Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2016.10.25.

1. (a) Írjuk fel az 1 gépi számot.

$$1 = [100000|1] = \frac{1}{2} \cdot 2$$

Írjuk fel az $\frac{1}{4}$ gépi számot.

$$\frac{1}{16} = [100000|-3] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-3}$$

(2 pont)

(b) Először váltsuk át a $0,02$-t kettes számrendszerbe.

	02
0	04
0	08
0	16
0	32
0	64
1	28
0	56
1	12
0	24
0	48
0	96
1	92

A mantissza hosszának megfelelően, az első 6 hasznos jegyet kell megtartanunk, ezek az 101000 jegyek. Mivel az utána következő 7. jegy 1, ezért felfelé kerekítünk. A karakterisztika értéke -5. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért ellenőriznünk kell, hogy a kapott számhoz vagy az alsó szomszédjához van-e közelebb $0,02$.

$$[101001|-5] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-5} = \frac{32+8+1}{2048} = \frac{41}{2048}$$

$$[101000|-5] = \frac{40}{2048}$$

Mivel

$$\frac{40}{2048} < 0,02 = \frac{2}{100} < \frac{41}{2048} \quad \Leftrightarrow \quad 4000 < 2 \cdot 2048 = 4096 < 4100,$$

látszik, hogy a nagyobb szomszédhoz van közelebb $0,02$, így

$$fl(0,02) = [101001|-5] = \frac{41}{2048}$$

a megfeleltetett gépi szám. (4 pont)

(c) A gépi összeadáshoz előbb közös karakterisztikára kell hoznunk az első zárójelben lévő gépi számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az $\frac{1}{4}$-t hozzuk 1 karakterisztikára.

$$\frac{1}{16} = [100000|-3] \to [000010|1]\,.$$

$$\begin{array}{r} [100000|1] \\ +\,[000010|1] \\ \hline [100010|1] \end{array}$$

A kapott eredményhez adjuk hozzá $\mathit{fl}\,(0,02)$-t, de először 1-es karakterisztikára hozzuk és kerekítünk.

$$\mathit{fl}\,(0,02) = [101001|-5] \to [000001|1]\,.$$

$$\begin{array}{r} [100010|1] \\ +\,[000001|1] \\ \hline [100011|1] \end{array}$$

A kapott eredmény:

$$[100011|1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2 = \frac{32+2+1}{64} = \frac{35}{64}.$$

(4 pont)

(d) $\mathit{fl}\,(0,02) = [101001|-5]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\mathit{fl}\,(0,02)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-5} = 2^{-12}$$

Az eredmény: $[100011|1] = \frac{35}{64}$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\frac{35}{64}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2 = 2^{-6}$$

(2 pont)

2. **Az elimináció**:

1. lépés:

2. sor $-\left(\frac{1}{4}\right)$ $*$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $4 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{15}{4}, \quad -2 - \frac{1}{4} \cdot 3 = -\frac{11}{4}.$ (2 pont)

2. lépés:

3. sor $-\left(\frac{4}{15}\right)$ $*$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & -\frac{56}{15} \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $4 - \frac{4}{15} \cdot 1 = \frac{56}{15}, \quad 3 - \frac{4}{15} \cdot (-\frac{11}{4}) = 3 + \frac{11}{15} = \frac{56}{15}.$ (2 pont)

A visszahelyettesítés:

3. sor $*\frac{15}{56}$

2. sor $-$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & \frac{56}{15} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor $*\frac{4}{15}$

1. sor $-$ új 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

1. sor /4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1, -1, 1]^T$ vektor. (2 pont)

3. Végezzük el az eliminációt és menet közben a Gauss-eliminációs hányadosokat tároljuk az L mátrixban. Mivel a mátrix tridiagonális, ezért L és U is tridiagonális lesz. A rekurzió felírásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$L = \textit{tridiag}\,(l_i, 1, 0), \quad U = \textit{tridiag}\,(0, u_i, 1).$$

Az i. lépésig elkészült L mátrixot $L^{(i)}$-vel jelöljük. Menet közben ellenőrizzük, hogy U átlója felett megmaradnak az 1 elemek.

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

U 1. sora azonos A első sorával, így $u_1 = 4$ és $U_{12} = 1$.

1. lépés:
2. sor $- \left(\frac{1}{u_1}\right) * 1.$ sor.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $l_2 = \frac{1}{u_1} = -\frac{1}{2}$ az eliminációs hányados és $u_2 = 4 - l_2 \cdot 1 = 4 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{15}{4}$ és $U_{23} = 1$.

2. lépés:
3. sor $- \left(\frac{1}{u_2}\right) * 2.$ sor.

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $l_3 = \frac{1}{u_2} = \frac{4}{15}$ az eliminációs hányados és $u_3 = 4 - l_3 \cdot 1 = 4 - \frac{4}{15} \cdot 1 = \frac{56}{15}$ és $U_{34} = 1$.

(2 pont)

Sejtés: a k. lépés előtt a k. sorig elkészültek az L és U elemei a következő rekurzióval

$$\begin{aligned} &u_1 = 4, \\ &l_i = \frac{1}{u_{i-1}}, \quad u_i = 4 - l_i \cdot 1 \quad (i = 2, \dots, k) \end{aligned}$$

és a k. lépés előtt a mátrixok alakja:

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A^{(k)}$$

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^{(k)}$$

(2 pont)

Be kell látnunk, hogy az alak és a rekurzió az elimináció k. lépése után megmarad.

k. lépés:

$(k+1)$. sor $- \left(\frac{1}{u_k}\right) \ * k$. sor.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & u_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A^{(k+1)}$$

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & l_{k+1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^{(k+1)}$$

Tehát $l_{k+1} = \frac{1}{u_k}$ az eliminációs hányados, $u_{k+1} = 4 - l_{k+1} \cdot 1$ és $U_{k+1,k+2} = 1$.
Tehát a rekurzió és az alak a $k+1$. lépés után is megmarad. (2 pont)

4. (a) Először elkészítjük az LU-felbontást a „mechanikus (tárolós)" módszerrel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5 pont)

Az LDL^T felbontást egyszerűen megkapjuk az LU felbontásból.
Mivel U átlójában egyesek állnak, így $D = I$. Tehát az $A = LDL^T$ felbontásban

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = I.$$

(1 pont)

(b) A Cholesky felbontást általában a következőképpen kapjuk:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

Vegyük észre, hogy a feladat LU-felbontásában $U = L^T$, tehát egy Cholesky-felontést kaptunk.

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

5. Számítsuk ki az A mátrix QR felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

$$r_{12} = \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{17}} (1 \cdot 4 + 4 \cdot 1) = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{8}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 17 - 32 \\ 68 - 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{15}{17} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{s_2}\|_2 = \frac{15}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{15}{\sqrt{17}}$$

$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{r_{22}} \mathbf{s_2} = \frac{\sqrt{17}}{15} \cdot \frac{15}{17} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

$$r_{13} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{17}} (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0) = 0$$

$$r_{23} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{17}} (0 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0) = 0$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{s_3}\|_2 = 4$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{r_{33}} \mathbf{s_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{-1}{\sqrt{17}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{17} & \frac{8}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{15}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

6. A mátrix első oszlopára készítsük el azt a Householder transzformációt, mely az $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza.

$$\sigma_1 = -sgn(a_{11}) \cdot \|\mathbf{a_1}\|_2 = -sgn(4) \cdot \sqrt{4^2 + 1^2} = -\sqrt{17}$$

Innen már ki tudjuk számolni a transzformációt meghatározó $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = \sqrt{(4 + \sqrt{17})^2 + 1^2} = \sqrt{34 + 8\sqrt{17}},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma_1 \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{34 + 8\sqrt{17}}} \cdot \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A $\mathbf{H}(\mathbf{v_1})\cdot\mathbf{a_1}$ szorzatot nem kell előállítanunk, mert a konstrukcióból tudjuk, hogy $\begin{bmatrix} -\sqrt{17} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú lesz. Alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektorra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1})\cdot\mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2\cdot\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\cdot\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2\cdot\mathbf{v_1}\cdot\left(\mathbf{v_1^T}\cdot\mathbf{a_2}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{34+8\sqrt{17}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot(8+\sqrt{17}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{8+\sqrt{17}}{17+4\sqrt{17}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{8+\sqrt{17}}{17+4\sqrt{17}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{68-15\sqrt{17}}{17}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 17-(68-15\sqrt{17})(4+\sqrt{17}) \\ 68-(68-15\sqrt{17}) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -8\sqrt{17} \\ 15\sqrt{17} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} -8 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rész számítások:

$$\frac{8+\sqrt{17}}{17+4\sqrt{17}} = \frac{(8+\sqrt{17})(17-4\sqrt{17})}{17^2-16\cdot 17} = \frac{8\cdot 17+17\sqrt{17}-32\sqrt{17}-4\cdot 17}{17} = \frac{68-15\sqrt{17}}{17},$$

$$17-(68-15\sqrt{17})(4+\sqrt{17}) = 17-16\cdot 17+60\cdot\sqrt{17}-68\cdot\sqrt{17}+15\cdot 17 = -8\sqrt{17}.$$

(4 pont)

Alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektorra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1})\cdot\mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2\cdot\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\cdot\mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2\cdot\mathbf{v_1}\cdot\left(\mathbf{v_1^T}\cdot\mathbf{a_3}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{2}{34+8\sqrt{17}}\cdot\begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

A transzformáció $\mathbf{a_3}$-ra való alkalmazása helyett hivatkozhatunk arra, hogy $\mathbf{a_3}\perp\mathbf{v_1}$, így nem változik az értéke. (Lásd $H(v)$ tulajdonságai.) Tehát $\mathbf{R}$ alakja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{17} & \frac{-8}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{15}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1 pont)