

# Numerikus módszerek 1.

## 3. előadás: Mátrixok $LU$ -felbontása

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

# Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mátrixszal megszorozunk egy  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz.

## Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mátrixszal megszorozunk egy  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, valamint az 1. sor háromszorosát levonjuk a 3. sorból. ( $\sim$  GE 1. lépése volt)

# A Gauss-elimináció lépései mátrixszorzással

Írjuk fel a GE  $k$ -adik lépését ugyanilyen módszerrel! ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{nk} & & 1 \end{pmatrix} = I - \ell_k \mathbf{e}_k^\top, \quad \ell_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{pmatrix}.$$

(A zérus elemek nincsenek feltüntetve  $L_k$ -ban.)

Tehát ha  $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \dots, n-1; \quad i = k+1, \dots, n),$

akkor  $L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$ , vagyis megkaptuk a GE  $k$ -adik lépését.

**Példa:** GE az  $L_k$  mátrixokkal

Írjuk fel a Gauss-elimináció lépéseit mátrixszorzások segítségével a következő mátrix esetén (ua. mint az előző előadáson)!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

**Megoldás:** 1. lépés

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

## 2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

Tehát  $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$ , a kapott felsőháromszög alakot  $U$ -val jelöljük.

Fejezzük ki  $A$ -t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=: L} \cdot U = L \cdot U.$$

Ezzel megkaptuk az  $A$  mátrix  $LU$ -felbontását. Ennek az elméletét tárgyaljuk a következőkben.



- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról**
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

**Definíció:** alsó háromszögmátrix

Az  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük, ha  $i < j$  esetén  $l_{ij} = 0$ . (A főátló felett csupa nulla.)

$$\mathcal{L} := \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} = 0 \ (i < j) \},$$

$$\mathcal{L}_1 := \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} = 0 \ (i < j), \ l_{ii} = 1 \}.$$

**Definíció:** felső háromszögmátrix

Az  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezzük, ha  $i > j$  esetén  $u_{ij} = 0$ . (A főátló alatt csupa nulla.)

$$\mathcal{U} := \{ U \in \mathbb{R}^{n \times n} : u_{ij} = 0 \ (i > j) \},$$

$$\mathcal{U}_1 := \{ U \in \mathbb{R}^{n \times n} : u_{ij} = 0 \ (i > j), \ u_{ii} = 1 \}.$$

## Állítás: háromszögmátrixról

- 1 Ha  $L', L'' \in \mathcal{L}$ , akkor  $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}$ .
- 2 Ha  $U', U'' \in \mathcal{U}$ , akkor  $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}$ .
- 3 Ha  $L', L'' \in \mathcal{L}_1$ , akkor  $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}_1$ .
- 4 Ha  $U', U'' \in \mathcal{U}_1$ , akkor  $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}_1$ .
- 5 Ha  $L \in \mathcal{L}$  és  $\exists L^{-1}$ , akkor  $L^{-1} \in \mathcal{L}$ .
- 6 Ha  $U \in \mathcal{U}$  és  $\exists U^{-1}$ , akkor  $U^{-1} \in \mathcal{U}$ .
- 7 Ha  $L \in \mathcal{L}_1$ , akkor  $\exists L^{-1}$  és  $L^{-1} \in \mathcal{L}_1$ .
- 8 Ha  $U \in \mathcal{U}_1$ , akkor  $\exists U^{-1}$  és  $U^{-1} \in \mathcal{U}_1$ .

**Biz.:** házi feladat (beadható).



**Definíció:**  $L_k$ 

$L_k := I - \ell_k e_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ahol  $\ell_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\ell_k)_i = 0$  ( $i \leq k$ ) és  $e_k \in \mathbb{R}^n$  a  $k$ -adik egységvektor.

**Állítás:**  $L_k$  inverze

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^\top.$$

**Biz.:**

$$L_k \cdot L_k^{-1} = (I - \ell_k e_k^\top)(I + \ell_k e_k^\top) = I - \underbrace{\ell_k e_k^\top + \ell_k e_k^\top}_0 - \underbrace{\ell_k e_k^\top \ell_k e_k^\top}_0 = I. \quad \square$$

Szemléletesen?

Hogyan szorzunk össze két ilyen mátrixot?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ \color{red}{7} & \color{red}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

A bal oldali sorrendben „szépen” szorzódik. Általában is.

**Állítás:**  $L_k$  mátrixok szorzata

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \dots + \ell_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}^\top.$$

Szemléletesen?

**Biz.:** Indukcióval.

•

$$\begin{aligned} L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} &= (I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top)(I + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top) = \\ &= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \ell_1 \underbrace{(\mathbf{e}_1^\top \ell_2)}_0 \mathbf{e}_2^\top = \\ &= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top \end{aligned}$$

- Tegyük fel, hogy  $k + 1 \leq n - 1$  és

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} = I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top.$$

- $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} =$

$$= (I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top)(I + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top) =$$

$$= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top +$$

$$+ \underbrace{\ell_1 \mathbf{e}_1^\top \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top}_{\text{kiesnek}} =$$

$$= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top = \checkmark.$$



- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval**
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény



**Definíció:**  $LU$ -felbontás

Az  $A$  mátrix  $LU$ -felbontásának nevezzük az  $L \cdot U$  szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \quad U \in \mathcal{U}.$$

A Gauss-eliminációt felírhatjuk alsó háromszögmátrixok segítségével:

$$L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A = U,$$

majd az inverzekkel egyesével átszorozva:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_L \cdot U = LU.$$

A fenti szorzat is alsó háromszögmátrix. Láttuk az előző tételből, hogy az  $L$  mátrix elemeit egy egységmátrixból kapjuk úgy, hogy minden oszlopba ez egyesek alá beletesszük a neki megfelelő  $\ell_k$  vektor nem nulla elemeit (ezek a GE-s hányadosok). Tehát ennek előállításához nem kell több művelet, mint amit a GE-val végzünk.

**Példa:**  $LU$ -felbontás GE-val

Készítsük el a példamátrixunk  $LU$ -felbontását

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) részletezve az  $L_k$  mátrixokat, a számítás menetét,
- (b) majd „tömör” írásmóddal!

**Megoldás: (a) 1. lépés**

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$L_1^{-1}$ -et úgy kapjuk, hogy  $L_1$  1. oszlopában az átló alatti elemeket  $(-1)$ -szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ezek a tényleges GE-s hányadosok. Láttuk, hogy  $L$  meghatározáshoz csak  $\ell_1$ -re van szükségünk.

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

$L_2^{-1}$ -et úgy kapjuk, hogy  $L_2$  2. oszlopában az átló alatti elemeket  $(-1)$ -szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ez a tényleges GE-s hányados. Láttuk, hogy  $L$  meghatározáshoz csak  $\ell_2$ -re van szükségünk.

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát  $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$

Fejezzük ki  $A$ -t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Tehát  $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ . Az  $L_k$  mátrixok szorzatára felírt tétel alapján ehhez nem kell mátrixot szoroznunk, csak az  $\ell_k$  vektorokból kell összeraknunk  $L$ -et.

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményt szorzással is ellenőrizhetjük.

**(b) Tömör írásmódban: 1. lépés**

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni (éppen ennyi nulla van az oszlopban). Könnyen megjegyezhető ezek képzése: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Ezzel minden a helyére került. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó  $2 \times 2$ -es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -4 & 5 & -2 & -2 & \\ 6 & -5 & 4 & 3 & \end{array} \right] \rightarrow$$

## 2. lépés:

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó  $2 \times 2$ -es mátrix részen, a többi változatlanul leírjuk.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -2 & & & 5 & 4 \\ 3 & & & -5 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -2 & & & 5 & 4 \\ 3 & & & -5 & -5 \\ \hline & & & -5 & -1 \end{array} \right]$$

Olvassuk ki a keresett mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$



## Tétel: LU-felbontás létezése

Ha a Gauss-elimináció végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül (azaz  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ )), akkor az  $A$  mátrix LU-felbontása létezik.

**Biz.:** Ha a GE végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül, akkor az  $L_k$  mátrixok felírhatók és  $L, U$  előállítható.  $\square$

**Megj.:**

- $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)}$  és  $D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$
- Ha van  $A$ -nak LU-felbontása, ahol  $U$  átlójában nem nullák állnak, akkor  $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ .
- $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) = D_n \neq 0$ .
- Ha a GE végrehajtható, de  $a_{nn}^{(n-1)} = 0$ , akkor létezik LU-felbontás, de  $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = 0$ -ból  $u_{nn} = 0$ . Ebben az esetben a LER vagy nem oldható meg vagy nem egyértelműen.

## **Tétel:** $LU$ -felbontás létezése és egyértelműsége (főminorokkal)

- Ha  $D_k \neq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ), akkor létezik az  $A$  mátrix  $LU$ -felbontása és  $u_{kk} \neq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ).
- Ha  $\det(A) \neq 0$ , akkor a felbontás egyértelmű.

**Biz.: létezés:** az  $LU$ -felbontás létezése a GE-nál tanult tételünkből következik.  $D_k \neq 0 \Leftrightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$  a megadott indexekre, ezért a GE végrehajtható és az  $L, U$  mátrixok előállíthatóak.

**Egyértelműség:** indirekt tegyük fel, hogy az  $A$  invertálható mátrix  $LU$ -felbontása nem egyértelmű, azaz legalább két különböző felbontás létezik:

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

Az egyenlőséget  $U_2^{-1}$ -zel jobbról, majd  $L_1^{-1}$ -zel balról szorozva kapjuk, hogy

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = L_1^{-1} \cdot L_2.$$

A szóban forgó inverzek léteznek, hiszen

$$\det(A) = \det(L_i) \cdot \det(U_i) = \det(U_i) \neq 0, \quad i = 1, 2\text{-re.}$$

Az egyenlőség bal oldalán egy felső háromszögmátrix, jobb oldalán pedig egy 1 főátlójú alsó háromszögmátrix áll. Ez csak úgy lehet, ha az egységmátrixról van szó. Tehát

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = I \quad \implies \quad U_1 = U_2,$$

$$L_1^{-1} \cdot L_2 = I \quad \implies \quad L_1 = L_2.$$

Ellentmondásra jutottunk, vagyis az  $LU$ -felbontás egyértelmű.  $\square$

## $L$ és $U$ megadása GE-val

Az eddigieket összefoglalva felírhatjuk az  $A = LU$  felbontást:

$$L \in \mathcal{L}_1 \text{ és } l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad (i > j), \quad U \in \mathcal{U} \text{ és } u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \quad (i \leq j).$$

# Miért jó az $LU$ -felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az  $Ax = b$  LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az  $A = LU$  felbontás.

Ekkor  $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$  helyett  $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 oldjuk meg az  $Ly = b$  alsó háromszögű,  $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 majd az  $Ux = y$  felső háromszögű LER-t.  $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításként: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:

$$n \cdot (2n + 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n).$$

Persze valamikor elő kell állítani az  $LU$ -felbontást.  $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

Előnyös, ha sokszor ugyanaz  $A$ : az  $ILU$ -algoritmusnál illetve az inverz iterációnál látjuk majd alkalmazását.

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása**
- 5 Műveletigény

# Az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

- Nem ismerjük  $L$ -t és  $U$ -t: ismeretlenek a mátrixokban.
- Viszont szorzatukat ismerjük:  $LU = A$ .
- $A$  egyes elemeit a mátrixszorzás alapján felírva egyenleteket kapunk  $L$  és  $U$  elemeire.
- *Jó sorrendben* felírva az egyenleteket, mindig megkapjuk egy-egy új ismeretlen értékét.
- A GE-nál láttuk, hogy  $U$  1. sora azonos  $A$  1. sorával (a GE az 1.sort nem változtatja).
- $L$  1. oszlopát úgy kapjuk, hogy  $A$  1. oszlopát leosztjuk  $a_{11}$ -gyel.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

oszlopfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

parkettaszerűen



**Példa:**  $LU$ -felbontás közvetlenül

- (a) Készítsük el a példamátrixunk  $LU$ -felbontását közvetlenül a mátrixszorzás alapján.
- (b) Nézzünk egy újabb példát is. (Vigyázat,  $\det(B_2) = 0$ .)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

**Sorfolyonosan:**  $U$  1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 & u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

**Sorfolytanosan:**  $U$  1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & \rightsquigarrow & \text{ellentmondásos egyenlet} \end{aligned}$$

Mivel  $D_2 = \det(B_2) = 0$ , így  $u_{22} = 0$  lesz. Az  $LU$ -felbontás nem készíthető el. GE-t alkalmazva  $a_{22}^{(1)} = 0$  lenne, emiatt sort kéne cserélni.

# Az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

## **Tétel:** az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$  és  $U$  mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ (felső)} \quad & u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

# Az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

**Biz.:** Írjuk fel az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, mint mátrixszorzat  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét feltéve, hogy  $A = L \cdot U$ . Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha  $i \leq j$ , azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor  $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$ , valamint  $l_{ii} = 1$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből  $u_{ij}$  kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

## Az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

**Biz. folyt.** Ha  $i > j$ , azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor  $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha  $u_{jj} \neq 0$  (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor  $l_{ij}$  kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diásorát) megyünk végig az  $(i, j)$  indexekkel  $A$  elemein, akkor az  $l_{ij}$  illetve  $u_{ij}$  értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3  $LU$ -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

**Tétel:** Az  $LU$ -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

**Biz.:** A GE-ből trivi, mert vele az  $LU$ -felbontás is előállítható.

**A képletekből:** Rögzített  $j$ -re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$u_{ij}$ -hez  $(i - 1)$  szorzás és  $(i - 1)$  összeadás kell. Összesen  $2(i - 1)$  művelet. Rögzített  $i$ -re:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right),$$

$l_{ij}$ -hez 1 osztás,  $(j - 1)$  szorzás és  $(j - 1)$  összeadás kell. Összesen  $2j - 1$  művelet.



$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 2(i-1) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (2j-1) = \\
 & \sum_{j=1}^n 2 \cdot \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=2}^n \left( 2 \cdot \frac{(i-1)i}{2} - (i-1) \right) = \\
 & \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j + \sum_{i=2}^n (i-1)^2 = \\
 & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square
 \end{aligned}$$

# A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

**Tétel:** Az  $Ux = y$  megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

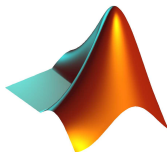
**Biz.:** lásd GE visszahelyettesítés.

**Tétel:** Az  $Lx = b$  megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

**Biz.:** Rögzített  $i$ . sorra  $(i - 1)$  szorzás és  $(i - 2)$  összeadás.  
Összesen:  $2i - 3$  művelet.

$$\sum_{i=2}^n (2i-3) = \sum_{i=2}^n 2i - 3(n-1) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 3(n-1) = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$



- 1 Az  $LU$ -felbontás működése „kisebb” ( $n \approx 7$ ) mátrixokra,
- 2 valamint „nagyobb” mátrixokra ( $n \approx 50$ ) színkóddal.
- 3 LER megoldása  $LU$ -felbontás segítségével.
- 4 Sok LER ( $m \approx 10, 100$ ) megoldása futási idejének összevetése nagyobb mátrixok ( $n \approx 50, 100, 200$ ) esetén: GE-val valamint az  $LU$ -felbontás kihasználásával.