17. Nemlineáris egyenletek megoldása 1.

A) Ismertesse a nemlineáris egyenletek megoldásának feladatát. Mutassa be a megoldás létezését biztosító állításokat. Írja fe la Bolzano-tételt (bizonyítás nélkül), és segítségével igazolja a Brouwer-féle fixpont-tételt.

Feladat

Keressük meg egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \qquad x^* = ?$$

Ekvivalens módon átfogalmazható (általában): keressük meg egy $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény fixpontját.

$$x^* = \varphi(x^*), \qquad x^* = ?$$

Fixpont:

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.

Bolzano tétel:

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Megjegyzés:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a;b]$ zárt intervallum,
- $C[a;b]$: az $[a;b]$ (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
- van gyök az $(a;b)$ (nyílt) intervallumban

Megoldás létezését biztosító állítások:

1. Ha $f \in C[a;b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. valamint $f \in D(a;b)$ és $f' > 0$ (vagy < 0),

akkor $\exists!\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Biz.: A Bolzano-tételből következik, hogy van gyök.
f szigorúan monoton, ezért egyértelmű is. □

Brouwer-féle fixpont-tétel:

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$
2. és $\varphi \in C[a;b]$,

akkor $\exists\, x^* \in [a;b] : \varphi(x^*) = x^*$.

Biz.: Definiáljuk a $g(x) = x - \varphi(x)$ függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

1. Mivel $\varphi(a), \varphi(b) \in [a;b] \quad \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \le 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \ge 0$$
$$\Rightarrow \quad g(a) \cdot g(b) \le 0.$$

2. Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$, akkor $g(a) = 0$ vagy $g(b) = 0$.
   Ez azt jelenti, hogy első esetben a, második esetben b fixpont.

3. Ha $g(a) \cdot g(b) < 0$, akkor a Bolzano-tétel miatt van g-nek gyöke $(a;b)$-ben, azaz

$$\exists\, x^* \in (a;b) : g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x^*) = x^*$$

□

B) Kontrakció fogalma [a, b] intervallumon és a Banach-féle fixpont-tétel (bizonyítás nélkül). Igazolja az elégséges feltételt kontrakcióra.

Kontrakció:

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció $\approx$ összehúzás, q: kontrakciós együttható
- most $n = 1$, $\|.\| = |.|$; $\mathbb{R}$ helyett $[a;b] \subset \mathbb{R}$, így jobban használható

A $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ leképezés *kontrakció* $[a;b]$-n, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \qquad \forall x, y \in [a;b].$$

Banach-féle fixpont-tétel:

Ha a $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$ függvény kontrakció $[a;b]$-n q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists!\, x^* \in [a;b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [a;b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b-a)$,
   - $|x_k - x^*| \leq \dfrac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$.

Kontrakció elégséges feltétele:

1. $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény, $\varphi \in C^1[a;b]$ és
2. $|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$,

$|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$, akkor φ kontrakció $[a;b]$-n.

Megj.:

- C^1: egyszer folyonosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.
- A kontrakciós tulajdonság függ az intervallumtól.

Biz.: A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

$$q := \max_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| < 1$$

$\forall x, y \in [a;b]$ $(x < y)$: $\exists\, \xi \in (x;y)$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|.$$

□