Számítógépes Grafika

Hajder Levente és Valasek Gábor
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2017/2018. I. félév

Tartalom

Modellezés feladata

- Geometriai modellezés feladata
  - A világunkat modellezni kell a térben.
    - Valamilyen koordinátarendszer szükséges
  - Mozgó (dinamikus) tárgyak esetén a térbeli mozgást le kell írni.
    - Mozognak
    - Pörögnek-forognak
    - Kicsinyednek-nagyobbodnak
- Vetítés feladata
  - A háromdimenziós világot levetíteni a kétdimenziósképsíkra.
  - Kameraszerű képet adni.

Tartalom

Descartes-koordinátarendszer

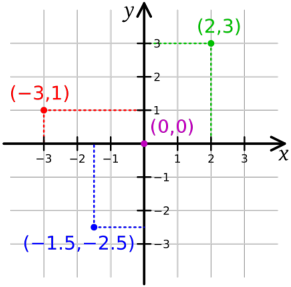
- Descartes, 1637.: *Értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)
- Legtöbbször ezzel találkozunk, ez a legegyszerűbb és legelterjettebb megadási mód
- A dimenziónak megfelelő számú koordinátával írjuk le a pontokat

Descartes-koordinátarendszer

- Az euklidészi sík minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y) számpárt, ahol az x az abszcissza és y az ordináta
- Ehhez válasszunk két, egymásra merőleges, irányított egyenest, az OX (x) és OY (y) koordinátatengelyeket, amelyek egymást az O pontban, az origóban metszik. Ekkor a P pont x és y koordinátái a P pont OX és OY irányított egyenesektől vett előjeles távolsága
- Három dimenzióban hasonló: 3 koordináta, 3 egymásra merőleges koordináta tengely

Geometriai értelmezés

- *Szemléletesebben*: A P(a,b,c) az a pont, amit az origóból az x tengely mentén a egységet lépve, majd az y tengely mentén b egységet lépve, végül a z tengely mentén c egységet lépve kapunk

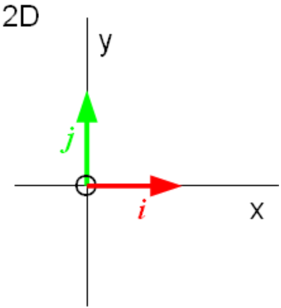


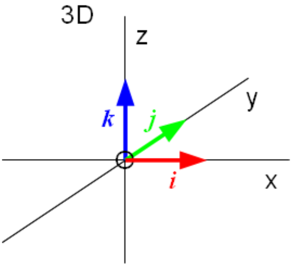
Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

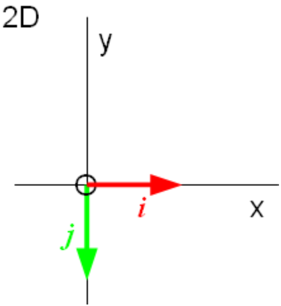
$$
\begin{aligned}
P &= O + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \\
&= O + a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

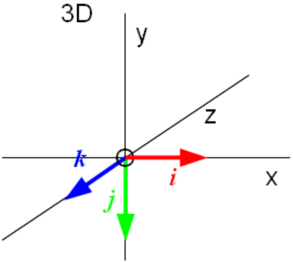
Sodrásirány - jobbsodrású rendszer





Sodrásirány - balsodrású rendszer

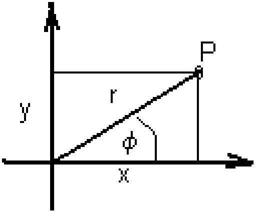




Tartalom

Síkbeli polákoordináta-rendszer

- Egy O kezdőpontból (referenciapontból) induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy P pont helyét két adat azonosítja: (r, ϕ)
  - $r \geq 0$: a P pont O-tól vett távolsága
  - $\phi \in [0, 2\pi)$: az O-n és P-n átmenő egyenes polártengellyel bezárt szöge
- $r = 0$ esetén a felírás nem egyértelmű



Konverziók

- Polár $\to$ Descartes:

$$x = r\cos\phi, \;\; y = r\sin\phi$$

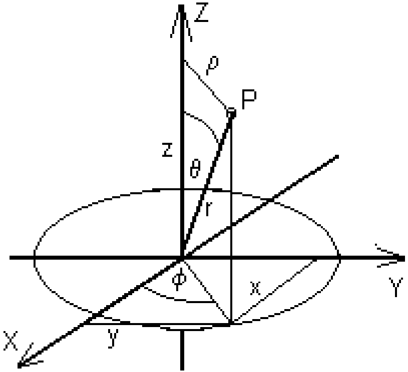
- Descartes $\to$ polár:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ ???, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

- arctan() nem egyértelmű ($\pi - \mathit{periodikus}$) ezért programozásban az $\phi = \mathit{atan}2\,(y, x)$ függvényt használjuk

Gömbi koordináták



Gömbi koordináták

- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges "Z tengely"
- Egy térbeli P pontot három adat reprezentál: (r, ϕ, θ)
  - r, ϕ: a P pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái
  - $\theta \in [0, \pi]$: az O és P-t összekötő egyenes Z tengellyel bezárt szöge

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes:

$$x = r\cos\phi\sin\theta,\ \ y = r\sin\phi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta$$

- Descartes $\rightarrow$ gömbi:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi &= atan2(y,x) \\ \theta &= \arccos\frac{z}{r}, \qquad\qquad r \neq 0 \end{aligned}$$

- Az x=y=z=0 eset itt is többértelmű!

Tartalom

Baricentrikus koordináták

- August Ferdinand Möbius [1827]
- Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy "kiegyensúlyozottabb" reprezentációját keressük.
- A baricentrikus koordináták nem függnek egy pont önkényes origónak választásától

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen $n+1$ pontunk és helyezzünk minden P_i pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

$$M = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \sum_{i=0}^{n} m_i P_i$$

Baricentrikus koordináták

- Ha $\mathbb{E}^n$ -ben az $A_0, \dots, A_n$ pontok kifeszítik a teret (nem egy $n-1$ dimenziós altérbe esnek), akkor a tér bármely X pontjához találhatóak $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ valós számok úgy, hogy

$$X = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i,$$

ahol a λ_i baricentrikus koordinátákra teljesül, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés

- Ha $\forall i$-re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei.
- Az affin transzformációk nem változtatják meg a baricentrikus koordinátákat
- *Homogén jellegű* koordináták: egy $h \neq 0$ számmal megszorozva a koordinátákat ugyanazt a pontot kapjuk.

Tartalom

Homogén koordináták

- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*: $P_{hom} = [x, y, z, w]^T$
- Átváltás $P_{real} = [x', y', z']$ Descartes-i és $P_{hom} = [x, y, z, w]^T$ homogén koordinátákkal megadott pontok között:
  - "Odafelé:" $x' = x/w$, $y' = y/w$, és $z' = z/w$
  - "Visszafelé:" $x = hx'$, $y = hy'$, $z = hz'$, és $w = h$, ahol $h \in \Re$
- A megfeleltetés többértelmű, hiszen h értéke tetszőleges lehet (zérust kivéve): egy valós koordinátához végtelen sok homogén koordinátás alak tartozik.

Affin transzformációk

- Lineáris transzformációk 4×4-es mátrixszal leírhatóak
  - A transzformációkat $P = [x, y, z, 1]$ alakú pontokon végezzük
  - $P' = TP$ alakban kapjuk az eredményt
- Transformációk típusai:
  - Egybevágósági transzformációk
    - Eltolás (T_{elt})
    - Elforgatás (T_{forg})
    - Tükrözés (T_{tukor})
  - Hasonlósági transzformációk
    - Skálázás (T_s)
  - Egyéb transzformációk
    - Nyírás (T_{ny})
  - A transzformációk egymás után elvégezhetőek, ebben az esetben (jobbról balra haladva) szorzatot kell felírni. Például: $T = T_{forg1} T_s T_{forg2} T_{elt1} T_{ny} T_{s2}$

Tartalom

Eltolás

- $d = [d_x, d_y, d_z]$ vektorral való eltolást valósít meg
- Alakja $T_{elt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Az eredmény vektor $P' = T_{elt}P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával $\rightarrow$ T_{elt} egybevágósági transzformáció

Tartalom

Elforgatás

- X, Y, Z tengely körüli elforgatás szögét jelöljük rendre α-val, β-val és γ-val.
- A forgatási mátrixok alakjai:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és}$$

Elforgatás

- Továbbá:

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A teljes 3D-s forgatás a három forgatás szorzataként adható meg: $T_{forg} = T_\alpha T_\beta T_\gamma$
- Az eredmény vektor $P' = T_{forg} P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával $\rightarrow$ T_{forg} egybevágósági transzformáció

Tartalom

Tükrözés

- $d = [d_x, d_y, d_z]$ vektorral való eltolást valósít meg
- Alakja (tükrözés az X tengelyre) $T_{tukor} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Az eredmény vektor $P' = T_{tukor} P$ hossza megegyezik az eredeti P vektor hosszával, ezért T_{tukor} egybevágósági transzformáció
- A tükrözés a többi tengely esetében is lehetséges, de az X tengelyre tükrözéssel + forgatással tetszőleges forgatás + tükrözés helyettesíthető.

Tartalom

Skálázás

- A skálázás a P vektor hosszát nyújtja meg s-szeresére
- Alakja $T_s = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A transzformáció a méretet megváltoztatja, de a szögeket nem $\rightarrow$ hasonlósági transzformáció

Skálázás

- Koordinátánként lehet saját skálát is alkalmazni:
- $T_s = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A hasonlósági tulajdonságot ezzel elveszítjük

Tartalom

Nyírás

- A nyírás a tárgy szögeit is megváltoztatja
- Alakja $T_{ny} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$