随机过程

作者：荒与叶

时间：2025 年 7 月 6 日

目录

Chapter 1

Poisson 过程

§1.1 泊松过程

【定义 1.1】(计数过程) 用 $\mathrm{N}(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 内某类事件发生的个数，则 $N(t)$ 是随机变量。称 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geq \mathbf{0}\}$ 为计数过程.

【命题 1.2】 计数过程具有下列性质

1. $N(t) \geqslant 0 \quad t \geqslant 0$
2. $t > s \geqslant 0 \implies N(t) \geqslant N(s)$

【定义 1.3】(宏观定义) 令 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geqslant 0\}$ 为计数过程，若它满足条件

1. $\mathrm{N}(0) = 0$
2. 独立增量过程
3. 对任意的 $s \geqslant 0, t \geqslant 0$，

$$\mathbb{P}\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

则称 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geqslant \mathbf{0}\}$ 为强度为 λ 的泊松过程.

【注 1.4】 由 (1) 和 (3) 知道 $N(t) \sim P(\lambda t)$，由 (3) 知道 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geq 0\}$ 为平稳增量过程

【定义 1.5】(微观定义) 令 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geq 0\}$ 为计数过程，若它满足条件

1. $\mathrm{N}(0) = 0$
2. 是平稳独立增量过程

3. 对任意的 $t \geq 0$，及充分小的 $\Delta t > 0$，

$$
\begin{aligned}
P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\} &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\
P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\} &= o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

则称 $\{\mathrm{N}(\mathrm{t}), \mathrm{t} \geq 0\}$ 为强度为 λ 的泊松过程。

【定理 1.6】 上述两个定义是等价的

证明. 只需证明宏观定义 (3) $\Longleftrightarrow$ 微观定义 (3)

必要性. 利用 Taylor 公式直接得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N(h)=0)=\mathrm{e}^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h) \\
&\mathbb{P}(N(h)=1)=\lambda h \mathrm{e}^{-\lambda h}=\lambda h(1-\lambda h+o(h))=\lambda h+o(h) \\
&\mathbb{P}(N(h)\geqslant 2)=o(h)
\end{aligned}
$$

充分性.

□

【命题 1.7】(数字特征) 称 $\{\mathrm{N}(\mathrm{t}), \mathrm{t} \geq \mathbf{0}\}$ 为强度为 λ 的泊松过程.

1. $E[\mathrm{N}(\mathrm{t})]=\lambda \mathrm{t}$
2. $\operatorname{Var}[N(t)]=\lambda t$
3. $\operatorname{Cov}(\mathrm{N}(\mathrm{s}), \mathrm{N}(\mathrm{t}))=\lambda \min\{t, s\}$

证明. 当 $s<t$ 时,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\mathrm{N}(\mathrm{s}), \mathrm{N}(\mathrm{t})) &= \operatorname{Cov}(\mathrm{N}(\mathrm{s})-\mathrm{N}(0), \mathrm{N}(\mathrm{t})-\mathrm{N}(\mathrm{s})+\mathrm{N}(\mathrm{s})) \\
&= \operatorname{Cov}(\mathrm{N}(\mathrm{s})-\mathrm{N}(0), \mathrm{N}(\mathrm{t})-\mathrm{N}(\mathrm{s}))+\operatorname{Cov}(\mathrm{N}(\mathrm{s}), \mathrm{N}(\mathrm{s})) \\
&= \mathrm{D}(\mathrm{N}(\mathrm{s}))=\lambda \mathrm{s}
\end{aligned}
$$

当 $t<s$ 时，$\operatorname{Cov}(N(s), N(t))=\lambda t$ 故 $\operatorname{Cov}(s, t)=\lambda \min\{s, t\}$

$$
\mathrm{R}(s, t)=\operatorname{Cov}(s, t)+m(s) m(t)=\lambda^{2} s t+\lambda \min\{s, t\}
$$

□

【命题 1.8】 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$0 \leqslant s<t$，在条件 $N(t)=n$ 下，

$$
N(s) \sim \mathcal{B}(n, \frac{s}{t})
$$

证明. 直接计算得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(s)=k \mid N(t)=n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} \\
&= \frac{\left(e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k}}{k!}\right)\left(e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n}}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^{k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

□

§1.2 Poisson 呼叫流

【定义 1.9】(等待时间) 记 $\{\mathrm{N}(\mathrm{t}), \mathrm{t} \geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 令 X_1 为第一个事件发生的时刻，对 $\mathrm{n} \geq 1$，以 X_n 记第 $n-1$ 个事件发生后，等待第 n 个事件发生的等待间隔

【注 1.10】

$$\{N(t)=0\}=\{X_1>t\}$$

$\Longrightarrow$

$$P\left(X_1 \leq t\right)=1-P\left(X_1>t\right)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$$

故 $\mathrm{X}_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$。

【定理 1.11】 泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\operatorname{Exp}(\lambda)$ 的随机变量.

证明. 已知 X_1 的条件下，X_2 的分布：

$$P\left(X_2>t \mid X_1=s\right)=P(N(s+t)-N(s)=0)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$$

故 $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$，且 X_2 与 X_1 独立. 重复上述步骤可知：

$$f_{X_i}(t)=\left\{\begin{array}{ll}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text {其他}\end{array}, \quad i=1,2, \ldots\right.$$

□

【注 1.12】 $X_1, \ldots, X_n$ 的联合概率密度为：

$$f\left(t_1, \cdots, t_n\right)=\left\{\begin{array}{cc}\lambda^n e^{-\lambda\left(t_1+\cdots+t_n\right)}, & t_1, \cdots, t_n>0 \\ 0, & \text { otherwise }\end{array}\right.$$

【定义 1.13】(呼叫流) 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 定义 $S_0=0$. 用 S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，称 $\left\{S_j\right\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流.

【注 1.14】

$$\begin{aligned} & \{N(t) \geqslant n\}=\left\{S_n \leqslant t\right\} \\ & \{N(t)=n\}=\left\{S_n \leqslant t<S_{n+1}\right\}\end{aligned}$$

【引理 1.15】 设 $F\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ 是 $\left(X_1, \ldots, X_{\mathrm{n}}\right)$ 的联合分布函数，

$$\mathrm{G}_{\mathrm{k}}\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{n}}\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1>x_1, \mathrm{X}_2 \leq x_2, \ldots, \mathrm{X}_{2 \mathrm{k}-1}>x_{2 \mathrm{k}-1}, \ldots, \mathrm{X}_{\mathrm{j}} \leq x_{\mathrm{j}}, 2 k \leq j \leq n\right) .$$

则在存在 n 阶连续混合偏导数的区域内，F 存在 n 阶连续混合偏导数，并且

$$\frac{\partial^n F\left(x_1, \cdots, x_n\right)}{\partial x_n \partial x_{n-1}, \cdots, \partial x_1}=(-1)^k \frac{\partial^n G\left(x_1, \cdots, x_n\right)}{\partial x_n \partial x_{n-1}, \cdots, \partial x_1}$$

【定理 1.16】 设 $\left\{S_j\right\}$ 为强度为 λ 的 Poisson 过程的呼叫流，则 $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 有

1. $(S_1, \cdots, S_n)$ 有联合密度

$$g\left(s_1, \cdots, s_n\right) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$$

2. S_n 服从 Γ 分布，即

$$g_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0$$

证明.

1. 设 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流，对于 $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$ 和 $i = 1, 2, \cdots$，定义

$$A_i = \{N\left(s_{i-1}, s_i\right] = 0\}$$
$$B_i = \{N\left(s_{i-1}, s_i\right] = 2\}$$

则 $A_1, B_2, A_3, B_4, \cdots$ 相互独立，

$$\begin{array}{cccccccccc} \downarrow & S_1 & S_2 & \downarrow & & \downarrow & S_3 & S_4 & \downarrow & \cdots \\ \hline s_1 & & & s_2 & & s_3 & & & s_4 & \cdots \end{array}$$

可以看出：

$$\begin{aligned}
&\{S_1 > s_1\} = \{N\left(s_0, s_1\right] = 0\} = A_1, \\
&\{S_1 > s_1, S_2 \leqslant s_2\} = A_1 \{N\left(s_1, s_2\right] \geqslant 2\}, \\
&\{S_1 > s_1, S_2 \leqslant s_2, S_3 > s_3\} = A_1 B_2 \{N\left(s_2, s_3\right] = 0\} = A_1 B_2 A_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\{S_1 > s_1, S_2 \leqslant s_2, \cdots, S_{2k-1} > s_{2k-1}\} = A_1 B_2 \cdots B_{2k-2} A_{2k-1},
\end{aligned}$$

而且有

$$P\left(A_i\right) = \exp\left(-\lambda\left(s_i - s_{i-1}\right)\right)$$
$$P\left(B_i\right) = \frac{\lambda^2\left(s_i - s_{i-1}\right)^2}{2} \exp\left(-\lambda\left(s_i - s_{i-1}\right)\right)$$

则对于 $n = 2k - 1$

$$\begin{aligned}
G\left(s_1,\ s_2, \cdots, s_n\right) =& P\left(S_1 > s_1, S_2 \leqslant s_2, S_3 > s_3, \cdots, S_{n-1} \leqslant s_{n-1}, S_n > s_n\right) \\
=& P\left(A_1 B_2 \cdots B_{n-1} A_n\right) = P\left(A_1\right) P\left(B_2\right) \cdots P\left(B_{n-1}\right) P\left(A_n\right) \\
=& \lambda^{n-1} \frac{\left(s_2 - s_1\right)^2\left(s_4 - s_3\right)^2 \cdots\left(s_{n-1} - s_{n-2}\right)^2}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{-\lambda s_n}.
\end{aligned}$$

$G\left(s_1, s_2, \cdots, s_n\right)$ 在开区域 $D = \{\left(s_1, s_2, \cdots, s_n\right) \mid 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$ 中连续，并有连续的 n 阶混合偏导数

$$g\left(s_1, s_2, \cdots, s_n\right) = (-1)^k \frac{\partial^n G\left(s_1, s_2, \cdots, s_n\right)}{\partial s_n \partial s_{n-1} \cdots \partial s_1} = \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda s_n}, \quad \left(s_1, s_2, \cdots, s_n\right) \in D$$

对于 $n=2k$,

$$\begin{aligned} G\left(s_1,\ s_2\cdots,s_n\right) &= P\left(S_1>s_1,S_2\leq s_2,S_3>s_3,\cdots,S_{n-1}>s_{n-1},S_n\leq s_n\right) \\ &= P\left(A_1B_2\cdots B_{n-2}A_{n-1}N\left(s_{n-1},s_n\right]\geq 2\right) \\ &= \lambda^{n-2}e^{-\lambda s_n}\frac{\left(s_2-s_1\right)^2\left(s_4-s_3\right)^2\cdots\left(s_{n-2}-s_{n-3}\right)^2}{2^{k-1}}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j\left(s_n-s_{n-1}\right)^j}{j!} \end{aligned}$$

同样计算，得到结果

2. 由 $X_i\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，利用指数分布的可加性立刻得到 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

□

【定理 1.17】(到达时刻的条件分布) 在已知 $(0,t]$ 内有一个粒子放出的条件下，释放时刻 S_1 在 $[0,t]$ 中均匀分布，即

$$(S_1\mid N(t)=1)\sim U([0,t])$$

__证明.__ $\forall s\in(0,t)$ 有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_1\leqslant s\mid N(t)=1\right) &= \mathbb{P}(N(s)\geqslant 1\mid N(t)=1) \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s)=1,N(t)-N(s)=0)}{\mathbb{P}(N(t)=1)}=\frac{s}{t} \end{aligned}$$

□

【定理 1.18】(联合分布) $(S_1,\cdots,S_n)\mid N(t)=n$ 有联合密度

$$h_n(s)=\frac{n!}{t^n},\quad s\in A_n$$

其中

$$A_n=\{s:0<s_1<\cdots<s_n<t\}.$$

即

$$(S_1,\cdots,S_n)\mid N(t)=n\sim\left(U^{(1)}\cdots,U^{(n)}\right)$$

其中 U_1 服从 $[0,t]$ 上的均匀分布。

【定理 1.19】 若 $\mathrm{U_1,\ldots,U_n}$ 是来自总体 $\mathrm{U\sim U[0,t]}$ 的随机变量，$\mathrm{h(s)}$ 是实函数，则：

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}S_i\mid N(t)$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}U_i$ 同分布；
2. $\sum\limits_{i=1}^{n}h\left(S_i\right)\mid N(t)$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}h\left(U_i\right)$ 同分布；
3. 当 $E(h(U))$ 存在时，$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}h\left(S_i\right)\mid N(t)=n\right)=nE(h(U))$

4. 当 $E(h(U))$ 存在时，$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} h\left(S_i\right)\right) = \lambda t E(h(U))$.

证明.

$$(S_1, S_2, \cdots, S_n) \mid N(t) = n, \quad \left(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}\right)$$

同分布 $\implies$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \mid N(t) = n, \quad \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} U_{(i)}$$

同分布.

□

§1.3 年龄和剩余寿命

考虑 t 时刻前一次呼叫和后一次呼叫

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hline S_k & S_{k+1} & \cdots & S_{N(t)} & t & S_{N(t)+1} \end{array}$$

于是

$$S_{N(t)} \leqslant t < S_{N(t)+1}$$

【定义 1.20】(年龄和剩余寿命)

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)} \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t \end{aligned}$$

$A(t)$ 称为**年龄**，$R(t)$ 称为**剩余寿命**.

【定理 1.21】 在上面的定义下，有如下的结果：

1. $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ；
2. $P(A(t) \leqslant u) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}, & u \in [0, t), \\ 1, & u \geqslant t; \end{cases}$
3. $A(t)$ 和 $R(t)$ 独立

证明.

1. 对 $v \geqslant 0$ 有 $\{R(t) > v\} = \{N(t, t+v] = 0\}$. 于是 $P(R(t) > v) = \mathrm{e}^{-\lambda v}$, 即 $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$
2. 由于 $A(t) \leqslant t$ ，所以对 $u \geqslant t, P(A(t) \leqslant u) = 1$. 对于 $u < t$ ，从 $\{A(t) > u\} = \{N[t-u, t] = 0\}$ 知

$$P(A(t) > u) = P(N(t-u, t] = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda u}$$

3. 对 $u,v \geqslant 0$，从 $N[t-u,t]$ 和 $N(t,t+v]$ 独立得到 $A(t)$ 和 $R(t)$ 独立.

□

【定理 1.22】 $S_{N(t)}$ 和 $S_{N(t)+1}$ 的分布函数分别为

$$P\left(S_{N(t)} \leqslant s\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \\ 1, & s > t, \end{cases}$$

$$P\left(S_{N(t)+1} \leqslant s\right) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda(s-t)}, & s > t \\ 0, & s \leqslant t \end{cases}$$

证明. 注意到 $t < s$ 时 $\mathbb{P}\left(S_{N(t)} \leqslant s\right) = 1$.

$$\forall s \leqslant t \quad \{S_{N(t)} \leqslant s\} = \{N(t)-N(s) = 0\} \implies \mathbb{P}\left(S_{N(t)} \leqslant s\right) = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}$$

同样 $s \leqslant t$ 时 $\mathbb{P}\left(S_{N(t)+1} \leqslant s\right) = 0$

$$\forall s > t \quad \{S_{N(t)+1} \geqslant s\} = N(s)-N(t) = 0 \implies \mathbb{P}\left(S_{N(t)+1} \leqslant s\right) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda(s-t)}$$

□

【注 1.23】 可以认为 $S_{N(t)+1} - t \sim \mathcal{E}(\lambda)$ 于是可利用指数分布无记忆性直接推导.

§1.4 泊松过程的汇合与分流

【定理 1.24】(泊松过程的可加性) 设 $\left\{N_j(t)\right\}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的，强度分别为 λ_j 的泊松过程，则

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t), \quad t \geqslant 0$$

是强度为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ 的泊松过程.

证明. 只需证明 $n=2$ 情形，并且只需证 $N(t)$ 满足微观定义 (3).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(h)=0) &= \mathbb{P}\left(N_1(h)=0, N_2(h)=0\right) \\
&= \left(1-\lambda_1 h + o(h)\right)\left(1-\lambda_2 h + o(h)\right) \\
&= 1-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)h + o(h) \\
&= 1-\lambda h + o(h) \\
\mathbb{P}(N(h)=1) &= \mathbb{P}\left(N_1(h)=1, N_2(h)=0\right) + \mathbb{P}\left(N_1(h)=0, N_2(h)=1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N_1(h)=1\right)\mathbb{P}\left(N_2(h)=0\right) + \mathbb{P}\left(N_1(h)=0\right)\mathbb{P}\left(N_2(h)=1\right) \\
&= \left(\lambda_1 h + o(h)\right)\left(1-\lambda_1 h + o(h)\right) + \left(\lambda_2 h + o(h)\right)\left(1-\lambda_2 h + o(h)\right) \\
&= \left(\lambda_1+\lambda_2\right)h + o(h) = \lambda h + o(h) \\
\mathbb{P}(N(h) \geqslant 2) &= 1-\mathbb{P}(N(h)=0)-\mathbb{P}(N(h)=1) \\
&= 1-[1-\lambda h + o(h)]-[\lambda h + o(h)] = o(h)
\end{aligned}$$

□

下面用旅客旅行的模型介绍泊松过程的分流和复合泊松过程

【定理 1.25】(泊松过程的分流) 旅客按照强度为 λ 的 Poisson 过程到达长途汽车站后，每次到达的旅客分别以概率 p_{i} 前往 A_{i} 线，且前往哪条路线与到达时间独立，也与其它的到达行为独立。用 $\mathrm{N}_{\mathrm{i}}(t)$ 表示 $[0,\mathrm{t}]$ 内前往 A_{i} 线的到达次数，则 $\{N_{\mathrm{i}}(t), t \geq 0\}$ 是强度 $\lambda_{\mathrm{i}} = \lambda p_{\mathrm{i}}$ 的 Poisson 过程，当 $p_1 + p_2 + \ldots + p_{\mathrm{n}} = 1$ 时，这 n 个 Poisson 过程是相互独立的。

【定义 1.26】(复合泊松过程) 假设旅客按照强度为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 到达长途汽车站时，我们把相约的到达视为一次到达。如果第 j 次到达的旅客数是 Z_{j} 时，则 $[0, t]$ 内到达的旅客数

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j$$

为复合 Poisson 过程。故 $E(M(t))$ 是 $[0,t]$ 内平均到达的旅客数，$\operatorname{Var}(M(t))$ 是 $[0,t]$ 内到达的旅客数的方差。

【定理 1.27】 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，$\left\{Z_{\mathrm{j}}\right\}$ 是相互独立的随机变量序列，有共同的期望 $\mu = E\left(Z_{\mathrm{j}}\right)$ 和有限方差 $\sigma^2 = \operatorname{Var}\left(Z_{\mathrm{j}}\right)$，并且与 $N(t)$ 独立。则复合 Poisson 过程 $M(t)$ 的均值和方差分别为

$$E(M(t)) = \lambda t \mu, \quad \operatorname{Var}(M(t)) = \lambda t\left(\mu^2 + \sigma^2\right),$$

其中 $\sigma^2 < \infty$

§1.5 Poisson 过程习题

【例题 1.28】 汽车按照强度为 λ 的泊松流通过广场，第 i 辆汽车通过时造成的空气污染为 D_i.D_i 随着时间的推移而减弱，经过时间 s 污染减弱为 $D_i \mathrm{e}^{-as}$，其中正常数 a 是扩散常数。假设 $D_1, D_2, \cdots$ 是来自总体 D 的随机变量，且与泊松流独立. 计算 $[0,t]$ 内通过的汽车在 t 时造成的平均污染.

解. 总污染

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i \mathrm{e}^{-a(t-s_i)}$$

其中 s_i 是第 i 辆汽车的到达时间，$N(t)$ 是 $[0,t]$ 内到达的汽车数量。

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i \mathrm{e}^{-a(t-s_i)}\right] = \lambda t \mathbb{E}\left[D_i \mathrm{e}^{-a(t-U_i)}\right] = \lambda t \mathbb{E}\left[D\right] \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-a(t-U_i)}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-a(t-U_i)}\right] = \int_0^t \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-a(t-s)}\, ds = \frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{a}$$

从而

$$E[Z(t)] = \frac{\lambda E[D]}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)$$

□

【例题 1.29】 令 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是分别具有速率 λ_1 和 λ_2 的独立泊松过程。以 S_n^1 记第一个过程的第 n 个事件的发生时间，以 S_m^2 记第二个过程的第 m 个事件的发生时间，请计算：

1. $P\left(S_1^1 < S_1^2\right)$ ；
2. $P\left(S_2^1 < S_1^2\right)$ ；
3. $P\left(S_n^1 < S_m^2\right)$

解.

$$\mathrm{P}\left\{S_n^1 < S_m^2\right\} = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

□

【例题 1.30】 对于泊松过程 $\{N(t)\}$ ，计算

$$\mathbb{E}[N(t+s) \mid N(t)].$$

解. 直接计算得

$$N(t+s) = N(t+s) - N(t) + N(t) \implies \mathbb{E}[N(t+s)] = N(t) + \lambda s$$

□

【例题 1.31】 设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是来自泊松总体 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的随机变量，$A_n = \{$ 有 k 个 $Y_j = 1$ ，其余的 $Y_j = 0; 1 \leqslant j \leqslant n\}$ ，计算 $P\left(A_n\right)$.

解.

$$P(A_n) = \binom{n}{k}(e^{-\lambda}\lambda)^k(e^{-\lambda})^{n-k} = \binom{n}{k}e^{-\lambda k}\lambda^k e^{-\lambda(n-k)} = \binom{n}{k}\lambda^k e^{-\lambda n}.$$

□

【例题 1.32】 对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 及其呼叫流 $\{S_n\}$ ，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n \leqslant t\right) = \lambda t, \quad t \in [0, \infty)$$

证明. 直接计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n \leqslant t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t) = \lambda t$$

□

【例题 1.33】 设 $\{Y_i\}$ 相互独立，都服从两点分布 $\mathcal{B}(1, p)$. 又设 $\{Y_i\}$ 与强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 独立. 定义

$$N_1(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, \quad N_2(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \left(1 - Y_j\right), \quad t \geqslant 0.$$

计算 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的概率分布.

【例题 1.34】 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，T 是和该泊松过程独立的随机变量．当 T 服从参数为 β 的指数分布时，

1. 求 $N(T)$ 的概率分布；
2. 计算 $\mathbb{E}N(T)$.

解.

1. 利用全概率公式

$$P(N(T)=k)=\int_0^\infty P(N(t)=k)f_T(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot\beta e^{-\beta t}dt$$

$$P(N(T)=k)=\frac{\beta}{\lambda+\beta}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^k,\quad k=0,1,2,\ldots$$

故 $N(T)\sim \mathrm{Geo}(p)$，其中 $P(X=k)=(1-p)p^k$，$k=0,1,2,\ldots$。

2. 使用条件期望：

$$\mathbb{E}[N(T)\mid T]=\lambda T$$

因为给定 T，$N(T)$ 服从泊松分布，期望为 λT。则：

$$\mathbb{E}[N(T)]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T)\mid T]]=\mathbb{E}[\lambda T]=\lambda\mathbb{E}[T]$$

T 服从参数 β 的指数分布，$\mathbb{E}[T]=\dfrac{1}{\beta}$，故：

$$\mathbb{E}[N(T)]=\lambda\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\lambda}{\beta}$$

□

【例题 1.35】 设强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 的第 j 个到达时间是 S_j

1. $\mathbb{E}\left(S_j\mid N(t)=n\right)\quad j\leqslant n$
2. $\mathbb{E}\left(S_j\mid N(t)\right)\quad j\leqslant N(t)$.

解. 由于 $S_j|N(t)=n\sim U_{(j)}$ 故

$$\mathbb{E}\left(S_j\mid N(t)=n\right)=\mathbb{E}\left(U_{(j)}\right)=\frac{jt}{n+1}.$$

□

Chapter 2

布朗运动

§2.1 基础概念

【定义 2.1】(Einstein) 一个布朗运动是表示一个随机运动的粒子（或质点）在时间 $[0,\mathrm{t}]$ 上的位移 $X(t)$. 粒子运动应该有以下性质：

1. $X(0)=0$；
2. 具有独立增量性和平稳增量性
3. 关于空间对称，即 $\mathbb{E}[X(t)]=0$
4. 粒子在 $(0,\mathrm{t}]$ 内的位移方差 $\sigma^2(\mathrm{t})=\mathrm{Var}(\mathrm{X}(\mathrm{t}))$ 是 t 的连续函数.

【定义 2.2】(布朗运动) 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为随机过程，若它满足

1. 轨迹在 $[0,\infty)$ 中连续的概率是 1，且 $X(0)=0$ a.s.;
2. $\{X(t)\}$ 是独立增量过程；
3. $\forall t>s\geqslant 0 \implies X(t)-X(s)\sim N\left(0,\sigma^2(t-s)\right)$

则称 $\{X(t)\}$ 是布朗运动. 特别当 $\sigma^2=1$ 时，称 $\{X(t)\}$ 是标准布朗运动.

【定义 2.3】(正态过程) 如果对于任何 $n\geqslant 1,t_1,t_2,\cdots,t_n$，

$$\left(X\left(t_1\right),X\left(t_2\right),\cdots,X\left(t_n\right)\right)$$

服从 n 维正态分布，则称随机过程 $\{X(t)\}$ 为正态过程.

【定理 2.4】(布朗运动的判据) 如果随机过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的轨迹在 $[0,\infty)$ 中连续的概率是 1，且满足 $X(0)=0$，则 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是标准布朗运动的充要条件为

1. $\{X(t),t\geq 0\}$ 是高斯过程；

2. $\mathbb{E}(X(t))=0$；

3. $\mathbb{E}(X(s)X(t))=\min\{s,t\}$

<u>**证明.**</u> 充分性显然. 下证必要性 $\forall t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，有

$$\mathbb{E}[(X\ (t_2)-X\ (t_1))\ (X\ (t_4)-X\ (t_3))]=t_2-t_2-t_1+t_1=0$$

这说明 $(X\ (t_2)-X\ (t_1))$ 与 $(X\ (t_4)-X\ (t_3))$ 不相关. 由正态分布的性质知道 $\{X(t)\}$ 是独立增量过程. 再由

$$\mathbb{E}[X(t)-X(s)]^2=t+s-2s=t-s,\quad t\geqslant s\geqslant 0,\implies X(t)-X(s)\sim N(0,t-s)$$

故为标准布朗运动. □

【定理 2.5】 设 $B(t)$ 是标准布朗运动，a 是正常数，则以下的随机过程都是标准布朗运动：

1. $W(t)=-B(t),t\geqslant 0$；

2. $W(t)=B(t+a)-B(a),t\geqslant 0$；

3. $W(t)=B(at)/\sqrt{a},t\geqslant 0$；

4. $W(0)=0,W(t)=tB(1/t),t>0$；

5. 对于正数 $T,W(t)=B(T-t)-B(T)$ 是时间段 $[0,T]$ 中的标准布朗运动.

【定理 2.6】 对于 $t_1<\cdots<t_n$ $X\ (t_1)\ ,X\ (t_2)\ ,\cdots,X\ (t_n)$ 的联合密度函数为

$$f\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\}}{(2\pi)^{n/2}\left[t_1\ (t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})\right]^{1/2}}$$

<u>**证明.**</u> 考虑下面的变换

$$\begin{array}{c} X\ (t_1)=x_1\\ X\ (t_2)=x_2\\ \vdots\\ X\ (t_n)=x_n \end{array}\iff\begin{array}{c} X\ (t_1)=x_1\\ X\ (t_2)-X\ (t_1)=x_2-x_1\\ \vdots\\ X\ (t_n)-X\ (t_{n-1})=x_n-x_{n-1} \end{array}$$

然而，由独立和平稳增量假设得到，$X\ (t_k)-X\ (t_{k-1})\sim N(0,t_k-t_{k-1})$. 因此，$X\ (t_1)\ ,X\ (t_2)\ ,\cdots,X\ (t_n)$ 的联合密度函数由

$$\begin{aligned} f\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)&=f_{t_1}\ (x_1)\ f_{t_2-t_1}\ (x_2-x_1)\cdots f_{t_n-t_{n-1}}\ (x_n-x_{n-1})\\ &=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\}}{(2\pi)^{n/2}\left[t_1\ (t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

□

§2.2 首中时和 arcsin 律

【定义 2.7】 对于常数 a，用 T_a 表示质点首次到达 a 的时刻，则有

$$T_a = \inf\{t \mid t \geqslant 0, B(t) = a\}$$

T_a 称为 a 的首达时或首中时．用 M_t 表示质点在 $[0,t]$ 内达到的最大值，则

$$M_t = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s).$$

【注 2.8】

$$\{T_a \leqslant t\} = \{M_t \geqslant a\}, \quad a \geqslant 0$$

【定理 2.9】 对于标准布朗运动 $\{B(t)\}$，用 T_a 表示质点首次到达 a 的时刻，用 M_t 表示质点在 $[0,t]$ 内达到的最大值，用 $N(a,b]$ 表示质点在时间段 $(a,b]$ 内访问 0 的次数，则有

1. $P\left(T_a \leqslant t\right) = P\left(T_{|a|} \leqslant t\right) = 2P(B(t) \geqslant |a|) = 2(1 - \Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))$；
2. 对 $a \geqslant 0, P\left(M_t \geqslant a\right) = P\left(T_a \leqslant t\right)$；
3. 对 $a \neq 0, \mathrm{E}T_a = \infty$；
4. 对 $b > a > 0, P(N(a,b] = 0) = \dfrac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

证明.

1. 由布朗运动的对称性，只需证明 $a \geqslant 0$ 的情况.

$$\begin{aligned} P(B(t) \geqslant a) &= P\left(B(t) \geqslant a \mid T_a \leqslant t\right) P\left(T_a \leqslant t\right) + P\left(B(t) \geqslant a \mid T_a > t\right) P\left(T_a > t\right) \\ &= P\left(B(t) \geqslant a \mid T_a \leqslant t\right) P\left(T_a \leqslant t\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a \leqslant t) \end{aligned}$$

   于是

$$\mathbb{P}(T_a \leqslant t) = 2\mathbb{P}(B(t) \geqslant a) \implies \mathbb{P}(T_a \leqslant t) = 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$$

   进一步计算得到 T_a 的密度函数

$$f_{T_a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 - \int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{a/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

   $\Longrightarrow$

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, t > 0$$

2. 注意到

$$\{T_a \leqslant t\} = \{M_t \geqslant a\}, \quad a \geqslant 0 \implies \mathbb{P}\left(M_t \geqslant a\right) = \mathbb{P}\left(T_a \leqslant t\right)$$

3. 由 (1) 知

$$\mathbb{E}[T_a]=\int \frac{a}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{a^2}{2t}}\mathrm{d}t=\infty$$

4. 根据全概率公式可得，质点在时间段 $(a,a+b]$ 内访问 0 至少一次的概率：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(a,a+b]\geqslant 1)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}(N(a,a+b]\geqslant 1\mid B(a)=x)f_{B(a)}(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}(N(a,a+b]\geq 1\mid B(a)=x)e^{-\frac{x^2}{2a}}dx\end{aligned}$$

注意在初始条件 $B(a)=x$ 下，依次利用布朗运动的对称性，作平移和对称，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_0(a,a+b]\geqslant 1\mid B(a)=x)&=\mathbb{P}(N_0(0,b]\geqslant 1\mid B(0)=x)\\&=\mathbb{P}(N_{-x}(0,b]\geqslant 1\mid B(0)=0)\\&=\mathbb{P}(T_{-x}\leqslant b)\\&=2\mathbb{P}(B(b)\geqslant |x|)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}P(N(a,a+b]\geqslant 1)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}P(N(a,a+b]\geqslant 1\mid B(a)=x)\mathrm{e}^{-x^2/2a}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}2P(B(b)\geqslant |x|)\mathrm{e}^{-x^2/2a}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi\sqrt{ab}}\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2b}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{-x^2/2a}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi\sqrt{ab}}\int_{y\geqslant x\geqslant 0}\exp\left(-\frac{y^2}{2b}-\frac{x^2}{2a}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}P(N(a,a+b]\geqslant 1)&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-r^2\right)r\,\mathrm{d}r\int_{\theta_0}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}(\pi/2-\theta_0)\\&=1-\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}\end{aligned}$$

□

§2.3 布朗桥

【定义 2.10】(布朗桥的定义 1) 设 $\{B(t)\}$ 是标准布朗运动则，过程

$$X(t)=B(t)-tB(1),\quad t\in[0,1]$$

被称为布朗桥

【定义 2.11】(布朗桥的定义 2) 随机过程 $X(t)$ 若满足

1. $X(t)$ 是 Gauss 过程
2. $\mathbb{E}X(t)=0, \text{Cov}\left(X(t), X(s)\right)=\min\{s,t\}-st$

则称 $\{X(t), 0\le t\le 1\}$ 为布朗桥过程。

【注 2.12】 $X(t)$ 是 Gauss 过程的线性组合，故为 Gauss 过程。

$$\mathbb{E}(X(t))=0,\quad \mathbb{E}(X(t)(s))=\min\{t,s\}-ts$$

【例题 2.13】 记 $\{B(t), t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，对于 $s\leqslant t$ 计算

1. 给定 $B(t)=B$ 求 $B(s)$ 的分布
2. 给定 $B(s)=B$ 求 $B(t)$ 的分布

解.

1. 希望有如下分解

$$B_s=(B_s-\lambda B_t)+\lambda B_t \implies \text{Cov}(B_s-\lambda B_t, B_t)=s-\lambda t=0 \implies \lambda=\frac{s}{t}$$

于是

$$\mathbb{E}(B_s|B_t)=\mathbb{E}(B_s-\lambda B_t|B_t)+\frac{s}{t}B=\frac{s}{t}B$$

$$\text{Var}(B_s)=\text{Var}(B_s-\frac{s}{t}B_t)=s+\frac{s^2}{t}-2\frac{s}{t}\cdot s=\frac{s(t-s)}{t}$$

2.

$$B_t=B_s+(B_t-B_s) \implies \mathbb{E}(B_t)=B+\mathbb{E}(B_t-B_s|B_s)=B$$

同理

$$\text{Var}(B_t)=\text{Var}(B_t-B_s)=\mathbb{E}(B_t-B_s)^2=t-s$$

□

【注 2.14】 本例题的第一种叙述也是布朗桥的第三个定义

§2.4 布朗运动的变式

【定义 2.15】(反射布朗运动) 设 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，令

$$Z(t)=|X(t)|, t\ge 0$$

称过程 $\{Z(t), t\ge 0\}$ 为在原点反射的布朗运动。

【定理 2.16】 $Z(t)$ 同上

1. $Z(t)$ 的分布函数 $F_{Z(t)}(z)=\mathbb{P}(-z\leqslant X(t)\leqslant z)=2\Phi(\frac{z}{\sqrt{t}})-1$

2. 密度函数 $f(z)=\frac{2}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{z^2}{2t}},z>0$

3. $Z(t)$ 的均值函数为：

$$E(Z(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2t}}dx=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

【定义 2.17】(几何布朗运动) 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是标准布朗运动，则由

$$Y(t)=e^{X(t)}$$

定义的过程 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 称为几何布朗运动。

【定义 2.18】 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是标准布朗运动，则由

$$U(t)=e^{-t}X\left(e^{2t}\right)$$

定义的过程 $\{U(t),t\geq 0\}$ 称为 OU 过程。因为 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是标准布朗运动，故 $X\left(e^{2t}\right)$ 服从正态分布 $N\left(0,e^{2t}\right)$，从而 $U(t)\sim N(0,1)$.

【定义 2.19】(漂移布朗运动) 我们称 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是漂移系数为 μ 和方差参数为 σ^2 的布朗运动，如果

1. $X(0)=0$;
2. $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 有平稳独立增量；
3. $X(t)\sim N(\mu t,\sigma^2 t)$

【注 2.20】 一个等价定义是令 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，然后定义

$$X(t)=\sigma B(t)+\mu t$$

从这个表述可以得出 $X(t)$ 也是 t 的连续函数.

【例题 2.21】(随机游走的极限) 假设每隔 Δt 时间，过程以概率 p 和 $1-p$ 向右或向左走步长为 Δx 的一步。若令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若它向右}\\ -1, & \text{若它向左}\end{cases},$$

则 t 时刻的位置

$$X(t)=\Delta x\left(X_1+\cdots+X_{[t/\Delta t]}\right)$$

假设诸 X_i 相互独立，$P\left(X_i=1\right)=p,P\left(X_i=-1\right)=1-p$. 故 $E\left(X_i\right)=2p-1,\quad \operatorname{Var}\left(X_i\right)=1-(2p-1)^2$. 进而

$$E[X(t)]=\Delta x[t/\Delta t](2p-1).\qquad \operatorname{Var}(X(t))=(\Delta x)^2[t/\Delta t]\left[1-(2p-1)^2\right]$$

由中心极限定理可见：$X(t)\sim N(\mu t,t)$

§2.5 Brown Motion 习题

在下面的习题中，$\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是一个标准布朗运动，而以 T_a 记过程击中 a 所用的时间.

【例题 2.22】 $B(s)+B(t)(s \leqslant t)$ 的分布是什么？

解. 注意到

$$B_s + B_t = 2B_s + (B_t - B_s) \quad 2B_s \sim N(0, 4s), (B_s - B_t) \sim N(0, t-s)$$

两者独立且均服从正态分布，从而

$$\mathbb{E}(B_s + B_t) = 0, \operatorname{Var}(B_s + B_t) = \operatorname{Var}(2B_s + (B_t - B_s))$$

进一步计算得到

$$\operatorname{Var}(2B_s + (B_t - B_s)) = 4\operatorname{Var}(B_s) + \operatorname{Var}(B_t - B_s) = 3s + t$$

$\Longrightarrow \ B_s + B_s \sim N(0, 3t+s)$ □

【例题 2.23】 计算在给定 $B(t_1) = A$ 且 $B(t_2) = B$ 时，$B(s)$ 的条件分布，其中 $0 < t_1 < s < t_2$.

解. 法 **1.** 定义平移后的过程：

$$W(u) = B(u + t_1) - A, \quad u \geqslant 0$$

问题转化为：给定 $W(0) = 0$ 和 $W(T) = c$（其中 $T = t_2 - t_1$, $c = B - A$)，求 $W(u)$ 在 $u = s - t_1$ 的条件分布。由布朗桥性质：

$$W(u) \mid W(0) = 0, W(T) = c \sim \mathcal{N}\left(\frac{u}{T}c, \frac{u(T-u)}{T}\right) = \mathcal{N}\left(\frac{(s-t_1)}{t_2-t_1}(B-A), \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}\right)$$

代入 $u = s - t_1, T = t_2 - t_1, c = B - A$：还原到 $B(s)$：

$$B(s) = W(s - t_1) + A$$

因此条件分布为：

$$B(s) \sim \mathcal{N}\left(A + \frac{(s-t_1)(B-A)}{t_2-t_1}, \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}\right)$$

化简均值：

$$A + \frac{(s-t_1)(B-A)}{t_2-t_1} = \frac{A(t_2-t_1) + (s-t_1)B - A(s-t_1)}{t_2-t_1} = \frac{A(t_2-s) + B(s-t_1)}{t_2-t_1}$$

$\Longrightarrow$

$$B(s) \mid B(t_1) = A,\ B(t_2) = B \sim \mathcal{N}\left(\frac{A(t_2-s)+B(s-t_1)}{t_2-t_1}, \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}\right)$$

□

解. 法 **2.** 判断条件分布为正态分布。考虑向量 $(B(t_1), B(s), B(t_2))$，其协方差矩阵为：

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & s & s \\ t_1 & s & t_2 \end{pmatrix}$$

设 $X = B(s)$，$Y = (B(t_1), B(t_2))^\top$，则：

$$\Sigma_{XX} = s, \quad \Sigma_{XY} = (t_1, s), \quad \Sigma_{YY} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

条件均值：

$$\mathbb{E}[X \mid Y = (A, B)^\top] = \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

先求 Σ_{YY}^{-1}:

$$\det(\Sigma_{YY}) = t_1 t_2 - t_1^2 = t_1(t_2 - t_1)$$

$$\Sigma_{YY}^{-1} = \frac{1}{t_1(t_2 - t_1)}\begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix}$$

则：

$$\Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1} = (t_1, s) \cdot \frac{1}{t_1(t_2 - t_1)}\begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{t_2 - s}{t_2 - t_1}, \frac{s - t_1}{t_2 - t_1}\right)$$

故条件均值：

$$\mathbb{E}[B(s) \mid B(t_1) = A, B(t_2) = B] = \frac{(t_2 - s)A + (s - t_1)B}{t_2 - t_1}$$

条件方差：

$$\mathrm{Var}(X \mid Y) = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}$$

其中 $\Sigma_{YX} = \begin{pmatrix} t_1 \\ s \end{pmatrix}$，

$$\Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX} = \left(\frac{t_2 - s}{t_2 - t_1}, \frac{s - t_1}{t_2 - t_1}\right)\begin{pmatrix} t_1 \\ s \end{pmatrix} = \frac{t_1(t_2 - s) + s(s - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_1 t_2 + s^2 - 2st_1}{t_2 - t_1}$$

$$\mathrm{Var}\left(B(s) \mid B(t_1) = A, B(t_2) = B\right) = s - \frac{t_1 t_2 + s^2 - 2st_1}{t_2 - t_1} = \frac{(s - t_1)(t_2 - s)}{t_2 - t_1}$$

$\Longrightarrow$

$$B(s) \mid B(t_1) = A,\ B(t_2) = B \sim \mathcal{N}\left(\frac{A(t_2 - s) + B(s - t_1)}{t_2 - t_1},\ \frac{(s - t_1)(t_2 - s)}{t_2 - t_1}\right)$$

□

【例题 2.24】 对于 $t_1 < t_2 < t_3$ 计算 $\mathbb{E}\left[B\left(t_1\right) B\left(t_2\right) B\left(t_3\right)\right]$

解. 令 $X=B(t_1), Y=B(t_2)-B(t_1), Z=B(t_3)-B(t_2)$ 则

$$\mathbb{E}\left[B\left(t_1\right)B\left(t_2\right)B\left(t_3\right)\right]=\mathbb{E}[X(X+Y)(X+Y+Z)]$$

进行一系列的化简，利用正态分布奇数阶矩为零和布朗运动的对称性得到

$$\mathbb{E}(\cdot)=0$$

□

【例题 2.25】 证明

$$\mathbb{P}\left\{T_a<\infty\right\}=1, \quad \mathbb{E}\left[T_a\right]=\infty, \quad a\neq 0$$

证明.

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{P}(T_a\leqslant t)=\lim\limits_{t}2\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})-1=1$
2. $\mathbb{E}[T_a]=\int_0^\infty \mathbb{P}(T_a>t)\mathrm{d}t$ 利用 $\Phi(x)$ 在 $x=0$ 附近的泰勒展开:

   $$\Phi(x)=\Phi(0)+\phi(0)x+O(x^2)=0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x+O(x^2),$$

   代入 $x=\dfrac{a}{\sqrt{t}}$:

   $$P(T_a>t)=2\left(0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{a}{\sqrt{t}}+O(t^{-1})\right)-1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\sqrt{t}}+O(t^{-1}).$$

   当 t 充分大时，存在常数 $C>0$ 使得 $P(T_a>t)\geq\dfrac{C}{\sqrt{t}}$。考虑积分:

   $$\mathbb{E}[T_a]\geqslant\int_1^\infty P(T_a>t)dt\geqslant C\int_1^\infty t^{-1/2}dt=\infty.$$

   因此 $\mathbb{E}[T_a]=\infty$.

□

【例题 2.26】 $\mathbb{P}\left\{T_1<T_{-1}<T_2\right\}$ 是多少？

Chapter 3

离散时间 Markov 链

§3.1 基本概念

【定义 3.1】(马氏链) 随机过程 $\{X_n\}$ 称为离散时间马氏链，如果

1. 状态空间 S 有限或者可数
2. 对任意的 $m \geqslant n+1, n \geqslant 0$ ，及状态 $\{i, j, i_0, \cdots, i_{n-1}\}$ ，都有

$$\mathbb{P}\left(X_m = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0\right) = P\left(X_m = j \mid X_n = i\right).$$

【定理 3.2】 对于事件 A, B, C ，当 $P(AB) > 0$ ，条件

$$P(C \mid BA) = P(C \mid B) \iff P(AC \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid B)$$

证明. 引进条件概率 $P_B(\cdot) = P(\cdot \mid B)$ 则上面两式分别等价于

$$P_B(C \mid A) = P_B(C) \quad P_B(AC) = P_B(A)P_B(C).$$

这两个公式都表示对概率 P_B 来讲，A 和 C 独立。 □

【定理 3.3】 设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$A, A_j \subset I$ ，则有

1. 已知 $X_n = i$ 的条件下，将来 $\{X_m; m \geqslant n+1\}$ 与过去 $\{X_j; j \leqslant n-1\}$ 独立；
2. $P\left(X_{n+k} = j \mid X_n = i\right) = P\left(X_k = j \mid X_0 = i\right)$ ；
3. $P\left(X_{n+k} = j \mid X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots, X_0 \in A_0\right) = P\left(X_k = j \mid X_0 = i\right)$;
4. $P\left(X_{n+k} \in A \mid X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots, X_0 \in A_0\right) = P\left(X_k \in A \mid X_0 = i\right)$.

【定义 3.4】(转移概率) 对于马氏链 $\{X_n\}$ 对 $i,j\in I$ 定义

$$p_{ij}^{(0)}=P\left(X_0=j\mid X_0=i\right)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$
$$p_{ij}^{(k)}=P\left(X_{n+k}=j\mid X_n=i\right)=P\left(X_k=j\mid X_0=i\right)$$

称 $p_{ij}^{(k)}$ 为 $\{X_n\}$ 的 k 步转移概率，称矩阵

$$P^{(k)}=\left(p_{ij}^{(k)}\right)$$

为 $\{X_n\}$ 的 k 步转移概率矩阵，这时，

$$P^{(1)}=P,\quad P^{(0)}=\boldsymbol{I}$$

【定理 3.5】(C-K 方程) 对时齐马氏链 $\{X_n;n\geqslant 0\}$，对任意的 $m\geqslant 0,n\geqslant 0$，有

$$\begin{cases}p_{ij}^{(n+m)}=\sum\limits_k p_{ik}^{(n)}p_{kj}^{(m)}\\ \quad P^{(n+m)}=P^{n+m}\end{cases}$$

其中 P^{n+m} 表示 $n+m$ 个矩阵 P 相乘。

<u>**证明.**</u> 记 $A:=\{X_0=i\}$ 并引入条件概率 $\mathbb{P}(\cdot|A)=:\mathbb{P}_A$ 则有

$$P_{ij}(n+m)=P(X_{n+m}=j|X_0=i)=P_A(X_{n+m}=j)$$

由全概率公式

$$\begin{aligned}P_A(X_{n+m}=j)&=\sum_k P_A(X_{n+m}=j|X_n=k)P_A(X_n=k)\\&=\sum_k P(X_{n+m}=j|X_n=k,X_0=i)P(X_n=k|X_0=i)\\&=\sum_k P(X_{n+m}=j|X_n=k)P(X_n=k|X_0=i)\\&=\sum_k P_{kj}(m)P_{ik}(n)\end{aligned}$$

□

【推论 3.6】 对于 $n,m,k,n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和状态 $i,j,l\in S$，总有

1. $p_{ij}^{(n+m)}\geqslant p_{il}^{(n)}p_{lj}^{(m)}$；
2. $p_{ii}^{(n+k+m)}\geqslant p_{ij}^{(n)}p_{jl}^{(k)}p_{li}^{(m)}$；
3. $p_{ii}^{(n_1+n_2+\cdots+n_k)}\geqslant p_{ii}^{(n_1)}p_{ii}^{(n_2)}\cdots p_{ii}^{(n_k)}$；
4. $p_{ii}^{(nk)}\geqslant\left(p_{ii}^{(n)}\right)^k$.

【定义 3.7】 设马氏链 $\{X_n;n\geqslant 0\}$ 的一步转移概率矩阵为 P,X_0 有概率分布 $\pi_j=P(X_0=j),j\in S=\{1,2,\cdots\}$，则称 X_0 的分布列 $\pi^{(0)}=[\pi_1,\pi_2,\cdots]$ 为 $\{X_n;n\geqslant 0\}$ 的初始分布

§3.2 状态的分类

【定义 3.8】 设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间.

1. 如果 $p_{ii}=1$ ，则称 i 是吸引状态;
2. 如果存在 $n\geqslant 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$ ，则称 i 通 j ，记做 $i\to j$;
3. 如果 $i\to j$ 且 $j\to i$ ，则称 i,j 互通，记做 $i\leftrightarrow j$.

【定义 3.9】(首达时) 对于任意给定的 $i,j\in S$ ，称

$$T_{ij}:=\min\{n;X_0=i,X_n=j,n\geqslant 1\}$$

为从状态 i 出发，首次到达状态 j 的转移步数（或时刻)，简称首达时。

【定义 3.10】(首达概率) 马氏链 $\{X_n\}$ ，称条件概率

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)}&=P\left(X_1=j\mid X_0=i\right)\\ f_{ij}^{(n)}&=P\left(X_n=j,X_k\neq j;1\leqslant k\leqslant n-1\mid X_0=i\right)\\ &=P(T_{ij}=n|X_0=i),n\geqslant 1\end{aligned}$$

为质点从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率，简称为首达概率.

【定义 3.11】 由于对不同的 n ，事件

$$A_1=\{X_1=j\},A_n=\{X_n=j,X_k\neq j,1\leqslant k\leqslant n-1\}$$

互不相容，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 发生表示质点到达过状态 j ，所以

$$f_{ij}^{*}:=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\mid X_0=i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\mid X_0=i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\leqslant 1.$$

f_{ij}^{*} 是质点从 i 出发的条件下到达过 j 的概率，简称为从 i 出发后到达 j 的概率.

【定义 3.12】(常返，非常返) 如果 $f_{ii}^{*}=1$ ，则称 i 是常返状态. 如果 $f_{ii}^{*}<1$ ，则称 i 是非常返状态.

【定理 3.13】 转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 和首达概率 $f_{ij}^{(k)}$ 有下面的关系:

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$$

证明. 设 $A_n=\{X_n=j,X_k\neq j,1\leqslant k\leqslant n-1\}$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容. $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j，所以 $\{X_n=j\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 则

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(n)}&=P\left(X_n=j\mid X_0=i\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}P\left(A_k\mid X_0=i\right)P\left(X_n=j\mid A_k,X_0=i\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}.\end{aligned}$$

□

【定义 3.14】(平均回转时间) 如果 $f_{ii}^*=1$ 记

$$\mu_i:=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)},$$

则 μ_i 表示从 i 出发的平均回转时间.

【定义 3.15】(零常返，正常返) 设 i 是常返状态. 如果 $\mu_i<\infty$，则称 i 是正常返状态. 如果 $\mu_i=\infty$，则称 i 是零常返状态.

【注 3.16】 如果 i 是非常返状态，则

$$P\left(T_i=\infty\mid X_0=i\right)=P(\text{ 质点不回到}i\mid X_0=i)=1-f_{ii}^*>0$$

这时自然定义 $\mu_i=\infty$.

【定理 3.17】(常返判据) 对于马氏链 $\{X_n\}$ 及其 $\left\{p_{ii}^{(n)}\right\},f_{ii}^{(n)}$，有以下结果:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\dfrac{1}{(1-f_{ii}^*)}$；
2. i 是常返态 $\iff\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，$i$ 是非常返态 $\iff\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$；
3. j 是非常返态，则 $\forall i\in S$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty;\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$.
4. 若 i 是常返态，$\mathrm{i}\to\mathrm{j}$，则 $\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{j}$，且 j 也是常返态。进一步地，若 i 是零 / 正常返态，$i\to j$，则 j 是零 / 正常返.
5. 设 i 是常返态，i 是零常返态的 $\iff\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$；
6. 若 j 是零常返态，则 $\forall i\in\mathrm{S}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$.

证明.

1. 考虑
$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$$
取 $j=i$ ，两边再同乘以常数 ρ^n ，对 $n\geqslant 1$ 得到
$$p_{ii}^{(n)}\rho^n=\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k},\quad \rho\in(0,1)$$
上式两边对 n 求和得到
$$\begin{aligned}G(\rho)&\equiv\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}=1+\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n\right)\\&=1+F(\rho)G(\rho)\end{aligned}$$
其中 $F(\rho)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k$. 于是得到
$$G(\rho)=1/[1-F(\rho)]$$
令 $\rho\to 1$ 得到结论

2. 常返 $\iff f_{ii}^{*}=1\iff\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$

3. 仅考虑 $i\neq j$, 并且只需证明 $\sum<\infty$, 此时 $\delta_{ij}=0,\implies G_{ij}(\rho)=F_{ij}(\rho)G_{jj}(\rho)$ 令 $\rho\to 1$
$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{\infty}f_{ij}^{(l)}\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}^{(n)}=f_{ij}^{*}\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}^{(n)}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}^{(n)}<\infty$$

4. 容易验证 $j\to i$ 否则 i 点不满足常返性. 再证明 j 是常返的. 设 n,m 使得 $p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)}>0$. 对于任何 $k\geqslant 1$
$$p_{jj}^{(m+k+n)}\geqslant p_{ji}^{(m)}p_{ii}^{(k)}p_{ij}^{(n)}$$
两边对 k 求和得到
$$\sum_{k=1}^{\infty}p_{jj}^{(m+k+n)}\geqslant p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)}\sum_{k=1}^{\infty}p_{ii}^{(k)}=\infty$$
故 j 是常返的. 由 $\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{j}$, 存在 $\mathrm{m,n}\geq 1$, 使得 $\mathrm{p_{ij}^{(m)}}>0$, $\mathrm{p_{ji}^{(n)}}>0$. 故对任意的 $\mathrm{k}\geq 1$,
$$p_{ii}^{(m+k+n)}\geq p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(k)}p_{ji}^{(n)}$$
从而 $p_{jj}^{(k)}\leqslant\dfrac{p_{ij}^{(m+n+k)}}{p_{ij}^{m}p_{ij}^{n}}$ 若 i 是零返态, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}p_{jj}^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{p_{ii}^{(m+k+n)}}{p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}}=0$. 则 j 是零常返.

5. 略

6. 对任意的状态 $i, j \in S$，

$$= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} = \sum_{l=1}^{m} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leqslant \sum_{l=1}^{m} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(l)}$$

□

【定义 3.18】(周期) 对一般的马氏链 $\{X_n\}$，定义状态 i 的周期如下：

1. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，则质点从 i 出发，不可能再回到 i，这时称状态 i 的周期是 ∞

2. 设 d 是正整数，质点从状态 i 出发，如果只可能在 d 的整数倍上回到 i，而且 d 是有此性质的最大整数，则称 i 的周期是 d

3. 如果状态 i 的周期是 1，则称 i 是非周期的（或无周期的）

【注 3.19】 判断一个状态是非周期的，只需判断 $p_{ii}^{(n)} > 0, p_{ii}^{(n+1)} > 0$。若一步转移概率矩阵对角元素非零，则为非周期的。

【定理 3.20】 若状态 i 的周期 $d_i < \infty$，则

1. d_i 是数集 $B_i = \left\{n \mid p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\right\}$ 的最大公约数.

2. 若 $i \leftrightarrow j$，则 $d_i = d_j$

3. 存在正数 N_i，使得当 $n \geq N_i$ 时，$p_{ii}^{(nd_i)} > 0$

【定义 3.21】(遍历) 若状态 i 是非周期和正常返的，则称 i 是遍历状态。

§3.3 状态空间的分解

【定义 3.22】 因为 $p_{ii}^{(0)} = 1$，所以可以认为互通关系 $\leftrightarrow$ 具有反身性，即每个状态 i 与自己互通. 这样可以将互通关系 " $\leftrightarrow$ " 称为等价关系，即满足

1. 反身性：$i \leftrightarrow i$；

2. 对称性：若 $i \leftrightarrow j$，则 $j \leftrightarrow i$；

3. 传递性：若 $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$，则 $i \leftrightarrow k$.

【定义 3.23】 设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$i \in I$. 把和 i 互通的状态放在一起，得到集合

$$C = \{j \mid j \leftrightarrow i, j \in I\}.$$

1. 称 C 是一个等价类；

2. 如果 I 是一个等价类（所有状态互通），则称马氏链 $\{X_n\}$ 或状态空间 I 不可约；

3. 设 $B \subseteq I$ ，如果质点不能从 B 中的状态到达 $\bar{B} = I - B$ 中的状态，则称 B 是闭集.

【定理 3.24】 设 C 是一个等价类，则有以下结果：

1. 不同的等价类互不相交.

2. C 中的状态有相同的类型：或都是正常返的，或都是零常返的，或都是非常返的. 在任何情况下，C 中的状态有相同的周期.

3. 常返等价类是闭集：质点不能走出常返等价类。

4. 零常返等价类含有无穷个状态，非常返等价类如果是闭集，则含有无穷个状态.

证明.

1. 设 C 和 C_1 都是等价类，如果有 $i \in C \cap C_1$ ，由互通的传递性知道 i 和 $C \cup C_1$ 中的所有状态互通，于是必有 $C = C_1$.

2. 前面证明过

3. 如果 $i \in C, i \to j$ 但是 $j \notin C$ ，由于 i 常返，$j \leftrightarrow i$. 这与 $j \notin C$ 矛盾.

4. 因为 C 是闭集，所以有
$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1$$
若 C 是零常返或非常返等价类，当 $n \to \infty$ ，总有 $p_{ij}^{(n)} \to 0$. 如果 C 中只有有限个状态，令 $n \to \infty$ ，得到矛盾的 $0 = 1$. 说明 C 不能是有限集合.

□

【定理 3.25】 有限马氏链具有下面的性质

1. 所有非常返状态组成的集合不可能为闭集；

2. 没有零常返状态；

3. 必有正常返状态；

4. 不可约有限马氏链只有正常返状态；

5. 不可约非周期有限状态的马氏链一定是遍历的；

6. 状态空间可以分解为 $S = D \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ ，其中 D 为非常返状态集，$C_1 \cdots C_k$ 为正常返状态组成的不可约闭集

【定理 3.26】 利用等价关系可以把马氏链的状态空间 I 分解成

$$I=\bigcup_{j=1}^{m} C_j+T, \quad m \leqslant \infty,$$

其中的 C_j 是常返等价类，T 由全体非常返状态组成.

【定理 3.27】(周期分解定理) 设 $n\}$ 是一个周期 d 的不可约马氏链，则状态空间 S 可进一步分解为 d 个不相交的集合 $B_1,\cdots,B_d$ ，使得

$$S=\bigcup_{r=1} B_r, B_r \cap B_s=\varnothing, \forall r \neq s, \quad \sum_{j \in B_{r+1}} p_{ij}=1, \forall i \in B_r$$

约定 $B_{d+1}=B_1$.

§3.4 不变分布

【定义 3.28】(不变分布) 如果 $\boldsymbol{\pi}=[\pi_1,\pi_2,\cdots]$ 满足：

$$\sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{S}} \pi_{\mathrm{j}}=1, \pi=\pi \mathrm{P}$$

则称 π 为马氏链 $\{\mathrm{X_n}\}$ 或者转移概率矩阵 P 的不变分布。

【定理 3.29】 设 C^{+} 是马氏链的 $\{\mathrm{X_n}\}$ 的所有正常返状态，$i \in C^{+}$，

1. 如果 C^{+} 是遍历等价类，则 $\pi_j=\lim\limits_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}, j \in S$ 是唯一的不变分布。

2. 如果 C^{+} 是周期为 d 的等价类，则

$$\pi_j=\frac{1}{d} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd)}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d} p_{ij}^{(nd+s)}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mathrm{k}=1}^{n} p_{ij}^{(k)} j \in S$$

   是唯一的不变分布，且 $\pi_j=\dfrac{1}{\mu_j}$ 。

3. $\{X_n\}$ 有唯一的不变分布的充分必要条件是 C^{+} 是等价类。

4. $\{X_n\}$ 有不变分布的充分必要条件是 C^{+} 非空。

5. 状态有限的马氏链必有不变分布。

【命题 3.30】 设 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 是马氏链的一步转移概率矩阵，P_j 是 P 的第 j 列，则方程组

$$\pi=\pi P, \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j=1$$

和

$$[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{m-1}]=\pi\left(P_1,P_2,\cdots,P_{m-1}\right), \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j=1$$

有相同的解.

证明. 容易验证上方方程组的解必定是下方方程组的解. 现设 π_i 满足下面的方程组，于是

$$\sum_{j=1}^{m}\pi_j=1,\quad \sum_{j=1}^{m}P_j=\mathbf{1},\quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{1}=1$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示元素都是 1 的列向量，得到

$$\pi P_m=\pi\left(\mathbf{1}-\sum_{j=1}^{m-1}P_j\right)=1-\sum_{j=1}^{m-1}\pi P_j=1-\sum_{j=1}^{m-1}\pi_j=\pi_m$$

这 π_i 也满足上面的方程组. □

【例题 3.31】(Ehrenfest) 容器内有 $2a$ 个粒子，一张薄膜将该容器分成对称的 A,B 两部分. 将粒子穿过薄膜时占用的时间忽略不计. 用 X_0 表示初始时 A 中的粒子数，X_n 表示有 n 个粒子穿过薄膜后 A 中的粒子数。当所有的粒子以相同的规律独立行动时，$\{X_n\}$ 是马氏链，有状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots,2a\}$. 设马氏链 $\{X_n\}$ 有转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{2a-i}{2a}, & 0\leqslant i\leqslant 2a-1, j=i+1,\\ \dfrac{i}{2a}, & 1\leqslant i\leqslant 2a, j=i-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算该马氏链的不变分布 π .

解. 正常返马氏链，周期等于 2 ，不变分布唯一存在. 补充定义 $\pi_{-1}=\pi_{2a+1}=0$ ，可将方程组 $\pi=\pi P$ 写成

$$\pi_i=\pi_{i-1}p_{i-1,i}+\pi_{i+1}p_{i+1,i},\quad 0\leqslant i\leqslant 2a$$

解方程得到

$$\pi_i=\mathrm{C}_{2a}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-i}\sim\mathcal{B}(2a,\frac{1}{2})\quad 0\leqslant i\leqslant 2a.$$

□

§3.5 平稳可逆分布

平稳性

【定义 3.32】(平稳序列) 设 $\{X_n\}$ 是随机序列. 如果对于任何 $m,n\geqslant 1$ ，随机向量

$$\boldsymbol{\xi}_n=(X_n,X_{1+n},\cdots,X_{m+n})\quad ,\boldsymbol{\xi}_0=(X_0,X_1,\cdots,X_m)$$

同分布，则称 $\{X_n\}$ 是平稳序列.

【命题 3.33】 马氏链 $\{X_n\}$ 中不变分布等价于平稳分布.

证明. 只需证明随机向量

$$\xi_n = (X_n, X_{1+n}, \cdots, X_{m+n}), \xi_0 = (X_0, X_1, \cdots, X_m) \quad \forall m, n \geqslant 0$$

有相同的联合分布. 定义

$$A_k = \{X_{k+n} = i_k\}, \quad B_k = \{X_k = i_k\}, \quad k = 0, 1, \cdots, m$$

有 $P(A_0) = P(X_n = i_0) = P(X_0 = i_0) = P(B_0)$. 对于 $k = 1, 2, \cdots, m$ ，有

$$P(A_k \mid A_0 A_1 \cdots A_{k-1}) = P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}) = P(B_k \mid B_0 B_1 \cdots B_{k-1})$$

再利用乘法公式得到

$$\begin{aligned}
P(X_n &= i_0, X_{1+n} = i_1, \cdots, X_{m+n} = i_m) \\
&= P(A_0 A_1 \cdots A_m) \\
&= P(A_0) P(A_1 \mid A_0) \cdots P(A_m \mid A_0 A_1 \cdots A_{m-1}) \\
&= P(B_0) P(B_1 \mid B_0) \cdots P(B_m \mid B_0 B_1 \cdots B_{m-1}) \\
&= P(B_0 B_1 \cdots B_m) \\
&= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m).
\end{aligned}$$

□

【命题 3.34】 设遍历马氏链 $\{X_n\}$ 的初始分布是平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ ，马氏链 $\{Y_n\}$ 的转移概率和 $\{X_n\}$ 的转移概率相同，则对任何 $m \geqslant 1$ ，

1. $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n = i_0, Y_{1+n} = i_1, \cdots, Y_{m+n} = i_m) = P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m)$;
2. 对充分大的 $n, (Y_n, Y_{1+n}, \cdots, Y_{m+n})$ 和 $(X_n, X_{1+n}, \cdots, X_{m+n})$ 的分布近似相同.

可逆性

【定义 3.35】 设马氏链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$

1. 若有不全为零的非负数列 $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i\}$ ，使得

   $$\eta_i p_{ij} = \eta_j p_{ji}, \quad i, j \in I$$

   成立，则称 $\{X_n\}$ 是对称马氏链，称 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\{X_n\}$ 或 P 的对称化序列.

2. 若 $\{Y_n\}$ 是平稳序列，且对于任何 $n > m \geqslant 0$ ，随机向量

   $$(Y_m, Y_{m+1}, \cdots, Y_{n-1}, Y_n), (Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_{m+1}, Y_m)$$

   同分布，则称 $\{Y_n\}$ 是平稳可逆序列；

3. 若马氏链 $\{X_n\}$ 是平稳可逆序列，则称 $\{X_n\}$ 为可逆马氏链.

【注 3.36】 当 $\{X_n\}$ 有对称化序列 η 时，只要 $\sum\limits_{j\in S}\eta_j<\infty$，则

$$\pi_i=\frac{\eta_i}{\sum_{j\in S}\eta_j},\quad i\in S$$

为 $\{X_n\}$ 可逆分布。

<u>**证明.**</u> 马氏链 $\{X_n\}$ 有对称化序列 η，则

$$\eta_i p_{ij}=\eta_j p_{ji}$$

若 $\pi=\{\pi_i\}$ 是 $\{X_n\}$ 的可逆分布，则

$$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}\implies \pi_j\eta_i=\pi_i\eta_j\implies \sum_{j\in S}\pi_j\eta_i=\sum_{j\in S}\pi_i\eta_j$$

而 $\sum\limits_j\pi_j=1$，故

$$\pi_i\sum_{j\in S}\eta_j=\eta_i\implies \pi_i=\frac{\eta_i}{\sum_{j\in S}\eta_j}$$

□

【命题 3.37】 设马氏链 $\{X_n\}$ 有转移概率 $\{p_{ij}\}$ 和可逆分布 π，则

1. π 是 $\{X_n\}$ 的不变分布；
2. 当 $\{X_n\}$ 的初始分布为 π 时，$\{X_n\}$ 是可逆马氏链.

<u>**证明.**</u>

1. 考虑
$$\pi_i=\pi_i\sum_{j\in I}p_{ij}=\sum_{j\in I}\pi_j p_{ji},\quad i\in I$$
这说明可逆分布 π 是不变分布.

2. 考虑
$$\mathbb{P}(X_{m+1}=j,X_m=i)=\mathbb{P}(X_{m+1}=j|X_m=i)\mathbb{P}(X_m=i)$$
由于 π 是可逆分布，故是不变分布，即 $\mathbb{P}(X_0=i)=\pi_i=\mathbb{P}(X_m=i)$ 则
$$\mathbb{P}(X_{m+1}=j|X_m=i)\mathbb{P}(X_m=i)=p_{ij}\pi_i=p_{ji}\pi_j=\mathbb{P}(X_m=j,X_{m+1}=i)$$
于是 $(X_{m+1}=j|X_m=i),(X_m=j,X_{m+1}=i)$ 同分布，类似可以证明结论.

□

将这两节的主要结论做一总结

【定理 3.38】(包含关系)

$$\boxed{\text{可逆分布}\subseteq\text{平稳分布}\subseteq\text{不变分布}}$$

可逆分布的计算

【定理 3.39】 设互通马氏链 $\{X_n\}$ 以平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ 为初始分布.

1. $\{X_n\}$ 是可逆马氏链 $\iff \forall i, i_1, i_2, \cdots, i_k \in I$

$$p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_ki} = p_{ii_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_1i}$$

2. 当 $\{X_n\}$ 是平稳可逆序列，对于取定的 i 及从 i 到 j 的通路 $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$（意指 $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_kj} > 0$），定义

$$\eta_i = 1, \quad \eta_j = \frac{p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_kj}}{p_{ji_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_1i}}, \quad j \neq i$$

则 $\{\eta_j\}$ 是 $\{X_n\}$ 的对称化序列.

【命题 3.40】

§3.6 离散时间分支过程

基础概念

【定义 3.41】 用 $\xi_{n,k}$ 表示第 n 代第 k 个粒子分裂成的粒子数，$\{\xi_{n,k}\}$ 相互独立，总体期望 μ 方差 σ^2.

第 n 代的粒子总数为

$$X_1 = \xi_{0,1}, \quad X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1,k}$$

$\{X_n\}$ 为离散时间分支过程. 这是一个马氏链

【注 3.42】 我们有

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1,k}) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(\xi_{n-1.k}) = \mu\mathbb{E}(X_1)$$

和

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_n) &= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(\mathrm{X_n}|\mathrm{X_{n\text{-}1}})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}\sigma^2) + \mathrm{Var}(X_{n-1}\mu) \\
&= \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\,\mathrm{Var}(X_{n-1}) \\
&= \begin{cases} n\sigma^2 & \mu = 1 \\ \dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}(1-\mu^n)}{1-\mu} & \mu \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

【定义 3.43】(母函数) 设离散型随机变量的分布律为 $\mathbb{P}(Z = k) = p_k, k = 0, 1, 2, \cdots$ ，记 $G(t) = \mathbb{E}\left(t^Z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k$ ，称 $G(t)$ 为 z 的母函数。

1. $G(1)=1$
2. $\mathbb{E}(Z)=G'(t)|_{t=1}$
3. $\mathbb{E}(Z^2)=[G'(t)+G''(t)]|_{t=1}$

【定义 3.44】 令 $p_k=P(\xi_{n,i}=k), k=0,1,\cdots$。即第 n 代的第 i 个粒子分裂成 k 个粒子的概率为 p_k。$p_0=0$ 表示一个粒子不会灭亡，$p_0=1$ 表示一个粒子必然灭亡。

第 n 代的平均粒子数

【定义 3.45】 由 i 个粒子出发，在第 n 代时粒子的平均粒子数

$$\xi_n^{(i)} := \mathbb{E}(X_n \mid X_0=i)=\mathbb{E}(X_0)\mu^n=i\mu^n$$

1. $\mu<1$ 时，说明平均粒子数逐代下降趋于灭亡；
2. $\mu=1$ 时，说明各代粒子数基本相同；
3. $\mu>1$ 时，说明平均粒子数按照指数阶逐代上升至无穷.

【命题 3.46】 条件同上，则对应方差

$$\operatorname{Var}(X_n \mid X_0=i)=\begin{cases} i\sigma^2\mu^{n-1}(1-\mu^n) & \mu\neq 1 \\ 1-\mu & \mu=1 \end{cases}$$

§3.7 Markov 习题

【例题 3.47】 设 m 是正偶数. 马氏链 $\{X_n\}$ 有状态空间 $I=\{0,1,\cdots,m\}$ 和转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases}1-i/m, & j=i+1, 0\leqslant i\leqslant m-1,\\ i/m, & j=i-1, 1\leqslant i\leqslant m.\end{cases}$$

验证马氏链是正常返的，计算平稳分布和马氏链在各状态的平均回转时间.

解. 由于是有限 Markov 链，加上不可约，于是所有状态正常返. 平稳分布 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_m)$ 满足

$$\pi P=\pi,\quad \sum_{i=0}^{m}\pi_i=1$$

解得:

$$\pi_{i+1}=\pi_i\frac{m-i}{i+1}.$$

递推得:

$$\pi_i=\pi_0\binom{m}{i},\quad i=0,1,\ldots,m,$$

由归一化条件 $\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1$：

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = \pi_0 \cdot 2^m = 1 \implies \pi_0 = \frac{1}{2^m}.$$

因此，平稳分布为：

$$\pi_i = \frac{\binom{m}{i}}{2^m}, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

故

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i} = \frac{2^m}{\binom{m}{i}}, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

□

【例题 3.48】 X_n 是离散分支过程，当 X_0 是取非负整数值的随机变量时，计算 $\mathrm{E}X_n, \mathrm{Var}\,(X_n)$ 和群体最终灭绝的概率 ρ .

解. 每个个体独立产生后代，后代数 Y 的分布相同，记 $\mu = \mathrm{E}[Y]$ 为后代均值，$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$ 为后代方差。记 $m_0 = \mathrm{E}[X_0]$，$v_0 = \mathrm{Var}(X_0)$。

由全期望公式，

$$\mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_n \mid X_{n-1}]] = \mathrm{E}[X_{n-1}\mu] = \mu \mathrm{E}[X_{n-1}].$$

$\implies$

$$\mathrm{E}[X_n] = \mu^n \mathrm{E}[X_0] = \mu^n m_0.$$

由条件方差公式

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X_n \mid X_{n-1})] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X_n \mid X_{n-1}]).$$

$\implies$

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}[X_{n-1}\sigma^2] + \mathrm{Var}(X_{n-1}\mu) = \sigma^2 \mathrm{E}[X_{n-1}] + \mu^2 \mathrm{Var}(X_{n-1}).$$

代入 $\mathrm{E}[X_{n-1}] = \mu^{n-1} m_0$，得递推关系

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} m_0 + \mu^2 \mathrm{Var}(X_{n-1}).$$

分情况求解

1. 若 $\mu \neq 1$：

$$\mathrm{Var}(X_n) = v_0 \mu^{2n} + \sigma^2 m_0 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}.$$

2. 若 $\mu = 1$：

$$\mathrm{Var}(X_n) = v_0 + n\sigma^2 m_0.$$

□

【例题 3.49】 Y 表示以天计算的日光灯的寿命，一个寿终后马上换一个．用 X_n 表示第 n 天服役的日光灯的年龄．设日光灯的寿命是来自总体 Y 的随机变量，有概率分布

$$p_k = P(Y = k) > 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

1. 验证 $\{X_n\}$ 是以 $I = \{1, 2, \cdots\}$ 为状态空间的马氏链；
2. 写出转移概率 p_{ij}；
3. 马氏链的状态是互通的吗？
4. 计算 $f_{11}^{(n)}$；
5. 给出 i 是正常返的充分必要条件．

【例题 3.50】 设 $Y \sim \mathcal{B}(2, p)$．分支过程中每个粒子分裂成的后代数是来自总体 Y 的随机变量．当 $X_0 = 1$ 时，计算

1. 群体灭绝的概率；
2. 群体恰在第 2 代灭绝的概率；
3. 如果 $X_0 \sim P(\mu), p > 0.5$，计算群体最终灭绝的概率．

Chapter 4

连续时间 Markov 链

§4.1 基本概念

【定义 4.1】 如果对任何正整数 $n, t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ 和 $i, j, i_0, i_1 \cdots, i_{n-1} \in I$ ，有

$$\begin{aligned} & P\left(X\left(t_{n+1}\right)=j \mid X\left(t_n\right)=i, X\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1}, \cdots, X\left(t_0\right)=i_0\right) \\ & \quad=P\left(X\left(t_{n+1}\right)=j \mid X\left(t_n\right)=i\right) \end{aligned}$$

则称 $\{X(t)\}$ 为连续时间马氏链。

【命题 4.2】 下面的性质直接由上一章类比

1. $p_{ij}(0)$ 是 δ 函数：
$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i \in I \\ 0, & i \neq j\end{cases}$$
2. 在概率 $P_i(\cdot)=P(\cdot \mid X(t)=i)$ 下，随机过程 $\{X(u) \mid u>t\}$ 与 $\{X(v) \mid 0 \leqslant v<t\}$ 独立.
3. K-C 方程：对任何 $t, s \geqslant 0$ ，有
$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \quad \text{或} \quad P(t+s)=P(t) P(s),$$
其中
$$P(t)=\left(p_{ij}(t)\right)_{i, j \in I}$$
称为马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵.
4. 对于 $s, t \geqslant 0$ ，有
$$p_{jj}(s+t) \geqslant p_{jj}(s) p_{jj}(t), \quad p_{jj}(t) \geqslant\left[p_{jj}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n .$$

§4.2 Poisson 过程是马氏链

【定理 4.3】 取整数值的随机过程 $\{X(t) \mid t \geqslant 0\}$，如果有独立增量性和平稳增量性就一定是马氏链.

【推论 4.4】 Poisson 过程是马氏链

证明. 利用独立增量性和平稳增量性得到

$$
\begin{aligned}
&P\left(N\left(t_{n+1}\right)=j \mid N\left(t_n\right)=i, N\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1}, \cdots, N\left(t_0\right)=i_0\right) \\
&\quad=P\left(N\left(t_{n+1}\right)-N\left(t_n\right)=j-i \mid N\left(t_n\right)=i, \cdots, N\left(t_0\right)=i_0\right) \\
&\quad=P\left(N\left(t_{n+1}\right)-N\left(t_n\right)=j-i\right)=P\left(N\left(t_{n+1}-t_n\right)=j-i\right)
\end{aligned}
$$

上式只与 $i, j, t_{n+1}-t_n$ 有关，于是知道 $\{N(t)\}$ 是马氏链.

□

初始分布： $P(N(0)=0)=1$

转移概率：

$$
p_{ij}(t)=P(N(t)=j-i)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, & j \geqslant i,, \\ 0, & j<i,\end{cases}
$$

§4.3 转移速率矩阵

【定义 4.5】 在概率为 1 的意义下，在任何有限时间内只能转移有限次，这样的马氏链称为规则马氏链.

【注 4.6】 规则马氏链是右连续的阶梯函数

【命题 4.7】 用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot \mid X(0)=i)$，则对任何 $\varepsilon>0$，

$$
\lim_{h \downarrow 0} P_i(|X(t+h)-X(t)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(|X(t+h)-X(t)| \geqslant \varepsilon)}{P(X(0)=i)}=0, \quad i \in I.
$$

【定理 4.8】 对于状态空间为 S 的马氏链 $\{X(t)\}$，有以下结论：

1. $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 连续：$\lim\limits_{t \rightarrow 0^{+}} p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}$；

2. $p_{ij}(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，且

$$
\sum_{j \in S}\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right| \leq 2\left(1-p_{ii}(h)\right)
$$

3. 对于 $t \geq 0, p_{ii}(t)>0$；

4. $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 有右导数

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(t)-p_{ij}(0)}{t}=q_{ij}$$

其中 $-\infty \le q_{ii} \le 0, q_{ij} \ge 0 (i \ne j)$

5. 对于 $i \in S,\quad \sum\limits_{j\ne i} q_{ij} \le |q_{ii}|$

【推论 4.9】 定义 $q_i = -q_{ii}$.

1. 如果 $q_i = 0$ ，则对所有的 $t \geqslant 0, p_{ii}(t) = 1$ ；

2. $q_i = \sup\limits_{t>0} (1-p_{ii}(t))/t$

【定理 4.10】 设 Q 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵，$q_i = |q_{ii}|$ ，则有

1. 向后方程：$P'(t) = QP(t)$ ，或等价地写成

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} q_{ik}p_{kj}(t),\quad i,j \in I$$

2. 向前方程：当 $q = \sup\{q_i \mid i \in I\} < \infty$ 时，有 $P'(t) = P(t)Q$ ，或等价地写成

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)q_{kj},\quad i,j \in I$$

【例题 4.11】 设有连续时间离散状态的 Markov 链 $\{X(t), t \ge 0\}$,状态空间 $S = \{1,2,\ldots,m\} q_{ii} = -(m-1), q_{ij} = 1 (i \ne j)$ 。求 $p_{ij}(t)$ 。

§4.4 连续时间马氏链的结构

【定义 4.12】 设 S 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间。如果对于一切 $i \in S$ ，有 $\sum\limits_{j\ne i} q_{ij} = |q_{ii}|$ ，则称 Q 矩阵是保守的，称 $\{X(t)\}$ 是保守马氏链。

【注 4.13】 若 $q_i = 0$ ，则对所有的 $t \ge 0, p_{ii}(t) = 1$ ，

$$\mathrm{p_{ii}(t) = P(X(t) = i \mid X(0) = i) = 1},$$

说明，质点一旦到达 i 就不再离开。

【注 4.14】 已知 $X(0) = i$ 时，$\tau = \inf\{t \mid X(t) \ne i)$ 表示质点在 i 停留时间。由 $\mathrm{q_{ii}} = 0$ 知，$\mathrm{p_{ii}(t)} = 1$ ，则对任意的 $\mathrm{t} \ge 0$ ，

$$\mathrm{P(\tau = \infty \mid X(0) = i) = 1}$$

【例题 4.15】 对于马氏链 $\{X(t)\}, q_i = |q_{ii}|$ 和 $t, h > 0$ ，有以下结论：

1. $P(X(t+h)=j \mid X(u)=i, u\in[0,t]) = p_{ij}(h)$；

2. $P(X(u)=i, u\in[0,t] \mid X(0)=i) = \mathrm{e}^{-q_i t}$.

证明.

1. 直接计算得

$$\begin{aligned}
&P(X(t+h)=j \mid X(u)=i, u\in[0,t]) \\
&\quad = P(X(t+h)=j \mid X(t)=i, X(u)=i, u\in[0,t)) \\
&\quad = P(X(t+h)=j \mid X(t)=i) \\
&\quad = p_{ij}(h)
\end{aligned}$$

2. 只需对 q_i 是正数的情况证明. 集合列

$$B_n = \{jt/2^n \mid 1\leqslant j\leqslant 2^n\}$$

单调增加。事件列

$$A_n = \{X(jt/2^n)=i, 1\leqslant j\leqslant 2^n\} = \{X(u)=i, u\in B_n\}$$

单调减少. 因为 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 在 $[0,t]$ 中稠密，$X(t)$ 的轨迹又是阶梯形状和右连续的，所以

$$\{X(u)=i, u\in[0,t]\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n \text{ a.s.}$$

$$\begin{aligned}
&P(X(u)=i, u\in[0,t] \mid X(0)=i) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n \mid X(0)=i\right) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} P\left(X(jt/2^n)=i, 1\leqslant j\leqslant 2^n \mid X(0)=i\right) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}(t/2^n)\right]^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}(t/n)\right]^n \qquad \text{(前者是后者子序列)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}(0)+p'_{ii}(0)(t/n)+o(t/n)\right]^n \qquad \text{(Taylor 公式)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[1-q_i t/n+o(t/n)\right]^n \\
&\quad = \mathrm{e}^{-q_i t}.
\end{aligned}$$

□

【定理 4.16】 对于马氏链 $\{X(t)\}, q_i=|q_{ii}|$，用 τ 表示质点在状态 i 的停留时间，则有

1. $P(\tau>t \mid X(0)=i) = \mathrm{e}^{-q_i t}, t\geqslant 0$；

2. $\mathrm{E}(\tau \mid X(0)=i) = 1/q_i$；

3. 当 $j\neq i$ 时，$P(X(\tau)=j, \tau\leqslant t \mid X(0)=i) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}\left(1-\mathrm{e}^{-q_i t}\right)$；

4. 当 $j\neq i$ 时，$P(X(\tau)=j \mid X(0)=i) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$；

5. 在条件 $X(0) = i$ 下，τ 和 $X(\tau)$ 独立；

6. 当所有的 $q_i < \infty$ 时，马氏链 $\{X(t)\}$ 是保守的.

【定义 4.17】 设马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 $Q, q_i = |q_{ii}|$. 定义

$$k_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & \text{当} q_i > 0, j \neq i, \\ 0, & \text{当} q_i > 0, j = i, \\ \delta_{ij}, & \text{当} q_i = 0, \end{cases}$$

称其为连续时间马氏链 $X(t)$ 的嵌入链的转移概率矩阵.