Számítógépes Grafika

Hajder Levente
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2017/2018. II. félév

Tartalom

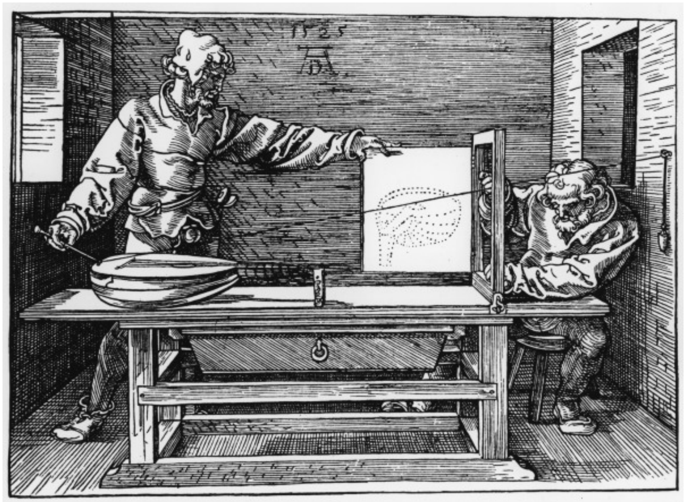
1 Raycasting
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása
- Metszések
  - Sugár és sík metszéspontja
  - Sugár és háromszög metszéspontja
  - Sugár és poligon metszéspontja
  - Sugár és gömb metszéspontja
  - Sugár és doboz metszéspontja
  - Transzformált objektumok

2 Rekurzív sugárkövetés

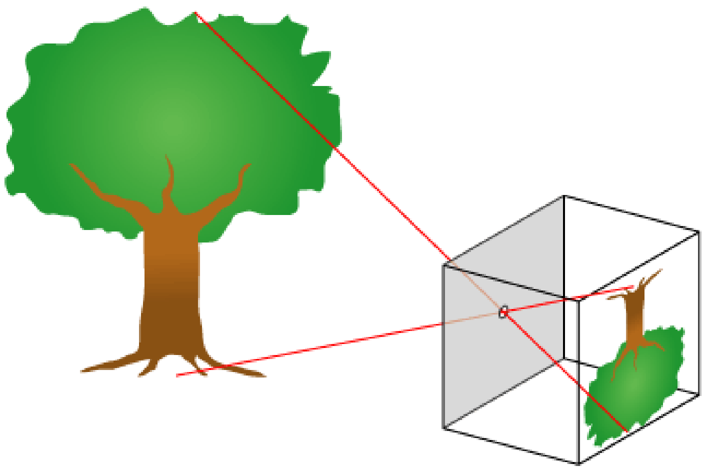
Tartalom

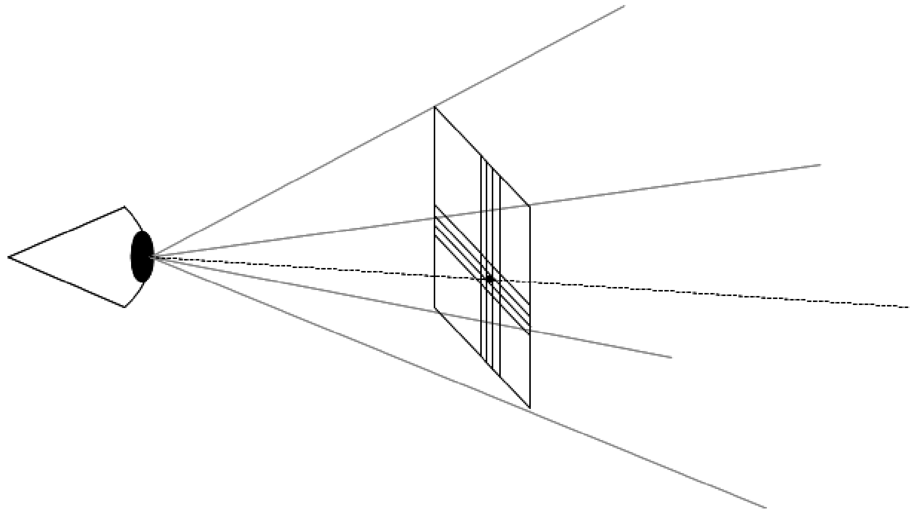
1 Raycasting
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása
- Metszések
  - Sugár és sík metszéspontja
  - Sugár és háromszög metszéspontja
  - Sugár és poligon metszéspontja
  - Sugár és gömb metszéspontja
  - Sugár és doboz metszéspontja
  - Transzformált objektumok

2 Rekurzív sugárkövetés



Albrecht Dürer, 1525





Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? $\rightarrow$ Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljünk hozzá a pixelhez egy színt!

Tartalom

1 Raycasting
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása
- Metszések
  - Sugár és sík metszéspontja
  - Sugár és háromszög metszéspontja
  - Sugár és poligon metszéspontja
  - Sugár és gömb metszéspontja
  - Sugár és doboz metszéspontja
  - Transzformált objektumok

2 Rekurzív sugárkövetés

Raycasting

```
Minden pixelre:
  Indítsunk egy sugarat a színtérbe

  Minden objektumra a színtérben:
   Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

  A legközelebbi metszett objektum
  színével színezzük ki a pixelt
```

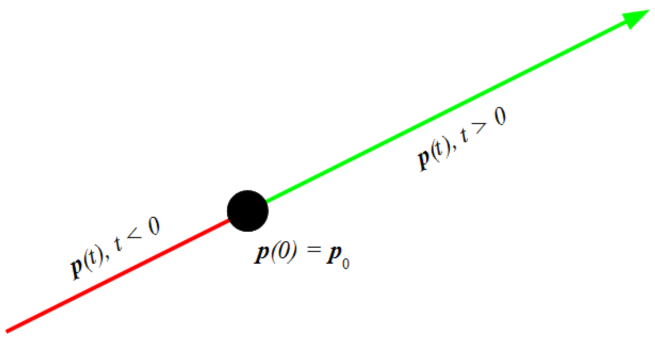

Sugár

- A sugárnak van
  - egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
  - és egy $\mathbf{v}$ iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

  ahol $t > 0$ (félegyenes!).
- $t = 0$?, $t < 0$? sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

Sugár



Kérdés

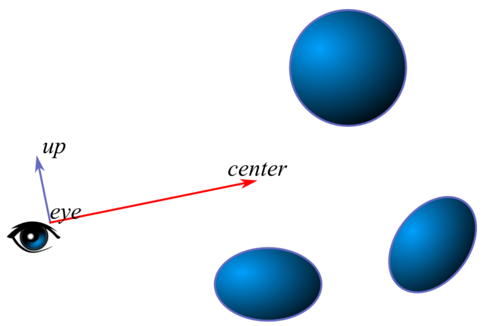
- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?
- Hogyan metszük el a sugarat akármivel?

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Sugarak indítása

- A szempozicióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozició (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx, fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott: $2\tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$ nagyságú)
- Ezek segítségvel fogjuk megadni az (i, j) pixel világbeli koordinátáit



Sugarak indítása

Keressük a kamera saját $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (jobbkezes!) koordinátarendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

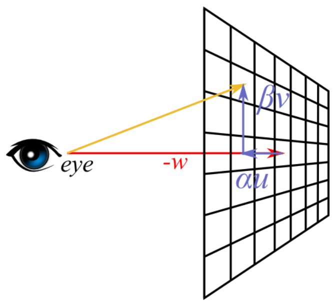
- Az X tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

- Az Y tengely merőleges **u**-ra és **w**-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

(i,j) pixel koordinátái



- Legyen $\mathbf{p}$ az i,j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i,j) = \mathbf{eye} + (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fovy}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{hight/2}.$$

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

- Most a sugarak kezdőpontját az előbbieknek megfelelően számoljuk, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(i,j)$
- A sugár irányvektora pedig $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}}{|\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}|}$

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a fent is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$

Metszések: parametrikus sugár-implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ tegyük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha $t = 0$ a sugár a felületről indul
  - Ha $t < 0$, akkor a sugár "mögött" van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk $t > 0$ kell!)

Metszések: parametrikus sugár-parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [r_x(u, v), r_y(u, v), r_z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v), hogy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

- Ez három ismeretlenes (t, u, v), három egyenletes $(x, y, z$ koordinátánként egy) egyenletrendszer
- A t ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az (u, v)-re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (általában $(u, v) \in [0, 1]^2$ kell)!

Tartalom

1 Raycasting
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása
- Metszések
  - Sugár és sík metszéspontja
  - Sugár és háromszög metszéspontja
  - Sugár és poligon metszéspontja
  - Sugár és gömb metszéspontja
  - Sugár és doboz metszéspontja
  - Transzformált objektumok

2 Rekurzív sugárkövetés

Egyenes és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$
- A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(x_0 + tx) + B(y_0 + ty) + C(z_0 + tz) + D = 0$$

Egyenes és implicit sík metszéspontja

- Ezt t-re átrendezve adódik

$$t(Ax + By + Cz) + x_0 + y_0 + z_0 + D = 0$$
$$t = -\frac{x_0 + y_0 + z_0 + D}{Ax + By + Cz}$$

- Látható a sík a nézőpontunkból, ha $t > 0$

Egyenes és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

- minden $\mathbf{q}$ pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet

Egyenes és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.
- A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.
- Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

Egyenes és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v-t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q} = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Egyenes és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_x \\ p_{0y} - q_y \\ p_{0z} - q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- Látjuk a síkot, ha $t > 0$ (most $u, v \in \mathbb{R}$ a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Háromszög megadása

- Egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bármelyike
  - normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

  ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor $\mathbf{n}$ egységnyi hosszúságú.

Háromszög és egyenes metszéspontja

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen $\mathbf{p}$ (már ha létezik).
- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{p}$ pont háromszögön belüli baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- p Akkor, és csak akkor van a $\triangle$-ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

  ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

Raycasting
Rekurzív sugárkövetés
Motiváció
Raycasting
Sugarak indítása
Metszések

Pont a háromszögön vizsgálat

Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét

Hajder Levente hajder@inf.elte.hu Számítógépes Grafika

Raycasting
Rekurzív sugárkövetés
Motiváció
Raycasting
Sugarak indítása
Metszések

Pont a háromszögön vizsgálat

Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét

- A koordinátasíkok közül (XY, XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! $\rightarrow$ a háromszög és a sík normálisa leginkább "egyállású"

Hajder Levente hajder@inf.elte.hu Számítógépes Grafika

Raycasting
Rekurzív sugárkövetés
Motiváció
Raycasting
Sugarak indítása
Metszések

Pont a háromszögön vizsgálat

Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét

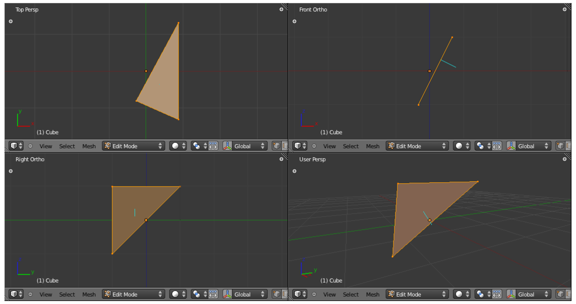
A koordinátasíkok közül (XY, XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! $\rightarrow$ a háromszög és a sík normálisa leginkább "egyállású"

- A vetülethez egyszerűen elhagyjuk z, y vagy x egyenletét, megfelelően.

Hajder Levente hajder@inf.elte.hu Számítógépes Grafika

Pont a háromszögön vizsgálat

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.
(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$
$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$
$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

- Behelyettesítve $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$-t, és rendezve:

$$x = \lambda_1(a_x - c_x) + \lambda_2(b_x - c_x) + c_x$$
$$y = \lambda_1(a_y - c_y) + \lambda_2(b_y - c_y) + c_y$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

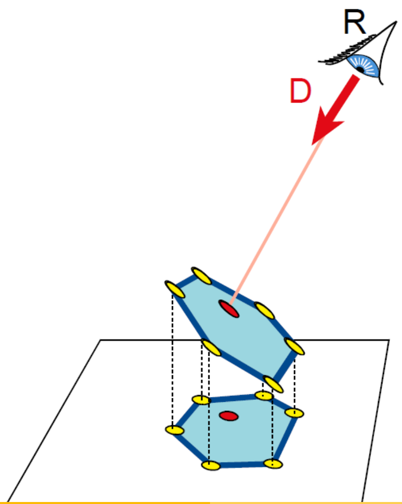
Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Sugár metszése poligonnal

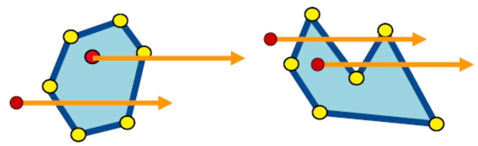
- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

Sugár metszése poligonnal



Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- Konkáv és csillag alagú poligonra is működik



Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = (x_i, y_i), \mathbf{d}_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:
  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{d}$ tetszőleges
- Legyen $\mathbf{v} = (1, 0)$!
- Így a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ egyenletet csak y koordinátára kell megoldani

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$-be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt.
- Ha $s \notin [0,1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- Ha $t \leq 0$: a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

Tartalom

1 Raycasting
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása
- Metszések
  - Sugár és sík metszéspontja
  - Sugár és háromszög metszéspontja
  - Sugár és poligon metszéspontja
  - Sugár és gömb metszéspontja
  - Sugár és doboz metszéspontja
  - Transzformált objektumok

2 Rekurzív sugárkövetés

A gömb egyenlete

- Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- Ugyanez skalárszorzattal felírva:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

ahol $\mathbf{p} = (x, y, z)$.

Gömb és egyenes metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Kifejtve:

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Sugár metszése AAB-vel

- AAB = axis aligned box, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0), \mathbf{v} = (v_x, v_y)$a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ segítségével ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$)!
- Tegyük fel, hogy a sugár kiindulópontja a doboztól balra helyezkedik el (ezt megtehetjük)

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben triviális eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor a két paraméter (négyzet bal és jobb oldala): $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$, $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- y és z koordinátákra hasonlóan el kell végezni a számítást.
- Ezek alapján megállapítható, hogy melyik két lapját a téglatestnek hol metszi a sugár.

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések
     - Sugár és sík metszéspontja
     - Sugár és háromszög metszéspontja
     - Sugár és poligon metszéspontja
     - Sugár és gömb metszéspontja
     - Sugár és doboz metszéspontja
     - Transzformált objektumok
2. Rekurzív sugárkövetés

Transzformált objektumok

- Legyen $\mathbf{M}$ egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$-mel transzformált objektum metszéspontját!
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? ...
- Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

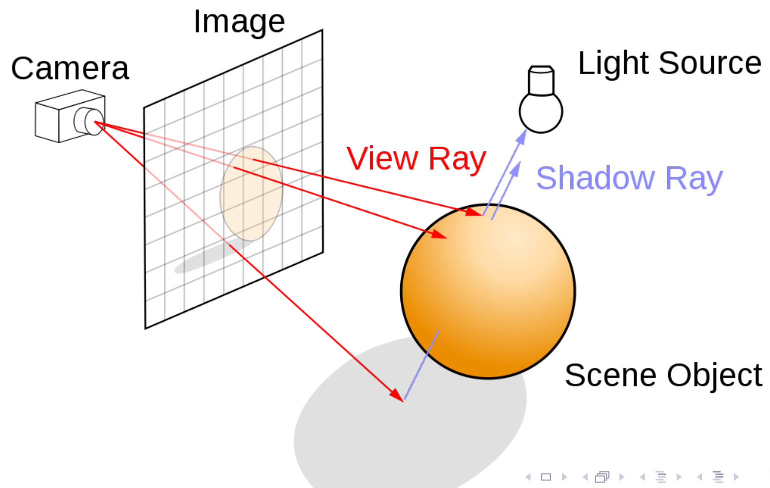
Tétel

Az r sugár és az $\mathbf{M}$-mel transzformált objektum metszéspontja $\equiv$ az $\mathbf{M}^{-1}$-zel transzformált $\mathbf{r}$ sugár és az objektum metszéspontja.

- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times4}$, homogén transzformáció
- Sugár kezdőpontja: $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \rightarrow [p_x, p_y, p_z, 1]$
- Sugár iránya: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow [v_x, v_y, v_z, 0]$. Így nem hat rá az eltolás.
- Transzformált sugár $\mathbf{r}'(t) : \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

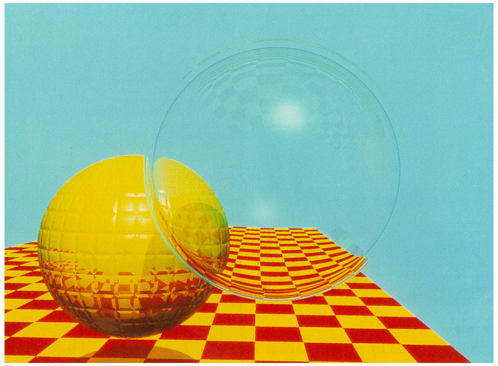
- Metszésvizsgálat: használjuk $\mathbf{r}'(t)$-t!
- Metszéspont: $\mathbf{q}$, akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.

Rekurzív sugárkövetés



Egyszerűsített illuminációs egyenlet

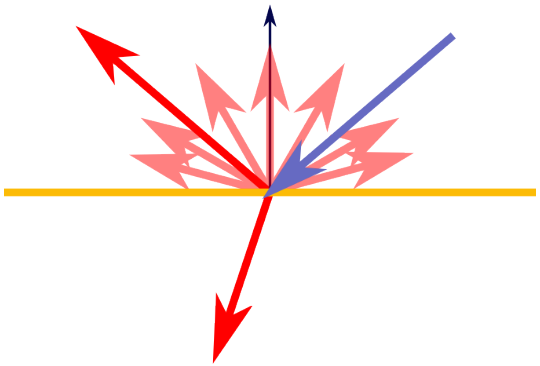
Minden pixelre egymástól függetlenül határozzuk meg azok színét – oldjuk meg az *árnyalási és takarási feladatot*.



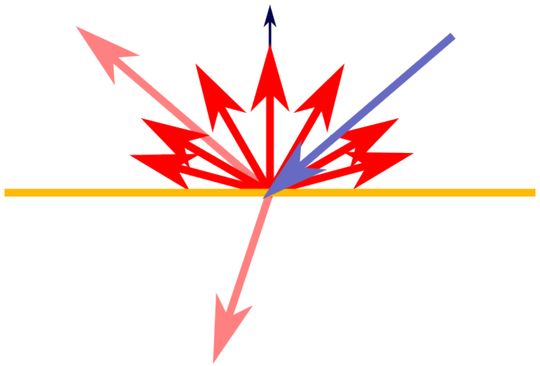
Turner Whitted, 1980

- A fény útját két féle komponensre bontjuk: *koherens* és *inkoherens* komponensre
- *Koherens* eset
  - Az optikának megfelelő ideális visszaverődés ("tükröződés") és törés
  - Tovább követjük a fény útját
- *Inkoherens* eset
  - Minden egyéb
  - Csak az absztrakt fényforrás direkt megvilágítását vesszük figyelembe

Koherens komponens



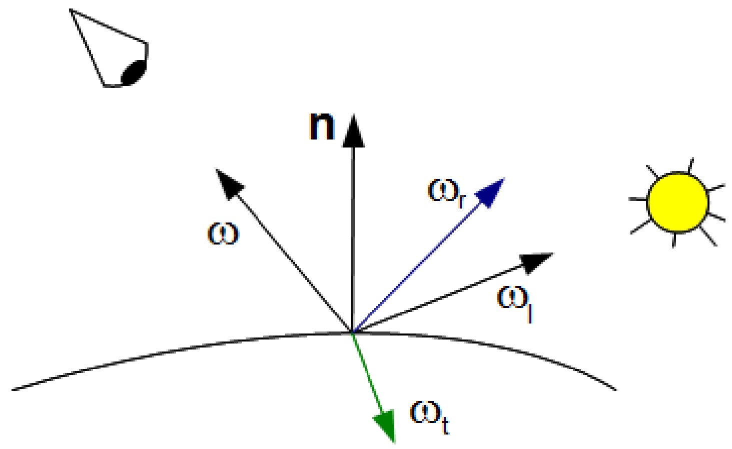
Inkoherens komponens



Egyszerűsített illuminációs egyenlet

A következő, egyszerűsített megvilágítási egyenletet oldjuk meg:

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$



Sugárkövetés

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- A szempozicóból sugarakat indítunk minden pixel középpontján keresztül.
- Ennek a sugárnak az irányát adja meg $-\omega$-t (minusz omega!).
- A sugár és a színtér objetumainak szemhez legközelebbi metszéspontja adja meg $\mathbf{x}$-et.

Emisszió

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

Az $\mathbf{x}$ felületi pontból, az ω nézeti irányból érkező radiancia, a felület saját sugárzása – *emissziója* – miatt.

Ambiens fény

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

k_a a felület, L_a a környezet *ambiens* együtthatója.
Az egyenlet *ambiens* tagja közelíti azt a fénymennyiséget, ami általánosan jelen van, minden felületet ér, azok helyzetétől és az absztrakt fényforrásoktól függetlenül.

Fényforrások

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- Az inkoherens visszaródéseket foglalja össze a szummás tag
- Csak a fényforrások direkt hatását vesszük figyelembe
- És csak akkor, ha az az $\mathbf{x}$ felületi pontból látszik

Fényforrások

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- ω_l a fényforrásból a felületi pontba mutató egységvektor.
- $f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega)$ most csak a diffúz és spekuláris visszaverődést jellemző BRDF.
- $-\omega_l \cdot \mathbf{n}$ a felületi normális és a fényforrás fele mutató vektor által bezárt szög koszinusza.

Fényforrások

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- Ha az l fényforrás teljesítménye Φ_l és pozíciója $\mathbf{x}_l$ akkor
$$L_i(\mathbf{x},\omega_l) = v(\mathbf{x},\mathbf{x}_l) \cdot \frac{\Phi_l}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_l\|^2}.$$
- $v(\mathbf{x},\mathbf{x}_l) \in [0,1]$ függvény: *Mi van a felületi pont és a fényforrás között?*

Fényforrások

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

$v(\mathbf{x},\mathbf{x}_l) \in [0,1]$ függvény

- $= 0$, ha a fényforrás nem látható $\mathbf{x}$-ből,
- $= 1$, ha igen,
- $\in (0,1)$, ha átlátszó objektumok vannak a kettő között.
- v kiszámításához úgynevezett *árnyéksugarat* indítunk $\mathbf{x}$-ből $\mathbf{x}_l$-fele, és az objektumokkal való metszését nézzük.

Tükröződés

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- A tükörirányból érkező fényt k_r arányban vesszük figyelembe.
- ω_r az ideális tüköriránynak megfelelő beeső vektor.
- $L(\mathbf{x},\omega_r)$ kiszámítása azonos $L(\mathbf{x},\omega)$ kiszámításával (rekurzió!).
- Új sugár: szempozíció helyett $\mathbf{x}$, és a sugár iránya $-\omega_r$.

Fénytörés

$$L(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x},\omega) + k_a \cdot L_a + \sum_{l \in \text{Lights}} f_r(\mathbf{x},\omega_l,\omega) L_i(\mathbf{x},\omega_l)(-\omega_l \cdot \mathbf{n}) + k_r \cdot L(\mathbf{x},\omega_r) + k_t \cdot L(\mathbf{x},\omega_t)$$

- A törési-irányból érkező fényt k_t arányban vesszük figyelembe.
- ω_t a törésiránynak megfelelő beeső vektor.
- $L(\mathbf{x},\omega_t)$ kiszámítása megint azonos $L(\mathbf{x},\omega)$ kiszámításával (rekurzió!).
- Új sugár: szempozíció helyett $\mathbf{x}$, és a sugár iránya $-\omega_t$.