高等数学三（Ⅰ）期中试题答案

一、单项选择题(本题共有 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1.A　　2. C　　3.C　　4.C　　5.B

二、填空题(本题共有 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

6. $mn=-2$　7. e　8. $\dfrac{1}{\pi}$　9. $\mathrm{d}y=-\dfrac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x$　10. $[2,+\infty)$

三、求解下列各题（本题共有 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{3\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………

12. $\dfrac{1}{2}$

13. $y'=\dfrac{1}{1+x+\sqrt{2x+2}}(1+x+\sqrt{2x+x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$ ……………………3 分

$y''=-\dfrac{1+x}{(2x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　$y''(1)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ………………………6 分

14. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^{2t}}=-\dfrac{1}{2}e^{-3t}$　切线斜率 $k=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$ ………4 分

切线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ 即 $x+2y-3=0$ …………………6 分

15. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 0\quad x=0\end{cases}$，$x=0$ 为无穷间断点

四、求解下列各题（本题共有 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)]=-\dfrac{e}{2}$ ………8 分

17. 由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，得 $c=0$ ……………………………2 分

$f'_-(0)=b,\ f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=b=1$， ……………………5 分

$f''_-(0)=2a,\ f''_+(0)=-1$，故 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ ……………………8 分

18. e^{-1},

19. 求导 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ $y'=0\ x=\pm1$ ……………2 分

再求导 $6x+6yy'+3y^2y''+3y''=0$ ……………………………4 分

在 $y'=0$ 处，有 $y''=-\dfrac{2x}{y^2+1}$

所以当 $x=1$ 时，$y'<0$，所以 $x=1$ 为函数的极大值，并且有 $y(1)=1$；

当 $x=-1$ 时，$y'>0$，所以 $x=-1$ 为函数的极小值，并且有 $y(-1)=0$.

……………………………………………………8 分

20.令 $F(x)=f(x)+x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x}=1>0$，存在 $X>0$，

当 $|x|>X$ 时，$\dfrac{F(x)}{x}>0$，取 $a>X$，则 $\dfrac{F(a)}{a}>0$，$\dfrac{F(-a)}{-a}>0$

从而有 $F(-a)<0$，$F(a)>0$

故存在 $\xi\in(-a,a)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi=0$.