第一章　复习课

第一章 小结

六个概念：随机试验、样本空间、事件、
概率、条件概率、独立性

四个公式：加法公式、乘法公式、全概率公式、
贝叶斯公式

两个概型：古典概型、贝努里概型

一、内容概要

1、随机试验

设T为一个试验，如果它满足下机三个条件，则称为随机试验：

（1）可以在相同条件下重复进行；

（2）事前可知它的全部结果，每次试验至少且至多出现其中的一个结果；

（3）在试验之前，不能确定出现哪个结果。

2、样本空间

称随机试验T的所有可能结果组成的集合称为T的样本空间，记为Ω，样本空间中的元素，称为样本点。

3、随机事件

我们把样本空间的子集称为**随机事件**。

4、随机事件的概率

设T是随机试验，Ω是它的样本空间，对于Ω中的每一个事件A，赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下述三条公理：

公理1　$0 \le P(A) \le 1$

公理2　$P(\Omega) = 1$

公理3　若事件$A_1, A_2, \ldots$两两互不相容，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

概率具有以下性质：

(1)$P(\varphi)=0$

(2)(加法定理)若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限个两两互斥的事件,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A)$$

对任一事件A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) A、B是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

若事件$A \supset B$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

$$P(A)\geq P(B)$$

5、条件概率

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$, 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下, 事件A的条件概率。

6、加法公式

对任意两事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

7、乘法公式

若$P(B)>0$, 则$P(AB)=P(B)P(A|B)$

若$P(A)>0$, 则$P(AB)=P(A)P(B|A)$

8、事件的独立性

设A、B是两个事件，满足

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

此时称A与B是相互独立的。

一般地，$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个事件，如果对于任意的k，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \mathrm{L}\ A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\mathrm{L}\ P(A_{i_k})$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为相互独立的事件。

9、全概率公式和贝叶斯公式

设 Ω 为随机试验的样本空间， $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的事件，且 $P(A_i) > 0,\ i = 1,2,\cdots,n$，另一事件 B，它总是与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一同时发生,则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$ ——全概率公式

——贝叶斯公式

10、古典概型

如果随机试验具有下列特点就称之为古典概型：

（1）试验所有可能的结果个数有限,即基本事件个数有限。

（2）各个试验结果在每次实验中发生的可能性是一样的。

对于古典概型，设其样本空间W由n个样本点组成，事件A由m个样本点组成。则定义事件A的概率为：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\mathrm{W}\text{中的样本点总数}}$$

11、独立试验概型

在同样条件下重复进行,且任何一次试验发生的结果都不受其它各次试验结果的影响.这种概率模型称做独立试验概型.

在n次独立试验概型中,若每次试验只有两个结果:A发生或$\overline{A}$发生, $P(A)>0$, 称这样的独立试验概型为贝努里(Bernoulli)概型.

定理 在贝努里概型中, $P(A)=p$ $(0<p<1)$, 则事件A在n次试验中恰好发生k次的概率为:

$$P(n,k,p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \le k \le n)$$

——参数为n和p的二项概率公式

例1、填空题：

1、已知，$P(A)=0.4,\quad P(B)=0.3$

(1) 当A、B互不相容时，$P(A\cup B)=\underline{\mathbf{0.7}}$，$P(AB)=\underline{\mathbf{0}}$；

(2) 当A、B相互独立时，$P(A\cup B)=\underline{\mathbf{0.58}}$，$P(AB)=\underline{\mathbf{0.12}}$；

(3) 当$B\subset A$时，$P(A\cup B)=\underline{\mathbf{0.4}}$，$P(AB)=\underline{\mathbf{0.3}}$；

2、已知 $P(A)=0.5,\quad P(B)=0.6,\quad P(B|A)=0.8,$

则 $P(A\cup B)=\underline{\mathbf{0.7}}$

3、一种零件的加工由两道工序组成，第一道工序的废品率为p，第二道工序的废品率为q则该零件加工的成品率为<u>(1－p)(1－q)</u>

4、甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.5和0.4，现已知目标被击中，则它是乙射中的概率是<u>　0.57　　　　</u>。

5、设三次独立试验中，事件A出现的概率相等，若已知A至少出现一次的概率为$\frac{19}{27}$，则在一次试验中事件A出现的概率为<u>　1/3　　　　</u>。

例2、单项选择题 ：

1. 设 A,B 为任意事件，下列命题正确的（　　）

（A）若 A,B 互不相容，则 $\bar{A},\bar{B}$ 互不相容

（B）若 A,B 相容，则 $\bar{A},\bar{B}$ 互不相容

（C）若 A,B 相互独立，则 $\bar{A},\bar{B}$ 相互独立

（D）$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$

答案 C

例3、设两两独立的三个事件A、B、C，满足

, $ABC = \mathrm{F}$，$P(A) = P(B) = P(C) < 0.5$且$P(A \cup B \cup C) = \dfrac{9}{16}$

求$P(A)$ ，

解：由于$A \quad B \quad C$三事件两两独立，所以

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(A)^2$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B)C)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC \cup BC)$$

$$= 3P(A) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= 3P(A) - 3P(A)^2 + P(ABC)$$

又由于 $ABC = \mathrm{F}$ 所以

$$3P(A) - 3P(A)^2 = \frac{9}{16} \quad Þ \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

例4、用三个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为0.5、0.3、0.2，各机床加工的零件为合格品的概率分别为0.94、0.90、0.95，求全部产品的合格率。

解：设 $A\quad B\quad C$ 分别表示零件由第一、第二、第三个车床加工，D 表示产品为合格品。则由题意得：

$$P(A)=0.5 \qquad P(B)=0.3 \qquad P(C)=0.2$$

$$P(D\mid A)=0.94 \quad P(D\mid B)=0.90 \quad P(D\mid C)=0.95$$

$$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)$$

$$=0.5\times 0.94+0.3\times 0.9+0.2\times 0.95$$

$$=0.93$$

例5、假定某厂甲、乙、丙 3 个车间生产同一螺钉. 产量依次占全厂的45%, 35%, 20%, 若每个车间的次品率依次为4%, 2 %, 5%. 现从待出厂的产品中检查出 1 个次品, 问它是由甲车间生产的概率是多少?

解：设 $A \quad B \quad C$分别表示螺钉由甲、乙、丙三个厂生产，　表示螺钉为次品。则由题意得：

$$P(A)=0.45 \qquad P(B)=0.35 \qquad P(C)=0.20$$

$$P(D\,|\,A)=0.04 \quad P(D\,|\,B)=0.02 \quad P(D\,|\,C)=0.05$$

$$P(A\,|\,D)=\frac{P(A)P(D\,|\,A)}{P(A)P(D\,|\,A)+P(B)P(D\,|\,B)+P(C)P(D\,|\,C)}$$

$$=\frac{0.45^{\prime}\ 0.04}{0.45^{\prime}\ 0.04+0.35^{\prime}\ 0.02+0.20^{\prime}\ 0.05}=\frac{18}{35}$$

例6、甲、乙两人各自向同一目标射击，已知甲命中目标的概率为 0.7，乙命中目标的概率为0.8　求：(1)甲、乙两人同时命中目标的概率；(2)恰有一人命中目标的概率；(3)目标被命中的概率。

解:设 A　B 分别表示甲乙命中目标。则

$$P(A)=0.7 \qquad\qquad P(B)=0.8$$

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.7\times 0.8=0.56$

(2) $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.7\times 0.2+0.8\times 0.3=0.38$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7+0.8-0.56=0.94$

例7、设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，

证明： $P(AB)=P(A)\times P(B)$ 。

证：

$$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1 \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=1$$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

36　　　　　　　　36　18

【例5】10位乘客来到某20层大楼的一层乘电梯上楼，每个乘客在任何一层(从2到20层)离开是等可能的，求至少有两个人在同一层下的概率是多少?

思路点拨

利用对立事件的性质简化概率的计算.所求事件的逆事件为10个人分别在不同楼层下.

【解】A表示“10位乘客中至少有两人在同一层下”，则$P(\bar{A})$表示“10个人分别在不同层下楼”的概率，因此$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{A_{19}^{10}}{19^{10}}$.

【例 10】$P(A)=0.4, P(B|A)=0.5, P(A|B)=0.25$，则 $P(B)=$ ______.

思路点拨

条件概率公式：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，本题根据公式的变形进行相应的计算.

【解】$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.5\times0.4=0.2, P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{0.2}{0.25}=0.8.$

【例 13】若事件 A 与 B 互不相容，则(　　)

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

思路点拨

两个事件互不相容与相互独立并不等价，当且仅当两个事件组成一个必然事件时，互不相容与相互独立才等价.

【解】因为 A 与 B 互不相容，由互不相容的定义得 $A\cap B=\varnothing$，即 $P(AB)=0$.

选项(A)，$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$，因为由题目条件不能得出 $P(A\cup B)=1$，故选项(A)不成立.

选项(B)，由 $A\cap B=\varnothing$，得不到 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$，即得不到 $P(A)=0$ 或者 $P(B)=0$，故选项(B)不成立.

选项(C)，只有当 A,B 互为对立事件的时候才成立，故排除(C).

选项(D)，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$，故(D)正确.

2. 全概率公式与贝叶斯公式

【例 20】 第一只盒子里装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子里装有 4 只红球，5 只白球. 先从第一只盒子里取一只球放到第二只盒子，再从第二只盒子里取出一只球，求取到的是白球的概率.

思路点拨

本题分不同情况，利用条件概率公式的变形计算事件发生的总概率.

【解】 令事件 A 表示"从第二个盒子中取出一球，取到的是白球"，B 表示"从第一个盒子中取出白球"，C 表示"从第一个盒子中取出红球"，则由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{10}=\frac{49}{90}.$$