5. Az LU-felbontás alkalmazása. A Schur-komplementer.

A) Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Az LU-felbontás definíciója

Az A mátrix LU-felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \quad U \in \mathcal{U}.$$

L és U elemenkénti meghatározása

A Gauss-eliminációt felírhatjuk alsó háromszögmátrixok segítségével:

$$L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A = U,$$

majd az inverzekkel egyesével átszorozva:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U = LU.$$

A fenti szorzat is alsó háromszögmátrix. Láttuk az előző tételből, hogy az L mátrix elemeit egy egységmátrixból kapjuk úgy, hogy minden oszlopba ez egyesek alá beletesszük a neki megfelelő ℓ_k vektor nem nulla elemeit (ezek a GE-s hányadosok). Tehát ennek előállításához nem kell több művelet, mint amit a GE-val végzünk.

Alsó háromszögmátrix

Az $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i < j$ esetén $l_{ij} = 0$. (A főátló felett csupa nulla.)

$$\mathcal{L} := \{\, L \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; l_{ij} = 0 \; (i < j) \,\},$$
$$\mathcal{L}_1 := \{\, L \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; l_{ij} = 0 \; (i < j), \;\; l_{ii} = 1 \,\}.$$

Felső háromszögmátrix

Az $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i > j$ esetén $u_{ij} = 0$. (A főátló alatt csupa nulla.)

$$\mathcal{U} := \{\, U \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; u_{ij} = 0 \; (i > j) \,\},$$
$$\mathcal{U}_1 := \{\, U \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; u_{ij} = 0 \; (i > j), \;\; u_{ii} = 1 \,\}.$$

Műveleti sorrend és műveletigény

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$

B) Definiálja a Schur-komplementert. Ismertesse a GE megmaradási tételeit (és a kapcsolódó fogalmakat), majd bizonyítsa a determinánsra és szimmetriára vonatkozó pontokat.

Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

A Schur komplementer azt mutatja, hogy az A_{11}-gyel végzett GE után mely mátrixon kell folytatni az eliminációt. Az új fogalom segítségével könnyebben fogalmazhatjuk meg, hogy a GE mely tulajdonságokat örökíti tovább.

Szimmetria definíciója

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x \rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Szigorúan diagonálisan domináns

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Fél szélesség

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall\ i, j : |i - j| > s : \quad a_{ij} = 0 \text{ és}$$
$$\exists\ k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0.$$

Profil

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall\ j = 1, \ldots, k_i : \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall\ i = 1, \ldots, l_j : \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Gauss-elliminàció megmaradási tételei

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq$ A fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Determinánsra vonatkozó megmaradási tétel

Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

Szimmetriára vonatkozó megmaradási tétel

Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^\top = A_{12}$.

$$\begin{aligned}[A|A_{11}]^\top &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^\top = A_{22}^\top - A_{12}^\top(A_{11}^{-1})^\top A_{21}^\top = \\ &= A_{22}^\top - A_{12}^\top(A_{11}^\top)^{-1}A_{21}^\top = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}]\end{aligned}$$

$\square$