UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LICENCIATURA EN ACTUARÍA

TAREA #1

CATEDRÁTICO: JOSUÉ MANIK NAVA SEDEÑO

AYUDANTES: EDUARDO LINCE GÓMEZ. JAIRO ISRAEL VALDEZ OLMOS. PAOLA BERENICE GARCÍA RAMÍREZ

ALUMNA: YULIANA SÁNCHEZ ESCOBAR

ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES I

GRUPO: 4158   SEMESTRE: 4

FECHA: 24 DE FEBRERO DE 2025

EJERCICIO 1. Considera una reacción enzimática donde la concentración de la enzima E no es constante, sino que decae como $E(t) = E_0 e^{-ct}$, c y E_0 constantes positivas. Supón que la concentración inicial de sustrato es $S(0) = S_0$. Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{KES}{K_m + S},$$

donde K y K_m son constantes positivas. Muestra que $S(t)$ tiende a una constante positiva en el límite $t \to \infty$.

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = -\frac{KES}{K_m+S}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = -\frac{KE_0e^{-ct}S}{K_m+S}$$

$$\Rightarrow \frac{K_m+S}{S}\,dS = -KE_0e^{-ct}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{K_m}{S}+1\,dS = -KE_0e^{-ct}\,dt$$

$$\Rightarrow dS + \frac{K_m}{S}\,dS = -KE_0e^{-ct}\,dt$$

$$\Rightarrow \int dS + \frac{K_m}{S}\,dS = \int -KE_0e^{-ct}\,dt$$

$$\Rightarrow \int dS + K_m\int\frac{dS}{S} = -KE_0\int e^{-ct}\,dt$$

$u = -ct \quad du = -c\,dt \Rightarrow dt = \frac{du}{-c}$

$$\Rightarrow \int dS + K_m\int\frac{dS}{S} = -KE_0\int e^u\,\frac{du}{-c}$$

$$\Rightarrow S + K_m\ln|S| = -KE_0\left(-\frac{e^{-ct}}{c}\right) + C$$

$$\Rightarrow \underbrace{S + K_m\ln|S| = \frac{KE_0}{c}e^{-ct} + C}_{} \rightarrow \text{Sol implícita}$$

Aplicamos ahora la condición inicial

$$\Rightarrow S_0 + K_m\ln|S_0| = \frac{KE_0}{c}e^{0} + C$$

$$\Rightarrow C = S_0 + K_m\ln|S_0| - \frac{KE_0}{c}$$

Sustituimos C en la sol. implícita.

$$\Rightarrow S + K_m\ln|S| = \frac{KE_0}{c}e^{-ct} + S_0 + K_m\ln|S_0| - \frac{KE_0}{c}$$

Ahora, para mostrar que $S(t)$ tiende a una cte. positiva en el $\lim_{t\to\infty}$:

$$\lim_{t\to\infty} S + K_m\ln|S| = \lim_{t\to\infty} \cancel{\frac{KE_0}{c}e^{-ct}}^{\to 0} + S_0 + K_m\ln|S_0| - \frac{KE_0}{c}$$

$$\Rightarrow S_\infty + K_m\ln|S_\infty| = S_0 + K_m\ln|S_0| - \frac{KE_0}{c}$$

Dado que la función $S + K_m\ln|S|$ es creciente, $S(t)$ no tiende a cero, sino a una cte positiva en S_∞.

EJERCICIO 7. La tasa de aumento de bacterias en un cultivo es proporcional al número de bactrias presentes. La población se multiplica por un factor n en el intervalo de tiempo T. Encuentra el número de bacterias al tiempo t si el número inicial es P_0.

$P(t)$ = # de bacterias al tiempo t

k = cte positiva

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\frac{dP}{dt}}{P}$$

$$\Rightarrow \ln'|P(t)| = k$$

$$\Rightarrow \int_0^t \ln'(P(s))\,ds = \int_0^t k\,ds$$

$$\Rightarrow \ln[P(t) - P(0)] = kt - k0$$

$$\Rightarrow \ln(P(t)) - \ln(P(0)) = kt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right) = kt$$

e e

$$\Rightarrow \frac{P(t)}{P(0)} = e^{kt}$$

$$\Rightarrow P(t) = P(0)\,e^{kt}$$

Como la población se multiplica por un factor n en un intervalo de tiempo t se sigue que

$$\Rightarrow P(\tau) = nP(0)$$

$$\Rightarrow nP(0) = P(0)\,e^{kT}$$

$$\Rightarrow n = e^{k\tau}$$

$$\Rightarrow \ln(n) = \ln(e^{k\tau})$$

$$\Rightarrow \ln(n) = k\tau$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(n)}{\tau}$$

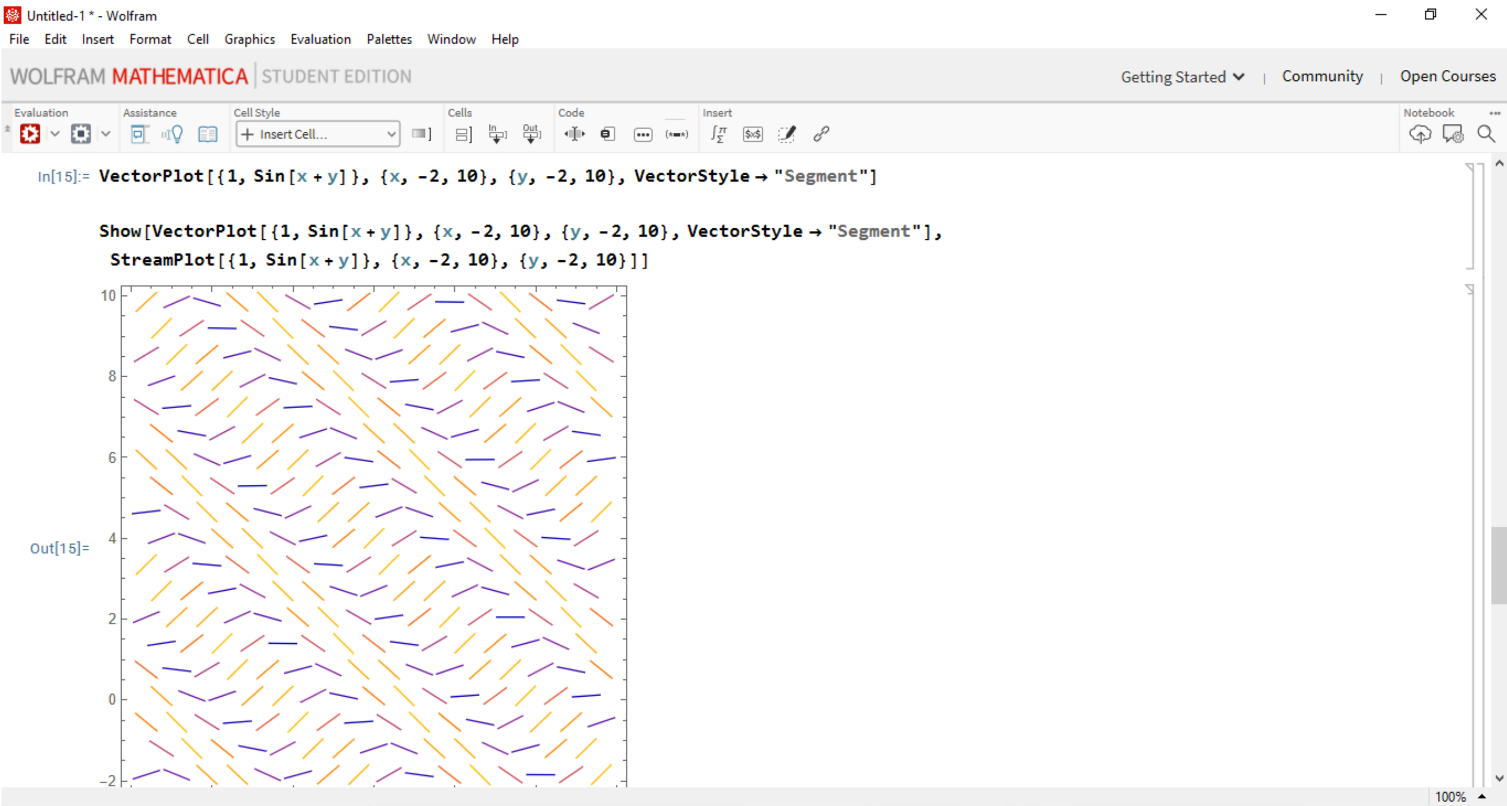
$$\Rightarrow P(t) = P(0)\,e^{\left(\frac{\ln(n)}{\tau}\right)t} =$$

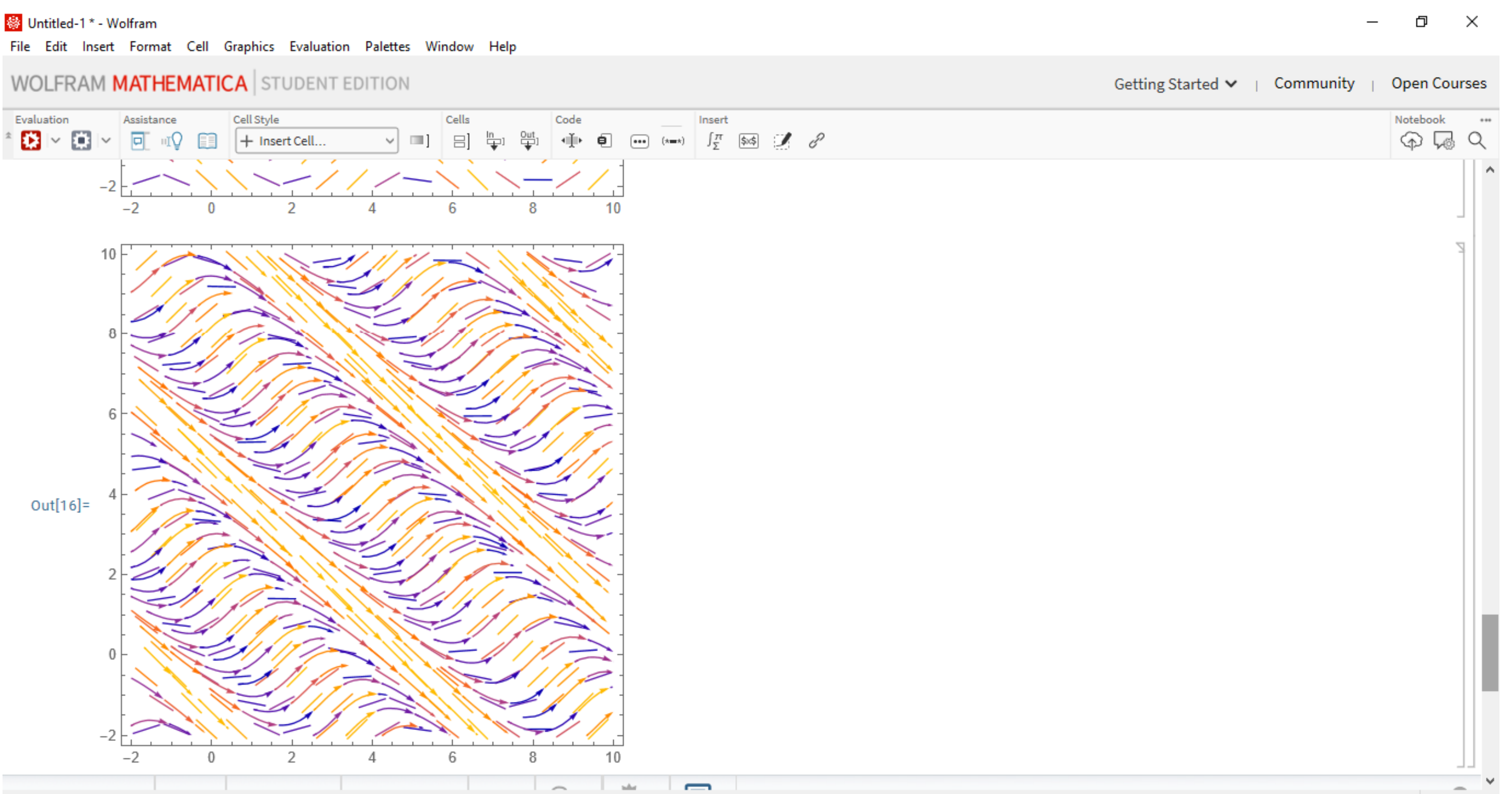
$$P(0)\,e^{(\ln(n))\frac{t}{\tau}} = P(0)\left[e^{\ln(n)}\right]^{t/\tau}$$

$$= P(0)[n]^{t/\tau} = P(0)\,n^{t/\tau}$$

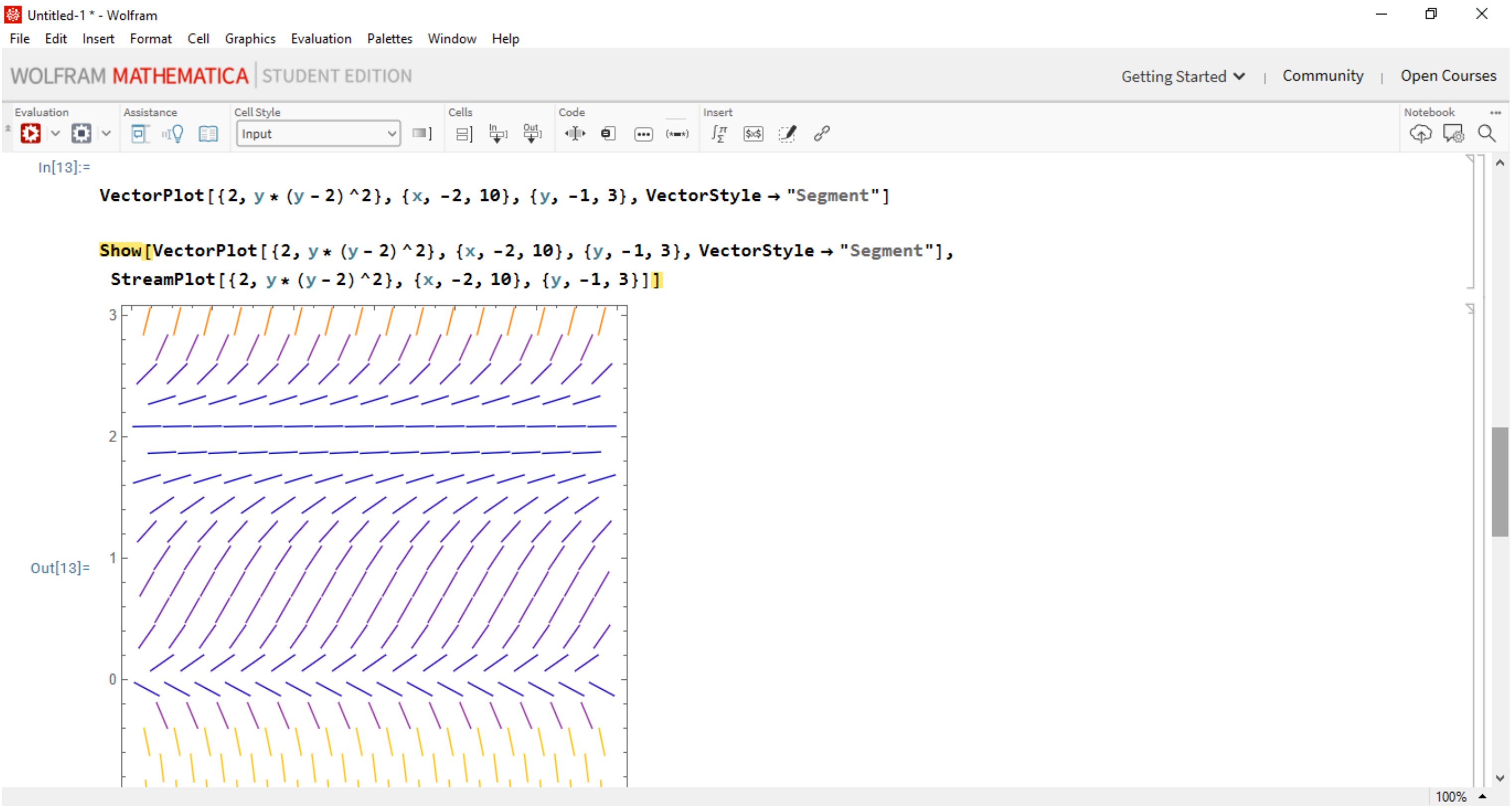
$$\therefore P(t) = P(0)\,n^{t/\tau}$$

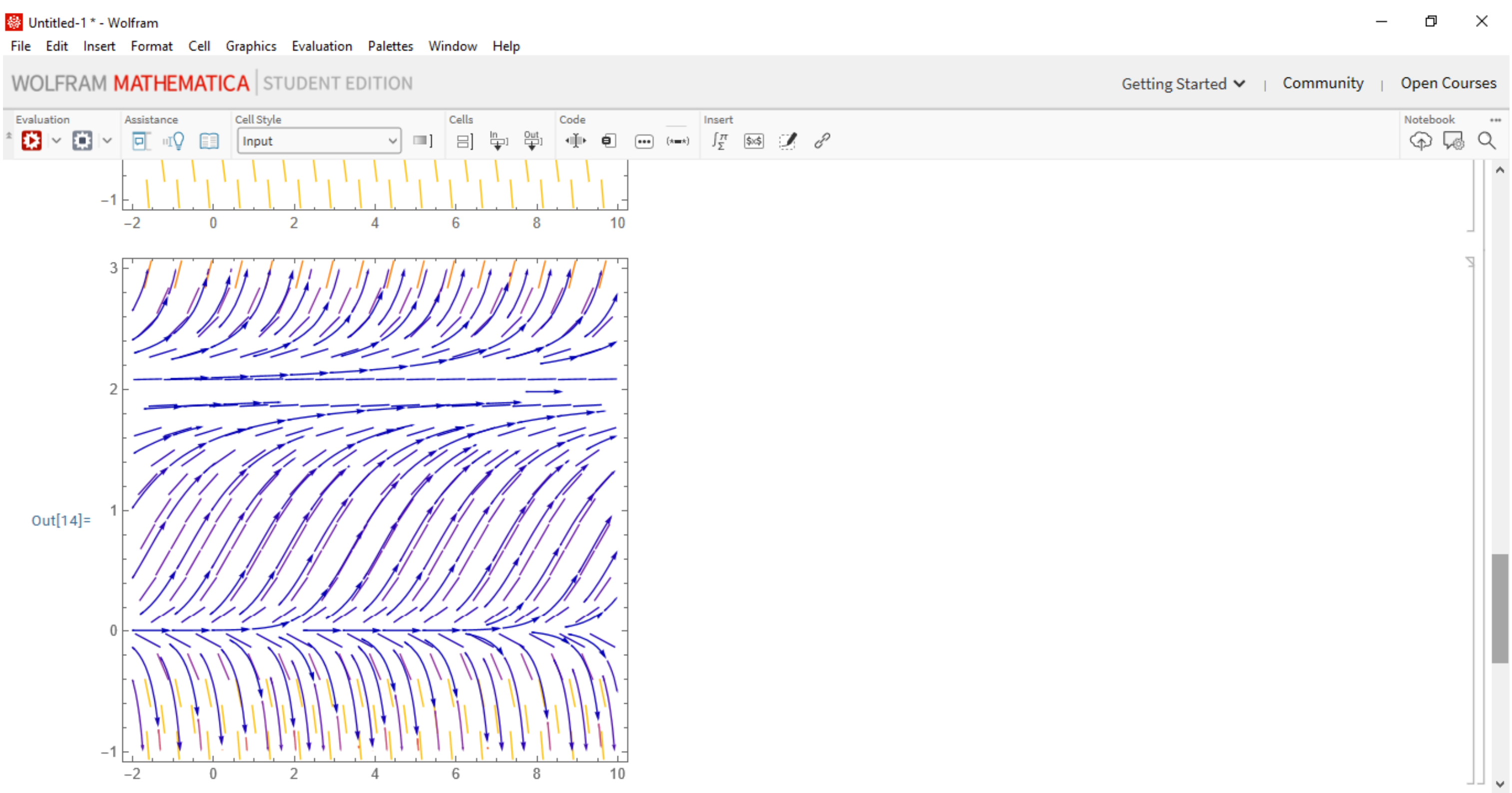
EJERCICIO 3. INCISO A)





EJERCICIO 3. INCISO B)





EJERCICIO 7. Resuelve cada uno de los siguientes problemas con condiciones iniciales. Si es posible, expresa la solución de forma explícita

a) $y\frac{dy}{dx} = sen(x)$, $y(0) = -4$.

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} - sen(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2} + \cos(x)\right) = 0$

$\Rightarrow \int_0^x \frac{d}{ds}\left(\frac{y(s)^2}{2} + \cos(s)\right) ds = \int_0^x 0\, ds$

$\Rightarrow \frac{y(x)^2}{2} + \cos(x) - \frac{y(0)^2}{2} - \cos(0) = 0$

$\Rightarrow \frac{y(x)^2}{2} + \cos(x) - \frac{(-4)^2}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{y(x)^2}{2} + \cos(x) - 8 - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{y(x)^2}{2} + \cos(x) - 9 = 0$

$\Rightarrow y(x) = -\sqrt{2(9-\cos(x))}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{xy}$, $y(1) = -2$ $\rightarrow$ se indetermina en $y=0$ ó $x=0$

$\Rightarrow \frac{y}{y^2-1}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{y(s)}{y(s)^2-1}\frac{dy}{dx}\, dx = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds$

$u = y^2 - 1 \Rightarrow du = 2y\, dy$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\, dx = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]\Big|_1^x = \ln|s|\Big|_1^x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\ln(y(x)^2-1) - \ln[y(1)^2-1]\right]$

$= \ln(x) - \ln(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\ln(y(x)^2-1) - \ln(3)\right] = \ln(x)$

$\Rightarrow e^{\ln\left|\frac{y^2-1}{3}\right|} = 2\ln(x) = e^{\ln(x^2)}$

$\Rightarrow \frac{y^2-1}{3} = x^2$

$\Rightarrow y(x) = -\sqrt{3x^2+1}$

EJERCICIO 5. Considera una ecuación diferencial lineal de primer orden. $y' + p(t)\,y = g(t)$.

a) Si $g(t) = 0$, demuestra que la solución es $y(t) = Ae^{-\int p(t)\,dt}$ donde A es una cte.

Dem.

$y' + p(t)y = g(t)$. Como $g(t)=0$

$\Rightarrow y' + p(t)y = 0$. Como es una E.D. separable, podemos reescribirla como:

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(t)\,dt$$

$$\Rightarrow {}_{e}\ln|y| = {}_{e}-\int p(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(t)dt} + e^{c}$$

Podemos llamar a e^{c} como A (una cte arbitraria positiva).

$$\therefore y = Ae^{-\int p(t)\,dt}.$$

∎

b) Si $g(t) \neq 0$, supón que la solución tiene la forma

$$y(t) = A(t) \exp[-\int p(t)\,dt],$$

donde ahora $A(t)$ no es constante, sino función de t. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, muestra que:

$$A'(t) = g(t)\, e^{\int p(t)\,dt}.$$

Dem.

$y(t) = A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}$

$\Rightarrow y' = \frac{d}{dt}\left[A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}\right]$

$\Rightarrow y' = A'(t)\, e^{-\int p(t)\,dt} + A(t) \frac{d}{dt} e^{-\int p(t)\,dt}$

$\Rightarrow y' = A'(t)\, e^{-\int p(t)\,dt} + A(t)\left[-p(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}\right]$

$\Rightarrow y' = A'(t)\, e^{-\int p(t)\,dt} - A(t)\,p(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}$

$\Rightarrow y' = e^{-\int p(t)\,dt}\left[A'(t) - A(t)\,p(t)\right]$

Ahora, nuestra ecuación original es

$y' + p(t)\,y = g(t)$ ...(I) y supondremos por hip que la sol. tiene la forma

$y(t) = A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}$ ...(II)

Así que, sustituimos (II) en (I), para obtener que:

$y' + \underbrace{p(t)\,A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}}_{p(t)\,y \text{ pues } y = A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}} = g(t).$

y también encontramos y a y', ent vamos a sustituir

$\Rightarrow e^{-\int p(t)\,dt}\left[A'(t) - \cancel{A(t)\,p(t)}\right] + \cancel{p(t)\,A(t)\, e^{-\int p(t)\,dt}} = g(t).$

$\Rightarrow e^{-\int p(t)\,dt}\, A'(t) = g(t).$

$\Rightarrow A'(t) = \dfrac{g(t)}{e^{-\int p(t)\,dt}}$

$\therefore A'(t) = g(t)\, e^{\int p(t)\,dt}.$ ∎

c) De la expresión anterior, encuentra $A(t)$, sustituye en $y(t)$, y verifica que la expresión resultante es igual a la solución general que obtuvimos usando factor integrante. A esta forma de llegar al mismo resultado se le llama variación de ~~pra~~ parámetros.

Para encontrar $A(t)$, podemos primero integrar el resultado del inciso b).

$$\Rightarrow \int A'(t) = \int g(t)\, e^{\int p(t)dt}$$

$$\Rightarrow A(t) = \int g(t)\, e^{\int p(t)dt}\, dt + C$$

Como $y(t) = A(t)\, e^{-\int p(t)\, dt}$

podemos sustituir $A(t)$.

$$\Rightarrow y(t) = \int g(t)\, e^{\int p(t)dt}\, dt + C \cdot e^{-\int p(t)dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int p(t)dt} \int g(t)\, e^{\int p(t)dt}\, dt + C e^{-\int p(t)dt}$$

Esa es la sol general de la e.d mediante el método "variación de parámetros".

Recordemos que la sol. general obtenida usando el factor integrante es:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)\, g(t)\, dt + C \right]$$

donde $\mu(t) = e^{\int p(t)\, dt}$ es el factor integrante.

Si sustituimos $\mu(t)$ en la sol general, tenemos que:

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int p(t)dt}} \left[\int e^{\int p(t)dt}\, g(t)\, dt + C \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int p(t)dt} \int e^{\int p(t)\, dt}\, g(t)\, dt + C e^{-\int p(t)\, d(t)}$$

$\therefore$ La sol. es idéntica a la obtenida mediante variación de parámetros. ▨

EJERCICIO 6

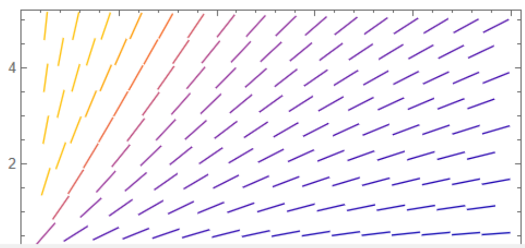
```
In[21]:= (*Ecuación diferencial:y'-(1/t)y=t*e^(-t)*)p[t_, y_] := y / t + t * Exp[-t];

(*Campo de pendientes*)
VectorPlot[{1, p[t, y]}, {t, 0.1, 5}, {y, -5, 5}, VectorStyle → "Segment"]

(*Solución general:y(t)=-t*e^(-t)+C*t*)
sol[t_, C_] := -t * Exp[-t] + C * t;

(*Graficar algunas soluciones con diferentes valores de C*)
plots = Table[Plot[sol[t, C], {t, 0.1, 5}], {C, -2, 2, 1}];

(*Mostrar el campo de pendientes y las soluciones*)
Show[VectorPlot[{1, p[t, y]}, {t, 0.1, 5}, {y, -5, 5}, VectorStyle → "Segment"], plots]
```



Out[25]=