2. Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére. A hibaszámítás alapjai

---

B) Ismertesse az abszolút és relatív hiba, hibakorlát fogalmát. Mutassa be az alapműveletek hibakorlátaira vonatkozó állításokat, és igazolja a szorzásra VAGY osztásra vonatkozó összefüggéseket. Ez alapján mely műveletek elvégzése veszélyes az abszolút és relatív hibára nézve és miért?

<u>Definíció</u>: A: pontos érték, a: közelítő érték

$\Delta a = A - a$: közelítő érték (pontos) hibája

$|\Delta a|$: közelítő érték <u>abszolút hibája</u>

$\Delta_a \geq |\Delta a|$: közelítő érték egy <u>abszolút hibakorlátja</u>

$\delta a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$ (gyakorlatban): közelítő érték <u>relatív hibája</u>

$\delta_a \geq |\delta a| = \frac{|\Delta a|}{|a|}$: közelítő érték <u>relatív hibakorlátja</u>

<u>Következmény</u>: $\Delta a = a \cdot \delta a$

$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|}$

<u>Tétel</u>: Az alapműveletek hibakorlátai

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$$
$$\Delta_{a \cdot b} = |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a$$
$$\Delta_{\frac{a}{b}} = \frac{|a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a}{b^2} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|}\right)$$
$$\delta_{a \pm b} = \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|}$$
$$\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$$
$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$$

$\Longrightarrow$ problémás műveletek: kis számmal osztás, közeli számok kivonása

A szorzás hibája

$$\begin{aligned}\Delta(a \cdot b) &= A \cdot B - a \cdot b = A \cdot B - A \cdot b + A \cdot b - a \cdot b = \\ &= A(B - b) + b(A - a) = A \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a = \\ &= (a + \Delta a) \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \approx a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a\end{aligned}$$

($\Delta a \cdot \Delta b$ elhanyagolható)

$$|\Delta(a \cdot b)| \leq |a| \cdot |\Delta b| + |b| \cdot |\Delta a| \leq |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a = \Delta_{a \cdot b}$$

A relatív hiba

$$\delta(a \cdot b) = \frac{\Delta(a \cdot b)}{a \cdot b} \approx \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{a \cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \delta b + \delta a$$

$$|\delta(a \cdot b)| \leq |\delta a| + |\delta b| \leq \delta_a + \delta_b = \delta_{a \cdot b}$$

Megjegyzés: a kapott korlátok két esetben lehetnek nagyságrendileg nagyobbak, mint a kiindulási értékek hibái:

1. $\delta_{a \pm b}$ esetén, amikor közeli számokat vonunk ki egymásból.
2. $\Delta_{a/b}$ esetén, amikor kicsi számmal osztunk.

Ezeket az eseteket az algoritmusok implementálásakor el kell kerülni.

C) Igazolja a függvényérték hibakorlátaira vonatkozó tételeket és definiálja függvény adott pontbeli kondíciószámát.

Függvényérték hibája:

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)|\,\Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2,$$

ahol $M_2 = \max\{\,|f''(\xi)| \,:\, \xi \in k_{\Delta_a}(a)\,\}$.

Abszolút hibakorlát:

Biz.: a Taylor-formula felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(a) \cdot (A - a) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (A - a)^2,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$|\Delta f(a)| = |f'(a)| \cdot |\Delta a| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot |\Delta a|^2 \leq$$
$$\leq |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2 = \Delta_{f(a)},$$

$\square$

Relatív hibakorlát:

Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$.

Biz.: Ha Δ_a kicsi, akkor a 2. tételben szereplő eredményben a Δ_a^2-es tagot elhanyagolhatjuk, így felhasználva, hogy $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a$

$$|\delta f(a)| \approx \frac{|f'(a)| \cdot \Delta_a}{|f(a)|} = \frac{|a|\,\delta_a \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} = \frac{|a|\,|f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a.$$

$\square$

Az f függvény a-beli kondíciószáma: $\mathrm{c}(f, a) = \frac{|f'(a)||a|}{|f(a)|}$