13. A Jacobi-iteráció

A) Vezesse le a Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Ismertesse a csillapított változat alapötletét, határozza meg a vektoros és koordinátás képleteit.

Jacobi-iteráció mátrixos alakja:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J} \cdot x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J} = B_J \cdot x^{(k)} + c_J$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ Dx &= -(L+U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

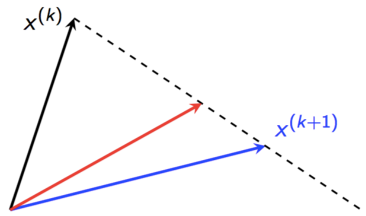
Jacobi-iteráció koordinátás alakja:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Csillapított változat alapötlete:

A *csillapítás* avagy *tompítás* alapötlete:

$$x_J^{(k+1)} \quad \text{helyett} \quad (1-\omega)\cdot x^{(k)} + \omega \cdot x_J^{(k+1)}$$



Megj.:

- alulrelaxálás ($0 < \omega < 1$), túlrelaxálás ($\omega > 1$)
- $\omega = 1$ az eredeti módszert adja

Induljunk a Jacobi-módszerből és a „helyben hagyásból":

$$\begin{aligned} x &= -D^{-1}(L+U)\cdot x + D^{-1}b && /\cdot\omega \\ x &= x && /\cdot(1-\omega) \end{aligned}$$

A kettő súlyozott összege:

$$x = \left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\right]\cdot x + \omega D^{-1}b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Csillapított Jacobi-iteráció ω paraméterrel – J(ω) (vektoros)

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\right]}_{B_{J(\omega)}} \cdot x^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1}b}_{c_{J(\omega)}}$$

Csillapított jakobi, J(ω) mátrixos felírással

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} + \omega \cdot x_{i,J}^{(k+1)},$$

ahol $x_{i,J}^{(k+1)}$ a hagyományos Jacobi-módszer ($J = J(1)$) által adott, azaz

$$x_{i,J}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

B) Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére. Adjon elégséges feltételt a Jacobi-iteráció konvergenciájára.

Reziduumvektoros alak:

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + D^{-1}b = D^{-1}\left((D-A)\cdot x^{(k)} + b\right) =$$
$$= x^{(k)} + D^{-1}\left(-Ax^{(k)} + b\right) = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := D^{-1}r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Jacobi-iteráció konvergenciája:

Ha az $Ax = b$ LER-re a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdőértékre, akkor $0 < \omega < 1$-re a csillapított Jacobi-iteráció is az.

Biz.: $J(\omega)$ iteráció esetén az átmenet mátrix $(1-\omega)I + \omega B_J$. Először belátjuk, hogy a $B_{J(\omega)}$ mátrix μ_i sajátértékeire teljesül, hogy

$$\mu_i = (1-\omega) + \omega\lambda_i,$$

ahol λ_i-k a B_J sajátértékei. A két mátrix sajátvektorai (v_i-k) azonosak.

$$B_{J(\omega)}v_i = ((1-\omega)I + \omega B_J)v_i = (1-\omega)v_i + \omega\lambda_i v_i =$$
$$= \underbrace{((1-\omega) + \omega\lambda_i)}_{\mu_i} v_i = \mu_i v_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

A bizonyításban a konvergenciára vonatkozó szükséges és elégséges feltételt használjuk. Belátjuk, hogy

$$\varrho(B_J) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \omega < 1: \ \ \varrho(B_{J(\omega)}) < 1.$$

$\varrho(B_J) < 1$-ből következik, hogy minden i-re $|\lambda_i| < 1$.

Felhasználjuk, hogy $0 < \omega < 1$ és becsüljük $\mu_i = (1-\omega) + \omega\lambda_i$-t:

$$|\mu_i| \le (1-\omega) + \omega\,|\lambda_i| < (1-\omega) + \omega = 1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ha minden i-re $|\mu_i| < 1$ teljesül, akkor $\varrho(B_{J(\omega)}) < 1$, vagyis a csillapított iteráció minden kezdőértékre konvergens. $\square$