18. Nemlineáris egyenletek megoldása 2.

A) Vázolja az intervallumfelezés algoritmusát és mutasson hozzá hibabecslést. Ismertesse a húrmódszer alapötletét, szemléltesse működését, és vezesse le az algoritmusát.

Bolzano tételen keresztül mutatom be az intervallumfelezést:

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Biz. (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

1. Legyen $x_0 := a, \; y_0 := b$.
2. Ismételjük:
   - Legyen $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$, az intervallum fele.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$, akkor $x_{k+1} := x_k, \; y_{k+1} := s_k$.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$, akkor $x_{k+1} := s_k, \; y_{k+1} := y_k$.
3. Álljunk meg, ha
   - egyenlőség teljesül, ekkor $x^* = s_k$, vagy
   - elértük a kívánt pontosságot, ekkor $x^* \in (x_k, y_k)$, és

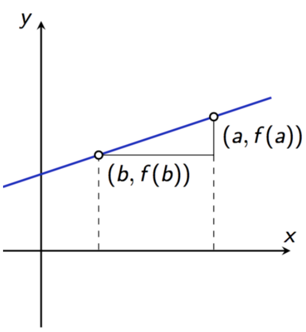
$$y_k - x_k = \frac{y_{k-1} - x_{k-1}}{2}$$

teljesül. $\square$

Hibabecslések:

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}, \qquad |y_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k},$$
$$|s_k - x^*| < \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



Az egyenes meredeksége:

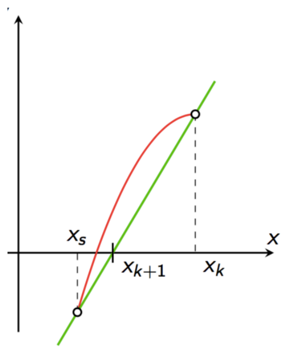
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot (x - a).$$

Ennek zérushelye ($y = 0$):

$$x = a - \frac{f(a) \cdot (a - b)}{f(a) - f(b)}.$$



Definíció: húrmódszer

Az $f \in C[a;b]$ függvény esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor a *húrmódszer* alakja:

$$x_0 := a, \quad x_1 := b,$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol s a legnagyobb olyan index, amelyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

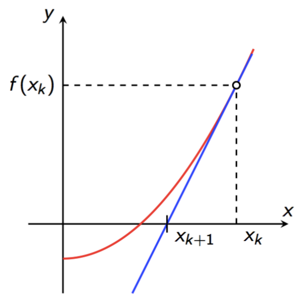
B) Ismertesse a Newton-módszer alapötltét, szemléltesse működését és vezesse le a képletét. Mutassa be a többváltozós esetet is. Milyen tételt ismer a módszer monoton konvergenciájáról? (bizonyítás nélkül)

Newton módszer:

Ha már előállítottuk az x1…xn iterációkat, akkor az xn helyen tekintjük az f függvény elsőrendű Taylor-közelítését és felírjuk az (xn, f(xn)) pontbeli érintő egyenletét, és megkeressük T(x) = 0 megoldását. Tehát elsőfokú polinommal közelítjük a függvényt lokálisan, majd annak a zérushelyét keressük meg.

Geometriai megközelítés:

$f, x_k \to$ érintő $\to$ zérushely (y=0) $\to x_{k+1}$



Az érintő egyenlete:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$
$$-f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$
$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Feladat

Keressük meg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \qquad x^* = ?$$

Newton módszer definíció:

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Monoton konvergencia tétele:

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

1. $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a; b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^*-hoz.

Ehhez a tételhz hozzátartozik még a többváltozós eset is. (73as beugró)