第二章　随机变量的分布及数字特征

一 、选择与填空

1. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/25 & 0\le x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases}$，则 $P(3<X\le 6)=$_______.

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列结论中不一定成立的是（　　）.

$(A)\ F(+\infty)=1$　　$(B)\ F(-\infty)=0$

$(C)\ 0\leqslant F(x)\leqslant 1$　　$(D)\ F(x)$ 为严格单调增函数

3. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则常数 $a=$ ____________;

4. 设 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，则概率 $P\left\{X<\frac{2a+b}{3}\right\}=$_________.

5. 若 $X\sim B(n,p)$， $E(X)=2.4$， $D(X)=1.44$，则二项分布的参数为（　　）

（A） $n=6, p=0.4$　　（B） $n=4, p=0.6$

（C） $n=8, p=0.3$　　（D） $n=24, p=0.1$

6. 设 $X\sim E(\lambda)$， ，则 $E(X^2)=$______________________________________.

7. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， 则（　　）

$(A)\ E(X)=\frac{1}{2},\ D(X)=\frac{1}{12}$　　$(B)\ E(X)=0,\ D(X)=1$

$(C)\ E(X)=1,\ D(X)=1$　　$(D)\ E(X)=-1,\ D(X)=1$

8. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， 则__________.

$(A)\ E(X)=\frac{1}{2},\ D(X)=\frac{1}{12}$　　$(B)\ E(X)=0,\ D(X)=1$

$(C)\ E(X)=1,\ D(X)=1$　　$(D)\ E(X)=-1,\ D(X)=1$

9. 设 $X\sim P(\lambda)$， $E(X)=2$， $Y=-3X-1$ ，则 $D(Y)=$________________.

10. 设 $X\sim N(1,4)$ ， 则 $Y=-3X-1\ \sim$________________________________.

二、计算题

1. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{ak}{18}, k=1,2,3$；求（1） 常数 a

（2） $P\left\{-1\le X<\dfrac{5}{2}\right\}$；（3） $E(X)$, $D(X)$.

2. 设随机变量 X 的概率分布为

X	－1	0	1	2
P	0．3	a	0．2	b

且 $E(X)=0.5$ ，求（1）常数 a,b；（2） $D(X)$；（3） $P\{X^2\ge 1\}$.

3．设一盒子中装有 3 只白球和 3 只黑球，甲、乙两人轮流从盒子里不放回地取球，每次取一球，甲先取，取到黑球时就停止，求（1）甲取球次数 X 的分布律；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3） $P\{0<X\le 1.5\}$ ；（4），$E(X)$，$D(X)$.

4. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，求（1）常数 k；（2） $P\{X\ge 1\}$；（3）随机变量的 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

5. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或为绿与其他信号灯为红或为绿相互独立，且红绿两种信号灯显示时间相等。以 X 表示汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求（1）X 的概率分布；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$P\{0.5<X\le 1.5\}$ ；（4），$E(X)$，$D(X)$.

6. 设随机变量 x 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$（1）求常数 a；（2）求 $P\{-1\le X<2\}$；（3）求 $Y=\ln X$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

7. 假设有十只同种电器元件，其中有两只是废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，如果是废品，则扔掉重新任取一只，如果还是废品则扔掉再任取一只，如此继续，若 X 表示在取到正品之前已取出的废品只数，求（1）X 的概率分布；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$P\{0.5<X\le 1.5\}$ ；（4），$E(X)$，$D(X)$.

8. 设 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{A\sqrt{1-x^2}} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求（1）常数 A；（2）$P\{0<X<1\}$；（3）分布函数 $F(x)$；（4）$E(X),\quad D(X)$.

9. 设随机变量 x 的密度函数为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$（1）求常数 a，（2）求 $P\{-1\le X<2\}$（3）求 $Y=\ln X$ 的密度函数 $f_Y\left(y\right)$.

10. 设 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度

第二章　随机变量的分布及数字特征参考答案

一 、选择与填空

1. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/25 & 0\le x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases}$，则 $P(3<X\le 6)=$ _16/25

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列结论中不一定成立的是（D）

$(A)\ F(+\infty)=1$　　　　$(B)\ F(-\infty)=0$

$(C)\ 0\leqslant F(x)\leqslant 1$　　　　$(D)\ F(x)$ 为严格单调增函数

3. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则常数 $a=$ _____2_________；

4. 设 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，则概率 $P\left\{X<\frac{2a+b}{3}\right\}=$（　　　）.

5. 若 $X\sim B(n,p)$， $E(X)=2.4$， $D(X)=1.44$，则二项分布的参数为（ A ）

（A） $n=6, p=0.4$　　　　（B） $n=4, p=0.6$

（C） $n=8, p=0.3$　　　　（D） $n=24, p=0.1$

6. 设 $X\sim E(\lambda)$，，则 $E(X^2)=$ ___ $\frac{2}{\lambda^2}$ ____.

7. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， 则（ A ）

$(A)\quad E(X)=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{12}$　　　$(B)\quad E(X)=0,\ \ D(X)=1$

$(C)\quad E(X)=1,\ \ D(X)=1$　　　$(D)\quad E(X)=-1,\ \ D(X)=1$

8. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， 则　（　 C 　）

$(A)\quad E(X)=\frac{1}{2}, D(X)=\frac{1}{12}$　　　$(B)\quad E(X)=0, D(X)=1$

$(C)\quad E(X)=1, D(X)=1$　　　$(D)\quad E(X)=-1, D(X)=1$

9. 设 $X\sim P(\lambda)$， $E(X)=2$， $Y=-3X-1$ ，则 $D(Y)=$ _18_

10. 设 $X\sim N(1,4)$ ， 则 $Y=-3X-1$ ～____ $N(-4,36)$ ____.

二、计算题

1. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\left\{X=k\right\}=\dfrac{ak}{18},k=1,2,3$；求（1） 常数 a （2） $P\left\{-1\le X<\dfrac{5}{2}\right\}$；（3） $E(X)$, $D(X)$.

解（1）因为 $1=\sum_{k=1}^{3}\dfrac{ak}{18}=\dfrac{a}{18}\times\dfrac{3\times4}{2}=\dfrac{a}{3}$，故 $a=3$

（2） $P\left\{-1\le X<\dfrac{5}{2}\right\}=P\left\{X=1\right\}+P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1+2}{6}=\dfrac{1}{2}$

（3） $EX=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{3}$

$EX^2=1\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{3}+9\times\dfrac{1}{2}=6$

$DX=EX^2-(EX)^2=6-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

2. 设随机变量 X 的概率分布为

X	−1	0	1	2
P	0.3	a	0.2	b

且 $E(X)=0.5$ ，求（1）常数 a,b；（2） $D(X)$；（3） $P\{X^2\ge1\}$.

解（1）因为 $\sum_i p_i=a+b+0.5=1$，又 $EX=-0.3+0.2+2b=0.5$

得 $a=0.2$，$b=0.3$

（2） $EX^2=0.3+0.2+4\times0.3=1.7$

$DX=EX^2-(EX)^2=1.7-0.5^2=1.45$

（3） $P\left\{X^2\ge1\right\}=0.3+0.2+0.3=0.8$

3．设一盒子中装有 3 只白球和 3 只黑球，甲、乙两人轮流从盒子里不放回地取球，每次取一球，甲先取，取到黑球时就停止，求（1）甲取球次数 X 的分布律；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3） $P\left\{0<X\le1.5\right\}$ ；（4），$E(X)$，$D(X)$.

（1） X 只可能取 1, 2 两个值，且 $P\left\{X=1\right\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$

$P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times1=\dfrac{1}{5}$

则 X 的分布律为：

X	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{4}{5}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(3) $P\left\{0<X\le 1.5\right\}=F(1.5)-F(0)=\frac{4}{5}$

(4) $E(X)=\frac{6}{5}$，$D(X)=\frac{4}{25}$

4. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\frac{k}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，求（1）常数 k；（2）$P\left\{X\ge 1\right\}$；（3）随机变量的 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

（1）由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得 $k=\frac{1}{\pi}$

（2）$P\left\{X\ge 1\right\}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

（3）$F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{1-\sqrt[3]{X}\le y\right\}$

$=P\left\{X\ge(1-y)^3\right\}=1-P\left\{X<(1-y)^3\right\}$

$=1-F_X((1-y)^3)$

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{3(1-y)^2}{\pi\left[1+（1-y)^6\right]}\quad(-\infty<y<+\infty)$$

5. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或为绿与其他信号灯为红或为绿相互独立，且红绿两种信号灯显示时间相等。以 X 表示汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求(1) X 的概率分布；(2) X 的分布函数 $F(x)$；(3) $P\left\{0.5<X\le 1.5\right\}$；(4)，$E(X)$，$D(X)$.

解(1)

$X=0,1,2,3$

$P(X=0)=\frac{1}{2},P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\boldsymbol{P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}}$

所以，X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

(2) X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ \dfrac{3}{4}, & 1\le x<2\\ \dfrac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$；

(3) $P\{0.5<X\le 1.5\}=F(1.5)-F(0.5)=\dfrac{1}{4}$

(4) $E(X)=\dfrac{7}{8}$， $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{71}{64}$

6. 设随机变量 x 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$（1）求常数 a；（2）求 $P\{-1\le X<2\}$；（3）求 $Y=\ln X$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

（1）解：（1） $\int_1^{+\infty}\dfrac{a}{x^2}dx=1$， $a=1$

（2） $P\{-1\le X<2\}=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}$

（3） **设X的分布函数为$F_X(x)$, Y的分布函数为$F_Y(y)$,**

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\ln X\le y\}$$

$x>1$时， $\ln x>0$， $y\le 0$**时，** $f_Y(y)=0$，

$y>0, F_Y(y)=P\{X\le e^y\}=\int_1^{e^y}\dfrac{1}{x^2}dx$，

上式两端分别对 y 求导， $f_Y(y)=e^{-2y}\cdot e^y=e^{-y}$， $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

7. 假设有十只同种电器元件，其中有两只是废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，如果是废品，则扔掉重新任取一只，如果还是废品则扔掉再任取一只，如此继续，若 X 表示在取到正品之前已取出的废品只数，求（1） X 的概率分布；(2) X 的分布函数 $F(x)$；(3) $P\{0.5<X\le 1.5\}$ ；(4)， $E(X)$， $D(X)$.

解（1）X 只可能取 0，1, 2, 三个值，且 $P\left(X=0\right)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ $P\left(X=1\right)=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{45}$

$$P\left(X=2\right)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

所以，X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

(2) X 的分布函数为：

$$F\left(X\right)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{4}{5} & 0\le X<1\\ \frac{44}{45} & 1\le X<2\\ 1 & X\ge 2\end{cases}$$

（3） $P\left\{0.5<X\le 1.5\right\}=F(1.5)-F(0.5)=\frac{8}{45}$

（4） $E(X)=0*0.8+1*\frac{8}{45}+2*\frac{1}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$$E(X^2)=0*0.8+1*\frac{8}{45}+4*\frac{1}{45}=\frac{12}{45}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{264}{1215}=\frac{88}{405}$$

8. 设 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{A\sqrt{1-x^2}} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求(1) 常数 A；(2) $P\left\{0<X<1\right\}$； (3) 分布函数 $F(x)$； (4) $E(X)$, $D(X)$.

（1）由概率密度的性质得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{A\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{A}$$

故 $A=\pi$

(2) $P\left\{0<X<1\right\}=\int_0^1\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

（3）当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$，当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$，

当 $-1\le x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin t\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)$$

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

（4） $EX=0$

$$DX=EX^2=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

9. 设随机变量 x 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x^2} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$（1）求常数 a，

（2）求 $P\{-1\le X<2\}$（3）求 $Y=\ln X$ 的密度函数 $f_Y(y)$

解：（1） $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2}dx=1$， $a=1$

（2） $P\{-1\le X<2\}=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}$

（3） **设X的分布函数为$F_X(x)$, Y的分布函数为$F_Y(y)$,**

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\ln X\le y\}$

$x>1$时， $\ln x>0$， $y\le 0$**时，** $f_Y(y)=0$，

$y>0, F_Y(y)=P\{X\le e^y\}=\int_1^{e^y}\frac{1}{x^2}dx$，

上式两端分别对 y 求导， $f_Y(y)=e^{-2y}\cdot e^y=e^{-y}$，

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

10. 设 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度

$f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ 故当 $y<e^2$ $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$

$y \geq e^4$ $\quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$

$e^2 \leq y < e^4$ $\quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^{2X} \leq y\}$

$$= P\left\{X \leq \frac{1}{2}\ln y\right\} = \int_1^{\frac{1}{2}\ln y} 1dx = \frac{1}{2}\ln y - 1$$

故$Y = e^{2X}$的概率密度 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & e^2 < y < e^4 \\ 0, & 其他 \end{cases}$