

Gyak.vez. neve \_\_\_\_\_

Név \_\_\_\_\_

Gyak. ideje \_\_\_\_\_

Neptun kód \_\_\_\_\_

Pontszám \_\_\_\_\_

1. Tegyük fel, hogy  $0 \leq \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra a sorösszeg konstans. (6 pont)

Vagyis  $a_{ij} \geq 0$  és  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = c$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Igazoljuk, hogy ekkor a spektrálsugár

$$\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_{\infty}.$$

2. Tekintsük az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$  mátrixot az  $a \in [1, 3]$  paraméterrel! (12 pont)

a) Számítsuk ki az  $\mathbf{A}$  mátrix 1, 2-es kondíciós számát!

b) Válasszuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy  $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \text{cond}_1(\mathbf{A})$  legyen.

3. Az  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Jacobi-iterációt! (9 pont)

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!

b) Írjuk fel a hibabecslését!

c) Hány lépést kell tennünk a  $10^{-3}$  pontosság eléréséhez, ha  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ?

4. Az  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Gauss–Seidel-iterációt! (7 pont)

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!

b) Számítsuk ki  $\mathbf{x}_1$  -et a koordinátás alakjában, ha  $\mathbf{x}_0 = [2, 2, 2]^T$ !

c) Ebben az esetben a Jacobi- vagy a Gauss–Seidel-iteráció a gyorsabb? Válaszát indokolja!

5. Az  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Richardson-iterációt! (8 pont)

a) Pontosan mely  $p$  paraméter értékekre konvergens?

b) Mi az optimális paraméter, és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

6. Mi lesz az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  mátrix  $J = \{(1, 3), (3, 2)\}$  pozícióhalmazra illeszkedő (8 pont)

részleges  $LU$ -felbontása? Határozzuk meg az  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{Q}$  mátrixokat!