Numerikus módszerek 1.

Programtervező informatikus BSc
Vizsgakérdések és válaszok

1. Definiálja a gépi számok halmazát (a tanult modellnek megfelelően)! Adja meg a normalizált lebegőpontos szám alakját!

Az $a = \pm m2^k$, $(m = \sum_{i=1}^{t} m_i 2^{-i},\ m_i \in \{0,1\}, m_1 = 1, t \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$ számot normalizált lebegőpontos számnak nevezzük, ahol m_i mantissza, t a mantissza hossza, k_i karakterisztika. Jelölése: $a = \pm[m_1 \dots m_t|k]$
Gépi számok halmaza: $M = M(t, k^-, k^+)$

$$M(t,k^-,k^+) := \left\{ a = \pm m2^k \mid m = \sum_{i=1}^{t} m_i 2^{-i}, m_i \in \{0,1\}, m_1 = 1, k^- \le k \le k^+ \right\} \cup \{0\},$$

2. Írja le a gépi számhalmaz nevezetes számait!

A legnagyobb pozitív szám: $M_\infty = +[11\dots1|k^+] = (1 - \frac{1}{2^t})2^{k^+}$
A legkisebb pozitív szám: $\varepsilon_0 = [10\dots0|k^-] = \frac{1}{2}2^{k^-}$
A számábrázolás relatív pontossága: $\varepsilon_1 = \underbrace{[1\cdots \mid 1]}_{\text{1 rákövetkezője}} - \underbrace{[10\dots0 \mid 1]}_{1} = \dfrac{1}{2^t}2^1 = 2^{1-t}$

3. Definálja az input függvény fogalmát, és írja le a hibájára vonatkozó tételt!

Az $fl\colon \mathbb{R}^x \to M$ függvényt input függvénynek nevezzük, ha

$$fl(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az x-hez közelebbi gépi szám a kerekítés szerint, ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty \end{cases}$$

Tétel: Ha $x \in \mathbb{R}^x$, akkor

$$|x - fl(x)| \le \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } 0 \le |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}|x|\varepsilon_1, & \text{ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty \end{cases}$$

4. Adja meg a hibaszámítás alapfogalmait: hiba, abszolút-, relatív hiba és korlátjaik!

Legyen A a pontos érték, a pedig közelítő érték. Ekkor
Hiba: $\Delta a = A - a$
Abszolút hiba: $|\Delta a| = |A - a|$
Egy abszolút hibakorlát: $\Delta_a \ge |\Delta a|$
Relatív hiba: $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$
Egy relatív hibakorlát: $\delta_a \ge |\delta a|$

5. Írja le az alapműveletek abszolút hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\begin{aligned}\Delta_{a\pm b} &= \Delta_a + \Delta_b \\ \Delta_{ab} &= |a|\Delta_b + |b|\Delta_a \\ \Delta_{\frac{a}{b}} &= \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{b^2} = \frac{|a|}{|b|}\left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|}\right)\end{aligned}$$

6. Írja le az alapműveletek relatív hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\begin{aligned}\delta_{a\pm b} &= \frac{|a|\delta_a + |b|\delta_b}{|a \pm b|} \\ \delta_{ab} &= \delta_a + \delta_b \\ \delta_{\frac{a}{b}} &= \delta_a + \delta_b\end{aligned}$$

7. Írja le a függvényérték abszolút hibakorlátjára vonatkozó összefüggést!

Tegyük fel, hogy $f \in C^1(k(a))$ és $k(a) := [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, ekkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1\Delta_a, \text{ ahol } M_1 := \max\{|f'(x)| : x \in k(a)\}.$$

8. Írja le a függvényérték abszolút- és relatív hibakorlátjára vonatkozó összefüggést (a függvényről kétszer folytonosan deriválhatóságot feltételezve)!

Tegyük fel, hogy $f \in C^2(k(a))$, ekkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)|\Delta_a + \frac{M_2}{2}\Delta_a^2, \text{ ahol } M_2 := \max\{|f''(x)| : x \in k(a)\}.$$

A relatív korlátra

$$\delta_{f(a)} = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|}\,\delta_a.$$

9. Definiálja az $\boldsymbol{f}$ függvény $\boldsymbol{a}$ pontbeli kondíciószámát!

A $c(f,a) = \dfrac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$ mennyiséget az f függvény a-beli kondiciószámának nevezzük.

10. Mennyi a Gauss-elimináció illetve a visszahelyettesítés műveletigénye? $(\boldsymbol{x} + \mathcal{O}(\boldsymbol{n^y}))$

A Gauss elimináció műveletigénye:

$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

A visszahelyettesítés műveletigénye:

$n^2 + \mathcal{O}(n)$, ahol $\mathcal{O}(n) = 0$, így a műveletigény n^2

11. Írja fel az L_k mátrixot, melyet $A^{(k-1)}$-re alkalmazva a Gauss-elimináció egy lépését kapjuk!

A Gauss-elimináció k. lépése felírható $\mathbf{L_k A^{(k-1)}} = \mathbf{A^{(k)}}$ alakban, ahol $\mathbf{L_k} \in \mathcal{L}^{(1)}$

és $\mathbf{L_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_{k+1,k} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{nk} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} - \mathbf{l_k e_k^\top}$, ahol $\mathbf{l_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{bmatrix}$, és $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$.

12. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére! (Gauss-eliminációval)

Ha a Gauss-elimináció elvégezhető sor és oszlop csere nélkül, akkor létezik az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás, ahol $\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{(1)}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}$.

13. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére és egyértelműségére! (Gauss-elimináció nélkül)

Ha $D_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^k) \neq 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1)$, akkor az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás létezik, és $u_{kk} \neq 0 \quad k = 1, \ldots, n-1)$. Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

14. Mennyi az LU-felbontás, illetve egy háromszög mátrixú LER megoldásának műveletigénye? $(x + \mathcal{O}(n^y))$

Az LU-felbontásnak $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$,
egy háromszög mátrixú LER megoldásának $n^2 + \mathcal{O}(n)$ a műveletigénye.

15. Mikor nevezzük A-t szimmetrikus és pozitív definit mátrixnak?

Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus mátrix, ha $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ és
pozitív definit, ha $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} > 0$ $(\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$

16. Mikor nevezzük A-t a soraira (oszlopaira) nézve szigorúan diagonálisan dominánsnak?

A szigorúan diagonálisan domináns a soraira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i\text{-re.}$$

A szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}| \quad \forall i\text{-re.}$$

17. Definiálja A fél sávszélességét!

Az $\mathbf{A}$ fél sávszélessége $s \in \mathbb{N}$, ha
$\forall\, i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0$, és
$\exists\, k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0$.

18. Definiálja A profilját!

Az $\mathbf{A}$ profilja a k_i és l_j számok összessége, melyekre
$j = 1 \dots k_i$-re $a_{ij} = 0$ és $a_{i,k_i+1} \neq 0$ illetve
$i = 1 \dots l_j$-re $a_{ij} = 0$ és $a_{l_j+1,j} \neq 0$.

19. Definiálja az A mátrix $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementerét!

Ha $\mathbf{A_{11}} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ és invertálható, akkor az $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}] = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}} \cdot \mathbf{A_{11}^{-1}} \cdot \mathbf{A_{12}}$ mátrix az $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementere.

20. Mondja ki a a Gauss-elimináció (legalább) 4 tulajdonságának megmaradási tételét!

- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szimmetrikus.
- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus pozitív definit, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szimmetrikus pozitív definit.
- Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szigorúan diagonálisan domináns.
- Ha $\mathbf{A}$ fél szávszélessége s, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ fél sávszélessége is legalább s. (A sávon kívüli nulla elemek megmaradnak.)
- $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ profilja az $\mathbf{A}$ profiljához képest nem csökkenhet. (A soronkénti és oszloponkjénti első nulla elemig minden nulla marad.)
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow \det([\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]) \neq 0$.

21. Definiálja a Cholesky-felbontást!

$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ és $l_{ii} > 0\ \ \forall i$-re.

22. Milyen tételt tanult a Cholesky-felbontásról?

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív definit, akkor $\exists!\, \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ felbontás.

23. Mennyi a Cholesky-felbontás, illetve egy háromszög mátrixú LER megoldásának műveletigénye? $(\boldsymbol{x} + \mathcal{O}(\boldsymbol{n^y}))$

A Cholesky-felbontás műveletigénye $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$,
egy háromszög mátrixú LER megoldásának $n^2 + \mathcal{O}(n)$ a műveletigénye.

24. Milyen tételt tanult a QR-felbontásról?

Ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor $\exists\, \mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontás.
Ha még feltesszük, hogy az $r_{ii} > 0\ \forall\, i$-re, akkor egyértelmű is.

25. Mennyi a QR-felbontás műveletigénye?

$2n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

26. Definiálja a Householder mátrixot!

A $\mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$ $(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_2 = 1)$ mátrix a $\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó Householder mátrix.

27. Írja le a Householder-transzformáció 4 tanult tulajdonságát!

1) $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$ szimmetrikus $(\mathbf{H}^\top = \mathbf{H})$.
2) $\mathbf{H}$ ortogonális $(\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^\top = \mathbf{H},\ \mathbf{H}^2 = \mathbf{I})$.
3) $\mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.
4) $\forall\ \mathbf{y} :\ \ \mathbf{y} \perp \mathbf{v}$-re $\ \mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{y} = \mathbf{y}$.

28. Adja meg azt a Householder mátrixot, melyre az azonos hosszúságú $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ vektorok esetén $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$!

Legyen $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ és $\|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2$, ekkor

$$\mathbf{v} := \pm \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

29. Írja le a vektornorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt vektornormának nevezzük, ha
1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
3) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvényt mátrixnormának nevezzük, ha
1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
2) $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
3) $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
4) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
5) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

31. Írja le az indukált mátrixnormáról tanult tételt!

Legyen $\|\cdot\|_v$ tetszőleges vektornorma, ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$

mennyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?

A $\|\cdot\|$ mátrixnorma és a $\|\cdot\|_v$ vektornorma illeszkedik, ha $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

33. Írja le az $1, 2, \infty$ és Frobenius mátrixnormát!

1-es mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2-es mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \varrho(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{\frac{1}{2}} = (\max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}))^{\frac{1}{2}}.$$

∞ *mátrixnorma:*

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Frobenius mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

34. Mit nevezünk egy mátrix spektrálsugarának?

A $\varrho(\mathbf{B}) := \max |\lambda_i(\mathbf{B})|$ mennyiség a $\mathbf{B}$ mátrix spektrálsugara.

35. Definiálja a kondíciószámot mátrixok esetén! Mikor értelmezhető?

A $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \cdot \|(\mathbf{A}^{-1})\|$ mennyiséget az $\mathbf{A}$ kondíciószámának nevezzük.
Akkor értelmezhető, ha $\mathbf{A}$-nak létezik inverze.

36. Írja le a LER jobboldalának változásakor érvényes perturbációs tételt!

Tegyük fel, hogy $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}$ invertálható, ekkor illeszkedő normákra

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

37. Írja le a LER mátrixának változásakor érvényes perturbációs tételt!

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$ és $\|\cdot\|$ indukált norma, ekkor
$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(\mathbf{A})}{1 - \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

38. Definiálja a reziduum vektort (maradékvektort)!

Legyen $\widetilde{\mathbf{x}}$ közelítő megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek.
Ekkor az $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}$ vektort reziduum vektornak nevezzük.

39. Definiálja a relatív maradékot !

Legyen $\widetilde{\mathbf{x}}$ közelítő megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek.
Ekkor az
$$\eta := \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\widetilde{\mathbf{x}}\|}$$
mennyiséget relatív maradéknak nevezzük.

40. Írja le a relatív maradékról tanult két állítást!

1. Állítás: Bármely illeszkedő normában
$$\eta \leq \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

2. Állítás: A 2-es normában
$$\eta = \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2}.$$

41. Írja le a kondíciószám (legalább) 4 tulajdonságát!

1) $c \neq 0$ $(\in \mathbb{R})$ esetén $\mathrm{cond}(c\mathbf{A}) = \mathrm{cond}(\mathbf{A})$.
2) Indukált mátrixnormában: $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$.
3) Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, akkor $\mathrm{cond}_2(\mathbf{Q}) = 1$.
4) Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$.
5) Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}$.
6) Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \geq \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$.

42. Írja le a kontrakció fogalmát $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény esetén!

A φ függvény kontrakció, ha $\exists\, q : 0 \leq q < 1$
$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| < q \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

43. Írja le a Banach-féle fixponttételt $\mathbb{R}^n$-re!

Ha φ kontrakció $\mathbb{R}^n$-en, akkor
1) $\exists!\, \mathbf{x}^*$ fixpont,
2) $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^{(k+1)} := \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$ iterációs sorozat konvergens és $\lim(\mathbf{x}^k) = \mathbf{x}^*$,

3) Hibabecslés: $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq q^k \cdot \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|$ illetve

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

44. Adjon elégséges feltételt az $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ alakú iterációk konvergenciájára!

Ha $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor az $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ iteráció $\forall\, \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$-re konvergál az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásához.

45. Írja le az indukált normák és spektrálsugár kapcsolatáról tanult lemmát!

$$\varrho(\mathbf{B}) = \inf\{\|\mathbf{B}\|.\| \cdot \|\text{indukált norma}\}$$

(azaz $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \|\cdot\|$ indukált norma: $\|\mathbf{B}\| \leq \varrho(\mathbf{B}) + \varepsilon$).

46. Adjon szükséges és elégséges feltételt az $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ alakú iterációk konvergenciájára!

$\forall\ \mathbf{x}^{(0)}:\ \ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ iteráció konvergál az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásához $\Leftrightarrow\ \varrho(\mathbf{B}) < 1$

47. Írja le a Jacobi- és a csillapított Jacobi iterációt

Jacobi iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U})}_{\mathbf{B}_J} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_J}$$

$$\underset{(i=1\dots n)}{x_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Csillapított Jacobi iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}))}_{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\omega\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{J(\omega)}}$$

$$\underset{(i=1\dots n)}{x_i^{(k+1)}} = (1-\omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

48. Adjon elégséges feltételt a Jacobi iteráció és a csillapított Jacobi iteráció konvergenciájára!

Jacobi iteráció
Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor $\|\mathbf{B_j}\|_\infty < 1$ (azaz $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra konvergens a $J(1)$).

Csillapított Jacobi iteráció
Ha $J(1)$ konvergens $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra, akkor $0 < \omega < 1$-re a $J(\omega)$ is konvergens.

49. Írja le a Gauss-Seidel-iterációt (a koordinátás alakot is!)!

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\cdot\mathbf{U}}_{\mathbf{B}_S}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\cdot\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_S}$$

Koordinátás alak:

$$\underset{(i=1\ldots n)}{x_i^{(k+1)}} = \frac{-1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right).$$

50. Írja le a Gauss-Seidel relaxációs módszert (a koordinátás alakot is)!

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\left((1-\omega)\cdot\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}\right)}_{\mathbf{B}_{\mathbf{S}(\omega)}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\omega\cdot(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{\mathbf{S}(\omega)}}$$

Koordinátás alak:

$$\underset{(i=1,\ldots,n)}{x_i^{(k+1)}} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right).$$

51. Milyen szükséges és elégséges feltételt tanult a Gauss-Seidel relaxáció konvergenciájáról?

Ha $S(\omega)$ konvergens $\forall\,\mathbf{x}^{(0)}$-ra, akkor az $\omega \in (0,2)$.
Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit és $\omega \in (0,2)$, akkor az $S(\omega)$ konvergens $\forall\,\mathbf{x}^{(0)}$-ra.

52. Szigorúan diagonálisan domináns mátrix esetén mit tud mondani a Jacobi- és a Gauss-Seidel-iteráció konvergenciájáról?

Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor $\varrho(B_s) = \varrho(B_J)^2$ (azaz $S(1)$ és $J(1)$ is konvergens).

53. Milyen tételt tanult szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális mátrixok esetén a $\mathbf{J(1), S(1), S(}w\mathbf{)}$ módszerekről?

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális, akkor $J(1), S(1)$ és $S(\omega)$ is konvergens $\omega \in (0,2)$-re, és

$$\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho(B_J)^2}}$$

az optimális paraméter $S(\omega)$-ra.

Ha $\varrho(B_J) = 0$, akkor $\varrho(B_{S(\omega)}) = \varrho(B_S) = 0$,
ha $\varrho(B_J) \neq 0$, akkor $\varrho(B_{S(\omega)}) = \omega_0 - 1 < \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2$.

54. Vezesse le a Richardson-típusú iterációk alakját!

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad & \mathbf{0} = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad p \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{0} = -p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} = \mathbf{x} - p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} = (\mathbf{I} - p\mathbf{Ax}) + p\mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = & \underbrace{(\mathbf{I} - p\mathbf{A})}_{\mathbf{B_{R(p)}}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{p\mathbf{b}}_{\mathbf{c_{R(p)}}} \end{aligned}$$

55. Milyen tételt tanult a Richardson-típusú iterációkról?

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit és a sajátértékeire:

$$0 < m = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = M,$$

akkor $p \in (0, \frac{2}{M})$-re $R(p)$ konvergens $\forall\ \mathbf{x}^{(0)}$-ra.

Az optimális paraméter $p_0 = \frac{2}{M+m}$ és ekkor $\varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{M-m}{M+m}$.

56. Definiálja a J pozíció halmazra illeszkedő részleges LU-felbontást!

Legyen J a mátrix elemek pozícióinak olyan halmaza, mely nem tartalmazza a főátlót. Az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra vonatkozó ILU-felbontásán olyan LU-felbontást értünk, melyre $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakja a szokásos, továbbá

$(i,j) \in J$-re $l_{ij} = 0, u_{ij} = 0$ és $(i,j) \notin J$-re $(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{LU})_{ij}$.

57. Írja le az ILU-felbontás algoritmusát ($\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ előállításának felírása)!

$\tilde{\mathbf{A}}_1 := \mathbf{A}$
$k = 1, \ldots, n-1:$
1.) Szétbontás: $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k$ alakra, ahol

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_k)_{ik} &= 0 \quad (i,k) \in J \\ (\mathbf{P}_k)_{kj} &= 0 \quad (k,j) \in J \\ (\mathbf{Q}_k)_{ik} &= -\tilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i,k) \in J \\ (\mathbf{Q}_k)_{kj} &= -\tilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k,j) \in J \end{aligned}$$

2.) Elimináció:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k$$

Az ILU felbontással kapott részmátrixokból:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}_n}, \ \ \mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \ldots \mathbf{L}_{n-1}^{-1}, \ \ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \cdots + \mathbf{Q}_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}.$$

58. Adjon elégséges feltételt az ILU-felbontás létezésére és egyértelműségére!

Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor $\exists!$ ILU-felbontás.

59. Vezesse le az ILU-algoritmust! A reziduum vektor bevezetésével írja fel a gyakorlatban használt alakot is!

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad \text{ahol } \mathbf{P} = \mathbf{LU} \\ \mathbf{Ax} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{P\,x} = \mathbf{Q\,x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{P^{-1}Q\,x} + \mathbf{P^{-1}b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)}$$

$k = 0, 1 \ldots$ leállásig

$$\begin{aligned} \mathbf{LU\,s}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \quad \text{két háromszögmátrixú LER megoldása} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &:= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &:= \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{As}^{(k)} \end{aligned}$$

60. Írja le a Bolzano-tételt!

$f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, x^* \in (a,b): \;\; f(x^*) = 0.$

61. Írja le az intervallum-felezés algoritmusát és hibabecslését!

$$x_0 := a, \;\; y_0 := b$$

$k = 0, 1 \ldots$ leállásig

$$\begin{aligned} s_k &:= \frac{x_k + y_k}{2} \\ f(s_k)f(x_k) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} &:= x_k, \;\; y_{k+1} := s_k \\ f(s_k)f(x_k) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} &:= s_k, \;\; y_{k+1} := y_k \\ f(s_k)f(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_k &:= \frac{x_k + y_k}{2} \end{aligned}$$

Hibabecslés:
$$|x_k - x^*|, |y_k - x^*| \le y_k - x_k \le \frac{b-a}{2^k}$$

62. Írja le a Brouwer-féle fixponttételt!

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és $\varphi \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, x^* \in [a,b]: \;\; x^* = \varphi(x^*)$

63. Írja le a fixponttételt az $[a, b]$ intervallumra!

Legyen $\varphi : [a;b] \to [a;b]$ kontrakció, ekkor

1) $\exists !\ x^* \in [a;b]: \ \ x^* = \varphi(x^*)$
2) $\forall\, x_0 \in [a;b]: \ \ x_{k+1} := \varphi(x_k)$ konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k) = x^*$.
3) Hibabecslése: $|x_k - x^*| \leq \dfrac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|$.

64. Adjon meg elégséges feltételt a kontrakcióra!

$\varphi \in C^1[a;b]$ és $|\varphi'(x)| \leq q < 1 \ \ \forall\, x \in [a;b] \quad \Rightarrow \quad \varphi$ kontrakció $[a;b]$-n.

65. Definiálja a konvergencia rend fogalmát!

Az (x_k) konvergens sorozat $(\lim(x_k) = x^*)$ p-edrendben konvergál, ha $\exists\, c > 0$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

66. Írja le az m-ed rendű konvergenciára vonatkozó tételt!

Legyen $\varphi \in C^m[a;b]$ és

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0, \ \text{ de } \ \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Továbbá az $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ sorozat konvergál x^*-hoz, ekkor a sorozat konvergenciája p-edrendű és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_m}{m!}\, |x_k - x^*|^m,$$

ahol $M_m = \max\{|\varphi^{(m)}(\xi)| : \ \xi \in [a;b].\}$

67. Vezesse le a Newton-módszer képletét!

A függvényt az $(x_k, f(x_k))$ ponton áthaladó érintőjével közelítjük:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

A $k+1$. közelítést az érintő és az x-tengely metszéspontjaként kapjuk.

$$-f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

68. Írja le a Newton-módszer monoton konvergencia tételét!

Legyen $f \in C^2[a;b]$ és

1) $\exists\, x^* \in [a;b]: \ \ f(x^*) = 0$,
2) f', f'' állandó előjelű,
3) $x_0 \in [a;b]: \ \ f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Ekkor az x_0-ból indított Newton-módszer monoton konvergál az x^* gyökhöz.

69. Írja le a Newton-módszer lokális konvergencia tételét!

Legyen $f \in C^2[a;b]$ és

1) $\exists\, x^* \in [a;b] : \quad f(x^*) = 0,$
2) $f'(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in [a;b],$
3) $m_1 := \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 0,$
4) $M_2 := \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|, \quad M := \dfrac{M_2}{2m_1},$
5) $x_0 \in [a;b] : \quad |x_0 - x^*| < r := \min\{\dfrac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b|\}.$

Ekkor az x_0-ból indított Newton-módszer másodrendben konvergál az x^* gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2.$$

70. Definiálja a húr-módszert!

Tegyük fel, hogy $f(a) \cdot f(b) < 0$ és legyen $x_0 := a, \;\; x_1 := b$, ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)},$$

ahol s a legkisebb index, melyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

71. Definiálja a szelő-módszert!

Legyen $x_0 := a, \;\; x_1 := b$, ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

72. Írja le a szelő-módszer lokális konvergencia tételét!

Legyen $f \in C^2[a;b]$ és

1) $\exists\, x^* \in [a;b] : \quad f(x^*) = 0,$
2) $f'(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in [a;b],$
3) $m_1 := \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 0,$
4) $M_2 := \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|, \quad M := \dfrac{M_2}{2m_1},$
5) $|x^* - a|, |x^* - b| < r := \dfrac{1}{M}.$

Ekkor az x_0-ból indított szelő-módszer $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*| \cdot |x_{k-1} - x^*|.$$

73. Vezesse le a többváltozós Newton-módszer képletét!

A függvényt a Taylor-polinomjával közelítjük:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_k}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x_k})(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}).$$

$\mathbf{x_{k+1}}$-re közelítésre $\mathbf{T}(\mathbf{x_k}) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{f}(\mathbf{x_k}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x_k})(\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k})\\ -\mathbf{f}(\mathbf{x_k}) &= \mathbf{f}'(\mathbf{x_k})(\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k})\\ -[\mathbf{f}(\mathbf{x_k})]^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x_k}) &= \mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k}\\ \mathbf{x_{k+1}} &= \mathbf{x_k} - [\mathbf{f}(\mathbf{x_k})]^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x_k})\end{aligned}$$

74. Milyen becslést tanult polinomok gyökeinek elhelyezkedéséről?

Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a_0, a_n \neq 0$. A P polinom bármely x_k gyökére

$$\frac{1}{1 + \frac{\max_{i=1,\ldots,n} |a_i|}{|a_0|}} =: r < |x_k| < R := 1 + \frac{\max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i|}{|a_n|}.$$

75. Írja le a polinom helyettesítési értékeinek gyors számolására tanult Horner-algoritmust!

Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
és a $\xi \in \mathbb{R}$ pontban szeretnénk a polinom helyettesítési értékét kiszámolni.

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &:= a_n,\\ k = n-1, \ldots, 0 &\\ a_k^{(1)} &:= a_{k+1}^{(1)} \cdot \xi + a_k,\\ \Rightarrow\ \ P(\xi) &= a_0^{(1)}.\end{aligned}$$