极限计算·习题课讲义

Math0102.1 附基础习题 100 题　　第 3.7 稿

不懂数学的小胖子 ⊗ 析空 ⊗ 曲豆豆 码字

2019 年 12 月 22 日

来自曲豆豆的高数讨论 qq 群：1022388218

这是一个分享 LaTeX 数学原创笔记、讲义的地方

立心力行

——衢州学院校训

厚德 博学 笃行 致远

——青岛农业大学校训

红专并进 理实交融

——中国科学技术大学校训

目录

第一章 基础篇：数列极限与函数极限

1.1 基本概念

1.1.1 用定义证明数列极限存在

所谓**数列**，是指从自然数集 $\mathbb{N}$（或者正整数集 $\mathbb{Z}_+$）到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射。

定义 1.1.1. （数列极限）

对于数列 $\{a_n\}$ 以及实数 a，如果满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon \tag{$*$}$$

则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 a，（或者该数列的**极限**为 a），记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

这是数列极限的知识源头。初学者一定要花工夫去理解 $(*)$ 的含义。数列极限的一切性质、一切计算技巧，都来自于此。

例题 1.1.2. 用数列极限的定义直接证明：

$$(1)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad (2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2} \qquad (3)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{q^n}=0\,(\text{其中 } |q|>1)$$

证明. 我们用定义直接证明：

(1) 对任意任意 $\varepsilon > 0$，取 $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，则对任意 $n \geq N$，成立

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \varepsilon$$

从而由数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.（其中，对于实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.23] = 1, [-2.33] = -3$.）

(2) 对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$，则对于任意 $n \geq N$，都有 $\frac{1}{4n^2} < \varepsilon$，从而

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \frac{1}{4n^2} < \varepsilon.$$

从而由数列极限定义得证；

(3) 不妨假定 $q>0$，记 $q=1+a$，其中 $a>0$ 为正实数，于是由二项式展开可知

$$\frac{1}{q^n}=\frac{1}{(1+a)^n}<\frac{1}{1+na}$$

于是对于任意 $\varepsilon>0$，不妨 $\varepsilon<1$，取 $N:=\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right]+1$，则当 $n\geq N$ 时有 $\frac{1}{1+na}<\varepsilon$，从而

$$\left|\frac{1}{q^n}-1\right|\leq\frac{1}{1+na}<\varepsilon.$$

从而由数列极限的定义得证。 □

注记

按照定义证明数列极限，无非是对于任意 $\varepsilon>0$，都可以找到“符合条件的”N. 这里的 N 可以通过解不等式给出显式表达，但不一定需要“特别精确”、“恰好可以”，可以通过适当的放缩来简化计算，给出“较为粗糙”的结果。

例如第 (1) 题证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$，对于任意 $\varepsilon>0$，完全可以取 $N=\left[\frac{2333}{\varepsilon}\right]+666666666$，这个 N 也满足“$\forall n\geq N,\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$”. 再比如第 (3) 题，对于 $\varepsilon>0$，直接解不等式 $\frac{1}{q^n}<\varepsilon$ 得到 $n>\log_q\frac{1}{\varepsilon}$, 于是取 $N=\left[\log_q\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 更加直接，但我们“假装不知道对数运算”，通过不等式放缩用简单的加减乘除就可以构造出“合适的”N.

注记

在“不同的阶段”要写“不同的过程”。作为初学者，应按照数列极限的定义认真、详细写清楚；等到学了更多的知识，比如较深的微积分之后，就有资格说上述极限是“显然”的。

再看一道稍微复杂的例题：

例题 1.1.3. 用数列极限定义证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-7}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}=3.$$

证明. 首先注意到当 $n\geq1$ 时有 $\sqrt{n^4+5n^3-1}\geq\sqrt{n^4}=n^2$, 从而成立

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n^2-7}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}-3\right| &= \left|\frac{3\left(n^2-\sqrt{n^4+5n^3-1}\right)-7}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}\right| \\ &\leq 3\left|\frac{n^2-\sqrt{n^4+5n^3-1}}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}\right|+7\cdot\frac{1}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{3}{n^2}\cdot\frac{5n^3-1}{n^2+\sqrt{n^4+5n^3-1}}+\frac{7}{n^2}\\
&\leq \frac{15n^3}{2n^4}+\frac{7}{n^2}\leq\frac{100}{n}+\frac{100}{n^2}\leq\frac{200}{n}
\end{aligned}
$$

从而对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N:=\left[\frac{200}{\varepsilon}\right]+2333$. 则当 $n\geq N$ 时成立 $\frac{200}{n}<\varepsilon$, 从而

$$\left|\frac{3n^2-7}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}-3\right|\leq\frac{200}{n}<\varepsilon.$$

这就用数列极限的定义证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-7}{\sqrt{n^4+5n^3-1}}=3.$ □

注记

用极限的定义来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 我们没有必要通过解关于 n 的不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 来找出 N, 直接解不等式一般是行不通的。通常的想法是，先将 $|a_n-a|$ 适当放缩估计一下，使得放缩后的形式简单。

本小节最后，我们用数列极限的定义证明几个重要极限。它们的证明方法十分典型，我们应该牢牢掌握。

性质 1.1.4.

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$$

证明. 对于任意 $\varepsilon>0$，我们来看条件 $|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$ 何时成立。由于 $n^{\frac{1}{n}}>1$，故 $|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$ 等价于 $n^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$，进而等价于 $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$. 由二项式展开可得

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<\frac{n}{1+n\varepsilon+\binom{n}{2}\varepsilon^2}<\frac{2}{(n-1)\varepsilon^2}$$

取 $N=1+\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2333$，则当 $n\geq N$ 时 $n^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$ □

注记

对于正整数 $0<m\leq n$，组合数 $\binom{n}{m}:=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$，特别规定 $\binom{n}{0}=1$. 回顾众所周知的**二项式定理**：对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 以及正整数 n, 成立

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

推论 1.1.5. （多项式增长 *vs.* 指数增长）

设 k 为任意给定的正整数，$q>1$ 为实数，则成立

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{q^n}=0.$$

证明. 记 $q=1+\delta$, 则 $\delta>0$. 从而有 $\frac{n^k}{q^n}=\left(\frac{n^{\frac{k}{n}}}{1+\delta}\right)^n$. 现在，对任意 $\varepsilon>0$, 注意 $\sqrt[k]{1+\frac{1}{2}\delta}>1$, 从而由 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$（性质1.1.4）可知存在 $N_1>0$ 使得当 $n\geq N_1$ 时成立 $n^{\frac{1}{n}}<\sqrt[k]{1+\frac{1}{2}\delta}$；另一方面，由于 $0<\frac{1+\frac{1}{2}\delta}{1+\delta}<1$, 从而由例子1.1.2的（3）可知存在 $N_2>0$ 使得当 $n\geq N_2$ 时成立 $\left(\frac{1+\frac{1}{2}\delta}{1+\delta}\right)^n<\varepsilon$. 取 $N:=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n\geq N$ 时成立

$$\left|\frac{n^k}{q^n}\right|=\left(\frac{n^{\frac{k}{n}}}{1+\delta}\right)^n\leq\left(\frac{(\sqrt[k]{1+\frac{1}{2}\delta})^k}{1+\delta}\right)^n=\left(\frac{1+\frac{1}{2}\delta}{1+\delta}\right)^n<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{q^n}=0.$ □

注记

当 n 趋于无穷时，n^k“以 k 次多项式的速度趋于无穷”，而 q^n 则“指数增长趋于无穷”。可见，即使多项式的次数 k 再高，“增长速度”也“快”不过指数。

1.1.2 用定义证明函数极限存在

本讲义所指的**函数** f 是指从 $\mathbb{R}$ 的某个非空子集 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射。其中 X 称为 f 的**定义域**。注意这里的 X 可以不是开（闭）区间，可以是任何“奇形怪状”的集合。当然，在实际解题中遇到的函数通常是定义在“形状比较简单的”区间上。特别地，数列是一种特殊类型的函数，其定义域 $X=\mathbb{Z}_+$.

记号 1.1.6. 对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 X, 以及实数 $a\in\mathbb{R}$,$\delta>0$, 记

$$\mathring{U}_X(a,\delta)\quad:=\quad\left\{x\in X\middle|0<|x-a|<\delta\right\}=\Big[(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\Big]\cap X$$

称为点 a 在 X 中的半径为 δ 的**去心邻域**。

定义 1.1.7. （极限点）设 X 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集，实数 $a \in \mathbb{R}$. 如果对任意 $\delta > 0, \mathring{U}_X(a,\delta) \neq \varnothing$, 则称 a 为 X 的**极限点**。

注意，X 的极限点可能不属于 X, 例如 0 是 $(0,1)$ 的极限点。我们约定 $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数，$a \in \mathbb{R}$ 为 X 的一个**极限点**，则我们给出函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的定义如下：

定义 1.1.8. （函数的极限）

对于函数 $f: X \to \mathbb{R}$, 以及 X 的极限点 a. 如果存在实数 A, 使得成立

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathring{U}_X(a,\delta),\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 f 在 $x = a$ 处的极限存在, 并且称 A 为当 $x \to a$ 时 f 的极限。此时也记作 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

这个定义与数列极限非常类似。对于熟悉数列极限的读者，这并不难理解。这里要注意，X 的极限点 a 也可能不位于 X 上，也就是说 f 在 $x = a$ 处未必有定义，但我们仍可以谈论 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

例题 1.1.9. 对于任意实数 a, 成立 $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

证明. 这里的函数为 $f(x) = x^2$, 其定义域 $X = \mathbb{R}$. 我们用定义直接证明如下：对任意 $\varepsilon > 0$, 我们分 $a = 0$ 与 $a \neq 0$ 两种情况讨论。如果 $a = 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0 < |x| < \delta$ 时成立

$$|x^2| < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

从而得证。而如果 $a \neq 0$, 则 $|a| > 0$. 注意到当 $|x| < |a|$ 时成立 $|x + a| \leq 2|a|$. 取 $\delta := \min\{|a|, \dfrac{\varepsilon}{2|a|}\}$, 则对于任意 $0 < |x - a| < \delta$, 成立

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| < 2|a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$. □

例题 1.1.10. 考虑函数 $f(x) = x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}}$, 则有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

证明. 注意该函数 $f(x)$ 的定义域为

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sin\frac{1}{x} \geq 0\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{x \middle| 2k\pi \leq \frac{1}{x} \leq (2k+1)\pi\right\} = \left[\frac{1}{\pi}, +\infty\right) \cup \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \left[\frac{\pi}{2k+1}, \frac{\pi}{2k}\right]$$

从而易知 $x=0$（虽然不在定义域中）是 X 的极限点。注意对任何实数 y 都有 $|\sin y| \leq 1$, 从而对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则对任意 $x \in \mathring{U}_X(0,\delta)$, 成立

$$|f(x)| \leq |x| \cdot \left|\sqrt{\sin\frac{1}{x}}\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. □

注记

注意到对于任意 $\delta > 0$, 都存在 $|x| < \delta$ 使得 f 在 x 处无意义，但这并不妨碍 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在。有些别的书也许对定义域 X 在 $x=0$ 附近的这种“坏”的性质有所顾忌，不认为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在；但在本讲义所定义的函数极限意义下，无需多虑，这个极限名正言顺地存在且为 0.

在用定义证明数列、函数的极限时，我们经常要通过不等式放缩来简化计算。以下是一些众所周知的不等式，可直接使用：

性质 1.1.11. 以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
\sin x &\leq x && \text{对任意 } x \geq 0 \text{ 成立；}\\
\sin x &\geq \frac{2}{\pi}x && \text{对任意 } x \in [0,\frac{\pi}{2}] \text{ 成立；}\\
e^x &\geq x+1 && \text{对任意 } x \in \mathbb{R} \text{ 成立；}\\
\ln(1+x) &\leq x && \text{对任意 } x > -1 \text{ 成立；}\\
(1+x)^\alpha &\geq 1+\alpha x && \text{对任意 } \alpha > 0, x > 0 \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

当然，在不等式放缩里最常用的还是关于绝对值的**三角不等式**: 对任意实数 x, y, 成立

$$\begin{aligned}
|x+y| &\leq |x|+|y|\\
|x|-|y| &\leq \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|
\end{aligned}$$

熟练掌握三角不等式才是正道，我们在前文已反复运用之。

1.1.3　左极限与右极限

记号 1.1.12. （单侧极限点）

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 X, 以及 $a \in \mathbb{R}$, 则对于正实数 δ, 我们记

$$\begin{aligned}\mathring{U}_X^+(a,\delta) &:= \mathring{U}_{X\cap[a,+\infty)}(a,\delta) = X \cap (a, a+\delta)\\ \mathring{U}_X^-(a,\delta) &:= \mathring{U}_{X\cap(-\infty,a]}(a,\delta) = X \cap (a-\delta, a)\end{aligned}$$

分别称为点 a 关于 X 的半径为 δ 的**去心右（左）邻域**。

如果对任意 $\delta > 0, \mathring{U}_X^+(a,\delta) \neq \varnothing$, 则称 a 为 X 的一个**右极限点**；类似地，如果对于任意 $\delta > 0, \mathring{U}_X^-(a,\delta) \neq \varnothing$, 则称 a 为 X 的一个**左极限点**。

由此定义可知，左（右）极限点一定是极限点。反之未必，例如 $X = (0,1)$ 开区间，则 $a = 0$ 是 X 的极限点，而且是右极限点，但不是左极限点。此外也易知，如果 a 是 X 的极限点，则 a 是 X 的左极限点**或** a 是 X 的右极限点。与极限点类似，X 的左（右）极限点未必在 X 当中。

定义 1.1.13. （左极限）

对于函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 以及 X 的左极限点 a. 如果存在实数 A, 使得成立

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}_X^-(a,\delta), |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 f 在 $x = a$ 处的**左极限**存在, 并且称 A 为当 $x \to a$ 时 f 的左极限。此时也记作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$.

这正是俗称的“x 从左侧趋近于 a”. 类似地，如果 a 为 X 的右极限点，我们也可谈论 f 在 a 处的**右极限** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, 定义完全类似。

例题 1.1.14. 已知函数 $f(x) := \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$, 直接用左右极限的定义计算 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

证明. 断言 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. 这是因为对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta := \dfrac{1}{\log_2\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)} > 0$, 则当 $0 < x < \delta$ 时成立

$$\frac{1}{x} > \log_2\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}-1} < \varepsilon$$

所以有 $\left|\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1} - 1\right| = \left|\dfrac{2}{2^{\frac{1}{x}}-1}\right| < \varepsilon$, 于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

类似地，断言 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. 这是因为，对任意 $\varepsilon > 0$, 依然取 $\delta := \dfrac{1}{\log_2\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)} > 0$, 则当 $-\delta < x < 0$ 时，$0 < -x < \delta$, 从而 $2^{-\frac{1}{x}} > \dfrac{2}{\varepsilon} + 1$, 因此

$$\left|\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1} + 1\right| = \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{|2^{\frac{1}{x}}-1|} = \frac{2}{2^{-\frac{1}{x}}-1} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1.$ □

性质 1.1.15. 对于函数 $f: X\to\mathbb{R}$, 设 $a\in\mathbb{R}$ 既是 X 的左极限点，也是 X 的右极限点，则

$$\lim_{x\to a} f(x)\text{存在} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a^-} f(x)\text{与}\lim_{x\to a^+} f(x)\text{都存在且相等}$$

这个简单性质常用来断言极限不存在。例如前文中的 $f(x) := \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

1.1.4 自变量趋于无穷的极限

我们谈论极限时，先有极限点的概念。稍做推广，我们约定

记号 1.1.16. 对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 X,
（1）如果 X 为无界集，则称 ∞ 为 X 的一个极限点；
（2）如果 X 无上界，则称 $+\infty$ 为 X 的一个极限点；
（3）如果 X 无下界，则称 $-\infty$ 为 X 的一个极限点。

对于实数 $\delta>0$, 我们可类似定义“无穷远处的去心邻域”如下：

$$\begin{aligned}
\mathring{U}_X(\infty,\delta) &= \left\{x\in X \middle| |x|>\delta\right\}\\
\mathring{U}_X(+\infty,\delta) &= \left\{x\in X \middle| x>\delta\right\}\\
\mathring{U}_X(-\infty,\delta) &= \left\{x\in X \middle| x<\delta\right\}
\end{aligned}$$

将极限点、去心邻域的概念如此推广之后，我们容易给出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 以及 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的定义。本质上完全照抄 $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^\pm}$ 的情形。

性质 1.1.17. 一些常见的极限：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= e,\\
\lim_{x\to+\infty}\arctan x &= \frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to-\infty}\arctan x &= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

与左右极限类似，对于函数 $f: X\to\mathbb{R}$, 如果定义域 X 既没有上界也没有下界，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在且相等。这个性质常用来判别 $x\to\infty$ 的极限不存在。例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

例题 1.1.18. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)$.

遇到这种带根号的式子，分子（分母）有理化是常见的变形技巧：注意到

$$\sqrt{x^2+x-1}-x=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+x}$$

从而当 $x\to+\infty$ 时，$x-1$ 相比于 x^2 “太小可忽略不计”，从而 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+x}\approx\dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2}$. 也就是说，我们猜测当 $x\to+\infty$ 时，原式的极限为 $\dfrac{1}{2}$. 我们用定义严格证明之：

证明. 注意当 $x>1$ 时成立 $x^2+x-1>x^2$, 从而 $\sqrt{x^2+x-1}<x$, 从而当 $x>1$ 时成立

$$\begin{aligned}\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}-x}-\frac{1}{2}\right| &= \frac{\left|2x-2-x-\sqrt{x^2+x-1}\right|}{2\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)}\le\frac{\left|x-\sqrt{x^2+x-1}-2\right|}{4x}\\ &\le \frac{\left|x-\sqrt{x^2+x-1}\right|}{4x}+\frac{1}{2x}\overset{\text{再次分子有理化}}{=\!=\!=\!=}\frac{x-1}{4x\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}+\frac{1}{2x}\\ &\le \frac{x}{4x\cdot 2x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{8x}+\frac{1}{2x}\le\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

于是对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta:=\max\{1,\dfrac{1}{\varepsilon}\}$, 则当 $x>\delta$ 时，就有

$$\left|\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}-x}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$$

从而由极限的定义得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\dfrac{1}{2}$. □

例题 1.1.19. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{1+x^3}\arctan(x^2)$.

我们先猜一下这个极限等于多少。当 $x\to\infty$ 时，$1+x^3\approx x^3$, 从而 $\dfrac{x^3}{1+x^3}\approx 1$. 而此时 $x^2\to+\infty$, 故 $\arctan(x^2)\to\dfrac{\pi}{2}$. 因此猜测 $\dfrac{x^3}{1+x^3}\arctan(x^2)\approx 1\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, 所求极限为 $\dfrac{\pi}{2}$. 下面严格证明之：

证明. 首先注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3}{1+x^3}\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}\right| &= \left|\frac{x^3}{1+x^3}\left(\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{x^3}{1+x^3}-1\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right|\\ &\le \left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|\cdot\left|\arctan(x^2)-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{\pi}{2}\cdot\left|\frac{1}{1+x^3}\right|\end{aligned}$$

(这一步恒等变形以及三角不等式，是一种非常典型、标准的“分而治之”技巧)

现在，任取 $\varepsilon > 0$. 注意以下三点：

- 注意到当 $|x| > 2$ 时成立 $|x|^3 > 8 > 2$, 即 $1 < \frac{1}{2}|x|^3$, 从而由三角不等式得 $|1+x^3| \geq |x|^3 - 1 > |x|^3 - \frac{1}{2}|x|^3 = \frac{1}{2}|x|^3$, 从而 $\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right| \leq \frac{|x|^3}{\frac{1}{2}|x|^3} = 2$.
- 由于 $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \arctan\theta = \frac{\pi}{2}$, 从而存在 $M > 0$ 使得对任意 $\theta > M$ 都成立 $\left|\arctan\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. 取定这个 M, 则当 $|x| > \sqrt{M}$ 时成立 $x^2 > M$, 所以 $\left|\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.
- 当 $|x| > \sqrt[3]{\frac{\pi}{\varepsilon}+1}$ 时，有 $|1+x^3| \geq |x|^3 - 1 > \frac{\pi}{\varepsilon}$, 从而 $\left|\frac{1}{1+x^3}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}$.

现在，取 $N := \max\left\{2, \sqrt{M}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{\varepsilon}+1}\right\}$, 则当 $|x| > N$ 时，成立

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^3}{1+x^3}\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}\right| &\leq \left|\frac{x^3}{1+x^3}\right| \cdot \left|\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}\right| + \frac{\pi}{2} \cdot \left|\frac{1}{1+x^3}\right| \\
&\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就由极限的定义证明了 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{1+x^3}\arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$. □

1.1.5 无穷大量与无穷小量

设函数 $f: X \to +\infty$, 如果 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = 0$, 则称函数 f 为关于 $x \to \mathfrak{a}$ 的**无穷小量**。这里的**哥特体**符号 $\mathfrak{a}$ 用来泛指 $a, a^+, a^-, \infty, -\infty, +\infty$ 六类，对应于六种极限过程。

定义 1.1.20. （无穷大量）

对于函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$, 如果

$$\forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{U}_X(\mathfrak{a}, \delta), |f(x)| > M$$

则称当 $x \to \mathfrak{a}$ 时 $f(x)$ 趋于无穷，也称 $f(x)$ 是关于 $x \to \mathfrak{a}$ 的**无穷大量**，记作

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = \infty.$$

这里的 $\mathfrak{a}$ 依然泛指六种不同类型的极限过程。

特别注意，若 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = \infty$, 则极限 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)$ **不存在**！此外我们还有**正无穷大量、负无穷大量**的概念，即 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = +\infty, -\infty$, 这是两类特殊的无穷大量。

以下结论是每个人都应该知道的，我们述而不证：

性质 1.1.21. 对任意实数 $\alpha > 0$, 成立

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0.$$

注意到 $x\to+\infty$ 时，$\ln x$, x^α, e^x 都是无穷大量。但无穷大与无穷大直接还可以“比较大小”：无论 α 多么大，e^x 一定比 x^α“增长得快”；无论 $\alpha>0$ 多么小，$\ln x$ 一定比 x^α“增长得慢”。

例题 1.1.22. 用定义计算数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2333}\right)$.

直观地，当 n 很大时，n^2 远远大于 2333, 从而将 2333 忽略，有 $\sqrt{n^2+2333}\approx\sqrt{n^2}=n$. 从而 $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2333}\right)\approx\sin n\pi=0$. 这是直观想法，并不能数学证明。

证明. 利用三角函数诱导公式 $\sin(x+\pi)=-\sin x$, 可知

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2333}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+2333}-n)\right)$$

遇到根号，考虑分子（母）有理化技巧，从而有

$$\left|\sin\left(\pi(n^2+2333)\right)-0\right|=\left|\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+2333}-n)\right)\right|\xlongequal{\text{分子有理化}}\left|\sin\frac{2333\pi}{\sqrt{n^2+2333}+n}\right|$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 注意众所周知的不等式：

$$|\sin x|\le|x|\quad \text{对任意实数 } x \text{ 都成立}$$

因此取 $N:=\left[\frac{2333\pi}{2\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n\ge N$ 时成立

$$\left|\sin\left(\pi(n^2+2333)\right)-0\right|=\left|\sin\frac{2333\pi}{\sqrt{n^2+2333}+n}\right|\le\frac{2333\pi}{\sqrt{n^2+2333}+n}\le\frac{2333\pi}{2n}<\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2333}\right)=0$. □

同样地，无穷小量之间也可以比较“趋近于零的快慢”。我们有以下众所周知的结果：

性质 1.1.23. 当 $x\to0$ 时，成立以下：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{2}.$$

本小节最后，介绍一个重要例子：

例题 1.1.24. （调和级数发散）

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

证明. 只需注意到，对任意 $n\geq 0$，都有

$$\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+(2^n-1)}}_{\text{共 } 2^n \text{ 项}}\geq 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

因此对于任意正整数 N, 成立

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^N-1}\frac{1}{k} &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{N-1}}+\frac{1}{2^{N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^N-1}\right)\\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{\text{共 } N \text{ 项}}=\frac{N}{2}\end{aligned}$$

由此容易得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$ □

注记

正整数的倒数和是无穷大，这非常违反直觉，不信的话可以用计算器算算前几项，随着 n 增大，$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 增长得越来越慢，似乎最终会“涨停”。国内有好多业余数学爱好者（“民科”）都对这个极限进行过“深入研究”，其中比较出名的是一个自称“三江方士”的人断言该极限存在，并且 <80. 不过后来他似乎觉得哪里不对，改口说这个极限 <400. 他将这个无穷求和称为“**中华级数**”，将其极限称为“**三江常数**”。

1.1.6 海涅定理与柯西收敛准则

定理 1.1.25. （海涅定理）设函数 $f: X\to\mathbb{R}$ 以及 X 的极限点 a, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 当且仅当对 X 当中任意趋于 a 的数列 $\{x_n\}$ 都成立 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.

海涅定理是沟通数列极限与函数极限的一个桥梁，运用好这一定理可以帮助我们简化一些做题步骤。加快解题速度。这个定理通常反过来用，以说明函数极限不存在。

例题 1.1.26. 证明：函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

证明. 考虑数列 $x_n = 2n\pi$ 以及 $y_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$. 则当 $n \to +\infty$ 时 x_n 与 y_n 都趋于正无穷，但是

$$\lim_{n\to+\infty} \sin x_n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \sin y_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin x_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \sin y_n$, 这与海涅定理矛盾。从而极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在。 □

数列极限作为一种特殊的函数极限（定义域 $X = \mathbb{Z}_+$ 的函数），也有海涅定理。例如：

例题 1.1.27. 证明：数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ 不存在。

证明. 取数列 $\{(-1)^n\}$ 的两个不同子列 $\{(-1)^{2n}\}$ 与 $\{(-1)^{2n+1}\}$, 这两个子列收敛于不同的极限（1 和 -1）, 从而有海涅定理知原极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ 不存在。 □

例题 1.1.28. 已知函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期函数，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。证明：$f(x)$ 是常函数。

证明. 设 $T > 0$ 为 $f(x)$ 的一个周期。假设 $f(x)$ 不是常函数，则存在 $x, y \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) \neq f(y)$. 考虑数列 $p_n = x + nT$ 以及 $q_n = y + nT$, 则 $n \to +\infty$ 时 $\{p_n\}, \{q_n\}$ 都趋于正无穷，并且对任意 $n \geq 1$, 都有 $f(p_n) = f(x) \neq f(y) = f(q_n)$. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(q_n)$. 这与海涅定理矛盾。从而假设不成立，$f(x)$ 必为常函数。 □

定理 1.1.29. （柯西收敛准则）

设函数 $f: X \to a$ 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$. 则极限 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)$ 存在当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_X(\mathfrak{a}, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

这是关于极限的一个十分基础的结论。当 $X = \mathbb{Z}_+$ 以及 $\mathfrak{a} = +\infty$ 时为数列极限的柯西收敛准则。数列极限的柯西收敛准则是实数的根本性质，反映了实数的完备性。

使用柯西收敛准则，可以在不具体指出极限值的情况下断言函数极限存在（也就是说，“虽然我不知道极限具体是几，但极限就是存在”）；也可以用其逆否命题证明函数极限不存在。这个定理主要用于基础理论推导，在具体题目的计算上用处不大，故仅作了解。感兴趣的读者可以利用柯西收敛准则来证明本小节三个例题当中的极限不存在。而用柯西收敛准则证明极限存在，我们给出一例：

例题 1.1.30. 证明：数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$ 存在。

证明. 记 $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. 对于任意正整数 $2 \le m < n$, 成立

$$|a_m - a_n| = a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{m}$$

从而对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta := \max\{2, \frac{1}{\varepsilon}\}$, 则对任意 $\delta < m < n$, 成立

$$|a_m - a_n| \le \frac{1}{m} < \varepsilon$$

从而由柯西收敛准则可知数列极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在。 □

注记

恒等式 $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ 俗称 **“裂项”**，这是一种常见的计算技巧。此外，我们仅证明了本题目中的极限存在，但暂时无力给出具体值。等掌握了更多工具，我们会知道

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.1.7 练习题

作为最基本的训练，请用数列、函数极限的基本定义去解答以下各题，**不要使用更高级的工具，比如极限运算性质、微积分等等**。高中所学的函数性质、不等式，以及本节提到的性质、定理可直接使用。

习题 1. 用数列极限的定义证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+5} = 2$.

习题 2. 用函数极限的定义证明：$\lim_{x\to 0} x \tan x = 0$.

习题 3. 用函数极限的定义证明：$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^3}} = 1$.

习题 4. 用函数极限的定义证明：$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+x^2} = 1$.

习题 5. 用数列极限的定义证明：$\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$. 其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数。

习题 6. 证明：极限 $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

习题 7. 证明：极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 不存在。

习题 8. 考虑函数 $D(x):=\begin{cases}1 & x \text{ 是有理数}\\ 0 & x \text{ 是无理数}\end{cases}$，试利用左、右极限的海涅定理说明，对任意 $a\in\mathbb{R}$，左、右极限 $\lim\limits_{x\to a^-}D(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+}D(x)$ 都不存在。

习题 9. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)$ 不存在。

1.2 基本性质

上一节我们介绍了各种类型的数列极限的定义，以及判定极限不存在的一些基本方法：

- 左右极限不相等，则极限不存在；
- 存在两个收敛于不同极限的子列，则极限不存在（海涅定理）；
- 还可以用柯西收敛准则说明极限不存在。

本讲义主要介绍极限的计算技巧，对于极限不存在的情形不感兴趣，故以后不再花费更多笔墨去介绍判定极限不存在的技巧。至于极限的计算，我们目前只有最基本的方法：利用极限的定义。为此，我们需要先猜出极限，再套用极限的定义去证明之。用定义去证明函数极限，不可避免需要一些计算技巧，尤其是不等式放缩。

然而用极限定义来证明极限过于复杂繁琐，且难以处理“绝大多数”情形。在基础科研、工业应用、考研竞赛应试当中我们需要求解极限，仅仅用定义远远不够，我们需要探明更多已知的重要极限、发展更高级的工具，来提高求解效率。

1.2.1 四则运算性质

首先是众所周知的四则运算法则：

性质 1.2.1. （极限的四则运算）

对于函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$，以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$，并且极限 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}g(x)$ 都存在，则成立

（1）对任意实数 α,β，成立 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)+\beta\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}g(x)$；

（2）成立 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}g(x)$；

（3）若 $g(x)$ 在 $\mathfrak{a}$ 的某去心邻域 $\mathring{U}_X(\mathfrak{a},\delta)$ 当中恒不为零，则 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}g(x)}$.

注意这里的 $\mathfrak{a}$ 依然泛指 $a,a^+,a^-,\infty,+\infty,-\infty$ 六种极限过程。同样，当 $X=\mathbb{Z}_+$ 以及 $\mathfrak{a}=+\infty$，就得到数列极限的四则运算法则。此外，有 (2)(3) 容易推出两个函数相除的极限的运算法则。四则法则虽说看似容易理解，但还要小心使用条件，否则会出现以下**伪证**:

例题 1.2.2. 考虑数列 $a_n = 2^n$, 则有 $a_{n+1} = 2a_n$, 两边取 $n \to +\infty$ 的极限，得到

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (2a_n) = 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n$$

这就得到了关于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 的方程，容易解得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. 上述“证明”错在那里？

解. 显然 $n \to +\infty$ 时数列 $\{a_n\}$ 是无穷大量，故极限不存在。而上述式子在假定极限存在的情况下才能成立。 □

我们再回顾例题1.1.18, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right) = \dfrac{1}{2}$, 初学极限四则运算者常会如此解答：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-1} - \lim_{x\to+\infty} x = \cdots$$

然后振振有词地说“这是因为极限四则运算法则”。任何一个定理都有它的使用条件，只有在满足该定理的使用条件时，才能根据此定理得出相应结论。对于极限运算法则，等式“ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$” 成立的前提条件是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 都存在。而这里显然不满足此前提条件。

注记

初学者在在阅读、记忆定理时，不要仅仅记住公式，更要记住定理成立的前提条件。这些前提条件比所谓公式更重要。比如以后学到洛必达法则，好多急功近利、认知肤浅者只记得“上下求导”

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

而不理解该式子的使用条件，因此容易犯各种错误，导致困惑越来越多。这些人也常病急乱投医，参考一些比本讲义更不入流的辅导资料，强行记住“这种题目不能洛必达、那种题目不能洛必达……”等各种所谓“经验”、“口诀”。然而，究竟什么时候可以用、什么时候不可以用，定理原文的表述是最权威的。正所谓“真传一句话，假传万卷书”。

除了加减乘除，极限运算也可以开根号：对于 $f : X \to \mathbb{R}$ 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$, 如果 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)$ 存在且非负，则成立 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)}$.

例题 1.2.3. 用极限四则运算法则来计算：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)$.

解. 首先作恒等变形：

$$\sqrt{x^2+x-1}-x = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+x} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}$$

注意众所周知的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 从而由极限运算法则有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) &= 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=1-0=1\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\times 0=0\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) &= 1+0-0=1\\
\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} &= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1\\
\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right) &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\lim_{x\to+\infty}1=1+1=2
\end{aligned}$$

现在，我们得到了极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$, 从而最后再用一次极限除法法则，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

□

注记

上述写法每一步都有理有据，清楚写明了如何一步一步使用四则运算法则（以及开根号）来求处极限。但是，这种写法太啰嗦了，花费大量笔墨。稍微熟练之后，我们完全可以接受下面的写法：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}\xlongequal{\text{反复四则运算}}\frac{1-0}{\sqrt{1+0-0}+1}=\frac{1}{2}.$$

这样一行字就说清楚了。更加熟练之后，我们也完全可以这样写：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

不加声明，直接跳步。

我们用“熟练的写法”，看一道简单的例题：

例题 1.2.4. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5}{3x^4-7x}\arctan x.$

解. 注意众所周知的极限 $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$（这句废话可以省略），从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-5}{3x^4-7x}\arctan x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x^4}}{3-\frac{7}{x^3}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{1-0}{3+0}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

□

函数的定义域格外重要，我们再来看一道陷阱题：

例题 1.2.5. 计算极限：$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^x}\right)$.

解. 看到“$x\to\infty$”要多加小心。注意本题中的函数 $\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^x}$ 的定义域 $X=(0,+\infty)$, 从而这里的 $x\to\infty$ 其实就是 $x\to+\infty$.

（严格地说，沿用本讲义记号，请读者验证对任意 $\delta>0$ 都有 $\mathring{U}_X(\infty,\delta)=\mathring{U}_X(+\infty,\delta)$）

而当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}$ 与 $\dfrac{1}{e^x}$ 都趋于 0, 从而原极限为 0. □

注记

这道题的阴险之处在于，有人可能会断言该极限不存在：假设极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^x}\right)$ 存在，记其极限值为 A; 又因为 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，所以由极限运算法则得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{e^x}-\frac{\ln x}{x}\right)=A-0=A$$

但是另一方面，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}$ 不存在，因为 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时 $\dfrac{1}{e^x}$ 分别趋于 $0,+\infty$.

上述做法错误之处在于偷换 $\dfrac{1}{e^x}$ 的定义域。要特别注意，本题中的函数定义域 X 始终为 $(0,+\infty)$; 虽然 $\dfrac{1}{e^x}$ 在整个实数 $\mathbb{R}$ 上都有定义，然而在本题语境下它的定义域被限制到了 $(0,+\infty)$ 上。

事实上，极限四则运算也能推广到某些极限不存在的情形：例如无穷大量。关于无穷大，有以下显然的“运算法则”:

$$\begin{aligned}\infty\times\infty &= \infty,\quad (+\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,\\ \frac{O(1)}{\infty} &= 0,\quad O(1)+\infty=\infty.\end{aligned}$$

其中 $O(1)$ 代表有界函数。上述非正式的表述可被严格地写成以下：

性质 1.2.6. 设函数 $f, g : X \to \mathbb{R}, \mathfrak{a}$ 是 X 的一个极限点。则：

（1）$\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$,

（2）$\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}(-f(x)) = -\infty$,

（3）若 $f(x)$ 在 $\mathfrak{a}$ 的某个邻域有界，且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} g(x) = \infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x) + g(x) = \infty,$$

（4）两个正无穷大量相加仍为正无穷大量。

这里的 $x \to \mathfrak{a}$ 依然泛指 $x \to a, a^+, a^-, \infty, +\infty, -\infty$ 六种极限过程。特别注意第（3）条，有界量除以无穷大量等于无穷小量，其中“有界量”未必极限存在。此外还有很多与第（4）条类似的结果，比如正无穷大减去负无穷大等于正无穷大，等等。

例题 1.2.7. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

解. 注意 $x \to +\infty$ 时 $\sqrt{x}$ 为无穷大量，而 $|\sin x| \le 1$ 有界，从而立刻得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$. □

注记

虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在，但不妨碍使用上述性质。此外，由上述性质的（1）（3）可以推出，有界量乘以无穷小量等于无穷小量。

当然，我们更会遇到以下情况：

- 两个无穷大量相除；
- 两个无穷小量相除；
- 两个正无穷大量相减

对于这些情况，（关于无穷大量的）极限四则运算法则失效，无法直接使用。此时我们可通过适当变形转化或者用更高级的工具来求解。

1.2.2 极限复合法则

仅凭四则运算依然不够。对于函数来说，函数复合是十分基本、重要的运算，求复合函数的极限也有相应的法则。首先回顾一些基本概念：

定义 1.2.8. （连续函数）

设函数 $f: X \to \mathbb{R}$，以及 $a \in X$ 为定义域当中的一点。如果

$$a \text{ 不是 } X \text{ 的极限点} \quad \text{或者} \quad a \text{ 是 } X \text{ 的极限点且} \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $a \in X$ 处连续。如果 f 在定义域 X 的每一点处都连续，则称 f 在定义域 X 连续。

例如，数列是定义在 $X = \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数。注意到 $X = \mathbb{Z}_+$ 的任何一点都不是极限点，从而根据这个定义，任何数列，作为函数，都是连续函数。这非常反直觉，数列明明是“离散”的，但在这个定义之下它是连续函数，妙哉妙哉。如此定义连续性，是因为考虑到了定义域 X 的“形状”的多样性（可能“奇形怪状”）。假如 X 是区间（或者有限个区间的并），则这里定义的连续性与通常高数教材中的连续性是一样的。

定理 1.2.9. （极限的复合法则的简易版本）

设函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in X$ 处连续。函数 $g: Y \to \mathbb{R}$ 以及 Y 的极限点 $\mathfrak{a}$. 如果函数 f 的像集包含于 Y, 并且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x) = x_0$, 则成立

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)) = g(f(x_0)).$$

之所以叫做“简易版本”，是因为假定外层函数 $g(x)$ 在定义域的一点处连续，这个条件过于强。即使如此，这个结果一般来说够用了，因为我们“常见的函数”是连续的。其中“常见的函数”就是所谓的**初等函数**，即多项式函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数经过有限次加减乘除以及复合运算所得的函数。

定理 1.2.10. 初等函数在其定义域上处处连续。

例如 $\ln\left(\sin x + \dfrac{1}{e^x+1}\right)$ 在其定义域处处连续。初等函数的连续性保证了我们在“常见情况下”可以使用极限的复合法则。

例题 1.2.11. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1} \sin \dfrac{x^2\pi}{x^4+3x-1}$.

解. 令 $g(x) := \sin x$, 以及 $f(x) := \dfrac{x^2\pi}{x^4+3x-1}$. 则我们只需计算 $\lim\limits_{x\to1} g(f(x))$. 由极限四则运算法则易知 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{1^2\pi}{1^4+3\cdot1-1} = \dfrac{\pi}{3}$, 又因为 $g(x)$ 在定义域中处处连续，特别地在 $\dfrac{\pi}{3}$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to1} \sin\frac{x^2\pi}{x^4+3x-1} = \sin\left(\lim_{x\to1}\frac{x^2\pi}{x^4+3x-1}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

注记

上述证明也是，虽然清楚严谨，但啰嗦麻烦。我们也可以接受如下表述方式：当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{x^2\pi}{x^4+3x-1}$ 趋于 $\dfrac{\pi}{3}$, 从而 $\sin\dfrac{x^2\pi}{x^4+3x-1}$ 趋于 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

例题 1.2.12. 计算数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{n^2+\arctan n}{3n^2+1}}$.

解. 注意 $|\arctan n| < \dfrac{\pi}{2}$ 有界，且当 $n \to +\infty$ 时 $3n^2+1$ 为无穷大，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arctan n}{3n^2+1}=0$. 继续使用极限四则运算法则，得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\arctan n}{3n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n^2}}+\frac{\arctan n}{3n^2+1}\right)=\frac{1}{3+0}+0=\frac{1}{3}.$$

最后使用极限复合法则，立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n^2+\arctan n}{3n^2+1}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

□

三角函数有着很丰富的性质，比如倍角公式，周期性，一些对称性等等。我们要学会从函数性质入手将一些我们未曾遇到的问题转化为我们曾经遇到过的问题。比如再看一道例题：

例题 1.2.13. 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

解. 首先利用诱导公式 $\sin(x+\pi)=-\sin x$ 进行恒等变形：

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\left[(-1)^n\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right)\right]^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{\pi}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{\pi}{2}$, 从而由极限复合法则（$f(x)=\sin^2 x$ 连续）立刻得到

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

□

例题 1.2.14. 计算下述两个极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+2333n+\arctan n}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+2333x+\arctan x}}.$$

解. 第一个为数列极限，变形后用四则运算法则即可：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+2333n+\arctan n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2333}{n}+\frac{\arctan n}{n^2}}}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{\sqrt{1+0+0}}=2.$$

第二个为函数极限。遇到“$x\to\infty$”我们要特别小心。记 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+2333x+\arctan x}}$, 则与第一小题类似可算出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 但是，也容易计算出 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 不相等，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在。 □

与四则运算法则类似，极限复合法则也可推广到无穷大量的情况。比如这个例题：

例题 1.2.15. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$.

解. 令 $x=e^{-t}$, 即 $t=-\ln x$. 从而当 $x\to 0$ 时，$t=-\ln x\to+\infty$. 于是

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\xlongequal{\text{性质1.1.21}}0.$$

□

注记

事实上，$x\ln x=\dfrac{-\ln x}{e^{-\ln x}}$. 如果我们记 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 以及 $f(x)=-\ln x$, 则

$$x\ln x=g(f(x)),$$

这就表示成了复合函数的形式。通常我们利用复合法则求极限时，解题过程通常像本例一样表述为“令 $x=e^{-t}$”的样子，即**换元法**。以后我们要熟练如此换元，但心里始终要清楚，所谓“换元”其实是使用极限复合法则。

事实上，对于任意 $\alpha>0$（无论 α 多么接近 0）以及任意 $\beta>0$（无论 β 多么接近 $+\infty$），都有 $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\ln^\beta x=0$. 虽然 $x\to 0$ 时 $\ln x$ 为（负）无穷大，但它趋向于无穷的“速度太慢”。

1.2.3 重要极限

求解极限的基本方法是：

- 基本的极限运算法则（四则运算、复合函数）；
- 众所周知的基本极限。

由众所周知的基本极限，配以运算法则，就能求解相当一部分极限。我们已经熟悉了极限的四则运算、复合法则；本小节将盘点众所周知的极限。首先，我们有以下：

- 设 $f(x)$ 为初等函数，x_0 为其定义域中任意极限点，则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- 一些常见的无穷大量、无穷小量，例如

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\quad \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty$$

  等等等等……
- 无穷大量的比较，见性质1.1.21.
- 无穷小量的比较，见性质1.1.23.

除此之外，我们还有重要极限：

性质 1.2.16. （重要极限）

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} &= e^\alpha,\quad (\forall \alpha\in\mathbb{R}),\\
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= e,\\
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) &= \gamma.
\end{aligned}$$

其中 $\gamma\approx 0.577$ 为欧拉常数。

关于上述重要极限，首先格外小心，不要想当然认为下题的答案也是 e:

例题 1.2.17. 证明：$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1.$

证明. 注意到 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, 之后考虑换元 $t=\frac{1}{x}$, 则当 $x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

由性质1.1.21以及换元（把 $t+1$ 看成一个整体）容易得到 $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{1+t} = 0$, 从而

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{1+t}\cdot\frac{1+t}{t} = 0\times 1 = 0$$

从而 $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^0 = 1.$ □

注记

上题解答的表述依然啰嗦。等熟练之后，完全可以这样写：

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1$$

不加任何别的解释，一行搞定。

例题 1.2.18. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}$.

解. 使用重要极限以及极限运算律，有：

$$\text{原式} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^4 = e^2\cdot(1+0)^4 = e^2.$$

□

例题 1.2.19. 计算数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解. 记 $H_n := 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 则只需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n}-H_n)$. 事实上，

$$\lim_{n\to+\infty}(H_{2n}-H_n) = \lim_{n\to+\infty}\Big[(H_{2n}-\ln(2n))-(H_n-\ln n)+\ln 2\Big] = \gamma-\gamma+\ln 2 = \ln 2.$$

□

1.2.4 练习题

习题 10. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

习题 11. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$.

习题 12. 计算极限：$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\arctan\sqrt[3]{x}+\tan\dfrac{1}{e^{x^2}}\right)$.

习题 13. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x^2+2}{x+3}+1\right)$.

习题 14. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+1}{x^3+2x+1}$.

习题 15. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, 其中 n 为正整数。

习题 16. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

习题 17. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}$.

习题 18. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}$.

习题 19. 计算极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)$.

习题 20. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$.

习题 21. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$, 其中 $a>0$ 为常数。

习题 22. 计算极限：$\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{1+\sin\dfrac{1}{x}}$.

习题 23. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n$.

习题 24. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$ 不存在。

习题 25. 证明数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

习题 26. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$ 求 a,b 的值.

习题 27. 考虑二元函数 $f(m,n):=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^n$, 其中 m,n 取正整数。计算极限：

$$(1).\ \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}f(m,n),\qquad (2).\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}f(m,n),\qquad (3).\ \lim_{k\to+\infty}f(k,k).$$

习题 28. 用函数极限的定义证明：对于函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$, 如果 f 为 X 上的有界函数（注意 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)$ 可能不存在），且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}g(x)=0$, 则成立 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)g(x)=0$.

1.3 等价代换法

有了极限的四则运算、复合法则，我们可以轻易地求一些基本极限。本节介绍的等价代换法，本质上是使用极限四则运算法则的一种技巧。

1.3.1 函数的渐近等价

定义 1.3.1. （渐近等价）

设函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$, 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$. 如果存在定义在 $\mathfrak{a}$ 附近的函数 $\alpha(x)$, 使得在 $\mathfrak{a}$ 附近成立 $f(x) = \alpha(x)g(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} \alpha(x) = 1$, 则称当 $x \to \mathfrak{a}$ 时，f 与 g **渐近等价**，记作

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \to \mathfrak{a}).$$

例如，考虑恒为零的常函数 $f(x) = g(x) \equiv 0$, 则当 $x \to +\infty$（或者任何别的 $\mathfrak{a}$）时成立渐近等价 $f(x) \sim g(x)$. 这是因为，取 $\alpha(x) \equiv 1$ 为恒为 1 的常函数，则 $f(x) = \alpha(x)g(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} \alpha(x) = 1$.

注记

通常的“高数”教材将渐近等价简单粗暴地定义为函数之比的极限为 1:

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

这种定义是不好的，按照这种定义甚至无法说明恒为 0 的常函数与它自己渐近等价。

但在实际操作中，我们常见的函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 在极限点 $\mathfrak{a}$ 附近满足：f, g 在 $\mathfrak{a}$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}_X(\mathfrak{a}, \delta)$ **恒不为零**。在此情形下，本讲义中的渐近等价与通常高数书里简单粗暴的定义是同一回事。特别地，当 $f(x) \sim g(x)$, $(x \to \mathfrak{a})$ 时，若 f, g 都是无穷小量，则称 f 与 g 为**等价无穷小**；当它们都是无穷大量时也可谈论**等价无穷大**。

例题 1.3.2. 当 $x \to \infty$ 时，成立等价无穷大：

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 3x + \sqrt{x}} &\sim x \\
x^3 + 2x^2 + 6x + 1 &\sim x^3 \\
e^x + x^5 \ln^2 x + x + \frac{1}{x} &\sim e^x
\end{aligned}$$

证明. 这是因为，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + \sqrt{x}}}{x} &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1. \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 6x + 1}{x^3} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1. \\
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^5 \ln^2 x + x + \frac{1}{x}}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^5 \ln^2 x}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) = 1.
\end{aligned}$$

□

关于等价量，有以下非常重要的定理：

定理 1.3.3. （等价替换定理）

设函数 $f, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$, 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$, 并且满足渐近等价

$$g_1(x) \sim g_2(x),\ (x \to \mathfrak{a}),$$

则有以下：

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_1(x)\text{存在}\quad\text{当且仅当}\quad\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x)\text{存在}$$

并且若上述两者都存在，则相等。

证明. 由渐近等价的定义可知存在定义在 $\mathfrak{a}$ 附近的函数 $\alpha(x)$ 使得 $g_1(x) = \alpha(x)g_2(x)$ 并且

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \alpha(x) = 1.$$

因此，如果 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x)$ 存在，则由极限乘法法则可知

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_1(x) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x)\alpha(x) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x) \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \alpha(x) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x)$$

反之，若 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_1(x)$ 存在，则只需注意到 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}} \dfrac{1}{\alpha(x)} = 1$, 之后完全类似。 □

注记

此定理也可以表述为：若 $g_1 \sim g_2,\ (x \to \mathfrak{a})$, 则当下式有意义时成立

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_1(x) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)g_2(x)$$

表面上看 $g_1(x)$ 被“替换为” $g_2(x)$, 故名曰“等价替换”。这个定理并不复杂，无非是极限乘法法则的推论。

初学者应反复阅读此定理的陈述，以及定理证明！

1.3.2 “0/0”型未定式

我们有众所周知的等价无穷小量：

性质 1.3.4. 当 $x \to 0$ 时，成立：

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim x \\ e^x - 1 - x &\sim \frac{1}{2}x^2 \\ \sin x &\sim x \end{aligned}$$

换句话说，有基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\frac{1}{2}x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

以上可以由 e 与三角函数的最基本概念推出，这里从略。有人会说这也可以用微分学，比如泰勒公式，直接得到。然而这种观点很危险，有本末倒置、循环论证的嫌疑。

由函数极限复合法则（换元法），我们立刻得到：

推论 1.3.5. 设函数 $f: X\to\mathbb{R}$ 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$, 如果 $\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)=0$, 则当 $x\to\mathfrak{a}$ 时成立：

$$\begin{aligned} e^{f(x)}-1 &\sim f(x)\\ e^{f(x)}-1-f(x) &\sim \frac{1}{2}f^2(x)\\ \sin f(x) &\sim f(x)\end{aligned}$$

运用等价无穷小量以及等价替换，我们可以处理 $\dfrac{0}{0}$ **型未定式**，即形如 $\lim_{x\to\mathfrak{a}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限，其中 f,g 都是 $x\to\mathfrak{a}$ 的无穷小量。

例题 1.3.6. 计算极限：$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}$.

解. 当 $x\to 0$ 时，因为等价无穷小 $\sin x\sim x$, 从而由等价替换定理得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$$

之后注意到 $e^x-1\sim x$ 并使用等价替换定理可得原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$. □

例题 1.3.7. 计算极限：$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{\sin(x^2)}$.

证明. 因为 $x\to 0$ 时 $e^x-1-x\sim\dfrac{1}{2}x$, 将 x 换成 $2x$ 得到 $e^{2x}-1-2x\sim\dfrac{1}{2}(2x)^2=2x^2\quad(x\to 0)$; 又由于 $\sin x\sim x$, 将 x 换成 x^2 得到 $\sin(x^2)\sim x^2$, $(x\to 0)$. 从而由等价替换定理立刻得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

□

以上两个例题介绍了等价替换定理的基本用法。性质1.3.4的三个等价无穷小关系被称为**基本等价无穷小**。由基本等价无穷小，以及极限运算性质，我们可以得到更多常用的等价无穷小：

定理 1.3.8. （常用等价无穷小）

设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为常数，则当 $x \to 0$ 时成立以下等价无穷小：

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\sim x \\
\ln(1+x)-x &\sim -\frac{1}{2}x^2 \\
\cos x - 1 &\sim -\frac{1}{2}x^2 \\
\tan x &\sim x \\
\tan x - \sin x &\sim \frac{1}{2}x^3 \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x &\sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2
\end{aligned}$$

证明. 我们使用极限运算法则以及三个基本等价无穷小（性质1.3.4），可得：

- 考虑换元 $t = \ln(1+x)$, 即 $x = e^t - 1$. 则当 $x \to 0$ 时有 $t \to 0$. 从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1$$

从而 $\ln(1+x) \sim x$, $(x \to 0)$.

- 仍考虑换元 $t = \ln(1+x)$, 即 $x = e^t - 1$, 则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t-(e^t-1)}{(e^t-1)^2} = -\lim_{t\to 0}\frac{e^t-t-1}{(e^t-1)^2} \xlongequal{\text{等价替换}} -\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

所以 $\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$, $(x \to 0)$.

- 注意二倍角公式，有 $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$. 从而立刻得到 $\cos x - 1 \sim -2(\frac{x}{2})^2 = -\frac{1}{2}x^2$, $(x \to 0)$.
- 注意 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, 从而有渐近等价 $\cos x \sim 1$, $(x \to 0)$（虽然这不是等价无穷小）。于是由等价替换定理可知 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1} = x$, $(x \to 0)$.
- 注意 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} \xlongequal{\text{等价替换}} \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

从而 $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$, $(x \to 0)$.

- 注意恒等式 $(1+x)^\alpha = e^{\ln[(1+x)^\alpha]} = e^{\alpha\ln(1+x)}$. 换元 $t = \ln(1+x)$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha t}{t} = \alpha$$

从而 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $(x \to 0)$.

- 仍然换元 $t = \ln(1+x)$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{x^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1-\alpha(e^t-1)}{(e^t-1)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1-\alpha t-\alpha(e^t-t-1)}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{\alpha t}-1-\alpha t}{t^2}-\alpha\frac{e^t-t-1}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\alpha t)^2}{t^2}-\alpha\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\end{aligned}$$

所以 $(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x \sim \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2, (x\to 0)$.

□

注记 上述等价无穷小都非常基本，读者应该熟练掌握。不仅要掌握结论本身，它们的推导过程更是非常优秀的例题。以后我们将不加声明直接使用上述结论。

推论 1.3.9. （反三角函数）当 $x\to 0$ 时，成立渐近等价：

$$\begin{aligned}\arcsin x &\sim x \\ \arctan x &\sim x.\end{aligned}$$

证明. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin u} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u} = 1$. 至于 $\arctan x$, 只需换元 $x = \tan v$, 其余完全类似。 □

至此，我们已经介绍过的知识可以解决绝大多数（90% 以上）考研难度的极限计算题。

例题 1.3.10. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解. 注意 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x) = 2$, 从而有渐近等价 $1+\cos x \sim 2, (x\to 0)$. 此外还有 $x\to 0$ 的等价无穷小 $\ln(1+x)\sim x$, $\sin x \sim x$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\sin\frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{x} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

其中最后一步是因为，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ 为有界量，$x\to 0$ 时 x 为无穷小量，有界量乘以无穷小量仍为无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. □

例题 1.3.11. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos 2x}$.

解. 注意 $t\to 0$ 时成立 $(1+t)^\alpha-1\sim \alpha t$, 这里取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, 并且换元 $t=-x^2$, 立刻得到 $\sqrt{1-x^2}-1\sim -\dfrac{1}{2}x^2$, $(x\to 0)$. 类似也有 $1-\cos 2x\sim \dfrac{1}{2}(2x)^2=2x^2$, $(x\to 0)$, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

□

例题 1.3.12. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+9}}{x-7}$.

注意到 $x\to 7$ 时，$\sqrt[3]{x+1}$ 与 $\sqrt[4]{x+9}$ 都趋于 2, 从而原题的分子趋于 0; 而分母显然也趋于 0. 看来这是比较棘手的 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式。此外，本题中 $x\to 7$, 不是之前熟悉的 $x\to 0$ 的情形，于是我们首先通过换元 $t=x+7$ 转化为 $t\to 0$ 的情形，再伺机等价替换。

解. 换元 $t=x+7$, 则考虑恒等变形

$$\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+9}}{x-7}=2\cdot\frac{\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}}}{t}=2\left(\frac{\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{t}-\frac{\left(1+\frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{t}\right)$$

再利用 $t\to 0$ 的等价无穷小 $(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t$ （其中取 α 为 $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}$）可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+9}}{x-7} &= \lim_{t\to 0}2\left(\frac{\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{t}-\frac{\left(1+\frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{t}\right)\\ &= 2\left(\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{t}\right)\\ &= 2\left(\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{8}}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{16}}{t}\right)=2\times\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{64}\right)=\frac{5}{96}.\end{aligned}$$

□

例题 1.3.13. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$.

首先观察当 $x\to 0$ 时分子分母都趋于 0, 从而这也是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式。分母 $\tan^2 x$ 可直接等价替换为 x^2, 而分子的处理略有技巧。

解. 首先恒等变形 $(3+2\sin x)^x - 3^x = 3^x\left[\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)^x - 1\right] = 3^x\left(e^{x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}-1\right)$. 当 $x \to 0$ 时，$3^x \to 1$. 记 $f(x) := x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)$, 则 $f(x)$ 是 $x \to 0$ 的无穷小量，于是有等价替换 $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$. 此外，也将 $\tan^2 x$ 等价替换为 x^2, 从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x - 3x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x\left(e^{x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}-1\right)}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}{x}$$

继续等价替换，记 $g(x) := \frac{2\sin x}{3}$, 则 $g(x)$ 是 $x \to 0$ 的无穷小量，从而有等价替换 $\ln(1+g(x)) \sim g(x)$, $(x \to 0)$, 因此

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.$$

□

例题 1.3.14. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

解. 当 $x \to 0$ 时 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小，从而当 $x \to 0$ 时有渐近等价 $\tan\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) \sim x^2\sin\frac{1}{x}$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0.$$

□

注记

注意函数 $\frac{\tan\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ 的定义域在 $x=0$ 附近比较“坏”。尽管如此，$x=0$ 的确是该函数定义域的极限点，在本讲义里所定义的函数极限意义下，我们可谈论 $x \to 0$ 时的极限。然而有些“高数”书对函数定义域有所顾虑，认为该极限不存在。这种顾虑其实完全没必要。

等价代换法也适用于一些数列极限：

例题 1.3.15. 设 x 为给定的常数，计算数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n}$.

证明. 考虑关于 t 的函数 $f(t) = 2^t\sin\frac{x}{2^t}$. 如果函数极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} 2^t\sin\frac{x}{2^t}$ 存在，则由海涅定理（定理1.1.25）可知

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n} = \lim_{t\to+\infty} 2^t\sin\frac{x}{2^t}.$$

于是我们只需计算该函数极限。为此，考虑换元 $u := \frac{x}{2^t}$, 则 $t \to +\infty$ 时有 $u \to 0$, 所以

$$\lim_{t\to+\infty} 2^t \sin\frac{x}{2^t} = \lim_{u\to 0} x \cdot \frac{\sin u}{u} = x.$$

所以由海涅定理立刻有 $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} = x$. □

例题 1.3.16. 设 $a > 0$ 为给定常数，计算数列极限：$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$.

解. 记函数 $f(x) := x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. 我们先来计算函数极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. 令 $t = \frac{1}{x}$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\ln a} - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\ln a}{t} = \ln a.$$

因此由海涅定理立刻得 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \ln a$. □

1.3.3 阴险的例题

在使用极限四则运算法则与等价替换定理时，要格外小心谨慎。所谓“**小心谨慎**”，是指像律师阅读法律条文企图钻法律空子那样，阅读性质1.2.1, 性质1.2.6 以及定理1.3.3，仔细揣摩他们的适用条件。本小节介绍几个容易出错的阴险例题，希望引起读者警惕。

例题 1.3.17. 计算极限：(1). $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x}$, (2). $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

批判一番. 注意当 $x \to 0$ 时的等价无穷小 $\ln(1+x) \sim x$, 从而

$$(1).\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x} = 0, \qquad (2).\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^2} = 0.$$

□

注记

表面上看，(1)(2) 问的上述解法都将 $\ln(1+x)$ 替换为 x. 但是 (1) 的结果正确，而 (2) 结果错误。

点评. 请读者仔细阅读等价替换定理（定理1.3.3）的表述的**原文**：容易知道这里的 (1)(2) **都不适用**等价替换定理。（粗俗地说，等价替换定理的适用条件之一是：“被替换的部分”要与“其余部分”相乘；而不能出现相加减。毕竟，等价替换定理是极限乘法法则的推论。ps: 读者不要去记这段灰字，应该把精力花在钻研等价替换定理的原文上。）

(1) 的“替换”其实正确，但**严重跳步**，表述方式不好。我们把跳的步骤补全，有如下完整详细过程：

$$\begin{aligned}
\text{因为}\quad & \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\\
\text{又因为}\quad & \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\\
\text{所以由极限四则运算法则，}\quad & \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1-1=0.
\end{aligned}$$

接下来问题来了，第 (2) 问可不可以这样做呢？请欣赏以下**诡辩**：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{(a)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\overset{(b)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\overset{(c)}{=\!=}\lim_{x\to -}\frac{x-x}{x^2}\overset{(d)}{=\!=}0.$$

这里 (a) 是因为极限加减法则，(b) 是对第一项使用等价替换，(c) 是极限加减，(d) 没问题。上述蓝字之所以是诡辩、伪证，是因为第 $(a)(c)$ 步**非法**使用极限四则运算（加减）。（请读者阅读极限四则运算法则原文，见性质1.2.1。通过阅读原文可知，等式 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 成立的前提条件之一是：极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 首先要都存在。而在本题当中，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\infty$ 不存在，故不适用通常的极限四则运算。注意这里虽然这里极限不存在，但趋于无穷大不算“太坏”，我们还有推广的、关于无穷大量的运算法则，见定理1.2.6. 可惜，两个无穷大量相减不适用此法则。） □

本题第 (2) 问的正确解法是，使用 $x\to 0$ 时的等价无穷小 $\ln(1+x)-x\sim -\frac{1}{2}x^2$, 立刻有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

注记

学习数学不可一知半解，例如学习极限四则运算、等价替换时，不可以只记公式

$$\lim(f+g)=\lim f+\lim g,\quad (g_1\sim g_2)\Rightarrow(\lim fg_1=\lim fg_2)$$

公式成立的前提条件，作为定理的一部分，更加重要，更应该烂熟于心。否则只知其一不知其二，在接下来的例题里更容易犯错。

阴险的例题还有很多，比如这个：

例题 1.3.18. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$.

批判一番. 当 $x\to 0$ 时，$x+x^2$ 为无穷小量，因此有渐近等价

$$\ln(1+x+x^2)\sim x+x^2,\quad (x\to 0)\tag{$*$}$$

于是等价替换得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x}{x^2}=1.$$

□

注记

渐近等价关系 (∗) 正确；但可惜上述解法是错的（答案也是错的），非法使用等价替换。等价替换要求“被替换的部分”与“其余部分”相乘（或相除），这里显然不满足。如果企图像上例那样狡辩，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln 1+x+x^2)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\cdots$$

这样虽然合法使用等价替换，但非法使用极限四则运算（加减）。原因类似。

正确的解法如下：

正解. 注意 $x\to 0$ 的等价无穷小 $\ln(1+x)-x\sim\frac{1}{2}x^2$, 将 x 换成 $x+x^2$, 得到

$$\ln(1+x+x^2)-(x+x^2)\sim -\frac{1}{2}(x+x^2)^2,\quad (x\to 0)$$

所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-(x+x^2)+x^2}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-(x+x^2)}{x^2}\\ &= 1+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(x+x^2)^2}{x^2}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(1+x)^2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

注记

当然，非法使用等价替换的方式五花八门，比如有些新人疑惑不解: 当 $x\to\infty$ 时显然有渐近等价 $1+\frac{1}{x}\sim 1$, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty}1^x=1.$$

而众所周知这个极限值为 e. 仔细阅读等价替换定理的原文，易知上述 (∗) 的替换是非法的（即，不满足该定理成立的前提条件）。

1.3.4 “∞/∞”型未定式

所谓“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，是指形如

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\frac{f(x)}{g(x)}$$

的极限计算，其中 f,g 都是 $x\to\mathfrak{a}$ 时的无穷大量。我们其实已经很熟悉这种未定式，比如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+5}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+\sqrt{x}}}{3x+\sqrt{x}}$ 等等。我们的解决方法是分子分母同时适当乘（除）一些东西以解除这种未定式。此外，还可以注意到 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$，而 $\frac{1}{f(x)}$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 都为 $x\to\mathfrak{a}$ 的无穷小量，这就转化成了 $\frac{0}{0}$ 型，然后再考虑等价无穷小替换。

当然还有所谓“$0\cdot\infty$”型未定式，即无穷大量与无穷小量相乘，这可以轻易转化成 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$，本质上并没有特别之处。

例题 1.3.19. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{\ln x}}(\sqrt{\ln x})^x}{(\sqrt{x})^{\ln x}(\ln x)^{\sqrt{x}}}$.

当 $x\to+\infty$ 时，分子分母都为无穷大量，这是典型的 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式。此题意图让我们比较分子与分母谁趋于无穷的“速度块”。

解. 取对数再取指数，有恒等式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{\ln x}}(\sqrt{\ln x})^x}{(\sqrt{x})^{\ln x}(\ln x)^{\sqrt{x}}}=\exp\left(\ln^{\frac{3}{2}}x+\frac{1}{2}x\ln\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x-\sqrt{x}\ln\ln x\right).$$

易知当 $x\to+\infty$ 时，有无穷大量阶的比较：

$$x\ln\ln x\gg\sqrt{x}\ln\ln x\gg\ln^2 x\gg\ln^{\frac{3}{2}}x$$

（其中 $f(x)\gg g(x),(x\to+\infty)$ 的含义是：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$）从而易知有等价无穷大量

$$\ln^{\frac{3}{2}}x+\frac{1}{2}x\ln\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x-\sqrt{x}\ln\ln x\sim\frac{1}{2}x\ln\ln x,\quad(x\to\infty)$$

所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{\ln x}}(\sqrt{\ln x})^x}{(\sqrt{x})^{\ln x}(\ln x)^{\sqrt{x}}}&=\exp\lim_{x\to+\infty}\left(\ln^{\frac{3}{2}}x+\frac{1}{2}x\ln\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x-\sqrt{x}\ln\ln x\right)\\&=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x\ln\ln x=+\infty.\end{aligned}$$

□

例题 1.3.20. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\tan\dfrac{1}{x^2}-\sin\dfrac{1}{x^2+x}\right)$.

解. 注意当 $u\to 0$ 时有等价无穷小

$$\tan u-\sin u\sim\frac{1}{2}u^3$$

令 $u=\dfrac{1}{x^2}$, 则有 $x\to\infty$ 时的等价无穷小

$$\tan\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^6}.$$

我们考虑把本题向上式“靠拢”（即，凑这一项）：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^3\left(\tan\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}\right) &= \lim_{x\to\infty} x^3\left(\tan\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}\right)\\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\frac{1}{x^6}}_{=0}+\lim_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}\right).
\end{aligned}$$

至于 $\sin\dfrac{1}{x^2}-\sin\dfrac{1}{x^2+x}$ 这一项，由和差化积公式可知

$$\sin\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}=2\sin\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x}}{2}\underbrace{\cos\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}}{2}}_{\to 1}\sim 2\sin\frac{1}{2x^2(x+1)}\sim 2\cdot\frac{1}{2x^2(x+1)}\sim\frac{1}{x^3},\quad (x\to\infty)$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\lim_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\frac{1}{x^3}=1.$$

□

1.3.5 “1^∞” 型，“0^0” 型与 “$\infty-\infty$” 型未定式

求极限时，还有一类常见的未定式：形如

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)},$$

其中 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$,并且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. 这是所谓的“$1^\infty$”型未定式。此类的典型代表是 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

注意到 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, 从而只需计算 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ 即可，而这是 $\infty\cdot 0$ 型未定式，我们熟悉。

例题 1.3.21. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

解. 注意恒等式 $\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$. 再注意 $u\to 0$ 的等价无穷小

$$\ln(1+u)-u\sim-\frac{1}{2}u^2,\quad(u\to 0)$$

换元 $u=\dfrac{1}{x}$, 则有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\sim-\dfrac{1}{2x^2}$, $(x\to\infty)$. 于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=e^{-\frac{1}{2}}$. □

注记

此题阴险，有常见的错解：注意 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, 从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x}{e^x}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

这非法使用等价替换定理，导致结果出错。

例题 1.3.22. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}.$$

解. 首先注意 $\cos x^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=e^{\ln\left(\cos x^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}\right)}=e^{\frac{\ln\cos x}{x-\ln(1+x)}}$. 而当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1$ 为无穷小量，从而有渐近等价

$$\ln\cos x=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2,\quad(x\to 0)$$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=1.$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=e^1=e$. □

例题 1.3.23. 计算极限：$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

解. 首先有恒等式 $\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$. 而当 $x\to\infty$ 时，$\arctan x - \frac{\pi}{2}$ 为无穷小量，从而有

$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \ln\left[1+\frac{2}{\pi}\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \sim \frac{2}{\pi}\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right), \quad (x\to+\infty).$$

之后反复使用极限复合法则（换元法），有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\pi}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right) \xlongequal{x=\tan\theta} \lim_{\theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{2}{\pi}\tan\theta\cdot\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\xlongequal{\theta-\frac{\pi}{2}=t} \lim_{t\to 0^-}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos t}{-\sin t}\cdot t = -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

从而原极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$. □

还有一种未定式：形如 $\lim_{x\to\mathfrak{a}} f(x)^{g(x)}$, 其中 f,g 都是 $x\to\mathfrak{a}$ 的无穷小量，这是所谓“0^0”型。此类型的解法与 1^∞ 型完全一样，只需先作恒等变形 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

例题 1.3.24. 计算极限：$\lim_{x\to 0^+} x^x$.

解. 注意我们早已知道 $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$, 从而

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

□

还有一类极限计算，会出现形如 $\lim_{x\to\mathfrak{a}}[f(x)-g(x)]$ 的部分, 其中 f,g 都为 $x\to\mathfrak{a}$ 的无穷大量。对于这种情况，我们要适当恒等变形（比如通分）转化为熟悉的 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

例题 1.3.25. 计算极限：$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$.

解. 直接通分得到

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin x\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

□

1.3.6 练习题

以下习题都可以用等价替换定理，辅以四则运算、复合法则（换元法）解决。请读者使用我们目前介绍过的方法，**禁用**更“高级”的工具（尤其是洛必达法则）。就算你学过更“高级”的工具，在这里也要先假装不知道。

习题 29. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{\sin nx}$.

习题 30. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3(2x)}$.

习题 31. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sin 3x}$.

习题 32. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+x)}{x}$.

习题 33. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

习题 34. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin\sin x}{\ln(1+\tan x)}$.

习题 35. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x}{\sin\cos x}$.

习题 36. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

习题 37. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 3x}$.

习题 38. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sin x}{x^3}=1$. 试计算极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\tan x}{\sin x\ln(1+x^2)}$.

习题 39. 已知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}$.

习题 40. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

习题 41. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

习题 42. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2x-\sin 2}{2x-2}$.

习题 43. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

习题 44. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

习题 45. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}$.

习题 46. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\arctan 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$.

习题 47. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2\cos x}-\dfrac{1}{e^{x^2}-1}\right)$.

习题 48. 计算极限：$\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

习题 49. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{x+1}{x}\right)\right]^x$.

习题 50. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

习题 51. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$.

习题 52. 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[e^{\left(2+\frac{1}{n}\right)}+e^{\left(2-\frac{1}{n}\right)}-2e^2\right]$.

习题 53. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

习题 54. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

习题 55. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}$.

1.4 小 o 记号与低阶泰勒展开

熟练掌握等价替换以及基本的等价无穷小，我们可以求解相当一部分极限计算。但等价无穷小有时依然繁琐，需要不断地“凑”，尤其是例题1.3.12,1.3.18以及例题1.3.20. 但总是靠“凑”终究不行，遇到更加复杂的表达式就难以招架。为此，我们发展一套新的语言——**小 o 记号**。

1.4.1　小 o 记号及其运算法则

动机是这样的，比如我们考虑等价无穷小量 $e^x-1-x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\ (x\to 0)$, 换句话说

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\frac{1}{2}x^2}=1.$$

而这说明什么呢？不妨换一个角度来看，当 $x\to 0$ 时，有 $e^x\approx 1+x++\dfrac{1}{2}x^2$. 至于这里的“约等于 $\approx$”，俗称“当 x 趋于零是它们的误差很小”。所谓“很小”是多小呢？记 $\varepsilon(x):=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$ 为 e^x 与 $1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ 之间的“误差”，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}-\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

也就是说，当 $x\to 0$ 时，$\varepsilon(x)$ 比 x^2“趋于零的速度更快”，也称当 $x\to 0$ 时 $\varepsilon(x)$ 是 x^2 的**高阶无穷小量**。一般地，有如下定义：

定义 1.4.1. （高阶小量）设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$,$\mathfrak{a}$ 为 X 的一个极限点，f,g 都为 $x\to\mathfrak{a}$ 的无穷小量。如果存在定义在 $\mathfrak{a}$ 的某去心邻域上的函数 $\alpha(x)$, 使得在 $\mathfrak{a}$ 的某去心邻域当中成立

$$f(x)=\alpha(x)g(x)$$

并且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}\alpha(x)=0$, 则称当 $x\to\mathfrak{a}$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶小量**，记作

$$f=o(g),\quad (x\to\mathfrak{a}).$$

这里的“$o(g)$”称为**小 o 记号**。此外要注意“$f=o(g)$”当中的“$=$”并不是“等于”号，仅仅是一个形式记号。粗俗地讲，$f=o(g)$ 说的是“f 比 g 趋于零的速度更快”。

注记

与定义渐近等价时类似，这里我们并没有简单粗暴地将 $f=o(g),\ (x\to\mathfrak{a})$ 定义为

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\frac{f(x)}{g(x)}=0\qquad (*)$$

这是考虑到 $g(x)$ 可能在 $\mathfrak{a}$ 的某个去心邻域内恒为零的情形。事实上，如果 $g(x)$ 在 $\mathfrak{a}$ 的任何去心邻域都不恒为零，则 $f=o(g),\ (x\to\mathfrak{a})$ 当且仅当 $(*)$ 成立。

我们通过一些例子来说明如何灵活使用小 o 记号。

例题 1.4.2. 当 $x \to 0$ 时，成立

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\ \ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

上式应该被理解为：存在函数 $\varepsilon(x)$, 使得 $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\varepsilon(x)$, 并且 $\varepsilon(x) = o(x^2)$; 存在函数 $\eta(x)$ 使得 $\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\eta(x)$ 并且 $\eta(x) = o(x^2)$.

证明. 这容易由 $x \to 0$ 的等价无穷小 $e^x - 1 - x \sim \frac{1}{2}x^2$ 以及 $\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$ 得到。 □

例题 1.4.3. 当 $x \to 0$ 时，成立

$$(1).\, x^2 = o(x), \quad (2).\, o(x^2) = o(x), \quad (3).\, o(2x) = o(x), \quad (4).\, o(x)+o(x) = o(x).$$

我们需要解释上述式子的含义，当 $x \to 0$ 时:

- $x^2 = o(x)$, 即 x^2 为 x 的高阶小量。这由定义显然。
- $o(x^2) = o(x)$, 即：$\forall f = o(x^2)$, $f = o(x)$, 换句话说 x^2 的高阶小量必为 x 的高阶小量。
- $o(x) = o(2x)$, 即：$\forall f = o(x)$, $f = o(2x)$.
- $o(x)+o(x) = o(x)$, 即：$\forall f = o(x)$, $\forall g = o(x)$, $f+g = o(x)$.

说清楚以上式子的含义之后，证明都是容易的。

注记

我们有 $o(x^2) = o(x)$. 但是特别注意：反过来 $o(x) = o(x^2)$ **不成立**：式子 “$o(x) = o(x^2)$” 的含义是：$\forall f = o(x), f = o(x^2)$, 这显然不对，比如 $x^{\frac{3}{2}} = o(x)$ 但明显 $\neq o(x^2)$.

涉及小 o 的式子当中的 “$=$” 并不是通常的等于，它其实是集合论里的属于 $\in$、包含于 $\subseteq$.

小 o 记号有以下运算性质：

性质 1.4.4. 设 X 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集，$\mathfrak{a}$ 为 X 的（广义）极限点（可以是 $a, a^+, a^-, \infty, +\infty, -\infty$）. $f, g: X \to \mathbb{R}$ 为 $x \to \mathfrak{a}$ 的无穷小量。则成立以下：

（1）$f \cdot o(g) = o(fg)$.

（2）$o(f) \cdot o(g) = o(fg)$.

（3）$o(f) + o(g) = o(f+g)$.

（4）若 $\alpha(x)$ 是 $\mathfrak{a}$ 某去心邻域上的有界函数, 则

$$o(\alpha f) = o(f)$$

特别地，对于实数 M, 有 $o(Mf) = o(f)$. 也特别地，若 $f \sim g$, $(x \to \mathfrak{a})$ 为等价无穷小，则 $o(f) = o(g)$.

为说明小 o 在极限计算的应用，我们来看一道例题：

例题 1.4.5. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \ln(1+x+x^2) - x}{x^2}$.

此题当然可以通过“凑”等价无穷小来解决：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\ln(1+x+x^2) + [\ln(1+x+x^2) - (x+x^2)] + x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - (x+x^2)}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{x+x^2}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(x+x^2)^2}{x^2} + 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

而我们用小 o 的记号、性质，给出如下解法：

解. 首先将 e^x 与 $\ln(1+x+x^2)$ 展开，有

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\ln(1+x+x^2) &= (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \underbrace{o\left((x+x^2)^2\right)}_{=o(x^2)} \\
&= (x+x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + \underbrace{2x^3 + x^4}_{=o(x^2)}) + o(x^2) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 \underbrace{-\frac{1}{2}o(x^2) + o(x^2)}_{=o(x^2)} \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} e^x\ln(1+x+x^2) &= (1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)) \\ &= x+\frac{1}{2}x^2+x^2+\underbrace{\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4}_{=o(x^2)}+\underbrace{o(x^2)(1+x+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}x^2)}_{=o(x^2)} \\ &= x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

从而立刻得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

□

为说明小 o 记号的运算，我们再看一题：

例题 1.4.6. 已知函数 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义，并且当 $x\to 0$ 时有

$$f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3),\qquad g(x)=1+x+x^2+x^3+o(x^3).$$

则有 $f(x)g(x)=1+3x+6x^2+10x^3+o(x^3)$.

解. 直接按多项式乘法法则来计算，计算的时候不要把所有的项都展开（太麻烦了），把高于三次的项都省略（它们被 $o(x^3)$ “吸收了”），有

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) \\ &= 1\cdot\left(1+x+x^2+x^3\right)+2x\cdot\left(1+x+x^2\right)+3x^2\cdot(1+x)+4x^3\cdot 1+o(x^3) \\ &= 1+3x+6x^2+10x^3+o(x^3). \end{aligned}$$

□

事实上，我们常见的等价无穷小（性质1.3.4）都可以用小 o 语言重写：

性质 1.4.7. 当 $x \to 0$ 时，成立以下：

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\tan x &= x + o(x) \\
\tan x &= \sin x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\arcsin x &= x + o(x) \\
\arctan x &= x + o(x).
\end{aligned}$$

特别地，$\alpha = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 时，我们有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x), \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x).$$

例题 1.4.8. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

这是上一节的习题53. 当时已用等价替换法解决；当然我们亦可使用小 o 的语言来表述：

解. 首先依然等价变形为 $\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{x^2}\right)\right)$. 注意到当 $x \to +\infty$ 时（即 $\frac{1}{x} \to 0$），

$$\begin{aligned}
\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x^2} &= \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) + \left(\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})
\end{aligned}$$

所以 $\ln\left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

之后容易得到原极限 $= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. □

1.4.2 复合展开法

上述小 o 表达式也适用于换元（本质上是极限的复合法则），比如将 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$ 当中的 x 换成 $2(t-1)^2$. 注意 $t \to 1$ 时 $2(t-1)^2 \to 0$, 从而成立

$$e^{2(t-1)^2} = 1 + 2(t-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 4(t-1)^4 + o\left(4(t-1)^4\right), \quad (t \to 1)$$

之后再整理等号右边即可，其中需要注意 $o\left(4(t-1)^4\right)=o\left((t-1)^4\right)$.

一般地，有如下定理：

定理 1.4.9. （小 o 的复合法则，简易版本）

设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0\in X$ 处连续，且

$$f(x)=o(g(x)),\qquad (x\to x_0).$$

设函数 $\varphi(x):Y\to\mathbb{R}$ 以及 Y 的极限点 $\mathfrak{a}$，若 $\varphi(x)$ 的像集包含于 X，且 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}\varphi(x)=x_0$，则有

$$f(\varphi(x))=o(g(\varphi(x))),\qquad (x\to\mathfrak{a}).$$

证明. 本质上仍是极限复合法则。易证。 □

粗俗地说，也就是将"$f(x)=o(g(x))$"当中的"x"换成"$\varphi(x)$"，故俗称"换元法"。但千万要注意"换元"的条件。

其实我们之前也偷偷使用过小 o 复合法则，比如由 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $(x\to 0)$ 得到

$$\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o\left((x+x^2)^2\right),\qquad (x\to 0).$$

再比如由 $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $(x\to 0)$ 得到

$$\cos\frac{1}{x}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}),\qquad (x\to\infty).$$

例题 1.4.10. $e^{\cos x}=e-\frac{e}{2}x^2+o(x^2)$, $(x\to 0)$.

解. 注意 $e^{\cos x}=e\cdot e^{\cos x-1}$. 而当 $x\to 0$ 时 $\cos x-1\to 0$, 从而

$$e^{\cos x-1}=1+(\cos x-1)+o((\cos x-1))=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\qquad (x\to 0).$$

所以 $e^{\cos x}=e\cdot e^{\cos x-1}=e-\frac{e}{2}x^2+o(x^2)$. □

注记

此题有常见的错解：不管三七二十一，直接

$$e^{\cos x}=1+\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x+o(???)$$

请对照小 o 复合法则，看看不满足哪个使用条件。

例题 1.4.11. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\ln(1+x))-xe^{2x}}{x^2}$.

解. 注意当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\to 0$, 从而

$$\begin{aligned}\ln(1+\ln(1+x)) &= \ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+\underbrace{o(\ln^2(1+x))}_{=o(x^2)}\\ &= x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^2+o(x^2)\\ &= x-x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

而又易知 $x\to 0$ 时 $xe^{2x}=x(1+2x+o(x))=x+2x^2+o(x^2)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\ln(1+x))-xe^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x^2+o(x^2))-(x+2x^2+o(x^2))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+o(x^2)}{x^2}=-3.$$

□

注记

此题若不使用小 o 语言也能做，只需不断地“加一项减一项”来“凑”等价无穷小量，但这样将异常麻烦。读者可尝试之。

此外，上述解法在处理“$\ln(1+\ln(1+x))$”的时候，先“展开”外层的“ln”. 事实上我们也可以先展开内层的“ln”，以下处理方式也是没问题的：

$$\begin{aligned}\ln(1+\ln(1+x)) &= \ln(1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))\\ &= (x-\frac{1}{2}x^2)-\frac{1}{2}(x-x^2+o(x^2))^2+o(x^2)\\ &= x-x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

例题 1.4.12. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x)+x^2}-e^{\frac{1}{2}x}}{x^2}$.

解. 对于分子，我们可以先展开根号 $\sqrt{\ }$ 再展开 ln; 也可以相反。这里似乎后者比较容易：当 $x\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\\ \Rightarrow\quad 1+\ln(1+x)+x^2 &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\\ \Rightarrow\quad \sqrt{1+\ln(1+x)+x^2} &= 1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x)+x^2}-e^{\frac{1}{2}x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0.$ □

也就是说，当 $x\to 0$ 时，分子 $\sqrt{1+\ln(1+x)+x^2}-e^{\frac{1}{2}x}$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量。事实上我们可以自然地追问：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\ln(1+x)+x^2}-e^{\frac{1}{2}x}}{x^3}=?$$

我们暂时无力解决，需要等以后用微分学的办法。

例题 1.4.13. 给定正整数 n, 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdots\cos nx}{x^2}.$$

解. 对任意 $1\le k\le n$, 有 $\cos kx=1-\dfrac{1}{2}k^2x^2+o(x^2)$. 所以

$$\prod_{k=1}^{n}\cos kx=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2}k^2x^2+o(x^2)\right)$$

等号右边视为 n 个多项式相乘，按多项式乘法强行展开，展开的时候只需将高于二次的项直接“扔掉”（被 $o(x^2)$ “吸收”），从而有

$$\prod_{k=1}^{n}\cos kx=1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2x^2+o(x^2)=1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2+o(x^2).$$

所以原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$ □

注记

这里使用了众所周知的恒等式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.4.3 练习题

现在我们已经掌握很多工具了，除了之前介绍的定义法、四则运算、极限复合、等价代换，我们还有本节所介绍的高效简洁的小 o 语言——这些都可以用于以下习题的求解。依然强调：**禁用**本讲义目前没介绍的工具，尤其是洛必达法则。

习题 56. 是否成立 $o(x)-o(x)=0$?

习题 57. 当 $x \to 0$ 时，判断以下是否成立：

$$(1).\, x^5+\sin(x^6)=o(x^4), \qquad (2).\, x^5+\sin(x^6)=o(x^5), \qquad (3).\, x^5+\sin(x^6)=o(x^5\ln x).$$

习题 58. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

习题 59. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x^{\frac{1}{\ln x}}$.

习题 60. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

习题 61. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

习题 62. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

习题 63. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

习题 64. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

习题 65. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x}$.

习题 66. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}$.

习题 67. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+2x))}{x}$.

习题 68. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}$.

习题 69. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+xe^x}-\sqrt{1+e^x}}{\tan x\ln(1+x)}$.

习题 70. 对于常数 $a>0$, 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\ln\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2}$.

习题 71. 对于给定的正整数 n, 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

习题 72. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3})^{\frac{1}{x}}$.

习题 73. 设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 n 个给定的正实数，计算极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

习题 74. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\cos(\sqrt{n^2+1}-n)}{\ln(n^2+2)-2\ln n}$.

习题 75. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{\sec x-\cos x}$.

习题 76. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(1+x)\tan(1-x)-\tan^2 1}{\tan^2 x}$.

习题 77. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$.

习题 78. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-ax-b)=0$, 求常数 a 和 b 的值。

习题 79. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^5+7x^4+3)^a-x\right]=b\neq 0$, 求 a, b 的值.

1.5 微分学方法

我们目前所掌握的求极限的方法可以解决 95% 以上的考研难度的题目。尤其当掌握了小 o 方法以及常见函数的带有小 o 余项的近似表达式，我们可以求解好多复杂的极限。要强调的是，**我们一直没有使用微积分的工具**。事实上，$e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x),\ (x\to 0)$ 等公式 **并不是**由洛必达、泰勒展开等工具得到的，而是函数 e^x 本身的基本性质；$\sin x=x+o(x)$ 等等也同理。

但仅仅靠基本性质是远远不够的，比如

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}=?$$

我们至此掌握的知识只能判断分子 $e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2=o(x^2)$, 是关于 x^2 的高阶小量；而它与 x^3 相比，我们就一无所知了。

一般地，对于函数 $f: X\to\mathbb{R}$, 以及 X 的极限点 $\mathfrak{a}$. 如果 $\lim\limits_{x\to\mathfrak{a}}f(x)=A$ 为有限的实数，则 $f(x)-A$ 是 $x\to\mathfrak{a}$ 时的无穷小量——我们自然好奇 $f(x)-A$ 到底有"多么小"。还拿 e^x 举例：

$$\lim_{x\to 0}e^x=1 \quad\rightsquigarrow\quad e^x-1\text{ 是 }x\to 0\text{ 的无穷小量，它有多小呢？}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x-1)=1 \quad\rightsquigarrow\quad \text{无穷小量 }\frac{1}{x}(e^x-1)-1\text{ 又有多小呢？}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}(e^x-1)-1\right)=\frac{1}{2} \quad\rightsquigarrow\quad \text{继续追问：}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}(e^x-1)-1\right)-\frac{1}{2}\text{ 有多小？}$$

$$\text{事实上}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}(e^x-1)-1\right)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{6} \quad\rightsquigarrow\quad \text{可以不断如此追问下去……}$$

这种“灵魂拷问”可以一直进行下去，每“追问”一次，上述表达式就多一层括号，故此类问题也俗称“**加边题**”。再比如，我们知道 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 于是自然好奇 $\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)$ 有多小——答案是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=-\frac{1}{6}.$$

换句话说，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$. 这显然比 $\sin x=x+o(x)$ 要更加“精确”。

为了满足我们日益膨胀的得到函数更加精确近似的野心，我们有必要引入更加强大的工具——微分学。

1.5.1 导数的定义

我们来回顾一下导数的定义：

定义 1.5.1. 设函数 $f:X\to\mathbb{R},x_0\in X$ 且为 X 的极限点。如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且称该极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**, 记作 $f'(x_0)$ 或者 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

这也可以用小 o 的语言或者等价无穷小的语言来重述：

性质 1.5.2. 对于函数 $f:X\to\mathbb{R},x_0\in X$ 且为 X 的极限点。则下列等价：

（1）$f(x)$ 在 x_0 处可导，且导数为 $f'(x_0)$.

（2）$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0)),\ (x\to x_0)$.

（3）$f(x)-f(x_0)\sim f'(x_0)(x-x_0),\ (x\to x_0)$.

如果函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在定义域 X 的每一点都可导，则存在函数 $f':X\to\mathbb{R}$ 使得 f' 将 $x\in X$ 映为 f 在 x 处的导数。函数 f' 称为 f 的**导函数**（在不产生歧义的情况下也简称为导数）。

基本初等函数的导数、导数的四则运算、复合函数求导、高阶导数、隐函数求导、参数方程求导等基础知识我们不再回顾，详见任何一本高数、微积分、数学分析教材。

例题 1.5.3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并且 $f(0)=0$. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1+x^3}$.

解. 注意当 $x\to 0$ 时，$e^x-1+x^3=e^x-1+o(x)=x+o(x)$. 换句话说，有等价无穷小 $e^x-1+x^3\sim x,\ (x\to 0)$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x-1+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

□

例题 1.5.4. 已知定义在 $0 \in \mathbb{R}$ 附近的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，并且 $f'(0)$ 存在，试计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}.$$

解. 因为 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在，所以对于 $x\to 0$，有

$$f(x)=xf'(0)+o(x)$$

因此使用等价无穷小代换，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)f'(0)}{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}f'(0)\frac{1}{1+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\\ &= \frac{f'(0)}{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^2+o(x^2)}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2+o(x^2))}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

从而原式 $=\dfrac{1}{3}f'(0)$. □

例题 1.5.5. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，并且 $f(x)>0$ 恒成立。取定 $x>0$. 试计算极限：

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

解. 依然先恒等变形 $\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\right)}$. 而当 $h\to 0^+$ 时，成立

$$\ln\left(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\right)=\ln\left(1+\frac{hxf'(x)+o(h)}{f(x)}\right)=\frac{xf'(x)}{f(x)}h+o(h)$$

从而原极限 $=\lim\limits_{h\to 0^+}e^{\frac{1}{h}\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}h+o(h)\right)}=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$. □

至此，仅仅引入了导数的定义，而解决问题的方法依然是等价无穷小，基本的小 o 展开，以及几个常见的恒等变形（我们不止一次使用恒等式 $A^B=e^{B\ln A}$, 屡试不爽）。而接下来我们就将介绍微分学里面的基本、重要结论在计算极限中的应用。

1.5.2 微分中值定理

强大武器之一是拉格朗日中值定理：

定理 1.5.6. （拉格朗日中值定理）
设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，并且在 (a,b) 可导，则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

一般来说，满足上式的 ξ 可能不是唯一的。此定理的几何直观解释众所周知，但其严格证明并不容易，本质上依赖于实数的完备性，有兴趣的读者可翻看任何一本数学分析教材。这个定理最典型的应用是证明导函数恒为零的函数为常函数：如果 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 恒为零，则对于区间 (a,b) 当中的任何两点 $x_1 < x_2$, 由拉格朗日中值定理可知存在 $\xi \in (x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) = 0$$

从而 $f(x_1) = f(x_2)$. 这就证明了 $f(x)$ 为常函数。

在极限计算当中，拉格朗日中值定理有一种常见的使用技巧，运用得当可简化计算：

性质 1.5.7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导，且导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，$f'(x_0) \neq 0$. 设函数 $\varphi(t), \psi(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\mathfrak{a}} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = x_0$, 则成立等价无穷小：

$$f(\varphi(t)) - f(\psi(t)) \sim f'(x_0)[\varphi(t)-\psi(t)], \qquad (t \to t_0).$$

这里的 $\mathfrak{a}$ 依然泛指 $a, a^+, a^-, \infty, +\infty, -\infty$ 等众多类型的极限过程。

证明概要. 对于每个 t, 使用关于函数 $f(x)$ 的拉格朗日中值定理，可知存在介于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 之间的 ξ_t, 使得

$$f(\varphi(t)) - f(\psi(t)) = f'(\xi_t)[\varphi(t) - \xi(t)]$$

而当 $t \to \mathfrak{a}$ 时，由于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都趋于 x_0, 从而 ξ_t 也趋于 x_0. 又因为 $f'(x)$ 在 x_0 连续，且 $f'(x_0) \neq 0$, 从而 $\lim\limits_{t\to\mathfrak{a}} \dfrac{f'(\xi_t)}{f'(x_0)} = 1$. 因此易知成立等价无穷小量

$$f(\varphi(t)) - f(\psi(t)) \sim f'(x_0)[\varphi(t)-\psi(t)], \qquad (t \to t_0).$$

□

特别注意此性质在 $f'(x_0) \neq 0$ 时才有效。

推论 1.5.8. （上述性质的特殊情况）

如果函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是 $x \to a$ 的无穷小量，则有 $x \to a$ 的等价无穷小：

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)} &\sim \varphi(x) - \psi(x) \\ \ln(1+\varphi(x)) - \ln(1+\psi(x)) &\sim \varphi(x) - \psi(x) \\ (1+\varphi(x))^{\alpha} - (1+\psi(x))^{\alpha} &\sim \alpha(\varphi(x) - \psi(x)), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

证明. 分别令 $f(x)$ 为 $e^x, \ln(1+x), (1+x)^{\alpha}$, 则 $f'(0)$ 分别为 $1, 1, \alpha$. □

例题 1.5.9. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[2019]{1+\tan x} - \sqrt[2019]{1+\sin x}}{\sqrt[2020]{1+\tan x} - \sqrt[2020]{1+\sin x}}$.

如果不用拉格朗日中值定理，仅仅用上一节的知识，企图将 $\sqrt[2019]{}$ 展开，

$$\sqrt[2019]{1+\tan x} = 1 + \frac{1}{2019}\tan x + A\tan^2 x + o(\tan^2 x)$$

其中 $A := \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2019}\left(\dfrac{1}{2019} - 1\right)$. 其余根号也类似展开，注意 $o(\tan^2 x) = o(x^2)$. 则成立

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\frac{1}{2019}(\tan x - \sin x) + A(\tan^2 x - \sin^2 x) + o(x^2)}{\frac{1}{2020}(\tan x - \sin x) + B(\tan^2 x - \sin^2 x) + o(x^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2019} + A(\tan x + \sin x) + o(1)}{\frac{1}{2020} + B(\tan x + \sin x) + o(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2019} + o(1)}{\frac{1}{2020} + o(1)} \end{aligned}$$

其中我们将分子分母同除以 $(\tan x - \sin x)$, **可惜这一步是错的！** $o(x^2)$ 如何变成 $o(1)$？注意 $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$, 应该有

$$\frac{o(x^2)}{\tan x - \sin x} = \frac{o(x^2)}{x^3} = o(\frac{1}{x}), \quad (x \to 0)$$

也就是说，分子、分母的“误差”仅仅比 $x \to 0$ 的无穷大量 $\dfrac{1}{x}$ 要低阶，这什么也说不清楚。

总之，直接将根号展开，说不清楚误差有多少。之前的方法在此失效！

解. 而用本节的拉格朗日中值定理方法，我们立刻得到 $x \to 0$ 的等价无穷小量

$$\begin{aligned} \sqrt[2019]{1+\tan x} - \sqrt[2019]{1+\sin x} &\sim \frac{1}{2019}(\tan x - \sin x) \\ \sqrt[2020]{1+\tan x} - \sqrt[2020]{1+\sin x} &\sim \frac{1}{2020}(\tan x - \sin x) \end{aligned}$$

从而原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2019}(\tan x - \sin x)}{\frac{1}{2020}(\tan x - \sin x)} = \dfrac{2020}{2019}$. 甚至不必知道 $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$, $(x \to 0)$. □

例题 1.5.10. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

解. 先通分，再对分子使用拉格朗日中值定理从而等价无穷小替换，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(1+x+\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\ln(1+x)\ln\left(1+x+\sqrt{1+x^2}-1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

1.5.3 洛必达法则

强大武器之二是众所周知的洛必达法则，这也是初学者最喜欢的技术。

之前提到过，我们暂时不知道诸如 $e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$ 究竟是“多么小”的无穷小量，以及不断追问、“**加边**”……而洛必达法则是探究函数更精细的近似、解决“加边题”的一大利器。某种意义下，洛必达法则比之前介绍的所有方法都要强大，而且更容易掌握。

定理 1.5.11. （洛必达法则，$\dfrac{0}{0}$ 型）

设 a 是函数 $f(x),g(x)$ 的定义域的一个极限点。如果以下条件成立：

（1）$f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 a 的某去心邻域可导；

（2）$f(x),g(x)$ 都是 $x\to a$ 的无穷小量；

（3）极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，

则有：极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，并且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

作为洛必达法则的简单应用，我们立刻得到常见函数的更精确的近似：

推论 1.5.12. 当 $x \to 0$ 时，成立

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ \ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \\ \sin x &= x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4) \\ \tan x &= x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3). \end{aligned}$$

证明. 我们使用洛必达法则来证明之。

- 我们只需去计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$. 该被求极限的函数的分子分母都在 $x=0$ 附近可导，且为 $x\to 0$ 的无穷小量，并且
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$
从而满足洛必达法则的使用条件。因此由洛必达法则可知
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2\right)'}{(x^3)'}=\frac{1}{6}$$
所以有 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$.
- 我们只需去计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$. 该被求极限的函数的分子分母显然都在 $x=0$ 附近可导，且都是 $x\to 0$ 的无穷小量，并且
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x+x^2+o(x^2))-1+x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$
所以有 $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.
- 再来看 $\sin x$. 类似去验证使用洛必达法则的合法性（满足使用条件），立刻得到
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$
所以有 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$.
- 类似去验证使用洛必达法则的合法性（满足使用条件），立刻得到
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+x}{4x^3}\xlongequal{\text{利用上一小问的结论}}\lim_{x\to 0}\frac{(-x\frac{1}{6}x^3+o(x^3))+x}{4x^3}=\frac{1}{24}$$
所以有 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$.

- 我们完全可以类似用洛必达法则计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ 来说明，但这就麻烦了。回忆以下，我们很早就已得到 $\tan x = \sin x + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$, 所以

$$\tan x = \sin x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

□

注记

为提高解题效率，以上结论必须牢记并逐渐熟练使用。粗俗地说，洛必达法则就是"分子分母上下求导"，只要会求导就能机械无脑地暴力求解极限。正如以上结论的证明过程那样，洛必达法则通常配合等价替换、小 o 记号一起使用。

例题 1.5.13. 当 $x \to +\infty$ 时，成立等价无穷小 $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \sim \dfrac{1}{x}$.

证明. 只需证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1$. 这是"$\dfrac{0}{0}$ 型"未定式。又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

从而由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1$. □

注记

就此题而言，当然也可以不用洛必达法则，而通过反复使用换元法（极限复合法则）转化成熟悉的极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \xlongequal{x=\tan t} \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2} - t}{\cot t} \xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-t} \lim_{u\to 0^+}\frac{u}{\tan u} = 1.$$

洛必达法则"上下求导"是有前提的，请读者反复阅读洛必达法则的原文，**切不可只记住公式** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, 而更要记住该公式成立的条件 (1)(2)(3).

例题 1.5.14. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}$. 某人企图使用洛必达"上下求导"，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x} \xlongequal{\text{“洛必达”}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1.$$

上述解法错在哪呢？

解. 显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})=\infty$. 于是上述洛必达解法显然有错。反复对照洛必达法则的定理原文，发现分子不满足（2）：$x+1$ 不是 $x\to 0$ 的无穷小量。于是这里使用洛必达是非法的。 □

洛必达法则还有另一种版本，形式上依然是“分子分母上下求导”，但是使用条件与定理1.5.11不同：

定理 1.5.15. （洛必达法则，$\dfrac{*}{\infty}$ 型）

设 a 是函数 $f(x),g(x)$ 定义域当中的极限点（有限数，或者 $+\infty,-\infty,\infty$），如果：

（1）$f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 a 的某去心邻域可导；

（2）$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

（3）极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，

则有：极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，并且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

这正式所谓“$\dfrac{*}{\infty}$”型洛必达法则，特别注意这里不再要求分子分母都是无穷小量，而要求分母是无穷大量。此版本的洛必达法则可以用来处理 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式。由于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式可以通过取倒数转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，于是此定理在具体的极限计算上的应用不多。不过此定理有如下绝妙用法：

例题 1.5.16. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，并且成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明. 注意到 $f(x)=\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$. 此外还要注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x f(x))'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}f(x)+f'(x)=0.$$

从而由 $\dfrac{*}{\infty}$ 型洛必达法则立刻知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. □

此外，这种洛必达法则也适合处理含有变上限积分的极限：

例题 1.5.17. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\sqrt{1+t^3}\sin\frac{1}{x}}{x^4}\,\mathrm{d}t$.

解. 注意当 $x\to+\infty$ 时有等价无穷小 $\sin\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$，从而原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}{x^5}$. 而注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot\sqrt{1+x^6}}{5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5}\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=\frac{2}{5}.$$

从而由（$\dfrac{*}{\infty}$ 型）洛必达法则可知原极限 $=\dfrac{2}{5}$. □

几乎可以说，只要你会求导（比如上一题需要掌握对变上限积分的求导），用洛必达法则可以暴力算出“所有你想要的”；不过洛必达法则的使用条件依然要注意，不可非法使用，比如：

例题 1.5.18. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

这个极限显然是 1. 但如果企图使用洛必达法则，虽然分母 x 是无穷大量，但上下求导之后发现

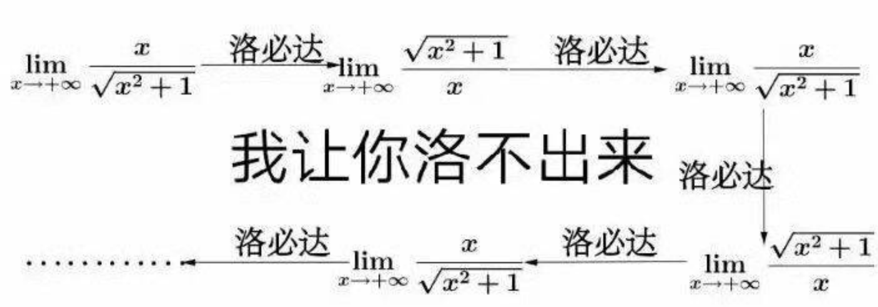
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}1+\cos x=\text{不存在的}$$

此时洛必达法则失效（不满足使用条件）。

再讲一个洛必达法则失效的例子：

例题 1.5.19. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

分子分母同除以 x, 之后极限四则运算法则，轻易得出此极限为 1. 但若企图使用洛必达法则，就有如下表情包：



本小节最后，给出一些笔者个人建议：

- 洛必达法则能不用就不用，绝大多数（考研难度及以下）的极限计算题都可以通过换元法（极限复合法则）、等价替换，以及下一小节将介绍的泰勒展开法求解。要尽可能地使用等价替换以及小 o 语言，这样通常来说更加高效且不易出错。
- 就算使用洛必达，也不要一味地疯狂求导，要配合等价替换等方法使用：每次求完导之后，注意观察是否能等价替换化简。

1.5.4　泰勒展开法

这是本章（基础篇）的最后一小节，我们引入泰勒公式——这是微分学里最重要的结论之一（另一个是隐映射定理），也是极限计算实战的**终极武器**。

我们已经使用洛必达法则得到

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

若继续“追问”、“加边”，企图给出更精确的表达式，则自然去考虑 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x^4}$，用洛必达法则容易得到该极限为 $\frac{1}{24}$，从而我们有

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

这是在 $x = 0$ 附近的更加精确的近似表达。

现在我们考虑一般的函数 $f(x)$，假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处充分高阶可导。首先由导数的定义可知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x), \quad (x \to 0)$$

仿照刚才对 e^x 的操作，我们希望给出比上式更精确的表达，于是去计算 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$，用洛必达法则容易计算出该极限为 $\frac{1}{2}f''(0)$，因此有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2), \quad (x \to 0).$$

我们可以继续往下写，去计算 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{1}{2}f''(0)x^2}{x^3}$，反复使用洛必达法则可知该极限为 $\frac{1}{6}f'''(0)$，从而

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + o(x^3), \quad (x \to 0).$$

我们完全可以继续往下写，如果你愿意反复使用洛必达法则。将上述想法系统地总结出来，就得到**带 Peano 余项的泰勒公式**：

定理 1.5.20. （带 *Peano* 余项的泰勒公式）

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近有定义，且在 $x = a$ 处 n 阶可导，则成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x^n), \quad (x \to a).$$

证明. 对 n 使用数学归纳法，或者反复使用洛必达法则。也可参考任何一本微积分教材。从略。 □

其中特别规定 $f^{(0)}(x) = f(x)$（零阶导数是函数本身），以及 $0! = 1$.

有了此公式，只要会求高阶导数，我们就能得到足够精细的带小 o 的近似表达，例如：

性质 1.5.21. 设 n 为任意正整数，α 为任意实数，则当 $x \to 0$ 时成立

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

其中对任意正整数 k 以及任意实数 α, **组合数** $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. 并且特别规定 $\binom{\alpha}{0} = 1$.

证明. 只需求上述各函数在 $x = 0$ 处的各阶导数即可，再代入泰勒公式。从略。 □

初学者应通过亲手求高阶导数来推导出上述结果，再将上述结果熟记。常见函数的泰勒展开常与换元法（极限复合法则）、小 o 记号的运算法则配合使用，就能得到更多种类的函数的泰勒展开，例如对于 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, $(x \to 0)$, 将 x 换成 $\frac{1}{t^2}$, 则得到

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^4} + \frac{1}{3t^6} - \frac{1}{4t^8} + o(\frac{1}{t^8}), \quad (t \to +\infty)$$

再比如，将 $\ln\cos x$ 在 $x = 0$ 处展开到 x^6 项，首先我们有 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, 所以

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)$$

再注意 $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $(t \to 0)$, 将 t 换成 $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, 则注意到 $x \to 0$ 时也有 $t \to 0$, 从而我们有

$$\begin{aligned} \ln\cos x &= \ln\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3 + \underbrace{o\left[\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3\right]}_{=o(x^6)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^6) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)-\frac{x^6}{24}+o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).
\end{aligned}
$$

注记

当然也可以直接用泰勒公式，直接计算函数 $f(x)=\ln\cos x$ 在 $x=0$ 处的直到六阶导数，来得到上述结果。但是直接求导远远比上述做法麻烦。而上述换元、小 o 运算是纯代数的，仅仅是多项式的加、减、乘运算，并且只要出现比 x^6 次数更高的项，就直接“扔掉”（被小 o 吸收进去）。熟悉代数的读者容易发现，上述运算实际上是在多项式环 $\mathbb{R}[x]$ 的商环 $\mathbb{R}[x]/(x^6)$ 当中进行。

泰勒展开式的系数具有唯一性：

性质 1.5.22. （泰勒系数的唯一性）

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导。如果 n 次多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 满足

$$f(x)=P(x)+o(x^n),\quad (x\to 0),$$

则必有 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

证明. 易证。可参见任何一本微积分教材。 □

泰勒系数的唯一性是非常重要（但容易被忽视的）结果。例如，我们已经知道了 $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$, 则由泰勒系数唯一性，立刻得到 $\ln\cos x$ 在 $x=0$ 处的 1 到 6 阶导数分别为

$$
\begin{gathered}
(\ln\cos)'(0)=0,\quad (\ln\cos)''(0)=-1,\quad (\ln\cos)'''(0)=0, \\
(\ln\cos)''''(0)=-2,\quad (\ln\cos)'''''(0)=0,\quad (\ln\cos)''''''(0)=-6.
\end{gathered}
$$

这比直接计算要方便得多。事实上，泰勒系数唯一性给出了求高阶导数的一种方法：先通过别的途径（换元、小 o 运算法则）得到展开式，再由泰勒系数唯一性断定该展开式的 n 次项系数正是 n 阶导数（的 $\frac{1}{n!}$ 倍）。此外，泰勒系数唯一性能推出如下重要结果：

性质 1.5.23. （逐项求导与逐项积分）

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导，并且 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$, 则有

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+o(x^{n-1}) \\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1}). \end{aligned}$$

证明. 易证。从略。 □

形式上看，正是望文生义的“逐项求导”与“逐项积分”。

例题 1.5.24. 证明：$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n-1}}+o(x^{2n}),\ (x\to 0).$

证明. 我们完全可以直接求 $\arctan x$ 在 $x=0$ 处的各阶导数，然后使用泰勒公式。但这不是个好办法，因为 $\arctan x$ 的高阶导数异常复杂。先注意到 $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$. 我们已经知道 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 在 $x=0$ 处展开的具体表达式，特别地取 $\alpha=-1$, 我们有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n),\quad (x\to 0).$$

将 x 换成 x^2, 就有

$$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n}),\quad (x\to 0).$$

逐项积分立刻得到

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n-1}}+\frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}+o(x^{2n+1}),\ (x\to 0)$$

最后再注意 $\frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}+o(x^{2n+1})=o(x^{2n})$ 即可。 □

至于泰勒展开在极限计算上的应用，我们来看一些例题：

例题 1.5.25. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-e^{\sin x}+1}{\sin^4 x}$$

解. 直接泰勒展开至四阶，有

$$\begin{aligned} \sin(e^x-1) &= \sin\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) \\ &= \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+o(x^4) \\
e^{\sin x}-1 &= e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}-1 \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4) \\
&= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-e^{\sin x}+1}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4\right)-\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}
$$

□

例题 1.5.26. 已知实数 α,β 满足

$$
\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left(1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\beta
$$

并且 $\beta\neq 0$. 求 α 与 β.

解. 注意到当 $x\to+\infty$ 时，有泰勒展开 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})$，从而有

$$
\begin{aligned}
1-(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) &= 1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right) \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= -\frac{1}{12x^2}+o(\frac{1}{x^2})
\end{aligned}
$$

因此立刻得到 $\alpha=2,\beta=-\frac{1}{12}$. □

最后，再看一道困难的题目，其解法综合运用了拉格朗日中值定理、泰勒展开等“本讲义所介绍的几乎所有技术”，技巧非常高：

例题 1.5.27. 计算极限：

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}.
$$

解. 直接计算之，有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^{(\sin x)^x-1}-(\sin x)^{x^{\sin x}-1}\cdot\frac{\sin x}{x}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{((\sin x)^x-1)\ln x}-e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}\cdot\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}
\end{aligned}
$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{((\sin x)^x-1)\ln x}-e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}}{x^2}}_{:=A_1}+\underbrace{\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}e^{\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x}}_{:=A_2}.$$

先观察上式的 A_2 部分，注意 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{\sin x}-1)\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x\ln x}-1\right)\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x\cdot\ln\sin x=0$. 类似地，上式 A_1 的分子上的 e 的指数 $((\sin x)^x-1)\ln x$ 与 $\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x$ 都为 $x\to 0$ 的无穷小量，从而对 A_1 的分子使用（关于函数 $x\mapsto e^x$）拉格朗日中值定理，有

$$\text{（接上）原式} = \lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^x-1)\ln x-(x^{\sin x}-1)\ln\sin x}{x^2}+\frac{1}{6}.$$

□

之后考虑泰勒展开。先注意到 $x\to 0$ 时有

$$\ln\sin x=\ln x+\ln\frac{\sin x}{x}=\ln x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$$

于是有：

$$\begin{aligned}
((\sin x)^x-1)\ln x &= \left(e^{x\ln\sin x}-1\right)\ln x\\
&= \left(x\ln\sin x+\frac{1}{2}x^2\ln^2\sin x+o(x^2)\right)\ln x\\
&= x\ln^2 x+\frac{1}{2}x^2\ln^3 x+o(x^2)\\
\left(x^{\sin x}-1\right)\ln\sin x &= \left(e^{\sin x\ln x}-1\right)\left(\ln x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)\\
&= \left(x\ln x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x+o(x^2)\right)\left(\ln x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)\\
&= x\ln^2 x+\frac{1}{2}x^2\ln^3 x+o(x^2).
\end{aligned}$$

因此，我们最终得到

$$\begin{aligned}
\text{（接上）原式} &= \frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^x-1)\ln x-(x^{\sin x}-1)\ln\sin x}{x^2}\\
&= \frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\ln^2 x+\frac{1}{2}x^2\ln^3 x+o(x^2)\right)-\left(x\ln^2 x+\frac{1}{2}x^2\ln^3 x+o(x^2)\right)}{x^2}\\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

1.5.5 练习题

以下各习题可以使用我们已经介绍的各种方法技巧，包括但不限于基本定义、极限四则运算、极限复合、等价替换、小 o 语言、拉格朗日中值、洛必达法则、泰勒展开——甚至有些题目需要综合各种技术甚至灵活运用方能求解。

习题 80. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

习题 81. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)$.

习题 82. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]$.

习题 83. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}+e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}$.

习题 84. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

习题 85. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

习题 86. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^x)-\sin(2^x)}{2^{x^x}-2^{2^x}}$.

习题 87. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$.

习题 88. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}$.

习题 89. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{(x+x^4)[(1+x)^{\frac{1}{3}}-1]\arctan x}$.

习题 90. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

习题 91. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{(x+x^2)[(1+x)^{\frac{1}{2019}}-1]\arctan x}$.

习题 92. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\ln(1+x\cos x)}{(1-\sqrt{\cos x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$.

习题 93. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-\sin\sin x)\sin x}{x^4}$.

习题 94. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\ln(1+x)-\ln[1+\ln(1+x)]}$.

习题 95. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin(x^2)}$.

习题 96. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

习题 97. 计算极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

习题 98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(1+x)\tan(1-x)-\tan^2 1}{\tan^2 x}$

习题 99. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}$.

习题 100. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2})^n}{n^2}$.

1.6 习题解答

解答 1. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{9}{\varepsilon}\right]-5+1$, 则 $\dfrac{9}{N+5}\le\varepsilon$. 于是对任意 $n\ge N$, 成立 $\left|\dfrac{2n+1}{n+5}-2\right|=\dfrac{9}{n+5}\le\dfrac{9}{N+5}\le\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+5}=2$.

解答 2. 首先注意到当 $|x|<\dfrac{\pi}{4}$ 时成立 $|\tan x|<1$. 从而对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta:=\min\{\varepsilon,\dfrac{\pi}{4}\}$. 则当 $0<|x|<\delta$ 时成立 $|x\tan x-0|=|x|\cdot|\tan x|<\varepsilon\cdot 1=\varepsilon$. 从而由函数极限的定义证毕。

解答 3. 首先注意到被求极限的函数的定义域为 $x>0$. 再注意不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^3}}-1\right| &= \left|\frac{x}{\sqrt{x+x^3}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+x^3}}{\sqrt{x+x^3}}\right|\\ &\le \frac{x}{\sqrt{x+x^3}}+\frac{\sqrt{x+x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^3}}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\\ &\le \sqrt{x}+\frac{x^2}{1\cdot(1+1)}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

注意当 $0<x<1$ 时成立 $x^2<2\sqrt{x}$, 因此取 $\delta:=\min\{1,\dfrac{\varepsilon^2}{4}\}$, 则对任意 $0<x<\delta$ 都成立

$$\left|\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^3}}-1\right|\le\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\le\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}=2\sqrt{x}<2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}}=\varepsilon$$

这就用函数极限的定义证明了 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^3}}=1$.

解答 4. 注意众所周知的极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$（见性质1.1.23）. 我们仿照例题1.1.19的“分而治之”技巧：先注意到当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时有 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, 从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x+x^2}-1\right| &= \left|\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x}-1\right| \\ &= \left|\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{1+x}+\left(\frac{1}{1+x}-1\right)\right| \\ &\le \frac{1}{1+x}\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|+\frac{|x|}{1+x} \\ &\le 2\left(\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|+|x|\right)\end{aligned}$$

现在，对任意 $\varepsilon>0$, 由众所周知的极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可知存在 $\delta'>0$ 使得当 $0<|x|<\delta'$ 时成立 $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{\varepsilon}{4}$. 于是，取 $\delta:=\min\{\frac{1}{2},\delta',\frac{\varepsilon}{4}\}$, 则当 $0<|x|<\delta$ 时成立

$$\left|\frac{\sin x}{x+x^2}-1\right|\le 2\left(\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|+|x|\right)\le 2(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4})=\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+x^2}=1$.

解答 5. 只需注意到 $\frac{1}{x}-1\le[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$, 从而 $1-x\le x[\frac{1}{x}]-1\le 1$, 因此 $\left|x[\frac{1}{x}]-1\right|\le x$. 现在，对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta:=\varepsilon$, 则对于任意 $|x|<\delta$, 都有

$$\left|x[\frac{1}{x}]-1\right|\le x<\delta=\varepsilon$$

这就用定义证明了 $\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$.

解答 6. 记 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. 只需考虑趋于 0 的两串数列 $a_n=\frac{1}{2n\pi}$ 与 $b_n=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, 则容易验证 $\{f(a_n)\}$ 与 $\{f(b_n)\}$ 分别收敛于不同的极限 0 和 1. 从而由海涅定理可知极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

解答 7. 这是因为，可以证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1$, 这两者不相等，从而原极限不存在。

解答 8. 只需取从左（右）侧趋近于 a 的一列有理数列和一列无理数列即可。

解答 9. 只需要取数列 $\{\cos n\pi\}$ 的子列 $\{\cos(2n\pi)\}$ 与 $\{\cos((2n+1)\pi)\}$, 易知他们收敛于不同的极限（1 与 -1），从而由海涅定理知原极限不存在。

解答 10. 函数 $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ 为初等函数，$x=2$ 在其定义域中，从而 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=4\sqrt{e}$.

解答 11. 原式 $=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

解答 12. 当 $x\to-\infty$ 时,$\sqrt[3]{x}$ 趋于 $-\infty$, 从而 $\arctan\sqrt[3]{x}$ 趋于 $-\dfrac{\pi}{2}$. 此外，当 $x\to-\infty$ 时，e^{x^2} 趋于 $+\infty$, 从而 $\dfrac{1}{e^{x^2}}$ 趋于 0, $\tan e^{x^2}$ 趋于 $\tan 0=0$. 综上所述，原式 $=-\dfrac{\pi}{2}+0=-\dfrac{\pi}{2}$.

解答 13. 原式 $=\dfrac{0-3\cdot0+2}{0+3}+1=\dfrac{5}{3}$.

解答 14. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{3+0}{1+0+0}=3$.

解答 15. 利用幂差公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

易知 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)=n$.

解答 16. 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\sqrt{1+0}}{1+0}=1$.

解答 17. 原式 $= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}} = \sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0}}} = 0.$

解答 18. 依然作根式有理化变形，有

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解答 19. 首先恒等变形，反复使用根式有理化技巧，得到

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2} = \frac{2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}-x}{2x^2} = \frac{\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}}{2x} = -\frac{1}{2(1+\sqrt{1+x})^2}$$

从而立刻得到 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2(1+\sqrt{1+0})^2} = -\frac{1}{8}.$

解答 20. 首先有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{\pi}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{\pi}{2}$, 再使用极限复合法则立刻得到 $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

解答 21. 原式 $= \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\left[\left(n-\sqrt{n^2+a^2}\right)\pi\right] = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{n+\sqrt{n^2+a^2}} = 0$. 最后一步是因为有界数列 $(-1)^n$ 乘以无穷小，极限为零。

解答 22. 注意 $\sqrt{1+\sin\frac{1}{x}} \le \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 有界，而 $x\to0$ 时 x 为无穷小量。无穷小量乘有界量仍为无穷小量，原极限为 0.

解答 23. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = e\times\sqrt{1+0} = e.$

解答 24. 记数列 $a_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = (-1)^n\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right) = (-1)^n\sin\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$. 从而容易得到 $\lim_{n\to+\infty}a_{2n} = 1$ 以及 $\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1} = -1$. 因此由海涅定理立刻得到 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 不存在。

解答 25. 记 $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, 则有

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n$$

之后同例题1.2.19.

解答 26. 原式 $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{[(a+b)x+b]\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{2x-2} = 4\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(a+b)x+b}{2x-2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(a+b+\dfrac{a+2b}{x-1}\right)$.
上述极限存在，迫使 $a+2b=0$; 进一步有 $a+b=2$. 综上解得 $a=4, b=-2$.

解答 27. 答案分别为 $0, 1, \frac{1}{e}$.

解答 28. 设 M 为 $|f(x)|$ 在 X 当中的一个上界。对于任意 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{x\to \mathfrak{a}} g(x) = 0$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in \mathring{U}_X(\mathfrak{a}, \delta)$ 都成立 $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. 取定此 δ, 则当 $x \in \mathring{U}_X(\mathfrak{a}, \delta)$ 时，成立

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

从而得证。

解答 29. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{nx} = \dfrac{m}{n}$.

解答 30. 原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \dfrac{1}{16}$.

解答 31. 原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x\cdot 3x} = \dfrac{1}{3}$.

解答 32. 注意对数的换底公式 $\log_2(1+x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$. 所以原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

解答 33. 换元 $1-x=y$, 则 $x\to 1$ 时 $y\to 0$, 于是

$$\text{原式}=\lim_{y\to 0} y\log_{1-y}2=\lim_{y\to 0}\ln 2\cdot\frac{y}{\ln(1-y)}=-\ln 2.$$

解答 34. 反复使用极限复合法则，易知有等价无穷小量 $\sin\sin\sin x\sim\sin\sin x\sim\sin x\sim x$, $(x\to 0)$, 同样也有 $\ln(1+\tan x)\sim\tan x\sim x$, $(x\to 0)$. 从而原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.

解答 35. 注意这**不是**所谓的 “$\frac{0}{0}$” 型。直接赋值，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sin x}{\sin\cos x}=\frac{\cos\sin 0}{\sin\cos 0}=\frac{1}{\sin 1}$.

解答 36. 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

解答 37. 答案是 1. 注意当 $x\to 0$ 时，$\ln\tan 7x$ 与 $\ln\tan 3x$ 都是无穷大量（特别注意这不是 $\frac{0}{0}$ 型，而是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型！）而 $\ln\tan 7x-\ln\tan 3x=\ln\frac{\tan 7x}{\tan 3x}$. 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 7x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$, 从而 $x\to 0$ 时 $\ln\frac{\tan 7x}{\tan 3x}=\ln\frac{7}{3}$. 特别地 $\ln\frac{\tan 7x}{\tan 3x}$ 在 $x=0$ 附近有界。所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\ln\frac{\tan 7x}{\tan 3x}}{\ln\tan 3x}\right)=1+\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\tan 7x}{\tan 3x}}{\ln\tan 3x}=1+0=1.$$

解答 38. 直接等价替换如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\tan x}{\sin x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+\sin x}{x^3}+\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

解答 39. 反复等价无穷小代换，易得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}f(x)\sin x}{e^{x\ln 3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}xf(x)}{x\ln 3}=\frac{f(0)}{3\ln 3}.$$

解答 40. 由和差化积公式可得 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\to 0$, 从而 $\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\to 0$. 另一方面，$\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ 为有界量。因此原极限形如无穷小量乘有界量，故为 0.

解答 41. 注意反正切函数有如下公式：

$$\arctan u-\arctan v=\arctan\frac{uv}{1+uv},\ (\forall u,v>0)$$

特别地有 $\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}=\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$. 从而原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n+1}=1$.

解答 42. 先换元 $t=x-1$, 转化成 $t\to 0$ 的极限，再伺机使用等价替换，有：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2t+2)-\sin 2}{2t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t\cos 2+\cos 2t\sin 2-\sin 2}{2t}\\
&= \cos 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}+\sin 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2t-1}{2t}=\cos 2.
\end{aligned}$$

解答 43. 先作根式有理化，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

解答 44. 适当“加一项减一项”，“凑”渐近等价 $(1+x)^\alpha-1-\alpha x\sim\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+2x}-1-\frac{1}{2}(2x)\right]-\left[\sqrt[3]{1+3x}-1-\frac{1}{3}(3x)\right]}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-\frac{1}{2}(2x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\frac{1}{3}(3x)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{x^2}\\
&= -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

解答 45. 原式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{\sin^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x|x|}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$

解答 46. 分子分母同除以 x 得到

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x + 2\arctan 3x + 3x^2}{x}}{\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)}{x} + e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin 2x}{2x} + 6\frac{\arctan 3x}{3x}}{(3+\frac{\sin^2 x}{x})+1} = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 1}{3+0+1} = 2.$$

解答 47. 注意等价无穷小 $e^t - 1 - t \sim \dfrac{1}{2}t^2$, $(t\to 0)$. 令 $t = x^2$ 即可得到

$$e^{x^2} - 1 - x^2 \sim \frac{1}{2}x^4, \quad (x\to 0)$$

从而有：

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2\cos x}{x^2\cos x\cdot(e^{x^2}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1-x^2) + x^2(1-\cos x)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

解答 48. 首先有恒等变形 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{2}+\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln b}-1}{2}\right)\right]$. 而指数部分的极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{2}+\frac{e^{\frac{1}{n}\ln b}-1}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{2}+\frac{e^{\frac{1}{n}\ln b}-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1) + \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln b}-1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\ln a + \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\ln b\right) = \ln\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

所以原极限 $= e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$

解答 49. 这是 1^∞ 型未定式。先作恒等变形

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\ln(1+\frac{1}{x})\right)\right]^x = \exp\left[x\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\ln(1+\frac{1}{x})\right)\right] = \exp\left[x\ln\left(1+\frac{2\tan\ln(1+\frac{1}{x})}{1-\tan\ln(1+\frac{1}{x})}\right)\right].$$

注意当 $x \to \infty$ 时有等价无穷小 $\tan\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$, 所以指数部分的极限为

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2\tan\ln(1+\frac{1}{x})}{1-\tan\ln(1+\frac{1}{x})}\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2\tan\ln(1+\frac{1}{x})}{1-\tan\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1} = 2.$$

从而原极限 $= e^2$.

解答 50. 先作恒等变形 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. 从而有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= e\lim_{x\to\infty} x\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}-1\right) = e\lim_{x\to\infty} x\left(x\ln(1+\frac{1}{x})-1\right) \\
&= e\lim_{x\to\infty} x^2\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\right) = e\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{-1}{2x^2} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

解答 51. 这是 1^∞ 型未定式。先作变形

$$\cos x^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}} = e^{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x-\ln(1+x)}}.$$

而指数部分的极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = -1$. 所以原极限 $= e^{-1} = \frac{1}{e}$.

解答 52. 先适当变形，再运用极限四则运算、等价替换（自行验证合法性），有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty} e^2\cdot\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)+\left(e^{-\frac{1}{n}}-1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \\
&= e^2\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}-1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right) \\
&= e^2\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}\right) = e^2.
\end{aligned}$$

解答 53. 首先作恒等变形 $\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)+\sin\frac{1}{x^2}\right]}$. 再对指数部分反复使用等价替换，有：

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)+\sin\frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)+\sin\frac{1}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) + \lim_{x\to\infty} x^2\sin\frac{1}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

所以原极限 $= e^{\frac{1}{2}}$.

解答 54. 先作恒等变形 $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left[1+x+(\sqrt{1+x^2}-1)\right]}$. 而指数部分的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+(\sqrt{1+x^2}-1)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+(\sqrt{1+x^2}-1)}{x} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 1$$

从而原极限 $= e^1 = e$.

解答 55. 当 $x\to 0$ 时，成立等价无穷小 $\ln(1+x)\sim x$ 以及 $\sin(x^2)\sim x^2$. 所以

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

注意 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界量，而 $x\to 0$ 时 x 为无穷小量，无穷小量乘以有界量仍为无穷小量，从而原极限 $=0$.

注记

此题虽然简单，但易错。常见错解：把 $\sin\frac{1}{x}$ 直接换成 $\frac{1}{x}$, 从而算出极限为 1.

解答 56. 显然不对。比如当 $x\to 0$ 时，$2x^2 = o(x)$ 并且 $x^2 = o(x)$, 但是 $2x^2 - x^2$ 显然不是 0. 事实上我们只能得到 $o(x)-o(x)=o(x)$, 原因如下：

$$o(x)-o(x) = o(x)+o(-x) = o(x)+o(x) = o(2x) = o(x).$$

解答 57. (1)(3) 正确，(2) 错误。

解答 58. 使用和差化积公式，有

$$\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1} = 2\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2} = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ 为无穷小量，而 $\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}$ 为有界量（绝对值不超过 1），从而立刻知道原极限 $=0$.

解答 59. 首先注意 $\sin x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\sin x}{\ln x}} = e^{1+\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x}}$. 注意当 $x \to 0$ 时，$\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 附近有界（其实时无穷小量），而 $\ln x$ 为 $x\to 0$ 的（负）无穷大量，由此知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} = 0$. 因此原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} e^{1+\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x}} = e^{1+0} = e$.

解答 60. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})\right)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(1+o(1)\right) = e$.

解答 61. 此题故意放在这一节习题里，为了提醒读者极限基本概念、不等式放缩的基本技巧的重要性。我们用数列极限的定义来证明此极限为 0. 先注意当 $n\geq 3$ 时，成立

$$n! = 1\times 2\times \underbrace{3\times\cdots\times n}_{n-2\text{项}} \geq 2\times 3^{n-2}.$$

所以 $\left|\dfrac{2^n}{n!}\right| \leq \dfrac{2^n}{2\cdot 3^{n-2}} = \dfrac{9}{2}\cdot(\dfrac{2}{3})^n$. 现在，对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $N := \max\left\{[\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{9}{2\varepsilon}]+1, 3\right\}$, 则当 $n\geq N$ 时，成立

$$\left|\frac{2^n}{n!}\right| \leq \frac{9}{2}\cdot(\frac{2}{3})^n = \frac{9}{2}\cdot\frac{2\varepsilon}{9} = \varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$.

解答 62. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x + o(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

解答 63. 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln 2+o(1)\right)\cdot\dfrac{3}{x} = 3\ln 2$.

解答 64. 首先提出 x, 我们有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{6x}+o(\frac{1}{x})\right) - \left(1-\frac{1}{6x}+o(\frac{1}{x})\right)\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

解答 65. 利用关于 arctan 的恒等式

$$\arctan u - \arctan v = \arctan \frac{u-v}{1+uv}, \qquad (u,v>0)$$

可知 $\arctan(1+x) - \arctan(1-x) = \arctan \frac{2x}{2-x^2}$. 而当 $x \to 0$ 时成立 $\frac{2x}{2-x^2} \to 0$, 从而有等价无穷小

$$\arctan \frac{2x}{2-x^2} \sim \frac{2x}{2-x^2} \sim \frac{2x}{2} = x, \qquad (x \to 0)$$

所以原极限 $= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.

解答 66. 首先恒等变形 $(e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(e^x - x)}$. 而当 $x \to 0$ 时成立

$$\ln(e^x - x) = \ln(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x + o(x^2)) = \ln(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln(e^x - x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}$. 于是立刻得到原极限 $= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

解答 67. 首先注意当 $x \to 0$ 时有

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{2}{x}} &= e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{2}{x}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} \\
&= e^{2 - x + o(x)} = e^2\left(1 - x + o(x)\right) \\
e^2(1 - \ln(1+2x)) &= e^2(1 - 2x + o(x))
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+2x))}{x} = e^2 \lim_{x\to 0} \frac{(1 - x + o(x)) - (1 - 2x + o(x))}{x} = e^2$.

解答 68. 注意 $x \to 0$ 时成立 $x\sin x = x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2)$, 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2 + o(x^2)} - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.
\end{aligned}$$

解答 69. 首先恒等变形、等价替换可知原式 $=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{xe^x}{2}}-\sqrt{1+\frac{e^x-1}{2}}}{x^2}$. 再注意到

$$\begin{aligned}\frac{xe^x}{2} &= \frac{x}{2}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ \frac{e^x-1}{2} &= \frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\end{aligned}$$

再注意当 $t\to0$ 时有 $\sqrt{1+t}=1+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+o(t^2)$; 而当 $x\to0$ 时 $\dfrac{xe^x}{2}$ 与 $\dfrac{e^x-1}{2}$ 都为无穷小量，从而将 t 换成它们，有

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{xe^x}{2}} &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2}_{=\frac{x^2}{4}+o(x^2)}+\underbrace{o((xe^x)^2)}_{=o(x^2)}\\ &= 1+\frac{1}{4}x+\frac{7}{32}x^2+o(x^2)\\ \sqrt{1+\frac{e^x-1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)^2}_{=\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}+\underbrace{o\left((e^x-1)^2\right)}_{=o(x^2)}\\ &= 1+\frac{x}{4}+\frac{3}{32}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

从而原极限 $=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{xe^x}{2}}-\sqrt{1+\frac{e^x-1}{2}}}{x^2}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\frac{1}{4}x+\frac{7}{32}x^2+o(x^2))-(1+\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+o(x^2))}{x^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

注记

上述解法仅仅用来示范如何暴力展开。对于此题来说，最好先作根式有理化：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+xe^x}-\sqrt{1+e^x}}{\tan x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+xe^x-e^x}{\tan x\ln(1+x)\cdot\left(\sqrt{2+xe^x}+\sqrt{1+e^x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x-(e^x-1)}{2\sqrt{2}x^2}$$

之后再将 e^x 展开为 $1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

解答 70. 当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\ln a\to0$, 从而有

$$\begin{aligned}\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2} &= \ln\frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}+e^{-\frac{1}{n}\ln a}}{2}\\ &= \ln\frac{(1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2n^2}\ln^2 a)+(1-\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2n^2}\ln^2 a)+o(\frac{1}{n^2})}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\ln^2 a+o(\frac{1}{n^2})\right)\\
&= \frac{1}{2n^2}\ln^2 a+o(\frac{1}{n^2}).
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2n^2}\ln^2 a+o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{\ln^2 a}{2}$.

解答 71. 当 $x\to 0$ 时，首先有

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{\cos nx} &= e^{\frac{1}{n}\ln\cos nx} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{n^2}{2}x^2+o(x^2)\right)}\\
&= e^{\frac{1}{n}\left(-\frac{n^2}{2}x^2+o(x^2)\right)} = e^{-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)}\\
&= 1-\frac{n}{2}x^2+o(x^2).
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{n+1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

解答 72. 当 $x\to 0^+$ 时，首先有

$$
\frac{1^x+2^x+3^x}{3} = \frac{1+e^{x\ln 2}+e^{x\ln 3}}{3} = 1+\frac{\ln 6}{3}x+o(x).
$$

所以 $\frac{1}{x}\ln\frac{1^x+2^x+3^x}{3} = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\ln 6}{3}x+o(x)\right) = \frac{\ln 6}{3}+o(1)$. 因此

$$
\text{原极限} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1^x+2^x+3^x}{3}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln 6}{3}+o(1)} = e^{\frac{\ln 6}{3}} = \sqrt[3]{6}.
$$

解答 73. 这是上一题的一般推广。对于 $1\le k\le n$, 当 $x\to 0^+$ 时有 $a_k^x = e^{x\ln a_k} = x\ln a_k+o(x)$, 从而 $\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n} = \ln\left(1+\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}x+o(x)\right) = \frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}x+o(x) = \frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}x+o(x)$. 所以原极限 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}+o(1)} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

解答 74. 直接使用等价替换更好。注意到当 $n\to+\infty$ 时，分母满足等价无穷小 $\ln(n^2+2)-2\ln n = \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\sim\frac{2}{n^2}$. 记 $u=\sqrt{n^2+1}-n$, 则当 $n\to+\infty$ 时，有等价无穷小 $u=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{1}{2n}$.

而注意当 $n \to +\infty$ 时 $u \to 0$, 所以 $\ln\cos u = \ln(1+\cos u - 1) \sim \cos u - 1 \sim -\frac{1}{2}u^2 \sim -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n^2} = -\frac{1}{8n^2}$. 于是原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{8n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{16}$.

解答 75. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{\cos x} - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{\cos x}\cdot\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 1$.

解答 76. 直接恒等变形，并使用等价无穷小。注意到

$$\begin{aligned}\tan(1+x) &= \frac{\tan 1 + \tan x}{1 - \tan 1 \tan x}\\ \tan(1-x) &= \frac{\tan 1 - \tan x}{1 + \tan 1 \tan x}\end{aligned}$$

所以当 $x \to 0$ 时成立等价无穷小

$$\tan(1+x)\tan(1-x) - \tan^2 1 = \frac{\tan^2 1 - \tan^2 x}{1 - \tan^2 1\tan^2 x} - \tan^2 1 = \frac{(\tan^4 1 - 1)\tan^2 x}{1 - \tan^2 1 \tan^2 x} \sim (\tan^4 1 - 1)x^2, \qquad (x \to 0)$$

所以原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan^4 1 - 1)x^2}{x^2} = \tan^4 1 - 1$.

解答 77. 当 $x \to +\infty$ 时，只需注意到

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\\ =\ & x\left(\left(1+\frac{1}{x}+\underbrace{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}_{=o(\frac{1}{x})}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{1}{x}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=o(\frac{1}{x})}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x+\overbrace{\ln(1+\frac{x}{e^x})}^{=o(1)}}{x}\right)\\ =\ & x\left[(1+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})) - (1+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x}))(1+o(\frac{1}{x}))\right]\\ =\ & x\left(-\frac{1}{6x}+o(\frac{1}{x})\right) = -\frac{1}{6}+o(1).\end{aligned}$$

于是由上式立刻得到原极限 $= -\frac{1}{6}$.

解答 78. 题设条件为 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$, 换句话说，无非是：

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=a+\frac{b}{x}+o(\frac{1}{x}),\quad (x\to\infty).$$

而另一方面，直接展开得 $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=1+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)+o(\frac{1}{x})=1+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})$. 比较系数得 $a=1,b=\frac{1}{3}$.

解答 79. 首先我们进行一些猜想，这个式子极限存在且不为零，所以直观感受 $(x^5+7x^4+3)^a$ 的阶应该和 x 的阶是一样的，直观感觉 $a=\frac{1}{5}$, 然后求极限求 b，这是一种较快，但是感觉不是很严谨的做法。以下给出具体解法：注意 $x\to\infty$ 时有

$$(x^5+7x^4+3)^a=x^{5a}\left(1+\frac{7}{x}+o(\frac{1}{x})\right)^a=x^{5a}\left(1+\frac{7a}{x}+o(\frac{1}{x})\right)=x^{5a}+7ax^{5a-1}+o(x^{5a-1})$$

由于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^5+7x^4+3)^a-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^{5a}-x)+7ax^{5a-1}+o(x^{5a-1})\right)$ 存在，这迫使 $5a=1$（这是因为，$5a>1$ 时 $x^{5a}-x$ 趋于 $+\infty$; 而 $5a<1$ 时它趋于 $-\infty$，都与极限存在矛盾），即 $a=\frac{1}{5}$. 于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^5+7x^4+3)^a-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}7a+o(1)=7a=b$, 所以 $b=7a=\frac{7}{5}$.

解答 80. 注意当 $x\to\infty$ 时有 $\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})$, 从而

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)=\exp\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1-\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)=e^{-\frac{1}{3}}.$$

解答 81. 利用例题1.5.13的结果：$\frac{\pi}{2}-\arctan x\sim\frac{1}{x}$, $(x\to+\infty)$. 将 x 换成 $2x^2$, 就得到 $\frac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\sim\frac{1}{2x^2}$, $(x\to+\infty)$. 从而立刻得到原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

解答 82. 注意 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$, 从而

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to+\infty}-en\left(e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}-en\left(e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-1}-1\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -en\left(e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} -en\left(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right) = \frac{e}{2}.$$

解答 83. 注意 $(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^{2\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{2\cdot\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}} = e^{2-x+o(x)}$. 因此

$$\text{原式} = e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{-x+o(x)}-(1-x+o(x))}{x} = e^2\lim_{x\to0}\frac{(1-x+o(x))-(1-x+o(x))}{x} = 0.$$

解答 84. 对函数 $x\mapsto e^x$ 使用拉格朗日中值定理，易知等价无穷小量 $e^{\sin x}-e^x \sim \sin x - x$, $(x\to0)$, 从而立刻得到原极限 $=1$.

解答 85. 直接化简可得：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{e^x-1}{x}\frac{x}{\sin x}\frac{1}{e^x}} - \sqrt{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}} = 1.$$

注记

这里无法对分子"$\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}$"使用拉格朗日中值定理化简，要特别小心。

解答 86. 注意到 $x\to2$ 时，x^x 与 2^x 都趋于 4. 考虑函数 $f(x):=\sin x$ 以及 $g(x):=2^x$. 则由拉格朗日中值定理，对每个 x, 存在介于 2^x 与 x^x 之间的常数 ξ_x 以及 η_x，使得

$$\begin{aligned} f(x^x)-f(2^x) &= f'(\xi_x)(x^x-2^x) = \cos(\xi_x)(x^x-2^x) \\ g(x^x)-g(2^x) &= g'(\eta_x)(x^x-2^x) = 2^{\eta_x}\ln 2\cdot(x^x-2^x). \end{aligned}$$

而当 $x\to2$ 时，易知 ξ_x 与 η_x 都趋于 4, 从而

$$\text{原极限} = \lim_{x\to2}\frac{\cos(\xi_x)(x^x-2^x)}{2^{\eta_x}\ln 2\cdot(x^x-2^x)} = \frac{\cos 4}{4\ln 2}.$$

注记

熟悉**柯西中值定理**的读者可有稍微简单的做法。

解答 87. 考虑函数 $g(t)=\sqrt{1+t}$. 对函数 $g(t)$ 在区间 $[\sin x,\tan x]$ 上使用拉格朗日中值定理可知存在 $\sin x<c<\tan x$ 使得 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}(\tan x-\sin x)$. 注意 $x\to 0$ 时也有 $c\to 0$, 从而 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}\sim\dfrac{1}{2}(\tan x-\sin x)\sim\dfrac{1}{4}x^3\ (x\to 0)$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^3}{x^3}=\frac{1}{4}.$$

解答 88. 对于给定的 x, 考虑函数 $g(t)=\ln(e^{\sin x}+t)$, 对 $g(t)$ 在区间 $[0,\sqrt[3]{1-\cos x}]$ 上使用拉格朗日中值定理可知存在 $c\in(0,\sqrt[3]{1-\cos x})$ 使得

$$\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x=\frac{1}{e^{\sin x}+c}\cdot\sqrt[3]{1-\cos x}.$$

注意 $x\to 0$ 时显然 $c\to 0$, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^{\sin x}+c}\cdot\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}=\frac{1}{4}.$$

解答 89. 注意 $x\to 0$ 时的等价无穷小 $x+x^4\sim x$（略去高阶小量 x^4），再由拉格朗日中值定理易知 $e^{\tan x}-e^x\sim\tan x-x\sim\dfrac{1}{3}x^3$, 从而 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x\cdot\frac{1}{3}x\cdot x}=1$.

解答 90. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)-\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{12}$.

注记

也可采用如下换元法：令 $\cos x=t^6$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+\cdots+t^{11})}=-\dfrac{1}{12}$.

解答 91. 注意当 $x\to 0$ 时有如下等价无穷小：

$$\begin{aligned}e^{\tan x}-e^x &\sim \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3\\ x+x^2 &\sim x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2019}}-1 &\sim \frac{1}{2019}x\\ \arctan x &\sim x.\end{aligned}$$

从而等价替换得原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2019}x^3}=673.$

解答 92. 对函数 $x\mapsto\ln(1+x)$ 使用拉格朗日中值定理可知等价无穷小 $\ln(1+\sin x)-\ln(1+x\cos x)\sim\sin x-x\cos x,\quad(x\to 0)$, 从而

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\left[1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\ln\left(1+x+o(x)\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{\left(\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)\left(x+o(x)\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

解答 93. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$. 由拉格朗日中值定理可知存在介于 x 与 $\sin x$ 之间的 ξ_x, 使得 $\sin x-\sin\sin x=(x-\sin x)\cos\xi_x$. 而当 $x\to 0$ 时, $\xi_x\to 1$, 从而有等价无穷小 $\sin x-\sin\sin x\sim x-\sin x$, $(x\to 0)$. 所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

解答 94. 先观察分母，对函数 $x\mapsto\ln(1+x)$ 使用拉格朗日中值定理，易知等价无穷小量 $\ln(1+x)-\ln[1+\ln(1+x)]\sim x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $(x\to 0)$. 而

$$\begin{aligned}\cos x\cos 2x\cos 3x &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)\right)\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}\right)x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}\right)x^2}{\frac{1}{2}x^2}=14.$

解答 95. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2}-1-x^2-o\left(x^2\right)\right)x^2}=-\dfrac{1}{12}.$

解答 96. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac13x^3}{x^3}=\dfrac13.$

解答 97. 提出因子 x^3, 然后直接泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac1x+\frac{1}{2x^2}\right)e^{\frac1x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac1x+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac1x+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)-\left(1+o(\frac{1}{x^3})\right)\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^3\left[\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right]=\frac16.
\end{aligned}$$

解答 98. 令 $f(x):=\tan(1+x)$, 则求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(1+x)}$ 以及 $f''(x)=\dfrac{2\sin(1+x)}{\cos^3(1+x)}$, 从而有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开：

$$\begin{aligned}
\tan(1+x) &= \tan 1+\frac{1}{\cos^2 1}x+\frac{\sin 1}{\cos^3 1}x^2+o(x^2)\\
\tan(1-x) &= \tan 1-\frac{1}{\cos^2 1}x+\frac{\sin 1}{\cos^3 1}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\tan(1+x)\tan(1-x)-\tan^2 1=\left(2\tan 1\cdot\frac{\sin 1}{\cos^3 1}-\frac{1}{\cos^4}\right)x^2+o(x^2)=\frac{2\sin^2-1}{\cos^4 x}x^2+o(x^2)=\frac{-\cos 2}{\cos^4 1}x^2+o(x^2)$$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\cos2}{\cos^4 1}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{\cos 2}{\cos^4 1}.$

注记

也可不使用泰勒展开，而用三角函数公式 $\tan(1+x)=\dfrac{\tan 1+\tan x}{1-\tan 1\tan x}$ 恒等变形：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^2 1-\tan^2 x}{1-\tan^2 1\tan^2 x}-\tan^2 1\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^4 1\tan^2 x-\tan^2 x}{1-\tan^2 1\tan^2 x}\right)\\
&= \tan^4 1-1
\end{aligned}$$

上述两种做法的答案 $-\dfrac{\cos 2}{\cos^4 1}$ 与 $\tan^4 1-1$ 表面上看很不一样，但其实是相等的。读者自行验证。

解答 99. 首先考虑函数 $F(x) := \int_0^x e^t \cos t \, \mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开：由于 $F'(x) = e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. 从而逐项积分得

$$F(x) := \int_0^x e^t \cos t \, \mathrm{d}t = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

因此原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right) - x - \frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2}$.

解答 100. 只需先计算其对数的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}) - 2\ln n\right]$. 注意到

$$n\ln(2\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}) - 2\ln n = \ln 2 + n\ln\left[1 + 2\left(\sqrt[n]{\frac{n}{2}} - 1\right)\right] - 2\ln n$$

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln\frac{n}{2}} - 1 = \frac{1}{n}\ln\frac{n}{2} + \frac{1}{2n^2}\ln^2\frac{n}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right) \qquad (n\to+\infty)$$

因此有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left[n\ln(2\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}) - 2\ln n\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln 2 + n\ln\left(1 + \frac{2}{n}\ln\frac{n}{2} + \frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right) - 2\ln n\right] \\
&= \ln\frac{1}{2} + \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2} + o\left(\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{2}\right)\right] = \ln\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

因此原极限 $= \exp\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

第二章　中篇：数列极限进阶

2.1　裂项法

2.2　放缩夹逼

2.3　递推数列

2.3.1　单调收敛定理

2.3.2　压缩映射原理

2.4　Stolz 定理

2.5　上下极限

2.6　习题解答

第三章 提高篇：与定积分有关的极限（远期规划）