NUMMÓD 1.

GÉPI SZÁMOK:

- LEBEGŐ PONTOS SZÁMOK

MANTISSZA

$$m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot k^{-i}$$

MANTISSZA

$$\left(\text{TEHÁT } \frac{1}{2} \leq m < 1\right)$$

$$M(t, k^-, k^+) = \left\{ \pm m 2^k \;\middle|\; \text{AHOL } m = \sum_{i=1}^{t} m_i 2^{-i} \text{ ÉS } k^- \leq k \leq k^+ \right\} \cup \{0\}$$

TEKINTSÜK AZ $M(5,-2,3)$ GÉPI SZÁMHALMAZT.

HATÁROZZUK MEG AZ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$ ÉRTÉKÉT

$$\varepsilon_0 = [\overset{\frac{1}{2}}{1}\overset{\frac{1}{4}}{0}\overset{\frac{1}{8}}{0}\overset{\frac{1}{16}}{0}\overset{\frac{1}{32}}{0}|-2] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2} = \frac{1}{8}$$

$$M_\infty = [11111|3] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)2^3 = \frac{31}{4}$$

ELSŐBIT KÖTELEZŐEN "1"

$$\varepsilon_1 = [10001|1] - [10000|1] = [00001|1] = 2^{-5} \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

$$\| \quad 2^{1-t}$$

$$|M| = 2 \cdot 2^4 \cdot 6 + = 193$$

$$\pm 1xxxx \cdot 2^k$$

$M(2,-2,2)$

$M_\infty = [11|2) = 3$

$\varepsilon_0 = [10|-2) = 1/8$

ε_1 $[11|1) - [10|1) = 1/2$

$k=-2$-RE VIZSGÁLJUK: $[1/8\,;\,2/8)$

$[10|-2) = 1/8\,;\,[11|-2) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 2^{-2} = 3/16$

$k=-1$-RE —"— : $[1/4\,;\,1/2)$

$[10|-1) = 1/4\,,\,[11|-1) = 3/4 \cdot 2^{-1} = 3/8$

$k=0$-RA —"— : $[1/2\,;\,1)$:

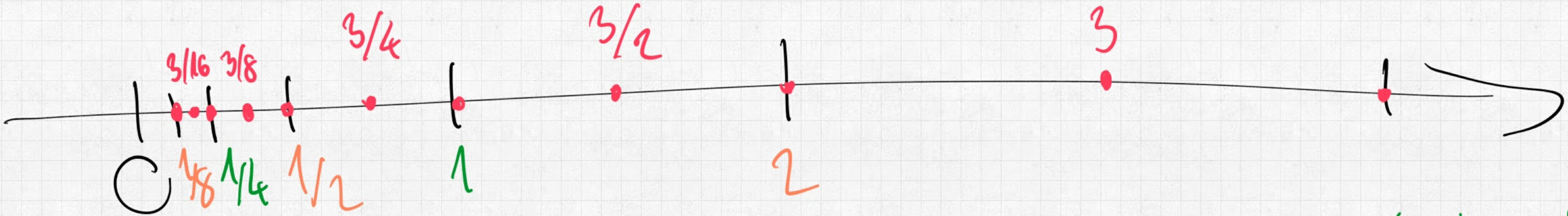
$[10|0) = 1/2\,;\,[11|0) = 3/4$

$k=1$-RE —"— $[1;2)$

$[10|1) = 1\,;\,[11|1) = 3/4 \cdot 2 = 3/2$

$k=2$-RE —"— $[2;4)$

$[10|2) = 2\,;\,[11|2) = 3$



$M(5,-4,4)$ $fl(10.85) = ?$

10	0
5	1
2	0
1	1
0	

0	.85
1	7
1	4
0	8
1	6
1	2

A vágás utáni számot add hozzá

$10.85 = 1010.1|1011\ldots$

+1 kerekítés

$[10110|4] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^4 = 11$

$\mathbb{F}(5, -4, 4)$ $\qquad$ $fl(\sqrt{2}) = ?$ $\qquad$ $\sqrt{2} = 1.414|213\ldots$

1	1
0	

0	414
0	828
1	656
1	312
0	624
1	248

1.011101

$$fl(\sqrt{2}) = \begin{cases} [10110|1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\cdot 2 = 11/8 \\ [10111|1] = \ldots = 23/16 \end{cases}$$

$1{,}375 \vee 1{,}4375$

$$\left|\sqrt{2} - 11/8\right| = 0.035$$

$\vee$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{23}{16}\right| = 0.023$$

$$fl(\sqrt{2}) = [10111|1] = 23/16$$

GÉPI SZÁMOK ÖSSZEADÁSA:

$M(6,-4,4)$

$fl(1/6) = [101011 \mid -2]$

$fl(1/12) = [101011 \mid -3] \xrightarrow{\text{KÖZÖS KAR}} [010110 \mid -2]$

A KISSEBBET A NAGYOBBHOZ

0101011

LEESŐT ADD HOZZÁ

$$
\begin{array}{l}
[101011 \mid -2] \\
[010110 \mid -2] \\
\hline
[010101 \mid -2]
\end{array}
$$

NORMALIZÁLÁS

$[101010 \mid -3]$

2 GY: BOZSIK JÓZSEF

$fl(1/6) = +[101011|-2]$

$fl(1/12) = +[101011|-3]$

$$\begin{array}{r} 101011|-2 \\ - \quad 010110|-2 \\ \hline .010101|-2 \end{array}$$

$\Downarrow$ NORM.

$101010|-3$

b, GÉPI KIVONÁS

$fl(1/6) - fl(1/12) = ?$

ELV: KARAKTERISZTIKÁK EGYENLŐSÍTÉSE (NAGYOBB KARAKT. DOMINÁL)

$+[.101011|-3] \Rightarrow .0101011|-2$

+1

KEREKÍTÉS

$\Downarrow$

$.010110|-2$

C, ABSZ. HIBA KORLÁT MEGHAT.:

$$\Delta_{fl(1/6)} = 1/2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-9}$$

$$\Delta_{fl(1/12)} = 1/2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

$$\Delta_{(\underbrace{fl(1/6) - fl(1/12)}_{fl(21/256)})} = 1/2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

PÉLDATÁR: (MEGOLDÁSOKKAL)

GOOGLE: "NUMERIKUS PÉLDATÁR"

FURCSASÁGOK GÉPI SZÁMOLÁS KAPCSÁN:

a, $a \oplus b = a$ ← TÚL/ALUL CSORDULÁS → PL: $a := +[11001|1]$

$b := +[10001|-3]$

$(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c)$ PL: –11–; $c = b$

b, "KIVONÁS ÉRZÉKENYSÉGE"

$$\begin{array}{r} 11011|2 \\ 11000|2 \\ \hline .00011|2 \end{array} \Rightarrow [11000|-1]$$

ZH-RA EBBŐL A RÉSZBŐL ÉRDEKES:

- NEVEZETES GÉPI SZÁMOK ($\varepsilon_0, M_\infty, \varepsilon_1$)
- ELEMI SZÁM
- γ (MEGFELELTETÉS, PL. $\gamma(2,4,1)$)
- GÉPI SZÁMHALMAZON MŰVELETEK

HIBA SZÁMÍTÁS

EML:

PONTOS ÉRTÉK PL: π

RELATÍV ÉRTÉK PL: 3,14

DEF:

$\Delta_a := A - a$ – HIBA

$|\Delta_a| := |A - a|$ – ABSZ. HIBA

$\Delta_a \geq |\Delta_a|$ – ABSZ. HIBA KORLÁT

$\delta_a := \frac{\Delta_a}{A}$ – RELATÍV HIBA

$\delta_a \geq |\delta_a|$ – RELATÍV HIBA KORLÁT

EA PÓTLÁS:

TÉTEL: (ALAPMŰVELETEK HIBÁJA)

$$\Delta_{a\pm b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\Delta_{ab} = |b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|b|\Delta_a + |a|\Delta_b}{b^2} \quad *$$

$$\delta_{a\pm b} = \frac{|a| \cdot \delta_b + |b|\delta_b}{|a \pm b|}$$

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$$

$$\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b \quad *$$

$*$:= BIZ MÁSIK OLDALON

Biz:

$$\Delta(a/b) = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{Ab - aB}{Bb} = \frac{Ab - ab + ab - aB}{Bb} =$$

$$= \frac{b(A-a) - a(B-b)}{Bb} = \frac{b\Delta_a - a\Delta_b}{(b+\Delta_b)b} = \frac{b\cdot\Delta_a - a\cdot\Delta_b}{b^2 + \underbrace{\Delta_b \cdot b}_{\text{kicsi}}}$$

$$\boxed{\left|\Delta\, a/b\right| \le \frac{|b|\cdot|\Delta_a| + |a|\cdot|\Delta_b|}{b^2}} \qquad \boxed{\Delta_{a/b} = \frac{|b|\cdot\Delta_a + |a|\Delta_b}{b^2}} \qquad \square$$

RELATÍV HIBA KORL:

$$\delta(a/b) = \frac{\Delta(a/b)}{a/b} \approx \frac{b\cdot\Delta a - a\Delta b}{b^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{b}}{a} = \frac{b\cdot\Delta a - a\Delta b}{ba} =$$

$$= \frac{\cancel{b}\Delta a}{a\cancel{b}} - \frac{\cancel{a}\Delta b}{\cancel{a}b} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \underset{\text{DEF}}{=} \delta(a) - \delta(b)$$

DE MOST: $\left|\delta(a/b)\right| \le \left|\delta(a)\right| + \left|\delta(b)\right| \le \delta_a + \delta_b$

1, A 4-ET 1,41 · 2,83 -MAL KÖZELÍTSÜK. ADJUNK A KÖZELÍTÉSRE ABSZ. ÉS RELATÍV HIBA KORLÁTOT, HA TUDJUK: $\sqrt{2} \approx 1,41$

$\sqrt{8} \approx 2,83$

MEGJ: $A = \sqrt{2}$ $\quad a = 1.41$

$B = \sqrt{8}$ $\quad b = 2.83$

$$\Delta_a = \Delta_{1.41} = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_b = \Delta_{2.83} = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_a = \delta_{1.41} = \frac{\Delta_{1.41}}{1.41} = \frac{0,0005}{1.41} \leq 0.0035$$

$$\delta_b = \delta_{2.83} = \frac{\Delta_{2.83}}{2.83} = \frac{0,005}{2,83} \leq 0.00177$$

$$\Delta_{a \cdot b} = |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a =$$

$$= 1.41 \cdot \Delta_{2.83} + 2.83 \cdot \Delta_{1.41} =$$

$$= (1.41 + 2.83) \cdot 5 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0.0212}}$$

$$\delta_{a \cdot b} = \frac{\Delta_{a \cdot b}}{ab} = \frac{0,0212}{0,9903} \leq 0,00532$$

4. GY GAUSS ELIMINÁCIÓ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1/ MEO:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

ELAKAD A GE

MEGJ.: SEM RÉSZL. SEM TELJES FŐELEM KIV. NEM SEGÍT.

i/ A b_1 JOBB OLDAL VEKTOR ESETÉN ($Ax = b_1$) AZT KAPTUK, HOGY $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, VAGYIS AZONOSSÁG ÁLL ELŐ. ⇒ VAGYIS VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS VAN.

ii/ A b_2 JOBB OLDAL VEKTOR ESETÉN ($Ax = b_2$) AZT KAPTUK, HOGY $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = (-2)$ ↯

⇒ 0 MEG. VAN.

EML.: (VOLT EA. N) $\exists!$ MEO A GE-NAK $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

2/ OLDJUK MEG AZ $A\underline{x}=\underline{b}$ LER-t. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

RÉSZLEGES FŐELEM KIVÁLASZTÁSSAL

MEO:

1. LÉPÉS RÉSZLEGES FŐELEM KIV. VAGYIS A DIAGONÁLISBELI ELEM ÉS AZ ALATTA LÉVŐ ELEMEK HALMAZÁN ABSZ. MAX-OT KERESÜNK ÉS A SOR CSERÉVEL A DIAGONÁLISBA CSERÉLJÜK.

MEGJ: MIVEL SORCSERÉK VOLTAK EZÉRT A DET MEGHATÁROZÁSAKOR FIGYELEMBE KELL VENNI:

$$\mathrm{DET}(A) = 4 \cdot 3 \cdot 4/3 \cdot (-1)^2 = 16$$

SOR CSERÉK SZÁMA

1/a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \boxed{4} & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -1/2 \\ -1/2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

1/b

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{3} & 11/2 & 5/2 \end{array}\right]$$

2/a

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1/3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 11/2 & 5/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 11/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 \end{array}\right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. OLDJUK MEG AZ $\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$ LER-t TELJES FŐELEM KIV.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & \boxed{3} & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}$$

MEGJ.:

1, LÉPÉS: TELJES FŐELEM KIVÁLASZTÁS,
VAGYIS KERESSÜK AZ ABSZ. MAX ELEMET
A TELJES MÁTRIXON, EZ MOST AZ $a_{22}=3$ LESZ.

TEHÁT KELL EGY SOR ÉS OSZLOP CSERE IS.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & \boxed{3} & 1 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 8\end{array} \Rightarrow$$

1/a

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{3} & 1 & 5\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 8\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ +1/3 \\ -2/3 \end{array}\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 5\\ -1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 8\end{array} \Rightarrow$$

1/b

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 5/3 & 7/3 & 14/3\\ 0 & 5/3 & 1/3 & 14/3\end{array}$$

2/a

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 5/3 & \boxed{7/3} & 14/3\\ 0 & 5/3 & 1/3 & 14/3\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -1/7 \end{array}\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 7/3 & 5/3 & 14/3\\ 0 & \boxed{1/3} & 5/3 & 14/3\end{array} \Rightarrow$$

2/b

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 3 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 7/3 & 5/3 & 14/3\\ 0 & 0 & 10/7 & 4\end{array} \quad \ldots \quad x=\begin{bmatrix}14/5\\ -1/5\\ 0\end{bmatrix}$$

SORCSERÉK

1+2 ⇐ OSZLOPCSERÉK

MEGJ.: $\det(A)=3\cdot 7/3\cdot 10/7\cdot(-1)=\underline{-10}$

4/ Oldjuk meg az $\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$ LER-t GE-vel

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$$

MEO:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right]$$

Sejtés: a páros indexű helyeken 0-k,
a páratlan helyeken (-1)-ek lesznek az meo. vektorban

Biz: Teljes indukció

Tfh. k-ig igaz, nézzük $(k+1)$-re:

1. eset k páratlan

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ k.\text{ sor} \\ (k+1).\text{ sor} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1\ 0 \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1\ 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & (-1)^n \end{array}\right]$$

n páratlan esetén

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

LEOD.

Páros esetén hasonlóan (ZH-ban le kell vezetni)

Lineáris egyenletrendszerek (LER) megoldási módszerei

Direkt módszerek: pl.:
- Gauss-elimináció
- LU felbontás
- LDU felbontás
- LL^T Cholesky felbontás

Iterációs módszerek

Gauss-elimináció (GE)

Motiváció:
- Műveletigény szempontjából jobb módszer
- Jól algoritmizálható

Mire jó a GE?
- LER megoldására
- Determináns meghatározására
- Mátrixok invertálására (bizonyos feltételek esetén)

Hogyan működik?

Szeretnénk felsőháromszög típusú LER-t kapni.

$Ax = b$ LER, ami felsőháromszög mátrixú.

Például:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 16 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1$$

Ez nekünk azért jó, mert alulról felfelé behelyettesítéssel megy a megoldás.

$x_3 = 1$

$4x_2 + 8 \cdot 1 = 16 \Rightarrow x_2 = 2$

$x_1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 \Rightarrow x_1 = -2$

---

① Oldjuk meg az $Ax = b$ LER-t!

a, GE-vel

b, Határozzuk meg A determinánsát

c, Részleges főelem kiválasztással

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \cdot x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Emlj. GE

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}$$

k = hanyadik lépés

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 4 & 4 & 7 & | & 1 \\ 2 & 5 & 9 & | & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & \boxed{4} & 6 & | & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \end{bmatrix}$$

2. sor + (−2) · 1. sor

3. sor + (−1) · 1. sor

3. sor + (−2) · 2. sor

M_1: GE $(n-1)$ lépésben általában kapjuk meg. Tehát most $n = 3$ (3x3-as A mátrix) $\Rightarrow$ 2 lépésben kapjuk meg a felső alakot.

2 lehetőség:
- visszahelyettesítés (lásd)
- visszafelé elimináció

Visszafelé elimináció:

$$\Longrightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát kell az a-nak a Δ_a ... (lásd ...)

$\Delta_a = \Delta_3 = \boxed{0,5}$ $\quad (\delta_3 = \boxed{\frac{1}{6}})$

A környezet $[2,5 \,,\, 3,5]$

$f(x) = 3^x \longrightarrow f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$

A maximuma az $|f'(x)|$ a $[2,5 \,,\, 3,5]$ ..., amivel monoton nő, ezért a 3,5-ben

$$M_1 = |f'(3,5)| = \ln(3) \cdot 3^{3,5} = \ln(3) \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3}$$

Visszatérve ($\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$-hoz)

$$\Delta_{3^3} = \ln(3) \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5 \approx \boxed{25,6886}$$

$$\delta_{3^3} = \frac{\Delta_{3^3}}{3^3} = \frac{\ln(3) \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5}{3^3} = \ln(3) \cdot \sqrt{3} \ldots$$

Tehát a ... hibával ...

$\Delta_3 = 0,5 \iff \Delta_{3^3} = 25,6885$

50 szeres eltérés!!!

$\delta_3 = \frac{1}{6} \iff \delta_{3^3} = 0,952$

---

b, Mivel a GE során determinánstartó átalakításokat végzünk, ezért igaz:

$\det(A) = \det(\tilde{A})$,

ahol $\tilde{A}$ a GE végén kapott ... mátrix.

$\det(\tilde{A})$ = a diagonálisban található elemek szorzatával.

$\det(A) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = \cancel{\ldots} = 16$

Gy 4

1, HAT. MEG. A MÁTRIX INVERZÉT!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$AX = I \Rightarrow$

$Ax_1 = e_1$

$\vdots$

$Ax_n = e_n$

MEO:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \downarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \downarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\cdots \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -5/4 & 6/4 & -3/4 \\ 0 & 2 & 0 & -11/4 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -2/4 & 1/4 \end{array}\right] \downarrow \vdots \downarrow$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1/16 & 3/8 & -5/16 \\ -11/8 & 3/4 & -1/8 \\ 3/4 & -2/4 & 1/4 \end{array}}_{A^{-1}}$$

ZH-RA

- GE (DETERMINÁNS)
- GE RÉSZLEGES ÉS TELJES FŐELEM KIV.
- INVERZ MÁTRIX GE.-VEL

LU FELBONT.

CÉL: LU > GE

- KÖNNYEBB LEGYEN HASZNÁLNI
- TÖBB JOBB OLDAL ESETÉN EGY KÉNYELMES MEO.-T TALÁLNI.

HOGYAN?

$\underline{A\underline{x} = \underline{b}}$ HELYETT $LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underset{\text{LOWER}}{L}\,\underline{y} &= \underline{b} \\ \underset{\text{UPPER}}{U}\,\underline{x} &= \underline{y} \end{aligned}\right\} \text{2 DB HÁROMSZÖG MÁTRIX LER MEO.}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

ELŐÁLLÍTÁS:

- DEF SZERINT
- GE-VEL PÁRHUZAMOSAN
- MÁTRIX SZORZATBÓL

1/ HATÁROZZUK MEG AZ A MÁTRIX LU FELBONT. L_i MÁTRIXOK SEGÍTSÉGÉVEL.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$L_i :=$ GE i. LÉPÉSE ÁLTAL KÉSZÍTETT MÁTRIX

$$L_2 L_1 A = U \Rightarrow \underline{\underline{A}} = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot U = \underline{\underline{L \cdot U}}$$

$$L := L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$$

KONKRÉT PÉLDÁBAN (DEF SZERINT)

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-\frac{a_{31}}{a_{11}}$

i. OSZLOPBAN LESZNEK ÉRTÉKEK

$$L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L := L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

CSAK ÖSSZE KELL "MÁSOLNI"

$$L_2 \cdot (L_1 \cdot A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

$$\boxed{L_i^{-1} \approx -L_i}$$

(KÜLÖNLEGES FELÉPÍTÉSÜK MIATT)

2, A mátrix LU felbont. (GE-vel párhuzamosan)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1. lépés + szimultán L bontás}]{GE} \begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$$

0 helyett L elemei

=U felső háromszög

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

=L alsó háromszög

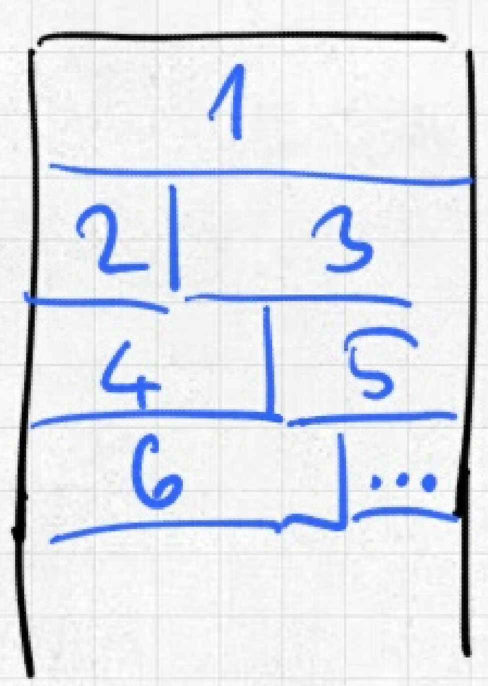
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3, Határozzuk meg az A mátrix LU felbont. mátrix szorzás segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -6 & -17 & -15 \\ 8 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

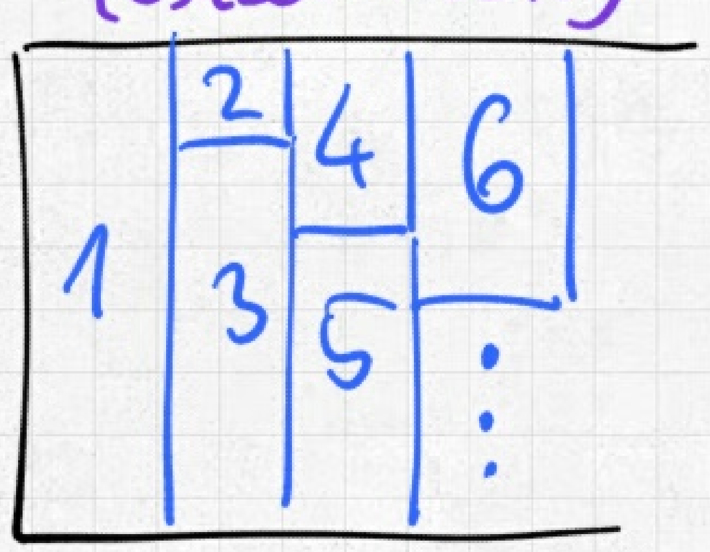
3 séma az L és U meghatározására

1. séma

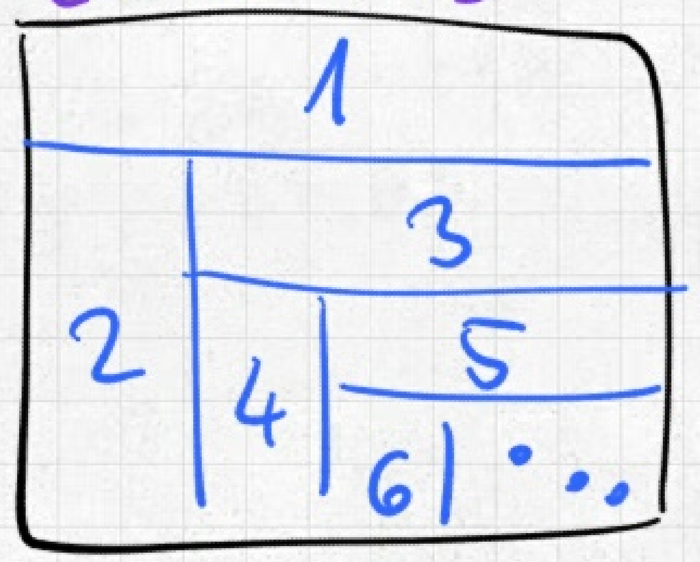


(sorfolytonos)

2. séma (oszlop folyt.)



3. séma (parketta)



Meo: (parketta)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 4 & -6 \\ -6 & -17 & 15 \\ 8 & -4 & -14 \end{array}$$

1. lépés, 2., 3., 4., 5.

A mátrix

$1 \cdot u_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$
$\Rightarrow u_1 = 2$

$1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = 4$
$\Rightarrow u_2 = 4$

$1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6$
$\Rightarrow u_3 = 1$

2. lépés

$l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -6$
$\Rightarrow l_1 = -3$

$l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 8$
$l_2 = 4$

3.:

$l_1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = -17$
$\Rightarrow u_4 = (-5)$

$l_1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6 = 15$
$\Rightarrow u_5 = 1$

$l_2 \cdot u_2 + l_3 u_4 + 1 \cdot 0 = (-4) \Rightarrow l_3 = 4$

$l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + 1 \cdot u_6 = -14 \Rightarrow u_6 = 6$

(n+1) A mátrix LDU felbontása

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & u_{n-1\,n} \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ LU felbontásból megvan

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 2/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow d_{11}\text{-gyel osztom a sort} \\ \leftarrow d_{22}\text{-vel} \quad \text{-"-} \\ \leftarrow d_{33} \quad \text{-"-} \end{array}$$

ZH: HARMÓNIA −1,85

KONZ: LÓCZY LAJOS $18^{00} - 20^{00}$

D 0-804

5-6 FELADAT

1/ HAT. MEG. AZ A MÁTRIX LL^T CHOLESKY FELBONT.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

MEGJ: EZ A FELBONTÁS SZIMMETRIKUS, POZITÍV DEFINIT MÁTRIXOKRA LESZ EGYÉRTELMŰ.

MEO: a/ LU FELBONT. SEGÍTSÉGÉVEL

b/ LDU FELB. SEGÍTS.

c/ MÁTRIX SZORZÁSSAL

a/ $$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\tilde{U}}$$

L MÁTRIX $\tilde{L}$-BÓL ÚGY KAPHATÓ, HOGY $\tilde{U}$ DIAGONÁLISÁBAN TALÁLHATÓ ELEMEK GYÖKEIVEL $\tilde{L}$ OSZLOPAIT SZOROZZUK.

$$L := \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$\sqrt{2} \quad \sqrt{3/2} \quad \sqrt{2}$

b/ $$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\tilde{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{U}}$$

$$L := \tilde{L} \cdot \sqrt{\tilde{D}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c/

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & l_6 \end{matrix} = L^T \\ \hline L = \begin{matrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{matrix} \end{array}$$

OSZLOPFOLYTONOSAN:

$l_1^2 = 2 \Rightarrow l_1 = \sqrt{2}$

$l_2 \cdot l_1 = 1 \Rightarrow l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$l_4 \cdot l_1 = 2 \Rightarrow l_4 = \sqrt{2}$

$l_2^2 + l_3^2 = 2 \Rightarrow l_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$l_4 \cdot l_2 + l_5 \cdot l_3 = 1 \Rightarrow l_5 = 0$

$l_4 \cdot l_5^2 + l_6^2 = 4 \Rightarrow l_6 = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2/ HAT. MEG. AZ A MÁTRIX LDL^T FELB.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

MEO: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\tilde{U}}$

$L := \tilde{L}$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

MEGJ: LDL^T ADOTT, AKKOR ABBÓL LL^T IS MEGVAN

$$\underbrace{(L\sqrt{D})}_{\tilde{L}} \cdot \underbrace{(\sqrt{D}L^T)}_{\tilde{L}^T}$$

QR FELBONTÁS

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow QR\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow R\underline{x} = Q^T\underline{b}$$

FELSŐ Δ MÁTRIX

ORTOGONÁLIS MÁTRIX

$$Q^T \cdot Q = I$$

i/ ELŐNYE, HOGY 1 MÁTRIX SZORZÁSBÓL MEGVAN A FELSŐ Δ ALAK

ii/ EZ JÓL KONDICIONÁLT ELJÁRÁS. (LÁSD KÉSŐBB)

ELŐÁLLÍTÁS:

i/ GRAM-SCHMIDT ORTOGONALIZÁCIÓVAL

ii/ HOUSEHOLDER TRANSZF.

1/ ADJUK MEG AZ A MÁTRIX QR FELBONT. GRAMM-SCHMIDT ORT.-VAL!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

MEGJ: (EML ← EA)

$$r_{jk} = \langle \underline{a}_k, \underline{q}_j \rangle$$

$$r_{kk} = \|\underline{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot \underline{q}_j\|_2$$

$$\underline{q}_k = 1/r_{kk} \left(\underline{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot \underline{q}_j\right)$$

1. LÉPÉS 1 OSZLOP VEKTOR MEGADÁSA Q ÉS R MÁTRIXOKBA

$$r_{11} = \|\underline{a}_1 \sum_{k=1}^{0} \dots \| = \|\underline{a}_1\|_2 = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = \underline{7}$$

$$\underline{q}_1 = 1/7 \cdot \left(\underline{a}_1 - \sum_{k=1}^{0} \dots\right) = 1/7 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. LÉPÉS 2 OSZLOP...

$$r_{12} = \langle \underline{a}_2, \underline{q}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, 1/7 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 7$$

$$r_{22} = \|\underline{a}_2 - \sum_{k=1}^{1} r_{k2} \cdot \underline{q}_k\|_2 = \|\underline{a}_2 - r_{12} \cdot \underline{q}_1\|_2 =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} - 7 \cdot 1/7 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} 5-2 \\ 8-6 \\ -3-3 \end{bmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}\right\|_2 =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \underline{7}$$

$$q_2 = 1/r_{22}\cdot\left(a_2 - \sum \cdots\right) = 1/7\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\-6\end{bmatrix}$$

3. LÉPÉS 3 OSZLOPVEKTOR MEGHAT.

$$r_{13} = \langle a_3, q_1\rangle = 1/7\cdot(4\cdot 2 + 0\cdot 6 + 2\cdot 3) = 14/7 = \underline{2}$$

$$r_{23} = \langle a_3, q_2\rangle = 1/7\cdot(4\cdot 3 + 0\cdot 2 + 2\cdot(-6)) = \underline{0}$$

$$r_{33} = \|a_3 - r_{13}\cdot q_1 - r_{23} q_2\|_2 = \left\| 4/7 \begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}\right\|_2 = \underline{4}$$

$$q_3 = 1/4\cdot\left(4/7\cdot\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}\right) = 1/7\cdot\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}$$

TEHÁT:

$$Q = 1/7\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 6 & 2 & -3\\ 3 & -6 & 2\end{bmatrix} \qquad R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r_{11} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix}7 & 7 & 2\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\end{array}$$

ELL: $Q\cdot R = A$

HOUSEHOLDER TRF

1) HAT. MEG AZ A MÁTRIX QR FELB. HOUSEHOLDER TRF-VAL.

$$a_1 \to H_1 \to k\cdot e_1$$

HOUSEHOLDER TRF.

1. LÉPÉS: KELL H_1 MÁTRIX

$$H(v) = I - 2vv^T$$

$$v := \frac{a_1 - \delta e_1}{\|a_1 - \delta e_1\|_2}$$

$$\delta := -\mathrm{SGN}(a_{11})\cdot\|a_1\|_2$$

SZIGNUM FV.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\delta = -\mathrm{SGN}(1)\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2} = \underline{-\sqrt{2}}$$

$$\|a_1 - \delta e_1\|_2 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$H_1(v)\cdot a_1 = \underbrace{(I - 2vv^T)}_{H_1(v)}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - 2vv^T\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

δ

$$H_1(v)\cdot a_2 = (I - 2vv^T)\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} - 2vv^T\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{3}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$H_1(v)\cdot a_3 = \ldots$$

KONZ

1/ $M=(6,-5,5)$

a/ ADJUK MEG AZ 1 ÉS AZ 1/4 GÉPI SZÁMOKAT!
b/ ADJUK MEG A 0,05-NEK MEGFEL. GÉPI SZÁMOT!
c/ $(1+1/4)+fl(0{,}05)$
d/ ABSZ HIBA KORLÁT

MEG:

a/ $1/2 \; \dots \; 1/2^6$

$+[100000|1] = 1/2 \cdot 2^{1} = \underline{\underline{1}}$

$+[100000|-1] = 1/2 \cdot 2^{-1} = 1/4$

2p ✓

b/

	05
	10
	20
	40
	80
1	60
1	20
0	40
0	80
1	60
1	20
0	40

/·2 (SZOROZUNK 2-VEL ÉS AZ ÁTVITELRE FIGYELÜNK)

1. EGYESTŐL KELL 6 JEGY

KEREK.

$\Rightarrow .\underbrace{0000}_{-4}1100110$

$\Downarrow$

$110011|0$ +0

KEREKÍTÉS 0->LEFELÉ KEREKÍTÉS

$\Downarrow$

$[110011|-4]$

KEREKÍTÉS MIATT ELLENŐRIZNI KELL (A KEREK. MÁSIK OLDALÁT)

4p ✓

$[110100|-4] = 1/2+1/4+1/16 \cdot 2^{-4} = 13/16 \cdot 2^{-4} = 13/256 = 0{,}05078$ → ÉS SZÁMOLÓGÉP NÉLKÜL?

$[110011|-4] = 1/2+1/4+1/32+1/64 \cdot 2^{-4} = 51/64 \cdot 2^{-4} = 51/1024 = 0{,}049804$

$\frac{51}{1024} < 0{,}05 = 5/100 < \frac{52}{1024} \quad / 1024 \cdot 100$

$5100 < 5 \cdot 1024 < 5200$

5120

c/ $(1+1/4)$ ← KARAKTERISZTIKA!

$+[100000|-1] \rightarrow [001000|1]$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ +\,001000 \\ \hline 101000 \end{array} \Rightarrow [101000|1]$$

NORMALIZÁLÁS! (MOST NORMÁLT AZ EREDMÉNY, EZÉRT NEM KELL)

$fl(0{,}05) = [110011|-4] \rightarrow 00000.1|10011$

KARAKT. $\quad 1-(-4)=5 \quad$ KEREKÍTÉS

$\Rightarrow 000010|1$

$$\begin{array}{r} 000010 \\ +\,101000 \\ \hline 101010 \end{array} \Rightarrow [101010|1]$$

4p ✓

d/ $fl(0{,}05)$ ABSZ. HIBA KORLÁT:

i/ $\Delta_{fl(0{,}05)} = 1/2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-4} = 2^{-11}$

Δ, MANTISSZA, KONKRÉT KARAKT.

1p ✓

ii/ $+[101010|1]$ ABSZ. HIBA KORLÁT:

$x :=$

$\Delta_x = 1/2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{1} = \underline{\underline{2^{-6}}}$

1p ✓

2/ OLDJUK MEG AZ $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t GE-VEL!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

MEO:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5/2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12/5 & -12/5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5/2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$-(-1/2)$ $\quad -0 \quad$ $-1/5/2$

OSZTJUK A 3. SORT A DIAGONÁLISSAL

2. SOR − 3. SOR

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

OSZTUNK, KIVONUNK

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6p ✓

4/ ADJUK MEG AZ A MÁTRIX

a, LDL^T FELBONTÁSÁT

b, CHOLESKY FELBONT.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

MEO:

MEGHAT. AZ LU FELBONTÁST

$$U \rightarrow \begin{array}{cccc} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{array}$$

$$L \downarrow \quad \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 & -2 & 2 & -3 & 7 \end{array}$$

PARKETTA

$4l_1 = (-2) \rightarrow l_1 = -1/2$

$4l_2 = 2 \rightarrow l_2 = 1/2$

$4l_4 = (-2) \rightarrow l_4 = -1/2$

$-2l_1 + u_1 = 2 \rightarrow u_1 = 1$

$2l_1 + u_2 = (-2) \rightarrow u_2 = (-1)$

$-2l_1 + u_3 = 2 \rightarrow u_3 = 1$

$-2l_2 + l_3 u_1 = (-2) \rightarrow l_3 = (-1)$

$-2l_4 + l_5 u_1 = 2 \rightarrow l_5 = 1$

$\dots \quad u_4 = 1,\ u_5 = (-1);\ l_6 = (-1),\ u_5 = 4$

a, LDL^T AZ $\tilde{L}\tilde{U}$ FELBONTÁSBÓL.

$$LDL^T = \underset{L}{\tilde{L}}\ \underset{D}{D}\ \underbrace{D^{-1}\tilde{U}}_{L^T}$$

$$L = \tilde{L} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4 \end{bmatrix} \quad U \text{ DIAGONÁLISA}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2p ✓

b, CHOLESKY $= LL^T$

$$A = \tilde{L}\tilde{U} = \underbrace{\tilde{L}\sqrt{D}}_{L}\ \underbrace{\sqrt{D}\,\tilde{L}^T}_{L^T}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 1/2 & -1 & 1 & \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{4} & & & 0 \\ & \sqrt{1} & & \\ & & \sqrt{1} & \\ 0 & & & \sqrt{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ 0 & & & 2 \end{bmatrix}$$

5/ HAT. MEG AZ A QR FELB. GRAM-SCHMIDT

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

MEO:

$$Q = [\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3] \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

1. LÉPÉS 1 OSZLOPVEKTOR MEGHAT. R ÉS Q MÁTRIXOKHOZ

$$r_{11} = \| \underline{a}_1 - \sum \dots \|_2 = \| a_1 \|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}$$

$$\underline{q}_1 = 1/r_{11} \cdot (\underline{a}_1 - \sum \dots) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. LÉPÉS

$$r_{12} = \langle \underline{a}_2, \underline{q}_1 \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 2\, 1/\sqrt{5} + 2 \cdot (1/\sqrt{5}) + (-1) \cdot 0 = 0$$

$$r_{22} = \| \underline{a}_2 - r_{12} \cdot \underline{q}_1 \|_2 = \dots = \sqrt{6}$$

$$\underline{q}_2 = \dots = 1/\sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. LÉPÉS

$$r_{13} = \langle \underline{a}_3, \underline{q}_1 \rangle = -1/\sqrt{5}$$

$$r_{23} = \langle \underline{a}_3, \underline{q}_2 \rangle = 0$$

$$r_{33} = \| \underline{a}_3 - r_{13}\, \underline{q}_1 - r_{23} \cdot \underline{q}_2 \|_2 = \sqrt{120}/5$$

$$\underline{q}_3 = \dots = 1/\sqrt{30} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{120}/5 \end{bmatrix}$$

8p ✓

6/ HOZZUK FELSŐ Δ MÁTRIXRA AZ A MÁTRIXOT A HOUSEHOLDER TRF.-VEL

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10p

1, LÉPÉS MEGHAT. $H_1(\underline{v})$ TRF. MÁTRIXOT!

$$\sigma = -\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot \|\underline{a}_1\|_2 = -\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0} = -\sqrt{5}$$

$$\underline{v} = \frac{\underline{a}_1 - \sigma \underline{e}_1}{\|\underline{a}_1 - \sigma \underline{e}_1\|_2} = \ldots$$

$$\underline{a}_1 - \sigma \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-\sqrt{5}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{a}_1 - \sigma \underline{e}_1\|_2 = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{5}}$$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3p ✓

$\underline{v}$

ALKALMAZZUK $H_1(\underline{v})$ TRF. MÁTRIXOT AZ A OSZLOPVEKTORAIRA.

i/ $\underline{a}_1$-RE ALKALMAZZUK

DEF SZERINT $= \sigma$ (CSAK EZEN A HELYEN)

$$H_1(\underline{v}) \cdot \underline{a}_1 = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{a}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{v}(\underline{v}^T \underline{a}_1) = \ldots = (-\sqrt{5})$$

ii/ $\underline{a}_2$-RE ALKALMAZZUK

$$H_1(\underline{v}) \cdot \underline{a}_2 = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{a}_2 = \underline{a}_2 - 2v(\underline{v}^T \underline{a}_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \cdot (2+\sqrt{5} \quad -1 \quad 0)}_{\underline{v}^T} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{10+4\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left((2+\sqrt{5}) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\cancel{2}}{\underset{5}{\cancel{10}} + \underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (\cancel{2} + \sqrt{5} - \cancel{2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - (\sqrt{5} - 2) \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

0/0

$H_1(\underline{v}) \cdot \underline{a}_3 = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{a}_3 = \underline{a}_3 - 2\underline{v}(\underline{v}^T \cdot \underline{a}_3) = \ldots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2p ✓

TEHÁT

$$H_1(\underline{v}) \cdot A = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 1p ✓

3/ KÉSZÍTSÜK EL AZ LU FELBONTÁSÁT A KÖV. MÁTRIXNAK

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

MEO MIVEL A TRIDIAGONÁLIS EZÉRT

L ÉS U IS AZ LESZ.

PÁR GE → SEJTÉS MINTÁRA → TELJES INDUKCIÓ BIZ.

1. LÉPÉS

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & & \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

2. sor $- (-1/u_1) \cdot$ 1. sor

$l_2 = -1/u_1 = -1/2$ $\quad u_2 = 2 - l_2 \cdot 1 = 2 + 1/2 \cdot 1 = 5/2$

2. LÉPÉS

3. sor $- (-1/u_2) \cdot$ 2. sor

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & u_3 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$l_3 = -1/u_2 = -2/5$ $\quad u_3 = 2 - l_3 \cdot 1 = 12/5$

SEJTÉS: a k LÉPÉSIG REKURZIÓ

$u_1 = 2$ $\quad l_i = \dfrac{-1}{u_{i-1}}$ $\quad u_i = 2 - l_i \cdot 1$

$(i = 2, \ldots, k)$

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_k & & \\ & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & 0 \\ 0 & l_3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & l_k & \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$(k+1)$. sor $- (-1/u_k) \cdot k$. sor

$l_{k+1} = -1/u_k \quad u_{k+1} = 2 - l_{k+1} \cdot 1$

VAGYIS $(k+1)$-RE IS IGAZ A SEJTÉS, TEHÁT ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSRA IS IGAZ. ✓