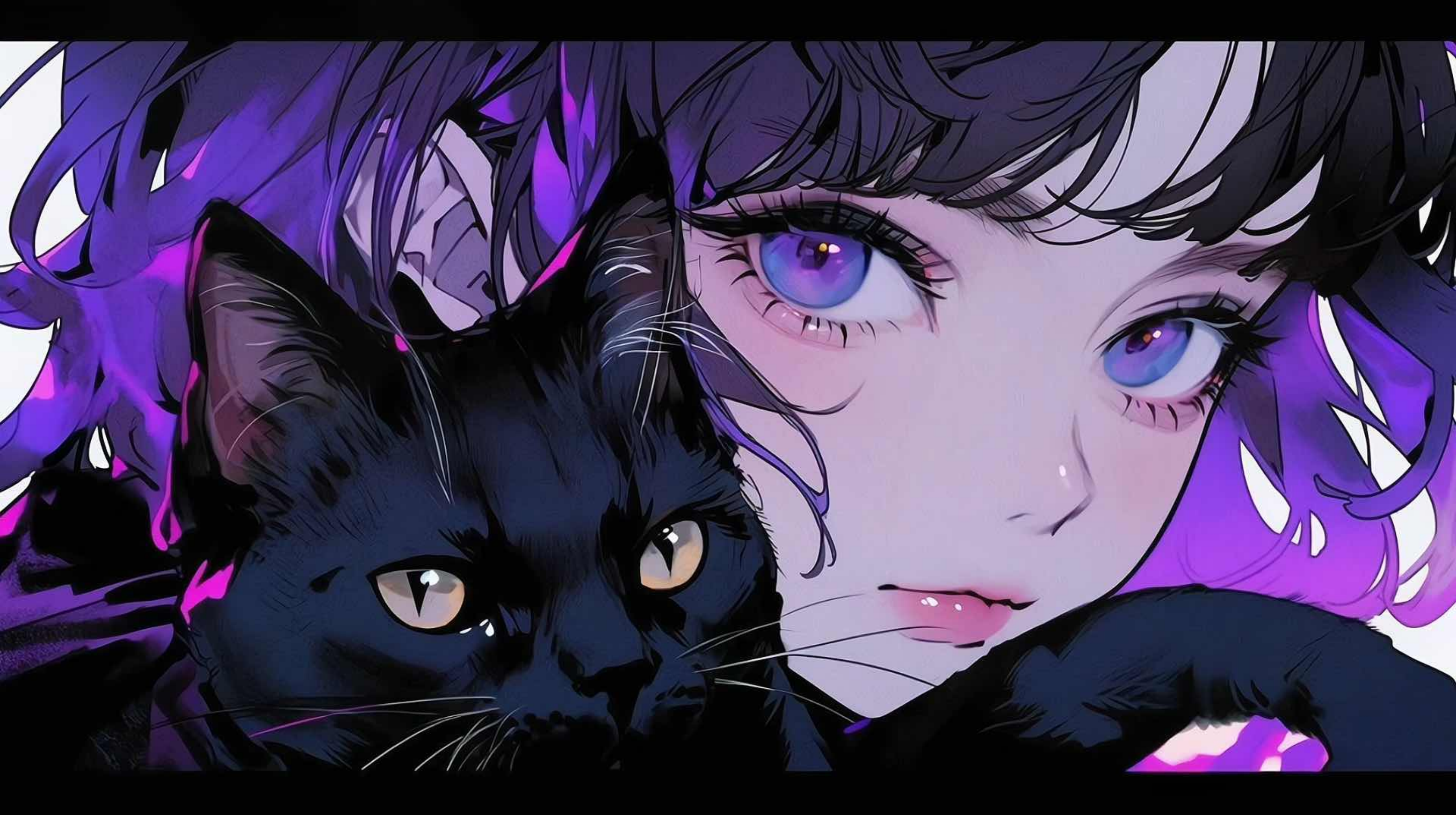

Complex Anasysis

作者：荒与叶

时间：2025 年 7 月 5 日

目录

1 全纯函数 **1**

1.1 全纯函数的导数 1

1.2 Cauchy-Riemann 方程 1

1.3 导数的几何意义 4

1.4 初等函数 4

1.4.1 指数函数 4

2 Cauchy 定理与推论 **5**

2.1 复变函数的积分 5

2.2 Cauchy 积分定理 6

2.3 原函数 9

2.4 Cauchy 积分公式 9

2.5 Cauchy 积分公式的应用 10

2.6 非齐次 Cauchy 积分公式 10

2.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解 11

3 全纯函数的 Taylor 展开 **12**

3.1 Weierstrass 定理 12

3.2 幂级数 14

3.3 全纯函数的 Tarlor 展开 15

3.4 辐角原理 17

Chapter 1

全纯函数

§1.1 全纯函数的导数

【定义 1.1】 设 $F: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0 \in D$．如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，就说 f 在 z_0 处复可微或可微，这个极限称为 f 在 z_0 处的导数或微商，记作 $f'(z_0)$。如果 f 在 D 中每点都可微，就称 f 是域 D 中的全纯函数或解析函数。如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯，就称 f 在 z_0 处全纯.

【命题 1.2】 若 f 在 z_0 处可微，则必在 z_0 处连续.

证明. 设 f 在 z_0 处可微．若记 $\Delta z = z - z_0$，则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$，这说明 f 在 z_0 处连续. □

【命题 1.3】 即若 $f, g \in \mathcal{H}(D)$，则 $f \pm g, fg \in \mathcal{H}(D)$，而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$$
$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

如果 $\forall z \in D, g(z) \neq 0$，则 $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{H}(D)$，而且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$$

§1.2 Cauchy-Riemann 方程

【定义 1.4】 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathrm{D}$. 我们说 f 在 z_0 处实可微，是指 u 和 v 作为 x, y 的二元函数在 (x_0, y_0) 处可微.

【命题 1.5】 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0 \in D$，那么 f 在 z_0 处实可微的充分必要条件是

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$$

证明. 设 f 在 z_0 处实可微,

$$
\begin{aligned}
u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \Delta y+o(|\Delta z|) \\
v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)=\frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \Delta y+o(|\Delta z|)
\end{aligned}
$$

这里, $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 于是

$$
\begin{aligned}
f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)= & u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)+\mathrm{i}\left(v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)\right) \\
= & \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \Delta y+o(|\Delta z|)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \Delta y+o(|\Delta z|)\right) \\
= & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)+\mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\right) \Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)+\mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right) \Delta y+o(|\Delta z|) \\
= & \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \Delta y+o(|\Delta z|).
\end{aligned}
$$

代入 $\Delta x=\frac{1}{2}(\Delta z+\overline{\Delta z}), \Delta y=\frac{1}{2 \mathrm{i}}(\Delta z-\overline{\Delta z})$

$$
\begin{aligned}
f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right) & =\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)(\Delta z+\overline{\Delta z})-\frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)(\Delta z-\overline{\Delta z})+o(|\Delta z|) \\
& =\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y}\right) f\left(x_0, y_0\right) \Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y}\right) f\left(x_0, y_0\right) \overline{\Delta z}+o(|\Delta z|)
\end{aligned}
$$

引进算子

$$
\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

得到

$$
f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right) \Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right) \overline{\Delta z}+o(|\Delta z|)
$$

□

【定理 1.6】 设 f 是定义在域 D 上的函数, $z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0$. 在可微的情况下, $f^{\prime}\left(z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)$.

证明. 如果 f 在 z_0 处可微, 则

$$
f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=f^{\prime}\left(z_0\right) \Delta z+o(|\Delta z|)
$$

故 f 在 z_0 处是实可微的, 而且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0, f^{\prime}\left(z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)$.

反之, 若 f 在 z_0 处实可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\left(z_0\right)=0$, 则

$$
f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=f^{\prime}\left(z_0\right) \Delta z+o(|\Delta z|)
$$

由此即知 f 在 z_0 处可微, 而且 $f^{\prime}\left(z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_0\right)$. □

【定义 1.7】 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 称为 Cauchy-Riemann 方程, 或等价地

$$
\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}
\end{array}\right.
$$

【定义 1.8】 设 u 是 D 上的实值函数, 如果 $u \in C^2(D)$, 且对任意 $z \in D$, 有

$$
\Delta u(z)=\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2}=0
$$

就称 u 是 D 中的调和函数. $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 Laplace 算子.

【命题 1.9】 设 $u \in C^2(D)$ ，那么 $\Delta u = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$.

证明. 直接计算得

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta u$$

□

【定理 1.10】 设 $f = u + \mathrm{i}v \in H(D)$ ，那么 u 和 v 都是 D 上的调和函数.

证明. 因为 $f \in H(D)$ ，由 Cauchy-Riemann 方程，有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

于是，由 $u = \dfrac{1}{2}(f + \bar{f})$ 即得

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

同理可证 $\Delta v = 0$. □

【定义 1.11】 设 u 和 v 是一对调和函数，如果他们还满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

就称 v 为 u 的共轭调和函数.

【定理 1.12】 设 u 是单连通域 D 上的调和函数，则必存在 u 的共轭调和函数 v ，使得 $u + \mathrm{i}v$ 是 D 上的全纯函数.

证明. 因为 u 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

若令 $P = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, Q = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

是一个全微分，因而积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

与路径无关. 令

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

易验证 v 满足条件. □

【命题 1.13】 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$ ，则 Cauchy-Riemann 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

<u>**证明.**</u>

□

【命题 1.14】 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ ．证明：

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

§1.3 导数的几何意义

§1.4 初等函数

1.4.1 指数函数

Chapter 2

Cauchy 定理与推论

§2.1 复变函数的积分

【定义 2.1】 设 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是一条可求长曲线，f 是定义在 γ 上的函数，沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a)=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=\gamma(b)$，在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k,k=1,\cdots,n$，记 Riemann 和

$$S(f,\zeta,k):=\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度，如果对任意的 $\varepsilon>0$，当 $\lambda=\max\left\{s_k:1\leqslant k\leqslant n\right\}\to 0$ 时，不论 ζ_k 的取法如何，存在 $I\in\mathbb{C}$ 使得

$$|I-S(f,\zeta,k)|<\varepsilon$$

就称 I 为 f 沿 γ 的积分，记为 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$。

【注 2.2】 形式上可以计算极限 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)$.

【命题 2.3】 设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在可求长曲线 γ 上连续，则有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.$$

【命题 2.4】 如果 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线，f 在 γ 上连续，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

【例题 2.5】 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$，这里，$n$ 是任意整数，γ 是以 a 维中心、以 r 为半径的圆周.

解. γ 的参数方程为 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 得

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t=r^{1-n}\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\neq 1\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1\end{cases}$$

□

【命题 2.6】 如果 f,g 在可求长曲线 γ 上连续，那么

1. $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ ，其中 $\gamma^- = -\gamma$

2. $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\mathrm{d}z = \alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$ ，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

3. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$ ，其中 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$

【命题 2.7】 如果 γ 的长度为 $L, M = \sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$ ，那么

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML$$

证明. f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_k - z_{k-1}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\right|\left|z_k - z_{k-1}\right| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\left|z_k - z_{k-1}\right| \leqslant ML$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} s_k \to 0$ ，即得所要的表达式. □

【例题 2.8】 设 γ 是正向可求长简单闭曲线，证明：γ 内部的面积为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z.$$

证明. 记 $\partial D = \gamma$, 利用 Green 公式直接计算得到

$$\int_\gamma zdz = \int_D\left(-\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{z}}\right)\mathrm{dz}\wedge\mathrm{dz} = -\int_D \mathrm{dz}\wedge\mathrm{dz} = -\int_D (dx+idy)\wedge(dx-idy) = \int_\mathrm{D} 2\mathrm{idx}\wedge\mathrm{dy} = \int_\mathrm{D} 2\mathrm{idA} = 2\mathrm{iA}$$

□

§2.2 Cauchy 积分定理

【定理 2.9】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f\in H(D)\cap C^1(D)$ ，则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 由 γ 围成的域记为 G ，因为 f' 连续，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连续，故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯，故 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是

$$\begin{aligned}\int_V u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y &= \iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\\ \int_V v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y &= \iint_V\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

□

【引理 2.10】 设 f 是域 D 中的连续函数，γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon>0$ ，一定存在一条 D 中的折线 P ，使得

1. P 和 γ 有相同的起点和终点，P 中其他的顶点都在 γ 上；
2. $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$.

证明. 因为 ∂D 是一个闭集，γ 是一个紧集，且两者不相交，故可以定义距离，设 $d(\gamma, \partial D) = \rho > 0$ 。作域 G ，使得 $\gamma \subset \bar{G} \subset D$ 。因为 f 在 $\bar{G}$ 上连续，故必一致连续。于是，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得，

$$z', z'' \in \bar{G}, |z' - z''| < \delta \implies |f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

这里，L 是 γ 的长度。现取 $\eta = \min\{\rho, \delta\}$ 。在 γ 上取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ ，使得每一个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度都小于 η ，这里，z_0, z_n 分别记为 γ 的起点和终点。连接 z_{k-1} 和 $z_k (k = 1, \cdots, n)$ ，就得到一条折线 P ，它与 γ 有相同的起点和终点，且其他顶点都在 γ 上。由于 $|z_{k-1} - z_k| < \eta \leqslant \rho$ ，所以线段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 都在 D 内，即折线 P 都在 D 内。

记 $\gamma_k = \widehat{z_{k-1}z_k}, P_k = \overline{z_{k-1}z_k}$ ，则有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\,\mathrm{d}z\right|.
\end{aligned}$$

当 $z \in \gamma_k$ 或 P_k 时，$|z - z_{k-1}| < \eta \leqslant \delta$ ，因而 $|f(z) - f(z_{k-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2L}$ 。对上面两个积分用长大不等式，它们都不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2L}|\gamma_k|$ ，因而

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{L}\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k| = \varepsilon$$

故折线 P 完全符合定理的要求. □

【引理 2.11】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，如果 $f \in H(D)$ ，那么对 D 中的三角形曲线 Δ ，有

$$\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z = 0$$

证明. 记 $M = \left|\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z = 0\right|$, 下证 $M = 0$. 连接 Δ 的中线，得到四个小三角形曲线，记为 $\Delta^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4$ 则

$$\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Delta^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z,$$

$\Longrightarrow$

$$M = \left|\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\Delta^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\Delta^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z\right|.$$

因此必有一个小三角形 Δ_1 , 它的边界记为 γ_1, f 在其上的积分满足 $\left|\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4}$. 把 Δ_1 再分成四个全等的小三角形，按照同样的推理，其中又有一个小三角形 Δ_2 ，它的边界记为 γ_2, f 在其上的积分满足 $\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4^2}$. 这个过程可以一直进行下去，我们得到一串三角形 Δ_n ，记它们的边界为 γ_n ，这串三角形具有下列性质: (1) $\Delta \supset \Delta_1 \cdots \supset \Delta_n \cdots$ ； (2) $\operatorname{diam}\Delta_n \to 0 (n \to \infty)$ ； (3) $|\gamma_n| = \dfrac{L}{2^n}, n = 1, 2, \cdots$ ， 这里，L 为 γ 的长度； (4) $\left|\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4^n}, n = 1, 2, \cdots$. 由 (1) 和 (2)，根据第 1 章 1. 5 节中的 Cantor 定理（定理 1. 5. 3），存在

唯一的 $z_0 \in \Delta_n\ (n=1,2,\cdots)$．因为 D 是单连通的，所以 $z_0 \in D$．由于 f 在 z_0 处全纯，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|.$$

取 n 充分大，使得 $\Delta_n \subset B(z_0,\delta)$，故当 $z \in \gamma_n$ 时，(3．2．1) 式成立．显然，$z \in \gamma_n$ 时，$|z-z_0|<|\gamma_n|=\dfrac{L}{2^n}$．因而，当 $z \in \gamma_n$ 时，有

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\frac{\varepsilon L}{2^n}$$

□

【定理 2.12】(Cauchy-Goursat) 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，如果 $f\in H(D)$，那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

证明.

1. 引理2.11 $\Longrightarrow$ 三角形区域成立，进而任意多边形区域也成立。

2. 引理2.10 $\Longrightarrow$ 利用多边形曲线一致逼近可求长曲线，这就完成了定理的证明

□

【定理 2.13】 设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部，若 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

【定理 2.14】 设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 都在 γ_0 的内部，$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部，D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域，用 γ 记 D 的边界。如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0,$$

【推论 2.15】 设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线，γ_1 在 γ_0 的内部，D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的域．如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

【例题 2.16】 设 n 为正整数，试通过计算积分

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

证明.

□

§2.3 原函数

【定义 2.17】 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的一个函数，如果存在 $F \in H(D)$，使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 上成立，就称 F 是 f 的一个原函数.

【引理 2.18】 设 f 在域 D 中连续，且对 D 中任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，那么

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是 D 中的全纯函数，且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$，这里，z_0 是 D 中一固定点.

证明. 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零，f 的积分与路径无关，因而 F 是一单值函数. 任取 $a \in D$，我们证明 $F'(a) = f(a)$. 因为 f 在 a 点连续，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|z-a| < \delta$ 时，有 $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$。今取 $z \in B(a, \delta)$

$$F(z) - F(a) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{a} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{a}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

积分在线段 $[a, z]$ 上进行，于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| &= \frac{1}{|z-a|}|F(z) - F(a) - f(a)(z-a)| = \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_a^z f(a)\mathrm{d}\zeta\right| \\ &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z (f(\zeta) - f(a))\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant |f(\zeta) - f(a)| < \varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $F'(a) = f(a)$. □

【定理 2.19】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D)$，那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

【定理 2.20】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D), \Phi$ 是 f 的任一原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

§2.4 Cauchy 积分公式

【定理 2.21】 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$，那么对任意 $z \in D$，均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

【定义 2.22】(Cauchy 型积分) 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线（不一定是闭的），g 是 γ 上的连续函数，如果 $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma$，那么积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

是存在的，它定义了 $\mathbb{C} \backslash \gamma$ 上的一个函数 $G(z)$，即

$$G(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

称它为 Cauchy 型积分.

【定理 2.23】 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线，g 是 γ 上的连续函数，那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 上有任意阶导数，而且

$$G^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, n=1,2,\cdots$$

【定理 2.24】 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$ ，那么 f 在 D 上有任意阶导数，而且对任意 $z\in D$ ，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, n=1,2,\cdots$$

§2.5 Cauchy 积分公式的应用

【定理 2.25】 设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，且对任意 $z\in B(a,R)$ ，有 $|f(z)|\leqslant M$ ，那么

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\frac{n!M}{R^n}, n=1,2,\cdots$$

证明. 取 $0<r<R$ ，则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯，由 Cauchy 积分公式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, n=1,2,\cdots$$

于是，由长大不等式得

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{n!M}{r^n}$$

让 $r\to R$. 即可完成定理的证明. □

【定理 2.26】(Liouville) 有界整函数必为常数.

证明. 设 f 为一有界整函数，对任意 $z\in\mathbb{C}$ ，有 $|f(z)|\leqslant M$ 。任取 $a\in\mathbb{C}$ ，以 a 为中心、R 为半径作圆，因为 f 为整函数，故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{R}$$

这个不等式对任意 $R>0$ 都成立，让 $R\to\infty$ ，即得 $f'(a)=0$ 。因为 a 是任意的，所以在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$ ，因而 f 是常数. □

【定理 2.27】

§2.6 非齐次 Cauchy 积分公式

【定义 2.28】 把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量，定义微分 $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar{z}$ 的外积为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}z&=0\\\mathrm{d}\bar{z}\wedge\,\mathrm{d}\bar{z}&=0\\\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}\bar{z}&=-\mathrm{d}\bar{z}\wedge\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y,\mathrm{d}\bar{z}=\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}y$ ，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}\bar{z}&=(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{i}\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y\\&=-2\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y=-2\mathrm{i}\mathrm{d}A\end{aligned}$$

【定理 2.29】(pompeiu) 设 D 和 ∂D 如定理 3．2．5 中所述，如果 $f\in C^1(\bar{D})$ ，那么对任意 $z\in D$ ，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{D}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\wedge\,\mathrm{d}\bar{\zeta}$$

§2.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解

【定义 2.30】 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上的函数，使 φ 不取零值的点集的闭包称为 φ 的支集，记为 $\operatorname{supp}\varphi$，即

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{z\in\mathbb{C}:\varphi(z)\neq 0\}}.$$

【引理 2.31】(单位分解) 设 a 是 $\mathbb{C}$ 中任意一点，$0<r<R$，则必存在 φ，满足下列条件：

1. $\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})$；
2. $\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,R)$；
3. 当 $z\in\overline{B(a,r)}$ 时，$\varphi(z)\equiv 1$；
4. 对于任意 $z\in\mathbb{C},0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$.

证明. 令 $r<R_1<R$ 和

$$h_1(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{|z-a|^2-R_1^2}}, & z\in B\left(a,R_1\right)\\ 0, & z\notin B\left(a,R_1\right)\end{cases}$$

$$h_2(z)=\begin{cases}0, & z\in\overline{B(a,r)}\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{r^2-|z-a|^2}}, & z\notin\overline{B(a,r)}\end{cases}$$

那么 $h_1,h_2\in C^\infty(\mathbb{C})$。又令

$$\varphi(z)=\frac{h_1(z)}{h_1(z)+h_2(z)}$$

则 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})$。而且当 $z\in\overline{B(a,r)}$ 时，$\varphi(z)\equiv 1$；当 $z\notin B\left(a,R_1\right)$ 时，$\varphi(z)\equiv 0$，即 $\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,R)$. 对于任意 $z\in\mathbb{C},0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$ 显然成立. φ 即为所求的函数. □

【定理 2.32】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f\in C^1(D)$. 令

$$u(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\wedge\,\mathrm{d}\bar{\zeta},z\in D$$

则 $u\in C^1(D)$，且对任意 $z\in D$，有 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}}=f(z)$.

Chapter 3

全纯函数的 Taylor 展开

§3.1 Weierstrass 定理

【定义 3.1】 设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{3.1}$$

为一个复数项级数．级数(3.1)称为是收敛的，如果它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 收敛．如果 $\{S_n\}$ 的极限为 S，就说级数(3.1)的和为 S，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$．

【定理 3.2】(Cauchy 判据) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立．

【注 3.3】

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$．
2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛。从 Cauchy 收敛准则立刻知道，绝对收敛的级数一定收敛．反过来当然不成立．

【定理 3.4】(M 判据) 设 $f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的函数列，且在 E 上 $|f_n(z)| \leqslant a_n, n = 1, 2, \cdots$．如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛．

证明. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

于是，当 $n > N$ 时，不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon \quad \forall z \in E, \forall p \in \mathbb{N}$$

故由函数项级数的 Cauchy 判据得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收玫． □

【定理 3.5】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛到 $f(z)$ ，如果 $f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 都是 E 上的连续函数，那么 f 也是 E 上的连续函数.

【定理 3.6】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$ ，如果 $f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 都在 γ 上连续，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$$

【定义 3.7】 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 D 的任意紧子集上一致收敛，就称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛.

【定义 3.8】 如果 D 的子集 G 满足 $\bar{G} \subset D$ 且 $\bar{G}$ 是紧的，就说 G 相对于 D 是紧的，记为 $G \subset\subset D$.

【引理 3.9】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，K 是 D 中的紧子集，且包含在相对于 D 是紧的开集 G 中，即 $K \subset G \subset\subset D$ ，那么对任意 $f \in H(D)$ ，均有

$$\sup\left\{\left|f^{(k)}(z)\right|, z \in K\right\} \leqslant C \sup\{|f(z)| : z \in G\},$$

这里，k 是任意自然数，C 是与 k, K, G 有关的常数.

<u>**证明.**</u> 设 $\rho = d(K, \partial G) > 0$. 则 $B(a, \rho) \subset G \quad \forall a \in K$. 由 Cauchy 不等式，得

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in B(a,\rho)\} \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in G\}$$

对 K 中的 a 取上确界，即得上述不等式. □

【定理 3.10】(Weierstrass) 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，如果 $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$，那么 $f \in H(D)$ 并且对任意自然数 k, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

<u>**证明.**</u> 任取 $z_0 \in D$ ，只要证明 f 在 z_0 的一个邻域中全纯就行了. 选取 $r > 0$ ，使得 $\overline{B(z_0, r)} \subset D$ ，由定理3.5，f 在 $B(z_0, r)$ 中连续. 在 $B(z_0, r)$ 中任取一可求长闭曲线 γ ，由定理3.6和 Cauchy 积分定理，得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0$$

由 Morera 定理，即知 $f \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$ ，所以 $f \in \mathcal{H}(D)$.

任取 D 中的紧子集 K ，记 $\rho = d(K, \partial D) > 0$ 。令

$$G = \bigcup\left\{B\left(z, \frac{\rho}{2}\right), z \in K\right\},$$

则 $K \subset G \subset\subset D$ 。由于 $\overline{G}$ 是紧集，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $f(z)$ 。因而对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N ，当 $n > N$ 时，不等式 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 对 $\overline{G}$ 上所有的 z 成立，这里，$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$. 于是由引理3.9，对有

$$\sup\left\{\left|S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| : z \in K\right\} \leqslant C \sup\{|S_n(z) - f(z)| : z \in G\} \leqslant C\varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 由于 K 是 D 的任意紧子集，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. □

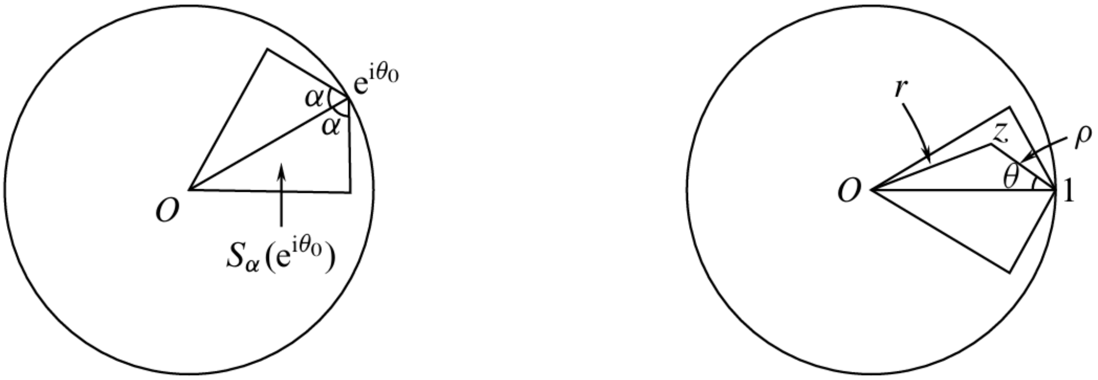

图 3.1: 非切向极限

§3.2 幂级数

【定义 3.11】 幂级数是指形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad a_i \in \mathbb{C}$$

的级数，它的通项是幂函数，为讨论简便起见，做变换 $w = z - z_0$ 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad a_i \in \mathbb{C}$$

【定理 3.12】 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 存在收敛半径 $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ 并且

1. 当 $R=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z=0$ 处收敛；
2. 当 $R=\infty$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处收敛；
3. 当 $0<R<\infty$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中收敛，在 $\{z : |z| > R\}$ 中发散.

【定理 3.13】(Abel) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = z_0 \neq 0$ 处收敛，则必在 $\{z : |z| < |z_0|\}$ 中内闭绝对一致收敛.

【定理 3.14】 幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数.

证明. 由 Abel 定理知，幂级数在其收敛圆内是内闭一致收敛的. 根据 Weierstrass 定理，它的和函数是收敛圆内的全纯函数 □

【注 3.15】 幂级数再在收敛圆上的情况不确定.

【定义 3.16】 设 g 是定义在单位圆中的函数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 是单位圆周上一点，$S_\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\right)$，其中 $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. 如果当 z 在 $S_\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\right)$ 中趋于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 时，$g(z)$ 有极限 l，就称 g 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 处有非切向极限 l，记为

$$\lim_{\substack{z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \\ z\in S_\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\right)}} g(z) = l.$$

【定理 3.17】(Abel 第二定理) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R=1$，且级数在 $z=1$ 处收敛于 S，那么 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S，即

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S_\alpha(1)}} f(z)=f(1)=S$$

<u>**证明.**</u> 如图3.1所示，只要能证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)(\delta=\cos\alpha)$ 的闭包上一致收敛，那么 $f(z)$ 便在 $z=1$ 处连续，上式成立。记

$$\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=1$ 处收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$ 对任意自然数 p 成立. 注意

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\\
=&\sigma_{n,1}z^{n+1}+(\sigma_{n,2}-\sigma_{n,1})z^{n+2}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}\\
=&\sigma_{n,1}z^{n+1}(1-z)+\sigma_{n,2}z^{n+2}(1-z)+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\
=&z^{n+1}(1-z)\left(\sigma_{n,1}+\sigma_{n,2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{p-2}\right)+\sigma_{n,p}z^{n+p}
\end{aligned}$$

因而当 $|z|<1,p=1,2,\cdots,n>N$ 时，便有

$$\left|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\right|<\varepsilon|1-z|(1+|z|+\cdots)+\varepsilon=\varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right)$$

现在任取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$，记 $|z|=r,|1-z|=\rho$，那么

$$r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta$$

故有

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\leqslant\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta-\rho}.$$

因为 $z\in B(1,\delta)$，所以 $\rho=|1-z|<\delta=\cos\alpha$. 又因 $\theta<\alpha$，所以

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{2\cos\alpha-\rho}<\frac{2}{\cos\alpha}$$

故

$$\left|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\right|<\varepsilon\left(\frac{2}{\cos\alpha}+1\right)$$

又当 $z=1$ 时，有

$$\left|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\right|=|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$$

这样，我们就证明了级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 的闭包上一致收敛，定理得证。 □

§3.3 全纯函数的 Tarlor 展开

【定理 3.18】 若 $f\in H(B(z_0,R))$，则 f 可以在 $B(z_0,R)$ 中展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,z\in B(z_0,R)$$

右端的级数称为 f 的 Taylor 级数.

证明. 任意取定 $z \in B(z_0, R)$，再取 $\rho < R$，使得 $|z - z_0| < \rho$。记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho\}$，根据 Cauchy 积分公式，得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

把 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 展开成级数，为

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

因为 f 在 γ_ρ 上连续，记 $M = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_\rho\}$，于是当 $\zeta \in \gamma_\rho$ 时，有

$$\left| \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n$$

右端是一收敛级数，故由 Weierstrass 判别法，左端级数在 γ_ρ 上一致收敛，故可逐项积分：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

由于 z 是 $B(z_0, R)$ 中的任意点，所以上式在 $B(z_0, R)$ 中成立.

容易验证 Taylor 展开是唯一的. □

【定理 3.19】 f 在点 z_0 处全纯的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以展开成幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

【定义 3.20】 设 f 在 z_0 点全纯且不恒为零，如果

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \cdots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

则称 z_0 是 f 的 m 阶零点.

【命题 3.21】 z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以表示为

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

这里，g 在 z_0 点全纯，且 $g(z_0) \neq 0$.

证明. 充分性显然，下证必要性. 如果 z_0 是 f 的 m 阶零点，则从 f 的 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \left\{ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \cdots \right\} \\ &= (z - z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

$g(z)$ 就是花括弧中的幂级数，它当然在 z_0 处全纯，而且

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

□

【命题 3.22】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f \in H(D)$，如果 f 在 D 中的小圆盘 $B(z_0, \varepsilon)$ 上恒等于零，那么 f 在 D 上恒等于零.

【命题 3.23】 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f \in H(D), f(z) \not\equiv 0$，那么 f 在 D 中的零点是孤立的。即若 z_0 为 f 的零点，则必存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$，使得 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点.

§3.4 辅角原理

【定理 3.24】 设 $f \in H(D), \gamma$ 是 D 中一条可求长的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点，在 γ 内部有零点

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

它们的阶数分别为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

那么

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

证明. 取充分小的 $\varepsilon > 0$，作圆盘 $B(a_k, \varepsilon), k = 1, \cdots, n$，使得这 n 个圆盘都在 γ 内部，且两两不相交. 于是，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $D \backslash_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$ 中全纯. 应用多连通域的 Cauchy 积分定理，得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z,$$

其中，$\gamma_k = \partial B(a_k, \varepsilon), k = 1, \cdots, n$. 因为 a_k 是 f 的 α_k 阶零点，f 在 a_k 的邻域中可以写成

$$f(z) = (z - a_k)^{\alpha_k} g_k(z)$$

这里，g_k 在 a_k 的邻域中全纯，且 $g_k(a_k) \neq 0$. 于是

$$\begin{aligned} f'(z) &= \alpha_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} g_k(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} g_k'(z) \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)} \end{aligned}$$

因为 $\dfrac{g_k'}{g_k}$ 在 $\overline{B(a_k, \varepsilon)}$ 中全纯，于是由 Cauchy 积分定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \alpha_k, k = 1, \cdots, n.$$

□

【定理 3.25】(Rouché) 设 $f, g \in H(D), \gamma$ 是 D 中可求长的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中. 如果当 $z \in \gamma$ 时，有不等式

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

那么 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

证明. 设 N_g, N_f 分别为 g, f 在 $\mathrm{Int}\gamma$ 的零点个数（记重数），考虑

$$N_g - N_f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \mathrm{d}z$$

令 $F = \dfrac{g}{f}$ 由条件容易验证 $F(z)$ 良定义，并且

$$|f - g| < |f| \implies |\frac{g}{f} - 1| < 1 \iff |F - 1| < 1 \implies \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma'} \frac{1}{\omega} \mathrm{d}\omega = 0$$

这就证明了定理 □

【推论 3.26】 设 f 是域 D 中的全纯函数，$z_0 \in D$，记 $w_0 = f(z_0)$，如果 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点，那么对于充分小的 $\rho > 0$，必存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $a \in B(w_0, \delta), f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点.

证明.

□

【注 3.27】 设 $f \in H(D), z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$，则对充分小的 $\rho > 0$，一定存在 $\delta > 0$，使得

$$f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta).$$

【定理 3.28】(开映射) 设 f 是域 D 上非常数的全纯函数，那么 $f(D)$ 也是 $\mathbb{C}$ 中的域.

证明.

□

【定理 3.29】(反函数定理) 设 f 是域 D 上的单叶全纯函数，那么它的反函数 f^{-1} 是 $G = f(D)$ 上的全纯函数，而且

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)}, w \in G$$

其中，$w = f(z)$.