Numerikus módszerek 1.

3. előadás: Mátrixok LU-felbontása

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixszal megszorzunk egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{array}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz.

Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixszal megszorzunk egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, valamint az 1. sor háromszorosát levonjuk a 3. sorból. ($\sim$ GE 1. lépése volt)

A Gauss-elimináció lépései mátrixszorzással

Írjuk fel a GE k-adik lépését ugyanilyen módszerrel! ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix} = I - \ell_k e_k^\top, \quad \ell_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{pmatrix}.$$

(A zérus elemek nincsenek feltüntetve L_k-ban.)

Tehát ha $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \ldots, n-1;\;\; i = k+1, \ldots, n)$,

akkor $L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$, vagyis megkaptuk a GE k-adik lépését.

Példa: GE az L_k mátrixokkal

Írjuk fel a Gauss-elimináció lépéseit mátrixszorzások segítségével a következő mátrix esetén (ua. mint az előző előadáson)!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: **1. lépés**

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$, a kapott felsőháromszög alakot U-val jelöljük.
Fejezzük ki A-t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Ezzel megkaptuk az A mátrix LU-felbontását. Ennek az elméletét tárgyaljuk a következőkben.

Definíció: alsó háromszögmátrix

Az $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i < j$ esetén $l_{ij} = 0$. (A főátló felett csupa nulla.)

$$\mathcal{L} := \{\, L \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; l_{ij} = 0 \; (i < j) \,\},$$
$$\mathcal{L}_1 := \{\, L \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; l_{ij} = 0 \; (i < j), \;\; l_{ii} = 1 \,\}.$$

Definíció: felső háromszögmátrix

Az $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i > j$ esetén $u_{ij} = 0$. (A főátló alatt csupa nulla.)

$$\mathcal{U} := \{\, U \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; u_{ij} = 0 \; (i > j) \,\},$$
$$\mathcal{U}_1 := \{\, U \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; u_{ij} = 0 \; (i > j), \;\; u_{ii} = 1 \,\}.$$

Állítás: háromszögmátrixról

1. Ha $L', L'' \in \mathcal{L}$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}$.
2. Ha $U', U'' \in \mathcal{U}$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}$.
3. Ha $L', L'' \in \mathcal{L}_1$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}_1$.
4. Ha $U', U'' \in \mathcal{U}_1$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}_1$.
5. Ha $L \in \mathcal{L}$ és $\exists L^{-1}$, akkor $L^{-1} \in \mathcal{L}$.
6. Ha $U \in \mathcal{U}$ és $\exists U^{-1}$, akkor $U^{-1} \in \mathcal{U}$.
7. Ha $L \in \mathcal{L}_1$, akkor $\exists L^{-1}$ és $L^{-1} \in \mathcal{L}_1$.
8. Ha $U \in \mathcal{U}_1$, akkor $\exists U^{-1}$ és $U^{-1} \in \mathcal{U}_1$.

Biz.: házi feladat (beadható). $\square$

Definíció: L_k

$L_k := I - \ell_k e_k^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ahol $\ell_k \in \mathbb{R}^n$, $(\ell_k)_i = 0$ $(i \le k)$ és $e_k \in \mathbb{R}^n$ a k-adik egységvektor.

Állítás: L_k inverze

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^\top .$$

Biz.:

$$L_k \cdot L_k^{-1} = (I - \ell_k e_k^\top)(I + \ell_k e_k^\top) = I \underbrace{- \ell_k e_k^\top + \ell_k e_k^\top}_{0} - \ell_k \underbrace{e_k^\top \ell_k}_{0} e_k^\top = I. \qquad \square$$

Szemléletesen?

Az L_k mátrixokról

Hogyan szorzunk össze két ilyen mátrixot?

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}2} & 1 & 0 \\ {\color{red}1} & {\color{red}3} & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}2} & 1 & 0 \\ {\color{red}7} & {\color{red}3} & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A bal oldali sorrendben „szépen” szorzódik. Általában is.

Állítás: L_k mátrixok szorzata

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_{n-1} e_{n-1}^\top.$$

Szemléletesen?

Biz.: Indukcióval.

- $$\begin{aligned} L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} &= (I + \ell_1 e_1^\top)(I + \ell_2 e_2^\top) = \\ &= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ell_1 \underbrace{(e_1^\top \ell_2)}_{0} e_2^\top = \\ &= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top \end{aligned}$$

- Tegyük fel, hogy $k+1 < n-1$ és

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} = I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top .$$

- $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} =$

$$= (I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top)(I + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top) =$$

$$= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top +$$

$$+ \underbrace{\ell_1 e_1^\top \ell_{k+1} e_{k+1}^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top \ell_{k+1} e_{k+1}^\top}_{\text{kiesnek}} =$$

$$= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top = \checkmark . \qquad \square$$

Definíció: LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \; U \in \mathcal{U}.$$

A Gauss-eliminációt felírhatjuk alsó háromszögmátrixok segítségével:

$$L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A = U,$$

majd az inverzekkel egyesével átszorozva:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U = LU.$$

A fenti szorzat is alsó háromszögmátrix. Láttuk az előző tételből, hogy az L mátrix elemeit egy egységmátrixból kapjuk úgy, hogy minden oszlopba ez egyesek alá beletesszük a neki megfelelő ℓ_k vektor nem nulla elemeit (ezek a GE-s hányadosok). Tehát ennek előállításához nem kell több művelet, mint amit a GE-val végzünk.

Példa: LU-felbontás GE-val

Készítsük el a példamátrixunk LU-felbontását

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) részletezve az L_k mátrixokat, a számítás menetét,

(b) majd „tömör” írásmóddal!

Megoldás: (a) 1. lépés

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

L_1^{-1}-et úgy kapjuk, hogy L_1 1. oszlopában az átló alatti elemeket (-1)-szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ezek a tényleges GE-s hányadosok. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_1-re van szükségünk.

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

L_2^{-1}-et úgy kapjuk, hogy L_2 2. oszlopában az átló alatti elemeket (-1)-szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ez a tényleges GE-s hányados. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_2-re van szükségünk.

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$

Fejezzük ki A-t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Tehát $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$. Az L_k mátixok szorzatára felírt tétel alapján ehhez nem kell mátrixot szoroznunk, csak az ℓ_k vektorokból kell összeraknunk L-et.

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményt szorzással is ellenőrizhetjük.

Példa

(b) Tömör írásmódban: 1. lépés

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni (éppen ennyi nulla van az oszlopban). Könnyen megjegyezhető ezek képzése: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Ezzel minden a helyére került. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 3 \\ \hline \frac{-4}{2} & 5 & 4 \\ \frac{6}{2} & -5 & -5 \end{array}\right] \to$$

Példa

2. lépés:

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó 2×2-es mátrix részen, a többit változatlanul leírjuk.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 2 & 0 & 3 \\ \hline \color{red}{-2} & 5 & 4 \\ \color{red}{3} & -5 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{r|r|r} 2 & 0 & 3 \\ \hline \color{red}{-2} & 5 & 4 \\ \cline{2-3} \color{red}{3} & \color{red}{\frac{-5}{5}} & -1 \end{array}\right]$$

Olvassuk ki a keresett mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{-2} & 1 & 0 \\ \color{red}{3} & \color{red}{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

Tétel: LU-felbontás létezése

Ha a Gauss-elimináció végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül (azaz $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$), akkor az A mátrix LU-felbontása létezik.

Biz.: Ha a GE végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül, akkor az L_k mátrixok felírhatók és L, U előállítható. $\square$

Megj.:

- $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)}$ és $D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$
- Ha van A-nak LU-felbontása, ahol U átlójában nem nullák állnak, akkor $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
- $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) = D_n \neq 0$.
- Ha a GE végrehajtható, de $a_{nn}^{(n-1)} = 0$, akkor létezik LU-felbontás, de $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = 0$-ból $u_{nn} = 0$. Ebben az esetben a LER vagy nem oldható meg vagy nem egyértelműen.

LU-felbontás létezése és egyértelműsége

Tétel: LU-felbontás létezése és egyértemősége (főminorokkal)

- Ha $D_k \neq 0 \;\; (k = 1, \ldots, n-1)$, akkor létezik az A mátrix LU-felbontása és $u_{kk} \neq 0 \;\; (k = 1, \ldots, n-1)$.
- Ha $\det(A) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

Biz.: létezés: az LU-felbontás létezése a GE-nál tanult tételünkből következik. $D_k \neq 0 \Leftrightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ a megadott indexekre, ezért a GE végrehajtható és az L, U mátrixok előállíthatóak.

Egyértelműség: indirekt tegyük fel, hogy az A invertálható mátrix LU-felbontása nem egyértelmű, azaz legalább két különböző felbontás létezik:

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

Az egyenlőséget U_2^{-1}-zel jobbról, majd L_1^{-1}-zel balról szorozva kapjuk, hogy

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = L_1^{-1} \cdot L_2.$$

A szóban forgó inverzek léteznek, hiszen
$\det(A) = \det(L_1) \cdot \det(U_i) = \det(U_i) \neq 0$, $i = 1, 2$-re.
Az egyenlőség bal oldalán egy felső háromszögmátrix, jobb oldalán pedig egy 1 főátlójú alsó háromszögmátrix áll. Ez csak úgy lehet, ha az egységmátrixról van szó. Tehát

$$\begin{aligned} U_1 \cdot U_2^{-1} = I \quad &\Longrightarrow \quad U_1 = U_2, \\ L_1^{-1} \cdot L_2 = I \quad &\Longrightarrow \quad L_1 = L_2. \end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk, vagyis az LU-felbontás egyértelmű. $\square$

L és U megadása GE-val

Az eddigieket összefoglalva felírhatjuk az $A = LU$ felbontást:

$$L \in \mathcal{L}_1 \text{ és } l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \ (i > j), \qquad U \in \mathcal{U} \quad \text{és} \quad u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \ (i \le j).$$

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
$n \cdot (2n + 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Persze valamikor elő kell állítani az LU-felbontást. $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$
Előnyös, ha sokszor ugyanaz A: az ILU-algoritmusnál illetve az inverz iterációnál látjuk majd alkalmazását.

Tartalomjegyzék

Az LU-felbontás „közvetlen" kiszámítása

- Nem ismerjük L-t és U-t: ismeretlenek a mátrixokban.
- Viszont szorzatukat ismerjük: $LU = A$.
- A egyes elemeit a mátrixszorzás alapján felírva egyenleteket kapunk L és U elemeire.
- *Jó sorrendben* felírva az egyenleteket, mindig megkapjuk egy-egy új ismeretlen értékét.
- A GE-nál láttuk, hogy U 1. sora azonos A 1. sorával (a GE az 1.sort nem változtatja).
- L 1. oszlopát úgy kapjuk, hogy A 1. oszlopát leosztjuk a_{11}-gyel.

Jó sorrendek

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan   oszlopfolytonosan   parkettaszerűen

Példa: LU-felbontás közvetlenül

(a) Készítsük el a példamátrixunk LU-felbontását közvetlenül a mátrixszorzás alapján.

(b) Nézzünk egy újabb példát is. (Vigyázat, $\det(B_2) = 0$.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l_{31} &= 3 \\ l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6 \qquad\qquad l_{31} = 3$$

$$l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} = 4 \qquad \rightsquigarrow \text{ellentmondásos egyenlet}$$

Mivel $D_2 = \det(B_2) = 0$, így $u_{22} = 0$ lesz. Az LU-felbontás nem készíthető el. GE-t alkalmazva $a_{22}^{(1)} = 0$ lenne, emiatt sort kéne cserélni.

Az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Tétel: az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \le j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{i,k} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből u_{ij} kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben" (lásd az előadás diasorát) megyünk végig az (i, j) indexekkel A elemein, akkor az l_{ij} illetve u_{ij} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. $\square$

Tartalomjegyzék

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ból trivi, mert vele az LU-felbontás is előállítható.
A képletekből: Rögzített j-re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij}-hez $(i-1)$ szorzás és $(i-1)$ összeadás kell. Összesen $2(i-1)$ művelet. Rögzített i-re:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right),$$

l_{ij}-hez 1 osztás, $(j-1)$ szorzás és $(j-1)$ összeadás kell. Összesen $2j-1$ művelet.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}2(i-1)+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(2j-1)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}2\cdot\frac{(j-1)j}{2}+\sum_{i=2}^{n}\left(2\cdot\frac{(i-1)i}{2}-(i-1)\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{i=2}^{n}(i-1)^2=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{2}{3}n^3+\mathcal{O}(n^2).\quad\square$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Ly = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: Rögzített i. sorra $(i-1)$ szorzás és $(i-2)$ összeadás.
Összesen: $2i-3$ művelet.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-3) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 3n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$

Példák Matlab-ban

1. Az LU-felbontás működése „kisebb” ($n \approx 7$) mátrixokra,
2. valamint „nagyobb” mátrixokra ($n \approx 50$) színkóddal.
3. LER megoldása LU-felbontás segítségével.
4. Sok LER ($m \approx 10, 100$) megoldása futási idejének összevetése nagyobb mátrixok ($n \approx 50, 100, 200$) esetén: GE-val valamint az LU-felbontás kihasználásával.