15. Richardson-típusú iterációk. Kerekítési hibák az iterációkban.

A) Vezesse le a Richardson-típusú iterációk képletét. Írja fel a reziduumvektoros alakot és ismertesse annak jelentőségét. Fogalmazza meg a tanult konvergenciatételt (bizonyítás nélkül)

Tekintsük az $Ax = b$ LER-t, ahol A szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ p \cdot Ax &= p \cdot b \\ 0 &= -pAx + pb \\ x &= x - pAx + pb = (I - pA)x + pb \end{aligned}$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Richardson-iteráció p paraméterrel – R(p):

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I - pA)}_{B_{R(p)}} \cdot x^{(k)} + \underbrace{pb}_{c_{R(p)}} = B_{R(p)} \cdot x^{(k)} + c_{R(p)}$$

Rezidiumvektoros alak:

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - pAx^{(k)} + pb = x^{(k)} + p \cdot \left(-Ax^{(k)} + b\right) = \\ &= x^{(k)} + pr^{(k)} \end{aligned}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := pr^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Richardson konvergenciatétele:

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és sajátértékeire $m = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = M$ teljesül, akkor $R(p)$ (azaz az $Ax = b$ LER-re felírt $p \in \mathbb{R}$ paraméterű Richardson-iteráció) pontosan a

$$p \in \left(0, \frac{2}{M}\right),$$

paraméter értékekre konvergens minden kezdővektor esetén. Az optimális paraméter $p_0 = \frac{2}{M+m}$, a hozzá kapcsolódó kontrakciós együttható pedig:

$$\varrho(B_{R(p_0)}) := \frac{M - m}{M + m} = \left\|B_{R(p_0)}\right\|_2 = q.$$

C) Vezesse le a kerekítési hibák hosszútávú hatását egy általános iterációs módszer alkalmazásakor.

Tekintsük az iteráció szokásos alakját!

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik az iteráció, ha a $k+1$. lépésben *kicsit* $\varepsilon^{(k)}$*-val* megváltoztatjuk! (Számolási pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$
2. **Módosult:**
$$y^{(k+1)} = By^{(k)} + c + \varepsilon^{(k)}$$

Nyilván a lépésenkénti $\varepsilon^{(k)}$ hiba miatt *kicsit* más lesz az iteráció ...

Kerekítési hibák:

Tegyük fel, hogy

- iterációnk bármely kezdőértékre konvergens,
- a lépésenkénti hiba felülről korlátos, vagyis létezik $\varepsilon > 0$, melyre $\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$ minden k-ra.

Ekkor a $z^{(k)}$ hibasorozatra

$$\lim_{k\to\infty} \left\|z^{(k)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\|B\|}.$$

Biz.: A $z^{(k)} := x^{(k)} - y^{(k)}$ hibavektorra írjuk fel a rekurziót:

$$z^{(k+1)} = x^{(k+1)} - y^{(k+1)} = \left(Bx^{(k)} + c\right) - \left(By^{(k)} + c + \varepsilon^{(k)}\right) =$$
$$= B\left(x^{(k)} - y^{(k)}\right) - \varepsilon^{(k)} = Bz^{(k)} - \varepsilon^{(k)}.$$

A konvergenciából következik, hogy létezik olyan indukált mátrixnorma, melyben $\|B\| < 1$. A hozzá illeszkedő vektornormában becsüljünk:

$$\begin{aligned}
\left\|z^{(k+1)}\right\| &\leq \|B\| \cdot \left\|z^{(k)}\right\| + \left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \leq \|B\| \cdot \left\|z^{(k)}\right\| + \varepsilon \leq \\
&\leq \|B\| \left(\|B\| \cdot \left\|z^{(k-1)}\right\| + \varepsilon\right) + \varepsilon \leq \ldots \leq \\
&\leq \|B\|^{k+1} \cdot \left\|z^{(0)}\right\| + \varepsilon \cdot \left(\|B\|^k + \ldots + \|B\| + 1\right) < \\
&< \varepsilon \|B\|^{k+1} + \varepsilon \cdot \frac{1}{1-\|B\|}.
\end{aligned}$$

Innen $k \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás. $\square$