# PROGRAMOZÁS

## *Intervallumos programozási tételek*

Gregorics Tibor

http://people.inf.elte.hu/gt/prog

# *Intervallumon értelmezett függvény vs. tömb*

- ***Intervallumon értelmezett függvény*** : $f : [m..n] \to H$
  - $[m..n] = \{ a \in \mathbb{Z} \mid m \leqq a \leqq n \}$
  - $f(i) \in H$ ahol $i \in [m..n]$
- ***Tömbök*** speciális intervallumon értelmezett függvények
  - Minden tömb felfogható egy intervallumon értelmezett függvénynek
    - $v : \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén van olyan $f : [1..n] \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f(i) = v[i]$
  - De egy intervallumon értelmezett függvény megadásához nincs szükség tömbre
    - $f : [1..x] \to \mathbb{N}$ $(x \in \mathbb{N})$ és $f(i) = y \in \mathbb{N}$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{x} y$$

# Összegzés

Összegezzük az f : [m..n]→H függvénynek az m..n egész-intervallumon felvett értékeit! A H halmazon értelmezett a + : H×H→H asszociatív művelet, amelynek a baloldali nulla eleme a 0∈H.

$A = (\, m:\mathbb{Z},\ n:\mathbb{Z},\ s:H \,)$

$Ef = (\, m=m' \wedge n=n' \,)$

$Uf = \left(\, Ef \wedge s = \sum_{i=m}^{n} f(i) \,\right)$

$\sum_{i=m}^{n} f(i) = 0$ ha $n<m$

***ciklus invariáns:***

$i \in [m..n+1] \cup \{m\} \wedge s = \sum_{k=m}^{i-1} f(k)$

| s := 0 | |
|---|---|
| i = m .. n | |
| | s := s + f(i) |

```
s = 0;
for(int i=m; i<=n; ++i){
  s = s + f(i);
}
```

***Speciális eset:***

$\sum_{\substack{i=m \\ \beta(i)}}^{n} g(i)$ azaz $f(i) = \begin{cases} g(i) & \text{ha } \beta(i) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

# *Számlálás*

Hányszor vesz fel igaz értéket a $\beta:[m..n] \rightarrow \mathbb{L}$ függvény az $[m..n]$ egész-intervallumon?

$A = (m:\mathbb{Z}, n:\mathbb{Z}, c:\mathbb{N})$

$Ef = ( m=m' \wedge n=n' )$

$$Uf = \Big( Ef \wedge c = \sum_{\substack{i=m \\ \beta(i)}}^{n} 1 \Big)$$

***ciklus invariáns:***

$$i\in[m..n+1]\cup\{m\} \wedge c = \sum_{\substack{k=m \\ \beta(k)}}^{i-1} 1$$

$$c = \sum_{i=m}^{n} f(i)$$

$$\text{ahol } f(i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \beta(i) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

| c :=0 | |
|---|---|
| i = m .. n | |
| β(i) | |
| c:=c+1 | - |

```
c = 0;
for(int i=m; i<=n; ++i){
  if (betha(i)) ++c;
}
```

# *Maximum kiválasztás*

Mi a maximuma az f:[m..n] → H függvénynek és hol veszi ezt fel, feltéve, hogy az [m..n] intervallum nem üres és a H halmaz elemei teljesen rendezhetőek!

$A = (m:\mathbb{Z},\ n:\mathbb{Z},\ ind:\mathbb{Z},\ max:H)$

$Ef = (m = m' \wedge n = n' \wedge m \le n)$

$Uf = (Ef \wedge (max, ind) = \mathbf{MAX}_{i=m}^{n}\, f(i))$

***ciklus invariáns:***

$i \in [m..n+1] \wedge (max, ind) = \mathbf{MAX}_{k=m}^{i-1}\, f(k)$

| max, ind := f(m), m | |
|---|---|
| i = m+1 .. n | |
| f(i)>max | |
| max, ind:=f(i), i | - |

*szimultán értékadás*

```
max = f(m); ind = m;
for(int i=m+1; i<=n; ++i){
  if (f(i)>max){
    max = f(i); ind = i;
  }
}
```

- ind *elhagyható,* max *nem*

$$max = \mathbf{MAX}_{k=m}^{n}\, f(i)$$

- MAX *helyett lehet* MIN

$max = f(ind) = \mathbf{MAX}_{i=m}^{n} \{f(i)\} \wedge ind \in [m..n]$

# *Feltételes maximum keresés*

Mi a maximuma az $f:[m..n] \to H$ függvénynek (a H halmaz elemei teljesen rendezhetőek) és hol veszi ezt fel az $[m..n]$ egész-intervallum azon elemei közül, amelyekre a igazat ad a $\beta:[m..n] \to \mathbb{L}$ feltétel?

$A = (m:\mathbb{Z}, n:\mathbb{Z}, l: \mathbb{L}, ind:\mathbb{Z}, max:H)$

$Ef = (m=m' \wedge n=n')$

$$Uf = (Ef \wedge (l, max, ind) = \underset{\substack{i=m \\ \beta(i)}}{\overset{n}{\mathbf{MAX}}} f(i))$$

- ind *elhagyható,* max *nem*
- MAX *helyett lehet* MIN

$(l = \exists k \in [m..n]: \beta(k)) \wedge$
$(l \longrightarrow ind \in [m..n] \wedge \beta(ind) \wedge max = f(ind) \wedge$
$(\forall i \in [m..n]: \beta(i) \longrightarrow max \geq f(i)))$

***ciklus invariáns:***

$$i \in [m..n+1] \cup \{m\} \wedge (l,max,ind) = \mathop{\mathbf{MAX}}_{\substack{k=m \\ \beta(k)}}^{i-1} f(k)$$

| l :=hamis | | | |
|---|---|---|---|
| $i = m\,..\,n$ | | | |
| $\neg\beta(i)$ | $\beta(i) \wedge l$ | | $\beta(i) \wedge \neg l$ |
| - | f(i)>max | | l,max,ind:= igaz, f(i), i |
| | max,ind:= f(i), i | - | |

```
l = false;
for(int i=m; i<=n; ++i){
  if (!betha(i));
  else if(betha(i) && l){
    if (f(i)>max){
      max = f(i); ind = i;
    }
  }else if(betha(i) && !l){
    l = true;
    max = f(i); ind = i;
  }
}
```

```
l = false;
for(int i=m; i<=n; ++i){
  if (!betha(i)) continue;
  if(l){
    if (f(i)>max){
      max = f(i); ind = i;
    }
  }else{
    l = true;
    max = f(i); ind = i;
  }
}
```

# *Kiválasztás*

Keressük meg az m egész számnál nagyobb vagy egyenlő első olyan egész számot, amely kielégíti a $\beta:\mathbb{Z} \to \mathbb{L}$ feltételt, feltéve ha **létezik** ilyen.

$A = (m:\mathbb{Z},\ ind:\mathbb{Z})$

$Ef = (\ m=m' \wedge\ \exists k\geq m: \beta(k)\ )$

$Uf = (Ef \wedge ind=\mathbf{SELECT}_{i\geq m}\ \beta(i)\ )$

$ind\geq m \wedge \beta(ind)$
$\wedge\ \forall k\in[m..ind-1]: \neg\beta(k)$

***ciklus invariáns:***

$ind\geqq m \wedge \forall k\in[m..ind-1]:\neg\beta(k)$

$ind:=m$

$\neg\beta(ind)$

$ind:=ind+1$

```
int ind;
for(ind=m; !betha(ind); ++ind);
```

***Fordított irányú kiválasztás*:**

$ind=\mathbf{SELECT}_{i\leq m}\ \beta(i)\ )$

# *Lineáris keresés*

Keressük az [m..n] egész-intervallumban az első olyan számot, amelyre a $\beta:[m..n] \to \mathbb{L}$ igazat ad!

$A = (m: \mathbb{Z},\ n: \mathbb{Z},\ l:\mathbb{L},\ ind: \mathbb{Z})$

$Ef = (m=m' \wedge n=n')$

$$Uf = (Ef \wedge (l, ind) = \mathbf{SEARCH}_{i=m}^{n}\ \beta(i))$$

***ciklus invariáns:***

$i\in[m..n+1]\cup\{m\} \wedge \forall k\in[m..i-2]: \neg\beta(k) \wedge l = \exists k\in[m..i-1]: \beta(k) \wedge l \longrightarrow ind=i-1$

$(l = \exists i\in[m..n]: \beta(i)) \wedge$
$(l \longrightarrow ind\in[m..n] \wedge \beta(ind) \wedge \forall i\in[m..ind-1]: \neg\beta(i))$

| |
|---|
| $l, i := hamis, m$ |
| $\neg l \wedge i \le n$ |
| $l, ind := \beta(i), i$ |
| $i := i+1$ |

***Fordított irányú keresés:***

$l, ind = \mathbf{SEARCH}_{i=n..m}\ \beta(i)$

***Eldöntés:*** ind *elhagyható*

$l = \exists i\in m..n: \beta(i)$

```
l = false;
for(int i=m; !l && i<=n; ++i){
  l = betha(i);
  ind = i;
}
```

# *Optimista lineáris keresés*

Döntsük el, hogy vajon az intervallum minden eleme megfelel-e a $\beta$ tulajdonságnak!

***Optimista lineáris keresés:***

$l, ind = \forall\mathbf{SEARCH}_{i=m..n}\ \beta(i)$

$A = (m: \mathbb{Z}, n: \mathbb{Z}, l:\mathbb{L})$

$Ef = (m=m' \wedge n=n')$

$Uf = (Ef \wedge \quad l = \forall i \in m..n: \beta(i))$

$\neg l = \neg \forall i \in m..n: \beta(i)$

$\neg l = \exists i \in m..n: \neg\beta(i)$

| | | |
|---|---|---|
| m .. n | ~ | m .. n |
| l | ~ | ¬l |
| β(i) | ~ | ¬β(i) |

| |
|---|
| $\neg l$, i:=hamis, m |
| $\neg\neg l \wedge i \le n$ |
| $\neg l$, ind:= $\neg\beta(i)$, i |
| i:=i+1 |

| |
|---|
| l, i:=igaz, m |
| $l \wedge i \le n$ |
| l, ind:=$\beta(i)$, i |
| i:=i+1 |

# *Visszavezetés*

1. Megsejtjük a feladatot megoldó programozási tételt.
2. Specifikáljuk a feladatot a programozási tételre utaló végrehajtható utófeltétellel.
3. Megadjuk a feladat és a programozási tétel közötti eltéréseket:
   - ***intervallum határok***: konstans vagy kifejezés (pl. n/2), amelynek típusa $\mathbb{Z}$ helyett lehet annak része (pl: $\mathbb{N}$)
   - ***függvények*** ($f:[m..n]\rightarrow H$, $\beta:[m..n]\rightarrow \mathbb{L}$) konkrét megfelelői
   - ***szükséges művelet*** megadása a H-hoz
     - $(H, >)$ helyett például $(\mathbb{Z}, >)$ vagy $(\mathbb{Z}, <)$
     - $(H, +)$ helyett például $(\mathbb{Z}, +)$ vagy $(\mathbb{R}, *)$ vagy $(\mathbb{L}, \wedge)$
   - ***változók átnevezése***
4. A különbségek figyelembe vételével a tétel algoritmusából elkészítjük a feladatot megoldó algoritmust.

# *Tesztelés*

- ***Intervallum*** szerint (mindegyik tétel esetén)
  - ***hosszúság***: nulla, egy illetve kettő hosszú intervallum
  - ***eleje ill. vége***: A kitüntetett (a β tulajdonságú vagy a maximális) elem a legelső illetve a legutolsó-e.
  - ***túlindexelés*** vizsgálata
- ***Funkció*** szerint
  - ***keresés***: nulla, egy illetve több β tulajdonságú elem esete
  - ***max. ker.***: egy illetve több azonos maximális elem esete
  - ***összegzés***: terheléses vizsgálat, majd a művelet kritikus értékeinek és jellemző tulajdonságainak kipróbálása
- A β(i) és f(i) kifejezések kiszámolásánál használt műveletek sajátosságai

# *Logaritmikus keresés*

Adott egy f:[m..n] → H **monoton növekvő függvény**
(a H halmaz elemein értelmezett egy rendezési reláció)
Felveszi-e a függvény az **adott** $h \in H$ értéket, és ha igen, hol?

$A = (m:\mathbb{Z},\ n:\mathbb{Z},\ h:H,\ l:\mathbb{L},\ ind:\mathbb{Z})$

$Ef = (m=m' \wedge n=n' \wedge h=h' \wedge \text{f monoton nő})$

$Uf = (Ef \wedge (l = \exists i \in [m..n]: f(i)=h) \wedge$
$\qquad (l \longrightarrow ind \in [m..n] \wedge f(ind)=h)\ )$

***ciklus invariáns:***

$m \leqq ah \leqq fh \leqq n$
$\wedge\ \forall k \in [m..ah-1] \cup [fh+1..n]: \neg\beta(k)$
$\wedge\ l \longrightarrow ind \in [m..n] \wedge \beta(ind)$

$l,\ ah,\ fh := \text{hamis},\ m,\ n$

$\neg l \wedge ah \leq fh$

$ind := (ah+fh)/2$

| $f(ind) > h$ | $f(ind) < h$ | $f(ind) = h$ |
|---|---|---|
| $fh := ind-1$ | $ah := ind+1$ | $l := \text{igaz}$ |