19. Nemlineáris egyenletek megoldása 3.

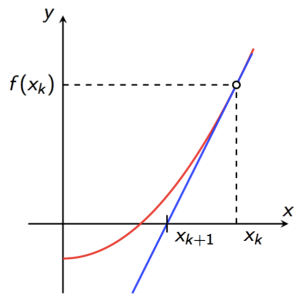
A) Ismertesse a Newton-módszer alapötltét, szemléltesse működését és vezesse le a képletét. Mutassa be a többváltozós esetet is. Milyen tételt ismer a módszer lokális konvergenciájáról? (bizonyítás nélkül)

Newton módszer:

Ha már előállítottuk az x1…xn iterációkat, akkor az xn helyen tekintjük az f függvény elsőrendű Taylor-közelítését és felírjuk az (xn, f(xn)) pontbeli érintő egyenletét, és megkeressük T(x) = 0 megoldását. Tehát elsőfokú polinommal közelítjük a függvényt lokálisan, majd annak a zérushelyét keressük meg.

Geometriai megközelítés:

$f, x_k \to$ érintő $\to$ zérushely (y=0) $\to x_{k+1}$



Az érintő egyenlete:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$
$$-f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$
$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Feladat

Keressük meg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \qquad x^* = ?$$

Newton módszer definíció:

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Lokális konvergencia tétele:

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$.
5. $x_0 \in [a;b] : |x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz, és az

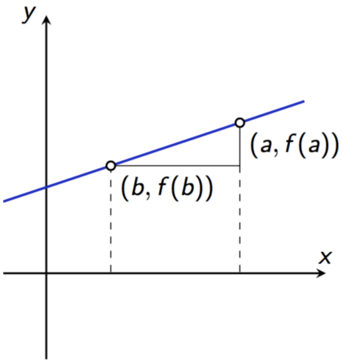
$$|x_{k+1} - x^*| \le M \cdot |x_k - x^*|^2$$

hibabecslés érvényes.

Ehhez a tételhz hozzátartozik még a többváltozós eset is. (73as beugró)

C) Ismertese a szelőmódszer alapötletét, szemléltesse működését és vezesse le az algoritmusát. Adjon konvergenciatételt (bizonyítás nélkül). Vesse össze az eredményeket a Newton-módszerről tanultakkal.

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



Az egyenes meredeksége:

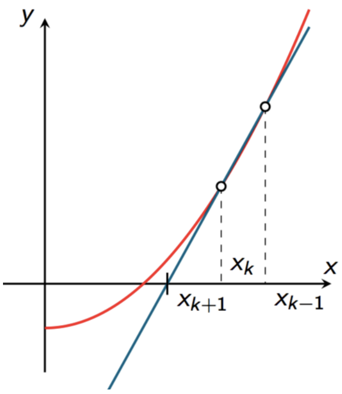
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y-f(a)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\cdot(x-a).$$

Ennek zérushelye ($y=0$):

$$x=a-\frac{f(a)\cdot(a-b)}{f(a)-f(b)}.$$



Definíció: szelőmódszer

Az $f\in C[a;b]$ függvény esetén a *szelőmódszer* alakja:

$$x_0, x_1 \in [a;b],$$
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)\cdot(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$
$$(k=0,1,2,\dots).$$

Szelőmódszer konvergenciája:

Ha $f\in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^*\in[a;b]: f(x^*)=0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $x_0, x_1\in[a;b]$:

$$\left.\begin{array}{l}|x_0-x^*|\\|x_1-x^*|\end{array}\right\} < r := \min\left\{\frac{1}{M}, |x^*-a|, |x^*-b|\right\},$$

akkor a szelőmódszer $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz. (M a szokásos.)