$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}$$

高阶导数题四大解法一文搞定（解法总结、例题、习题、考研数学真题）


Agwave
复杂 = f (简单1, 简单2, ... , 简单n)

二阶以及二阶以上的导数，统称**高阶导数**

高阶导数四大解法：

- 变形成 n 阶四公式形式
- 莱布尼茨公式（常需利用 n 阶四公式）
- 泰勒公式化得多项式
- 观察规律法

首先，要想解高阶导数又快又准，**n 阶四公式**绝对是基础中的基础，所以，请务必记住 **n 阶四公式**：

- $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \quad (m \geq n)$
- $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
- $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ （由 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ，有 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ）
- $(\sin x)^{(n)} = sin(x+\frac{n\pi}{2})$ （ $(\cos x)^{(n)} = cos(x+\frac{n\pi}{2})$ ）

所谓 **n 阶四公式**，即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数**最简单形式**的 **n 阶导数**的值。

但是通常，题目不会直接让我们求这四个函数，一般我们要求的，都是 **n 阶四公式形式的函数**，比如说，求的是 $(ax+b)^{(n)}$ ， $[\ln(ax+b)]^{(n)}$ ， $[sin(kx+b)]^{(n)}$ 。

我们只要记住了形式简单的 n 阶四公式，就可以很快地推出 **n 阶四公式形式的函数。**

所以，现在，请立刻开始把 **n 阶四公式**记住，不要说留到后面再背，告诉自己，我现在就要记住 n 阶四公式，并且我不会忘了。

只有我们有坚定说要去记住，才真的更容易记牢，这是我自己的感受。

好，现在我们记住了 n 阶四公式。因为是最简单的形式，所以记起来也还行。

ok，前面说了这么多，其实就讲了一样东西，叫 n 阶四公式。为了检验你是否掌握，请你拿出纸笔，求：

$f(x) = \ln(1-x)$ 的 n 阶导数。（答案在文末，题号为 ① ）

上面的问题你答对了吗？答对了就**点个赞**吧！

$[(ax+b)^m]^{(n)}$，$[\ln(ax+b)]^{(n)}$，$[sin(kx+b)]^{(n)}$

- 上面的三个 n 阶导数求出来是什么？
- 它们比对应的原来的 n 阶四公式多出了什么？或者说有什么联系和区别。

问题难度适中，相信你能思考出来。

如果你已经掌握了 n 阶四公式，我们就进入本文的正题吧——高阶导数题的四大解法。

（注：本文的例题和习题都是经过挑选，觉得很经典和不错的题目，绝对值得一做）

1. 变形成 n 阶四公式形式

例题：已知函数 $f(x)=\ln\frac{1-3x}{1+2x}$，则 $f^{(n)}(0)=(\quad)$.

解：如果按原来的 $f(x)$ 的形式一次次求导，感觉会有点复杂，尝试将其化成 n 阶四公式形式，即

$f(x)=\ln\frac{1-3x}{1+2x}=\ln(1-3x)-\ln(1+2x)$

这样一来，对 $f(x)$ 求 n 阶导就相当于分别对 $\ln(1-3x)$ 和 $\ln(1+2x)$ 求 n 阶导然后相减。

根据 n 阶四公式中对数函数的 n 阶导数的值，我们可以快速推导出

$[\ln(1+ax)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(1+ax)^n}$，所以

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{(-3)^n}{(1-3x)^n}-\frac{2^n}{(1+2x)^n}\right]$，则有

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[(-3)^n-2^n\right]$

小结：问题解答完成，由此可见，对于一个**复杂的函数**，可以化成 **多个n 阶四公式形式的函数**，再利用 **n 阶四公式**，快速推导其出 n 阶导数的值，进而求得复杂函数的 n 阶导数的值。

拿出纸笔，快速做一下下面这道题练练手吧。

习题：已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，求 $f^{(5)}(x)$.（答案在文末，题号为②）

耐心一点，请确保能解开上一道习题再继续阅读。

开始第二种方法之前，请问自己，是否了解过莱布尼茨公式，公式是怎么样的，是用来干什么的。如果答案是否定的，请停止阅读本文，通过书本或上网对莱布尼茨公式进行初步了解，能够回答这两个问题后，再继续阅读。

（学习不总是“线性”的。通过一个问题，可以牵带出相关的问题。然后带着对相关问题的好奇，去了解它们，逐步深入，这是我自己很喜欢的一种学习的方式，好奇和求知欲也应该并且可以成为我们学习的动力。）

2. 莱布尼茨公式

解：看着像两个函数相乘的形式，并且 x^2 在导数大于2后为0，所以可以考虑一下使用莱布尼茨公式。则有，

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{C}_n^0x^2[ln(1-x)]^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)'[ln(1-x)]^{(n-1)} \\ +\mathrm{C}_n^2(x^2)''[ln(1-x)]^{(n-2)}$$

因为 $[ln(1-x)]^{(n)}=\frac{(n-1)!(-1)}{(1-x)^n}$ ，

$[ln(1-x)]^{(n-1)}=\frac{(n-2)!(-1)}{(1-x)^{n-1}}$ ，

$[ln(1-x)]^{(n-2)}=\frac{(n-3)!(-1)}{(1-x)^{n-2}}$ ，

$(x^2)'=2x$ ， $(x^2)''=2$.

所以 $f^{(n)}(x)=x^2\frac{(n-1)!(-1)}{(1-x)^n}+2x*n\frac{(n-2)!(-1)}{(1-x)^{n-1}}+2*\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-3)!(-1)}{(1-x)^{n-2}}$

故 $f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2}$.

小结：例题解答完成，通过观察我们可以发现，莱布尼茨公式解 n 阶导数适用于：

- 两个函数相乘
- 其中一个函数在求高阶导数后会变为 0

这样的函数。

当遇到这样的函数时，**使用莱布尼茨公式。**对于求其中**需要求 n 阶导数的**（本题中是 $\ln(1-x)$ ），需要变形成 **n 阶四公式形式**（即方法一），然后利用 **n 阶四公式**推导进行解决。

此外，当要求的是 $f^{(n)}(0)$ 时，有的项其实并不需要计算。比如在本题中， $f^{(n)}(x)$ 的前面两项是不需要计算的。

例题讲完了，你现在能解决下面这一道习题吗？

习题：函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=($ $)$.（答案在文末，题号为③）

能够看到这里，高阶导数的类型题基本也能解决一大半了，在坚持一下吧，后面的内容不会很难。

下面的方法会涉及泰勒公式和麦克劳林公式，统称为泰勒公式化多项式法。这里还是默认大家已经掌握了泰勒公式。

3. 泰勒公式化多项式

例题：已知函数 $f(x)=x^{100}e^{x^2}$ ，则 $f^{(200)}(0)=($ $)$.

解：使用前面两种方法似乎解决不了本题，尝试使用泰勒公式。

由麦克劳林公式，得

$$f(x)=x^{100}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}+o(x^{2n})\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+100}}{k!}+o(x^{2n+100})$$

取 $n=50$ ，根据多项式求导的性质，由

小结：根据我个人的经验，利用莱布尼茨公式法和泰勒公式化多项式是考察比较多的，而且常常这两种方法是同一道题的两种解法。

之所以把**变形成 n 阶四公式法**放在第一个，是因为这种方法最基础的方法，并且在一些时候，这种方法也是后面这两种方法的基础，起到辅助解题的作用。

这次，请你尝试用泰勒公式化多项式法，解决一下，上面莱布尼茨公式法的习题吧。

习题：函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=(\quad)$.（答案在文末，题号为④）

当上面三种方法，三种通用套路，看起来都没办法解决的时候，我们只能祭出观察规律法。

数学难题常常就出现在需要观察的题目上。有时候，一个函数，你观察到它潜在的某种特点、或者可以进行某种不常见的变形、或者有某种几何性质，便能够很快速地解决掉题目，但如果观察不出来，就真的绞经脑汁也解不出来。观察题和套路题一定程度上是对立的（当然对于身经百战的解题者，观察题也是套路题）。观察题是让人又爱又恨的，它常常是让人困惑的，但也常常是美妙的。

废话有点多了，下面进入第四种方法——观察规律法。

4. 观察规律法

例题：已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$ ，当 $n\geq 2$ 时， $f^{(n)}(0)=(\quad)$.

解：尝试按上面三种套路思考，发现似乎都行不通，于是尝试使用观察规律法。

观察、思考，不难想到 $(x+1)^2$ 在导数等于 3 后会变成 0。于是尝试对 $f(x)$ 求前 3 次导数。

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$ ，

$f''(x)=2+2f'(x)$ ，

$f'''(x)=2f''(x)$ ，则

$f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)=2^2f^{(n-2)}(x)=\cdots=2^{n-2}f''(x)\quad(n\geq 2)$

而 $f(0)=1$ ， $f'(0)=2+2=4$ ， $f''(0)=10$

因此 $f^{(n)}(0)=5*2^{n-1}$

小结：观察规律法，通常是尝试求前几阶导数，然后进行观察，总结导数可能存在的规律。而且有时后，在求解前一二阶导数后，便可以使用前面的三种方法解决了。

习题：已知函数 $f(x)=\arctan x$ ，求 $f^{(n)}(0)$.

5. 下一步做什么

找书本或者网上的高阶导数的题来做吧。认真做个15道高阶导数的题感觉就没什么太大问题了。

最后的提醒，解决高阶导数的问题，几乎就这四种方法不会错。不过有的时候，稍微复杂的题目并不一定是一定用单一的方法解决的，对这四种方法融会贯通，学会综合运用，方能立于不败之地。

答案

② $60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$

③ $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3\ldots)$

④ $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3\ldots)$。注意化 $f(x)=x^2 2^x=x^2 e^{x\ln 2}$，然后再泰勒展开。

⑤ $\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$

~ ~作者水平有限，难免存在错误，欢迎指正~ ~

~ ~求点赞、求收藏~ ~

编辑于 2021-06-27 23:45