Real Analysis

作者： 知北游

时间： 2025 年 7 月 5 日

目录

Chapter 1

可测函数

§1.1 可测函数定义和性质

【definition 1.1】(可测函数) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$f: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, 若

$$\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) > t\}\text{是可测集}$$

, 则称 f 是 E 上的可测函数.

【example 1.2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测.

Proof. $\forall t \in \mathbb{R}$，$\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$ 定属于下述三种情况之一：区间，单点集或空集. 从而可知

$$\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$$

是可测集. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测. □

【proposition 1.3】 下面几种集合的可测性是等价的

1. $\{x : f(x) > t\}$
2. $\{x : f(x) \leqslant t\} = E \backslash \{x : f(x) > t\}$
3. $\{x : f(x) \geqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t - \frac{1}{k}\right\}$
4. $\{x : f(x) < t\} = E \backslash \{x : f(x) \geqslant t\}$

【remark 1.4】 $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t + \frac{1}{k}\right\} = (\{x : f(x) \leqslant t\})^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < t + \frac{1}{k}\right\}\right)^c$$

【theorem 1.5】 设 $D \subset \mathbb{R}$ 稠密，若 $\{f > a\} \in \mathcal{M} \quad (\forall a \in D)$ 则 f 可测

Proof. $\forall t \in \mathbb{R}$，选取 $\{r_k\} \subset D$，使得

$$r_k \geqslant t; \quad \lim_{k\to\infty} r_k = t.$$

$\Longrightarrow$

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > r_k\}.$$

□

【**theorem 1.6**】 设 $f(x) : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}_\infty$，若 $f(x)$ 在 E_1 和 E_2 上可测，则 $f(x)$ 在 $E_1 \cup E_2$ 上可测.

Proof. 注意到:

$$\{x \in E_1 \cup E_2 : f(x) > t\} = \{x \in E_1 : f(x) > t\} \cup \{x \in E_2 : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

【**theorem 1.7**】 若 $f(x)$ 在 E 上可测，$A \subset E$ 可测，则 $f(x)|_A$ 可测.

Proof. 注意到:

$$\{x \in A : f(x) > t\} = A \cap \{x \in E : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

【**theorem 1.8**】 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测，则下列函数

$$cf(x) \quad f(x) + g(x) \quad f(x) \cdot g(x)$$

在 E 上可测.

【**theorem 1.9**】 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，则下列函数:

$$\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\} \quad \inf_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x)$$

在 E 上可测。

Proof. 只需考虑:

$$\{\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\} > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k(x) > t\}$$

和

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = \inf_{i\geqslant 1}\left(\sup_{k\geqslant i} f_k(x)\right)$$

□

【**corollary 1.10**】 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上可测，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad (x \in E)$$

则 $f(x)$ 在 E 上可测.

【theorem 1.11】 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测 $\Longleftrightarrow$ 对 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $G, f^{-1}(G)$ 可测。

<u>**Proof.**</u> 充分性显然，下面证明必要性．由假设知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集，故

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\backslash f^{-1}([b,+\infty))\quad(\forall(a,b)\in\mathbb{R})$$

可测．由于 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集，则 $G=\bigcup\limits_{k\geqslant 1}(a_k,b_k)$ ，从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geqslant 1}f^{-1}\left(a_k,b_k\right)$$

知 $f^{-1}(G)$ 可测． $\square$

【theorem 1.12】 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，g 在 $\mathbb{R}$ 上可测且 $a.e.$ 有限，$h=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数．

<u>**Proof.**</u> 对任一开集 $G\subset\mathbb{R}$ ，易得 $f^{-1}(G)$ 是开集，

$$g^{-1}\left(f^{-1}(G)\right)$$

可测．$h(x)=f(g(x))$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测． $\square$

【remark 1.13】 反过来不对

【corollary 1.14】 设 f 可测，令 $f^+=\max(f,0), f^-=\max(-f,0)$, 则 f^+,f^- 可测

【definition 1.15】(简单函数) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，令

$$\chi_{\mathrm{E}}(x)=\begin{cases}1,x\in E,\\ 0,x\notin E\end{cases}$$

称其为 E 上的特征函数. 进一步，令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in E.$$

其中 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,(\forall i\neq j).\quad f(x)=c_i,\quad x\in E_i$, 称 $f(x)$ 为 E 上简单函数.

【theorem 1.16】 (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则存在非负可测的简单函数渐升列：

$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x),\quad k=1,2,\cdots,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E;$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ ，使得 $|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$ ，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E$$

若 $f(x)$ 还是有界的，则上述收是一致的.

§1.2 可测函数的收敛

【definition 1.17】(几乎处处收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若存在 E 中的点集 Z，有 $m(Z)=0$ 及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\quad \forall x\in E\backslash Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，并记为

$$f_k(x)\to f(x),\quad \text{a. e. } x\in E.$$

【definition 1.18】(依测度收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\xrightarrow{m} f(x),\quad \forall x\in E.$$

【definition 1.19】(近一致收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，若 $\forall\delta>0$，存在 E 的可测子集 E_δ 满足 $m(E_\delta)\leqslant\delta$，使得

$$f_k(x)\rightrightarrows f(x)\quad \forall x\in E\backslash E_\delta$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 近上一致收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\to f(x),\quad \text{a. un. } x\in E.$$

【theorem 1.20】 设 $\{f_n\}, f$ 是 E 上实值可测函数，则

1. $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \iff \forall\varepsilon>0$
$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\geq\varepsilon\}\right)=0$$
2. $f_n \xrightarrow{\text{a. un.}} f \iff \forall\varepsilon>0$
$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\geq\varepsilon\}\right)=0$$
3. $f_n \xrightarrow{\text{m}} f \iff$ $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n'}\}$，存在其子列 $\{f_{n'_k}\}$，s.t.
$$f_{n'_k}\xrightarrow{\text{a. un.}} f$$

.

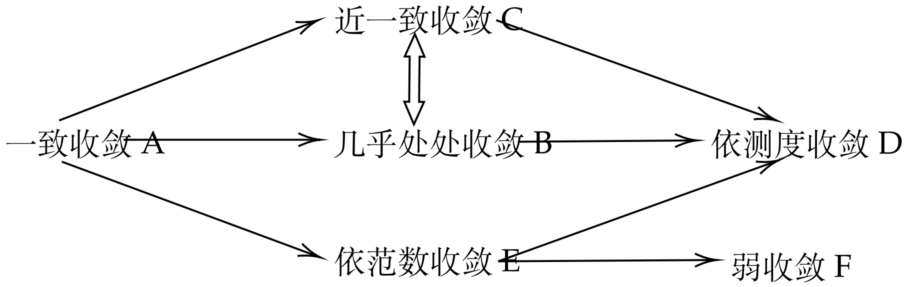
【theorem 1.21】 设 $\{f_n(x)\}, f(x)$ 是 E 上实值可测函数，则

1. $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f;\ f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f.$
2. 若 $m(E)<\infty$，则有 $f_n \xrightarrow{\text{a. e.}} f \iff f_n \xrightarrow{\text{a. un.}} f$
3. 设 $f_n \xrightarrow{m} f$，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$，使 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a. e}} f$

【remark 1.22】 上述定理的 2 的 $\Rightarrow$ 通常被称为 Egrorv 定理，3 通常被称为 Riesz 定理

附录：各种收敛的图示

1.$m(E) < \infty$ 的情形

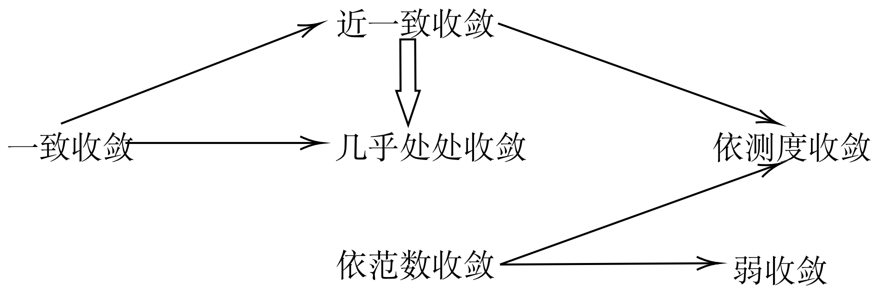


Proof.

1. (A $\Longrightarrow$ C) 由定义立得
2. (A $\Longrightarrow$ B) 由定义立得
3. (A $\Longrightarrow$ E)
4. (C $\Longrightarrow$ B) 由等价定义立得 (定理1.20)
5. (B $\Longrightarrow$ C) Egorov 定理
6. (B $\Longrightarrow$ D) 由 $m(E) < \infty$ 使用递减集合得测度连续性 (或由 B$\Longleftrightarrow$C 且 C $\Longrightarrow$ D)
7. (C $\Longrightarrow$ D) 测度连续性 (或由 B$\Longleftrightarrow$C 且 B $\Longrightarrow$ D)
8. (E $\Longrightarrow$ D) Markov 不等式
9. (E $\Longrightarrow$ F)

□

2.$m(E) = \infty$ 的情形



.

§1.3 可测函数与连续函数