9. Mátrixnormák és tulajdonságaik I.

A) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált normát, mutassa meg, hogy utóbbi mindig mátrixnorma. Adjon meg példákat is. Igazolja mátrix tetszőleges normája és a spektrálsugara közti egyenlőtlenséget.

Vektor hossza

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját" jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

A *(vektor)norma* a „hossz", „nagyság" általánosítása. Azaz a leképezés pozitív, pozitív homogén és szubadditív (háromszög-egyenlőtlenség). Ezek a vektornormák *axiómái*.

Mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Indukált mátrixnorma (természetes mátrixnorma)

Legyen $\|.\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|.\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Indukált norma mindig mátrixnorma

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.
3. $$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\|\,.$$
4. $$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$ $$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$
5. $B = 0 \;\Rightarrow\; \|B\| = 0$, valamint
   $A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; \|AB\| = 0$.
   Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

   Ha $B \neq 0$, akkor
   $$\|A \cdot B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
   $$\leq \sup_{Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|\,.$$

   Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szuprémum értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. □

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:
  $$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v\,.$$
- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:
  $$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v\,.$$
  Sőt: $\|A\|$ a legkisebb ilyen felső korlát.

Spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Mátrix tetszőleges normája és spektrálsugara

$\varrho(A) \leq \|A\|$

Biz.: Belátjuk, hogy $|\lambda| \leq \|A\|$.
(Legyen λ tetszőleges sajátérték és $v \neq 0$ a hozzátartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$
$$Avv^\top = \lambda vv^\top$$
$$\|A\| \cdot \left\|vv^\top\right\| \geq \left\|Avv^\top\right\| = \left\|\lambda vv^\top\right\| = |\lambda| \cdot \left\|vv^\top\right\|$$

Leosztva $\left\|vv^\top\right\| \neq 0$-val $\|A\| \geq |\lambda|$. $\square$

(Ez a rész továbbra se tökéletes)

C) Vezesse le, mivel egyenlő normális mátrix 2-es normája. Mit mondhatunk ortogonális mátrix 2-es normájáról?

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Mivel a szimmetiusnál a transzponált az önmaga, és ha az A-nak sjátértéke x, akkor A^2-nek sajátértéke x^2.

Szóval a kettes norma egyenlő lesz gyök(ró(A^2))-el, ami gyök((ró(A))^2), azaz ró(A).

Ha Q ortogonális (unitér), akkor

- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$,
- $\|Q\|_2 = 1$,
- $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$.

x sajátvektor

* adjungálást jelent

a) $(Q\underline{x})^*(Q\underline{x}) = \underline{x}^*\underline{x}$.

b) $\|Q\|_2 = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \dfrac{\|Q\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = 1$.

c) $\|QA\|_2 = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \dfrac{\|QA\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \dfrac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \|A\|_2$.

Továbbá $\|AQ\|_2 = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \dfrac{\|AQ\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \dfrac{\|AQ\underline{x}\|_2}{\|Q\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{y}\neq\underline{0}} \dfrac{\|A\underline{y}\|}{\|\underline{y}\|_2}{}_2 = \|A\|_2$, mivel $\underline{x}\neq\underline{0} \Leftrightarrow \underline{y}\neq\underline{0}$.

(Ez a rész már tökéletes)