Házi feladatok – 3. rész

Numerikus módszerek 2.C, 2014/2015 tavasz

Frissült: 2015. április 20.

Az alábbi feladatsorból 8 darab helyesen megoldott feladatot kell beadni határidőre. A részletes feltételeket (kijelölt feladatok, formai követelmények, határidők, pontozás) a gyakorlatvezetők határozzák meg.

3. Legkisebb négyzetek módszere és kvadratúra

3.1. Számítsa ki az alábbi mátrixok általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. Számítsa ki az alábbi mátrixok általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Igaz-e, hogy az alábbi $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ mátrix általánosított inverze $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{4\times 2}$.

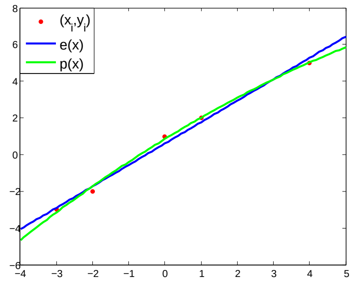
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. Igaz-e, hogy az alábbi $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mátrix általánosított inverze $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^+ = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

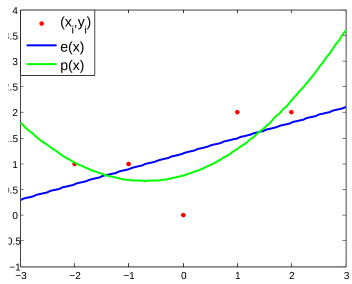
3.5. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-3	-2	0	1	4
y_i	-3	-2	1	2	5



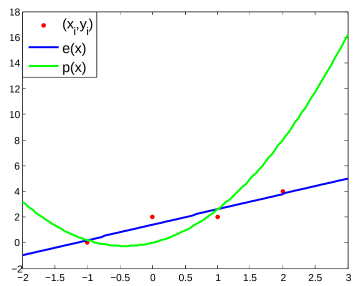
3.6. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	1	0	2	2



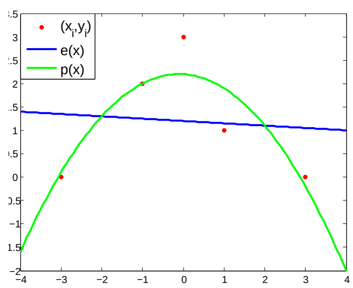
3.7. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	2	2	4



3.8. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-3	-1	0	1	3
y_i	0	2	3	1	0



3.9. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-2}^{2} f(x)\ dx \approx \frac{1}{9}\left[2 \cdot f(-2) + 16 \cdot f(-1) + 16 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2)\right]$$

3.10. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^{3} f(x)\ dx \approx \frac{1}{3}\left[2 \cdot f(-1) + 0 \cdot f(0) + 8 \cdot f(1) + 2 \cdot f(3)\right]$$

3.11. Zárt Newton–Cotes típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{0}^{3} f(x)\ dx \approx \frac{1}{8}\left[3 \cdot f(0) + 9 \cdot f(1) + 9 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3)\right]$$

3.12. Nyílt Newton–Cotes típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \approx \frac{1}{12}\left[11 \cdot f\left(-\frac{3}{5}\right) + 1 \cdot f\left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{5}\right) + 11 \cdot f\left(\frac{3}{5}\right)\right]$$

3.13. Közelítsük az alábbi integrál értékét érintő-, trapéz- és Simpson-formulával! Adjuk meg a hibabecsléseket!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos(x)\ dx$$

3.14. Közelítsük az alábbi integrál értékét érintő-, trapéz- és Simpson-formulával! Adjuk meg a hibabecsléseket!

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\ dx$$

3.15. Közelítsük az alábbi integrál értékét érintő-, trapéz- és Simpson-formulával! Adjuk meg a hibabecsléseket!

$$\int_{0}^{2} x \cdot 2^{x}\ dx$$

3.16. Közelítsük az alábbi integrál értékét érintő-, trapéz- és Simpson-formulával! Adjuk meg a hibabecsléseket!

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\ dx$$

3.17. Hány formulát kell alkalmazni a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az alábbi integrált összetett érintő-, trapéz- és Simpson-formulával közelítjük! A közelítést nem kell elvégezni!

$$\int_1^2 y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)\, dx$$

3.18. Hány formulát kell alkalmazni a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az alábbi integrált összetett érintő-, trapéz- és Simpson-formulával közelítjük! A közelítést nem kell elvégezni!

$$\int_1^2 \cos\left(\ln x\right)\, dx$$

3.19. Hány formulát kell alkalmazni a 10^{-2} pontosság eléréséhez, ha az alábbi integrált összetett érintő-, trapéz- és Simpson-formulával közelítjük! A közelítést nem kell elvégezni!

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx$$

3.20. Hány formulát kell alkalmazni a 10^{-2} pontosság eléréséhez, ha az alábbi integrált összetett érintő-, trapéz- és Simpson-formulával közelítjük! A közelítést nem kell elvégezni!

$$\int_2^5 x \ln x \, dx$$