Numerid ZH 2. összefoglaló

Mátrixnormák

$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma)

$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma)

/Ha A mátrix szimetrikus: $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$ /

$\|A\|_2 = (\max \lambda_i(A^T A))^{\frac{1}{2}} = (\rho(A^* A))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \det(A^* A - \lambda I) = 0$ $\quad A^* = A^T$

$\lambda_i(A^*A)$?

$\boxed{\lambda_i: \text{az } (A^T A) \text{ mátrix } i\text{-edik sajátértéke}}$

$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

|Példa|:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_1 = \max\{4+0+|-1|,\ 0+4+1,\ |-1|+1+4\} = \max\{5,5,6\} = 6$

$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 6$

$\|A\|_F = \sqrt{4^2+0^2+(-1)^2+0^2+4^2+1^2+(-1)^2+1^2+4^2} = \sqrt{52}$

$\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{\frac{1}{2}} \underset{\uparrow}{=} \rho(A) = \max|\lambda_i(A)| = 4+\sqrt{2}$

A szimetrikus

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (4-\lambda)((4-\lambda)^2-1) + (-1)((0\cdot 1) - (-1)(4-\lambda)) =$

$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0$

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_{2,3} = 4 \pm \sqrt{2}$

/ Spektrálsugár számolása /

Kondíciószám:

$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$\mathrm{cond}_i(A) = \|A\|_i \cdot \|A^{-1}\|_i \quad i \in \{1, 2, \infty, F\}$

A szimetrikus $\Rightarrow \mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$

Iterációk:

- konvergencia elégséges feltétele: $\|B\| < 1$
- konv. szükséges és elégséges feltétele: $\rho(B) < 1$
- hibabecslés:

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x_1 - x_0\| \quad \text{ahol } q = \|B\|$$

Jacobi-iteráció:

$$A = L + D + U$$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J}x + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J}$$

koordinátás alak:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J = -D^{-1}((L+U)x^{(k)} - b)$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} - b_i\right)$$

Gauss-Seidel iteráció:

$$A = L + D + U$$

$$x = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B_S}x + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{c_S}$$

$$x_{k+1} = B_S x^{(k)} + c_S$$

$$= (L+D)^{-1}U x^{(k)} + (L+D)^{-1}b$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{k} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right)$$

Csillapított Jacobi:

$$x = \underbrace{[(1-\omega)I - \omega B_J)]}_{B_J(\omega)}x + \underbrace{\omega c_J}_{c_J(\omega)}$$

Richardson-iteráció:

$$x = x - pAx + pb = \underbrace{(I - pA)}_{B_R(p)}x + \underbrace{pb}_{c_R(p)}$$

$$p = \frac{1}{\lambda_i}$$

$B_{R(p)}$ ~~BA~~ szim:

$$\varrho(B_{R(p)}) = \|B_{R(p)}\|_2$$

A szim. és pozitív definit:

- it konvergens, ha: $p \in (0, \frac{2}{M})$ $\quad M = \max(\lambda_i(A))$

optimális:

- $p_0 = \frac{2}{M+m}$ $\quad \varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{M-m}{M+m}$ $\quad m = \min(\lambda_i(A))$

B_{p_0} szim $\Rightarrow \varrho(B_{R(p_0)}) = \|B_{R(p_0)}\|_2 = q$ kontrakciós együttható

ILU felbontás és algoritmus:

$$A = \underbrace{LU}_{P} - Q \qquad x^{(k+1)} = \underbrace{P^{-1}Q}_{B_{ILU}}x^{(k)} + \underbrace{P^{-1}b}_{c_{ILU}}$$

J: pozícióhalmaz

$$\tilde{A}_1 = A$$

$\tilde{A}_k = P_k - Q_k \rightarrow$ k oszlop és k sor $\cap$ J pozícióhalmaz

$\tilde{A}_{k+1} = L_k P_k$ $\quad \boxed{\tilde{A}_n = U}$ $\quad \boxed{L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}$ $\quad \boxed{Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1}}$