第二章　随机变量及其分布

一. 随机变量的定义及分类

1. 随机变量的定义.

2. 随机变量的分类

随机变量
- 离散型随机变量
- 非离散型随机变量
  - 连续型
  - 非连续型

二.离散型随机变量及概率分布

1.离散型随机变量的概率分布定义及性质

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1,2,\cdots)$$

2.离散型随机变量的概率分布的应用

$$P(X \in I) = \sum_{x_i \in I} P(X = x_i),\ I - \text{区间}$$

3.常用的离散型分布(记住它们的Pr.分布)

(1)、0-1分布X～B(1,p)

(2)、二项分布X～B(n,p)

(3)、Poission分布X～P(□)

三. R. V. 的分布函数

1. 分布函数的定义及性质

2. 分布函数的求法

(1) 若离散型随机变量X的分布律为

$P(X = x_k) = p_k,\ k = 1,2,\cdots$ 则其分布函数为

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_i$$

(2) 若连续型随机变量X $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

3. 分布函数的应用——求事件的Pr., 如:

$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$ $\qquad P(X \le a) = F(a)$

$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$ $\qquad P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$

四.连续型随机变量及概率密度

1. 连续型随机变量的p. d. f. 定义及性质

（1）p. d. f. 的定义及性质

（2）连续型随机变量的特殊性质

2. 利用连续型随机变量的p. d. f. 可以求事件的概率

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx, I - 区间$$

3. 常用的连续型分布(记住它们的概率密度)

（1）均匀分布X～U(a, b)

（2）指数分布X ～ E(λ)

（3）正态分布X ～ N(μ, σ 2)

五. 随机变量函数的分布

1. 离散型随机变量函数的分布律

2. 连续型随机变量函数的概率密度

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \int_{g(x) \le y} f(x)\,dx$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

例如 设 $X \sim N(□, □^2)$， $Y = aX +$

$$f_Y(y) □ \frac{1}{|a|} f_X \left□ \frac{1}{a}(y □ b) \right□$$

$$□ \frac{1}{\sqrt{2□□}\,|a|} e^{□\frac{(y □ b □ a □)^2}{2a^2 □^2}} \quad □□ □ y □□$$

$Y \sim N(a□ + b, a^2 □^2)$

特别地，若 $X \sim N(□, □^2)$，

则 $$Y □ \frac{X □□}{□} \sim N(0,1)$$

第四章 小结

六种常用随机变量的期望与方差

E(X)

定义式
函数的期望

E(C)
E(cX)
E(X+Y)
E£XY£©

D(X)

定义式
计算式

D(C)
D(cX)
D(X+Y)

例题讲解

1. 设 $X \sim P(\lambda)$，且 $P(X=5)=P(X=6)$ ，则 （　　）

(A) $\lambda=5$　　(B) $\lambda=6$

(C) $\lambda=1$　　(D) $\lambda=11$

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=a(\frac{2}{3})^k, k=1,2,3$，求常数 a.

1. B　2. $a=\frac{27}{38}$

3. 一箱产品中装有3个次品5个正品，某人从箱中任意取出4个产品，求（1）取得的正品个数X的概率分布(2) X的分布函数$F(x)$；(3) $P\{-1<X\leq 2.5\}$；(4) $E(X)$，$D(X)$

（1）因为随机变量X可能取值为1，2，3，4且

$$P\{X=1\}=\frac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\frac{1}{14}; \qquad P\{X=2\}=\frac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\frac{3}{7};$$

$$P\{X=3\}=\frac{C_3^1C_5^3}{C_8^4}=\frac{3}{7}; \quad P\{X=4\}=\frac{C_3^0C_5^4}{C_8^4}=\frac{1}{14};$$

故随机变量 X 的概率分布为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(2) X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{14}, & 1\le x<2\\ \frac{1}{2}, & 2\le x<3\\ \frac{13}{14}, & 3\le x<4\\ 1, & 4\le x\end{cases}$；

(3) $P\{-1<X\le 2.5\}=F(2.5)-F(-1)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

(4) $E(X)=\frac{5}{2}$， $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{95}{14}-\frac{25}{4}=\frac{15}{28}$

4. 设一盒子中装有 3 只白球和 3 只黑球，甲、乙两人轮流从盒子里不放回地取球，每次取一球，甲先取，取到黑球时就停止，求甲取球次数 X 的分布律。

【解】设 X 表示甲取球次数，分放回和不放回两种情况.

(Ⅰ)不放回，X 只可取 1,2 两值.

$X=1$ 有如下两种情况，即甲第一次取到黑球，或甲第一次取到白球且乙第一次取到黑球，则

$$P\{X=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{5}.$$

$X=2$ 也有两种情况，即甲、乙第一次均取到白球且甲第二次取到黑球，或甲第二次取到白球且乙第二次取到黑球，则

$$P\{X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{5}.$$

则 X 的分布律为：

X	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

5. 设 X 在 (0，5) 由服从均匀分布，求关于 x 的一元二次方程

$4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的概率.

解：所求概率为 $P\left\{X^2-(X+2)\geq 0\right\}=P\left\{X\geq 2\right\}=\dfrac{3}{5}=0.6$

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & x>1\\ 0 & x\leq 1\end{cases}$

（1）求常数 a，（2）求 $P\{-1\leq X<2\}$

解：（1）$\int_1^{+\infty}\dfrac{a}{x^2}dx=1$，　　$a=1$

（2）$P\{-1\leq X<2\}=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}$

7\. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求（1）常数 k；（2）X 的分布函数.

（1）由概率密度的性质得 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}$　故　$k=1$

（2）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=1$，

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x tdt=\frac{1}{2}x^2$，

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 xdx+\int_1^x (2-t)dt=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$，

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$

8. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$ 求（1） 常数 A；

（2） $P\{0<X<1\}$； （3） 分布函数 $F(x)$； （4） $E(X)$.

解（1）由概率密度的性质得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2A,\ \text{故}\ \ A=\frac{1}{2},$$

（2） $P\{0<X<1\}=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

（3） 当 $x\leqslant 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

当 $x>0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}.$$

（4） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=0$

9. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}+x-1}(-\infty<x<+\infty)$，

求 $E(X)$，$D(X)$ 及 $E(e^{-X})$.

解 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2(\sqrt{2})^2}}$，所以 $\mu=2$，$\sigma=4$ 所以 $\mu=2$，$\sigma=4$，

即 $E(X)=2$，$D(X)=2$

$$E(e^{-X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{e}$$

10. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，

求（1）常数 k；（2）随机变量的 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解（1）由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 得 $k=\dfrac{1}{\pi}$

（2）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\le y\}$

$$=P\{X\ge(1-y)^3\}=1-P\{X<(1-y)^3\}$$

$$=1-F_X((1-y)^3)$$

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{3(1-y)^3}{\pi[1+(1-y)^6]}(-\infty<y<+\infty)$$

P31

3 袋中装有 5 只乒乓球，编号为 1, 2, 3, 4, 5，在袋中任取 3 只，
以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，求随机变量 X 的概率分布．

解：随机变量 X 可以取 3、4、5，又

$$P\{X=3\}=\frac{C_2^2}{C_5^3}=0.1,\quad P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3,$$

$$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6,$$

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

4 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{ak}{18},k=1,2,\cdots,9$$

（1）求常数 a;

（2）求概率 P $\{X=1或X=4\}$;

（3）求概率 $P\left\{-1\le X<\frac{7}{2}\right\}$；

（1）　因为$1=\sum_{k=1}^{9}\frac{ak}{18}=\frac{a}{18}\times\frac{9\times 10}{2}=\frac{5a}{2}$，所以$a=\frac{2}{5}$；

（2）$P\{X=1或X=4\}=P\{X=1\}+P\{X=4\}=\frac{1}{45}+\frac{4}{45}=\frac{1}{9}$；

（3）$P\left\{-1\le X<\frac{7}{2}\right\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1+2+3}{45}=\frac{2}{15}$

6. 袋中共有 6 个球，其中 2 个是白球，4 个是黄球．在下列两种情况下，分别求出取到白数个数 X 的概率分布．

（1）无放回抽取，每次抽 1 个，共抽 3 个；

（2）有放回抽取，每次抽 1 个，共抽 3 个．

（1） X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

（2） X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$ ， $k=0,1,2,3$

8. 尽管在几何教科书中已经讲过用圆规和直尺三等分一个任意角是不可能的，但每年总有一些“发明者”撰写关于用圆规和直尺将角三等分的文章. 设某地区每年撰写此类文章的篇数 X 服从参数为 6 的泊松分布，求明年没有此类文章的概率.

解：$P\{X=0\}=\dfrac{6^0}{0!}e^{-6}=e^{-6}\approx 0.0025$

P36

11 某射手射击一个固定目标，每次命中率为 0.3，每分钟一次记 2 分，否则扣 1 分，求两次射击后该射手得分总数 X 的分布函数.

解：因为 X 的概率分布为

X	-2	1	4
P	0.49	0.42	0.09

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ 0.49, & -2\le x<1 \\ 0.91, & 1\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}$。

12 随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

求常数 A, 概率 $\mathrm{P}\left\{X>\frac{1}{2}\right\}, \mathrm{P}\{-1<X\le 2\}$.

解：（1）由 $F(1+0)=F(1)$，即 $1=A\times 1$，得 $A=1$；

（2）$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$；

（3）$P\{-1<X\le 2\}=F(2)-F(-1)=1-0=1$。

P43

15.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

试确定常数 A，并求 $P\{X>0.5\}$ 和 $P\{X>1|X<2\}$

（1）因为 $1=\int_0^{\infty}Ae^{-2x}dx=\frac{A}{2}$，所以 $A=2$；

（2）$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{\infty}2e^{-2x}dx=e^{-1}$；

（3）$P\{X>1|X<2\}=\frac{P\{1<X<2\}}{P\{X<2\}}=\frac{\int_1^2 2e^{-2x}dx}{\int_0^2 2e^{-2x}dx}=\frac{e^{-2}-e^{-4}}{1-e^{-4}}=\frac{1}{1+e^{2}}$。

16. 设随机变量 X, Y 的概率密度为

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$,

求 X 的分布函数.

(1) 当 $x<-1$ 时, $F(x)=0$, 当 $x\ge 1$ 时, $F(x)=1$,

当 $-1\le x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\pi}\arcsin t\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)$$

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\dfrac{\pi}{2}\right), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$;

18. 设 X 在 (0, 5) 由服从均匀分布, 求关于 x 的一元二次方程

$$4x^2+4Xx+X+2=0$$

有实根的概率.

解：所求概率为 $P\left\{X^2-(X+2)\geq 0\right\}=P\{X\geq 2\}=\frac{3}{5}=0.6$