Numerikus módszerek 1.

Konzultáció

Második zárthelyi dolgozat

A jegyzetet *Bozsik József* gyakorlatvezető konzultációján *Lanka Máté* készítette.
Tantárgyi honlap: http://numanal.inf.elte.hu/~krebsz/prog_inf_bsc_a.htm
Tavalyi zárthelyi feladatsor: http://numanal.inf.elte.hu/~krebsz/zh2-2015-11-30.pdf
Konzultáció ideje: 2016.12.08. 18:00-19:30.

Megjegyzés: PótZH: 2016.12.21. 10:00-12:00
Második zárthelyi: 2016.12.13. 19:00-21:00
Hat feladat várható.

1) Direkt maradt ki, mert nem tartalmaz olyan speciális esetet, amit érdemes volt kihangsúlyozni.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \in [1,3]$

a) Számítsuk ki 1, 2 kondíciós számát!
b) Válasszuk meg az *a* paraméter értékét úgy, hogy a $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_1(A)$!

Megoldás:

a) Gauss-eliminációval kiszámoljuk A mátrix inverzét! (Nem szükséges Gauss-szal, ha van rá más megoldási módszer, az is jó, de a Gauss a legcélravezetőbb.)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$ 2p

3p

$$\begin{cases} ||A||_1 = \max\{3,3,a\} = 3 \\ ||A^{-1}||_1 = \left\{1,1,\frac{1}{a}\right\} = 1 \end{cases} \gg cond_1(A) = 3 * 1 = 3$$

Mivel az A szimmetrikus, ezért cond_2-höz elég az A sajátértékeit kiszámolni!

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (a-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = a, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm 2}{2} \to \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$ 6p

$$cond_2(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3$$

b) Az előző rész alapján $\forall a \in [1,3]$ esetén megegyezik $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_1(A)$. 1p

3) Jacobi iteráció.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Bizonyítsd be a konvergenciát!
b) Írd fel a hibabecslést!
c) 10^{-3} pontossághoz hány lépés szükséges $\underline{x}_0=\underline{0}$-ból?

Megoldás:

a) Kell először is egy konvergenciavizsgálat ➔ Átmenet mátrix vizsgálata.

$$B_{J_{(1)}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Elégséges tétel segítségével:

$$\left\| B_{J_{(1)}} \right\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$ 3p

Mivel az illeszkedő mátrixnormában az átmenet mátrix mátrixnormája kisebb, mint 1, ezért az elégséges tétel alapján $\forall \underline{x}_0$-ból konvergens. 1p

b)

$$\left\| |||\underline{x}_k - \underline{x}^* \right\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} * \left\| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \right\|_\infty$$ 1p

c) Kell 1 lépés.

$$\underline{x}_1 = -D^{-1}(L+U)\underline{x}_0 + D^{-1}\underline{b} = D^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1-1p a képlet
1p a megoldás

Hiba:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} * \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} * \frac{3}{2} \leq 10^{-3} \gg 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 10^{-3}$$

$$3 * 10^{-3} \leq 2^k$$

$$3000 \leq 2^k$$

$$\boxed{k = 12}$$ 2p

<u>Megjegyzés:</u> Ha nagyon csúnya szám (pl. logaritmus) az eredmény, amelyhez számológép kellene, akkor jó megoldásnak számít, ha az eredményre a felső egészrész „jelét” írod.

4) Gauss-Seidel iteráció.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Bizonyítsd be, hogy konvergens!

b) Számítsuk ki $\underline{x}_1$-et koordinátás alakban, $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$!

c) A Jacobi, vagy a Gauss-Seidel iteráció a gyorsabb?

Megoldás:

a) Mivel az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns[1], ezért Gauss-Seidel $\forall \underline{x}_0$-ból konvergens. 3p

b)

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1\right)$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2\right)$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{a_{33}}\left(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} - b_3\right)$$

Behelyettesítés után:

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{1}\left(0 * x_2^{(0)} + 0x_3^{(0)} - 1\right) = 1$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}(0 * 1 + (-1) * (-2) - 3) = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(1)} - \frac{1}{4}\left(0 * 1 + (-1) * \frac{5}{2} - 2\right) = \frac{9}{8}$$

$$\gg \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 9/8 \end{bmatrix}$$ 3p

c) Mivel az A szigorúan diagonálisan domináns, ezért:

$$\left\|B_{S_{(1)}}\right\|_\infty \leq \left\|B_{J_{(1)}}\right\|_\infty$$

Mive A tridiagonális, ezért:

$$\rho\left(B_{S_{(1)}}\right) = \rho\left(B_{J_{(1)}}\right)^2$$

➔ Kétszer gyorsabb a Gauss-Seidel iteráció. 1p

[1] *Diagonálisan domináns:* A mátrix főátlójában lévő elem nagyobb, mint az adott sorban, vagy oszlopban lévő elemek abszolútértékeinek összege. Ha oszlopaira, és soraira is igaz, akkor szigorúan diagonálisan domináns.

5) Richardson-iteráció.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Milyen paraméterek esetén lesz ez konvergens?
b) Mi az optimális paraméter és a kontrakciós együttható?

Megoldás:

a)

$$x_{k+1} = (I - pA)\underline{x}_k + p\underline{b}$$

Kellenek a sajátértékek.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((2-\lambda)(4-\lambda)-1\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7)$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$m = 1 \leq 3 - \sqrt{2} \leq 3 + \sqrt{2} = M$$ 5p

Mivel $A = A^T$ (szimmetrikus) és A pozitív definit (hiszen minden sajátérték pozitív), ezért $\forall p \in (0, \frac{2}{M})$ konvergens, vagyis $\forall p \in (0, \frac{2}{3+\sqrt{2}})$-re konvergens $\forall \underline{x}_0$-ból. 1p

b)

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{1+3+\sqrt{2}} = \frac{2}{4+\sqrt{2}}$$

$$\rho\left(B_{p_0}\right) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$$ 3p

6) ILU iteráció

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad J = \{(1,3), (3,2)\} \text{ pozícióhalmaz.}$$

Határozd meg L, U, Q mátrixokat!

Megoldás:

$J = \begin{bmatrix} . & . & * \\ . & . & . \\ . & * & . \end{bmatrix}$ 🡐 A * jelöli a pozícióhalmaz által jelölt elemeket az A halmazból (<u>megjegyzés</u>).

<u>1. lépés:</u> Megvizsgáljuk az 1. oszlopot és sort, kiemeljük (-1)-szeresen a J által jelölt eleme(ke)t.

$$A \to P_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{A } \mathrm{P}_1 - \text{et diagonáljuk.}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gg L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ 3p

<u>2. lépés:</u> Megvizsgáljuk a maradék elemeket kiemeljük ismét (-1)-szeresen a megjelölt eleme(ke)t.

$$A_2 \to P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gg L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 2p

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = L_2 P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ 3p