16. A részleges LU-felbontás és az ILU algoritmus

A) Definiálja a részleges LU-felbontást és vezesse le az ILU algoritmust. Írja át rezidiumvektoros alakra is. Adjon nevezetes példákat az algoritmus speciális eseteiként.

Definíció:

- Legyen J a mátrix elemek pozícióinak egy részhalmaza, mely nem tartalmazza a főátlót, azaz $(i,i) \notin J \quad \forall\, i$-re.
  A J halmazt *pozícióhalmaz*nak nevezzük.
- Az A mátrixnak a J pozícióhalmazra illeszkedő *részleges LU-felbontásán* (*ILU-felbontásán*) olyan LU-felbontást értünk, melyre $L \in \mathcal{L}_1$ és $U \in \mathcal{U}$ (tehát a szokásos alakúak), továbbá

$$\begin{aligned} &\forall\,(i,j) \in J: \quad l_{ij} = 0, \quad u_{ij} = 0 \text{ és} \\ &\forall\,(i,j) \notin J: \quad a_{ij} = (LU)_{ij}. \end{aligned}$$

ILU algoritmus levezetése:

$\widetilde{A}_1 := A$
$k = 1, \dots, n-1:$

(1) Szétbontás: $\widetilde{A}_k = P_k - Q_k$ alakra, ahol

$$\begin{aligned} (P_k)_{ik} &= 0 \quad (i,k) \in J \\ (P_k)_{kj} &= 0 \quad (k,j) \in J \\ (Q_k)_{ik} &= -\widetilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i,k) \in J \\ (Q_k)_{kj} &= -\widetilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k,j) \in J. \end{aligned}$$

Ahogy látható, $\widetilde{A}_k$-nak csak k. sorában és k. oszlopában a pozícióhalmazban megadott helyeken változtatunk.

(2) Elimináció P_k-n:

$$\widetilde{A}_{k+1} = L_k P_k$$

?????

B) Vázolja a részleges LU-felbontás előállításának algoritmusát. Adjon elégséges feltételt a felbontás létezésére és egyértelműségére.

ILU felbontás GE-vel:

$\widetilde{A}_1 := A$

$k = 1, \dots, n-1:$

(1) Szétbontás: $\widetilde{A}_k = P_k - Q_k$ alakra, ahol

$$
\begin{aligned}
(P_k)_{ik} &= 0 \quad (i,k) \in J \\
(P_k)_{kj} &= 0 \quad (k,j) \in J \\
(Q_k)_{ik} &= -\widetilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i,k) \in J \\
(Q_k)_{kj} &= -\widetilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k,j) \in J.
\end{aligned}
$$

Ahogy látható, $\widetilde{A}_k$-nak csak k. sorában és k. oszlopában a pozícióhalmazban megadott helyeken változtatunk.

(2) Elimináció P_k-n:

$$\widetilde{A}_{k+1} = L_k P_k$$

Ebből következő tétel: Az algoritmussal kapott mátrixokból ILU felbontás előállítása

Az ILU-felbontás algoritmusával kapott részmátrixokból készítsük el a következőket:

$$
\begin{aligned}
U &:= \widetilde{A}_n, \\
L &:= L_1^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1} \quad \text{(összepakolással)}, \\
Q &:= Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1} \quad \text{(összepakolással)}.
\end{aligned}
$$

Ekkor $A = LU - Q$ és a részleges LU-felbontásra vonatkozó feltételek teljesülnek.

Felbontás létezése és egyértelműsége:

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira vagy oszlopaira, akkor a mátrix ILU-felbontása létezik és egyértelmű.

Biz.: az ILU-felbontás (1) lépése a szig. diag. dom. tulajdonságot nem változtatja, mivel átlón kívüli elemet veszünk ki a mátrixból.

A (2) GE-s lépés a szig. diag. dom. tulajdonságot magtartja, lásd GE megmaradási tételek a Schur-komplementerre. □