Numerikus Módszerek 2. C szakirány
1. Zárthelyi Dolgozat Megoldások

2017. október 25.

1. Tekintsük az $f(x) = \sin(\pi x)$ függvényt!

   (a) Interpoláljuk f-et a $\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ alappontokon!
   Megoldás Számoljuk ki a függvényértékeket a megadott alappontokon!

$$f(0) = \sin(0) = 0$$
$$f(\tfrac{1}{2}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$
$$f(1) = \sin(\pi) = 0$$
$$f(1) = \sin(2\pi) = 0$$

   Írjuk fel a Newton-féle osztott differencia táblázatot!

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \boxed{0} & & & \\ 1/2 & 1 & \boxed{2} & & \\ 1 & 0 & -2 & \boxed{\text{-4}} & \\ 2 & 0 & 0 & 4/3 & \boxed{8/3} \end{array}$$

   Ez alapján a keresett polinom:

$$L_3(x) = 0 + 2x + (-4)x\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{8}{3}x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x-1) = \cdots = \tfrac{8}{3}x(x-1)(x-2)$$

   (b) Becsüljük a hibát az $x = \frac{1}{4}$ pontban!
   Megoldás A hibaképlet alapján:

$$\left|L_3(\tfrac{1}{4}) - f(\tfrac{1}{4})\right| \le \frac{M_4}{4!}|\omega_4(\tfrac{1}{4})|$$

   Számoljuk ki a fenti mennyiségeket!

$$|f^{(4)}(x)| = |\pi^4 \sin(\pi x)| \le \pi^4 =: M_4$$

$$|\omega_4(\tfrac{1}{4})| = (\tfrac{1}{4} - 0)(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4} - 1)(\tfrac{1}{4} - 2) = \frac{-3 \cdot 7}{4^4}$$

   Ezt visszaírva a fenti képletbe a következőt kapjuk:

$$\left|L_3(\tfrac{1}{4}) - f(\tfrac{1}{4})\right| \le \frac{\pi^4}{4!}\frac{3 \cdot 7}{2^8} = \frac{7\pi^4}{2048}$$

2. Tekintsük az $f(x) = \log_2(x) - 2x^2 + 7$ függvényt!

(a) Lássuk be, hogy f az $[1, 4]$ intervallumon invertálható!
Megoldás Számítsuk ki az első deriváltat!

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(2)} - 4x$$

Felhasználva, hogy $x \geq 1 > 0$:

$$f'(x) \leq \frac{1}{x\ln(2)} - 4x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 4\ln(2)x^2 < 0$$

$$\frac{1}{4\ln(2)} < \frac{1}{4} < x^2$$

Amely tehát minden $x > 1$ esetén teljesül, vagyis az $[1, 4]$ intervallumon $f' < 0$, így f szigorúan monoton csökkenő, ezért invertálható is.

(b) Közelítsük f-nek a fenti intervallumba eső gyökhelyét az $\{1, 2, 4\}$ pontokra felírt inverz interpoláció segítségével!
Megoldás Számoljuk ki a függvényértékeket a megadott alappontokon.

$$f(1) = \log_2(1) - 1^2 + 7 = 0 - 1 + 7 = 6$$

$$f(2) = \log_2(2) - 2^2 + 7 = 1 - 4 + 7 = 4$$

$$f(4) = \log_2(4) - 4^2 + 7 = 2 - 16 + 7 = -7$$

Vegyük fel ,,fordítva" az osztott differencia táblázatot!

-7	$\boxed{4}$		
4	2	$\boxed{-2/11}$	
6	1	$-1/2$	$\boxed{-7/286}$

Az inverz interpolációs polinom Newton-alakja így:

$$L_2(x) = 4 + (-\tfrac{2}{11}(x+7)) - \tfrac{7}{286}(x+7)(x-4)$$

A keresett gyök közelítése tehát:

$$f^{-1}(0) \approx L_2(0) = 4 - \tfrac{2}{11}(0+7) - \tfrac{7}{286}(0+7)(0-4) = 4 - \tfrac{14}{11} - \tfrac{7\cdot(-28)}{286} = 4 - \tfrac{84}{143} = \frac{488}{143}$$

3. Tekintsük az $f(x) = e^{-x/2}$ függvényt!

(a) Hogyan válasszuk meg az alappontokat, ha minimális hibával szeretnénk interpolálni f-et a $[-2, 0]$ intervallumon másodfokú polinom segítségével?
Megoldás Másodfokú polinom interpolációhoz 3 alappontra van szükségünk, hogy minimális legyen a hiba a T_3 polinom gyökeit választjuk, melyeket a $[-1, 1]$ intervallumra transzformálunk. A transzformáció, amely a $[-1, 1]$ intervallumot a $[-2, 0]$ intervallumra képezi, nyilván az

$$l(x) = x - 1$$

A T_3 gyökei $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, így a transzformált gyökök, melyeket alappontoknak kell választanunk a következők:

$$x_0 := -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_1 := -1 \qquad x_2 := -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) Hogyan tudjuk becsülni az interpolációs polinom hibáját az intervallumon?
Megoldás A hibaképlet a következő:

$$\|L_2 - f\|_\infty \leq \frac{M_3}{3!} \frac{(0 - (-2))^3}{2^5} = \frac{M_3}{3!} \frac{1}{4}$$

Már csak M_3-at kell kiszámolnunk, melyhez f deriváltjaira van szükség:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{8} e^{-x/2}$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, az $e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ szigorúan monoton csökken a $[-2, 0]$ intervallumon, maximumát a -2 pontban veszi fel, melynek értéke $e^{-(-2)/2} = e$:

$$|f'''(x)| = \frac{1}{8} e^{-x/2} \leq \frac{e}{8} =: M_3$$

Így a hiba az intervallumon:

$$\|L_2 - f\|_\infty \leq \frac{e}{8} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{e}{3 \cdot 2^6} = \frac{e}{192}$$

4. (a) Határozzuk meg azt a P polinomot, amelyre

$$P(-1) = 0 \quad P(0) = 2 \quad P(1) = 0$$

$$P'(-1) = 0 \quad P'(1) = 0$$

(8 pont)

Megoldás Írjuk fel a fenti problémához tartozó Hermite-féle osztott differencia táblázatot!

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & \boxed{0} & & & & \\
-1 & 0 & \boxed{0} & & & \\
0 & 2 & 2 & \boxed{2} & & \\
1 & 0 & -2 & -2 & \boxed{\text{-2}} & \\
1 & 0 & 0 & 2 & 2 & \boxed{2}
\end{array}$$

Ez alapján a Hermite-féle interpolációs polinom a következő:

$$P(x) = H_4(x) = 2(x+1)^2 - 2(x+1)^2 x + 2(x+1)^2 x(x-1) = \cdots = 2(x^2-1)^2$$

(b) Hozzuk P-t algebrai alakra, és ellenőrizzük a fenti feltételek teljesülését!

Megoldás

$$P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$$

$$P'(x) = 8x^3 - 8x$$

Ellenőrzés:

$$P(-1) = P(1) = 0 \quad P(0) = 2 \quad P'(-1) = P'(1) = 0$$

(c) Számítsuk ki a deriváltat a 0 pontban, majd készítsünk sematikus ábrát a $\{-1, 0, 1\}$ pontokban ismert függvényértékek és derivált értékek alapján!

Megoldás $P'(0) = 0$