Sezione d'urto Compton

Andrea Morandi

January 2025

1 Sezione d'urto

La sezione d'urto si definisce come:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{w}{\Phi} N_{bersagli} N_{stati} \tag{1}$$

dove:

- w rappresenta la probabilità di transizione per unità di tempo fra uno stato iniziale ed uno stato finale:

$$w = \frac{|S_{fi}|^2}{t} \tag{2}$$

dove t è il tempo e S_{fi} è il valore d'aspettazione della matrice di scattering, S, fra uno stato iniziale, i, e uno finale, f.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_n \cdot \\ \cdot \mathbf{T}\Bigg(H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) \Bigg) \tag{3}$$

dove $\mathbf{T}$ rappresenta il prodotto ordinato temporale e H rappresenta l'hamiltoniana d'interazione del sistema.

Si può quindi scrivere

$$w = (2\pi)^4 V \cdot \delta^4 \left(\sum_i p_i - \sum_f p_f \right) \cdot \prod_i \left(\frac{m_i}{E_i V} \right) \cdot \prod_f \left(\frac{m_f}{E_f V} \right) \cdot |\mathcal{M}|^2 \tag{4}$$

dove V rappresenta il volume e $\mathcal{M}$ è l'elemento di matrice di Feynman.

- Φ rappresenta il flusso, ovvero il numero di particelle per unità di tempo e superficie. Nel caso di una particella in moto lungo x, si può scrivere:

$$\Phi = \frac{1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t} = \frac{v_{rel}}{V} \tag{5}$$

  dove v_{rel} rappresenta il modulo della velocità relativa fra il bersaglio e la particella.

- $N_{bersagli}$ rappresenta il numero di bersagli di scattering e possiamo considerarlo uguale a 1.

- N_{stati} rappresenta lo spazio delle fasi.

$$N_{stati} = \prod \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3} \tag{6}$$

Riassumendo tutti i termini si può scrivere:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4}{v_{rel}} \cdot \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) \cdot \prod_i \left(\frac{m_i}{E_i}\right) \cdot \prod_f \left(\frac{m_f}{E_f}\right) \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3} \tag{7}$$

Considerando uno scattering del tipo:

$$a + b \to 1 + 2 + ... + f$$

si può riscrivere la sezione d'urto come:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4E_a E_b v_{rel}} \cdot \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right) \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \prod_j (2m_j) \cdot \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3 (2E_f)} \tag{8}$$

dove la somma su j indica una somma su tutti gli stati finali e gli stati a e b.

1.1 Invarianza della sezione d'urto sotto trasformazione di Lorentz

La formula 8 non risulta covariante a vista, ci sono tre termini che bisogna studiare:

- $\delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)$: iniziamo studiando la delta di Dirac nel 4-spazio di Minkowski.

  Ricordiamo che per la delta di Dirac vale la seguente proprietà:

$$\delta^4(f(x)) = \delta^4(x)\frac{1}{|J|} \tag{9}$$

dove $|J|$ è il determinante del jacobiano della trasformazione $f(x) \to x$.

Nel caso in esame $f(x) = x'$, grazie alla relatività speciale sappiamo come trasforma un 4-vettore:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{10}$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \tag{11}$$

sapendo infine che per le trasformazioni di Lorentz vale la relazione:

$$\det\{\Lambda\} = \pm 1 \tag{12}$$

si può osservare come la delta di Dirac sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz.

- $\frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2E_f)}$: per dimostrare l'invarianza di questo termine sotto trasformazione di Lorentz partiamo riscrivendo il termine nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2E)} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 p \, \delta\big(p_{\mu} p^{\mu} - m^2\big) \tag{13}$$

Dimostriamo questa uguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 p \, \delta\big(p_{\mu} p^{\mu} - m^2\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 p \, \delta\big(p_{\mu} p^{\mu} - m^2\big)\theta(p_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 p \, \delta\big(p_0^2 - E^2\big)\theta(p_0) \end{aligned} \tag{14}$$

modificando l'argomento della delta di Dirac secondo la seguente relazione

$$\delta(p_0^2) = \frac{1}{2p_0} \delta(p_0) \tag{15}$$

si può togliere l'integrale in p_0, trovando:

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 p \, \delta\big(p_{\mu} p^{\mu} - m^2\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{2E} \tag{16}$$

Per dimostrare l'invarianza di Lorentz del termine ripartiamo dall'equazione 14. In questa equazione si può osservare come l'argomento della delta di Dirac sia uno scalare, e quindi un invariante sotto trasformazione di Dirac, mentre la theta di Heaviside è invariante per trasformazioni di Lorentz ortocrone dove non cambia il segno della quarta componente dei quadrivettori. Il termine $\mathrm{d}p_0\mathrm{d}p^3 = \mathrm{d}p^4$ è invariante poichè, l'elemento di volume trasforma nel seguente modo:

$$\mathrm{d}^4p' = |\Lambda|\mathrm{d}^4p \tag{17}$$

Poichè vale nuovamente la proprietà 21, questo termine è invariante.

Abbiamo quindi dimostrato che il termine $\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2E_f)}$ è invariante sotto trasformazione di Lorentz.

- $E_aE_bv_{rel}$: per studiare questo termine si parte dall'espressione della velocità relativa:

$$\vec{v}_{rel} = \frac{\vec{p}_a}{E_a} - \frac{\vec{p}_b}{E_b} \tag{18}$$

$$v_{rel} = \frac{1}{E_aE_b}\sqrt{E_b^2p_a^2 + E_a^2p_b^2 - 2E_aE_b\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b}$$

Analizziamo l'argomento della radice:

$$\begin{aligned} E_b^2p_a^2 + E_a^2p_b^2 - 2E_aE_b\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b &= \left(p_b^2 + m_b^2\right)p_a^2 + E_a^2\left(E_b^2 - m_b^2\right) - 2E_aE_b\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b \\ &= E_a^2E_b^2 + p_a^2p_b^2 - m_b^2\left(E_a^2 - p_a^2\right) - 2E_aE_b\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b \\ &= E_a^2E_b^2 + p_a^2p_b^2 - m_a^2m_b^2 - 2E_aE_b\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b \\ &= (p_a\cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2 \end{aligned}$$

Riassumendo si può scrivere:

$$v_{rel} = \frac{1}{E_aE_b}\sqrt{(p_a\cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2} \tag{19}$$

$$E_aE_bv_{rel} = \sqrt{(p_a\cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2}$$

Quest'ultima espressione è invariante sotto trasformazione di Lorentz in quanto sono presenti solo quantità scalari.

Riassumendo quanto riportato si può scrivere l'espressione della sezione d'urto perché sia covariante a vista.

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4\prod_j(2m_j)}{4\sqrt{(p_a\cdot p_b)^2 - m_a^2m_b^2}}\cdot\delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)\cdot|\mathcal{M}|^2\cdot\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3(2E_f)} \tag{20}$$

2 Scattering Compton

Lo scattering Compton è un processo al secondo ordine nella teoria delle perturbazioni, con elemento di matrice di scattering:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4y \; :\bar{\psi}\not{A}\psi :\Big|_x :\bar{\psi}\not{A}\psi :\Big|_y +$$

$$+\frac{(ie)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4y \; :\bar{\psi}\not{A}\psi :\Big|_x :\bar{\psi}\not{A}\psi :\Big|_y \tag{21}$$

Questi due contributi coincidono con i seguenti diagrammi di Feynman:

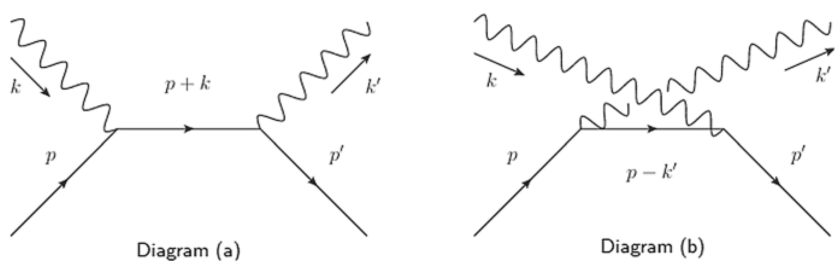

Figure 1: Diagrammi di Feynman per lo scattering Compton

dove il diagramma (a) rappresenta il canale s e il diagramma (b) rappresenta il canale u. Si può riscrivere la relazione 21 separando i contributi dei due diagrammi. Partiamo definendo alcune nuove variabili per semplicità:

- $f_1 = p + k$, il 4-momento del propagatore fermionico del diagramma (a).
- $f_2 = p - k'$, il 4-momento del propagatore fermionico del diagramma (b).
- $N = \left(\frac{m}{2V^2}\sqrt{\frac{1}{E_p E_{p'} \omega_k \omega_{k'}}}\right)$, i fattori di normalizzazione.

Possiamo quindi scrivere:

$$S_{fi\,(a)}^{(2)} = (2\pi)^4 N \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)\bar{u}(p')ie\not{\epsilon}(k')\frac{i}{\not{f}_1 - m}ie\not{\epsilon}(k)u(p) \tag{22}$$

$$S_{fi\,(b)}^{(2)} = (2\pi)^4 N \delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)\bar{u}(p')ie\not{\epsilon}(k)\frac{i}{\not{f}_2 - m}ie\not{\epsilon}(k')u(p) \tag{23}$$

Da queste equazioni possiamo ricavare le espressioni degli elementi di matrice di Feynman.

$$\mathcal{M}_{(a)} = \epsilon_\mu(k')\epsilon_\nu(k)\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)} = \epsilon_\mu(k')\epsilon_\nu(k)\left(\bar{u}(p')ie\gamma^\mu \frac{i}{\not{f}_1 - m} ie\gamma^\nu u(p)\right) \tag{24}$$

$$\mathcal{M}_{(b)} = \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k')\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(b)} = \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k')\left(\bar{u}(p')ie\gamma^\mu \frac{i}{\not{f}_2 - m} ie\gamma^\nu u(p)\right) \tag{25}$$

Si può apprezzare come gli elementi di matrici $\mathcal{M}_{(a)}$ e $\mathcal{M}_{(b)}$ sono simmetrici sotto la trasformazione:

$$\begin{cases} f_1 \to f_2 \\ k \to k' \end{cases} \tag{26}$$

Questa simmetria è nota come simmetria di crossing.

2.1 Invarianza della sezione d'urto sotto trasformazione di gauge

Ricordiamo che la lagrangiana della QED è invariante sotto trasformazione di gauge di seconda specie.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e : \bar{\psi}\not{A}\psi : \tag{27}$$

$$\text{QT II:} \begin{cases} \psi \to e^{iqf}\psi \\ A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f \end{cases} \tag{28}$$

Nello spazio dei momenti la trasformazione del campo bosonico diventa:

$$\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + k^\mu f \tag{29}$$

Per verificare l'invarianza di gauge della sezione d'urto è necessario verificare l'invarianza dell'elemento di matrice.

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu\epsilon_\nu\mathcal{M}^{\mu\nu} \to \left(\epsilon_\mu\epsilon_\nu + k_\mu f\epsilon_\nu + \epsilon_\mu k_\nu f + \mathcal{O}(k^2)\right)\mathcal{M}^{\mu\nu}$$

Verificare l'invarianza di gauge si riduce quindi a verificare che valga la relazione:

$$k_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 \tag{30}$$

Per compiere il calcolo studiamo separatamente i termini (a) e (b).

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}k_\nu = -e^2\bar{u}(p')\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m}\not{k}u(p)$$

$$= -e^2\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\frac{i}{\not{p}+\not{k}-m}\left(\not{k}+\underbrace{\not{p}-m}_{=0}\right)u(p)$$

È possibile aggiungere un termine del tipo $\not{p}-m$, in quanto l'elettrone di momento p è reale e perciò soddisfa l'equazione di Dirac.

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}k_{\nu} = -ie^2\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \tag{31}$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(b)}k_{\nu} = -e^2\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\frac{i}{\underbrace{\not{p}-\not{k}'}_{=\not{p}'-\not{k}}-m}\not{k}u(p)$$

In modo analogo si ottiene:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(b)}k_{\nu} = ie^2\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \tag{32}$$

Si osserva quindi che la somma delle due matrici è invariante sotto trasformazione di gauge.

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}k_{\nu} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}k_{\nu} + \mathcal{M}^{\mu\nu}_{(b)}k_{\nu} = 0 \tag{33}$$

3 Calcolo della sezione d'urto Compton

Ripartiamo dall'equazione 8 nel caso dello scattering Compton, cioè un processo del tipo:

$$e^-(p) + \gamma(k) \to e^-(p') + \gamma(k')$$

Si può riscrivere la sezione d'urto come:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4 m^2}{4(E_p\omega_k)v_{rel}} \cdot \delta^4(p+k-p'-k') \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 p_{p'}}{(2\pi)^3(2E_{p'})}\frac{\mathrm{d}^3 p_{k'}}{(2\pi)^3(2\omega_{k'})} \tag{34}$$

Si può integrare sul momento dell'elettrone uscente sfruttando la delta di Dirac.

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)4m^2}{8(E_p\omega_k E_{p'})v_{rel}} \cdot \delta(E_p+\omega_k-E_{p'}-\omega_{k'}) \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 p_{k'}}{(2\pi)^3(2\omega_{k'})}$$

Si può riscrivere l'elemento infinitesimo $\mathrm{d}^3 p_{k'}$ in coordinate sferiche:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{4m^2}{64\pi^2(E_p\omega_k E_{p'})v_{rel}} \cdot \delta(E_p+\omega_k-E_{p'}-\omega_{k'}) \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \frac{p_{k'}^2\mathrm{d}p_{k'}\mathrm{d}\Omega'}{(\omega_{k'})} \tag{35}$$

Generalizzando la relazione 15 si può scrivere una delle proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^{-1} \delta(x) \tag{36}$$

Nel caso in esame si può quindi scrivere:

$$\delta(E_p + \omega_k - E_{p'} - \omega_{k'}) = \left|\frac{\partial(E_{p'} + \omega_{k'})}{\partial \omega_{k'}}\right|^{-1} \delta(\omega_{k'}) \tag{37}$$

Resta da calcolare il termine del cambio di variabile:

$$\frac{\partial(E_{p'} + \omega_{k'})}{\partial \omega_{k'}} = \frac{|\vec{p'}|}{\sqrt{m^2 + |\vec{p'}|^2}} \frac{\partial|\vec{p'}|}{\partial \omega_{k'}} + 1$$

$$|\vec{p'}| = \sqrt{\omega_k^2 + \omega_{k'}^2 - 2\omega_k \omega_{k'} \cos(\theta)}$$

Da cui si trova:

$$\frac{\partial|\vec{p'}|}{\partial \omega_{k'}} = \frac{1}{\omega_k^2 + \omega_{k'}^2 - 2\omega_k \omega_{k'} \cos(\theta)} (\omega_{k'} - \omega_k \cos(\theta))$$

$$= \frac{(\omega_{k'} - \omega_k \cos(\theta))}{|\vec{p'}|}$$

Riassumendo i termini troviamo:

$$\frac{\partial(E_{p'} + \omega_{k'})}{\partial \omega_{k'}} = \frac{|\vec{p'}|}{\sqrt{m^2 + |\vec{p'}|^2}} \frac{(\omega_{k'} - \omega_k \cos(\theta))}{|\vec{p'}|} + 1 = \frac{(\omega_{k'} - \omega_k \cos(\theta))}{E_{p'}} + 1$$

$$= \frac{\omega_{k'} - E_{p'}}{E_{p'}} = \frac{\omega_{k'} - \omega_k \cos(\theta) + \omega_k + m - \omega_{k'}}{E_{p'}}$$

$$\frac{\partial(E_{p'} + \omega_{k'})}{\partial \omega_{k'}} = \frac{m + \omega_k(1 - \cos(\theta))}{E_{p'}}$$

Ricordando che per lo scattering Compton vale la seguente relazione:

$$\omega_{k'} = \frac{m\omega_k}{m + \omega_k(1 - \cos(\theta))} \tag{38}$$

si trova:

$$\frac{\partial(E_{p'} + \omega_{k'})}{\partial \omega_{k'}} = \frac{m\omega_k}{E_{p'}\omega_{k'}} \tag{39}$$

Per semplicità di notazione definiamo:

- $\omega_k \equiv \omega$
- $\omega_{k'} \equiv \omega'$
- $E_p \equiv E = m$
- $E_{p'} \equiv E'$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{4m^2\omega'^2}{64\pi^2(E\omega E'\omega')v_{rel}} \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \left|\frac{\partial(E'+\omega')}{\partial\omega'}\right|^{-1} \cdot \mathrm{d}\Omega'$$

Inserendo il risultato riportato nella relazione 39 e sapendo che nel frame del laboratorio la velocità relativa è pari a 1

$$\vec{v}_{rel}\bigg|_{lab} = \frac{\vec{k}}{\omega} - \underbrace{\frac{\vec{p}}{E}}_{\vec{p}=0} = \frac{\vec{k}}{\omega} \Rightarrow v_{rel} = 1$$

troviamo l'espressione per la sezione d'urto Compton:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{m^2\omega'^2}{16\pi^2(E\omega' E'\omega')}\frac{E'\omega'}{m\omega} \cdot |\mathcal{M}|^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \cdot |\mathcal{M}|^2 \tag{40}$$

Resta da calcolare il valore dell'elemento di matrice di Feynman per questo processo.

3.1 Calcolo dell'elemento di matrice di Feynman

In questo calcolo faremo riferimento ai diagrammi riportati in Figura 2 per la nomenclatura.

Nel calcolo bisogna considerare la seguente espressione per l'elemento di matrice, che tiene conto della polarizzazione dei fotoni e degli spin degli elettroni.

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}\sum_{spin}\frac{1}{2}\sum_{pol}\epsilon^\mu\epsilon'^\nu\epsilon^\rho\epsilon'^\eta\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^*_{\rho\eta} \tag{41}$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ è dato dalla media sugli stati iniziali.

3.1.1 Somme sulle polarizzazioni dei fotoni

Possiamo iniziare il calcolo considerando il contributo dato dalla somma sulle polarizzazioni dei fotoni.

Data la somma

$$\sum_{r=1}^{2} \epsilon_r^i \epsilon_r^j$$

possiamo cercare il più generico tensore in 3 dimensioni di rango 2 tale che sia uno scalare nello spazio con base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\}$. Questo tensore sarà:

$$T^{ij} = \delta^{ij} f(|\vec{k}|^2) + \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} g(|\vec{k}|^2)$$

Dato che $\vec{k} \cdot \epsilon_i = 0$ con $i = 1, 2$ e dato che si sommano solo 2 polarizzazione si pone la traccia del tensore pari a 2:

$$\begin{cases} k^i k^j T_{ij} = 0 \\ \mathrm{Tr}\{T_{ij}\} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = -g \\ 3f + g = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$T_{ij} = \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \tag{42}$$

In modo analogo si può calcolare la somma nel 4-spazio di Minkowski.

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \tag{43}$$

Nel caso in esame dato che i campi si accoppiano a correnti conservate vale la seguente relazione:

$$\sum_{r=1}^{2} \epsilon_r^\alpha \epsilon_r^\beta = g^{\alpha\beta} \tag{44}$$

Possiamo infine sostituire la relazione appena trovata all'interno dell'equazione 41 ottenendo:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^*_{\mu\nu} \tag{45}$$

3.1.2 Somma sugli spin degli elettroni

Prima di introdurre la somma sugli spin dobbiamo ricordare che gli elementi di matrice sono dati dalla somma di due diagrammi distinti:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)} + \mathcal{M}^{\mu\nu}_{(b)} \tag{46}$$

Si può quindi riscrivere l'equazione 45 come:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{spin}\left[\left|\mathcal{M}_{(a)}\right|^2 + \left|\mathcal{M}_{(b)}\right|^2 + \mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^{*}_{(b)\,\mu\nu} + \mathcal{M}^{*\,\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}_{(b)\,\mu\nu}\right] \tag{47}$$

Iniziamo a studiare il termine $\left|\mathcal{M}_{(a)}\right|^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{spin}\left|\mathcal{M}_{(a)}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{spin}&\left[\bar{u}(p')ie\gamma^{\mu}\frac{i}{\not{f}_1 - m}ie\gamma^{\nu}u(p)\right]\cdot\\ &\cdot\left[\bar{u}(p)ie\gamma_{\nu}\frac{i}{\not{f}_1 - m}ie\gamma_{\mu}u(p')\right]\end{aligned} \tag{48}$$

per semplicità è utile evidenziare gli indici spinoriali dell'equazione (li indichiamo con lettere minuscole)

$$\begin{aligned}= \frac{1}{4}\sum_{spin}&\left[\bar{u}_a(p')ie\gamma^{\mu}_{ab}\left(\frac{i}{\not{f}_1 - m}\right)_{bc}ie\gamma^{\nu}_{cd}u_d(p)\right]\cdot\\ &\cdot\left[\bar{u}_e(p)ie\gamma_{ef\,\nu}\left(\frac{i}{\not{f}_1 - m}\right)_{fg}ie\gamma_{gh\,\mu}u_h(p')\right]\end{aligned}$$

Ricordando la definizione dei proiettori di energia:

$$\Lambda^{+}_{ab} = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{ab} = \sum_{r=1}^{2}u_{r\,a}(p)\bar{u}_{r\,b}(p) \tag{49}$$

si trova

$$= \frac{e^4}{4}\left[\gamma^{\mu}_{ab}\left(\frac{\not{f}_1 + m}{f_1^2 + m^2}\right)_{bc}\gamma^{\nu}_{cd}\Lambda^{+}_{de}(p)\gamma_{\nu\,ef}\left(\frac{\not{f}_1 + m}{f_1^2 + m^2}\right)_{fg}\gamma_{\mu\,gh}\Lambda^{+}_{ha}(p')\right]$$

Si può osservare come questa espressione sia la traccia di una matrice nello spazio spinoriale, in quanto il primo e l'ultimo indice sono gli stessi, si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{spin}\left|\mathcal{M}_{(a)}\right|^2 &= \frac{e^4}{16m^2}\frac{1}{(f_1^2 - m^2)^2}\cdot\\ &\cdot\mathrm{Tr}\left\{\gamma^{\mu}(\not{f}_1 + m)\gamma^{\nu}\big(\not{p} + m\big)\gamma_{\nu}(\not{f}_1 + m)\gamma_{\mu}\big(\not{p}' + m\big)\right\}\end{aligned} \tag{50}$$

In modo del tutto analogo possiamo calcolare i restanti termini:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{spin}\left|\mathcal{M}_{(b)}\right|^2 &= \frac{e^4}{16m^2}\frac{1}{(f_2^2 - m^2)^2}\cdot\\ &\cdot\mathrm{Tr}\left\{\gamma^{\mu}(\not{f}_2 + m)\gamma^{\nu}\big(\not{p} + m\big)\gamma_{\nu}(\not{f}_2 + m)\gamma_{\mu}\big(\not{p}' + m\big)\right\}\end{aligned} \tag{51}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^{*}_{(b)\,\mu\nu} = \frac{e^4}{16m^2}\frac{1}{(f_1^2-m^2)(f_2^2-m^2)}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\gamma_\nu\big(\not{p}'+m\big)\Big\} \tag{52}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{*\,\nu\mu}_{(a)}\mathcal{M}_{(b)\,\nu\mu} = \frac{e^4}{16m^2}\frac{1}{(f_1^2-m^2)(f_2^2-m^2)}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\nu(\not{f}_2+m)\gamma^\mu\big(\not{p}+m\big)\gamma_\nu(\not{f}_1+m)\gamma_\mu\big(\not{p}'+m\big)\Big\} \tag{53}$$

3.1.3 Calcolo delle tracce

Prima di iniziare il calcolo è utile richiamare alcuni teoremi che utilizzeremo più volte:

I **Teorema**: $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$

II **Teorema**: $\gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a}$

III **Teorema**: $\mathrm{Tr}\big\{\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n\big\} = 0$ se n è dispari.

IV **Teorema**:$\mathrm{Tr}\{\mathbb{I}_{4\times4}\} = 4$

V **Teorema**: $\mathrm{Tr}\big\{\not{a}\not{b}\big\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\big\{\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}\big\} = \frac{1}{2}a_\mu b_\nu\,\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\} = 4a\cdot b$

VI **Teorema**: $\mathrm{Tr}\big\{\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n\big\} = \mathrm{Tr}\Big\{\not{a}_n\not{a}_{n-1}...\not{a}_1\Big\}$ se n è pari.

VII **Teorema**: $\mathrm{Tr}\big\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\big\} = 4\Big[(a\cdot b)(c\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)\Big]$

VIII **Teorema**: $\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$

Iniziamo il calcolo delle tracce partendo da quella legata all'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{(a)}|^2$, riportata nell'equazione 50.

$$\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\gamma_\nu(\not{f}_1+m)\gamma_\mu\big(\not{p}'+m\big)\Big\}$$

Sfruttando i teoremi I e II si si può scrivere:

$$\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu(\not{f}_1+m)(-2\not{p}+4m)(\not{f}_1+m)\gamma_\mu\big(\not{p}'+m\big)\Big\}$$

sfruttando nuovamente gli stessi teoremi e la ciclicità della traccia si tolgono tutte le matrici γ^μ.

$$\mathrm{Tr}\Big\{(\not{f}_1+m)(-2\not{p}+4m)(\not{f}_1+m)\big(-2\not{p}'+4m\big)\Big\}$$
$$= \mathrm{Tr}\Big\{4\not{f}_1\not{p}\not{f}_1\not{p}' - 16m^4 - 16m^2\big(\not{f}_1\not{p}+\not{f}_1\not{p}'-\not{f}_1\not{f}_1\big) + 4m^2\not{p}\not{p}'\Big\}$$

$$= 16\Bigg[(f_1 \cdot p)(f_1 \cdot p') + (f_1 \cdot p')(p \cdot f_1) - (f_1 \cdot f_1)(p \cdot p')\Bigg] + 16m^4 -$$

$$-16m^2\Bigg(4f_1 \cdot p + 4f_1 \cdot p' - 4f_1 \cdot f_1\Bigg) + 16m^2 p \cdot p'$$

$$= 32(f_1 \cdot p)(f_1 \cdot p') + 16m^4 - 16(f_1 \cdot f_1)(p \cdot p') + 16m^2(p \cdot p') -$$

$$-64m^2\Bigg[(f_1 \cdot p) + (f_1 \cdot p') - (f_1 \cdot f_1)\Bigg]$$

Ricordando come sono definiti $f_1 = p + k$ e $p' = p + k + k'$, si possono esplicitare i prodotti come:

- $(f_1 \cdot p) = p \cdot k + m^2$
- $(f_1 \cdot p') = m^2 + 2p \cdot k - \underbrace{p \cdot k'}_{p \cdot k' = p' \cdot k} - k \cdot k' = p \cdot k + m^2$
- $f_1 \cdot f_1 = m^2 + 2p \cdot k$
- $p \cdot p' = p \cdot k + m^2 - p \cdot k'$

da cui si trova:

$$= 32\Bigg[m^4 + m^2(p \cdot k) + (p \cdot k)(p \cdot k')\Bigg]$$

Riassumendo si trova:

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\left|\mathcal{M}_{(a)}\right|^2 = \frac{2e^4}{(f_1^2 - m^2)^2}\Bigg[m^2 + (p \cdot k) + \frac{(p \cdot k)(p \cdot k')}{m^2}\Bigg] \tag{54}$$

Per calcolare la traccia legata all'elemento di matrice $\left|\mathcal{M}_{(b)}\right|^2$ basta applicare la simmetria di crossing, riportata nella relazione 26.

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\left|\mathcal{M}_{(b)}\right|^2 = \frac{2e^4}{(f_2^2 - m^2)^2}\Bigg[m^2 + (p \cdot k') + \frac{(p \cdot k')(p \cdot k)}{m^2}\Bigg] \tag{55}$$

Restano da calcolare le tracce legate agli elementi di matrice misti, iniziamo dal termine $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^*_{(b)\,\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\big\{\gamma^\mu(\not{f}_1 + m)\gamma^\nu\big(\not{p} + m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2 + m)\gamma_\nu\big(\not{p}' + m\big)\big\} \\
&= \underbrace{\mathrm{Tr}\big\{\gamma^\mu(\not{f}_1 + m)\gamma^\nu\big(\not{p} + m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2 + m)\gamma_\nu\not{p}'\big\}}_{T_1} + \\
&\qquad + \underbrace{m\,\mathrm{Tr}\big\{\gamma^\mu(\not{f}_1 + m)\gamma^\nu\big(\not{p} + m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2 + m)\gamma_\nu\big\}}_{T_2}
\end{aligned} \tag{56}$$

Iniziamo calcolando il termine T_2:

$$T_2 = \mathrm{Tr}\big\{\gamma_\nu\gamma^\mu(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\big\}$$

Ricordando le relazioni:

$$\gamma^\mu \not{f}_1 = f_1^\mu \tag{57}$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{58}$$

e il teorema I, si trova:

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}\big\{(4f_1^\mu - 2m\gamma^\mu)\big(\not{p}+m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\big\}\\
&= \mathrm{Tr}\big\{4\big(\not{p}+m\big)\not{f}_1(\not{f}_2+m) - 2m\underbrace{\gamma^\mu\big(\not{p}+m\big)}_{-2\not{p}+4m}\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\big\}\\
&= \mathrm{Tr}\big\{4\big(\not{p}+m\big)\not{f}_1(\not{f}_2+m) - 2m\big(-2\not{p}+4m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\big\}
\end{aligned}$$

$$T_2 = 16m^2\Big[(p\cdot f_1)+(p\cdot f_2)+(p\cdot f_2)-2m^2\Big] \tag{59}$$

Resta da calcolare T_1:

$$T_1 = \mathrm{Tr}\big\{(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\gamma_\mu(\not{f}_2+m)\gamma_\nu\not{p}'\gamma^\mu\big\}$$

Usando i teoremi I e VIII e la relazione 57, si trova:

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}\big\{(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\big(-2\not{p}'\gamma_\nu\not{f}_2+4mp'_\nu\big)\big\}\\
&= \mathrm{Tr}\big\{(\not{f}_1+m)\gamma^\nu\big(\not{p}+m\big)\big(-2\not{p}'\gamma_\nu\not{f}_2+4mp'_\nu\big)\big\}\\
&= \mathrm{Tr}\big\{(\not{f}_1+m)(-8\not{p}\not{p}'\not{f}_2+4m\not{p}'\not{f}_2)\big\}+4m\,\mathrm{Tr}\big\{(\not{f}_1+m)\not{p}'(\not{p}+m)\big\}\\
&= \mathrm{Tr}\big\{-8\not{f}_1\not{p}\not{p}'\not{f}_2+4m^2\not{p}'\not{f}_2)\big\}+4m^2\,\mathrm{Tr}\big\{\not{f}_1\not{p}'+\not{p}'\not{p}\big\}\\
&= -32\Big[(f_1\cdot p)(p'\cdot f_2)+(f_1\cdot f_2)(p\cdot p')-(f_1\cdot p')(p\cdot p')-(f_1\cdot p')(f_2\cdot p)\Big]+\\
&\qquad +16m^2\Big[(p'\cdot f_2)+(f_1\cdot f_2)(p\cdot p')-(f_1\cdot p')+(p\cdot p')\Big]
\end{aligned}$$

Ricordando come sono definiti $f_1 = p+k$, $f_2 = p-k'$ e $p' = p+k+k'$, si possono esplicitare i prodotti come:

- $(f_1\cdot p) = p\cdot k + m^2$
- $(f_1\cdot p') = p\cdot k + m^2$
- $(f_2\cdot p) = m^2 - p\cdot k'$
- $(f_2\cdot p') = m^2 - p\cdot k'$
- $f_1\cdot f_2 = m^2 + 2p\cdot k - 2p\cdot k'$

- $p \cdot p' = p \cdot k + m^2 - p \cdot k'$

da cui si trova:

$$= -32\Big[m^4 + 3m^2(p\cdot k) - 2(p\cdot k)(p\cdot k') - m^2(p\cdot k')\Big] +$$

$$+16\Big[3m^4 + 2m^2(p\cdot k) - 2m^2(p\cdot k')\Big]$$

$$T_1 = 16\Big[m^4 - 4m^2(p\cdot k) - 4(p\cdot k)(p\cdot k')\Big] \tag{60}$$

Riassumendo i termini T_1 e T_2 si trova:

$$T_1 + T_2 = 16m^2\Big[2m^2 - (p\cdot k') + (p\cdot k)\Big] \tag{61}$$

da cui:

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^{*}_{(b)\,\mu\nu} = \frac{e^4}{(f_1^2 - m^2)(f_2^2 - m^2)}\Big[2m^2 - (p\cdot k') + (p\cdot k)\Big] \tag{62}$$

Per simmetria di crossing si osserva come:

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^{*}_{(b)\,\mu\nu} = \frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{*\,\nu\mu}_{(a)}\mathcal{M}_{(b)\,\nu\mu} \tag{63}$$

Avendo calcolato tutti i termini dell'equazione 47, si può scrivere l'elemento di matrice:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{(f_1^2 - m^2)^2}\left(m^2 + (p\cdot k) + \frac{(p\cdot k)(p\cdot k')}{m^2}\right)}_{\frac{1}{4}\sum_{spin}|\mathcal{M}_{(a)}|^2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(f_2^2 - m^2)^2}\left(m^2 + (p\cdot k') + \frac{(p\cdot k')(p\cdot k)}{m^2}\right)}_{\frac{1}{4}\sum_{spin}|\mathcal{M}_{(b)}|^2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(f_1^2 - m^2)(f_2^2 - m^2)}\big(2m^2 - (p\cdot k') + (p\cdot k)\big)}_{\frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(a)}\mathcal{M}^{*}_{(b)\,\mu\nu} + \frac{1}{4}\sum_{spin}\mathcal{M}^{*\,\nu\mu}_{(a)}\mathcal{M}_{(b)\,\nu\mu}}\Bigg]$$

$$= \frac{e^4}{2m^2}\left[m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2 + m^2\left(\frac{2}{p\cdot k} - \frac{2}{p\cdot k'}\right) + \frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'}\right]$$

Conoscendo i 4-vettori, si può completare il calcolo:

- $p = (m, \vec{0})$
- $k = (\omega, \vec{k})$
- $k' = (\omega', \vec{k'})$

$$= \frac{e^4}{2m^2}\left[m^4\left(\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{m\omega'}\right)^2 + m^2\left(\frac{2}{m\omega} - \frac{2}{m\omega'}\right) + \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'}\right]$$

$$\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{m\omega'} = \frac{1}{m\omega} - \frac{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos(\theta))}{m\omega} = -\frac{1 - \cos(\theta)}{m^2} \tag{64}$$

Sfruttando quest'ultima relazione si trova:

$$m^4\left(\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{m\omega'}\right)^2 + m^2\left(\frac{2}{m\omega} - \frac{2}{m\omega'}\right) = (1 - \cos(\theta))^2 + 2(1 - \cos(\theta))$$

$$= -1 + \cos^2(\theta) = -\sin^2(\theta)$$

Possiamo quindi completare il calcolo dell'elemento di matrice:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2(\theta)\right] \tag{65}$$

Ricordando la definizione della costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{e^2}{2m} \tag{66}$$

possiamo ultimare il calcolo della sezione d'urto Compton, ottenendo la formula di Klein-Nishima:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{\alpha^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2(\theta)\right] \tag{67}$$