1. Interpoláció

1.1. Hermite-interpoláció

1. Tétel (Egzisztencia, Létezés). *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{R}$, *ahol* $a < b$, *és tekintsük az* $[a, b]$ *intervallum egy felosztását:*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Továbbá legyenek $m_0, m_1, \dots, m_n$ *az egyes alappontokhoz tartozó multiplicitások, továbbá* $N = -1 + \sum_{i=0}^{n} m_i$. *Ekkor létezik olyan*

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i$$

polinom, hogy bármely $k = 0, \dots, n$ *és bármely* $j = 0, 1, \dots, m_k$ *esetén*

$$p_n^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k)$$

1. Definíció (Fejér-Hermite interpoláció). *Azt az Hermite-féle interpolációs feladatot, melyben minden alappont multiplicitása* 2 *(azaz az egyes alappontokban a függvényérték és az első derivált értéke adott) Fejér-Hermite interpolációnak nevezzük.*

2. Tétel (Unicitás, Egyértelműség). *Az Hermite-interpolációs feladat megoldása egyértelmű.*

2. Definíció (Osztott differencia 2.). *Legyen* $f \in C^k[a, b]$ *k-szor folytonosan deriválható függvény,* $x_i \in [a, b]$ *tetszőleges alappont. Ekkor az* x_i $(k+1)$*-szer ismétlődő alapponthoz tartozó osztott differenciát a következőképpen definiáljuk:*

$$f[\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{k+1}] := \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

3. Tétel (Hermite interpolációs polinom). *Az Hermite-interpolációs feladat megoldása az alábbi polinom*

$$H_N(x) = f(x_0) + \sum_{K=1}^{N} f[\underbrace{\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{m_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1} \dots}_{K+1}]\omega_K(x)$$

ahol ω_K *a következő* K*-adfokú polinom:*

$$\omega_K(x) = \underbrace{(x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \dots}_{K}$$

4. Tétel (Pontbeli hiba). *Tegyük fel, hogy* $f \in C^{N+1}[a,b]$. *Ekkor az* $x \in [a,b]$ *pontban az Hermite-interpolációs polinom hibájára igaz a következő becslés:*

$$|H_N(x) - f(x)| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}|\omega_{N+1}(x)|$$

ahol

$$\omega_{N+1} = (x-x_0)^{m_0} \cdots (x-x_n)^{m_n}$$

és

$$N = -1 + \sum_{i=0}^{n} m_i$$

továbbá

$$M_{N+1} \geq \|f^{(N+1)}\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f^{(N+1)}(x)|$$

5. Tétel (Hiba az intervallumon). *Tegyük fel, hogy* $f \in C^{N+1}[a,b]$. *Ekkor az Hermite-interpolációs polinom hibájára a teljes* $[a,b]$ *intervallumon az alábbi teljesül:*

$$\|H_N - f\|_\infty \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}\|\omega_{N+1}\|_\infty$$

2. Spline-ok

3. Definíció (Spline). *Tekintsünk egy* $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ *intervallumot, és annak egy felosztását:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Az $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvényt* ℓ*-edfokú spline-nak nevezzük a fenti felosztásra vonatkozóan, ha*

- $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1 \ : \ s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_\ell$
  (s bármely két felosztási pont közötti leszűkítése legfeljebb ℓ*-edfokú polinom)*
- $s \in C^{\ell-1}[a,b]$
  (s $\ell - 1$*-szer folytonosan differenciálható* $[a,b]$*-n)*

6. Tétel (Folytonossági feltételek). *s akkor és csak akkor* ℓ*-edfokú spline az*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

felosztásra vonatkozóan, ha $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1 \ : \ s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_\ell$ *és minden belső felosztási pontban* $\ell - 1$*-szer folytonosan differenciálható, azaz*

$$\forall i = 1, \ldots, n-1 \ : \ s \in C^{\ell-1}\{x_i\}$$

7. Tétel (Peremfeltételek). *Az l-edfokú interpolációs spline egyértelmű meghatározásához bármely felosztás esetén pontosan* $\ell - 1$ *feltétel hiányzik, melyeket peremfeltételekkel pótolunk.*

- *Elsőfokú spline esetében nincs szükség peremfeltételre*
- *Másodfokú spline esetén 1 peremfeltételt rögzítünk, vagy $s'(a)$, vagy $s'(b)$ megadásával.*
- *Köbös spline esetén 2 peremfeltételt rögzítünk, melyek a következők lehetnek.*
  1. *Természetes peremfeltétel:* $s''(a) = 0$ *és* $s''(b) = 0$.
  2. *Hermite-peremfeltétel:* $s'(a)$ *és* $s'(b)$ *adott.*
  3. *Periodikus peremfeltétel:* $s'(a) = s'(b)$ *és* $s''(a) = s''(b)$.

3. Általánosított Inverz

4. Definíció (Túlhatározott mátrix inverze). *Legyen A egy túlhatározott lineáris egyenletrendszer teljes rangú mátrixa. Ekkor A általánosított inverzét a következőképpen definiáljuk:*

$$A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$$

5. Definíció (Alulhatározott mátrix inverze). *Legyen B egy alulhatározott lineáris egyenletrendszer teljes rangú mátrixa. Ekkor A általánosított inverzét a következőképpen definiáljuk:*

$$B^+ := B^T (BB^T)^{-1}$$

4. Diszkrét legkisebb négyzetek módszere

8. Tétel (Gauss-féle normálegyenlet). *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ továbbá $n > m$. Ekkor az*

$$\|Ax - b\|_2$$

mennyiség akkor és csak akkor minimális, ha az

$$A^T Ax = A^T b$$

egyenlőség teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy x a ,,négyzetesen legjobban közelítő megoldása" az $Ax = b$ túlhatározott lineáris egyenletrendszernek. Az utolsó egyenletet Gauss-féle normálegyenletnek nevezzük.

9. Tétel (Négyzetesen legjobban közelítő egyenes). *Az $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pontokra $(i = 1, \ldots, N)$ négyzetesen legjobban illeszkedő*

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

egyenes paraméterei a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaival egyenlők:

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{pmatrix}$$

ahol az összegzéseket 1-től N-ig végezzük.

10. Tétel (Négyzetesen legjobban közelítő parabola). *Az* $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ *pontokra* $(i = 1, \dots, N)$ *négyzetesen legjobban illeszkedő*

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

parabola paraméterei a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaival egyenlők:

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

ahol az összegzéseket 1*-től* N*-ig végezzük.*

5. Kvadratúra formulák

6. Definíció (Kvadratúra formula). *Legyen* $f \in C[a, b]$ *folytonos függvény. Ekkor* f *integrálható. Tekintsük az* $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ *alappontokat, melyekre*

$$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és legyenek $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ *valós számok (súlyok). Ekkor az*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kifejezést integrál-közelítő formulának, vagy kvadratúra formulának nevezzük.

7. Definíció (Interpolációs kvadratúra formula). *Az*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kvadratúra formula interpolációs típusú, ha bármely $k = 0, \dots, n$ *esetén*

$$w_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

vagyis, ha minden súly a felosztáshoz tartozó azonos indexű Lagrange-alappolinom integrálja az intervallumon.

8. Definíció (Pontosság). *Azt mondjuk, hogy az*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kvadratúra formula függvények egy F *osztályára pontos, ha bármely* $f \in F$ *esetén*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

11. Tétel (Pontossági tétel). *Az*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kvadratúra formula bármely legfeljebb n-edfokú polinomra pontos, akkor és csak akkor, ha interpolációs típusú.

9. Definíció (Ekvidisztáns felosztás). *Az* $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ *intervallum egy*

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

felosztását ekvidisztánsnak (egyenlő távolságúnak) nevezzük, ha bármely két alappont egyenlő távolságra van egymástól. Ekkor, ha $a = x_0$ *és* $x_n = b$, *akkor bármely* $i = 0, \ldots, n-1$ *esetén*

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Ha viszont $a < x_0$ *és* $x_n < b$, *akkor tetszőleges* $i = 0, \ldots, n-1$ *esetén*

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+2}$$

10. Definíció (Newton-Cotes formulák). *Azt mondjuk, hogy az*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kvadratúra formula Newton-Cotes típusú, ha interpolációs, és az $\{x_k\}$ *felosztás ekvidisztáns. Zárt Newton-Cotes formuláról beszélünk, ha* $x_0 = a$ *és* $x_n = b$, *nyílt formuláról beszélünk, ha* $a < x_0$ *és* $x_n < b$. *Egy Newton-Cotes formulát egyértelműen meghatároznak tehát az (a,b,n,nyílt/zárt) paraméterek. Egy adott paraméternégyeshez tartozó Newton-Cotes formulát a következőképpen jelölünk: NC(a,b,n,nyílt/zárt).*

11. Definíció (Érintő formula, NC(a,b,0,nyílt)). *Az* 1 *pontú nyílt Newton-Cotes formulát érintő formulának nevezzük*

$$E(f) := (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

12. Definíció (Trapéz formula, NC(a,b,1,zárt)). *A* 2 *pontú zárt Newton-Cotes formulát trapéz formulának nevezzük*

$$T(f) := \tfrac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

13. Definíció (Simpson-formula, NC(a,b,2,zárt)). *A 3 pontú zárt Newton-Cotes formulát Simpson-formulának nevezzük*

$$S(f) := \tfrac{(b-a)}{6}\big(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\big) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

12. Tétel (Hibaformulák). *Az általunk tárgyalt Newton-Cotes formulákra az alábbi hibabecslések teljesülnek:*

$$|E(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_2}{4!}(b-a)^3$$

$$|T(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_2}{12}M_2(b-a)^3$$

$$|S(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_4}{4!\cdot 5!}(b-a)^5$$

ahol $M_n \ge \|f^{(n)}\|_\infty$.

13. Tétel (Összetett formulák hibaformulái). *Osszuk fel az* $[a, b]$ *intervallumot* m *egyenlő részre, majd az egyes részintervallumokra külön-külön alkalmazzunk Newton-Cotes formulákat (a formula alappontjai számának megfelelően). Így nyerjük az* m*-szeresen összetett érintő-, trapéz-, illetve Simpson-formulát, melyekre a következő hibabecslések érvényesek:*

$$|E_m(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_2}{24}\frac{(b-a)^3}{m^2}$$

$$|T_m(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{m^2}$$

$$|S_m(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \frac{M_4}{180}\frac{(b-a)^5}{m^4}$$