Lineáris algebra (A, B, C)
2. előadás

Az előző előadásban említettem, hogy szó lesz a különböző matematikai jelekről, és arról, hogyan kell helyesen kiolvasni egy tételt:

$\Leftarrow, \Rightarrow$: Implikáció, paraszti nyelven „Akkor”. A jelentés egyik oldalából következik a másik.
Pl.: Egy síkidom négyzet. $\Rightarrow$ Ez a síkidom négyszög.
*Minden négyzet négyszög, de nem minden négyszög négyzet.*

$\Leftrightarrow$: Ekvivalencia, gyakorlatilag a logikai kijelentések egyenlősége.
Pl.: $a \in \mathbb{Z}$ páros $\Leftrightarrow$ $a$ osztható 2-vel.
*Minden páros szám osztható 2vel, és minden 2vel osztható szám páros.*

És most következzen az első komolyabb tételünk:

TÉTEL: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ B $V(\leqq \mathbb{R}^n)$-ben $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}:$ $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k$.

*$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ legyen bázis $\mathbb{R}^n$ egy alterében, melynek neve legyen $V$. Vegyünk még egy vektort $V$-ből, mely legyen $\boldsymbol{a}$. Ekkor egyértelműen létezik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ valós számok melyekkel elő lehet állítani $\boldsymbol{a}$ vektort ebből a bázisból.*

Bizonyítás: Itt két dolgot kell belátni: a létezés, és az egyértelműség. Ebből az első adódik abból hogy, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis. Az egyértelműség egy kis trükkel belátható: legyen

$$\mathbf{a} = \alpha_1'\mathbf{b}_1 + \alpha_2'\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k'\mathbf{b}_k,$$
$$\mathbf{a} = \alpha_1''\mathbf{b}_1 + \alpha_2''\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k''\mathbf{b}_k.$$

Ha sikerülne belátni hogy rendre minden egy vesszős tag egyenlő a két vesszős tagokkal, akkor a tételünk be is lene bizonyítva. Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$\mathbf{0} = (\alpha_1' - \alpha_1'')\mathbf{b}_1 + (\alpha_2' - \alpha_2'')\mathbf{b}_2 + \ldots + (\alpha_k' - \alpha_2'')\mathbf{b}_k$$

Mivel $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis, így L is, és egy L vektorrendszer csak triviálisantudja előállítani $\mathbf{0}$-t, így minden zárójeles tagnak egyenlőnek kell lennie 0-val:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha_1' - \alpha_1'') = 0 & \Rightarrow & \alpha_1' = \alpha_1'' \\ (\alpha_2' - \alpha_2'') = 0 & \Rightarrow & \alpha_2' = \alpha_2'' \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_k' - \alpha_k'') = 0 & \Rightarrow & \alpha_k' = \alpha_k'' \end{array}$$

Ezzel a tételt bebizonyítotuk. ■

A fenti bizonyítás a hivatalos jegyzetben 3 darab sor – itt a cél az hogy elsajátítsuk a tétel helyes kiolvasásának készségét, és megértsük a tételek bizonyításának gondolatmenetét. Vizsgáljuk meg ennek a tételnek a megfordítását:

TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k \in V$ olyan, hogy $\forall \mathbf{a} \in V\ \exists!\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in$ $\in \mathbb{R}: \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis $V$-ben.

*Legyen $V$ $\mathbb{R}^n$ egy altere, és legyen $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ ezen altérnek elemei. Ha minden $V$-béli vektorra teljesül, hogy $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ egyértelműen csak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ valós számokkal tudja előállítani lineáris kombinációjával, akkor $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ bázis.*

Bizonyítás: Ismét 2 dolgot kell belátnunk: Az egyik az hogy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ mindent előállít lineáris kombinációjávadl $V$-ben, és hogy L is. Az előállítás következik a tétel feltételéből, L pedig abból, hogyha minden vektort egyértelműen állít elő, akkor ez $\mathbf{0}$-ra is teljesül. Ezzel bebizonyítottuk a tételt. ■