1 Polinom interpoláció

1.1 Az interpolációs feladat

Tétel 1 (Egzisztencia, Létezés) *Legyen $n \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{R}$, ahol $a < b$, és tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy felosztását:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Ekkor létezik olyan

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

polinom, hogy bármely $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén

$$p_n(x_k) = f(x_k)$$

Tétel 2 (Unicitás, Egyértelműség) *A polinom interpolációs feladat megoldása egyértelmű.*

1.2 Lagrange-alak

Definíció 1 (Lagrange-alappolinom) *Az $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomoknak nevezzük a következő polinomokat:*

$$l_k(x) := \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

Tétel 3 (Interpolációs polinom Lagrange-alakja) *Az interpolációs feladat megoldása a következő polinom:*

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

Tétel 4 (Pontbeli hiba) *Tegyük fel, hogy $f \in C^{n+1}[a, b]$. Ekkor az $x \in [a, b]$ pontban az interpolációs polinom hibájára igaz a következő becslés:*

$$|L_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

ahol

$$\omega_n = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

és

$$M_{n+1} \geq \|f^{(n+1)}\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Tétel 5 (Hiba az intervallumon) *Tegyük fel, hogy $f \in C^{n+1}[a, b]$. Ekkor az interpolációs polinom hibájára a teljes $[a, b]$ intervallumon az alábbi teljesül:*

$$\|L_n - f\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_n\|_\infty$$

1.3 Az interpolációs polinom-sorozatok konvergenciája

Tekintsük az $[a,b]$ intervallumot és definiáljuk a $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ alappontrendszerek sorozatát ($n \geq 2, x_i^{(j)} \in [a,b]$), és az alappontrendszerekhez tartozó Lagrange-interpolációs polinomokat:

$$
\begin{array}{ccc}
x_0^{(1)} < x_1^{(1)} & \Rightarrow & L_1(x) \\
x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < x_2^{(2)} & \Rightarrow & L_2(x) \\
 & \dots & \\
x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_k^{(k)} & \Rightarrow & L_k(x) \\
 & \dots &
\end{array}
$$

A következőkben a fenti alappontrendszer-sorozatokhoz tartozó interpolációs polinom-sorozatok konvergenciájáról fogalmazunk meg állításokat.

Tétel 6 (Elégséges feltétel) *Legyen $f \in C^\infty[a,b]$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $K > 0$ konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $M_n \leq K^n$. Ekkor tetszőleges alappontrendszer-sorozat esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

.

Tétel 7 (Marcinkiewicz) *Minden $f \in C[a,b]$ folytonos függvény esetén létezik $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ alappontrendszerek olyan sorozata, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

.

Tétel 8 (Faber) *Bármely $\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ alappontrendszer-sorozat esetén létezik $f \in C[a,b]$ folytonos függvény, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty \neq 0$$

.

1.4 Newton-alak

Definíció 2 (Osztott differencia) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy felosztását:*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénynek a fenti alappontrendszerre vonatkozó elsőrendű osztott differenciát a következőképpen definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

A k-adrendű osztott differenciákat rekurzívan, a $k-1$-edrendű osztott differenciák segítségével definiáljuk:

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Tétel 9 (Newton-alak) *A polinom interpolációs feladat megoldása az alábbi polinom*

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots x_k]\omega_{k-1}(x)$$

ahol ω_{k-1} a következő k-adfokú polinom:

$$\omega_{k-1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

1.5 Csebisev-polinomok

Definíció 3 (Csebisev-polinom) *Az n-edfokú Csebisev-polinomot a következőképpen definiáljuk:*

$$T_n : [-1, 1] \to [-1, 1]$$

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$$

Definíció 4 (Egyfőegyütthatós Csebisev-polinom) *Az egyfőegyütthatós n-edfokú Csebisev-polinomokat a következőképpen definiáljuk:*

$$\tilde{T}_n(x) := \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Tétel 10 (Rekurzió) *A Csebisev-polinomok eleget tesznek az alábbi kétlépéses rekurziónak:*

$$T_0(x) := 1 \qquad T_1(x) := x$$

$$T_{n+2}(x) := 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \qquad (\forall n \geq 0)$$

Tétel 11 (Gyökök) *A T_n n-edfokú Csebisev-polinom gyökei a következő számok:*

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$

Ez alapján az T_n-nek n db különböző valós gyöke van.

Tétel 12 (Optimális tulajdonság) *Legyen p tetszőleges n-edfokú a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett egyfőegyütthatós polinom. Ekkor*

$$\|\tilde{T}_n\|_\infty \leq \|p\|_\infty$$

Tétel 13 (Optimális hiba) *Tegyük fel, hogy* $f \in C^{n+1}[-1,1]$ *az* x_k *alappontok pedig legyenek a* T_{n+1} *Csebisev-polinom gyökhelyei. Az ezen alappontokra vonatkozó* L_n *interpolációs polinom hibájára a következő igaz:*

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty$$

ha felhasználjuk, hogy $\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}$ *a következő egyszerűbb kifejezést kapjuk:*

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}$$

Tétel 14 (Optimális hiba általánosan) *Tegyük fel, hogy* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *az* x_k *alappontok pedig legyenek a* T_{n+1} *Csebisev-polinom gyökhelyei a* $[-1,1]$*-ből az* $[a,b]$ *intervallumba transzformálva, azaz* $x_k = l(\tilde{x}_k)$*, ahol* $l : [-1,1] \to [a,b]$ $l(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ *és* $T_{n+1}(\tilde{x}_k) = 0$ *bármely* $k = 0,\ldots,n$ *esetén. Az ezen alappontokra vonatkozó* L_n *interpolációs polinom hibájára a következő igaz:*

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

ha felhasználjuk, hogy $\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}$ *a következő egyszerűbb kifejezést kapjuk:*

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$