11. LER érzékenysége

A) Formalizálja LER jobboldalának illetve mátrixának perturbációját, ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciószámot és igazolja tulajdonságait.

LER pertubációja

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Mátrix pertubrációja

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott $A + \Delta A$ és b, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I+M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|M\|}.$$

Mátrix kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától. (Pl. $\operatorname{cond}_1(A), \operatorname{cond}_2(A), \dots$)

A kondíciószám tulajdonságai

(a) Indukált mátrixnorma esetén $\operatorname{cond}(A) \geq 1$.

$$1 = \|I\| = \left\|A \cdot A^{-1}\right\| \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \operatorname{cond}(A).$$

(b) $\operatorname{cond}(c \cdot A) = \operatorname{cond}(A)$, $\quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

$$\operatorname{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \left\|(cA)^{-1}\right\| = \|cA\| \cdot \left\|\tfrac{1}{c}A^{-1}\right\| =$$

$$= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \operatorname{cond}(A).$$

(c) Ha Q ortogonális, akkor $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$.

$$\|Q\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sqrt{x^\top Q^\top Qx}}{\sqrt{x^\top x}} = 1$$

$$\left\|Q^{-1}\right\|_2 = \left\|Q^\top\right\|_2 = 1, \quad \operatorname{cond}_2(Q) = 1$$

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
Az inverzre: $\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max\left|\lambda_i(A^{-1})\right| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.

(f) Ha A invertálható, akkor $\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

$\|A\| \geq \varrho(A) = \max|\lambda_i(A)|$, $\left\|A^{-1}\right\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$. $\square$

B) Vizsgálja LER megoldásának érzékenységét szorzatfelbontások (LU, QR) alkalmazása esetén. Bizonyítsa a LER jobboldalának megváltozására vonatkozó tételt.

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\mathrm{cond}\,(A) \leq \mathrm{cond}\,(L) \cdot \mathrm{cond}\,(U)$ $\square$

QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\,(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}\,(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

1. $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$-ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.
2. Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is teljesül.
3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   - **(a)** $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   - **(b)** $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$
   - **(c)** $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|,$
   - **(d)** $\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|.$
5. Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

6. A felső becslés (a) $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és (d) $\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|$ alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

$\square$

(Ez a része tuti tökéletes, a másikat már nem futottam át)