Programtervező Informatikus BSc
Numerikus módszerek 2. zárthelyi MEGOLDÁSOK
2017. május 15.

1. *(8+2 pont)* Határozza meg intervallumonkénti polinomok segítségével azt az S másodfokú spline-t amelyre

$$S(-1) = 0 \qquad S(0) = -1 \qquad S(2) = 1 \qquad S'(2) = 0$$

Írja fel a spline-t az $1, x, x^2, (x-0)_+^2$ globális bázisban!

Megoldás:

$$S(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$S(x) = 3x^2 + 2x - 1 - \frac{7}{2}(x-0)_+^2$$

2. *(6 pont)* Határozza meg a következő mátrix általánosított inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás

$$AA^T = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \qquad (AA^T)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *(6 pont)* A legkisebb négyzetek módszerével határozza meg az

x_i	-2	0	2	6
y_i	-2	-1	0	2

pontokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenest!

Megoldás

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 44 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a_1x + a_0 = \frac{1}{2}x - 1$$

4. *(6+2 pont)* Mutassa meg, hogy a következő kvadratúra formula interpolációs típusú! Newton-Cotes típusú a formula? Ha igen, zárt, vagy nyílt?

$$\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{4}{3}(2f(0) - f(1) + 2f(2))$$

Megoldás

$$4 = \int_{-1}^{3} 1\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

$$4 = \int_{-1}^{3} x \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \cdot 0 - \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 2 = 4$$

$$\frac{28}{3} = \int_{-1}^{3} x^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \cdot 0^2 - \frac{4}{3} \cdot 1^2 + \frac{8}{3} \cdot 2^2 = \frac{28}{3}$$

Pontossági tétel alapján a 3 pontra illeszkedő formula interpolációs, mivel másodfokú polinomokra pontos, a felosztás ekvidisztáns, a végpontok nem alappontok, így nyílt Newton-Cotes típusú.

5. *(6+4 pont)* Alkalmazzon érintő-, trapéz- és Simpson-formulát az

$$\int_{0}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$

integrál közelítésére! Hány trapézformulát kell alkalmazni a 10^{-2} pontosság eléréséhez? (Számításai során használhatja a $\pi^2/4 < 5/2$ közelítést és további felső becsléseket, hogy a formulák számát egész számmal tudja megbecsülni).

Megoldás

$$E(f) = (1-0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T(f) = \frac{1-0}{2} \cdot (1+0) = \frac{1}{2}$$

$$T(f) = \frac{1-0}{6} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = \frac{1+2\sqrt{2}}{6}$$

$$|I(f) - T_m(f)| \leq \frac{M_2}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{m^2} = \frac{\pi^2}{2^2 \cdot 12} \cdot \frac{1}{m^2} < \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{5}{24m^2} < 10^{-2}$$

$$\frac{500}{24} < m^2 \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{500}{24}} < m \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{500}{24}} < \sqrt{21} < \sqrt{25} = 5$$

Ezért $m = 5$ formula már elég.