Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat 1. Minta ZH, 2018.10.08.

1. 50 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?
2. Egy dobozban 10 fehér és 5 fekete golyó van. 4 golyót veszünk ki. Mekkora annak a valószínűsége, hogy kettő közülük fehér, ha (a) visszatevéssel (b) visszatévés nélkül húztunk?
3. Egy 500 oldalas könyvben 50 sajtóhiba van. Az egy oldalon található hibák számát Poisson eloszlásúnak feltételezve mekkora annak a valószínűsége, hogy nincs négynél több hiba egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon?
4. Egy adott populációban az emberek testmagassága egy normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 175, szórása 15. Mekkora valószínűséggel esik egy ember testmagassága a [150,170] intervallumba?
5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja. Határozzuk meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét és kovarianciájukat!

Y\X	0	1	Y peremeloszlása
1	3/12	2/12	
2	6/12	1/12	
X peremeloszlása			

Megoldás:

1. Legyen A: 10 dobásból 10 fej; B_1: jó érmével dobtunk; B_2: hamis érmével dobtunk.

$$P(B_1) = \frac{49}{50};\ P(A|B_1) = \frac{1}{2^{10}} P(B_2) = \frac{1}{50};\ P(A|B2) = 1$$

Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1\frac{1}{50}}{\frac{1}{1024}\frac{49}{50}1\frac{1}{50}}$$

2. $N = 15$ (golyók száma), $n = 4$ (mintaméret), $s = 10$ (a dobozban lévő fehér golyók száma), x: a mintában lévő fehér golyók száma.
a) visszatevéssel:
Binomiális eloszlást feltételezve

$$p = \frac{s}{N} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(a dobozban lévő fehér golyók aránya)

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(x = 2) = \binom{4}{2} (\frac{2}{3})^2 (1 - \frac{2}{3})^{4-2}$$

b) visszatevés nélküli húzás:
Hipergeometrikus eloszlást feltételezve

$$P(x = k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{15-10}{4-2}}{\binom{15}{4}}$$

3. Legyen X az egy lapon megjelenő sajtóhibák száma. Az X Poisson eloszlású, $\lambda = 50/500 = 0.1$ paraméterrel.

$$P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{0.1^k}{k!} e^{-0.1} \approx 0.999$$

4. Legyen X egy egyber testmagassága. Ekkor $X \sim N(175, 15^2)$

$$P(150 < X < 170) = \Phi(\frac{170-175}{15}) - \Phi(\frac{150-175}{15}) = \Phi(-\frac{1}{3}) - \Phi(-\frac{5}{3}) = (1-\Phi(\frac{1}{3})) - (1-\Phi(\frac{5}{3})) = \Phi(\frac{5}{3}) - \Phi(\frac{1}{3}) =$$
$$= 0.3694413 - 0.04779035 \approx 0.3217$$

5.

Y\X	0	1	Y peremeloszlása
1	3/12	2/12	5/12
2	6/12	1/12	7/12
X peremeloszlása	9/12	3/12	1

$$EX = 0 \cdot \frac{9}{12} + 1 \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$
$$EX^2 = 0^2 \cdot \frac{9}{12} + 1^2 \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$
$$D^2X = EX^2 - E^2X = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$
$$EY = 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{19}{12}$$
$$EY^2 = 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 2^2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{33}{12}$$
$$D^2Y = EY^2 - E^2Y = \frac{33}{12} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{35}{144}$$

YX	0	1
1	0	1
2	0	2

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])\right] \\ &= \mathrm{E}\left[XY - X\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[X]\,Y + \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]\right] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y].\end{aligned}$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot \frac{3}{12} + 1 \cdot \frac{2}{12} + 0 \cdot \frac{6}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{12}$$
$$cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \cdot \frac{19}{12} = -\frac{9}{144}$$