Numerikus módszerek 1. **2. ZH megoldása** **2015. november 30.**

Programtervező informatikus BSc szak

1. Bármely $\|.\|$ mátrixnormára igaz, hogy (2 pont)

$$\|\mathbf{A}\| \geq \rho(\mathbf{A}).$$

Vegyük az $\mathbf{e} = [1, \ldots, 1]^T$ csupa egyest tartalmazó vektort. Ekkor

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = c \cdot \mathbf{e}, \quad \text{ahol } c = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{e}$ sajátvektora és c sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, de

$$c = \|\mathbf{A}\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \rho(\mathbf{A}).$$

A két egyenlőtlenségből $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

(4 pont)

2. a) Az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

(2 pont)

Figyelembe véve, hogy $a \in [1;3]$ a következő eredményt kapjuk

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{3,\,3,\,a\} = 3, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 = \max\left\{1,\,1,\,\frac{1}{a}\right\} = 1,$$

$$\mathrm{cond}_1(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 = 3 \cdot 1 = 3$$

(3 pont)

$\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámhoz számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] = \\ &= (a-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] = 0\end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1.$$

Mivel $a \in [1;3]$, ezért $\max|\lambda_i| = 3$ és $\min|\lambda_i| = 1$, tehát

$$\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3$$

(6 pont)

b) Az előző részben kapott eredmények alapján bármely $a \in [1;3]$ értékre

$$\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \mathrm{cond}_1(\mathbf{A}).$$

(1 pont)

3. a) Először számoljuk az átmenetmátrixot:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk: (3 pont)

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1.$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns tulajdonságára hivatkozhatunk. (1 pont)

b) Az iteráció hibabecslése (1 pont)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty$$

c) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Jacobi-iteráció vektoros alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{J(1)},$$

(1 pont)

ahol

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{D^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{c}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(1 pont)

A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}\|_\infty = \frac{3}{2}.$$

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \le 10^{-3}$$

$$3000 \le 2^k \quad \Rightarrow \quad k \ge 12$$

(2 pont)

4. a) Először számoljuk az átmenetmátrixot:

$$\mathbf{B}_{S(1)} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{-\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, ezért a konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. (3 pont)

A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns vagy szimmetrikus és pozitív definit tulajdonságára hivatkozhatunk. (A pozitív definitséget a főminorokból állapítjuk meg.) Ekkor az átmenetmátrixot sem kell kiszámolni. (3 pont)

b) A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja 3×3-es mátrix esetén

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} + a_{13} \cdot x_3^{(0)} - b_1\right) \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)} + a_{23} \cdot x_3^{(0)} - b_2\right) \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} \cdot \left(a_{31} \cdot x_1^{(1)} + a_{32} \cdot x_2^{(1)} - b_3\right)
\end{aligned}$$

Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = [2,\ 2,\ 2]^T$-ből indulva.

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -1 \cdot (-1) = 1 \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-x_3^{(0)} - 3\right) = \frac{1}{2} \cdot (2+3) = \frac{5}{2} \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-x_2^{(1)} - 2\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{2} + 2\right) = \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{9}{8} \end{bmatrix}.$$

(3 pont)

c) Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix szigorúan diagonálisan domináns, ezért

$$\left\|\mathbf{B_{S(1)}}\right\|_\infty \leq \left\|\mathbf{B_{J(1)}}\right\|_\infty,$$

vagyis a G-S iteráció legalább olyan gyors mint a Jacobi. Sőt, mivel $\mathbf{A}$ mátrix tridiagonális is, ezért

$$\rho(\mathbf{B_{S(1)}}) = \rho(\mathbf{B_{J(1)}})^2$$

is igaz, tehát a G-S kétszer olyan gyors mint a Jacobi. (1 pont)

5. a) A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0,\ \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol

$$0 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$$

az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.
Látjuk, hogy a feladat megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit ismernünk kell.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda) - 1\right] = \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0
\end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}.$$

Innen látszik, hogy minden sajátérték pozitív, továbbá $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$, így teljesülnek a tétel feltételei.
Erre az ellenőrzésre jár (1 pont). Alkalmazva a fenti tétel jelöléseit kapjuk, hogy

$$m = 1, \quad M = 3 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{3+\sqrt{2}})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. (5 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4+\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{7}.$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (3 pont)

6. Az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, melynek alakja

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q},$$

ahol $\mathbf{J} = \{1,3),(3,2)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & & * \\ & & \\ & * & \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az $\mathbf{A}$ mátrix szétbontása a pozícióhalmaz első sora és oszlopa alapján:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt az első oszlopon:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk (ezek a Gauss-eliminációs hányadosok). $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt. (3 pont)

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozícióhalmaz második sora és oszlopa alapján:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel a kapott $\mathbf{P_2}$ mátrixunk felsőháromszög alakú, így nem kell eliminálnunk.

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{I}, \quad \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{P_2}.$$

(2 pont)

Ezután felírjuk a kért mátrixokat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1}L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(3 pont)