12. Iterációs módszerek konvergenciája

B) Vázolja LER iterációs módszerrel történő megoldásának alapötletét, vesse össze a direkt módszerekkel. Vezessen le elégséges feltételt konvergenciára.

Bármilyen Ax = b egyenlet átírható ekvivalens átalakításokkal x = Bx + r alakra. Az átalakítás azonban nem egyértelmű, sokféle lehet, és ezek a különféle átalakítások adják a különféle iterációs módszereket. Egy triviális átalakítás:

Ax = b
0 = -Ax + b
x = x - Ax + b
x = (I - A)x + b
x = Bx + r —> ahol B = I - A és r = b

4.1. Definíció. *Az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény kontrakció , ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$||F(x) - F(y)|| \leq q||x - y||$$

Az egyenlőtlenségben szereplő q számot kontrakciós állandónak vagy kontrakciószámnak hívjuk.

4.2. Tétel. *(Banch-féle fixponttétel)*
Legyen az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény kontrakció q kontrakciós állandóval. Ekkor

- $\exists! x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = F(x^*)$, *vagyis egyértelműen létezik az F függvénynek fixpontja*
- $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *kezdőérték esetén, az* $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ *rekurzióval definiált sorozat konvergens, és a határértéke az x^* lesz, vagyis* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$
- *teljesül az alábbi hibabecslés is:*

$$||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{q^k}{1-q}||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

Innen már látszik az x = Bx + r egyenletnek az iterációs módszerekkel való megoldása, hiszen nem másról van szó, hogy keressük az F: R^n—>R^n ; F(x) = Bx + r függvény fixpontját.

Már csak azt kell biztosítanunk, hogy az F függvény kontrakció legyen:

||F(x) - F(y)|| = ||Bx+r - (By+r)|| = ||Bx - By|| = ||B(x - y)|| <= ||B|| ||x - y||

Tehát ha B mátrix valamely indukált normája kisebb mint 1, akkor a függvény kontrkció, és a fixponttétel alkalmazható rá.

Ha $\|B\| < 1$, az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció konvergens minden kezdőértékre.

Megj.: Attól még lehet konvergens valamely kezdőértékből indítva, ha $\|B\| \geq 1$.
(Nem szükséges feltétel.)

C) Igazolja a konvergencia szükséges és elégséges feltételét.

Iteráció konvergenciájának elégséges feltétele:

Ha $\|B\| < 1$, az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció konvergens minden kezdőértékre.

Spektrálsugár és indukált norma kapcsolata:

$$\varrho(B) = \inf \{ \|B\| \ : \ \|.\| \ \text{indukált mátrixnorma} \},$$

azaz $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ indukált $\|.\| : \|B\| < \varrho(B) + \varepsilon$.

Ekvivalens átfogalmazás:

Az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció akkor és csak akkor konvergens minden kezdőértékre, ha

$$\varrho(B) < 1.$$

Biz.:

- $\Leftarrow$: Az előző Lemma alapján trivi.
- $\Rightarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy $\varrho(B) \geq 1$, azaz $\exists |\lambda| \geq 1$ sajátérték, és legyen $x^{(0)}$ olyan, hogy $x^{(0)} - x^*(\neq 0)$ kezdeti hiba a B λ-hoz tartozó sajátvektora legyen.

Ekkor:

$$\begin{aligned}
B(x^{(0)} - x^*) &= \lambda(x^{(0)} - x^*) \\
B^2(x^{(0)} - x^*) &= \lambda^2(x^{(0)} - x^*) \quad \Rightarrow \ldots \\
B^k(x^{(0)} - x^*) &= \lambda^k(x^{(0)} - x^*) \ (k \in \mathbb{N}) \\
x^{(k)} - x^* = (Bx^{(k-1)} + c) - (Bx^* + c) &= B(x^{(k-1)} - x^*) = \\
&= B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*) \\
\left\|x^{(k)} - x^*\right\| = |\lambda|^k \cdot \underbrace{\left\|x^{(0)} - x^*\right\|}_{\text{konst.}} &\not\to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk. $\square$