Zárthelyi I

A zárthelyin számológép, valamint egy egy lapos kézzel írott jegyzet, valamint Φ táblázat használható. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

1. Feladat. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük a következő eseményeket. A: Mindkét kockával prímet dobtunk. B: A piros kockával párosat, a kékkel páratlant dobtunk. C: A két szám összege prím.

a) Mennyi a megadott események valószínűsége?

b) Függetlenek-e A és C, A és B, valamint B és C események?

2. Feladat. Erika két útvonalon szokott járni az egyetemre. Villamossal, vagy busszal. Tudjuk, hogy 0,15 valószínűséggel egyszer sem villamossal jön a héten, 0,18-val egyszer, 0,12-vel kétszer, 0,23-val háromszor, 0,25-vel négyszer és $0,07$ valószínűséggel ötször jön villamossal. Jelölje X, hogy Erika hányszor jött villamossal a héten.

Mennyi X várhatóértéke és szórása?

Tudjuk, hogy Erika reggelente akkor jön villamossal, ha késésben van. Ha háromnál többször van késésben egy héten, akkor $0,6$ valószínűséggel vasárnapra is marad tanulni valója, ha legfeljebb háromszor késik, akkor $0,3$ valószínűséggel kell vasárnap tanulnia. Mekkora a valószínűsége, hogy Erika a héten legfeljebb háromszor volt késésben, ha tudjuk, hogy vasárnap tanul a héten?

3. Feladat. Egy fagyizóban minden ember egymástól függetlenül $0,6$ valószínűséggel kér csokoládé fagylaltot. Jelölje Y, hogy egy nap, amikor 200 ember jár a fagyizóban hányan kérnek csokoládé fagylaltot.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan [illegible] ember kért fagylaltot?
120 csoki fagyi

b) Mennyi Y várható értéke?

c) Mennyi Y szórása?

4. Feladat. Törpfalván a testmagasság normális eloszlást mutat $60cm$ várhatóértékkel és $5cm$ szórással. Adjuk meg a következők értékét, ahol X egy törpfalvi törp magasságát jelöli: $P(X < 70)$, $P(65 < X < 70)$, $P(X < 45)$, $P(50 < X < 80)$, $E(X)$, $D^2(X)$

5. Feladat. Egy X eloszlás eloszlásfüggvénye: $F(t) = Ct^5$, ha $0 < t < 0{,}5$, különben 0.

Határozd meg C értékét, X sűrűségfüggvényét, (ábrázold is vázlatosan). Határozd meg a következők értékét: $P(X < 0{,}2)$, $P(-3 < X < 4)$, $E(X)$, $D(X)$.

A feladatok 10-10 pontot érnek, részpontokat lehet kapni. Ponthatárok: 0-14, 15-24, 25-32, 33-39, 40-50. A ponthatárok változhatnak, de csak lefelé.

Jó munkát!

2017. 11. 08. 6. gyakorlat (előző héten ZH)

$\boxed{ZH/1}$

	piros					
kék	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

$|\Omega| = 36$

$A = \{$ Mindkét kocka prím $\}$

A $\square$ $|A| = 9$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$B\{$ piros kocka páros, kék kocka páratlan $\}$

$B: \square$ $P(B) = \frac{1}{4}$

összegük ↓ $C = \{$ dobott számok összege prím $\}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$|C| = 15 \Rightarrow P(C) = \frac{15}{36}$

Def: A és B függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \overset{?}{\neq} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ nem függetlenek

$|A \cap B| = 2$

$|A \cap C| = 4$, $P(A \cap C) = \frac{4}{36} \overset{?}{\neq} P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{36}$ $\Rightarrow$ NEM függetlenek

$|B \cap C| = 7 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{7}{36} \overset{?}{\neq} P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{36}$ $\Rightarrow$ NEM függetlenek

$\boxed{ZH/2}$ X: hét ↦ hányszor megy villamossal

$x \le 3$: $P(X=0) = 0{,}15$, $P(X=1) = 0{,}18$, $P(X=2) = 0{,}12$, $P(X=3) = 0{,}23$

$x > 3$: $P(X=4) = 0{,}25$, $P(X=5) = 0{,}07$

$E(X) = 2{,}46$ (zh-n)

$D(X) = \sqrt{2{,}4284} = 1{,}559$ (zh-n)

b) ha $X > 3 \to 0{,}6$ vsz-el vas. is tanul : 0,68

$X \le 3 \to 0{,}3$ — " — : 0,32

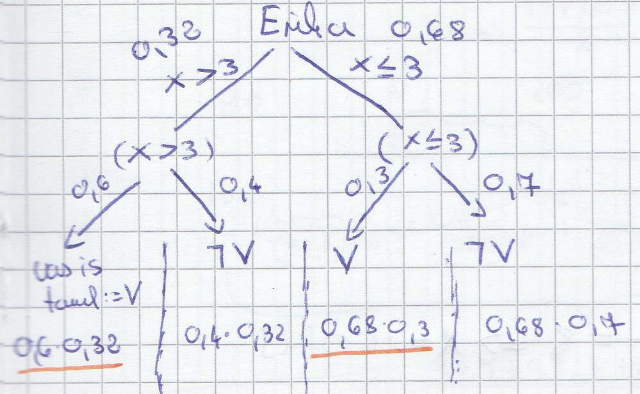
$P(A|B_1) = 0{,}6$

$P(A|B_2) = 0{,}3$

$B_1 \{x > 3\}$ $P(B_1) = 0{,}32$

$B_2 \{x \le 3\}$ $P(B_2) = 0{,}68$

$A := \{$ ... tanul vasárnap is $\}$



P(x ≤ 3 felt. hogy vas tanul) =

$$P(x \le 3 \mid A) \overset{def.}{=} \frac{P(\{x \le 3\} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}68 \cdot 0{,}3}{0{,}6 \cdot 0{,}32 + 0{,}68 \cdot 0{,}3}$$

$$D^2(x) \neq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = E(x^2)$$

2017. 11. 15. 7. gyakorlat

Indexek	Bázis idősorok súlyozása Laspeyres	Tárgyidőszak súlyozási Paasche	Fischer-féle
Árindex	$I_p^0 = \frac{\sum q_0 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0}$	$I_p^1 = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$	$I_p^F = \sqrt{I_p^0 I_p^1}$
Volumenindex	$I_q^0 = \frac{\sum q_1 \cdot p_0}{\sum q_0 \cdot p_0}$	$I_q^1 = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_1}$	$I_q^F = \sqrt{I_q^0 I_q^1}$

Értékindex: $I_v = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0}$

value

Viszonyszámok: $\frac{\text{valami}}{\text{valami más}}$

→ megoszlási: $\frac{\text{rész sokaság}}{\text{sokaság}}$ $\left[\frac{db}{db} = 1\right]$

→ dinamikus: ⇄ ugyanolyan típusú adatok más időpont [1]

→ intenzitási → különb. típusú adatok

4/a,

megoszlási: $\frac{\text{lányok száma}}{\text{össz}} = \frac{?}{25 \text{ fő}} = 0{,}4$

[1] nincs mértékegysége

? = 10 fő

b, intenzitási: $\frac{\text{fiúk száma}}{\text{lányok száma}} = 1{,}5$ fiú + lány = 50

X: fiúk száma

$\frac{X}{50 - X} = 1{,}5$ ✓

$\frac{30 \text{ fő}}{20 \text{ fő}} = 1{,}5$

$\Rightarrow X = 30$; $50 - X = 20$

2. feladat

BAJÁRI LÚCIA
VGRKH9

villamos $= x$
busz $= y$

P(egyszer sem villamossal) = 0,15 = $P(x=0)$

$P(x=1) = 0,18$
$P(x=2) = 0,12$ $\qquad E(x) = \sum x_i \cdot p_i$
$P(x=3) = 0,23$
$P(x=4) = 0,25$
$P(x=5) = 0,07$

$\underline{E(x)} = 1 \cdot 0,18 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,23 + 4 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,07 =$
$= 0,18 + 0,24 + 0,69 + 1 + 0,35 = \underline{\underline{2,46}}$

$D^2(x) = \sum x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2 = E(x^2) - (E(x))^2$

$E(x^2) = 0,18 + 4 \cdot 0,12 + 9 \cdot 0,23 + 16 \cdot 0,25 + 25 \cdot 0,07 =$
$= 0,18 + 0,48 + 2,07 + 4 + 1,75 = 8,48$

$\underline{D^2(x)} = 8,48 - (2,46)^2 = 8,48 - 6,0516 = 2.4284$

$\Rightarrow \underline{D(x)} = \sqrt{2,4284} = \underline{\underline{1,559}}$

Bayes:
~~villam~~ x-el jön : $\boxed{\text{késésben van} = k}$

$P(k > 3) \neq 0,6$ $\qquad P(k \leq 3 \mid \text{vasárnap tanul}) = ?$
$P(k \leq 3) \neq 0,3$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2) \cdot P(A_2)}{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2)}$$

$A := \{\text{késésben van}\}$
$B := \{\text{vasárnap tanul}\}$

	~~[illegible]~~ P(késés)	~~[illegible]~~ vasárnap tanul		
~~[illegible]~~	$k > 3$	0,6	$A_1 := k > 3$	$P(B \mid A_1) = 0,6$
	$k \leq 3$	0,3	$A_2 := k \leq 3$	$P(B \mid A_2) = 0,3$

mo:
$$P(A_2 \mid B) = \frac{0,3 \cdot P(A_2)}{0,6 \cdot P(A_1) + 0,3 \cdot P(A_2)}$$

$P(A_1) = ?$
$P(A_2) = ?$

9/10

3. feladat

BAJÁRI LÚCIA
UGRKH9

P(kér csoki fagyit) = 0,6

Y: $\underbrace{\text{ut}}_{\substack{200 \\ \text{ember}}}$ → hányan kérnek csoki fagyit

a) P(pontosan 120 ember kért fagyit) = ?

$Y \sim Bin(\overset{n}{200}; \overset{p}{0,6})$ $P(x=120)=?$

$P(x=120) = \binom{200}{120} \cdot (0,6)^{120} \cdot (0,4)^{80} = \binom{200}{120} \cdot 2,39 \cdot 10^{-27} \cdot 1,46 \cdot 10^{-32}$

b) Y várható értéke

$E(Y) = n \cdot p \Rightarrow E(Y) = 200 \cdot 0,6 = 120$

c) Y szórása

$D^2(Y) = n \cdot p(1-p) \Rightarrow D^2(Y) = 200 \cdot 0,6(\overset{0,4}{1-0,6}) = 48$

$\Rightarrow D(Y) = \sqrt{48} = 6,93$

10/10

4. feladat

BAJÁRI LÚCIA
VGRKH9

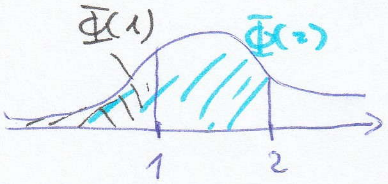
$x \sim N(\underset{m}{60}, \underset{\sigma^2}{\overset{(5^2)}{25}}) \Rightarrow \frac{x-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\sigma = 5$

$N(0,1)$ = standard normális

1, $P(x<70) = P\left(\frac{x-60}{5} < \frac{70-60}{5}\right) = P\left(\underbrace{\frac{x-60}{5}}_{\sim N(0,1)} < 2\right) = \Phi(2) = \underline{\underline{0{,}9772}}$

2, $P(65<x<70) = P\left(\frac{65-60}{5} < \frac{x-60}{5} < \frac{70-60}{5}\right) = P\left(1 < \underbrace{\frac{x-60}{5}}_{\sim N(0,1)} < 2\right) =$



$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = \underline{\underline{0.1359}}$

3, $P(x<45) = P\left(\frac{x-60}{5} < \frac{45-60}{5}\right) = P\left(\underbrace{\frac{x-60}{5}}_{\sim N(0,1)} < -3\right) = \Phi(-3) =$

$1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}9987 = \underline{\underline{0{,}0013}}$

4, $P(50<x<80) = P\left(\underbrace{\frac{50-60}{5}}_{-2} < \underbrace{\frac{x-60}{5}}_{\sim N(0,1)} < \underbrace{\frac{80-60}{5}}_{4}\right) = P\left(-2 < \underbrace{\frac{x-60}{5}}_{\sim N(0,1)} < 4\right) =$

$= \Phi(4) - \Phi(-2) = \Phi(4) - (1-\Phi(2)) = \Phi(4) - 1 + \overset{0{,}9772}{\Phi(2)} = \underline{\underline{\Phi(4) - 0{,}0228}}$

$E(x) = ?$ $\quad E(x) = \underline{\underline{60}}$

$D^2(x) = ?$ $\quad D(x) = 5 \Rightarrow D^2(x) = \underline{\underline{25}}$

10/10

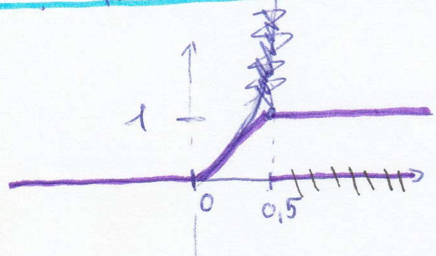
5. feladat

BAJÁRI LÚCIA
VGRKH9

E41

$$F_x(t) = \begin{cases} Ct^5 & 0 < t < 0{,}5 \\ 0 & \\ 1 & t > 0{,}5 \end{cases}$$

$C = ?$ $f_x(t) = ?$ $P(x < 0{,}2)$, $P(-3 < x < 4)$, $E(x)$, $D(x)$



Kell: $F(0{,}5) = 1$
c-hez:

$$F_x'(t) = f_x(t) \Rightarrow f_x(t) = \begin{cases} C\cdot(t^5)' = C\cdot 5\cdot t^4 & 0 < t < 0{,}5 \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t\cdot 0\,dt}_{0} + \int_0^{0{,}5} t\cdot C\cdot 5\cdot t^4\,dt + \underbrace{\int_{0{,}5}^{+\infty} 0\,dt}_{0} =$$

$$5C\int_0^{0{,}5} t^5\,dt = 5C\cdot\left[\frac{t^6}{6}\right]_{t=0}^{0{,}5} = 5C\left(\frac{0{,}5^6}{6} - \frac{0^6}{6}\right) = 5C\cdot\frac{0{,}5^6}{6}$$

ugyanúgy mint $E(t)$-nél, elég csak ezen az intervallumon számolni, mert a többi 0 jön ki

$$D^2(x) \neq \int_{-\infty}^{\infty} t^2\cdot f_x(t)\,dt = \int_0^{0{,}5} t^2\cdot c\cdot 5\cdot t^4\,dt = 5c\int_0^{0{,}5} t^6\,dt = 5c\left[\frac{t^7}{7}\right]_{t=0}^{0{,}5} =$$

$E(x^2)$

$$5c\cdot\left[\frac{0{,}5^7}{7} - 0\right] = 5c\cdot\frac{(0{,}5)^7}{7} \neq D(t) = \sqrt{\frac{5c\cdot(0{,}5)^7}{7}}$$

$E(x^2) =$

$$P(x < 0{,}2) = \int_{-\infty}^{0{,}2} f_x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{0} + \int_0^{0{,}2} 5ct^4\,dt = 5c\int_0^{0{,}2} t^4\,dt = 5c\left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{0{,}2} =$$

$$5c\cdot\frac{(0{,}2)^5}{5} = c\cdot(0{,}2)^5$$

$$P(-3 < x < 4) = \int_{-3}^{4} f_x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-3}^{0} 0\,dt}_{0} + \int_0^{0{,}5} c5t^4\,dt + \underbrace{\int_{0{,}5}^{4} 0\,dt}_{0} = 5c\int_0^{0{,}5} t^4 = 5c\left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{0{,}5} =$$

$$5c\cdot\frac{(0{,}5)^5}{5} = c\cdot(0{,}5)^5$$

$F(0{,}5) = 1$ (kell) $\quad c\cdot(0{,}5)^5 = 1 \Rightarrow c\cdot 0{,}03125 = 1$

$\Rightarrow c = 32$

10/10

c meghatározása $f_x(t)$-ből: $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,dt \underset{\text{kell}}{=} 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{0,5} 5c\cdot t^4\,dt}_{c\cdot(0,5)^5} + \int_{0,5}^{\infty} 0\,dt \underset{\text{kell}}{=} 1$$

számolás: előző lapon

$$\Rightarrow\ c\cdot 0,03125 \underset{\text{kell}}{=} 1 \iff \boxed{c = 32}$$

F-ből:

$P(X<0,2) = F(0,2) = c\cdot(0,2)^5 = 32\cdot(0,2)^5 = 0.01024$