Numerikus módszerek 1.

Első ZH –2015/16/1-es félév első zárthelyi dolgozat megoldásai

A jegyzetet *Bozsik József* gyakorlatvezető konzultációja alapján *Lanka Máté* készítette.
Konzultáció időpontja: 2016.10.20. 18:00.
A feladatsor: http://numanal.inf.elte.hu/~krebsz/zh1-2015-10-19.pdf

1. feladat: Gépi számok

M = (6, -5, 5)

a. Adjuk meg az 1 és az ¼ gépi számokat.
b. Adjuk meg a 0,05-nek megfelelő gépi számot.
c. Végezzük el (1+ ¼) + fl(0,05) összeadást.
d. Adjuk meg az abszolút hibaértékeket.

Megoldás:

a)

Az 1 biztos pozitív szám, tehát:

$$+[100000 \mid 1] = \frac{1}{2} * \ 2^{1} = 1$$

$$+[100000 \mid -1] = \frac{1}{2} * 2^{-1} = \frac{1}{4}$$

b)

	05	/*2 (Szorozzuk kettővel, az átvitelekre figyeljünk)
0	10	
0	20	
0	40	
0	80	Az első számjegynek 1-nek kell lennie, így ezeket
1	60	majd a karakterisztikában jelentetjük meg.
1	20	
0	40	
0	80	
1	60	
1	20	
0	40	A kerekítés szempontjából lényeges.

➔ .0000110011|0 a kettedespontot léptetni kell néggyel jobbra, így a karakterisztika -4 lesz
Mivel a | után 0 szerepel, ezért lefelé kerekítünk.

+ [110011 | -4]

Kerekítés miatt ellenőrizni kell a kapott gépi szám szomszédját. Mivel lefelé kerekítünk, ezért a felső szomszédot ellenőrizzük.

Ez a: + [110100 | -4]

Számoljuk ki, hogy melyik gépi szám milyen valós számot reprezentál!

$$+[110011 \mid -4] = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}) * 2^{-4} = \frac{32 + 16 + 2 + 1}{1024} = \frac{51}{1024}$$

$$+[110100 \mid -4] = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) * \ 2^{-4} = \frac{52}{1024}$$

$$\frac{51}{1024} < 0,05 = \frac{5}{100} < \frac{52}{1024} \qquad /* 1024 * 100$$

$$5100 < 5120 < 5200$$

Tehát a + [110011 | -4] van közelebb 0,05-höz.

(Hivatalosabban:) $\mathrm{fl}(0,05) = +[110011 \mid -4]$

c)

i) (1 + $^1/_4$)

Mivel a karakterisztikák nem egyformák, ezért egyeztetni kell őket.

MINDIG a nagyobb karakterisztikához igazítjuk a kisebbet.

+ [100000 | -1] -> 00.1000|00 ← A kettedespontot kettő hellyel balra helyezzük, így a karakterisztika értéke kettővel növekszik.

→ 001000

$$\begin{array}{r} 100000 \mid 1 \\ + \quad 001000 \mid 1 \\ \hline 101000 \mid 1 \end{array}$$

ii) (1 + $^1/_4$) + fl(0,005), ismét karakterisztika egyeztetés

+ [110011 | -4] → 00000.1|10000 ← A kettedespontot öt hellyel balra helyezük, így a karakterisztika értéke öttel növekszik. Kerekítenünk is kell!

→ 000010 | 1

Tehát:

$$\begin{array}{r} 101000 \mid 1 \\ + \quad 000010 \mid 1 \\ \hline 101010 \mid 1 \end{array}$$

Vagyis az összeadás végeredménye: **+ [101010 | 1]**

d)

i)

fl(0,05) abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl(0,05)} = {}^1/_2 * 2^{-6} * 2^{-4} = 2^{-11}$$

Megjegyzés: A *-6* a mantissza hosszát, a *-4* pedig a karakterisztikát jelenti.

ii)

+[101010 | 1] abszolút hiba korlátja (kevesebb írás miatt jelöljük *x*-szel)

$$\Delta_x = \frac{1}{2} * 2^{-6} * 2^1 = 2^{-6}$$

2. feladat: Gauss-elimináció

Oldjuk meg az A<u>x</u> = <u>b</u> lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix} \qquad \underline{b} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}$$

Megoldás:

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}$$

<u>1. lépés:</u> Második sorból levonjuk az első sor (- ½) -szeresét. Harmadik sort békén hagyjuk.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{matrix}$$

<u>2. lépés:</u> Harmadik sorból levonjuk a második sor ($\frac{-1}{5/2}$)-szeresét.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -12/5 \end{matrix}$$

Ezek után alulról felfelé eliminációval folytatjuk.

Először osztjuk a 3. sort a diagonális értékkel.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}$$

Ezek után a 2. sorból levonjuk az új 3. sort

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{matrix}$$

Osztunk 5/2-del a 2. sorban.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

Majd az 1. sorból levonjuk az új 2. sort.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

Végezetül az 1. sort elosztjuk 2-vel.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

Tehát: $x = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$

Megjegyzés: Sima lineáris egyenletrendszer is jó megoldásnak számít, akinek ez a fajta elimináció nincs ínyére.

3. feladat:

Megjegyzés: Ezt a feladatot beszéltük meg legutoljára, mert kapott pontok tekintetében ezzel kell a legtöbbet szenvedni. Kihagyása esetén is teljesíthető az ötös.

Készítsük el az LU felbontását a következő mátrixnak

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & 0 \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Ez egy tridiagonális mátrix.

Megoldás:

Mivel *A* tridiagonális, ezért L és U is az lesz.

Teljes indukcióval szeretnénk dolgozni, ezért megteszünk pár kezdő lépést, majd megsejtjük az eredményt.

<u>1. lépés:</u>

$$A = \begin{matrix} u_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & 0 \\ 0 & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & 0 \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \end{matrix}$$

2. sorból levonjuk a $\frac{-1}{u_1} * 1.$ sort.

$$A^{(1)} = \begin{matrix} u_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$L^{(1)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$l_2 = \frac{-1}{u_1} = -\frac{1}{2} \qquad\qquad u_2 = 2 - l_2 * 1 = 2 + \frac{1}{2} * 1 = \frac{5}{2}$$

<u>2. lépés:</u> 3. sorból levonjuk a $\frac{-1}{u_2} * 2.$ sort

$$A^{(2)} = \begin{matrix} u_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 \end{matrix}$$

$$l_3 = \frac{-1}{u_2} = -\frac{2}{5} \qquad\qquad u_3 = 2 * l_3 * 1 = \frac{12}{5}$$

<u>Sejtés:</u> A *k*. lépésig a rekurzió a következő:

$$u_1 = 2 \qquad\qquad l_i = \frac{-1}{u_{i-1}} \qquad\qquad u_i = 2 - l_i * 1$$

(i = 2, …, k)

$$A^{(k)} = \begin{matrix} u_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & u_k & 1 & . \\ . & . & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

$$L^{(k)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & l_k & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 \end{matrix}$$

$$(k+1).sor - \frac{-1}{u_k} * k.sor$$

$$l_{k+1} = \left(\frac{-1}{u_k}\right)$$

$$u_{k+1} = 2 - l_{k+1} * 1$$

Vagyis (k+1)-re is igaz a sejtés, tehát általános megoldásra is igaz.

<u>4. feladat:</u> Adjuk meg az *A* mátrix

a. LDL^T felbontását
b. Cholesky-felbontását

$$A = \begin{matrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \end{matrix}$$

Megoldás:

1) Meghatározzuk az LU felbonást.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \end{matrix} \end{array}$$

Az ismeretlenek meghatározása mátrixszorzással, parketta elrendezéssel történik.

Ez azt jelenti, hogy először a legfelső sort vesszük (azaz a $4 \quad -2 \quad 2 \quad -2$ sort), ha azzal kész vagyunk, akkor a megmaradt első oszlop ($\begin{matrix}-2\\2\\-2\end{matrix}$), majd a megmaradt felső sor ($2 \quad -2 \quad 2$), megint a megmaradt első oszlop ($\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}$), első sor ($3 \quad -3$), végül pedig a két megmaradt *-3*, illetve *7*-es értékekkel végezzük el a mátrixszorzást.

<u>1. lépés</u>:

4 -2 2 -2 ➔ ezek adottak, nem kell számolni ☺

<u>2. lépés:</u>

$$4 * l_1 = -2 \rightarrow l_1 = -\frac{1}{2}$$

$$4 * l_2 = 2 \rightarrow l_2 = \frac{1}{2}$$

$$4 * l_4 = -2 \rightarrow l_4 = -\frac{1}{2}$$

<u>3. lépés:</u>

$$-2l_1 + u_1 = 2 \rightarrow u_1 = 1$$

$$2 * l_1 + u_2 = -2 \rightarrow u_2 = -1$$

$$-2 * l_1 + u_3 = 2 \rightarrow u_3 = 1$$

<u>4. lépés:</u>

$$-2 * l_2 + l_3 * u_1 = -2 \rightarrow l_3 = -1$$

$$-2 * l_4 + l_5 * u_1 = 2 \rightarrow l_5 = 1$$

5. lépés:

$$-2 * l_2 + l_3 * u_4 = 1 \rightarrow u_4 = 1$$

$$-2 * l_2 + l_3 * u_3 + u_5 = -3 \rightarrow u_5 = -1$$

6. lépés:

$$2 * l_4 + u_2 * l_5 + u_4 * l_6 = -3 \rightarrow l_6 = -1$$

7. lépés:

$$-2 * l_4 + u_3 * l_5 + u_5 * l_6 + u_6 = 7 \rightarrow u_6 = 4$$

Ezekből össze tudjuk rakni az $\tilde{L}$ és az $\tilde{U}$ mátrixokat.

$$\tilde{L} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad \tilde{U} = \begin{matrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{matrix}$$

a)

Ebből az $\tilde{L}\tilde{U}$ felbontásból megadható az LDL^T felbontás.

$$LDL^T = LDD^{-1}\tilde{U}$$

A jobb oldalt értelmezve:

$L = L$

$D = D$

$D^{-1}\tilde{U} = L^T$

$$L = \tilde{L} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad D = \begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix} \qquad L^T = \begin{matrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Tehát a végső megoldás:

$$LDL^T = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} * \begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

b)

Cholesky-felbontás = LL^T

$$A = \tilde{L}\tilde{U} = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^T$$

$$\tilde{L}\sqrt{D} = L, illetve\ \sqrt{D}\tilde{L}^T = L^T$$

$$L = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} * \begin{matrix} \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

$$L^T = \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

A végső megoldás:

$$LL^T = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{matrix} * \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

5. feladat:

Határozd meg az A QR felbontását Gram-Schmidt transzformációval:

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Megoldás:

$$Q = \underline{q}_1 \quad \underline{q}_2 \quad \underline{q}_3 \qquad R = \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_3 \end{matrix}$$

1. lépés: 1. oszlopvektorok meghatározása Q, R mátrixokhoz

$$r_{11} = \left\| \underline{a}_1 - \sum \ldots \right\|_2 = \left\| \underline{a}_1 \right\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{1}{r_{11}} * \left(\underline{a}_1 - \sum \ldots \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} * \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

2. lépés:

$$r_{12} = < \underline{a}_2, \underline{q}_1 > = < \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} * \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} > = 2 * \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 * \frac{-1}{\sqrt{5}} + (-1) * 0 = 0$$

$$r_{22} = \left\| \underline{a}_2 - r_{12} * \underline{q}_1 \right\|_2 = \sqrt{6}$$

$$\underline{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} * \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

3. lépés:

$$r_{13} = < \underline{a}_3, \underline{q}_1 > = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r_{23} = < \underline{a}_3, q\underline{\quad}_2 > = 0$$

$$r_{33} = \left\| \underline{a}_3 - r_{13} * \underline{q}_1 - r_{23} * \underline{q}_2 \right\|_2 = \frac{\sqrt{120}}{5}$$

$$\underline{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} * \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

Ezek alapján a QR felbontás:

$$Q = \begin{matrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} \sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{120}/5 \end{matrix}$$

6. feladat

Hozzuk felső háromszög mátrixra az A mátrixot a Hauseholder transzformációval.

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Megjegyzés: Ebből a mátrixból az első lépésben egy $\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{matrix}$-hez hasonló mátrixot kapunk, ez a megjegyzés még jól jöhet a későbbiekben.

Megoldás:

<u>1. lépés:</u> Meghatározzuk $H_1(\underline{v})$ transzformációs mátrixot!

$$\sigma = -sgn(a_{11}) * \|a_1\|_2 = -\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = (-\sqrt{5})$$

$$\underline{v} = \frac{a_1 - \sigma e_1}{\|a_1 - \sigma e_1\|_2} = \cdots$$

$$a_1 - \sigma e_1 = \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} - (-\sqrt{5}) \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{10 + 4 * \sqrt{5}}} * \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

Alkalmazzuk $H_1(\underline{v})$ transzformációs mátrixot a *A* oszlopvektoraira.

i)

$\underline{a}_1$-re alkalmazzuk

$$H_1(\underline{v}) * \underline{a}_1 = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) * \underline{a}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{v}(\underline{v}^T \underline{a}_1) = \cdots = \begin{matrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

A hiányzó műveletet egy definícióval, pontosabban a korábbi megjegyzéssel tudjuk indokolni, miért maradt ki: mivel korábban megjegyeztük, hogy az első oszlopvektorban a két alsó érték 0-t fog felvenni, ezért $\underline{a}_1$-re korábban megkapott értéket, azaz $\sqrt{5}$-öt beírhatjuk az oszlopvektor legfelső helyére.

ii)

$$\begin{aligned}
H_1(\underline{v}) * \underline{a}_2 &= (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) * \underline{a}_2 = \underline{a}_2 - 2\underline{v}(\underline{v}^T \underline{a}_2) \\
&= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} - 2 * \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} * \left(\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} * 2+\sqrt{5} \quad -1 \quad 0 * \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right) \\
&= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} - \frac{2}{10+4\sqrt{5}} \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \left((2+\sqrt{5}) * 1 + (-1) * 2 + 0 * 0 \right) \\
&= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{10}_5 + \cancel{4}_2\sqrt{5}} \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} (\cancel{2} + \sqrt{5} - \cancel{2}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} - \frac{\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \\
&= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} - (\sqrt{5} - 2) \begin{matrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{matrix}
\end{aligned}$$

A harmadik oszlopvektorra a számolás már nincs levezetve, de ugyanezen logika és számolási menetek alapján megy az is.

$$H_1(\underline{v}) * \underline{a}_3 = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) * \underline{a}_3 = \underline{a}_3 - 2\underline{v}(\underline{v}^T \underline{a}_3) = \cdots = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Tehát a végső megoldás:

$$A = \begin{matrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$