Számítógépes Grafika

Hajder Levente
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2017/2018. II. félév

Tartalom

Inkrementális képszintézis

- Inkrementális elv
- A transzformációk szemszögéből végignéztük a grafikus szerelőszalagot
- Lényegében egy pont útját követtük végig, a transzformációkon át a képernyőig
- Most az inkrementális képszintézis szerelőszalagját vizsgáljuk tovább

Tartalom

Vágás

- A vágás során a nézeti csonkagúlán kívül geometriai elemeket szűrjük ki
- A nézeti csonkagúla határozza meg a színterünknek azt a részét, amely majd leképeződik a képernyőre (ld. múlt óra)
- Miért érdemes egyáltalán vágni?
  - Degenerált esetek kiszűrése (ld. pl. múlt óra középpontos vetítés)
  - Ne számoljunk feleslegesen (amit úgyse látunk, ne számoljuk sokat)

Vágás az ablakra

- Pont vágás: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Akkor tartjuk meg a pontot, ha $(x, y) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$.
  Megoldás: a határoló egyenesekkel vágás (ha tengelypárhuzamosak: csak összehasonlítás)
- Szakasz vágás: a szakasznak csak azokat a pontjai akarjuk megtartani, amik benne vannak $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$-ban.
  Megoldás: az ablak négy élével, mint négy félsíkkal vágjuk a szakaszt.
- Poligon vágás: a poligonból egy új poligont akarunk csinálni, ami nem lóg ki az ablakból.
  Megoldás: A poligon minden oldalát (mint szakaszt) vágjuk.

Tartalom

Pontok vágása

- Itt most pontokat vágunk egyenesre, síkra
- Azaz, azt akarjuk meghatározni, hogy a bemeneti pont az egyenes vagy sík normálisával megegyező irányban fekszik-e az egyenes/sík pontjaihoz képest (”előtte” van-e).
- Ami mögötte van, nem kell nekünk $\rightarrow$ ha rajta fekszik, azt is tartsuk még meg
- Síkra 3D-ben vágunk $\rightarrow$ a nézeti csonkgúla 6 sík ”előtti” rész (6 féltér metszete)
- Egyenesre 2D-ben $\rightarrow$ a képernyőn a monitorra kerülő rész 4 egyenes ”előtti” rész (4 félsík metszete)

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $P(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $Q(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

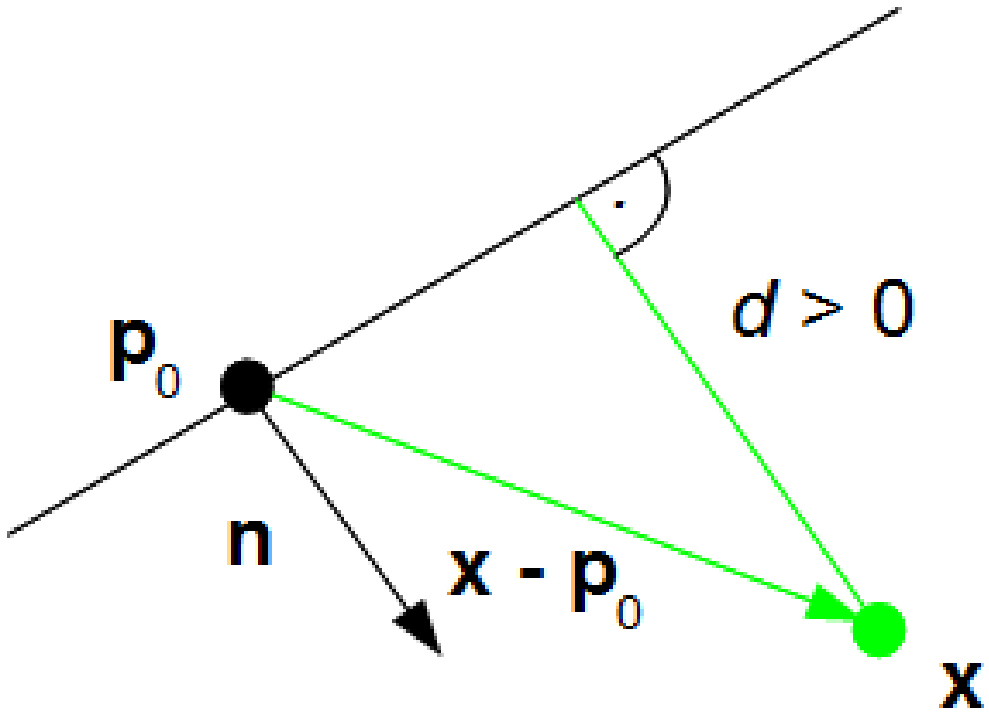
$$\langle X - P, \mathbf{n} \rangle = 0$$
$$(x - p_x)n_x + (x - p_x)n_x = 0$$

  egyenletet.
- Az $\langle X' - P, \mathbf{n} \rangle < 0$ és $\langle X' - P, \mathbf{n} \rangle > 0$ az egyenesünk által meghatározott két félsík egyenlete.

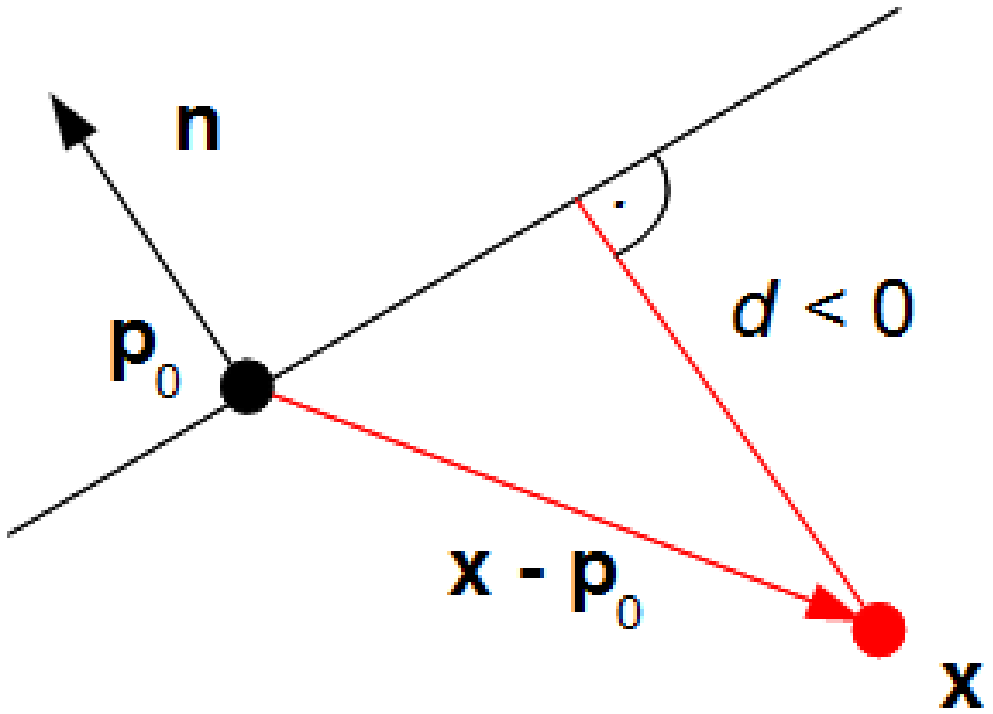
Pont vágása pont-normálvektoros egyenesre

- Feladat: adott $\mathbf{p}$ pont és egy e egyenes ($\mathbf{p}_0$ pontjával és $\mathbf{n}$ normálvektorával, $|\mathbf{n}| = 1$) a síkban. Vágjuk a pontot az e egyenesre!
- Megtartjuk, ha: $\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle \geq 0$
- Ilyenkor a skaláris szorzat eredménye az egyenes egy pontjából az adott pontba mutató vektor előjeles vetülete a normálisra $|\mathbf{n}| = 1 \rightarrow$ előjeles távolság az egyenestől

Pont-egyenes távolsága



Pont-egyenes távolsága



Pont vágása vonalkoordinátás egyenesre

- Használjuk ki, hogy a vágásnál már homogén koordinátákban dolgozik a rendszer!
- Feladat: adott $\hat{\mathbf{p}}$ pont homogén koordinátás alakja és egy e egyenes $\mathbf{e}$ vonalkoordinátáival, úgy, hogy $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$
- Megtartjuk, ha: $\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} \geq 0$

A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $P(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával:

$$\langle X - P, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Félterek: $\langle X - P, \mathbf{n} \rangle < 0$, $\langle X - P, \mathbf{n} \rangle > 0$

Pont vágása síkra

- Pont-normálisal adott sík esetén megtartjuk a pontot, ha:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle \geq 0$$

- Sík-koordinátás ($\mathbf{s}$) megadás esetén (ha $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$) megtartjuk a pontot, ha:

$$\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}} \geq 0$$

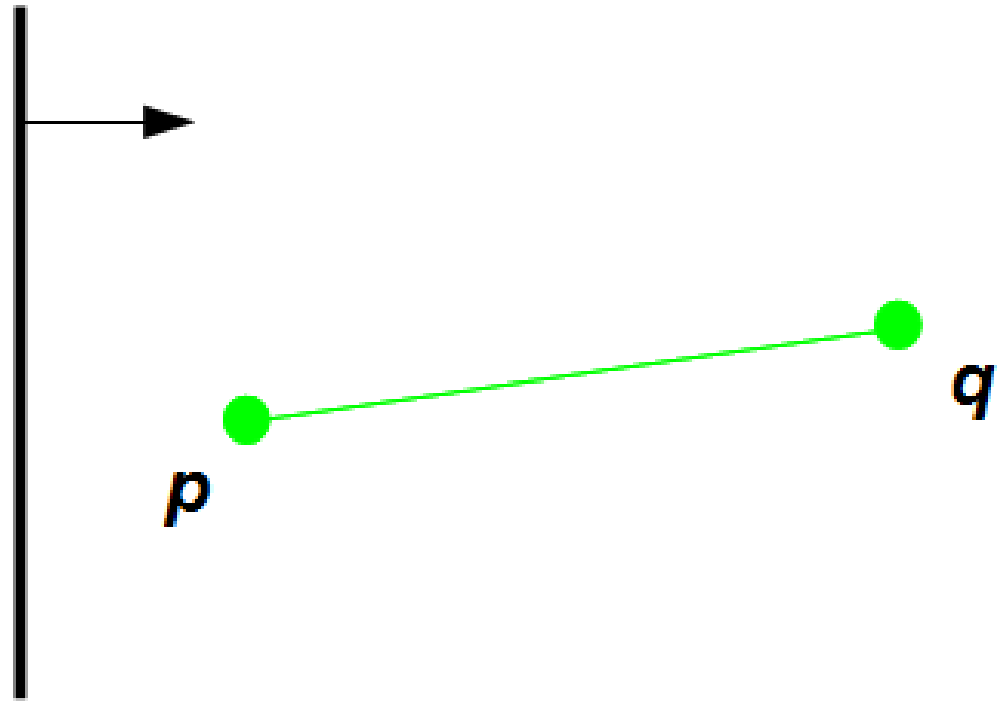
Tartalom

Szakasz vágása félsíkra

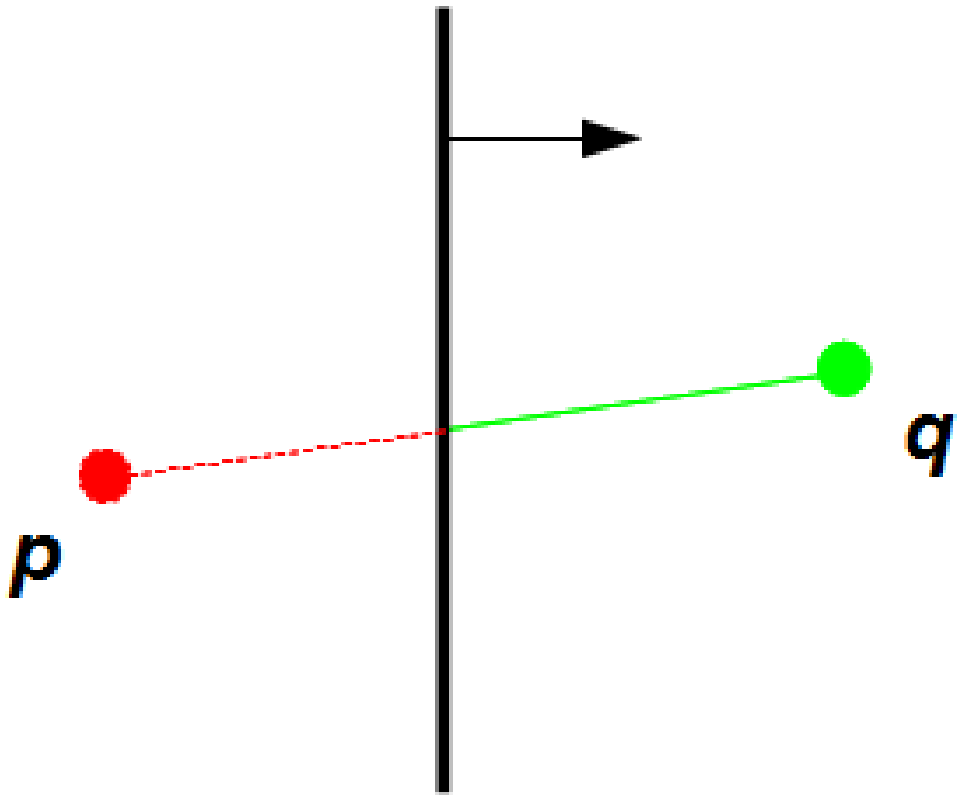
- A szakasz **p** és **q** végpontjait vágjuk az *e* egyenes és normálisa által meghatározott félsíkra!
  - Az előbb látott módon végezhetjük a vágást!
  - Az eredmény viszont most bonyolultabb egy kicsit

Szakasz vágása félsíkra

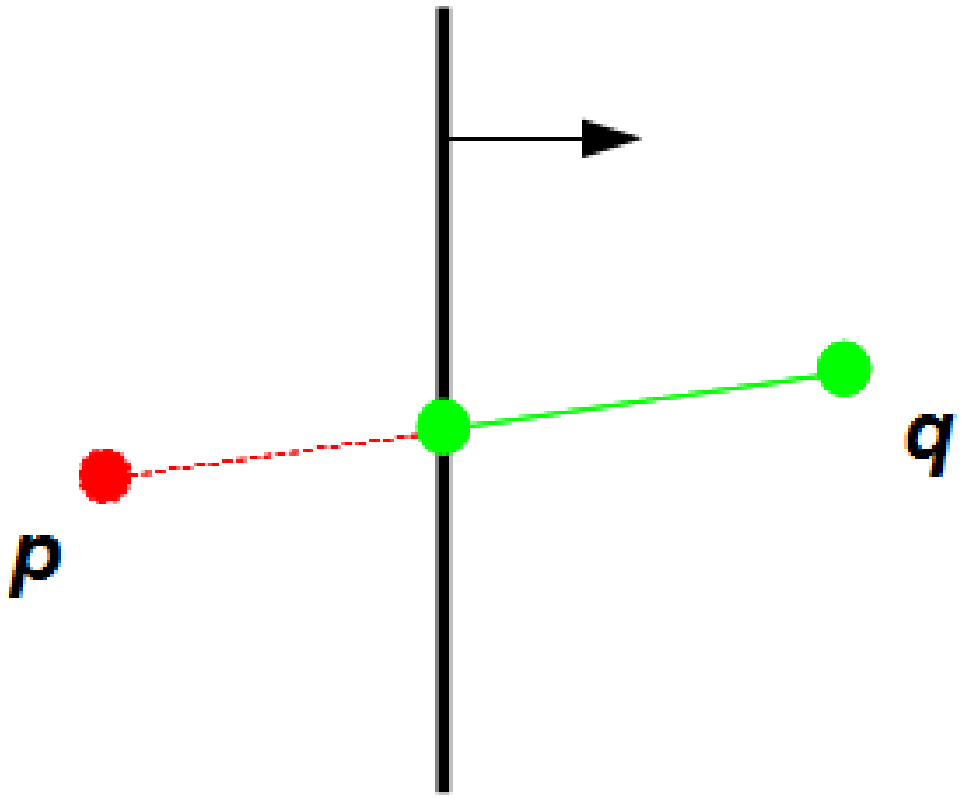
Szakasz vágása félsíkra



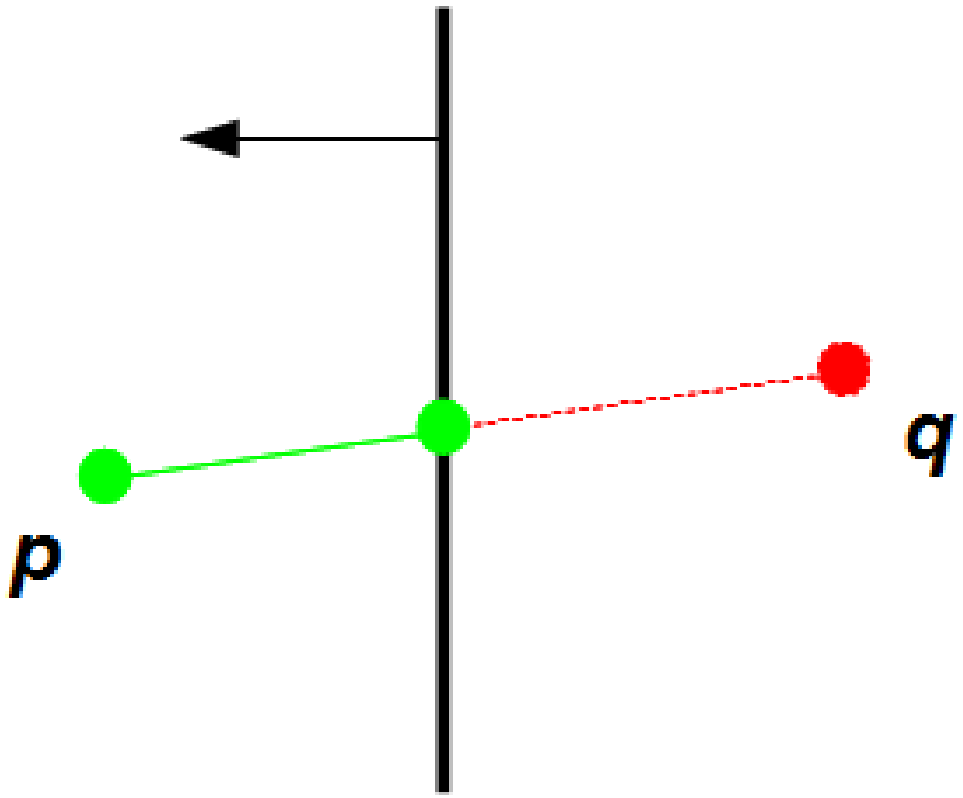
Szakasz vágása félsíkra



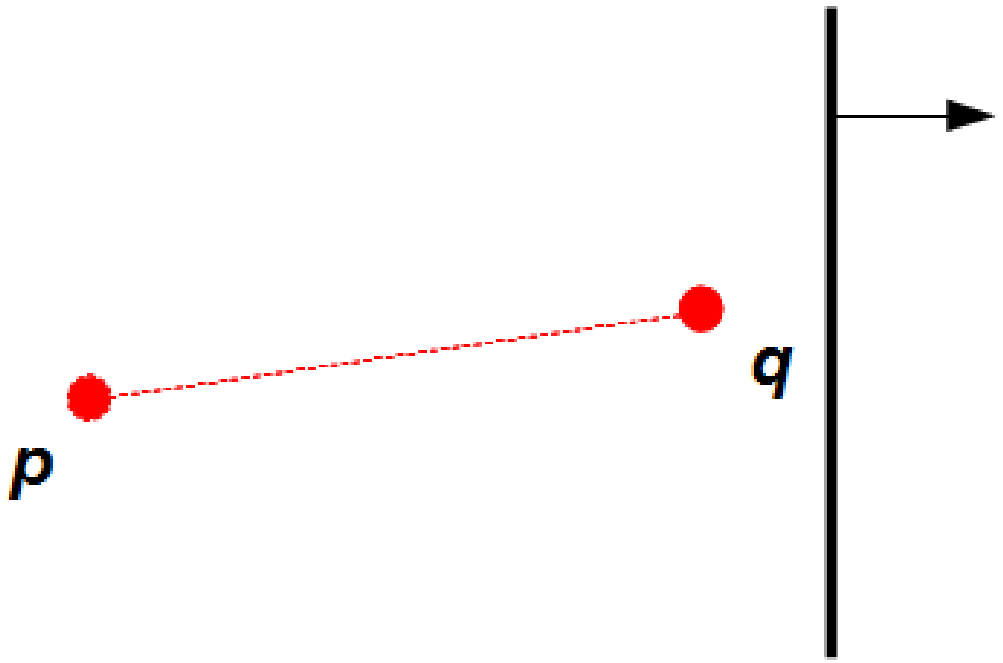
Szakasz vágása félsíkra - új ”kezdőpont”!



Szakasz vágása félsíkra



Szakasz vágása félsíkra



Tartalom

Szakasz vágása félsíkra

- Csak azt a speciális esetet nézzük, amikor a vágó egyenes párhuzamos valamelyik tengellyel.
- $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ szakasz egyenlete:

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

- Vágó egyenes: pl. $x = x_{min}$
- Megoldás: $x_{min} = x_1 + t(x_2 - x_1) \Rightarrow t = \frac{x_{min} - x_1}{x_2 - x_1}$
- Metszéspont: $x = x_{min}, y = y_1 + \frac{x_{min} - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$

Szakasz vágása - nehézségek

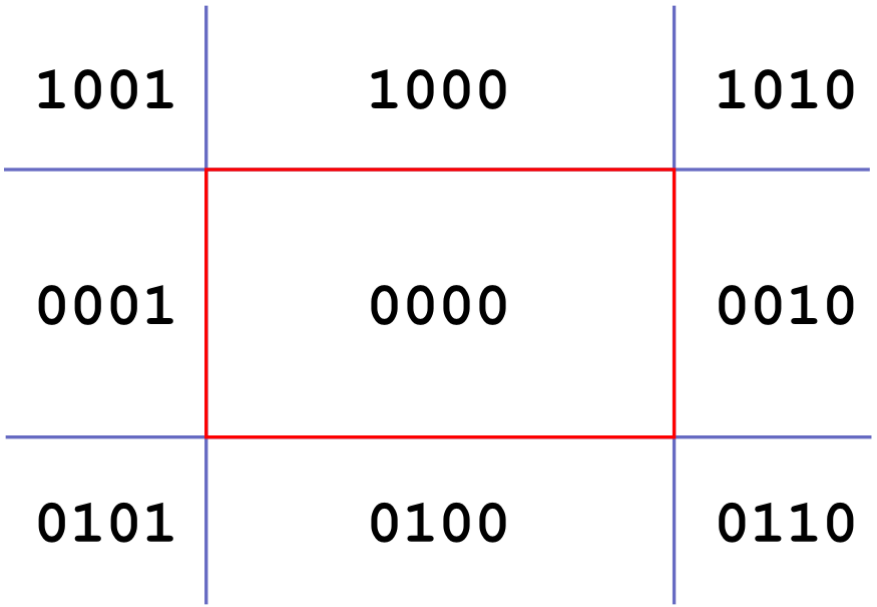
- Eredmény kezelése: $t \leq 0$ vagy $t \geq 1 \rightarrow$ nincs is igazi vágás
- Kivételek: tengelyekkel párhuzamos szakaszok vágása
- Képernyőre vágásnál is rengeteg eset: négy félsík, két végpont, mindkettő eshet bárhova
- Feladat: Kell-e vágni? Melyik félsík(ok)ra kell vágni? Triviálisan bent/kint van-e a szakasz?
- Megoldás: *Cohen-Sutherland* vágás

Cohen-Sutherland vágás

- A képernyő széleit reprezentáló egyenesekkel osszuk kilenc részre a síkot!
- Mindegyik síkrészhez rendeljünk egy 4 bitből álló bit-kódot: TBRL
- Számítsuk ki ezt a kódot a szakasz végpontjaira!
  - T = 1, ha a pont az képernyő fölött van, különben 0
  - B = 1, ha a pont az képernyő alatt van, különben 0
  - R = 1, ha a pont az képernyőtől jobbra van, különben 0
  - L = 1, ha a pont az képernyőtől balra van, különben 0

Cohen-Sutherland vágás

code = Top, Bottom, Right, Left

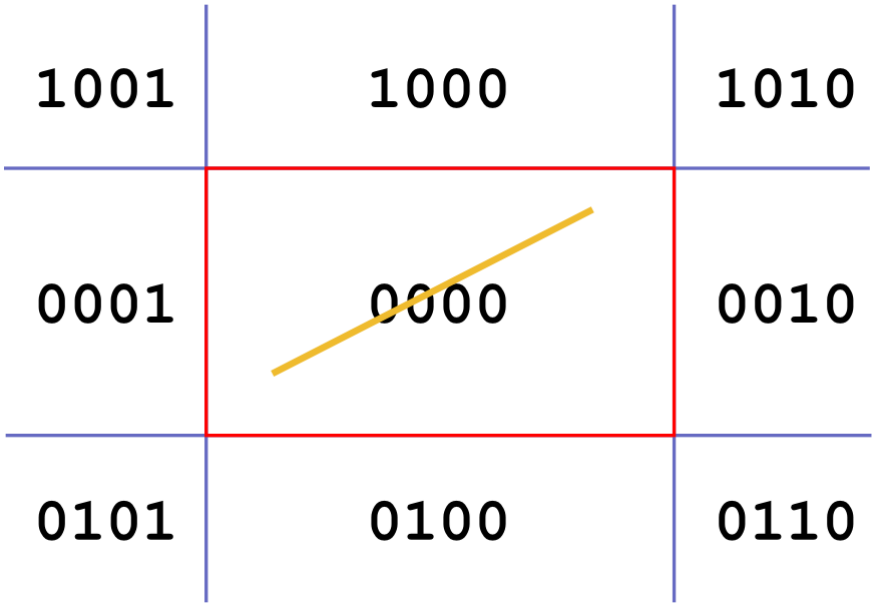


Cohen-Sutherland vágás

- $\texttt{code} = (y > y_{max}, y < y_{min}, x > x_{max}, x < x_{min})$
- Vizsgáljuk a két végpont bit-kódjait, $\texttt{code}_a$-t és $\texttt{code}_b$-t!
  - Ha $\texttt{code}_a$ OR $\texttt{code}_b$ == 0: a szakasz egésze (mindkét végpontja) az ablakban van $\Rightarrow$ megtartjuk.
  - Ha $\texttt{code}_a$ AND $\texttt{code}_b$!= 0: a szakasz az ablak valamelyik oldalán (fölül, alul, jobbra, balra), kívül van $\Rightarrow$ eldobjuk.
  - Különben vágni kell: az 1-es bitek adják meg, hogy melyik félsíkra, utána újra számoljuk a bit-kódokat, és az új szakasszal újrakezdjük az algoritmust.

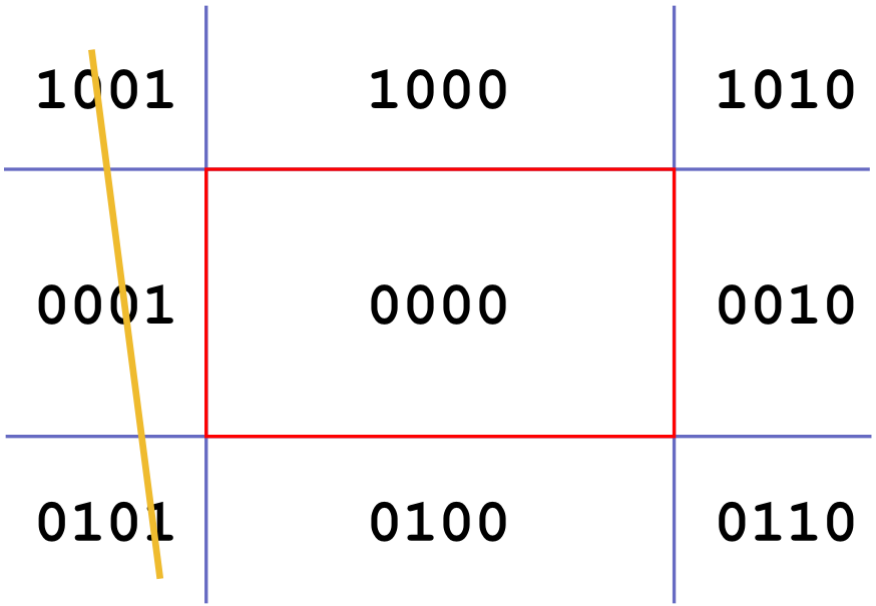
Cohen-Sutherland vágás

$\texttt{code}_a$ OR $\texttt{code}_b$ == 0:



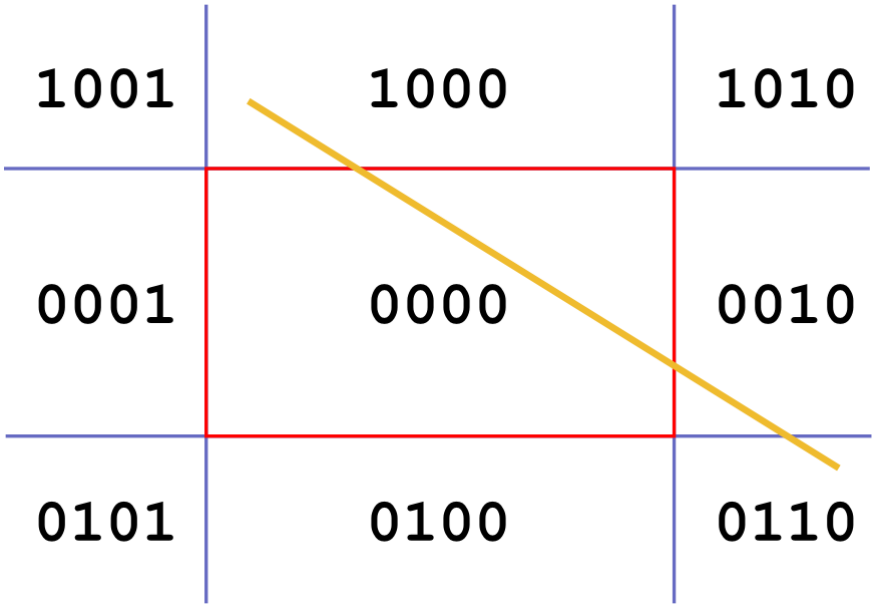
Cohen-Sutherland vágás

$\texttt{code}_a$ AND $\texttt{code}_b$!= 0:



Cohen-Sutherland vágás

Különben:



Tartalom

Poligonvágás

Feladat

Adott egy vágandó és egy vágó poligon. Keressük azt a poligont, amit a vágandóból kapunk, ha csak a vágó poligonba tartozó részeit vesszük. Röviden: keressük a kettő közös részét.

Sutherland-Hodgman poligonvágás

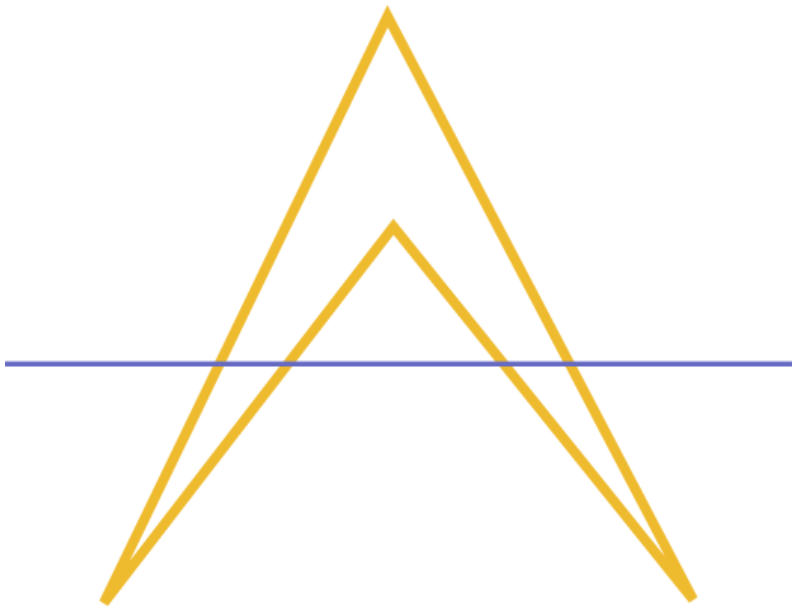
- Legyen p tömb a bemeneti-, q a kimeneti-poligon csúcsainak tömbje!
- Legyen n a csúcsok száma, és $p[0] = p[n]$!
- Vágás egyenesre:
  - Ha $p[i]$ bent van az alablakban, és $p[i+1]$ is:
    $\Rightarrow$ adjuk hozzá $p[i]$-t a q-hoz.
  - Ha $p[i]$ bent van az alablakban, de $p[i+1]$ nincs:
    $\Rightarrow$ adjuk hozzá $p[i]$-t a q-hoz, számítsuk ki $p[i], p[i+1]$ szakasz metszéspontját a vágó egyenessel, majd ezt is adjuk hozzá q-hoz.
  - Ha $p[i]$ nincs bent az alablakban, de $p[i+1]$ benne van:
    $\Rightarrow$ számítsuk ki $p[i], p[i+1]$ szakasz metszéspontját a vágó egyenessel, és ezt adjuk hozzá q-hoz.
  - Ha $p[i]$ nincs bent az alablakban, és $p[i+1]$ sincs:
    $\Rightarrow$ *SKIP*

Sutherland-Hodgman poligonvágás - Pszeudó-kód

```
PolygonClip(in p[n], out q[m], in line) {
  m = 0;
  for( i=0; i < n; i++) {
    if (IsInside(p[i])) {
      q[m++] = p[i];
      if (!IsInside(p[i+1]))
        q[m++] = Intersect(p[i], p[i+1], line);
    } else {
      if  (IsInside(p[i+1]))
        q[m++] = Intersect(p[i], p[i+1], line);
    }
  }
}
```

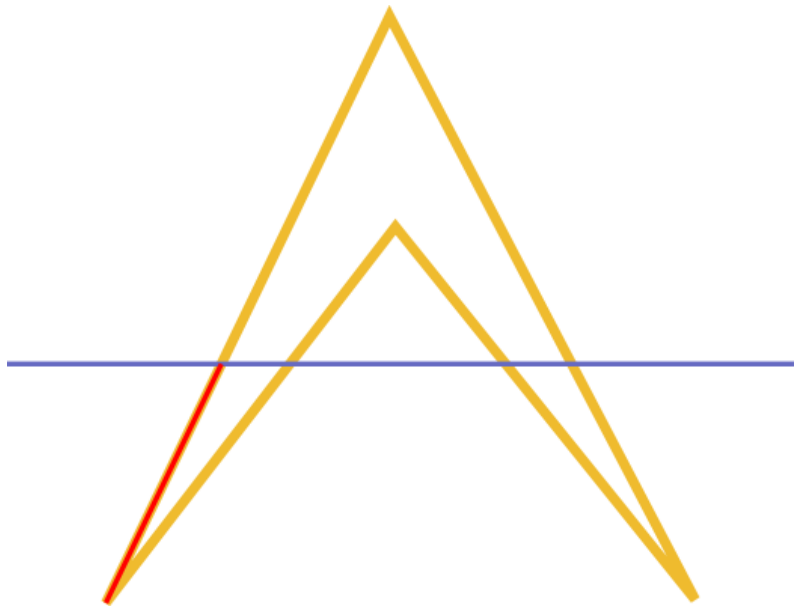
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



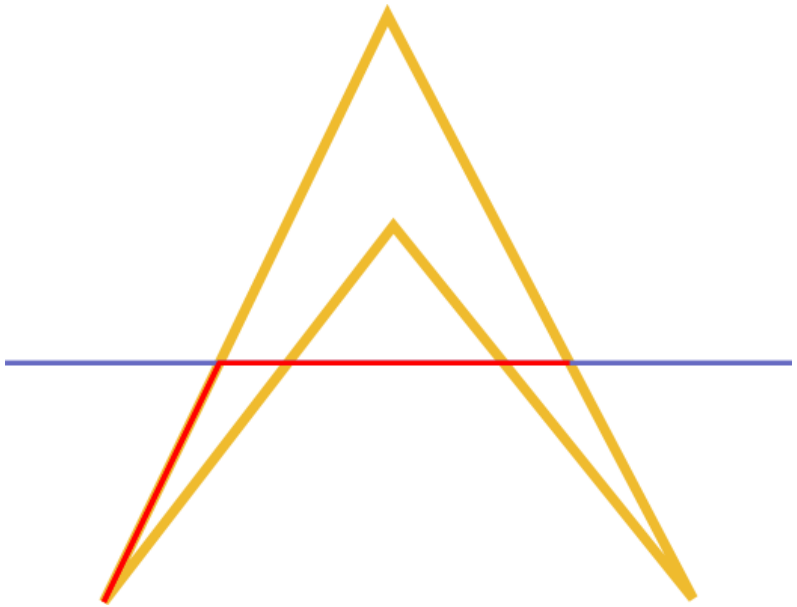
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



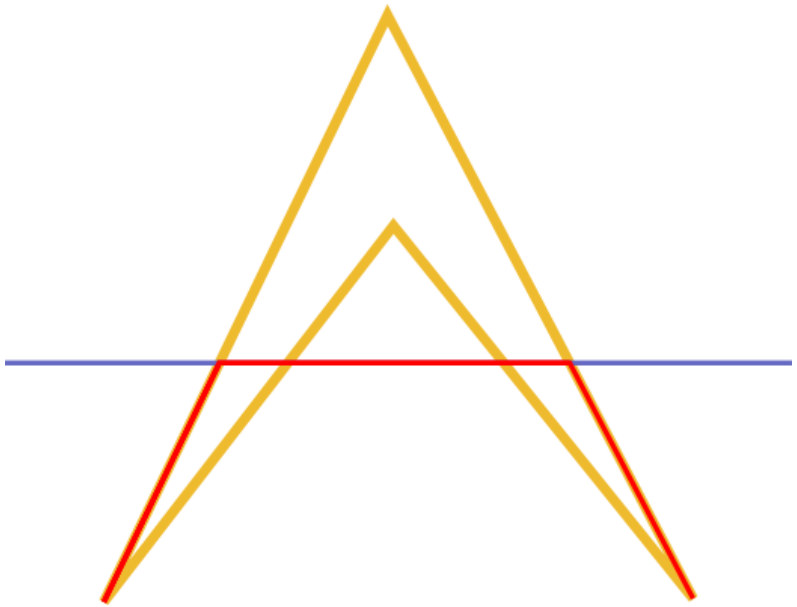
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



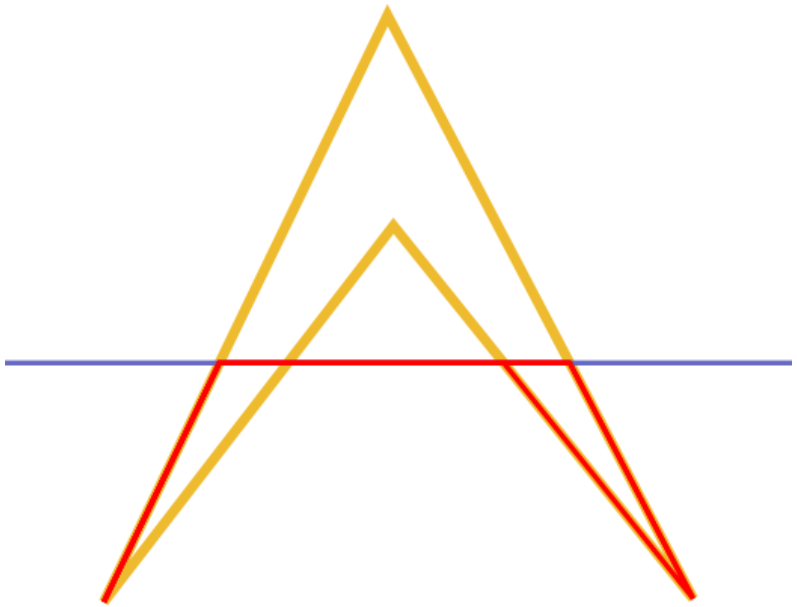
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



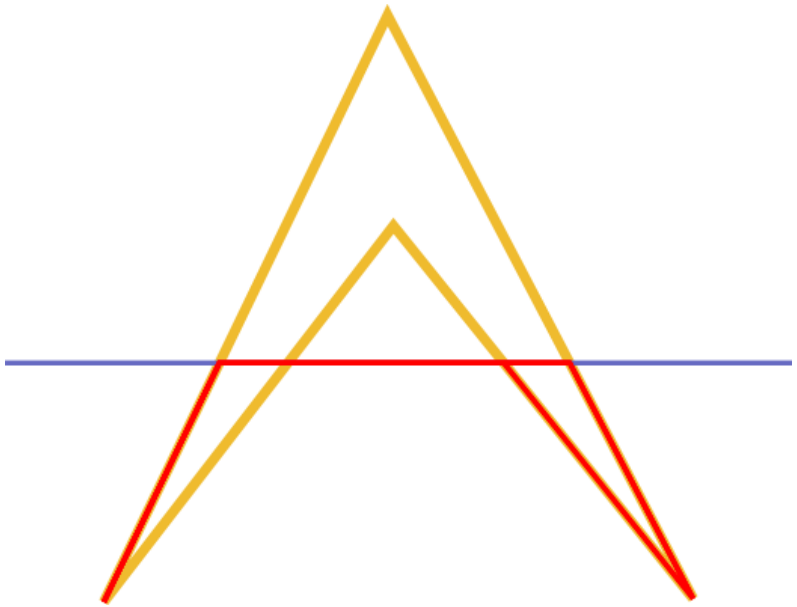
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



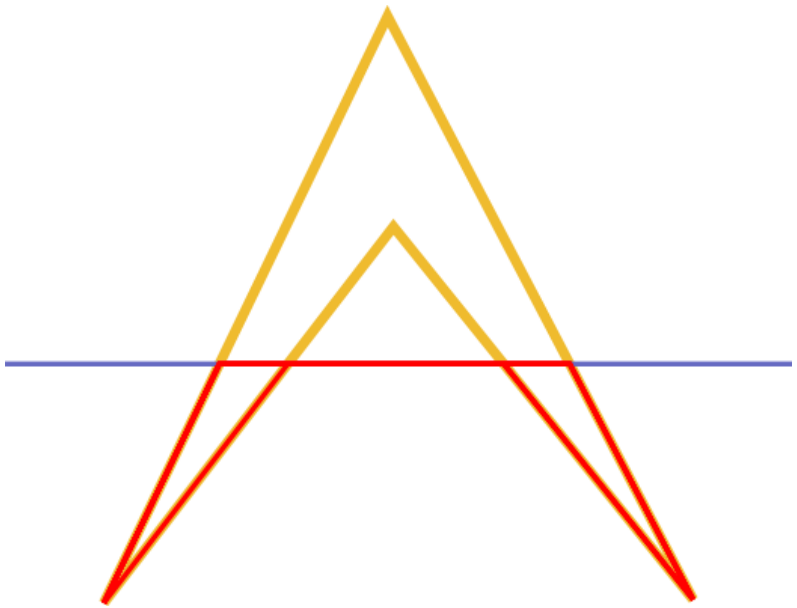
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



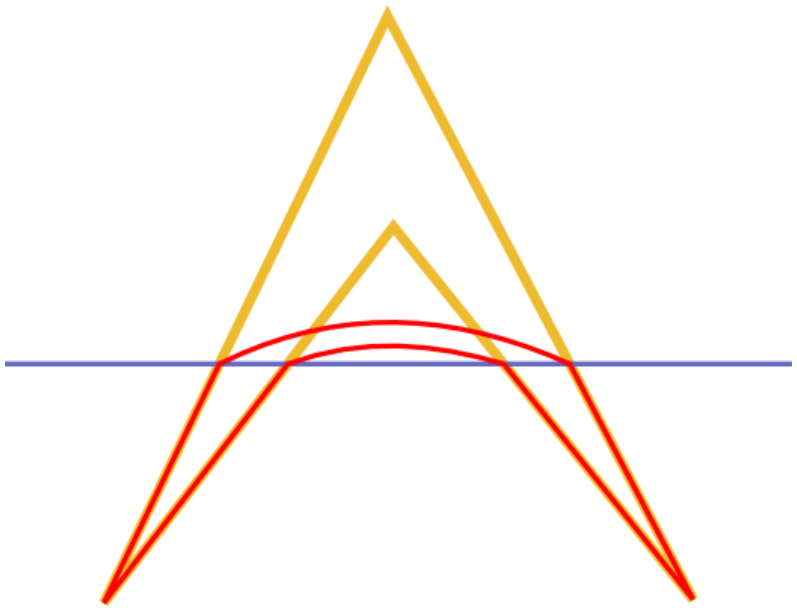
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



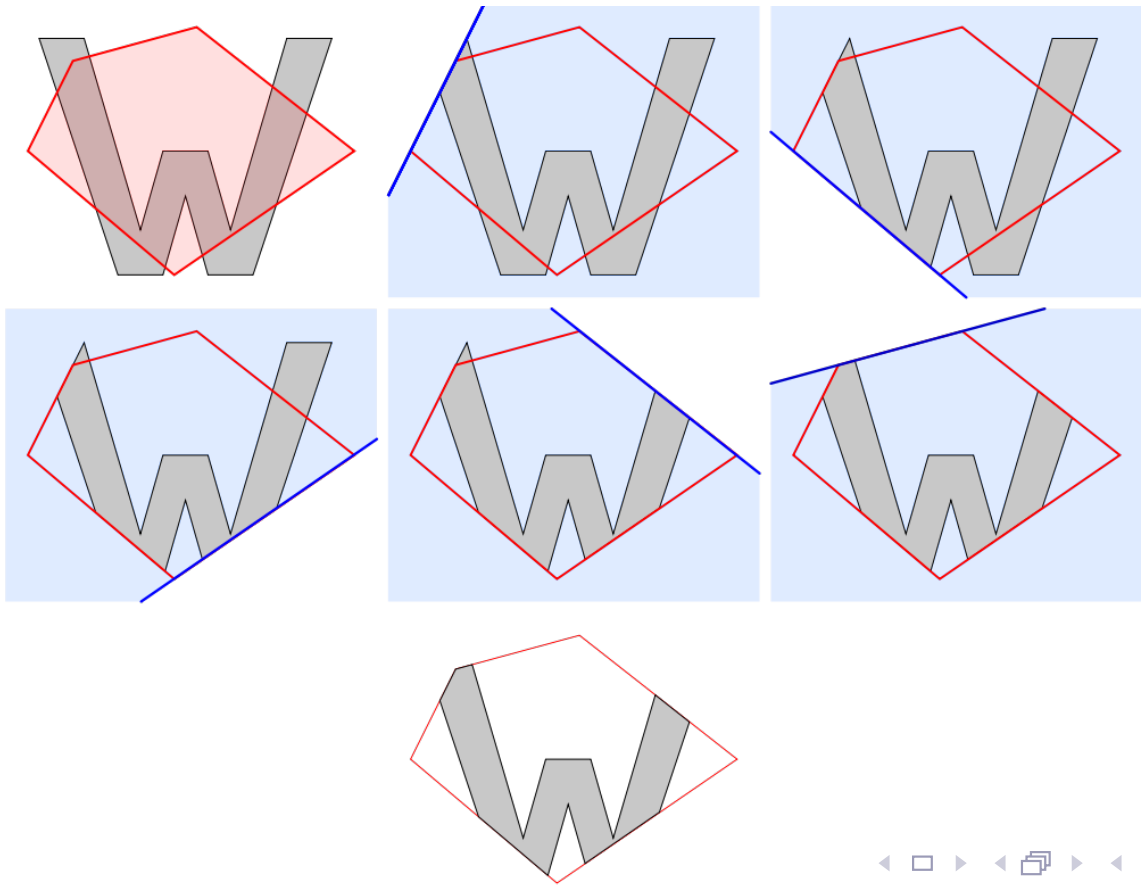
Sutherland-Hodgeman: konkáv poligonok

Konkáv poligonokra átfedő éleket hoz létre.



Sutherland-Hodgeman: poligonra vágása poligonnak

A vágópoligon minden élére vágunk, az előző vágás eredmény éllistáját felhasználva kiindulásként



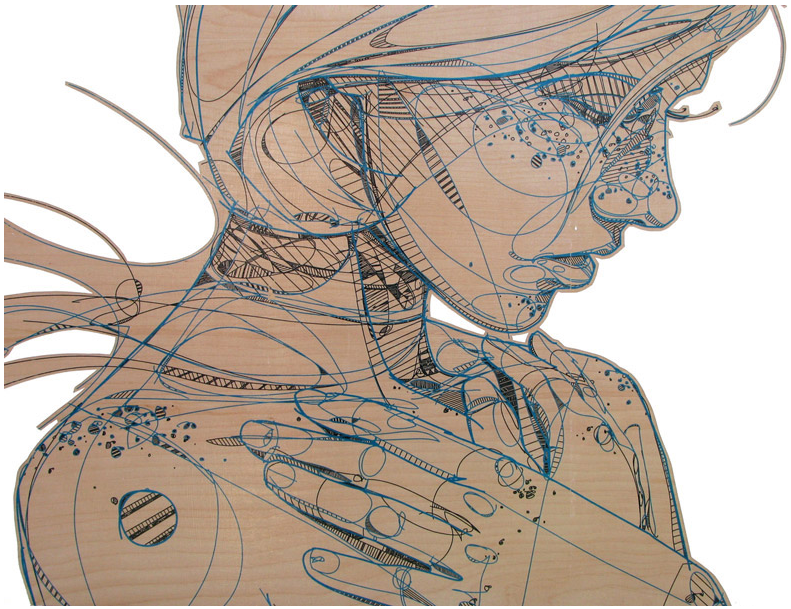
Mikor vágjunk?

- Projektív transzformáció előtt $\rightarrow$ a vágósíkok világtérbeli megadásával (mik az egyenletei?)
- NPKR-ben (projektív trafó után, homogén osztás előtt) $\rightarrow$ a homogén koordináták ”ellenére” ez a legegyszerűbb!
- Transzformált 3D térben (homogén osztás után) $\rightarrow$ vetítési síkon átmenő objektumok...

Tartalom

Szakasz rajzolás

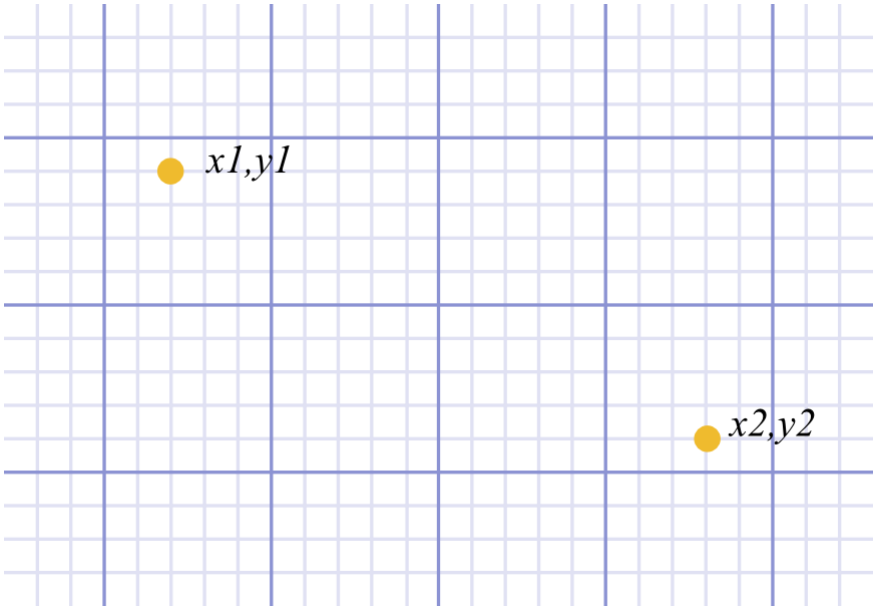
- Egyik leggyakrabb primitív
- Fontos, hogy szépen tudjuk rajzolni
- Mégjobb, ha gyorsan is



Jason Thielke, jasonthielke.com

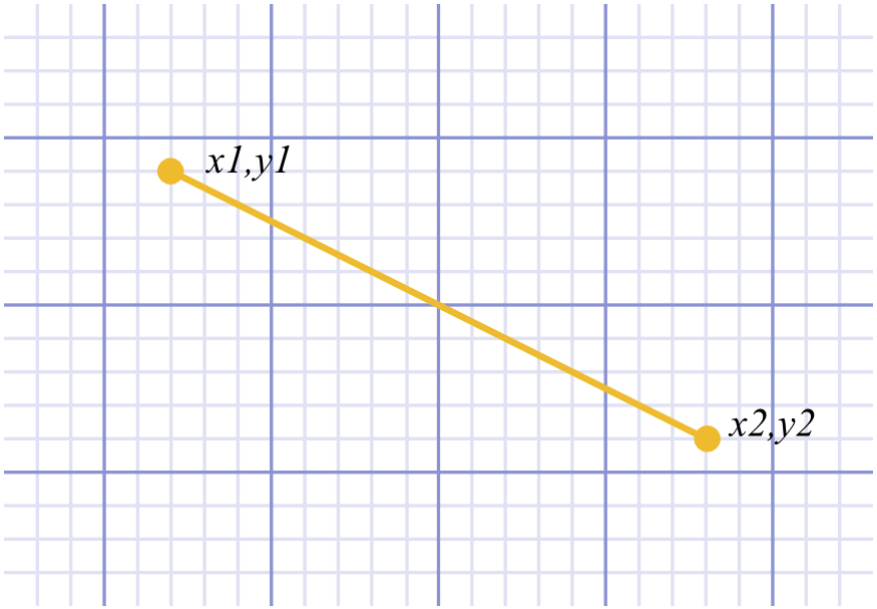
Hogyan rajzolunk szakaszt?

- Adott a két végpont.



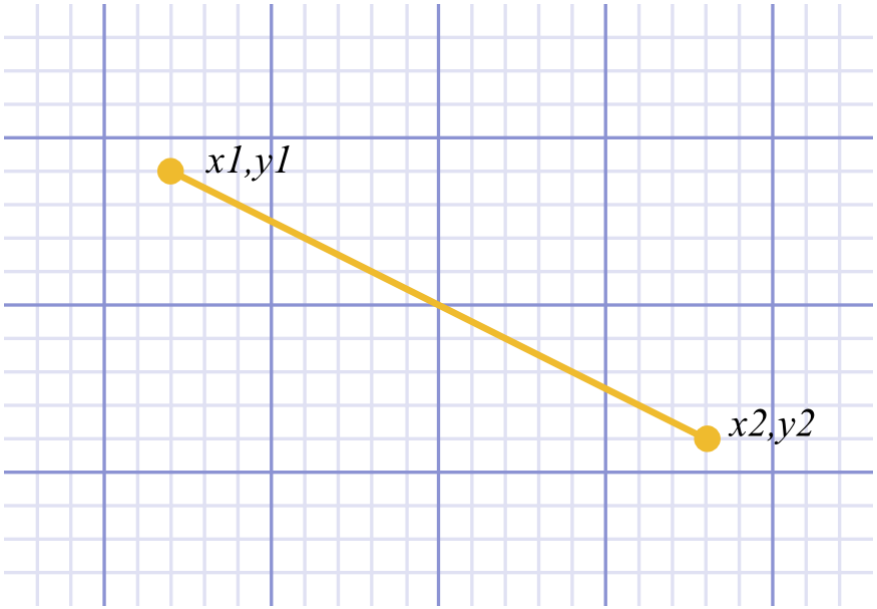
Hogyan rajzolunk szakaszt?

- Adott a két végpont.
- Hogyan tudjuk összekötni őket?



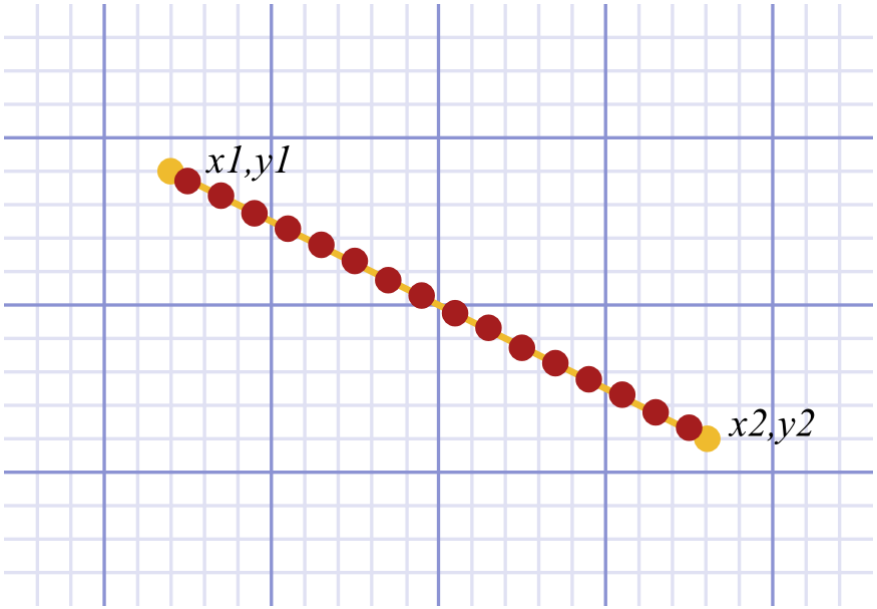
Hogyan rajzolunk szakaszt?

- Adott a két végpont.
- Hogyan tudjuk összekötni őket?
- Csak miniatűr téglalapjaink vannak (amiket pixelnek nevezünk).



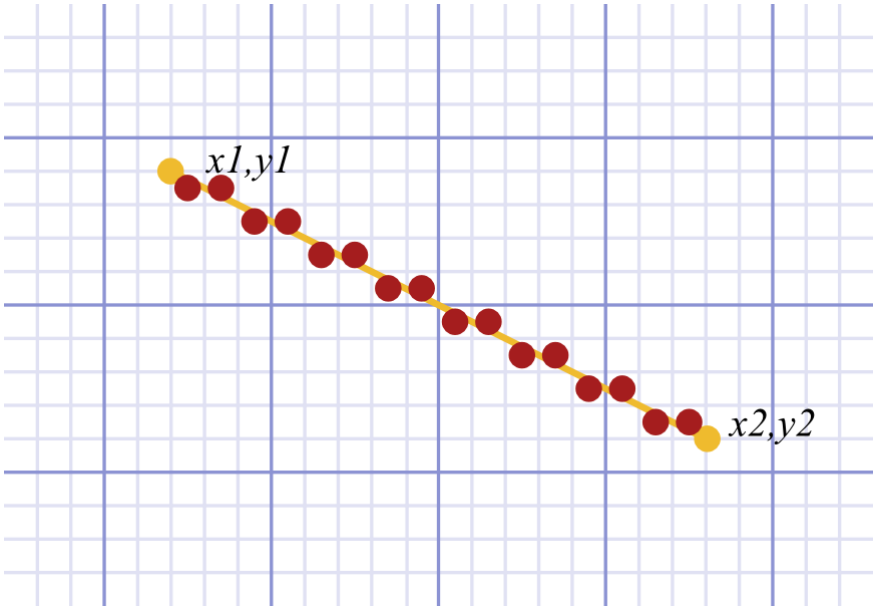
Hogyan rajzolunk szakaszt?

- Adott a két végpont.
- Hogyan tudjuk összekötni őket?
- Csak miniatűr téglalapjaink vannak (amiket pixelnek nevezünk).



Hogyan rajzolunk szakaszt?

- Adott a két végpont.
- Hogyan tudjuk összekötni őket?
- Csak miniatűr téglalapjaink vannak (amiket pixelnek nevezünk).



Szakasz megadása (sokadszor)

- Végpontok: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
- Tfh. nem függőleges: $x_1 \neq x_2$.
- Szakasz egyenlete:

$$y = mx + b, x \in [x_1, x_2]$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

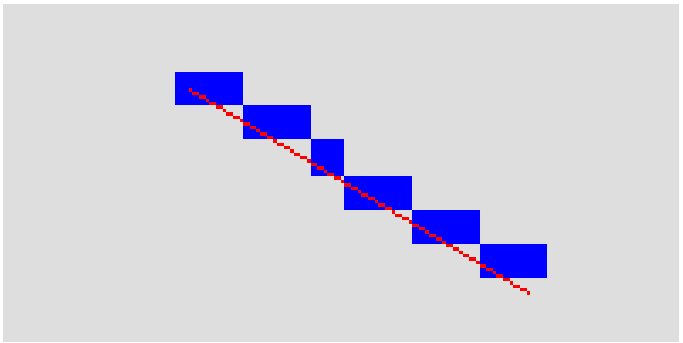
$$b = y_1 - mx_1$$

Naív algoritmus

```
def line1(x1,y1,x2,y2, draw):
    m = float(y2-y1)/(x2-x1)
    x = x1
    y = float(y1)
    while x<=x2:
        draw.point((x,y))
        x += 1
        y += m
```

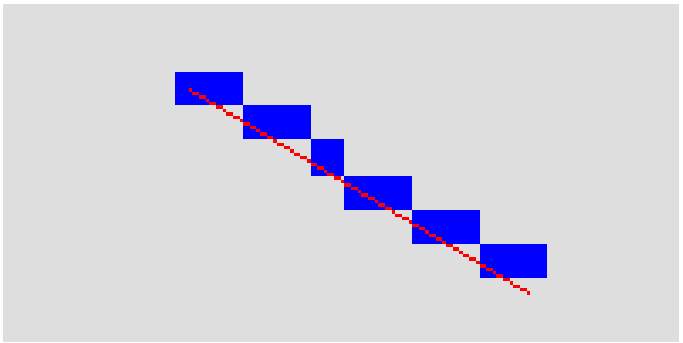
Naív algoritmus

- `m = float(y2-y1)/(x2-x1)`
  nem pontos



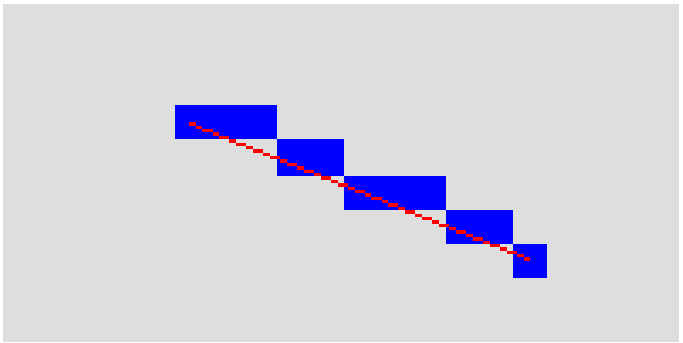
Naív algoritmus

- `m = float(y2-y1)/(x2-x1)` nem pontos
- `y += m` → a hiba gyűlik *y*-ban



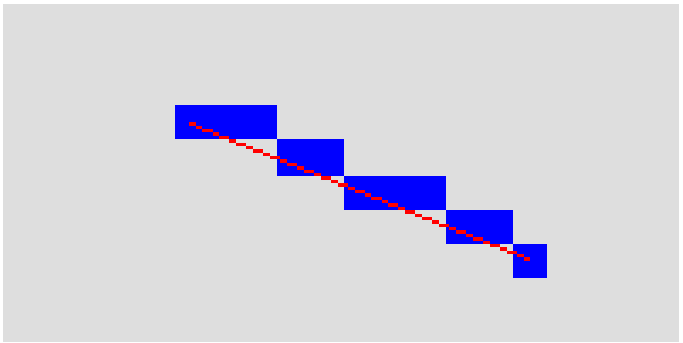
Naív algoritmus

- `m = float(y2-y1)/(x2-x1)` nem pontos
- `y += m` → a hiba gyűlik *y*-ban



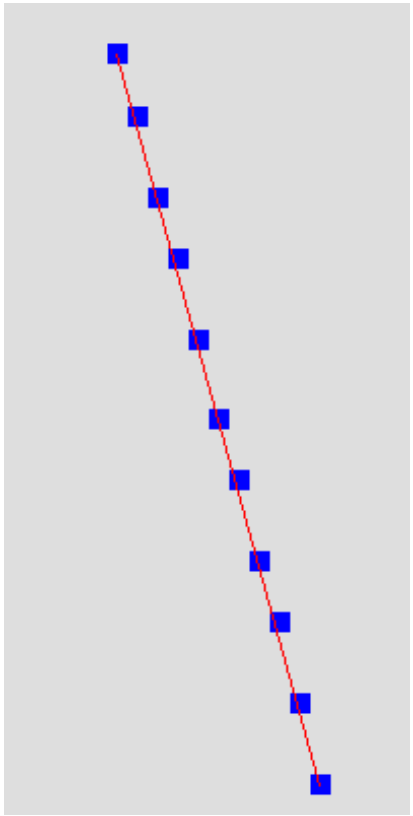
Naív algoritmus

- `m = float(y2-y1)/(x2-x1)` nem pontos
- `y += m` → a hiba gyűlik *y*-ban
- `draw.point((x,y))` → `int`-eket vár, lassú a konverzió



Naív algoritmus

- `m = float(y2-y1)/(x2-x1)` nem pontos
- `y += m` → a hiba gyűlik y-ban
- `draw.point((x,y))` → `int`-eket vár, lassú a konverzió
- csak $|m| < 1$-re működik helyesen



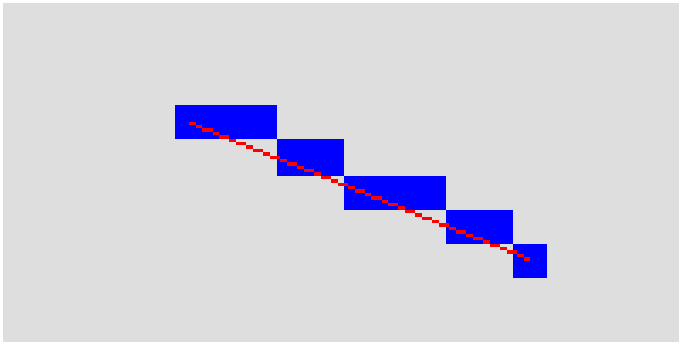
Javítsuk az algoritmust 1.

```
def line2(x1,y1,x2,y2, draw):
    m = float(y2-y1)/(x2-x1)
    x = x1
    y = y1
    e = 0.0
    while x<=x2:
        draw.point((x,y))
        x += 1
        e += m
        if e >= 0.5:
            y += 1
            e -= 1.0
```

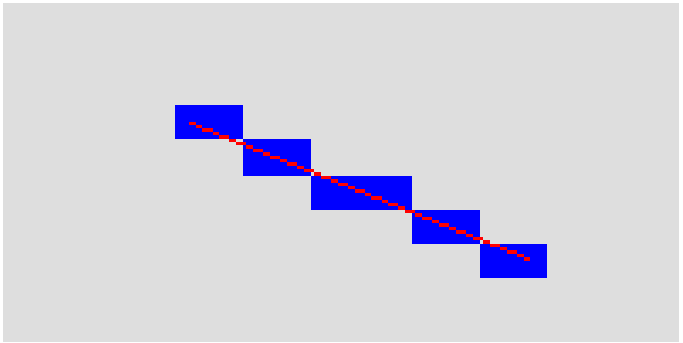
Javítsuk az algoritmust 1.

- Jó: Mindig ”eltalálja” a végpontokat
- Jó: Egyenletesebben lép az y irányban.
- Rossz: Még mindig használunk `float`-okat

Naív:



Javítás:



Javítsuk az algoritmust 2.

```
def line3(x1,y1,x2,y2, draw):
    x = x1
    y = y1
    e = -0.5←
    while x<=x2:
        draw.point((x,y))
        x += 1
        e += float(y2-y1)/(x2-x1)←
        if e >= 0.0:←
            y += 1
            e -= 1.0
```

Javítsuk az algoritmust 3.

```
def line4(x1,y1,x2,y2, draw):
    x = x1
    y = y1
    e = -0.5*(x2-x1)←
    while x<=x2:
        draw.point((x,y))
        x += 1
        e += y2-y1←
        if e >= 0.0:
            y += 1
            e -= (x2-x1)←
```

Javítsuk az algoritmust 4.

```
def line5(x1,y1,x2,y2, draw):
    x = x1
    y = y1
    e = -(x2-x1)←
    while x<=x2:
        draw.point((x,y))
        x += 1
        e += 2*(y2-y1)←
        if e >= 0:
            y += 1
            e -= 2*(x2-x1)←
```

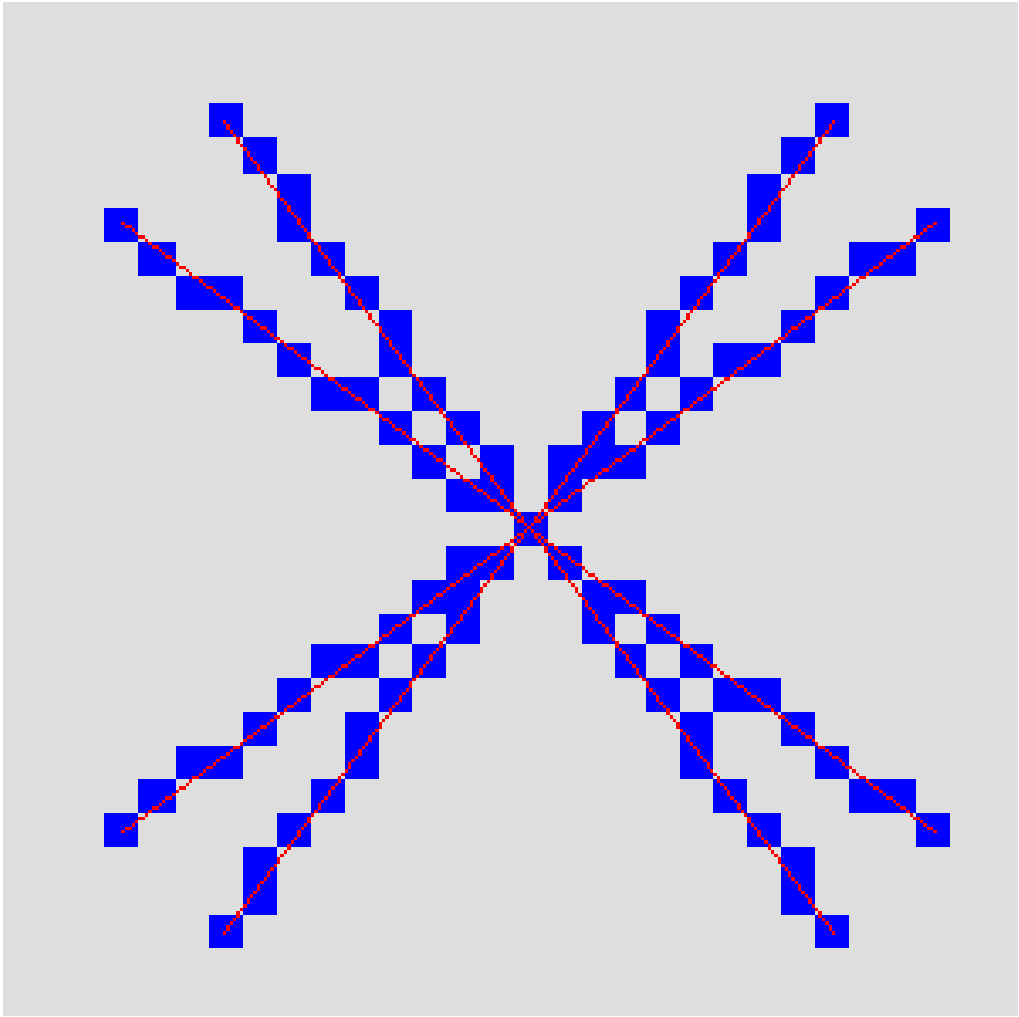
Javítsuk az algoritmust 4.

- Ez a *Bresenham* algoritmus (egyik speciális esete)
- Külön gyűjtjük a hibát `e`-ben
- Nem használunk `float`-okat
- Tetszőleges meredekségű szakaszokra általánosítható.

Bresenham algoritmus

- Nyolcadokra kéne felbontani a síkot, mindegyik külön eset.
- (Előzők végig: jobbra-le)
- El kell döntenünk, hogy $|x_2 - x_1|$ vagy $|y_2 - y_1|$ a nagyobb (merre meredekebb a szakasz).
- Ha $|y_2 - y_1|$ a nagyobb, cseréljük fel $x_i \leftrightarrow y_i$, és rajzolásnál is fordítva használjuk!
- Ha $x_1 > x_2$, akkor csere: $x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$.
- Az e hibatagot $|y_2 - y_1|$-nal növeljük minden lépésben
- y-nal $y_2 - y_1$ előjele szerint haladunk.

Bresenham algoritmus



Teljes *Bresenham* algoritmust 1.

```
def Bresenham(x1,y1,x2,y2, draw):
    steep = abs(y2-y1)>abs(x2-x1)
    if steep:
        x1, y1 = y1, x1
        x2, y2 = y2, x2
    if x1>x2:
        x1, x2 = x2, x1
        y1, y2 = y2, y1
    Dy = abs(y2-y1)
    if y1<y2:
        Sy = 1
    else:
        Sy = -1
```

Teljes *Bresenham* algoritmust 2.

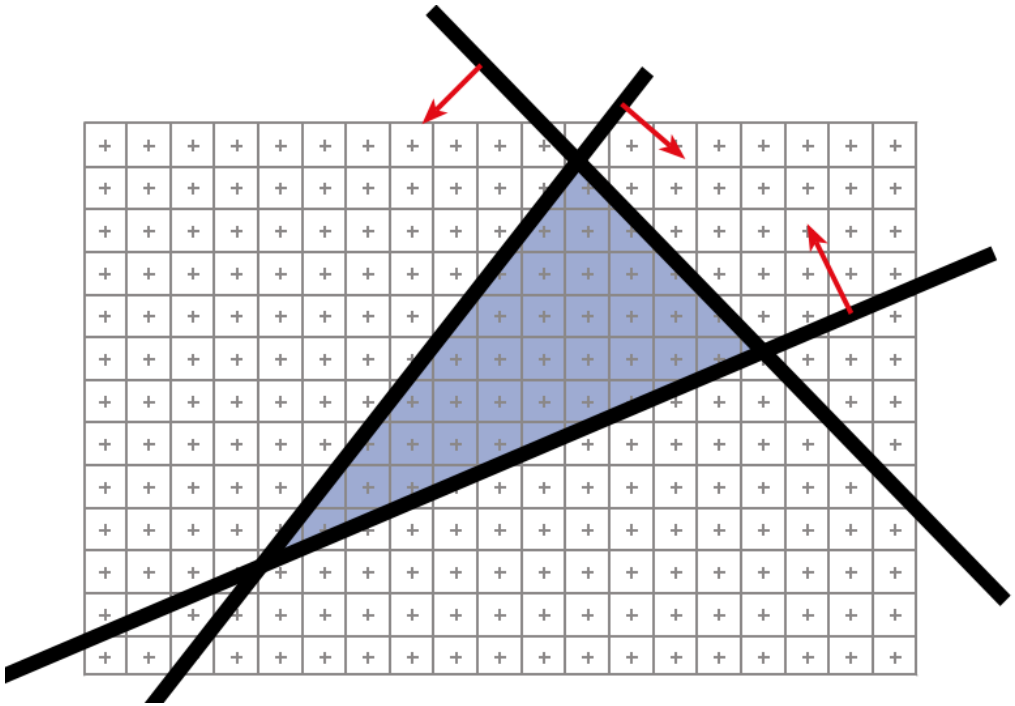
```
x = x1
y = y1
e = -(x2-x1)
while x<=x2:
    if steep:
        draw.point((y,x))
    else:
        draw.point((x,y))
    x += 1
    e += 2*Dy
    if e >= 0:
        y += Sy
        e -= 2*(x2-x1)
```

Tartalom

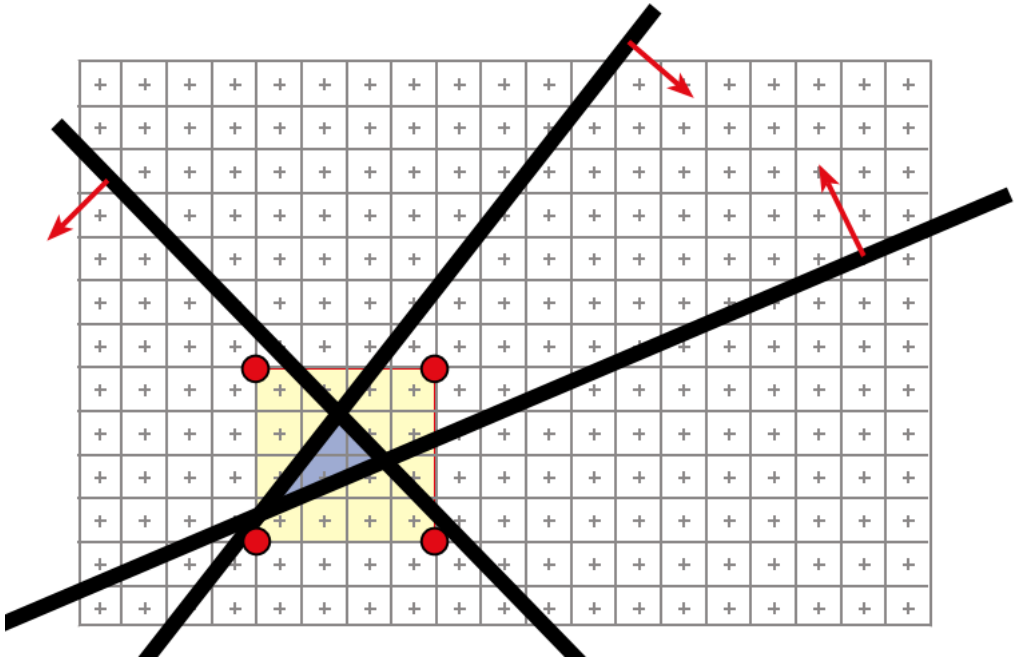
Háromszög raszterizáció

- A háromszög oldalait tudjuk vágni - most töltsük ki a belsejét!
- Ha egy meghatározott bejárási irányban adtuk meg az összes háromszög csúcsát, tudunk félsíkokat adni (tudjuk irányítani az éleket) $\rightarrow$ u.i. ha (t_x, t_y) az irányvektora az oldalnak, akkor $(-t_y, t_x)$ egy normális lesz
- Minden pixelre menjünk végig a képernyőn és nézzük meg, hogy a háromszög oldalai által meghatározott síkok jó oldalán van-e!

Háromszög raszterizáció



Háromszög raszterizáció - okosabban



Háromszög raszterizáció

- Lehetne még okosabban is csinálni, de: gyakorlatban ez a brute-force megközelítés nagyon jól alkalmazható!

Háromszög raszterizáció

- Nem egy rögzített értékkel akarunk kitölteni, a hanem a csúcsokban adott értékeket akarjuk interpolálni.
- Felhasználásai: szín (Gouraud-árnyalás), textúra koordináták, normálvektorok
- Legyen a felület egy pontja $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$, az α, β, γ baricentrikus koordinátákkal adott.
- Ekkor bármilyen más értéket is végig tudunk interpolálni ugyan így:

$$c = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$$

- Ez az úgy nevezett *Gouraud interpoláció* (nem véletlenül)

Háromszög kitöltés 1.

```
for all x:
  for all y:
    α,β,γ = barycentric(x,y)
    if α ∈ [0,1] and β ∈ [0,1] and γ ∈ [0,1]:
      c = αc_1 + βc_2 + γc_3
      draw.point((x,y),c)
```

Háromszög kitöltés 2.

- Gyorsítás: felesleges minden x, y-t vizsgálni, elég a háromszöget tartalmazó téglalapon végig menni.
- Inkrementálissá tétel:
  - Most még lassú, nem használjuk, ki hogy sorban megyünk x-en, y-on.
  - Milyenek is ezek az f-ek?
  - Mind $f(x, y) = Ax + By + C$ alakú.
  - Ekkor $f(x + 1, y) = f(x, y) + A$, ill.
  - $f(x, y + 1) = f(x, y) + B$
- Megvalósítás: *házi feladat*

Tartalom

Flood-fill – elárasztásos kitöltés

- Tetszőleges, már raszterizált poligon kitöltésére alkalmas.
- Bemenet: raszter kép + annak egy pontja
- Brute-force: a megadott pontból kiindulva rekurzívan haladunk:
  - Az aktuális pont színe megegyezik a kiindulási pont színével?
    - Nem: megállunk;
    - Igen: átszínezzük, és minden szomszédra újrakezdjük az algoritmust.

Flood-fill – szomszédságok

- Négy szomszéd: fent, lent, jobbra, balra
- Nyolc szomszéd: az előző négy + a sarkak
- Rekurzió nagyon durva: gyakorlatban ennél okosabb algoritmusok is vannak: $\rightarrow$ aktív éllista stb. (Haladó Grafika)