorlat}}$ egzakt s egzaktta teheto differencialegyenlet

1. Az elozo hetrol elmaradt feladatok

2. Visszavezetés egzakt differenciálegyenletre (ii) es iii) lehet HF):

i) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0,\ \ y(-1) = 1/\sqrt{6};$

ii) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0;$

iii) $(6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0,\ \ y(1) = 1.$

$\boxed{\textbf{9. gyakorlat}}$ Linearis differencialegyenlet, esetleg: rendszer

1. Lineáris differenciálegyenletek: rovid elmelet

2.

i) $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = x^3 \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(1) = 1;$

ii) $y'(x)\sin x - y(x)\cos x = -1 \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(\pi/2) = 1;$

iii) $y'(x) + y(x)\operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x} \quad (x \in \mathcal{D}_y),\ y(\pi/2) = -4;$

iv) $y'(x) + \dfrac{2-3x^2}{x^3}y(x) = 1 \quad (x \in \mathcal{D}_y).$

$\boxed{\textbf{10. gyakorlat}}$ Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek (a valós értékű megoldásokat keressük):

$$\text{i)}\ \begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + e^{2x} \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 6y_2(x) \end{aligned} \quad (x \in \mathcal{D}_y); \qquad \text{ii)}\ \begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2, \quad y_2(0) = 1; \end{aligned}$$

$$\text{iii)}\ \begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2(x) + e^{2x} \end{aligned} \quad (x \in \mathcal{D}_y); \qquad \text{iv)}\ \begin{aligned} y_1' &= 3y_2 + 2y_3, \quad y_1(0) = 3 \\ y_2' &= y_1 + y_3, \quad y_2(0) = 0 \\ y_3' &= y_1 + y_2, \quad y_3(0) = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{11. gyakorlat}}$ Magasabbrendu differencialegyenlet

1. Rovid elmelet

2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek:

$$\text{i)}\ y'' - y' - 6y = 0 \ ; \ \text{ii)}\ y'' - 8y' + 16y = 0 \ ; \ \text{iii)}\ 4y'' + 4y' + 37y = 0.$$

3. Határozzunk meg olyan $y \in D^2$ függvényt, amelyre $y'' - 4y' + 3y = \exp^2$.

4. Adjuk meg az alábbi k.é.p.-k egy-egy megoldását:

$$\text{i)}\ y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x} \quad (x \in \mathcal{D}_y);\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$$

$$\text{ii)}\ y'' - 3y' + 2y = \exp;\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

$\boxed{\textbf{12. gyakorlat}}$ Fourier-sor

1. Rovid elmelet

2. Írjuk fel az alábbi (2π-szerint periodikus) f függvény *Fourier-sorát*:

$$\text{i)}\ f(x) := \begin{cases} 0 & (-\pi < x \le 0) \\ 1 & (0 < x \le \pi) \end{cases} \ ; \ \text{ii)}\ f(x) := x \quad (-\pi < x \le \pi);$$

$$\text{iii)}\ f(x) := x^2 \quad (-\pi < x \le \pi); \ ; \ \text{iv)}\ f(x) := \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi);$$

$$\text{v)}\ f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{2} & (0 \le x \le \pi) \\ \dfrac{2\pi - x}{2} & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases} \ ; \ \text{vi)}\ f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & (0 \le x \le \pi) \\ \dfrac{(x-2\pi)^2}{2} & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}.$$

Konvergens-e a szóban forgó *Fourier-sor*? Milyen nevezetes sorosszeghez jutunk konkret x-ek behelyettesitesevel?

|**13. gyakorlat**| Esetleges elmaradt anyagok potlasa, konzultacio