10. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.

A) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált normát, mutassa meg, hogy utóbbi mindig mátrixnorma. Írja fel a Frobenius mátrixnorma képletét (bizonyítás nélkül), igazolja, hogy nem indukált norma. Definiálja az illeszkedés fogalmát, igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához.

Vektor hossza

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját" jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

A *(vektor)norma* a „hossz", „nagyság" általánosítása. Azaz a leképezés pozitív, pozitív homogén és szubadditív (háromszög-egyenlőtlenség). Ezek a vektornormák *axiómái*.

Mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Indukált mátrixnorma (természetes mátrixnorma)

Legyen $\|.\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|.\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Indukált norma mindig mátrixnorma

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.
3. $$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\cdot\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda|\cdot\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda|\cdot\|A\|\,.$$
4. $$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$
5. $B = 0 \quad\Rightarrow\quad \|B\| = 0$, valamint
$A\cdot B = A\cdot 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \|AB\| = 0$.
Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

   Ha $B \neq 0$, akkor
$$\|A\cdot B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v}\cdot\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
$$\leq \sup_{Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\|\cdot\|B\|\,.$$

   Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szuprémum értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. □

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v\,.$$
- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\|\cdot\|x\|_v\,.$$
Sőt: $\|A\|$ a legkisebb ilyen felső korlát.

Frobenius norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:
$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Frobenius norma nem indukált norma

Biz.: Tekintsük az $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén $\|I\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$.
- Másrészt $\|I\|_F = \sqrt{n}$.
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha $n > 1$). □

Illeszkedés fogalma

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához.

Biz.: Láttuk az előbb. Az $x = 0$ eset meggondolandó. □

C) Vezesse le az 1-es vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),

Jel.: $\lambda_i(M)$: az M mátrix i-edik sajátértéke ($Mv = \lambda v,\ v \neq 0$).

A bizonyítás „dallama":

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1 .$$

Legyen $x = e_k$, ahol a k-adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\ldots} \underbrace{\|e_k\|_1}_{1} . \qquad \square$$