Szóbeli tételek

Programtervező informatikus BSc
Numerikus módszerek 1.

1. Lebegőpontos számok és tulajdonságaik. Hibaszámítás elemei.

- **a)** Ismertesse a lebegőpontos számábrázolás modelljét, és definiálja a gépi számokat. Nevezze meg és számítsa ki a számhalmaz nevezetes mennyiségeit (elemszám, M_∞, ε_0). Szemléltesse a halmaz elemeit számegyenesen. Adjon meg két példát a véges szám-ábrázolásból fakadó furcsaságokra.
- **b)** Az input függvény fogalma, tétel az ábrázolt szám hibájáról, ε_1 mennyiség bevezetése és értelmezése.
- **c)** * Ismertesse az abszolút és relatív hiba, hibakorlát fogalmát. Mutassa be az alapműveletek hibakorlátaira vonatkozó állításokat, és igazolja a szorzásra az abszolút hibára és az különbségre a relatív hibára vonatkozó összefüggéseket. Mely műveletek elvégzése veszélyes az abszolút és relatív hibára nézve és miért?

2. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás algoritmusa.

- **a)** Vázolja a Gauss-elimináció alapötletét LER megoldására, vezesse le az algoritmus képleteit. Mutassa be a Gauss-elimináció további alkalmazásait azonos mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására, determináns kiszámítására és inverzmátrix meghatározására.
- **b)** Határozza meg az elimináció és a visszahelyettesítés műveletigényét.
- **c)** * Mutassa meg, hogy a GE lépései végrehajthatók speciális mátrix-szorzásokkal. Vezesse le a kapott mátrixok inverzére és szorzatára tanult állításokat. Végül ezeket felhasználva állítsa elő a kiinduló mátrix LU-felbontását.

3. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás elemzése.

- **a)** Mutassa be a Gauss-elimináció algoritmusát. Adjon szükséges és elégséges feltételeket a GE elakadására illetve végrehajthatóságára. Ismertesse LER megoldását LU-felbontás segítségével. Miért előnyös ennek használata a GE-vel szemben?
- **b)** Ismertesse a részleges és teljes főelemkiválasztás módszereit. Mit mondhatunk az elakadásról részleges főelemkiválasztás alkalmazása esetén? Miért lehet érdemes teljes főelemkiválasztást használni?
- **c)** * Idézze fel az LU felbontás előállításának módszerét a Gauss-elimináció segítségével (bizonyítás nélkül). Adjon szükséges és elégséges feltételt a létezésre. Igazolja az LU-felbontás egyértelműségére vonatkozó tételt.

4. Az LU-felbontás alkalmazása. A Schur-komplementer.

- **a)** Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.
- **b)** Definiálja a Schur-komplementert. Ismertesse a GE megmaradási tételeit (és a kapcsolódó fogalmakat), majd bizonyítsa a determinánsra és szimmetriára vonatkozó pontokat.
- **c)** * Igazolja a pozitív definitség megmaradására vonatkozó állítást.

5. A Cholesky-féle felbontás.
  a) A Cholesky-felbontás fogalma, előállításának algoritmusa a Gauss-elimináció segítségével. Mire használható a Cholesky-felbontás?
  b) * Mondja ki és bizonyítsa be a Cholesky-felbontás létezésére és egyértelműségére vonatkozó tételt.
  c) Mutassa be az elemenkénti meghatározásra szolgáló (Cholesky-)algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt, tárigényt.

6. A QR-felbontás.
  a) Definiálja a QR-felbontást és vezesse le az előállítására alkalmas Gramm–Schmidt ortogonalizációs eljárást. Milyen feltétel garantálja, hogy az algoritmus nem akad el?
  b) Mutassa be az ortogonalizációs eljárás normálás nélküli változatát, és az utólagos normálás módját. Hogyan alkalmazható a QR-felbontás LER megoldására? Vesse össze az LU-felbontáson alapuló megoldással (műveletigény, alkalmazhatóság).
  c) * A QR-felbontás egyértelmúségére vonatkozó tétel.

7. A Householder-transzformáció.
  a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.
  b) Határozza meg különböző, azonos (de nem 0) hosszúságú a, b vektorokhoz azt a H transzformációt, melyre $Ha = b$. Alkalmazza ezt az eredményt tetszőleges vektor σe_1 alakra hozására, indokolja σ értékének megválasztását.
  c) * Mutassa be a Householder-transzformáció alkalmazását lineáris egyenletrendszer megoldására, valamint QR-felbontás elkészítésére. Vesse össze a módszert a Gram–Schmidt eljárással műveletigény és numerikus stabilitás szempontjából.

8. Mátrixnormák és tulajdonságaik I.
  a) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált normát, mutassa meg, hogy utóbbi mindig mátrixnorma. Adjon meg példákat is. Igazolja mátrix tetszőleges normája és a spektrálsugara közti egyenlőtlenséget.
  b) * Vezesse le a 2-es vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.
  c) Vezesse le, mivel egyenlő normális mátrix 2-es normája. Mit mondhatunk ortogonális mátrix 2-es normájáról?

9. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.
  a) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált normát, mutassa meg, hogy utóbbi mindig mátrixnorma. Írja fel a Frobenius mátrixnorma képletét (bizonyítás nélkül), igazolja, hogy nem indukált norma. Definiálja az illeszkedés fogalmát, igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához.
  b) * Igazolja a Frobenius-norma sajátértékekkel való kifejezésének képletét. Ezt felhasználva mutasson példát olyan vektornormára, melyhez a Frobenius-norma illeszkedik.
  c) Vezesse le az 1-es vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.

10. LER érzékenysége.
  a) Formalizálja LER jobboldalának illetve mátrixának perturbációját, ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciószámot és igazolja tulajdonságait.
  b) Bizonyítsa a LER jobboldalának megváltozására vonatkozó tételt.
  c) * Bizonyítsa a mátrix megváltozására vonatkozó tételt és a felhasznált lemmát.

11. Iterációs módszerek konvergenciája.
  a) Kontrakció fogalma $\mathbb{R}^n$-en, a Banach-féle fixponttétel ismertetése.
  b) Vázolja LER iterációs módszerrel történő megoldásának alapötletét, vesse össze a direkt módszerekkel. Vezessen le elégséges feltételt a konvergenciára.
  c) * Igazolja a konvergencia szükséges és elégségséges feltételéről szóló tételt!

12. A Jacobi-iteráció, Gauss–Seidel-iteráció.

- **a)** Vezesse le a Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Mondja ki a konvergencia tanult elégséges feltételét!
- **b)** Vezesse le a Gauss–Seidel-iteráció vektoros és koordinátás alakját. Ismertesse a relaxált változat alapötletét, határozza meg vektoros és koordinátás képleteit.
- **c)** * Bizonyítsa a Gauss–Seidel-relaxációs módszer konvergenciájának szükséges feltételét és mondja ki a konvergencia elégséges feltételét.

13. Nemlineáris egyenletek megoldása I.

- **a)** Ismertesse a nemlineáris egyenletek megoldásának feladatát. Mutassa be a megoldás létezését biztosító állításokat: írja fel a Bolzano-tételt (bizonyítás nélkül).
- **b)** Kontrakció fogalma $[a;b]$ intervallumon és a Banach-féle fixponttétel (bizonyítás nélkül). Igazolja az elégséges feltételt a kontrakcióra.
- **c)** * Ismertesse a konvergenciarend fogalmát. Igazolja a fixpont-iterációk magasabb rendű konvergenciájáról szóló tételt.

14. Nemlineáris egyenletek megoldása II.

- **a)** Vázolja az intervallumfelezés algoritmusát és adjon hozzá hibabecslést. Ismertesse a húrmódszer alapötletét, és vezesse le az iteráció képletét!
- **b)** Ismertesse a Newton-módszer alapötletét és vezesse le az iteráció képletét. Milyen tételt ismer a módszer monoton konvergenciájáról (bizonyítás nélkül)?
- **c)** * Igazolja a Newton-módszer monoton konvergenciájáról szóló állítást.

15. Nemlineáris egyenletek megoldása III.

- **a)** Ismertesse a Newton-módszer alapötletét és vezesse le az iteráció képletét. Milyen tételt ismer a módszer lokális konvergenciájáról (bizonyítás nélkül)?
- **b)** * Igazolja a Newton-módszer lokális konvergenciájáról szóló állítást.
- **c)** Ismertesse a szelőmódszer alapötletét és vezesse le az iteráció képletét! Adjon konvergenciatételt (bizonyítás nélkül). Vesse össze az eredményeket a Newton-módszerről tanultakkal.