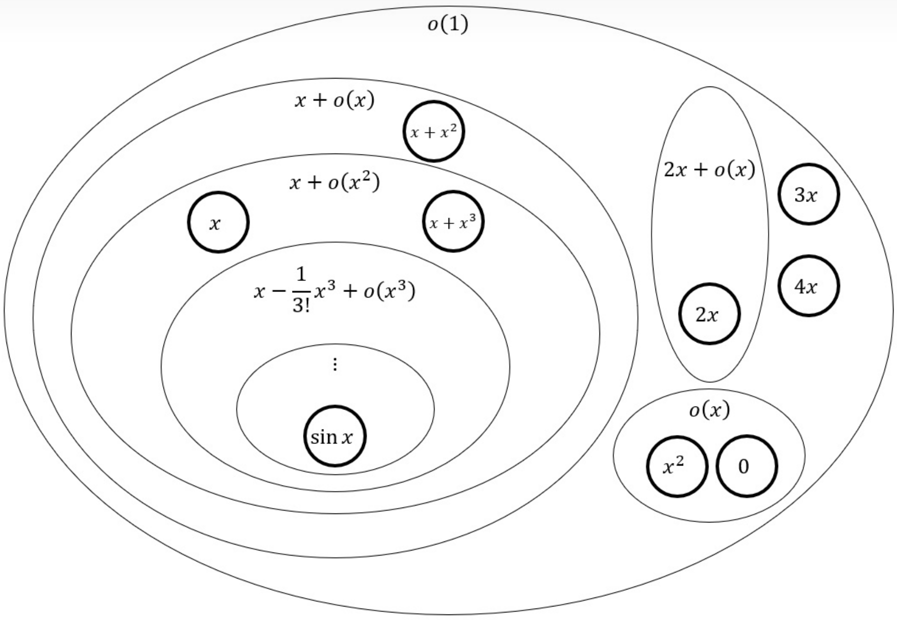


无穷小与高阶无穷小的解读——函数与函数族

tetradecane
上海交通大学 工学硕士在读

学习阶段：大学数学。

前置知识：函数极限、无穷小的比较。

本文对于一些关于无穷小的概念的解读，可能是高数教材中或课程中没有出现过的，但是对于理解这些概念很有帮助。

1. 无穷小是函数

无穷小是什么？

无穷小（无穷小量，infinitesimal）是**函数**（数列也算是特殊的函数），且这个函数f(x)有这样一个特性：当自变量x趋于某个常数或无穷大时（记为 $x \to \square$ ），函数值f(x)趋于0，即 $\lim_{x\to\square} f(x) = 0$. 因此，无穷小的完整说法应该是： $x \to \square$ 时的无穷小。当这个自变量的极限过程 $x \to \square$ 不言自明，不必特意指出时，我们简称f(x)为无穷小。

显然， $\frac{x}{x^2+1}$ 是 $x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 的无穷小，但不是 $x \to 1$ 的无穷小。

很多地方会用希腊字母函数来表记无穷小，如 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ ，甚至当自变量x也不言自明的时候，将它们简记为 α 和 β . 但是一定要记住：无穷小仍然是函数，而且涉及到自变量的一个极限过程。

0也是无穷小。因为常函数 $f(x) = 0$ 在x的任意极限过程中均有 $\lim_{x\to\square} 0 = 0$ ，这符合无穷小的定义。

2. 高阶无穷小是函数族

比较无穷小时，我们一般默认**自变量需要有相同的极限过程** $x \to \square$ ，并有时将其省略。

通常，教材上只会给出如下高阶无穷小的定义：

不知你有没有注意到，记号 $\beta=o(\alpha)$ 不能交换过来写为 $o(\alpha)=\beta$ ，例如 $x^2+x^3=o(x)$ 是成立的，但不能写 $o(x)=x^2+x^3$ ，因此这里的等于号=不是一般意义上的等于号，是有方向的。

我们可以把高阶无穷小理解为一个**函数集合**，通常又称函数集合为**函数族**（family of functions），即将 $o(\alpha)$ 视为 $\left\{\gamma\left|\lim_{x\to\square}\frac{\gamma}{\alpha}=0\right.\right\}$ ，这样的话记号 $\beta=o(\alpha)$ 可以理解为元素属于集合的关系，即 $\beta\in o(\alpha)$.

同时，单一函数 β 又可视为一个单元素函数族，即 $\{\beta\}$ ，那么记号 $\beta=o(\alpha)$ 又可以理解为集合包含于集合的关系，即 $\{\beta\}\subseteq o(\alpha)$.

实际上，我们一般会推广一下：若 $\lim_{x\to\square}\frac{\gamma}{f}=0$ ，均可记 $\gamma=o(f)$ ，此时函数f不一定是无穷小。因此 $o(1)=\{\gamma\,|\lim_{x\to\square}\gamma=0\}$ 是所有无穷小的集合。

另外，若A是一个函数族，则o(A)也是个函数族，定义 $o(A)=\left\{\alpha\left|\forall f\in A,\lim\frac{\alpha}{f}=0\right.\right\}$ ，即比A中所有函数都要高阶的无穷小的集合。

如果 $o(\alpha)=o(\beta)$ 且 $o(\beta)=o(\alpha)$ ，即这两个集合是相等的，为了表示区别，本文记为 $o(\alpha)\equiv o(\beta)$.

3. 小o记号的运算

3.1 运算的定义

小o记号是可以进行数学运算的，例如：

$$x+o(x)=\{x\}+o(x)=\left\{x+\alpha\left|\lim\frac{\alpha}{x}=0\right.\right\}$$

$$o(x)+o(x^2)=\left\{\alpha+\beta\left|\lim\frac{\alpha}{x}=0,\lim\frac{\beta}{x^2}=0\right.\right\}$$

注意到上述 $x+o(x)$ 和 $o(x)+o(x^2)$ 中的加号也不是一般意义上集合的并集，而是在函数族上定义的一种特殊运算，即集合中元素的运算：

$$A+B=\{f+g|f\in A,g\in B\}$$

其他运算也是同理。

3.2 运算律

小o记号的运算律如下所示：

- **数乘律**：若k为非零常数，则 $ko(f)\equiv o(kf)\equiv o(f)$.
- **加减律**： $o(f)\pm o(g)=o(|f|+|g|)$. 若g=o(f)或g~f，则 $o(|f|+|g|)=o(f)$.
- **乘法律**： $o(f)\equiv fo(1),\ o(f)o(g)=o(fg)\equiv fo(g)\equiv fgo(1)$.
- **乘方律**：若k为正整数，则 $(o(f))^k=o(f^k)$.

以下思想在用泰勒展开计算函数极限时非常有用：

- 由数乘律知，小o记号中的数乘可直接略去。
- 由加减律知，小o记号中的无穷小会被不高阶于它的函数吸收掉。
- 由乘法律知，小o记号中的因式可以提到外面来，但至少要留一个小o记号。

4. 小o记号的例子

将高阶无穷小视为函数族后，我们就更容易理解很多高阶无穷小的关系和极限运算了。

o(x)=o(1)是对的，因为 $o(x) \subsetneq o(1)$ ，x的所有高阶无穷小都是无穷小，而不能写o(1)=o(x)，例如x就是一个反例，因为 $x \in o(1)$ 但 $x \notin o(x)$.

泰勒展开式 $\sin x = x + o(x)$ 是对的，同时 $\sin x = x + o(x^2)$ 也是对的，这是因为

$\{\sin x\} \subsetneq x + o(x^2) \subsetneq x + o(x)$

实际上 $x + o(x^2)$ 是更小的集合，精度更高，泰勒展开多展了一阶，展开到了 x^2 ，只不过 x^2 的系数恰好为0，也就是相当于 $\sin x = x + 0x^2 + o(x^2)$.

又如极限运算：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}\\ &= \frac{1}{6}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

是正确的，其中 $\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$ 的原因是：函数族 $\frac{o(x^3)}{x^3}$ 中所有的函数，在 $x\to0$ 时的极限都为0，那么原式也必然遵循这个规律，极限为0.

而这样的计算：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{x-(x+o(x^2))}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^3}\\ &=?\end{aligned}$$

无法计算下去的原因是：函数族 $\frac{o(x^2)}{x^3}$ 中的函数，在 $x\to0$ 时的极限不相同，如 $\frac{x^3}{x^3}$ 收敛到1，而 $\frac{x^4}{x^3}$ 收敛到0. 整个计算过程错在：将 $\sin x$ 展开成 $x+o(x^2)$ 时精度太低，集合扩展得太大，将极限不同的其他函数也加入了这个集合中，导致最后极限不收敛。（但这个计算过程不收敛不能说明原式不收敛）

更形象一点地说：一个大圈（大集合）中的东西（元素）都满足某个性质P，那么其中一个小圈中的东西一定都满足性质P；一个大圈中的东西不都满足性质P，这并不能说明小圈中的东西是否都满足性质P.

5. 函数族的韦恩图

关于 $\sin x$ 函数的泰勒展开（以及一些其他函数）的函数族韦恩图如图1所示：

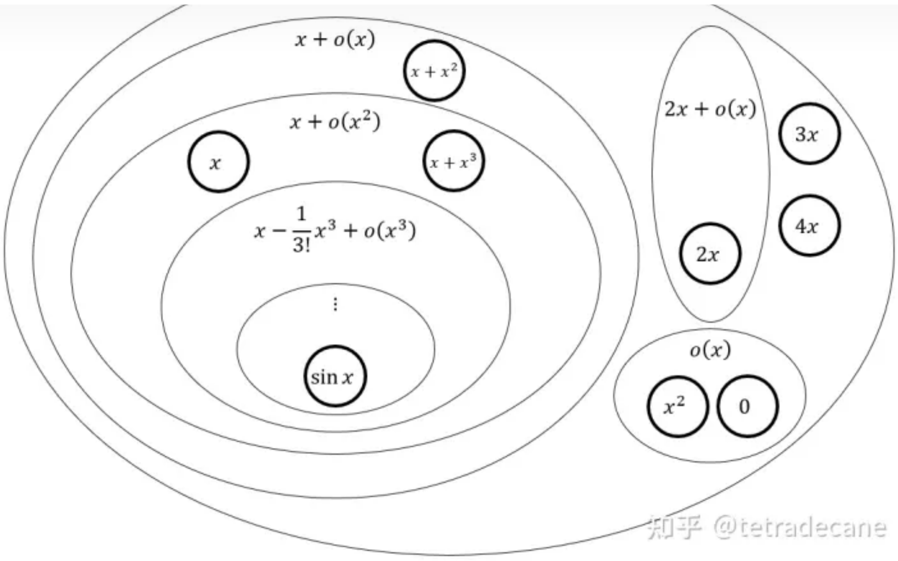


图1 函数族韦恩图

图1中黑色粗线圆圈表示单一函数。

编辑于 2022-10-12 00:16

无穷小 高阶无穷小 微积分

▲ 赞同 52 ▼ 18 条评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···

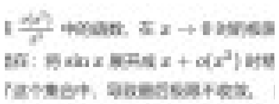
评论千万条，友善第一条

18 条评论 默认 最新

Vivian
感谢！！！不进学会了一直以来搞不懂的无穷小，顺便把最优化的原理和搞懂了😭😭😭
07-11 · IP 属地山东 回复 3

Glaxy
真的是大彻大悟🤗，太感谢啦
10-10 · IP 属地黑龙江 回复 1

生如夏花
请问文中“但这个计算过程不收敛不能说明原式不收敛”这句话是什么意思?



10-04 · IP 属地河南 回复 赞

生如夏花 › **tetradecane**
感谢！👍我明白了😄。
10-13 · IP 属地河南 回复 赞

tetradecane 作者
更形象一点地说：一个大圈（大集合）中的东西（元素）都满足某个性质P，那么其中一个小圈中的东西一定都满足性质P；一个大圈中的东西不都满足性质P，这并不能说明小圈中的东西是否都满足性质P.
10-12 · IP 属地上海 回复 赞

展开其他 1 条回复 ›

生如夏花
牛!
IP 属地河南 回复 赞