7. A QR-felbontás

A) Definiálja a QR-felbontást és vezesse le az előállítására alkalmas Gramm–Schmidt ortogonalizációs eljárást. Milyen feltétel garantálja, hogy az algoritmus nem akad el?

QR-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix QR-felbontásának nevezzük a $Q \cdot R$ szorzatot, ha $A = QR$, ahol $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrix, $R \in \mathcal{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

Gramm-Schmidt féle ortogonalizáció (normálással)

Adott az $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorrendszer.

1. $r_{11} := \|a_1\|_2$,
2. $q_1 := \dfrac{1}{r_{11}} a_1$ („lenormáljuk").

A k-adik lépésben ($k = 2, \ldots, n$):

3. $r_{jk} := \langle a_k, q_j \rangle \quad (j = 1, \ldots, k-1)$,
4. $s_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j$,
5. $r_{kk} := \|s_k\|_2$ (s_k segédvektor hossza),
6. $q_k := \dfrac{1}{r_{kk}} s_k$ („lenormáljuk").

Az így nyert $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortonormált.

Levezetése

(A levezetés bizonyítása kell de az gecis 3oldalas és nincs benne pontosan az előadásdiában)

B) Mutassa be az ortogonalizációs eljárás normálás nélküli változatát, és az utólagos normálás módját. Hogyan alkalmazható a QR-felbontás LER megoldására? Vesse össze az LU-felbontáson alapuló megoldással (műveletigény, alkalmazhatóság).

Gramm-Schmidt féle ortogonalizáció (normálás nélkül)

Adott az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorrendszer.

1. $\widetilde{q_1} := a_1$,
2. $\widetilde{r_{11}} := 1$

   A k-adik lépésben ($k = 2, \dots, n$):
3. $\widetilde{r_{jk}} := \dfrac{\langle a_k, \widetilde{q_j} \rangle}{\langle \widetilde{q_j}, \widetilde{q_j} \rangle} \quad (j = 1, \dots, k-1)$,
4. $\widetilde{q_k} := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{r_{jk}} \cdot \widetilde{q_j}$,
5. $\widetilde{r_{kk}} := 1 \quad$ (nem normálunk),

Az így nyert $\widetilde{q_1}, \dots, \widetilde{q_n} \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortogonális.

Normálás utólag:

- $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$,
- $D := \widetilde{Q}^\top \widetilde{Q}$, azaz $D = \operatorname{diag}(\langle q_1, q_1 \rangle, \dots \langle q_n, q_n \rangle)$,
- $A = \underbrace{\widetilde{Q} \cdot \sqrt{D}^{-1}}_{Q} \cdot \underbrace{\sqrt{D} \cdot \widetilde{R}}_{R} = Q \cdot R$,

  azaz $\widetilde{Q}$ oszlopait, mint vektorokat leosztjuk azok hosszával (normáljuk őket), $\widetilde{R}$ sorait pedig szorozzuk ugyanezekkel az értékekkel.
- Közvetlenül a $\sqrt{D} = \operatorname{diag}(\|q_1\|_2, \dots, \|q_n\|_2)$ alakkal is dolgozhatunk.

Műveletigény

A szorzások és osztások száma

$$2n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint n darab négyzetgyökvonás is szükséges.