

Számítógépes Grafika

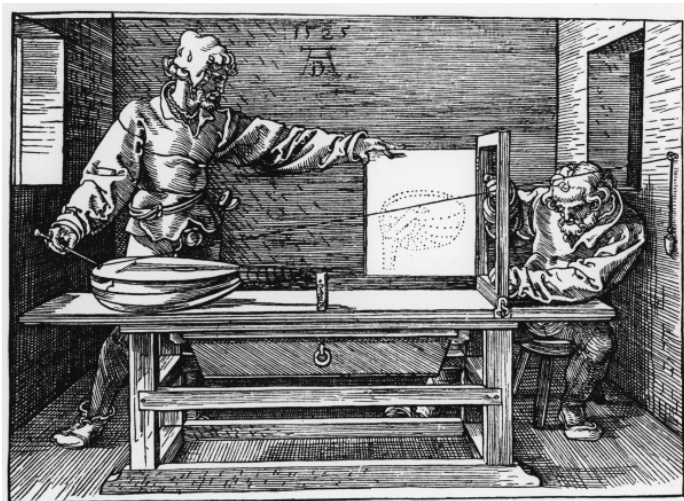
Hajder Levente
hajder@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

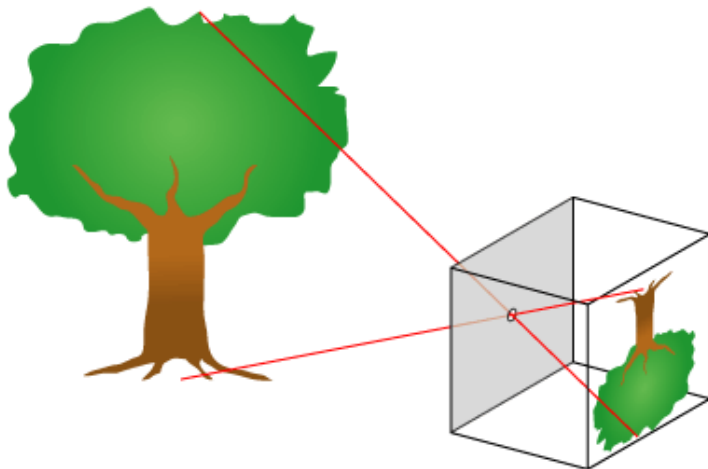
2017/2018. I. félév

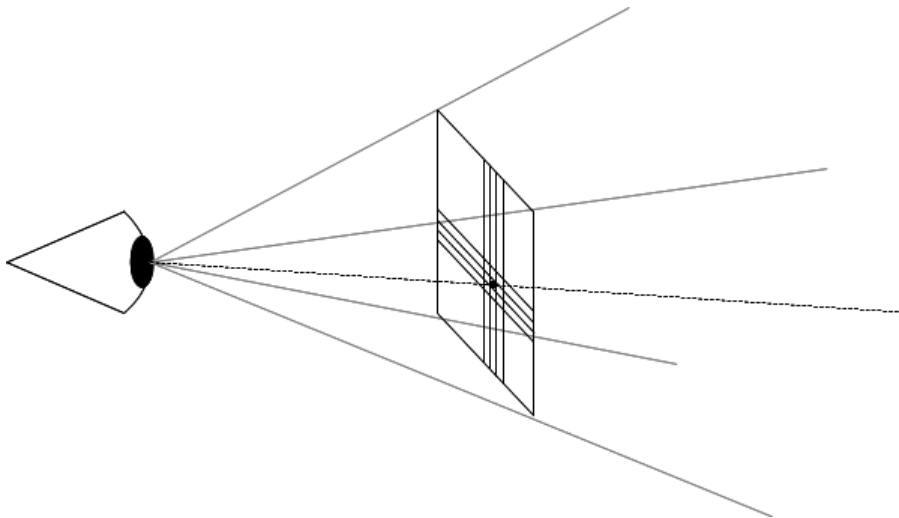
Tartalom

- ➊ Reycasting: motiváció
- ➋ Raycasting
- ➌ Sugarak indítása
- ➍ Metszések
 - Sugár és sík metszéspontja
 - Sugár és háromszög metszéspontja
 - Sugár és poligon metszéspontja
 - Sugár és gömb metszéspontja
 - Transzformált objektumok
- ➎ RayCasting versus RayTracing



Albrecht Dürer, 1525





Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? → Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljünk hozzá a pixelhez egy színt!

Raycasting

Minden pixelre:

Indítsunk egy sugarat a színtérbe

Minden objektumra a színtérben:

Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

A legközelebbi metszett objektum
színével színezzük ki a pixelt

Sugár

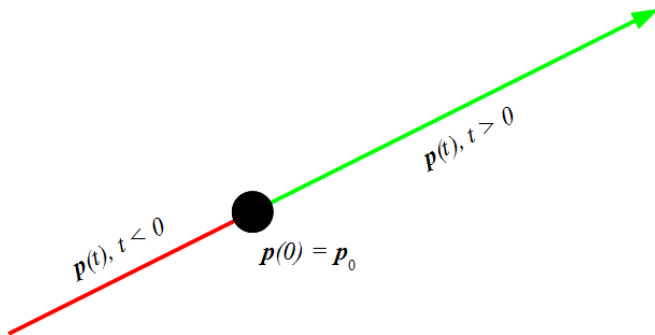
- A sugárnak van
 - egy \mathbf{p}_0 kiindulási pontja
 - és egy \mathbf{v} iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol $t > 0$ (félegyenes!).

- $t = 0?$, $t < 0?$ sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

Sugár

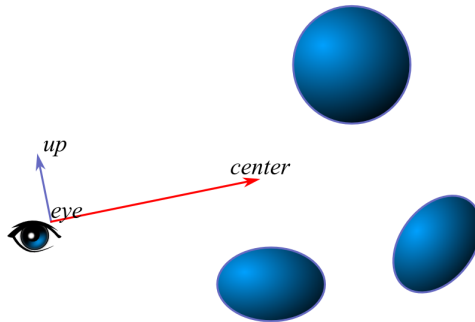


Kérdés

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?
- Hogyan metszük el a sugarat akármivel?

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
 - szempozíció (**eye**),
 - egy pont amire néz (**center**),
 - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
 - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).
 - (vetítővászon mérete. Most legyen adott:
$$2 \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2 \tan\left(\frac{fovy}{2}\right) \text{ nagyságú })$$
- Ezek segítségével fogjuk megadni az (i, j) pixel világbeli koordinátáit



Sugarak indítása

Keressük a kamera saját **u**, **v**, **w** (jobbkezes!) koordinátarendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

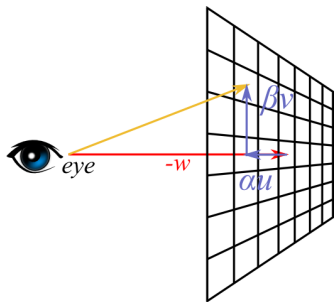
- Az X tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

- Az Y tengely merőleges **u**-ra és **w**-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

(i, j) pixel koordinátái



- Legyen \mathbf{p} az i, j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{eye} + (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fov_x}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fov_y}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{height/2}.$$

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen \mathbf{p}_0 a sugár kezdőpontja, \mathbf{v} pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

- Most a sugarak kezdőpontját az előbbieknek megfelelően számoljuk, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(i, j)$
- A sugár irányvektora pedig $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i, j) - \text{eye}}{|\mathbf{p}(i, j) - \text{eye}|}$

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a fent is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$

Metszések: parametrikus sugár-implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben \rightarrow tegyük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t -től függően a következő esetek állhatnak fenn:
 - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
 - Ha $t = 0$ a sugár a felületről indul
 - Ha $t < 0$, akkor a sugár "mögött" van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk $t > 0$ kell!)

Metszések: parametrikus sugár-parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [r_x(u, v), r_y(u, v), r_z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v) , hogy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

- Ez három ismeretlenes (t, u, v) , három egyenletes (x, y, z) koordinátánként egy) egyenletrendszer
- A t ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az (u, v) -re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (általában $(u, v) \in [0, 1]^2$ kell)!

Egyenes és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$
- A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(x_0 + tx) + B(y_0 + ty) + C(z_0 + tz) + D = 0$$

Egyenes és implicit sík metszéspontja

- Ezt t -re átrendezve adódik

$$t(Ax + By + Cz) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ax + By + Cz}$$

- Látható a sík a nézőpontunkból, ha $t > 0$

Egyenes és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen \mathbf{q}_0 a sík egy pontja, \mathbf{n} a normálvektora,
- Legyen \mathbf{p}_0 ez egyenes egy pontja, \mathbf{v} az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

- minden \mathbf{q} pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet

Egyenes és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$ -t a \mathbf{q} helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

- A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.
- Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

Egyenes és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy \mathbf{q} pontjával és \mathbf{i}, \mathbf{j} kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v -t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q} = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Egyenes és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_x \\ p_{0y} - q_y \\ p_{0z} - q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- Látjuk a síkot, ha $t > 0$ (most $u, v \in \mathbb{R}$ a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

Tartalom

- 1 Reycasting: motiváció
- 2 Raycasting
- 3 Sugarak indítása
- 4 Metszések**
 - Sugár és sík metszéspontja
 - Sugár és háromszög metszéspontja**
 - Sugár és poligon metszéspontja
 - Sugár és gömb metszéspontja
 - Transzformált objektumok
- 5 RayCasting versus RayTracing

Háromszög megadása

- Egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha **a**, **b**, **c** a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
 - egy pontja **a**, **b**, **c** bármelyike
 - normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

ahol \times a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor **n** egységnyi hosszúságú.

Háromszög és egyenes metszéspontja

Két lépés alapján meghatározhatjuk

- 1 Először számítsuk ki az egyenes és háromszög síkjának metszéspontját
 - Egyenes egy pontja ismert: pl. háromszög **a** csúcsa.
 - Egyenes két irányvektora megadható: pl. **b - a** és **c - a**
 - Metszéspontot jelöljük **p**-vel.
- 2 Majd nézzük meg, hogy a metszéspont a háromszögön belül van-e.

Pont a háromszögön vizsgálat: egyszerűbb módszer

- A háromszög három oldala és a normálvektor alapján két félsík adódik.
- Minden oldal esetén a háromszöget csak az egyik félsík tartalmazza.

$$\langle (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{n} \rangle \geq 0$$

$$\langle (\mathbf{p} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b}), \mathbf{n} \rangle \geq 0$$

$$\langle (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c}), \mathbf{n} \rangle \geq 0$$

- A három frappáns képlet viszonylag sok számítást tartalmaz.

Pont a háromszögön vizsgálat: gyorsabb módszer

- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a **p** pont háromszögön belüli baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- p Akkor, és csak akkor van a \triangle -ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögön vizsgálat: gyorsabb módszer

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen **p** (már ha létezik).
- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a **p** pont háromszögön belüli baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- p Akkor, és csak akkor van a \triangle -ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögön vizsgálat: gyorsabb módszer

- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

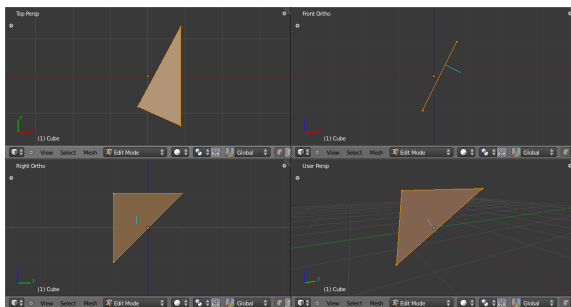
$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül (XY , XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! \rightarrow a háromszög és a sík normálisa leginkább "egyállású"
- A vetülethez egyszerűen elhagyjuk z , y vagy x egyenletét, megfelelően.

Pont a háromszögon vizsgálat: gyorsabb módszer

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.
(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



Pont a háromszögön vizsgálat: gyorsabb módszer

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

- Behelyettesítve $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ -t, és rendezve:

$$x = \lambda_1(a_x - c_x) + \lambda_2(b_x - c_x) + c_x$$

$$y = \lambda_1(a_y - c_y) + \lambda_2(b_y - c_y) + c_y$$

Pont a háromszögön vizsgálat: gyorsabb módszer

- Rendezve λ_1, λ_2 -re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Tartalom

- 1 Reycasting: motiváció
- 2 Raycasting
- 3 Sugarak indítása
- 4 **Metszések**
 - Sugár és sík metszéspontja
 - Sugár és háromszög metszéspontja
 - **Sugár és poligon metszéspontja**
 - Sugár és gömb metszéspontja
 - Transzformált objektumok
- 5 RayCasting versus RayTracing

Sugár metszése poligonnal

- Egyszerű, de lassú módszer: osszuk fel háromszögekre a poligont.
- Visszavezettük az előző problémára (sugár metszése háromszögekkel).

Sugár metszése poligonnal

- Gyors módszer adható, ha a poligonunk csúcsai egy síkban vannak.
- Ekkor a metszés két lépésben végezhető:
 - A sugarunkat metszük el a poligon síkjával.
 - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

Reycasting: motiváció

Raycasting

Sugarak indítása

Metszések

RayCasting versus RayTracing

Sugár és sík metszéspontja

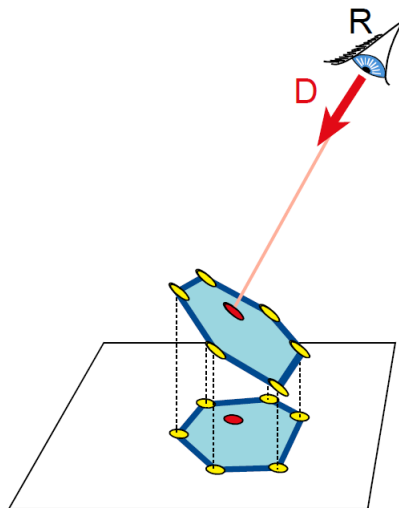
Sugár és háromszög metszéspontja

Sugár és poligon metszéspontja

Sugár és gömb metszéspontja

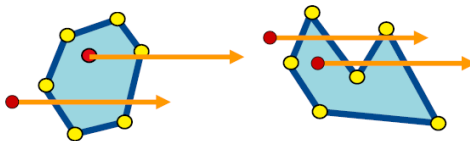
Transzformált objektumok

Sugár metszése poligonnal



Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- Konkáv és csillag alagú poligonra is működik



Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = (x_i, y_i)$, $\mathbf{d}_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, \mathbf{v} tetszőleges
- Legyen $\mathbf{v} = (1, 0)$!
- Így a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ egyenletet csak y koordinátára kell megoldani

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s -re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s -t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ -be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt (HF: kifejezni t -t DE: kell ez most nekünk?)
- Ha $s \notin [0, 1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- Ha $t \leq 0$: a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

Tartalom

- 1 Reycasting: motiváció
- 2 Raycasting
- 3 Sugarak indítása
- 4 Metszések**
 - Sugár és sík metszéspontja
 - Sugár és háromszög metszéspontja
 - Sugár és poligon metszéspontja
 - **Sugár és gömb metszéspontja**
 - Transzformált objektumok
- 5 RayCasting versus RayTracing

A gömb egyenlete

- Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- Ugyanez skalárszorozattal felírva:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

ahol $\mathbf{p} = (x, y, z)$.

Gömb és egyenes metszéspontja

- Legyen \mathbf{p}_0 ez egyenes egy pontja, \mathbf{v} az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Kifejtve:

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t -re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.

Tartalom

- 1 Reycasting: motiváció
- 2 Raycasting
- 3 Sugarak indítása
- 4 Metszések**
 - Sugár és sík metszéspontja
 - Sugár és háromszög metszéspontja
 - Sugár és poligon metszéspontja
 - Sugár és gömb metszéspontja
 - **Transzformált objektumok**
- 5 RayCasting versus RayTracing

Transzformált objektumok

- Legyen \mathbf{M} egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük \mathbf{r} sugár és az \mathbf{M} -mel transzformált objektum metszéspontját!
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? ...
- Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

Tétel

Az r sugár és az \mathbf{M} -mel transzformált objektum metszéspontja \equiv az \mathbf{M}^{-1} -zel transzformált \mathbf{r} sugár és az objektum metszéspontja.

- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, homogén transzformáció
- Sugár kezdőpontja: $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \rightarrow [p_x, p_y, p_z, 1]$
- Sugár iránya: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow [v_x, v_y, v_z, 0]$. Így nem hat rá az eltolás.
- Transzformált sugár $\mathbf{r}'(t) : \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

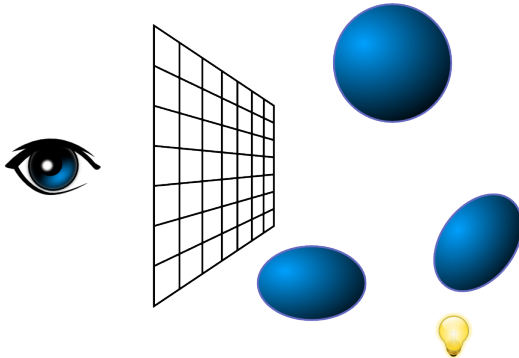
Metszésvizsgálat

- Metszésvizsgálat: használjuk $\mathbf{r}'(t)$ -t!
- Metszéspont: \mathbf{q} , akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!
- Normálvektorok: \mathbf{n} helyett $\mathbf{M}^{-T} \cdot \mathbf{n}$ (inverz-transzponált).

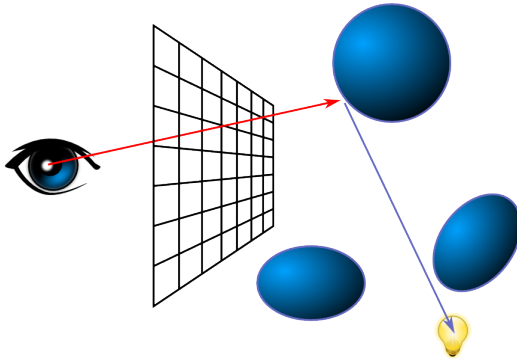
RayCasting versus RayTracing

- Raycasting : sugárvetés
- RayTracing : (rekurzív) sugárkövetés
- Sugárkövetés összetevői: felület pontjait meghatározza a saját színe megvilágítva a
 - fényforrásokkal és a
 - egyéb felületről érkező fénysugarakkal.
- "egyéb felületeket" két kitüntetett irányban nézzük meg
 - tökéletes tükröződés iránya
 - fénytörés (áttetszés esetén)
- Rekurzivitás: felületekről érkező sugarakat tetszőleges mélységben vizsgáljuk
 - Rekurió mélységének a futási idő korlátot ad.

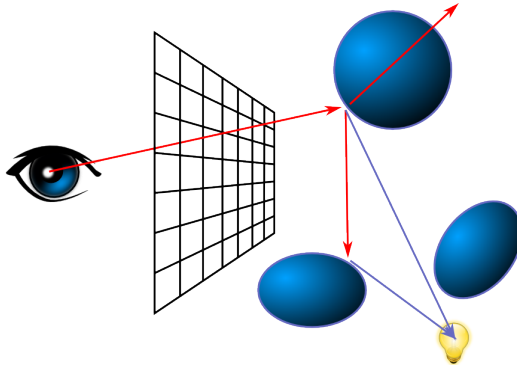
Rekurzív sugárkövetés



Rekurzív sugárkövetés



Rekurzív sugárkövetés



Rekurzív sugárkövetés

