Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2015.10.19.

1. (a) Írjuk fel az 1 gépi számot.

$$1 = [100000|1] = \frac{1}{2} \cdot 2$$

Írjuk fel az $\frac{1}{4}$ gépi számot.

$$\frac{1}{4} = [100000|-1] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-1}$$

(2 pont)

(b) Először váltsuk át a $0,05$-öt kettes számrendszerbe.

	05
0	10
0	20
0	40
0	80
1	60
1	20
0	40
0	80
1	60
1	20
0	40

A mantissza hosszának megfelelően, az első 6 hasznos jegyet kell megtartanunk, ezek az 110011 jegyek. Mivel az utána következő 7. jegy nulla, ezért ezen az értéken nem változtatunk. A karakterisztika értéke -4. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért ellenőriznünk kell, hogy a kapott számhoz vagy a felső szomszédjához van-e közelebb $0,05$.

$$[110011|-4] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-4} = \frac{32+16+2+1}{1024} = \frac{51}{1024}$$

$$[110100|-4] = \frac{52}{1024}$$

Mivel

$$\frac{51}{1024} < 0,05 = \frac{5}{100} < \frac{52}{1024} \quad \Leftrightarrow \quad 5100 < 5 \cdot 1024 = 5120 < 5200,$$

látszik, hogy a kisebb szomszédhoz van közelebb a $0,05$, így

$$fl(0,05) = [110011|-4] = \frac{51}{1024}$$

a megfeleltetett gépi szám. (4 pont)

(c) A gépi összeadáshoz előbb közös karakterisztikára kell hoznunk az első zárójelben lévő gépi számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az $\frac{1}{4}$-t hozzuk 1 karakterisztikára.

$$\frac{1}{4} = [100000|-1] \rightarrow [001000|1]\,.$$

$$\begin{array}{r} [100000|1] \\ +\,[001000|1] \\ \hline [101000|1] \end{array}$$

A kapott eredményhez adjuk hozzá $fl\,(0,05)$-öt, de először 1-es karakterisztikára hozzuk és kerekítünk a mantissza 6. jegyében.

$$fl\,(0,05) = [110011|-4] \to [000010|1]\,.$$

$$\begin{array}{r} [101000|1] \\ +\,[000010|1] \\ \hline [101010|1] \end{array}$$

A kapott eredmény:

$$[101010|0] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2 = \frac{16+4+1}{16} = \frac{21}{16}.$$

(4 pont)

(d) $fl\,(0,05) = [110011|-4]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl\,(0,05)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-4} = 2^{-11}$$

Az eredmény: $[101010|1] = \frac{21}{16}$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\frac{21}{16}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2 = 2^{-6}$$

(2 pont)

2. **Az elimináció**:
1. lépés:
2. sor $- \left(-\frac{1}{2}\right) \ast$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4.$ (2 pont)

2. lépés:
3. sor $- \left(-\frac{2}{5}\right) \ast$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{12}{5} \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $2 - \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} \cdot (10+2) = \frac{12}{5}, \quad -4 - \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{1}{5} \cdot (-20+8) = -\frac{12}{5}.$ (2 pont)

A visszahelyettesítés:
3. sor $\ast \frac{5}{12}$
2. sor $-$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{12}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $\ast \frac{2}{5}$
1. sor $-$ új 2. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

1. sor /2

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1, 2, -1]^T$ vektor. (2 pont)

3. Végezzük el az eliminációt és menet közben a Gauss-eliminációs hányadosokat tároljuk az L mátrixban. Mivel a mátrix tridiagonális, ezért L és U is tridiagonális lesz. A rekurzió felírásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$L = \textit{tridiag}\,(l_i, 1, 0), \quad U = \textit{tridiag}\,(0, u_i, 1).$$

Az i. lépésig elkészült L mátrixot $L^{(i)}$-vel jelöljük. Menet közben ellenőrizzük, hogy U átlója felett megmaradnak az 1 elemek.

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

U 1. sora azonos A első sorával, így $u_1 = 2$ és $U_{12} = 1$.

1. lépés:
2. sor $- \left(\frac{-1}{u_1}\right) * 1.$ sor.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $l_2 = \frac{-1}{u_1} = -\frac{1}{2}$ az eliminációs hányados és $u_2 = 2 - l_2 \cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$ és $U_{23} = 1$.

2. lépés:
3. sor $- \left(\frac{-1}{u_2}\right) * 2.$ sor.

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $l_3 = \frac{-1}{u_2} = -\frac{2}{5}$ az eliminációs hányados és $u_3 = 2 - l_3 \cdot 1 = 2 + \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{12}{5}$ és $U_{34} = 1$.
(2 pont)

Sejtés: a k. lépés előtt a k. sorig elkészültek az L és U elemei a következő rekurzióval

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 2, \\
&l_i = \frac{-1}{u_{i-1}}, \quad u_i = 2 - l_i \cdot 1 \quad (i = 2, \dots, k)
\end{aligned}
$$

és a k. lépés előtt a mátrixok alakja:

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & -1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix} = A^{(k)}
$$

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix} = L^{(k)}
$$

(2 pont)

Be kell látnunk, hogy az alak és a rekurzió az elimináció k. lépése után megmarad.
k. lépés:

$(k+1)$. sor $- \left(\frac{-1}{u_k}\right) * k$. sor.

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & u_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix} = A^{(k+1)}
$$

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & l_{k+1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix} = L^{(k+1)}
$$

Tehát $l_{k+1} = \frac{-1}{u_k}$ az eliminációs hányados, $u_{k+1} = 2 - l_{k+1} \cdot 1$ és $U_{k+1,k+2} = 1$.
Tehát a rekurzió és az alak a $k+1$. lépés után is megmarad. (2 pont)

4. (a) Először elkészítjük az LU-felbontást. Egyik megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az együtthatókat a parkettázásnak megfelelő sorrendben számítjuk ki:

$$\begin{aligned} -2 &= l_1 \cdot 4 \to l_1 = -\frac{1}{2} & \qquad 2 &= l_1 \cdot (-2) + u_1 \to u_1 = 1 \\ 2 &= l_2 \cdot 4 \to l_2 = \frac{1}{2} & \qquad -2 &= l_1 \cdot 2 + u_2 \to u_2 = -1 \\ -2 &= l_4 \cdot 4 \to l_4 = -\frac{1}{2} & \qquad 2 &= l_1 \cdot (-2) + u_3 \to u_3 = 1 \end{aligned}$$

Ezt követően kiszámítjuk L második oszlopát

$$\begin{aligned} -2 &= l_2 \cdot (-2) + l_3 \cdot u_1 = -1 + l_3 \to l_3 = -1 \\ 2 &= l_4 \cdot (-2) + l_5 \cdot u_1 = 1 - l_5 \to l_5 = 1 \end{aligned}$$

és U harmadik sorát:

$$\begin{aligned} 3 &= l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot u_2 + u_4 = 1 + 1 + u_4 \to u_4 = 1 \\ -3 &= l_2 \cdot (-2) + l_3 \cdot u_3 + u_5 = -1 - 1 + u_5 \to u_5 = -1 \end{aligned}$$

Majd végül l_6-ot és u_6-ot:

$$\begin{aligned} -3 &= l_4 \cdot 2 + l_5 \cdot u_2 + l_6 \cdot u_4 = -1 - 1 + l_6 \to l_6 = -1 \\ 7 &= l_4 \cdot (-2) + l_5 \cdot u_3 + l_6 \cdot u_5 + u_6 = 1 + 1 + 1 + u_6 \to u_6 = 4 \end{aligned}$$

Visszaírva a kapott értékeket a megfelelő mátrixokba:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Másik megoldás:
Az LU-felbontást a „mechanikus (tárolós)" módszerrel is elkészíthetjük.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{r|rrr} 4 & -2 & 2 & -2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{r|r|rr} \multicolumn{1}{r}{4} & \multicolumn{1}{r}{-2} & 2 & -2 \\ \hline -\frac{1}{2} & \multicolumn{1}{r}{1} & -1 & 1 \\ \cline{2-4} \frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{r|r|r|r} \multicolumn{1}{r}{4} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{2} & -2 \\ \hline -\frac{1}{2} & \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{-1} & 1 \\ \cline{2-4} \frac{1}{2} & -1 & \multicolumn{1}{r}{1} & -1 \\ \cline{3-4} -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

(4 pont)

Az LDL^T felbontást egyszerűen megkapjuk az LU felbontásból:

$$A = LU = LDD^{-1}U = LDL^T,$$

ahol L az LU felbontásbeli L,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^T$$

(2 pont)

(b) A Cholesky felbontást a következőképpen kapjuk:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

$$\widetilde{L} = L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

5. Számítsuk ki az A mátrix QR felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

$$r_{12} = \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)) = 0$$

$$\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{r_{22}} (\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

$$r_{13} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r_{23} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)) = 0$$

$$\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0+2 \\ 5-1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\|_2 = \frac{\sqrt{120}}{5}$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{r_{22}} (\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}) = \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{120}}{5} \end{bmatrix}$$

(1 pont)

6. A mátrix első oszlopára készítsük el azt a Householder transzformációt, mely az $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza.

$$\sigma_1 = -sgn(a_{11}) \cdot \|\mathbf{a_1}\|_2 = -sgn(2) \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = -\sqrt{5}$$

Innen már ki tudjuk számolni a transzformációt meghatározó $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A $\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{a_1}$ szorzatot nem kell előállítanunk, mert a konstrukcióból tudjuk, hogy $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú lesz. Alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektorra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2 \cdot \mathbf{v_1} \cdot \left(\mathbf{v_1^T} \cdot \mathbf{a_2}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{10+4\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (2+\sqrt{5}-2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}}_{=\sqrt{5}-2} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - (\sqrt{5}-2) \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

Alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektorra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2 \cdot \mathbf{v_1} \cdot \left(\mathbf{v_1^T} \cdot \mathbf{a_3}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{10+4\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

Tehát $\mathbf{R}$ alakja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1 pont)