

Numerikus módszerek 1.

7. előadás: LER érzékenysége

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciós számának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciós számának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától.
(Pl. $\text{cond}_1(A)$, $\text{cond}_2(A)$, \dots)

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

(a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- (c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Állítás: a kondíciósám tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- (c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

(a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.

Állítás: a kondíciósám tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- (c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

(a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$

(b) $\text{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| =$
 $= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$

Állítás: a kondíciósza tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- (c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

$$(a) \quad 1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \text{cond}(cA) &= \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| = \\ &= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A). \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \|Q\|_2 &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = 1 \\ \|Q^{-1}\|_2 &= \|Q^T\|_2 = 1, \quad \text{cond}_2(Q) = 1 \end{aligned}$$



Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) A pozitív definitésg miatt nem kell abszolút érték.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) A pozitív definitésg miatt nem kell abszolút érték.

(f) $\|A\| \geq \varrho(A) = \max |\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$. □

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása**
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

① Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal:

$$\delta b := \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 9.4959e - 004.$$

- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.1732.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\frac{\delta x}{\delta b} = 1235.5.$
- $\text{cond}(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

- 1 $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

- 1 $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.
- 2 Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is teljesül.

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Biz. (folytatás):

- ③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

- ④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$(a) \quad \|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$(a) \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$(b) \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$(a) \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$(b) \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

$$(c) \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$(a) \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$(b) \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

$$(c) \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$$

$$(d) \quad \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségénél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$(a) \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$(b) \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

$$(c) \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$$

$$(d) \quad \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

⑤ Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Biz. (folytatás):

- ⑥ A felső becslés (a) $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és (d) $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$ alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$



- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása**
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

2 Módosult:

adott $A + \Delta A$ és b , kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott $A + \Delta A$ és b , kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal:

$$\delta A := \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 7.8495e - 004.$$

- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 3.4507.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\frac{\delta x}{\delta A} = 4396.1.$
- $\text{cond}(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Megj: A lemmához kell az indukált mátrixnorma.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $\lambda_i(M) < 1$.
Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $\lambda_i(M) < 1$.
Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.
- Vizsgáljuk most $I + M$ inverzét, majd ennek normáját.

$$\begin{aligned}(I + M)^{-1} &= I \cdot (I + M)^{-1} = (I + M - M)(I + M)^{-1} = \\ &= I - M \cdot (I + M)^{-1},\end{aligned}$$

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| + \|M\| \cdot \|(I + M)^{-1}\|,$$

$$(1 - \|M\|) \cdot \|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| = 1.$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$(A + \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x,$$

$$A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x.$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

Az inverz normájára adott becslésünket is felhasználva:

$$\begin{aligned}\|\Delta x\| &\leq \|(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\| \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1} \cdot \Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.\end{aligned}$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.
 \end{aligned}$$

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása**
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

LU -felbontás hatása a LER érzékenységére

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow L U x = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$



Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow L U x = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$ □

Sőt előfordulhat, hogy $\text{cond}(L), \text{cond}(U) \gg \text{cond}(A)$, azaz bizonyos mátrixok esetén előfordulhat, hogy a Gauss-elimináció nagyon pontatlan eredményt ad.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR -felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Ez is mutatja a QR - és Cholesky-felbontáson alapuló módszerek stabilitását.

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék**
- 6 Matlab példák

A kondíciós szám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen \tilde{x} az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\tilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen \tilde{x} az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\tilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

Látjuk, hogy a reziduum vektor könnyen számolható, alkalmazható direkt- és iterációs módszerek esetén is. Az utóbbi esetben leállási feltétel is készíthető a segítségével.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az \tilde{x} közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az \tilde{x} közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

η értéke a közelítő megoldás ismeretében könnyen számolható. A továbbiakban ΔA ismerete nélkül szeretnénk becsléseket adni a nem ismert $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ mennyiségre.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$, innen

$b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$, innen
 $b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

A relatív maradékot becslülve

$$\eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis \tilde{x} egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása.

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis \tilde{x} egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása. Végezzük el a behelyettesítést:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} &= \left(A + \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}} \right) \cdot \tilde{x} = \\ &= A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\tilde{x}^T\tilde{x}} = A\tilde{x} + (b - A\tilde{x}) = b. \end{aligned}$$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\tilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\tilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\tilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\|r\tilde{x}^\top\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

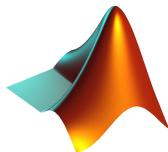
A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\|r\tilde{x}^\top\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



Ha η_2 kicsi, akkor $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$ is kicsi. Ha η_2 kisebb a gépi epszilonnál (ϵ), akkor ebben az aritmetikában pontosabb megoldás nem adható.

- 1 Mátrixok kondíciószáma
- 2 Lineáris egyenletrendszer vektorának megváltozása
- 3 Lineáris egyenletrendszer mátrixának megváltozása
- 4 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 5 Relatív maradék
- 6 Matlab példák**



- ❶ Egy perturbált LER (jobboldala változik, mátrixa a Hilbert mátrix).
- ❷ $\text{cond}_2(H_n)$ változása a méret függvényében.
- ❸ $\text{cond}_2(V_n)$ változása a méret függvényében.
- ❹ $\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1))$ változása a méret függvényében.
- ❺ $\text{cond}_2(\text{rand}_n)$ változása a méret függvényében.

Példa:

Jelöljük H_5 -tel az 5×5 -ös Hilbert mátrixot.

$$H_5 = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② Módosult LER:

$$H_5 \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 + 1/1000 \end{bmatrix}$$

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- 1 $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- 1 $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- 2 $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶ $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- ❷ $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$

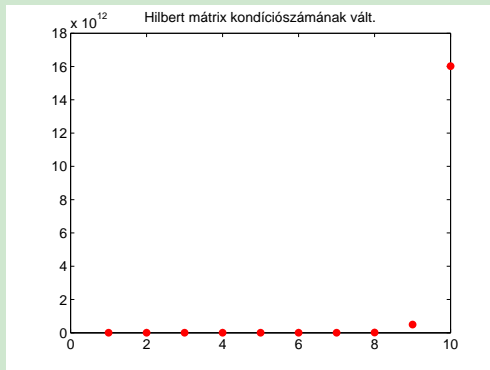
A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶ $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- ❷ $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$
- ❹ ennek becslése a tétellel: $\text{cond}_2(H_5) = 4.7661e + 005$.

2. Példa:

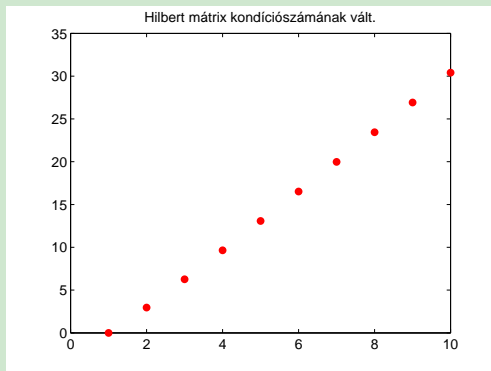
A Hilbert mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

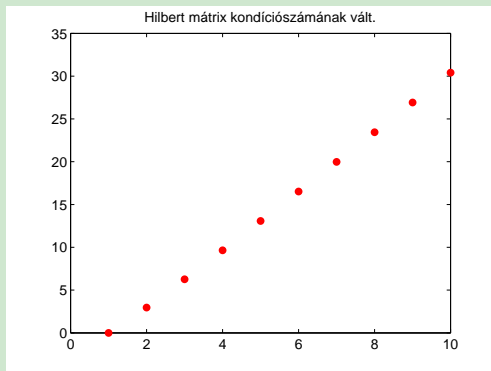
2. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



2. Példa:

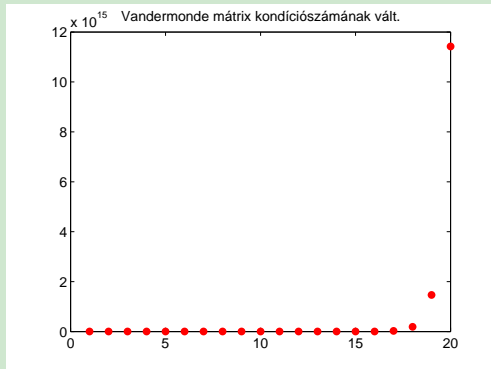
Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



$$\text{cond}_2(H_n) \approx \exp(3.1n) \approx 22^n$$

3. Példa:

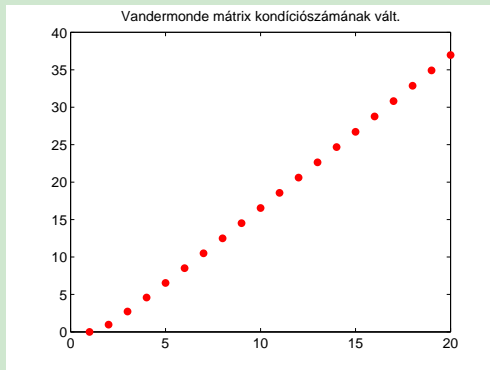
A $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztású pontjaiból képzett Vandermonde mátrix kondíciószámaának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

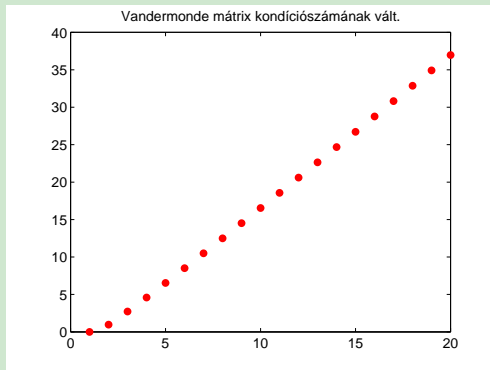
3. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



3. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!

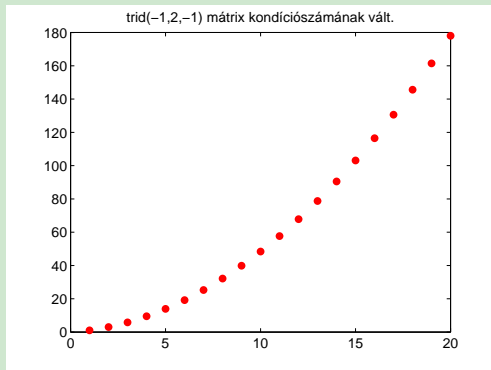


$$\text{cond}_2(V_n) \approx \exp(1.85n) \approx (6.4)^n$$

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószáma

4. Példa:

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószámanak változását vizsgáljuk:

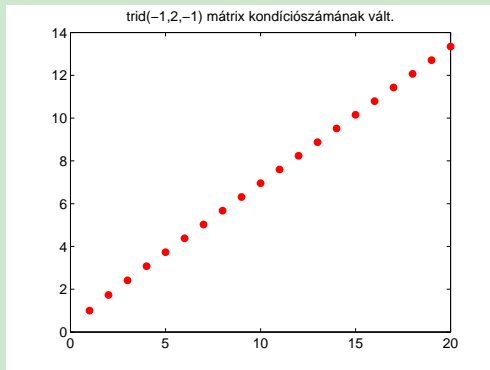


Az ábra alapján sejthető, hogy a növekedés a méret négyzetével arányos.

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciósza

4. Példa:

Vegyük a kondíciósza

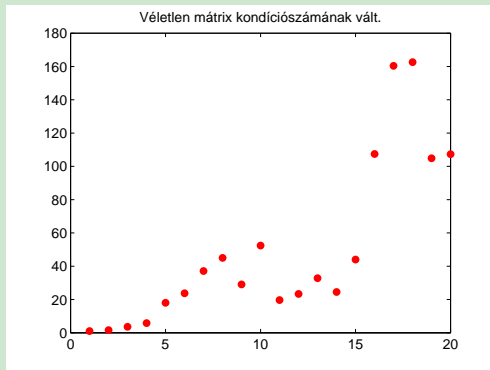


Elméletileg igazolható, hogy

$$\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1)) \approx \left(\frac{2(n+1)}{\pi} \right)^2.$$

5. Példa:

Véletlen mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az előző mátrixokhoz képest egész kicsi értékeket kaptunk.