14. Gauss-Seidel-iteráció

A) Vezesse le a Gauss-Seidel-iteráció vektoros és koordinátás alakját. Ismertesse a relaxált változat alapötletét, határozza meg vektoros és koordinátás képleteit.

Gauss-Seidel vektoros alak:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B_S} \cdot x^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{c_S} = B_S \cdot x^{(k)} + c_S$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ (L+D)x &= -Ux + b \\ x &= -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}b \end{aligned}$$

Gauss-Seidel koordinátás alak:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Biz.: Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$\begin{aligned} (D+\omega L)x^{(k+1)} &= (1-\omega)Dx^{(k)} - \omega U x^{(k)} + \omega b \\ Dx^{(k+1)} &= (1-\omega)Dx^{(k)} - \omega L x^{(k+1)} - \omega U x^{(k)} + \omega b \\ x^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} - \omega \underbrace{D^{-1}\left(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b\right)}_{\text{Lásd } S(1)\text{-nél.}} \end{aligned}$$

A koordinátánkénti alakja:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

Induljunk a Gauss–Seidel-iteráció következő alakjából:

$$\begin{aligned} (L+D) \cdot x &= -U \cdot x + b && / \cdot \omega \\ D \cdot x &= D \cdot x && / \cdot (1-\omega) \end{aligned}$$

A kettő súlyozott összege:

$$(D+\omega L) \cdot x = [(1-\omega)D - \omega U] \cdot x + \omega b$$

$$x = (D+\omega L)^{-1} [(1-\omega)D - \omega U] \cdot x + (D+\omega L)^{-1} \omega b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Relaxált Gauss–Seidel-iteráció ω paraméterrel – S(ω)

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1} [(1-\omega)D - \omega U]}_{B_{S(\omega)}} \cdot x^{(k)} + \underbrace{\omega (D+\omega L)^{-1} b}_{c_{S(\omega)}}$$

S(ω) komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_i^{(k)} + \omega \cdot x_{i,S}^{(k+1)},$$

ahol $x_{i,S}^{(k+1)}$ a hagyományos Seidel-módszer ($S = S(1)$) által adott, azaz

$$x_{i,S}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

Minden k. lépés az $i = 1, 2, \ldots, n$ sorrendben számolandó.

C) Vesse össze a Jacobi és a Gauss-Seidel típusú iterációkat. Ismertesse a speciális mátrixosztályok eseteire tanult tételeket (bizonyítás nélkül), értelmezze az eredményeket.

Ha az egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, pozitív definit és $\omega \in (0, 2)$, akkor az $S(\omega)$ módszer konvergens.

Ha a LER mátrixa tridiagonális, akkor a Jacobi- és Gauss–Seidel-iteráció egyszerre konvergens vagy divergens

$$\text{azaz } \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2.$$

Ez azt jelenti, hogy konvergencia esetén a Gauss–Seidel-iteráció kétszer gyorsabb,

Ha a LER mátrixa tridiagonális, szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Jacobi-, Gauss–Seidel- és relaxált Gauss–Seidel-iteráció is konvergens. Megadható $S(\omega)$-ra optimális paraméter

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_J)^2}}.$$

Továbbá,

- ha $\varrho(B_J) = 0$, akkor $\omega_0 = 1$ és $\varrho(B_S) = \varrho(B_{S(\omega_0)}) = 0$,
- $\varrho(B_J) \neq 0$, akkor $\varrho(B_{S(\omega_0)}) = \omega_0 - 1 < \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2$.

- Az utóbbi két tétel blokktridiagonális mátrixokra is igaz, a megfelelő blokkiterációkra.
- Az iterációs módszer konvergencia sebessége a q kontrakciós együtthatótól függ. Minél közelebb van 0-hoz, annál gyorsabb a módszer, míg, ha 1-hez van közel, akkor nagyon lassú. A kontrakciós együtthatót $q = \|B\|$-ként kapjuk.
- Mivel bármely normára $\inf\{\|B\| : B \text{ indukált norma}\} = \varrho(B)$, ezért a spektrálsugár határozza meg a konvergencia sebességét.