

## Numerikus módszerek 1.

### Programtervező informatikus BSc Vizsgakérdések és válaszok

Frissítve: 2017. január 29.

1. Definiálja a gépi számok halmazát (a tanult modellnek megfelelően)!  
Adja meg a normalizált lebegőpontos szám alakját!

Az  $a = \pm m 2^k$ , ( $m = \sum_{i=1}^t m_i 2^{-i}$ ,  $m_i \in \{0, 1\}$ ,  $m_1 = 1$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) számot normalizált lebegőpontos számnak nevezzük, ahol  $m$  a mantissza,  $t$  a mantissza hossza,  $k$  a karakterisztika. Jelölése:  $a = \pm[m_1 \dots m_t | k]$ .

Gépi számok halmaza:  $M = M(t, k^-, k^+)$

$$M(t, k^-, k^+) := \left\{ a = \pm m 2^k \mid m = \sum_{i=1}^t m_i 2^{-i}, m_i \in \{0, 1\}, m_1 = 1, k^- \leq k \leq k^+ \right\} \cup \{0\}.$$

2. Írja le a gépi számhalmaz nevezetes számait!

A legnagyobb pozitív szám:  $M_\infty = +[11 \dots 1 | k^+] = (1 - \frac{1}{2^t}) 2^{k^+}$

A legkisebb pozitív szám:  $\varepsilon_0 = [10 \dots 0 | k^-] = \frac{1}{2} 2^{k^-}$

A számábrázolás relatív pontossága:  $\varepsilon_1 = \underbrace{[10 \dots 01 | 1]}_{1 \text{ rákövetkezője}} - \underbrace{[10 \dots 00 | 1]}_1 = \frac{1}{2^t} 2^1 = 2^{1-t}$

3. Definálja az input függvény fogalmát, és írja le a hibájára vonatkozó tételt!

Legyen  $\mathbb{R}_M := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M_\infty\}$ .

Az  $f_l: \mathbb{R}_M \rightarrow M$  függvényt input függvénynek nevezzük, ha

$$f_l(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az } x\text{-hez közelebbi gépi szám a kerekítés szerint,} & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

Tétel: Ha  $x \in \mathbb{R}_M$ , akkor

$$|x - f_l(x)| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } 0 \leq |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2} |x| \varepsilon_1, & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

4. Adja meg a hibaszámítás alapfogalmait: hiba, abszolút-, relatív hiba és korlátjaik!

Legyen  $A$  a pontos érték,  $a$  pedig közelítő érték. Ekkor

A pontos hiba:  $\Delta a = A - a$

Abszolút hiba:  $|\Delta a| = |A - a|$

Egy abszolút hibakorlát:  $\Delta_a \geq |\Delta a|$

Relatív hiba:  $\delta a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$

Egy relatív hibakorlát:  $\delta_a \geq |\delta a|$

5. Írja le az alpműveletek abszolút hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\begin{aligned}\Delta_{a\pm b} &= \Delta_a + \Delta_b \\ \Delta_{ab} &= |a|\Delta_b + |b|\Delta_a \\ \Delta_{\frac{a}{b}} &= \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{b^2} = \frac{|a|}{|b|} \left( \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|} \right)\end{aligned}$$

6. Írja le az alpműveletek relatív hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\begin{aligned}\delta_{a\pm b} &= \frac{|a|\delta_a + |b|\delta_b}{|a \pm b|} \\ \delta_{ab} &= \delta_a + \delta_b \\ \delta_{\frac{a}{b}} &= \delta_a + \delta_b\end{aligned}$$

7. Írja le a függvényérték abszolút hibakorlátjára vonatkozó összefüggést!

Tegyük fel, hogy  $f \in C^1(k(a))$  és  $k(a) := [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$ , ekkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \Delta_a, \text{ ahol } M_1 := \max\{|f'(x)| : x \in k(a)\}.$$

8. Írja le a függvényérték abszolút- és relatív hibakorlátjára vonatkozó összefüggést (a függvényről kétszer folytonosan deriválhatóságot feltételezve)!

Tegyük fel, hogy  $f \in C^2(k(a))$ , ekkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)|\Delta_a + \frac{M_2}{2}\Delta_a^2, \text{ ahol } M_2 := \max\{|f''(x)| : x \in k(a)\}.$$

A relatív korlátra

$$\delta_{f(a)} = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} \delta_a.$$

9. Definiálja az  $f$  függvény  $a$  pontbeli kondíciós számát!

A  $c(f, a) = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$  mennyiséget az  $f$  függvény  $a$ -beli kondíciós számának nevezzük.

10. Mennyi a Gauss-elimináció illetve a visszahelyettesítés műveletigénye? ( $x + \mathcal{O}(n^y)$ )

A Gauss elimináció műveletigénye:

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

A visszahelyettesítés műveletigénye:

$$n^2 + \mathcal{O}(n), \text{ ahol } \mathcal{O}(n) = 0, \text{ így a műveletigény } n^2$$

11. Írja fel az  $L_k$  mátrixot, melyet  $A^{(k-1)}$ -re alkalmazva a Gauss-elimináció egy lépését kapjuk!

A Gauss-elimináció  $k$ . lépése felírható  $L_k A^{(k-1)} = A^{(k)}$  alakban, ahol  $L_k \in \mathcal{L}^{(1)}$

$$\text{és } L_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_{k+1,k} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{nk} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I - l_k e_k^\top, \text{ ahol } l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{bmatrix}, \text{ és } l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

12. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére! (Gauss-eliminációval)

Ha a Gauss-elimináció elvégezhető sor és oszlop csere nélkül, akkor létezik az  $A = LU$  felbontás, ahol  $L \in \mathcal{L}_1$ ,  $U \in \mathcal{U}$ .

13. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére és egyértelműségére! (Gauss-elimináció nélkül)

Ha  $D_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^k) \neq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ),  
akkor az  $A = LU$  felbontás létezik, és  $u_{kk} \neq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ).

Ha  $\det(A) \neq 0$ , akkor a felbontás egyértelmű.

14. Mennyi az LU-felbontás, illetve egy háromszög mátrixú LER megoldásának műveletigénye? ( $x + \mathcal{O}(n^y)$ )

Az LU-felbontásnak  $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ ,  
egy háromszög mátrixú LER megoldásának  $n^2 + \mathcal{O}(n)$  a műveletigénye.

15. Mikor nevezzük A-t szimmetrikus és pozitív definit mátrixnak?

Az  $A$  mátrix szimmetrikus mátrix, ha  $A^\top = A$  és  
pozitív definit, ha  $\langle Ax, x \rangle = x^\top Ax > 0$  ( $\forall x \neq 0$ )

16. Mikor nevezzük A-t a soraira (oszlopaira) nézve szigorúan diagonálisan dominánsnak?

$A$  szigorúan diagonálisan domináns a soraira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i\text{-re.}$$

$A$  szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \quad \forall i\text{-re.}$$

**17. Definiálja  $\mathbf{A}$  fél sáv szélességét!**

Az  $\mathbf{A}$  fél sáv szélessége  $s \in \mathbb{N}$ , ha  
 $\forall i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0$ , és  
 $\exists k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0$ .

**18. Definiálja  $\mathbf{A}$  profilját!**

Az  $\mathbf{A}$  profilja a  $k_i$  és  $l_j$  számok összessége, melyekre  
 $j = 1 \dots k_i$ -re  $a_{ij} = 0$  és  $a_{i, k_i+1} \neq 0$  illetve  
 $i = 1 \dots l_j$ -re  $a_{ij} = 0$  és  $a_{l_j+1, j} \neq 0$ .

**19. Definiálja az  $\mathbf{A}$  mátrix  $\mathbf{A}_{11}$ -re vonatkozó Schur-komplementerét!**

Ha  $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  és invertálható, akkor az  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}] = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}$  mátrix az  $\mathbf{A}$ -nak az  $\mathbf{A}_{11}$ -re vonatkozó Schur-komplementere.

**20. Mondja ki a Gauss-elimináció (legalább) 4 tulajdonságának megmaradási tételét!**

- Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, akkor  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]$  is szimmetrikus.
- Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus pozitív definit, akkor  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]$  is szimmetrikus pozitív definit.
- Ha  $\mathbf{A}$  szigorúan diagonálisan domináns, akkor  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]$  is szigorúan diagonálisan domináns.
- Ha  $\mathbf{A}$  fél sáv szélessége  $s$ , akkor  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]$  fél sáv szélessége is legfeljebb  $s$ . (A sávon kívüli nulla elemek megmaradnak.)
- $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]$  profilja az  $\mathbf{A}$  profiljához képest nem csökkenhet. (A soronkénti és oszloponkénti első nulla elemig minden nulla marad.)
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow \det([\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{11}]) \neq 0$ .

**21. Definiálja a Cholesky-felbontást!**

$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ , ahol  $\mathbf{A}$  szimmetrikus,  $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$  és  $l_{ii} > 0 \ \forall i$ -re.

**22. Milyen tételt tanult a Cholesky-felbontásról?**

Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus és pozitív definit, akkor  $\exists! \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$  felbontás.

**23. Mennyi a Cholesky-felbontás, illetve egy háromszög mátrixú LER megoldásának műveletigénye? ( $x + \mathcal{O}(n^y)$ )**

A Cholesky-felbontás műveletigénye  $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ ,  
 egy háromszög mátrixú LER megoldásának  $n^2 + \mathcal{O}(n)$  a műveletigénye.

**24. Milyen tételt tanult a QR-felbontásról?**

Ha  $\mathbf{A}$  oszlopai lineárisan függetlenek, akkor  $\exists \mathbf{A} = \mathbf{QR}$  felbontás.

Ha még feltesszük, hogy az  $r_{ii} > 0 \forall i$ -re, akkor egyértelmű is.

**25. Mennyi a QR-felbontás műveletigénye?**

$$2n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

**26. Definiálja a Householder mátrixot!**

A  $\mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$  ( $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_2 = 1$ ) mátrix a  $\mathbf{v}$  vektorhoz tartozó Householder mátrix.

**27. Írja le a Householder-transzformáció 4 tanult tulajdonságát!**

- 1)  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$  szimmetrikus ( $\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$ ).
- 2)  $\mathbf{H}$  ortogonális ( $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$ ).
- 3)  $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ .
- 4)  $\forall \mathbf{y} : \mathbf{y} \perp \mathbf{v}$ -re  $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{y} = \mathbf{y}$ .

**28. Adja meg azt a Householder mátrixot, melyre az azonos hosszúságú  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  vektorok esetén  $\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ !**

Legyen  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) és  $\|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2$ , ekkor

$$\mathbf{v} := \pm \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2} \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

**29. Írja le a vektornorma definiáló tulajdonságait!**

A  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt vektornormának nevezzük, ha

- 1)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,
- 2)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
- 3)  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,
- 4)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

**30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!**

A  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt mátrixnormának nevezzük, ha

- 1)  $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- 2)  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,
- 3)  $\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- 4)  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- 5)  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**31. Írja le az indukált mátrixnormáról tanult tételt!**

Legyen  $\|\cdot\|_v$  tetszőleges vektornorma, ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$

mennyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

### 32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?

A  $\|\cdot\|$  mátrixnorma és a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma illeszkedik, ha  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

### 33. Írja le az 1, 2, $\infty$ és Frobenius mátrixnormát!

1-es mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

2-es mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \varrho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{\frac{1}{2}} = \left( \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\infty$  mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Frobenius mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 34. Mit nevezünk egy mátrix spektrálsugarának?

A  $\varrho(\mathbf{B}) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(\mathbf{B})|$  mennyiség a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix spektrálsugara.

### 35. Definiálja a kondíciós számot mátrixok esetén! Mikor értelmezhető?

A  $\text{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$  mennyiséget az  $\mathbf{A}$  kondíciós számának nevezzük. Akkor értelmezhető, ha  $\mathbf{A}$ -nak létezik inverze.

### 36. Írja le a LER jobboldalának változásakor érvényes perturbációs tételt!

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{A}$  invertálható, ekkor illeszkedő normákra

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

**37. Írja le a LER mátrixának változásakor érvényes perturbációs tételt!**

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{A}$  invertálható,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ,  $\|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$  és  $\|\cdot\|$  indukált norma, ekkor

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

**38. Definiálja a reziduum vektort (maradékvektort)!**

Legyen  $\tilde{\mathbf{x}}$  közelítő megoldása az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszernek. Ekkor az  $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$  vektort reziduum vektornak nevezzük.

**39. Definiálja a relatív maradékot !**

Legyen  $\tilde{\mathbf{x}}$  közelítő megoldása az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszernek, ahol  $\mathbf{A}$  invertálható. Ekkor az

$$\eta := \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}\|}$$

menyiséget relatív maradéknak nevezzük.

**40. Írja le a relatív maradékról tanult két állítást!**

1. *Állítás:* Ha  $\mathbf{A}$  invertálható, akkor bármely illeszkedő normában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

2. *Állítás:* Ha  $\mathbf{A}$  invertálható, akkor a 2-es normában

$$\eta = \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2}.$$

**41. Írja le a kondíciós szám (legalább) 4 tulajdonságát!**

- 1)  $c \neq 0$  ( $\in \mathbb{R}$ ) esetén  $\text{cond}(c\mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A})$ .
- 2) Indukált mátrixnormában:  $\text{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$ .
- 3) Ha  $\mathbf{Q}$  ortogonális mátrix, akkor  $\text{cond}_2(\mathbf{Q}) = 1$ .
- 4) Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max |\lambda_i(\mathbf{A})|}{\min |\lambda_i(\mathbf{A})|}$ .
- 5) Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus és pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max \lambda_i(\mathbf{A})}{\min \lambda_i(\mathbf{A})}$ .
- 6) Ha  $\mathbf{A}$  invertálható, akkor  $\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \frac{\max |\lambda_i(\mathbf{A})|}{\min |\lambda_i(\mathbf{A})|}$ .

**42. Írja le a kontrakció fogalmát  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény esetén!**

A  $\varphi$  függvény kontrakció, ha  $\exists q: 0 \leq q < 1$

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq q \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

**43. Írja le a Banach-féle fixponttételt  $\mathbb{R}^n$ -re!**

Ha  $\varphi$  kontrakció  $\mathbb{R}^n$ -en, akkor

1)  $\exists! \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  fixpont, azaz  $\mathbf{x}^* = \varphi(\mathbf{x}^*)$ .

2)  $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^{(k+1)} := \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) iterációs sorozat konvergens és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^*.$$

3) Hibabecslés:  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq q^k \cdot \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|$  illetve

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

**44. Adjon elégséges feltételt az  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$  alakú iterációk konvergenciájára!**

Ha  $\|\mathbf{B}\| < 1$ , akkor az  $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$  iteráció  $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ -re konvergál az  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  megoldásához.

**45. Írja le az indukált normák és spektrálsugár kapcsolatáról tanult lemmát!**

$$\varrho(\mathbf{B}) = \inf\{\|\mathbf{B}\| : \text{ahol } \|\cdot\| \text{ indukált norma}\}$$

(azaz  $\forall \varepsilon > 0 \exists \|\cdot\|$  indukált norma:  $\|\mathbf{B}\| < \varrho(\mathbf{B}) + \varepsilon$ ).

**46. Adjon szükséges és elégséges feltételt az  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$  alakú iterációk konvergenciájára!**

$\forall \mathbf{x}^{(0)} : \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$  iteráció konvergál az  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  megoldásához  $\Leftrightarrow \varrho(\mathbf{B}) < 1$

**47. Írja le a Jacobi- és a csillapított Jacobi iterációt**

*Jacobi iteráció*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\underbrace{\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U})}_{\mathbf{B}_J} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_J}$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

*Csillapított Jacobi iteráció*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{((1 - \omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}))}_{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\omega\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{J(\omega)}}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$



48. Adjon elégséges feltételt a Jacobi iteráció és a csillapított Jacobi iteráció konvergenciájára!

*Jacobi iteráció*

Ha  $\mathbf{A}$  szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor  $\|\mathbf{B}_J\|_\infty < 1$  (azaz  $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ -ra konvergens a  $J(1)$ ).

*Csillapított Jacobi iteráció*

Ha  $J(1)$  konvergens  $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ -ra, akkor  $0 < \omega < 1$ -re a  $J(\omega)$  is konvergens.

49. Írja le a Gauss-Seidel-iterációt (a koordinátás alakot is!)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)}}_{\mathbf{B}_S} + \underbrace{(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_S}$$

*Koordinátás alak:*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

50. Írja le a Gauss-Seidel relaxációs módszert (a koordinátás alakot is!)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega) \cdot \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)}}_{\mathbf{B}_{S(\omega)}} + \underbrace{\omega \cdot (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{S(\omega)}}$$

*Koordinátás alak:*

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

51. Milyen szükséges és elégséges feltételt tanult a Gauss-Seidel relaxáció konvergenciájáról?

Ha  $S(\omega)$  konvergens  $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ -ra, akkor az  $\omega \in (0, 2)$ .

Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, pozitív definit és  $\omega \in (0, 2)$ , akkor az  $S(\omega)$  konvergens  $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ -ra.

52. Szigorúan diagonálisan domináns mátrix esetén mit tud mondani a Jacobi- és a Gauss-Seidel-iteráció konvergenciájáról?

Ha  $\mathbf{A}$  szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor  $\|B_s\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty < 1$  (azaz  $S(1)$  és  $J(1)$  is konvergens).

53. Milyen tételt tanult szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális mátrixok esetén a  $J(1)$ ,  $S(1)$ ,  $S(\omega)$  módszerekről?

Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális, akkor  $J(1)$ ,  $S(1)$  és  $S(\omega)$  is konvergens  $\omega \in (0, 2)$ -re, és

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_J)^2}}$$

az optimális paraméter  $S(\omega)$ -ra.

Ha  $\varrho(B_J) = 0$ , akkor  $\varrho(B_{S(\omega)}) = \varrho(B_S) = 0$ ,

ha  $\varrho(B_J) \neq 0$ , akkor  $\varrho(B_{S(\omega)}) = \omega_0 - 1 < \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2$ .

#### 54. Vezesse le a Richardson-típusú iterációk alakját!

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \Leftrightarrow \mathbf{0} = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad p \in \mathbb{R} \\ \mathbf{0} &= -p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x} - p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} = (\mathbf{I} - p\mathbf{A})\mathbf{x} + p\mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \underbrace{(\mathbf{I} - p\mathbf{A})}_{\mathbf{B}_{\mathbf{R}(p)}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{p\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{\mathbf{R}(p)}} \end{aligned}$$

#### 55. Milyen tételt tanult a Richardson-típusú iterációkról?

Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, pozitív definit és a sajátértékeire:

$$0 < m = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = M,$$

akkor  $p \in (0, \frac{2}{M})$ -re  $R(p)$  konvergens  $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ -ra.

Az optimális paraméter  $p_0 = \frac{2}{M+m}$  és ekkor  $\varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{M-m}{M+m}$ .

#### 56. Definiálja a $J$ pozíció halmazra illeszkedő részleges LU-felbontást!

Legyen  $J$  a mátrix elemek pozícióinak olyan halmaza, mely nem tartalmazza a főátlót. Az  $\mathbf{A}$  mátrix  $J$  pozícióhalmazra vonatkozó ILU-felbontásán olyan LU-felbontást értünk, melyre  $\mathbf{L}$  és  $\mathbf{U}$  alakja a szokásos, továbbá

$$(i, j) \in J \text{-re } l_{ij} = 0, u_{ij} = 0 \text{ és } (i, j) \notin J \text{-re } (\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{LU})_{ij}.$$

#### 57. Írja le az ILU-felbontás algoritmusát ( $\mathbf{L}$ , $\mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ előállításának felírása)!

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 := \mathbf{A}$$

$k = 1, \dots, n-1$ :

1.) Szétbontás:  $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k$  alakra, ahol

$$(\mathbf{P}_k)_{ik} = 0 \quad (i, k) \in J$$

$$(\mathbf{P}_k)_{kj} = 0 \quad (k, j) \in J$$

$$(\mathbf{Q}_k)_{ik} = -\tilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i, k) \in J$$

$$(\mathbf{Q}_k)_{kj} = -\tilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k, j) \in J$$

2.) Elimináció:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k$$

Az ILU felbontással kapott részmatrixokból:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}}_n, \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \dots \mathbf{L}_{n-1}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \dots + \mathbf{Q}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}.$$

**58. Adjon elégséges feltételt az ILU-felbontás létezésére és egyértelműségére!**

Ha  $\mathbf{A}$  szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor  $\exists!$  ILU-felbontás.

**59. Vezesse le az ILU-algoritmust! A reziduum vektor bevezetésével írja fel a gyakorlatban használt alakot is!**

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \text{ ahol } \mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U} \\ \mathbf{Ax} &= (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Px} = \mathbf{Qx} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Qx} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Qx}^{(k)} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{r}^{(0)} &:= \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)} \\ k &= 0, 1 \dots \text{leállásig} \\ \mathbf{LUs}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \quad \text{két háromszögmátrixú LER megoldása} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &:= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &:= \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{As}^{(k)}\end{aligned}$$

**60. Írja le a Bolzano-tételt!**

$$f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x^* \in (a, b) : f(x^*) = 0.$$

**61. Írja le az intervallum-felezés algoritmusát és hibabecslését!**

$$\begin{aligned}x_0 &:= a, \quad y_0 := b \\ k &= 0, 1 \dots \text{leállásig} \\ s_k &:= \frac{x_k + y_k}{2} \\ f(s_k)f(x_k) < 0 &\Rightarrow x_{k+1} := x_k, \quad y_{k+1} := s_k \\ f(s_k)f(x_k) > 0 &\Rightarrow x_{k+1} := s_k, \quad y_{k+1} := y_k \\ f(s_k)f(x_k) = 0 &\Rightarrow x^* := \frac{x_k + y_k}{2} \\ \text{Hibabecslés:} \\ |x_k - x^*|, |y_k - x^*| &< y_k - x_k \leq \frac{b - a}{2^k}\end{aligned}$$

**62. Írja le a Brouwer-féle fixponttételt!**

$$\varphi : [a; b] \rightarrow [a; b] \text{ és } \varphi \in C[a; b] \Rightarrow \exists x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$$

**63. Írja le a fixponttételt az  $[a; b]$  intervallumra!**

Legyen  $\varphi : [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció, ekkor

- 1)  $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$
- 2)  $\forall x_0 \in [a; b] : x_{k+1} := \varphi(x_k) \ (k \in \mathbb{N}_0)$  iterációs sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k) = x^*$ .
- 3) Hibabecslése:  $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|$ .

#### 64. Adjon meg elégséges feltételt a kontrakcióra!

$\varphi \in C^1[a; b]$  és  $|\varphi'(x)| \leq q < 1 \ \forall x \in [a; b] \Rightarrow \varphi$  kontrakció  $[a; b]$ -n.

#### 65. Definiálja a konvergencia rend fogalmát!

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat  $(\lim(x_k) = x^*)$   $p$ -edrendben konvergál, ha  $\exists c > 0$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

#### 66. Írja le az $m$ -ed rendű konvergenciára vonatkozó tételt!

Legyen  $\varphi \in C^m[a; b]$  és

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0, \text{ de } \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Továbbá az  $x_{k+1} := \varphi(x_k)$  sorozat konvergál  $x^*$ -hoz, ekkor a sorozat konvergenciája  $m$ -edrendű és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_m}{m!} |x_k - x^*|^m,$$

ahol  $M_m = \max\{|\varphi^{(m)}(\xi)| : \xi \in [a; b]\}$ .

#### 67. Vezesse le a Newton-módszer képletét!

A függvényt az  $(x_k, f(x_k))$  ponton áthaladó érintőjével közelítjük:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

A  $k + 1$ . közelítést az érintő és az  $x$ -tengely metszéspontjaként kapjuk.

$$-f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \Rightarrow x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

#### 68. Írja le a Newton-módszer monoton konvergencia tételét!

Legyen  $f \in C^2[a; b]$  és

- 1)  $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$ ,
- 2)  $f', f''$  állandó előjelű,
- 3)  $x_0 \in [a; b] : f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

Ekkor az  $x_0$ -ból indított Newton-módszer monoton konvergál az  $x^*$  gyökhöz.

**69. Írja le a Newton-módszer lokális konvergencia tételét!**

Legyen  $f \in C^2[a; b]$  és

- 1)  $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$ ,
- 2)  $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a; b]$  (vagyis  $f'$  állandó előjelű),
- 3)  $m_1 := \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| > 0$ ,
- 4)  $M_2 := \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| < \infty, \quad M := \frac{M_2}{2m_1}$ ,
- 5)  $x_0 \in [a; b] : |x_0 - x^*| < r := \min\{\frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b|\}$ .

Ekkor az  $x_0$ -ból indított Newton-módszer másodrendben konvergál az  $x^*$  gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2.$$

**70. Definiálja a húr-módszert!**

Tegyük fel, hogy  $f(a) \cdot f(b) < 0$  és legyen  $x_0 := a, \ x_1 := b$ , ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol  $s$  a legnagyobb index, melyre  $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$ .

**71. Definiálja a szelő-módszert!**

Legyen  $x_0 := a, \ x_1 := b$ , ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

**72. Írja le a szelő-módszer lokális konvergencia tételét!**

Legyen  $f \in C^2[a; b]$  és

- 1)  $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$ ,
- 2)  $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a; b]$  (állandó előjelű),
- 3)  $m_1 := \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| > 0$ ,
- 4)  $M_2 := \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|, \quad M := \frac{M_2}{2m_1}$ ,
- 5)  $|x^* - a|, |x^* - b| < r := \frac{1}{M}$ .

Ekkor az  $a$  és  $b$  pontból indított szelő-módszer  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  rendben konvergál az  $x^*$  gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*| \cdot |x_{k-1} - x^*|.$$

**73. Vezesse le a többváltozós Newton-módszer képletét!**

Legyen  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény, amit a Taylor-polinomjával közelítjük:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k).$$

$\mathbf{x}_{k+1}$ -re közelítésre  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)$$

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)$$

$$-[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

**74. Milyen becslést tanult polinomok gyökeinek elhelyezkedéséről?**

Legyen  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  és tegyük fel, hogy  $a_0, a_n \neq 0$ . A  $P$  polinom bármely  $x_k$  gyökére

$$\frac{1}{1 + \frac{\max_{i=1, \dots, n} |a_i|}{|a_0|}} =: r < |x_k| < R := 1 + \frac{\max_{i=0, \dots, n-1} |a_i|}{|a_n|}.$$

**75. Írja le a polinom helyettesítési értékeinek gyors számolására tanult Horner-algoritmust!**

Legyen  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  és a  $\xi \in \mathbb{R}$  pontban szeretnénk a polinom helyettesítési értékét kiszámolni.

$$a_n^{(1)} := a_n,$$

$$k = n - 1, \dots, 0$$

$$a_k^{(1)} := a_{k+1}^{(1)} \cdot \xi + a_k,$$

$$\Rightarrow P(\xi) = a_0^{(1)}.$$