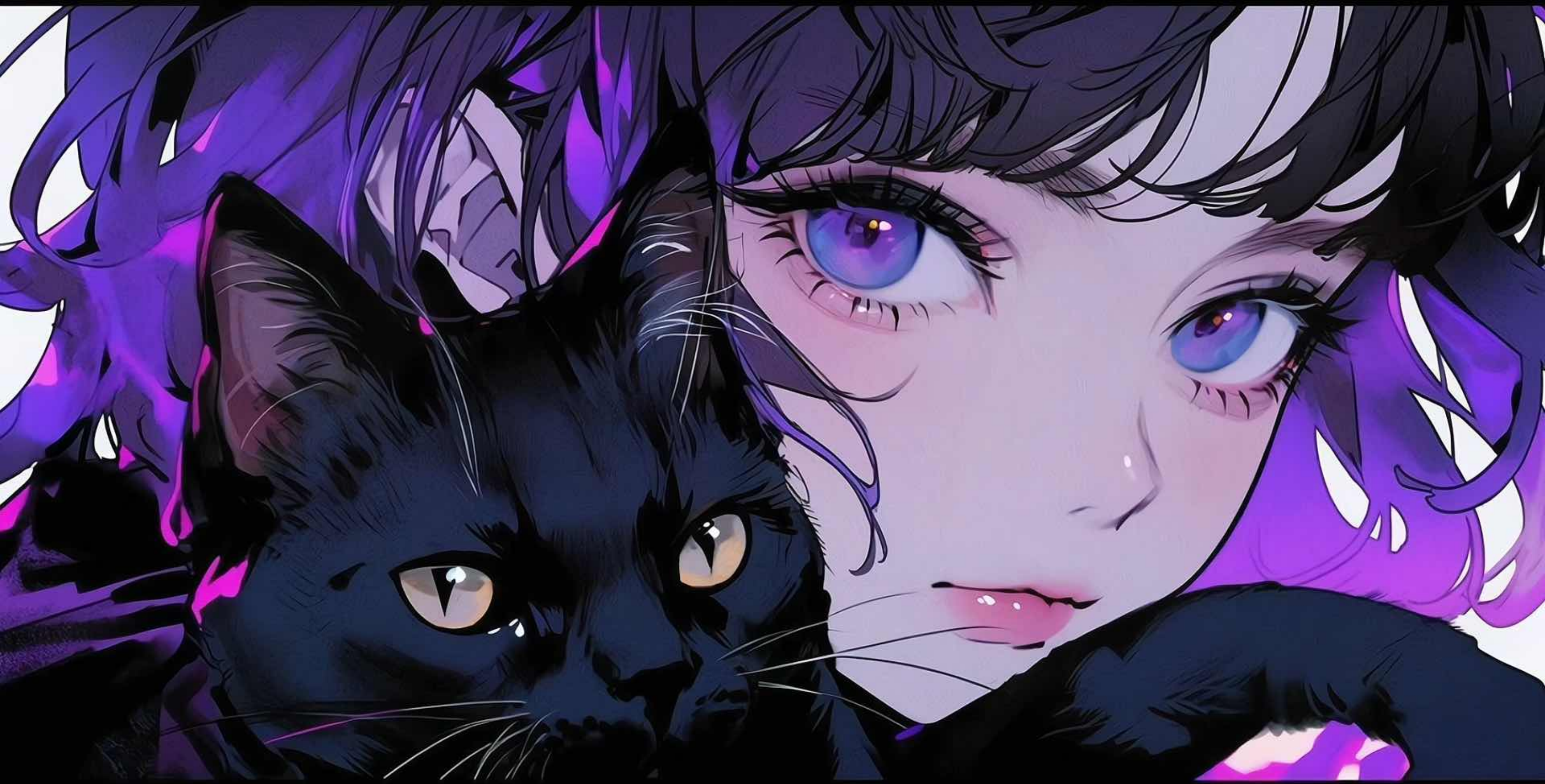

Complex Anasysis

作者：荒与叶

时间：2025 年 7 月 7 日

目录

Chapter 1

复数与复函数

复数的定义

【定义 1.1】(复数) 用 $\mathbb{C}$ 记复数的全体，则

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

【命题 1.2】 设 $z \in \mathbb{C}$ 则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

【例题 1.3】 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数，证明必有 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集 E ，使得

$$\left|\sum_{j \in E} z_j\right| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j| .$$

复数的几何表示

【定义 1.4】(模长，辐角) 设 $z \in \mathbb{C}$

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

其中，$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 称为 z 的<u>模长</u>，θ 称为 z 的<u>辐角</u>，记为 $\theta = \operatorname{Arg} z$.

【注 1.5】 注意到辐角的多值性，故限制 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ ，称这个 θ 为 z 的辐角的<u>主值</u>，记为 $\arg z$. 因而

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

【例题 1.6】 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

我们可以把实数中的拓扑完全推广到复数域，从而可以定义复函数的极限和连续，此处不再赘述.

Chapter 2

全纯函数

§2.1 全纯函数的导数

【定义 2.1】 设 $F: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，就说 f 在 z_0 处复可微，这个极限称为 f 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

【定义 2.2】(全纯函数) 如果 f 在 D 中每点都可微，就称 f 是域 D 中的全纯函数. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯，就称 f 在 z_0 处全纯.

【命题 2.3】 若 f 在 z_0 处可微，则必在 z_0 处连续.

证明. 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$ ，则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$ ，这说明 f 在 z_0 处连续. □

【命题 2.4】 若 $f, g \in \mathcal{H}(D)$ ，则 $f \pm g, fg \in \mathcal{H}(D)$ ，并且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$$
$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

如果 $\forall z \in D, g(z) \neq 0$ ，则 $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{H}(D)$，并且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$$

§2.2 Cauchy-Riemann 方程

【定义 2.5】 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in D$. 如果 u 和 v 作为 x,y 的二元函数在 (x_0,y_0) 处可微. 称 f 在 z_0 处实可微.

【命题 2.6】 设 $f:D\to\mathbb{C}$ ，$z_0\in D$ ，则 f 在 z_0 处实可微当且仅当

$$f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|)$$

【定理 2.7】 设 f 是定义在域 D 上的函数，$z_0\in D$ ，那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 f 在 z_0 处实可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0$.

证明. 必要性: 如果 f 在 z_0 处可微，则

$$f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=f'\left(z_0\right)\Delta z+o(|\Delta z|)$$

故 f 在 z_0 处是实可微的，而且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0, f'\left(z_0\right)=\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)$.

充分性: 若 f 在 z_0 处实可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0$ ，则

$$f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=f'\left(z_0\right)\Delta z+o(|\Delta z|)$$

由此即知 f 在 z_0 处可微，而且 $f'\left(z_0\right)=\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)$. □

【定义 2.8】(C-R 方程) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 称为 Cauchy-Riemann 方程, 或等价地

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right.$$

【定义 2.9】(调和函数) 设 u 是 D 上的实值函数，如果 $u\in C^2(D)$ ，且对任意 $z\in D$ ，有

$$\Delta u(z)=\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2}=0$$

就称 u 是 D 中的调和函数. $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 Laplace 算子.

【命题 2.10】 设 $u\in C^2(D)$ ，那么 $\Delta u=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}$.

证明. 直接计算得

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\Delta u$$

□

【定理 2.11】 设 $f = u + \mathrm{i}v \in H(D)$ ，那么 u 和 v 都是 D 上的调和函数.

证明. 因为 $f \in H(D)$ ，由 Cauchy-Riemann 方程，有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

于是，由 $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ 即得

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

同理可证 $\Delta v = 0$. □

【定义 2.12】 设 u 和 v 是一对调和函数，如果他们还满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

就称 v 为 u 的共轭调和函数.

【定理 2.13】 设 u 是单连通域 D 上的调和函数，则必存在 u 的共轭调和函数 v ，使得 $u + \mathrm{i}v$ 是 D 上的全纯函数.

证明. 因为 u 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

若令 $P = -\frac{\partial u}{\partial y}, Q = \frac{\partial u}{\partial x}$ ，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

是一个全微分，因而积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

与路径无关. 令

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

易验证 v 满足条件. □

§2.3 初等函数

2.3.1 指数函数

【定理 2.14】(Euler) 设 $y\in\mathbb{R}$ 则

$$\exp(\mathrm{i}y)=\cos y+\mathrm{i}\sin y$$

<u>**证明.**</u> 用 $t=\mathrm{i}y$ 代入 $\exp(t)$ 的展开式中，得

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}y)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}y)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&=\cos y+\mathrm{i}\sin y.\end{aligned}$$

□

【定义 2.15】 设 $z=x+\mathrm{i}y$，定义复数指数函数

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

【定义 2.16】 $f:D\to\mathbb{C}$ 被称为单叶函数，如果任意 $z_1\neq z_2\in D$，有 $f(z_1)\neq f(z_2)$.

【命题 2.17】 复数指数函数具有下列性质

1. $\mathrm{e}^z\in H(\mathbb{C})$ 并且 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$
2. $\forall z\in\mathbb{C},\mathrm{e}^z\neq 0$
3. 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期
4. 单叶性区域为
$$\{z=x+\mathrm{i}y:2k\pi<y<2(k+1)\pi\}\quad k\in\mathbb{Z}$$
5. $w=\mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z=x+\mathrm{i}y:\alpha<y<\beta,0<\alpha<\beta\leqslant 2\pi\}$ 变成角状域 $\alpha<\arg w<\beta$.

2.3.2 对数函数

【定义 2.18】 $z\in\mathbb{C}$，满足方程 $\mathrm{e}^w=z$ 的 w 称为 z 的<u>对数</u>，记为 $w=\log z$.
设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},w=u+\mathrm{i}v$，则 $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因而 $\mathrm{e}^u=r,v=\theta+2k\pi$. 于是

$$\log z=\log|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i}=\log|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z.$$

§2.4 分式线性变换

【定义 2.19】 分式线性变换形如

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

其中，$a, b, c, d \in \mathbb{C}$，且满足 $ad - bc \neq 0$.

Chapter 3

Cauchy 定理与推论

§3.1 复变函数的积分

【定义 3.1】 设 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是一条可求长曲线，f 是定义在 γ 上的函数，沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a)=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=\gamma(b)$，在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k,k=1,\cdots,n$，记 Riemann 和

$$S(f,\zeta,k):=\sum_{k=1}^{n}f\left(\zeta_k\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度，如果对任意的 $\varepsilon>0$，当 $\lambda=\max\left\{s_k:1\leqslant k\leqslant n\right\}\to 0$ 时，不论 ζ_k 的取法如何，存在 $I\in\mathbb{C}$ 使得

$$|I-S(f,\zeta,k)|<\varepsilon$$

就称 I 为 f 沿 γ 的积分，记为 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$

【命题 3.2】 设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在可求长曲线 γ 上连续，则有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.$$

【命题 3.3】 如果 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线，f 在 γ 上连续，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

【例题 3.4】 计算积分

$$I=\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}\quad n\in\mathbb{Z}$$

其中，γ 是以 a 为中心，r 为半径的圆周.

解. γ 的参数方程为 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$．得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t=r^{1-n}\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\neq 1\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1\end{cases}$$

□

【命题 3.5】 如果 f,g 在可求长曲线 γ 上连续，那么

1. $\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z=-\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$，其中 $\gamma^-=-\gamma$
2. $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))\mathrm{d}z=\alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$
3. $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$，其中 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$

【命题 3.6】 如果 γ 的长度为 $L, M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$，那么

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML$$

证明. f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|f(\zeta_k)||z_k-z_{k-1}|\leqslant M\sum_{k=1}^n|z_k-z_{k-1}|\leqslant ML$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}s_k\to 0$，即得所要的表达式. □

【例题 3.7】 设 γ 是正向可求长简单闭曲线，证明：γ 内部的面积为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z.$$

证明. 记 $\partial D=\gamma$, 利用 Green 公式直接计算得到

$$\begin{aligned}\int_\gamma zdz&=\int_D\left(-\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{z}}\right)\mathrm{dz}\wedge\mathrm{dz}=-\int_D\mathrm{dz}\wedge\mathrm{dz}=-\int_D(dx+idy)\wedge(dx-idy)\\&=\int_\mathrm{D}2\mathrm{idx}\wedge\mathrm{dy}=\int_\mathrm{D}2\mathrm{idA}=2\mathrm{iA}\end{aligned}$$

□

§3.2 Cauchy 积分定理

【定理 3.8】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D) \cap C^1(D)$，则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 由 γ 围成的域记为 G，因为 f' 连续，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连续，故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯，故 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是

$$\int_V u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$
$$\int_V v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y = \iint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

□

上面的定理要求 f 是 C^1 的，这个条件可以去掉.

【定理 3.9】(Cauchy-Goursat) 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，如果 $f \in H(D)$，那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

在证明定理之前，先来证明两个引理.

【引理 3.10】 设 f 是 D 中的连续函数，γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon > 0$，一定存在一条 D 中的折线 P，使得

1. P 和 γ 有相同的起点和终点，P 中其他的顶点都在 γ 上;
2. $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$.

【引理 3.11】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，如果 $f \in H(D)$，那么对 D 中的三角形曲线 Δ，有

$$\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Cauchy-Goursat 证明.

1. 引理3.11 $\Longrightarrow$ 三角形区域成立，进而任意多边形区域也成立。
2. 引理3.10 $\Longrightarrow$ 利用多边形曲线一致逼近可求长曲线，这就完成了定理的证明

□

【定理 3.12】 设 γ 是可求长简单闭曲线，$D=\operatorname{Int}\gamma$，若 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

【定理 3.13】 设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 都在 γ_0 的内部，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部，D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域，用 γ 记 D 的边界。如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0,$$

【推论 3.14】 设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线，γ_1 在 γ_0 的内部，D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的域. 如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

【例题 3.15】 设 n 为正整数，试通过计算积分

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

证明.

□

§3.3 原函数

【定义 3.16】 设 $f:D\to\mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的一个函数，如果存在 $F\in H(D)$，使得 $F'(z)=f(z)$ 在 D 上成立，就称 F 是 f 的一个原函数.

【引理 3.17】 设 f 在域 D 中连续，且对 D 中任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$，那么

$$F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是 D 中的全纯函数，且在 D 中有 $F'(z)=f(z)$，这里，z_0 是 D 中一固定点.

证明. 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零，f 的积分与路径无关，因而 F 是一单值函数. 任取 $a\in D$，我们证明 $F'(a)=f(a)$. 因为 f 在 a 点连续，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|z-a|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$。今取 $z\in B(a,\delta)$

$$F(z)-F(a)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^a f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

积分在线段 $[a,z]$ 上进行，于是

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right|=\frac{1}{|z-a|}|F(z)-F(a)-f(a)(z-a)|=\frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_a^z f(a)\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$=\frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z (f(\zeta)-f(a))\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant|f(\zeta)-f(a)|<\varepsilon$$

这就证明了 $F'(a)=f(a)$. □

【定理 3.18】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f\in H(D)$ ，那么 $F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

【定理 3.19】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f\in H(D),\Phi$ 是 f 的任一原函数，那么

$$\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\Phi(z)-\Phi\left(z_0\right)$$

§3.4 Cauchy 积分公式

【定理 3.20】 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$ ，那么对任意 $z\in D$ ，均有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

【定义 3.21】(Cauchy 型积分) 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线（不一定是闭的），g 是 γ 上的连续函数，如果 $z\in\mathbb{C}\backslash\gamma$ ，那么积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

是存在的，它定义了 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 上的一个函数 $G(z)$ ，即

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

称它为 Cauchy 型积分.

【定理 3.22】 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线，g 是 γ 上的连续函数，那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 上有任意阶导数，而且

$$G^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,n=1,2,\cdots$$

【定理 3.23】 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$ ，那么 f 在 D 上有任意阶导数，而且对任意 $z\in D$ ，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,n=1,2,\cdots$$

§3.5 Cauchy 积分公式的应用

【定理 3.24】 设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，且对任意 $z\in B(a,R)$ ，有 $|f(z)|\leqslant M$ ，那么

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\frac{n!M}{R^n},n=1,2,\cdots$$

证明. 取 $0<r<R$ ，则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯，由 Cauchy 积分公式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,n=1,2,\cdots$$

于是，由长大不等式得

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{n!M}{r^n}$$

让 $r\to R$. 即可完成定理的证明. □

【定理 3.25】(Liouville) 有界整函数必为常数.

证明. 设 f 为一有界整函数，对任意 $z\in\mathbb{C}$ ，有 $|f(z)|\leqslant M$ 。任取 $a\in\mathbb{C}$ ，以 a 为中心、R 为半径作圆，因为 f 为整函数，故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{R}$$

这个不等式对任意 $R>0$ 都成立，让 $R\to\infty$ ，即得 $f'(a)=0$ 。因为 a 是任意的，所以在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$ ，因而 f 是常数. □

【定理 3.26】

§3.6 非齐次 Cauchy 积分公式

【定义 3.27】 把 $z,\bar z$ 看成独立变量，定义微分 $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar z$ 的外积为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}z&=0\\\mathrm{d}\bar z\wedge\,\mathrm{d}\bar z&=0\\\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}\bar z&=-\mathrm{d}\bar z\wedge\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y,\mathrm{d}\bar z=\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}y$ ，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}\bar z&=(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{i}\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y\\&=-2\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y=-2\mathrm{i}\mathrm{d}A\end{aligned}$$

【定理 3.28】(pompeiu) 设 D 和 ∂D 如定理 3．2．5 中所述，如果 $f\in C^1(\bar D)$ ，那么对任意 $z\in D$ ，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\wedge\,\mathrm{d}\bar\zeta$$

§3.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解

【定义 3.29】 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上的函数，使 φ 不取零值的点集的闭包称为 φ 的支集，记为 $\operatorname{supp}\varphi$ ，即

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{z\in\mathbb{C}:\varphi(z)\neq 0\}}.$$

【引理 3.30】(单位分解) 设 a 是 $\mathbb{C}$ 中任意一点，$0<r<R$ ，则必存在 φ ，满足下列条件：

1. $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ ；
2. $\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,R)$ ；
3. 当 $z\in\overline{B(a,r)}$ 时，$\varphi(z)\equiv 1$ ；
4. 对于任意 $z\in\mathbb{C},0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$.

证明. 令 $r<R_1<R$ 和

$$h_1(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{|z-a|^2-R_1^2}}, & z\in B\left(a,R_1\right)\\ 0, & z\notin B\left(a,R_1\right)\end{cases}$$

$$h_2(z)=\begin{cases}0, & z\in\overline{B(a,r)}\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{r^2-|z-a|^2}}, & z\notin\overline{B(a,r)}\end{cases}$$

那么 $h_1,h_2\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ 。又令

$$\varphi(z)=\frac{h_1(z)}{h_1(z)+h_2(z)}$$

则 $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ 。而且当 $z\in\overline{B(a,r)}$ 时，$\varphi(z)\equiv 1$ ；当 $z\notin B\left(a,R_1\right)$ 时，$\varphi(z)\equiv 0$ ，即 $\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,R)$. 对于任意 $z\in\mathbb{C},0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$ 显然成立. φ 即为所求的函数. □

【定理 3.31】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f\in C^1(D)$. 令

$$u(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\wedge\,\mathrm{d}\bar{\zeta},z\in D$$

则 $u\in C^1(D)$ ，且对任意 $z\in D$ ，有 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}}=f(z)$.