8. A Householder-transzformáció

A) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.

Vektor hossza

Az $\mathbb{R}^n$-beli v vektorok hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját" jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v^\top v} = \left(\sum_{k=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Householder mátrix

A $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^\top,$$

ahol $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$.

Householder mátrix tulajdonságai

1. $H^\top = H$ (szimmetrikus),
2. $H^2 = I$, azaz $H^{-1} = H$ (ortogonális),
3. $H(v) \cdot v = -v$,
4. $\forall y \perp v : \quad H(v) \cdot y = y$.

Biz.: Használjuk ki, hogy $v^\top v = 1$ és $v^\top y = 0$.

1. $(I - 2vv^\top)^\top = I^\top - 2(v^\top)^\top v^\top = I - 2vv^\top$,
2. $(I - 2vv^\top)(I - 2vv^\top) = I - 2vv^\top - 2vv^\top + 4v\underbrace{v^\top v}v^\top = I$,
3. $(I - 2vv^\top)v = v - 2v\underbrace{v^\top v} = v - 2v = -v$,
4. $(I - 2vv^\top)y = y - 2v\underbrace{v^\top y} = y$. $\square$

Tetszőleges tükrözés Householder mátrixszal

Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ és $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$. Ekkor a

$$v = \pm\frac{a-b}{\|a-b\|_2} \text{ választással } H(v) \cdot a = b.$$

Megjegyzés:

- $H(v)$ tükröző mátrix, a v-re merőleges (azaz v normálvektorú) $n-1$ dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.
- Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektort bontsunk v-re merőleges és v-vel párhuzamos komponensekre: $x = a + b$, ahol $a \perp v$ és $b || v$. Ekkor az előző tétel utolsó két állítása alapján

$$H(v)x = H(v)a + H(v)b = a - b.$$

- Mivel $H(v)$ ortogonális mátrix, $\|H(v)x\|_2 = \|x\|_2$, vagyis a transzformáció a vektor hosszát nem változtatja meg.

Megjegyzés:

- A $H(v)$ transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$-re $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v\underbrace{(v^\top x)}_{\in\mathbb{R}}$.
- $y \in \mathbb{R}^n$-re $\quad y^\top H(v) = y^\top(I - 2vv^\top) = y^\top - 2\underbrace{(y^\top v)}_{\in\mathbb{R}}v^\top$.
- Mindkét esetben $4n$ művelet kell a mátrixszal való szorzás $2n^2 + \mathcal{O}(n)$-es műveletigénye helyett.

B) Határozza meg különböző, azonos (de nem 0) hosszúságú a, b vektorokhoz azt a H transzformációt, melyre H*a = b. Alkalmazza ezt az eredményt tetszőleges vektor σe_1 alakra hozására, indokolja σ értékének megválasztását.

Tetszőleges tükrözés Householder mátrixszal

Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ és $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$. Ekkor a

$$v = \pm\frac{a-b}{\|a-b\|_2} \text{ választással } H(v)\cdot a = b.$$

Biz.: Ismerve, hogy $H(v) = I - 2vv^\top$, számoljuk végig a $H(v)\cdot a$ szorzatot. Közben használjuk ki, hogy $\|a\|_2 = \|b\|_2$, azaz $a^\top a = b^\top b$, valamint a skaláris szorzás kommutatív, azaz $a^\top b = b^\top a$.

$$\left(I - 2\frac{(a-b)(a-b)^\top}{\|a-b\|_2^2}\right)\cdot a = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{(a-b)^\top(a-b)} =$$

$$= a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{a^\top a - a^\top b - b^\top a + b^\top b} = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{2(a^\top a - b^\top a)} =$$

$$= a - (a-b) = b.$$

Tehát valóban, két különböző, de azonos hosszúságú vektor átvihető egymásba egy Householder-transzformáció által. □

(Asszem talán ehhez a feladathoz mondott valami gyakorlati példa megoldást és bemutatást azon keresztül, de ez nem biztos)