Real Analysis

作者：知北游

时间：2025 年 7 月 7 日

目录

Chapter 1

Lebesgue 测度

§1.1 外测度

【definition 1.1】 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开区间,

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right\}$$

为点集 E 的 Lebesgue 外测度, 简称外测度.

【example 1.2】 $\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*\left(\{x_0\}\right)=0, x_0\in\mathbb{R}^n$.

【example 1.3】 设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(\bar{I})=|I|$.

【theorem 1.4】(外测度的性质) 设 $E_k \in \mathbb{R}^n$ 则

1. 非负性: $m^*(E)\geqslant 0, m^*(\varnothing)=0$
2. 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*\left(E_1\right)\leqslant m^*\left(E_2\right)$
3. 可数次可加性: $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*\left(E_k\right)$

Proof.

1. 由定义立即得到
2. E_2 任意覆盖都是 E_1 的覆盖.
3. 不失一般性, 设 $m(E_k)<\infty$, 则 $\forall\varepsilon>0$ 我们有:

$$E_k\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(k)};\quad m^*(\sum_{j=1}^{\infty}I_j^{(k)})\leq m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\quad(\forall k\in\mathbb{N})\implies\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(k)}$$

$$\implies m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(k)})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*\left(E_k\right)+\varepsilon$$

由 ε 任意性得证.

□

【corollary 1.5】 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数集，则 $m^*(E)=0$.

【example 1.6】 Cantor 集 C 的外测度是零.

Proof. $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ，其中的 F_n 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并集，所以我们有

$$m^*(C) \leqslant m^*\left(F_n\right) \leqslant 2^n \cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C)=0$. □

【remark 1.7】 由推论和上例得知，既存在外侧度为零的稠密子集，也存在外侧度为零的不可数集

【lemma 1.8】 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \delta>0$. 令

$$m_\delta^*(E)=\inf \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k\right|: \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E,\left|I_k\right| \leqslant \delta \quad(\forall k)\right\}.$$

则 $m_\delta^*(E)=m^*(E)$

【theorem 1.9】 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$. 若 $d\left(E_1, E_2\right)=\delta>0$ ，则

$$m^*\left(E_1 \cup E_2\right)=m^*\left(E_1\right)+m^*\left(E_2\right)$$

Proof. 只需证明 $m^*\left(E_1 \cup E_2\right) \geqslant m^*\left(E_1\right)+m^*\left(E_2\right)$. 不妨设 $m^*\left(E_1 \cup E_2\right)<+\infty$. $\forall \varepsilon>0$ ，存在 $\left\{I_k\right\}$ ，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k\right|<m^*\left(E_1 \cup E_2\right)+\varepsilon, \quad\left|I_k\right|<\frac{\delta}{3} \quad \forall k$$

则有下述分解

$$m^*\left(E_1 \cup E_2\right)+\varepsilon>\sum_{k \geqslant 1}\left|I_k\right|=\sum_{E_2}|I|+\sum_{E_2}|I| \geqslant m^*\left(E_1\right)+m^*\left(E_2\right).$$

由 ε 的任意性可知 $m^*\left(E_1 \cup E_2\right) \geqslant m^*\left(E_1\right)+m^*\left(E_2\right)$. □

【example 1.10】 设 $E \subset[a, b], m^*(E)>0,0<c<m^*(E)$ ，则存在 E 的子集 A ，使得 $m^*(A)=c$.

Proof. 分析: 此类题目的想法是构造连续函数，进而使用介质定理
令 $f(x)=m^*([a, x) \cap E), a \leqslant x \leqslant b$ ，则 $f(a)=0, f(b)=m^*(E)$. 考查 x 与 $x+\Delta x$. 不妨设 $a \leqslant x<x+\Delta x \leqslant b$ ，则由

$$[a, x+\Delta x) \cap E=([a, x) \cap E) \cup([x, x+\Delta x) \cap E)$$

可知 $f(x+\Delta x) \leqslant f(x)+\Delta x$ ，即

$$f(x+\Delta x)-f(x) \leqslant \Delta x.$$

对 $\Delta x<0$ 也可证得类似不等式. 总之，我们有

$$|f(x+\Delta x)-f(x)| \leqslant|\Delta x|, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

这说明 $f \in C([a,b])$. 根据连续函数中值定理，对 $f(a)<c<f(b)$ ，存在 $\xi \in (a,b)$ ，使得 $f(\xi)=c$. 取 $A=[a,\xi)\cap E$ ，即得证. □

【theorem 1.11】(平移不变性) 设 $E\subset\mathbb{R}^n, x_0\in\mathbb{R}^n$. 记 $E+\{x_0\}=\{x+x_0, x\in E\}$ ，则

$$m^*\left(E+\{x_0\}\right)=m^*(E).$$

Proof. 注意到

$$m^*\left(E+\{x_0\}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k+\{x_0\}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k\right|$$

对一切 L-覆盖取下确界

$$m^*\left(E+\{x_0\}\right)\leqslant m^*(E).$$

反之，考虑对 $E+x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移，可得原点集 E . 同理又有

$$m^*\left(E\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k+\{x_0\}\right|$$

再取下确界，得

$$m^*(E)\leqslant m^*\left(E+\{x_0\}\right).$$

□

【theorem 1.12】(数乘的情形) 设 $E\subset\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}$ ，记 $\lambda E=\{\lambda x: x\in E\}$ ，则

$$m^*(\lambda E)=|\lambda|m^*(E).$$

Proof. 因为 $E\subset\bigcup\limits_{n\geqslant1}(a_n,b_n) \iff \lambda E\subset\bigcup\limits_{n\geqslant1}\lambda\left(a_n,b_n\right)$ ， $m^*\left([a_n,b_n]\right)=m^*\left((a_n,b_n)\right)$ ，且对任一区间 (α,β) ，有

$$m^*(\lambda(\alpha,\beta))=|\lambda|m^*((\alpha,\beta))=|\lambda|(\beta-\alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E)=|\lambda|m^*(E)$ □

§1.2 可测集与测度

【definition 1.13】 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. $\forall T\subset\mathbb{R}^n$ ，有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*\left(T\cap E^c\right)$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集. 记全体可测集 $\mathcal{M}$

【remark 1.14】 仅在 $\mathbb{R}^n$ 上定义 Lebesgue 测度时，我们可以按照 stein 书的方法：用开集去逼近。可以证明在 $\mathbb{R}^n$ 中，两者等价. 但在一般的集合中，如果不要求集合的拓扑结构，则只能用 Caratheodory 的方法.

【theorem 1.15】 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，则 E 可测当且仅当 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$ ，

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap E) + m^*\left(T \cap E^c\right)$$

Proof. 由于另一边的不等式显然 □

下面介绍常见的可测集

【example 1.16】 若 $m^*(E) = 0$ ，则 $E \in \mathcal{M}$.

Proof. $m^*(T \cap E) + m^*\left(T \cap E^c\right) \leqslant m^*(E) + m^*(T) = m^*(T)$. □

【theorem 1.17】 若 $E_1 \subset S, E_2 \subset S^c, S \in \mathcal{M}$ ，则有

$$m^*\left(E_1 \cup E_2\right) = m^*\left(E_1\right) + m^*\left(E_2\right).$$

Proof. 取试验集 $T = E_1 \cup E_2$ ，从 S 是可测集的定义得

$$m^*\left(E_1 \cup E_2\right) = m^*\left(\left(E_1 \cup E_2\right) \cap S\right) + m^*\left(\left(E_1 \cup E_2\right) \cap S^c\right) = m^*\left(E_1\right) + m^*\left(E_2\right)$$

□

【theorem 1.18】 可测集具有下列性质：

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. 若 $E \in \mathcal{M}$ ，则 $E^c \in \mathcal{M}$
3. 若 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ，则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \backslash E_2 \in M$
4. 若 $E_i \in \mathcal{M}(i = 1, 2, \cdots)$ ，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$. 若进一步有 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$ ，则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right),$$

Proof. 仅证明 3,4

1. 注意到 $E_1 \cap E_2 = \left(E_1^c \cup E_2^c\right)^c, E_1 \backslash E_2 = E_1 \cap E_2^c$. 只需证明 $E_1 \cup E_2$ 是可测集即可，对 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$ 考虑

$$\begin{aligned} m^*(T) &\leqslant m^*\left(T \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(E_1 \cup E_2\right)^c\right) \\ &= m^*\left(T \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) + m^*\left(\left(T \cap E_1^c\right) \cap E_2^c\right) \\ &\leqslant m^*\left(\left(T \cap E_1\right) \cap E_2\right) + m^*\left(\left(T \cap E_1\right) \cap E_2^c\right) \\ &\quad + m^*\left(\left(T \cap E_1^c\right) \cap E_2\right) + m^*\left(\left(T \cap E_1^c\right) \cap E_2^c\right) \end{aligned}$$

又由 E_1, E_2 的可测性知，上式右端就是

$$m^*\left(T \cap E_1\right) + m^*\left(T \cap E_1^c\right) = m^*(T)$$

这说明

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \left(E_1 \cup E_2\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(E_1 \cup E_2\right)^c\right).$$

也就是说 $E_1 \cup E_2$ 是可测集.

2. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交，并令

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k=\bigcup_{i=1}^{k} E_i, k=1,2,\cdots$$

由 3 知每个 S_k 都是可测集. 从而对任一集 T 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*\left(T \cap S_k\right)+m^*\left(T \cap S_k^c\right)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}\left(T \cap E_i\right)\right)+m^*\left(T \cap S_k^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*\left(T \cap E_i\right)+m^*\left(T \cap S_k^c\right). \end{aligned}$$

由于 $T \cap S_k^c \supset T \cap S^c$ 可知，

$$m^*(T) \geqslant \sum_{i=1}^{k} m^*\left(T \cap E_i\right)+m^*\left(T \cap S^c\right)$$

令 $k \rightarrow \infty$ ，就有

$$m^*(T) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(T \cap E_i\right)+m^*\left(T \cap S^c\right)$$

由此可得

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap S)+m^*\left(T \cap S^c\right)$$

这说明 $S \in \mathcal{M}$ 。

□

【**theorem 1.19**】 下面两条结论叙述了测度的连续性

1. 若有递增可测集列 $\left\{E_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ ，则

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right)=\lim_{k \rightarrow \infty} m\left(E_k\right).$$

2. 若有递减可测集列 $\left\{E_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ ，且 $m\left(E_1\right)<+\infty$ ，则

$$m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right)=\lim_{k \rightarrow \infty} m\left(E_k\right).$$

【**remark 1.20**】 递减版本对 E_1 的要求可以弱化为 $\exists k_0$ 使得 $m(E_{k0}) \leq +\infty$

Proof.

1. 若存在 k_0，使 $m\left(E_{k_0}\right)=+\infty$ 。则定理自然成立. 假定对一切 k，有 $m\left(E_k\right)<\infty, E_0=\varnothing$ 则

$$\begin{aligned} m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_k \backslash E_{k-1}\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(m\left(E_k\right)-m\left(E_{k-1}\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k}\left(m\left(E_i\right)-m\left(E_{i-1}\right)\right)=\lim_{k \rightarrow \infty} m\left(E_k\right) \end{aligned}$$

2. 注意到 $\{E_1\backslash E_k\}$ 是递增集合列．于是由上述定理可知

$$m\left(E_1\backslash \lim_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}(E_1\backslash E_k)\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(E_1\backslash E_k\right)$$

由于 $m(E_1) < \infty$，故上式可写为

$$m(E_1) - m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

消去 $m(E_1)$

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

□

【example 1.21】(Borel Cantelli Lemma) 若有可测集列 $\{E_k\}$，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$$

则 $m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = 0$

Proof. $m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \leqslant \lim_{k\to\infty}\sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = 0$ □

【lemma 1.22】(Fatou) 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是可测集列，则

1. $m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k)$.
2. $m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} m(E_n)$

Proof. 因为 $\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k (k = 1, 2, \cdots)$，所以有

$$m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant m(E_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令 $k \to \infty$，得

$$m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k).$$

□

§1.3 可测集与 Borel 集的关系

【lemma 1.23】(Carathodory) 设 $G \neq \mathbb{R}^n$ 是开集，$E \subset G$，令

$$E_k = \{x \in E : d(x, G^c) \geqslant 1/k\} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E)$$

Proof.

1. 由于 $E_k \subset E$, 故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$

   $\forall x_0 \in E$ ，由于 x_0 是 G 的内点，故 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(x_0,\delta) \subset G$, 则存在充分大的 k 使得 $\dfrac{1}{k} < d(x_0,G) - \delta$ ，此时有 $x \in B(x_0,\delta) \subset E_k$ ，这说明 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 从而可知

$$E = \lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

2. 只需证 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*(E)$. 不妨 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 令 $A_k = E_{k+1}\backslash E_k$ ，易知 $d(A_{2j}, A_{2j+2}) > 0$. 再注意到 $E_{2k} \supset \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ ，可得

$$m^*(E_{2k}) \geqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_{2j}\right) = \sum_{j=1}^{k-1} m^*(A_{2j})$$

   令 $k \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j}) < +\infty. \quad \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j+1}) < +\infty$$

   $\forall k$ ，我们有

$$E = E_{2k} \cup \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j+1}\right)$$

   所以 $\forall k$ ，就有

$$m^*(E) \leqslant m^*(E_{2k}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j+1})$$

   令 $k \to \infty$ 得到

$$m^*(E) \leqslant \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

□

【theorem 1.24】 非空闭集 F 是可测集. 进一步非空开集 F^c 也可测.

Proof. 对任一试验集 T ，由于 $T\backslash F \subset F^c = G$ 是开集，故由上述引理知，存在 $T\backslash F$ 中的集列 $\{F_k\}$

$$d(F_k, F) \geqslant 1/k, \quad \lim_{k\to\infty} m^*(F_k) = m^*(T\backslash F).$$

由于 $d((T \cap F), F_k) > 0$ 从而我们有

$$m^*(T) \geqslant m^*[(T\cap F) \cup F_k] = m^*(T\cap F) + m^*(F_k) \quad \forall T, \forall k$$

令 $k \to \infty$ ，可得

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap F) + m^*(T \cap F^c).$$

这说明 F 是可测集. □

【example 1.25】 证明 Borel 集是可测集.

Proof. 由闭集的可测性可知开集是可测集. 又因为可测集类是一个 σ 代数，所以任一 Borel 集皆可测. □

【theorem 1.26】(Lebesgue 测度的正则性) 若 $E \in \mathcal{M}$ ，则对 $\forall \varepsilon > 0$ ，我们有

1. 存在开集 $E \supset G$ ，使得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$
2. 存在闭集 $E \subset F$ ，使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$

Proof.

1. 首先考虑 $m(E) < +\infty$ 的情形. 由定义，存在 $\{I_k\}$ ，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon$. 令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ，则 G 是包含 E 的开集，且 $m(G) < m(E) + \varepsilon$. 因为 $m(E) < +\infty$ ，直接移项然后合并得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$.
2. 其次讨论 $m(E)$ 是 $+\infty$ 的情形. 令
$$E_k = E \cap B(0,k), \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad k = 1, 2, \cdots .$$
因为 $m\left(E_k\right) < \infty (k = 1, 2, \cdots)$ ，所以对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在包含 E_k 的开集 G_k ，使得 $m\left(G_k \backslash E_k\right) < \varepsilon / 2^k$. 现在作点集 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ ，则 $G \supset E$ 且为开集. 我们有
$$G \backslash E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(G_k \backslash E_k\right),$$
$$m(G \backslash E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\left(G_k \backslash E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$
3. 考虑 E^c . 由（i）可知，对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在包含 E^c 的开集 G ，使得 $m\left(G \backslash E^c\right) < \varepsilon$. 现在令 $F = G^c$ ，显然 F 是闭集且 $F \subset E$. 因为 $E \backslash F = G \backslash E^c$ ，所以得到
$$m(E \backslash F) < \varepsilon$$

□

【theorem 1.27】 若 $E \in \mathcal{M}$ ，则

1. $E = H \backslash Z_1, H$ 是 G_δ 集，$m\left(Z_1\right) = 0$
2. $E = K \cup Z_2, K$ 是 F_σ 集，$m\left(Z_2\right) = 0$

Proof.

1. $\forall k \in \mathbb{N}$，存在包含 E 的开集 G_k，使得 $m\left(G_k \backslash E\right)<1/k$。令

$$H=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

则 H 为 G_δ 集且 $E \subset H$. 因为对一切 k，都有

$$m(H \backslash E) \leqslant m\left(G_k \backslash E\right)<\frac{1}{k}$$

所以 $m(H \backslash E)=0$. 若令 $H \backslash E=Z_1$，则得 $E=H \backslash Z_1$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}$，存在含于 E 的闭集 F_k，使得 $m\left(E \backslash F_k\right)<1/k$. 令

$$K=\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

则 K 是 F_σ 集且 $K \subset E$. 因为对一切 k，都有

$$m(E \backslash K) \leqslant m\left(E \backslash F_k\right)<\frac{1}{k}$$

所以 $m(E \backslash K)=0$，若令 $E \backslash K=Z_2$，则得 $E=K \cup Z_2$.

□

【theorem 1.28】(外测度的正则性) 若 $E \subset \mathbb{R}^n$，则存在包含 E 的 G_δ 集 H，使得 $m(H)=m^*(E)$. (此时我们也称 H 为 E 的等测包.)

Proof. 对于每个自然数 k，存在包含 E 的开集 G_k，使得

$$m\left(G_k\right) \leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}.$$

现在作点集

$$H=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

则 H 是 G_δ 集且 $H \supset E$. 因为

$$m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m\left(G_k\right) \leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}$$

所以 $m(H)=m^*(E)$. □

【remark 1.29】 若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E)<\infty$，则有

$$m(H)-m^*(E)=0,$$

但 $m^*(H \backslash E)$ 不一定等于零. 不过可以证明 $H \backslash E$ 中的任一可测子集都是零测集

【corollary 1.30】 设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$，则

$$m^*\left(\varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k\right) \leqslant \varliminf_{k \rightarrow \infty} m^*\left(E_k\right)$$

Proof. 对每个 E_k 均作等测包 H_k：

$$H_k \supset E_k, \quad m\left(H_k\right)=m^*\left(E_k\right)$$

则可得

$$m^*\left(\varliminf_{k\to\infty} E_k\right) \leqslant m\left(\varliminf_{k\to\infty} H_k\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} m\left(H_k\right)=\varliminf_{k\to\infty} m^*\left(E_k\right)$$

□

【corollary 1.31】 若 $\{E_k\}$ 是递增集合列，则

$$\lim_{k\to\infty} m^*\left(E_k\right)=m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right)$$

【theorem 1.32】(Lebesgue 测度的平移不变性) 若 $E\in\mathcal{M}, x_0\in\mathbb{R}^n$，则 $(E+\{x_0\})\in\mathcal{M}$ 且

$$m\left(E+\{x_0\}\right)=m(E)$$

Proof.

$$E=H\backslash Z$$

其中 $H=\bigcap_{k=1} G_k$，每个 G_k 都是开集，$m(Z)=0$. 因为 $G_k+\{x_0\}$ 是开集，所以

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(G_k+\{x_0\}\right)$$

是可测集，根据外测度的平移不变性，可知点集 $Z+\{x_0\}$ 是零测集，于是从等式

$$E+\{x_0\}=\left(H+\{x_0\}\right)\backslash\left(Z+\{x_0\}\right)=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(G_k+\{x_0\}\right)\backslash\left(Z+\{x_0\}\right)\right)$$

立即可知 $E+\{x_0\}\in\mathcal{M}$. 再用外测度的平移不变性得到

$$m\left(E+\{x_0\}\right)=m(E)$$

□

【theorem 1.33】(Lebesgue 可测集判据) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则下列命题等价

1. $E\in\mathcal{M}$
2. 任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $G: G\supset E$ 且 $m^*(G\backslash E)<\varepsilon$
3. 任给 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F: F\subset E$ 且 $m^*(E\backslash F)<\varepsilon$
4. 任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $G_1, G_2: G_1\supset E, G_2\supset E^c$，使得 $m\left(G_1\cap G_2\right)<\varepsilon$

Proof. **(1. $\Longrightarrow$ 2.)**.$\forall \varepsilon>0$, 取 E 的 L-覆盖 $\{I_n\}$，使得

$$m^*(E)+\varepsilon>m^*\left(\bigcup I_n\right)$$

记 $G:=\bigcup_n I_n$，显然 G 是开集，并且由于 $E\in\mathcal{M}$ 取 G 为试验集，得

$$m^*(G)=m^*(G\cap E)+m^*(G\backslash E)=m^*(E)+m^*(G\backslash E) \implies m^*(G\backslash E)<\varepsilon$$

(2. $\Longleftrightarrow$ 3.) 显然

(2. $\Longrightarrow$ 1.) 对 $n\in\mathbb{N}$，存在 $G_n: G_n\supset E, m^*\left(G_n\backslash E\right)<1/n$. 令 $H=\bigcap\limits_{n=1} G_n$，则 $H\supset E$ 且 $m^*(H\backslash E)\leqslant m^*\left(G_n\backslash E\right)<1/n$. 从而知 $m^*(H\backslash E)=0$，而 $E=H\backslash(H\backslash E)$，故 E 可测. □

§1.4 不可测集

建立 $[0,1]$ 上的等价关系：$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$，考虑 $[0,1]$ 在该等价类下的分解，记为

$$[0,1]=\bigcup_\alpha \varepsilon_\alpha$$

选取 $x_\alpha\in\varepsilon_\alpha$ 记 $N=\{x_\alpha\}$，则有如下定理

【theorem 1.34】 N 不可测

Proof. 假设 N 可测。令 $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ 为 $[-1,1]$ 中所有有理数，考虑平移

$$N_k=N+r_k$$

Claim:

1. $N_k\cap N_j=\varnothing \quad (\forall k\neq j)$
2. $[0,1]\subset\bigcup\limits_{k=1}^\infty N_k\subset[-1,2]$

于是

$$1\leqslant\sum_{k=1}^\infty m\left(N_k\right)\leqslant 3$$

由于 N_k 是 N 的一个平移，对所有 k 有

$$1\leqslant\sum_{k=1}^\infty m(N)\leqslant 3$$

无论 $m(N)=0$ 还是 $m(N)>0$，上式都不可能成立，矛盾。 □

【remark 1.35】 建立不可测集默认了选择公理成立

【theorem 1.36】 设 $F\subset\mathbb{R}, m(F)>0$，则存在不可测集 $A\subset F$

Proof. 设 E 是 Vitali 集，$\mathbb{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$ ，则：

$$F=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E_r\cap F)$$

反设 $E_r\cap F$ 可测 $(\forall r\in\mathbb{Q})$, 则 $m(E_r\cap F)=0$, 故 $m(F)=0$, 与 $m(F)>0$ 矛盾。于是有 $E_{r_0}\cap F$ 不可测 $(\exists r_0\in\mathbb{Q})$ □

【theorem 1.37】 存在互不相交的点集列 $\{E_k\}$ ，使得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)<\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k).$$

§1.5 连续变换与可测集

【definition 1.38】 设有变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 若对任一开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ ，逆像集

$$T^{-1}(G)=\{x\in\mathbb{R}^n:T(x)\in G\}$$

是一个开集，则称 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续变换.

【theorem 1.39】 变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换的充分且必要条件是：对任一点 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得当 $|y-x|<\delta$ 时，有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon$$

Proof.

1. $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\varepsilon>0$ ，则 x 属于开集

   $$T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

   从而存在 $\delta>0$ ，使得

   $$B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

   这说明当 $|y-x|<\delta$ 时，有 $y\in T^{-1}(B(T(x),\varepsilon))$ ，即

   $$|T(y)-T(x)|<\varepsilon.$$

2. 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集且 $T^{-1}(G)\neq\varnothing$ ，则对 $\forall x\in T^{-1}(G)$ ，有 $T(x)\in G$ ，因此存在 $\varepsilon>0$ ，使得 $B(T(x),\varepsilon)\subset G$. 根据充分性的假定，对此 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得当 $|y-x|<\delta$ 时，有

   $$|T(y)-T(x)|<\varepsilon \quad 即 \quad T(y)\in B(T(x),\varepsilon).$$

   这就是说 $B(x,\delta)\subset T^{-1}(G)$ ，即 $T^{-1}(G)$ 是开集.

□

【theorem 1.40】 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.

【corollary 1.41】 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 E 是 F_σ 集, 则 $T(E)$ 是 F_σ 集.

【corollary 1.42】 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一零测集 $Z, T(Z)$ 必为零测集, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一可测集 $E, T(E)$ 必为可测集.

【theorem 1.43】 若 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, $E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$m^*(T(E)) = |\det T| \cdot m^*(E)$$

.

Chapter 2

可测函数

§2.1 可测函数定义和性质

【definition 2.1】(可测函数) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$f: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, 若

$$\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) > t\}\text{是可测集}$$

, 则称 f 是 E 上的可测函数.

【example 2.2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测.

Proof. $\forall t \in \mathbb{R}$ ，$\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$ 定属于下述三种情况之一：区间，单点集或空集. 从而可知

$$\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$$

是可测集. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测. □

【proposition 2.3】 下面几种集合的可测性是等价的

1. $\{x : f(x) > t\}$
2. $\{x : f(x) \leqslant t\} = E \backslash \{x : f(x) > t\}$
3. $\{x : f(x) \geqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t - \frac{1}{k}\right\}$
4. $\{x : f(x) < t\} = E \backslash \{x : f(x) \geqslant t\}$

【remark 2.4】 $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t + \frac{1}{k}\right\} = (\{x : f(x) \leqslant t\})^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < t + \frac{1}{k}\right\}\right)^c$$

【theorem 2.5】 设 $D \subset \mathbb{R}$ 稠密，若 $\{f > a\} \in \mathcal{M} \quad (\forall a \in D)$ 则 f 可测

Proof. $\forall t \in \mathbb{R}$，选取 $\{r_k\} \subset D$，使得

$$r_k \geqslant t; \quad \lim_{k\to\infty} r_k = t.$$

$\Longrightarrow$

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > r_k\}.$$

□

【theorem 2.6】 设 $f(x) : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}_\infty$，若 $f(x)$ 在 E_1 和 E_2 上可测，则 $f(x)$ 在 $E_1 \cup E_2$ 上可测.

Proof. 注意到:

$$\{x \in E_1 \cup E_2 : f(x) > t\} = \{x \in E_1 : f(x) > t\} \cup \{x \in E_2 : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

【theorem 2.7】 若 $f(x)$ 在 E 上可测，$A \subset E$ 可测，则 $f(x)|_A$ 可测.

Proof. 注意到:

$$\{x \in A : f(x) > t\} = A \cap \{x \in E : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

【theorem 2.8】 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测，则下列函数

$$cf(x) \quad f(x) + g(x) \quad f(x) \cdot g(x)$$

在 E 上可测.

【theorem 2.9】 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，则下列函数:

$$\sup_{k\geqslant 1} \{f_k(x)\} \quad \inf_{k\geqslant 1} \{f_k(x)\} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x)$$

在 E 上可测。

Proof. 只需考虑:

$$\{\sup_{k\geqslant 1} \{f_k(x)\} > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k(x) > t\}$$

和

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = \inf_{i\geqslant 1} \left(\sup_{k\geqslant i} f_k(x) \right)$$

□

【corollary 2.10】 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上可测，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad (x \in E)$$

则 $f(x)$ 在 E 上可测.

【theorem 2.11】 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测 $\Longleftrightarrow$ 对 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $G, f^{-1}(G)$ 可测。

Proof. 充分性显然，下面证明必要性. 由假设知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集，故

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\backslash f^{-1}([b,+\infty))\quad(\forall(a,b)\in\mathbb{R})$$

可测. 由于 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集，则 $G=\bigcup\limits_{k\geqslant 1}(a_k,b_k)$，从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geqslant 1}f^{-1}\left(a_k,b_k\right)$$

知 $f^{-1}(G)$ 可测. □

【theorem 2.12】 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，g 在 $\mathbb{R}$ 上可测且 $a.e.$ 有限，$h=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

Proof. 对任一开集 $G\subset\mathbb{R}$，易得 $f^{-1}(G)$ 是开集，

$$g^{-1}\left(f^{-1}(G)\right)$$

可测. $h(x)=f(g(x))$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测. □

【remark 2.13】 反过来不对

【corollary 2.14】 设 f 可测，令 $f^+=\max(f,0)$,$f^-=\max(-f,0)$, 则 f^+,f^- 可测

【definition 2.15】(简单函数) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，令

$$\chi_{\mathrm{E}}(x)=\begin{cases}1,x\in E,\\0,x\notin E\end{cases}$$

称其为 E 上的特征函数. 进一步，令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in E.$$

其中 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,(\forall i\neq j).\quad f(x)=c_i,\quad x\in E_i$, 称 $f(x)$ 为 E 上简单函数.

【theorem 2.16】(简单函数逼近定理) 设 $f:E\to\mathbb{R}$ 是可测函数. 则存在一列简单函数 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

1. $|\varphi_n(x)|\leqslant|f(x)|$ 对所有 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 成立
2. $\varphi_n(x)\to f(x)$ 逐点收敛（即 $\forall x\in X,\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$）
3. 若 $f\geqslant 0$，则 $\{\varphi_n\}$ 可构造为单调递增序列（即 $\varphi_n\leqslant\varphi_{n+1}$）
4. 若 f 有界，则 $\varphi_n\to f$ 一致收敛

Proof. 分两步证明：先处理非负函数，再推广到一般情形.

步骤 **1**：非负可测函数（$f \geqslant 0$）

对每个 $n \in \mathbb{N}$，构造：

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x)$$

其中：

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right), \quad F_n = f^{-1}([n, \infty))$$

性质验证：

1. 单调递增性 ($\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$)：
   固定 $x \in E$. 若 $f(x) \geqslant n+1 > n$，则 $\varphi_n(x) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(x)$.
   若 $f(x) < n$，则 $\exists k$ 使 $\dfrac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$. 在 $n+1$ 级划分中，$\varphi_{n+1}(x)$ 是包含 $f(x)$ 的区间左端点，满足 $\varphi_n(x) = \dfrac{k}{2^n} \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant f(x)$.

2. 逐点收敛性 ($\varphi_n \to f$)
   若 $f(x) = \infty$，则 $\forall n, x \in F_n$，故 $\varphi_n(x) = n \to \infty = f(x)$
   若 $f(x) < \infty$，则当 $n > f(x)$ 时，$x \notin F_n$，且 $\exists k_n$ 使得：
   $$\frac{k_n}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k_n+1}{2^n}, \quad 0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n} \to 0$$
   故 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

3. 控制性 ($0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$):
   由构造直接得 $\varphi_n(x) \leqslant f(x)$（因 φ_n 取区间左端点或 $n \leqslant f(x)$）

步骤 **2**：一般可测函数

将 f 分解为正负部：

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

由步骤 1，存在简单函数列 $\{\psi_n\}, \{\eta_n\}$ 满足：

$$\psi_n \uparrow f^+, \quad \eta_n \uparrow f^-, \quad 0 \leqslant \psi_n \leqslant f^+, \quad 0 \leqslant \eta_n \leqslant f^-$$

定义 $\varphi_n = \psi_n - \eta_n$，则：

1. φ_n 是简单函数
2. $\varphi_n = \psi_n - \eta_n \to f^+ - f^- = f$ 逐点收敛
3. $|\varphi_n| = |\psi_n - \eta_n| \leqslant \psi_n + \eta_n \leqslant f^+ + f^- = |f|$

一致收敛性（当 f 有界）

若 $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x$，则当 $n > M$ 时，在步骤 1 构造中有 $F_n = \varnothing$，且：

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall x$$

故 $\|\varphi_n - f\|_{\sup} \leqslant 2^{-n} \to 0$，即一致收敛. □

§2.2 可测函数的收敛

【definition 2.17】(几乎处处收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数. 若存在 E 中的点集 Z , 有 $m(Z)=0$ 及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), \quad \forall x\in E\backslash Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\to f(x), \quad \text{a. e. } x\in E.$$

【definition 2.18】(依测度收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\xrightarrow{m} f(x), \quad \forall x\in E.$$

【definition 2.19】(近一致收敛) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数。若 $\forall\delta>0$, 存在 E 的可测子集 E_δ 满足 $m\left(E_\delta\right)\leqslant\delta$, 使得

$$f_k(x)\rightrightarrows f(x) \quad \forall x\in E\backslash E_\delta$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 近上一致收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\to f(x), \quad \text{a. un. } x\in E.$$

【theorem 2.20】 设 $\{f_n\},f$ 是 E 上实值可测函数, 则

1. $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f \iff \forall\varepsilon>0$
$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\geqslant\varepsilon\}\right)=0$$
2. $f_n\xrightarrow{\text{a. un.}} f \iff \forall\varepsilon>0$
$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\geqslant\varepsilon\}\right)=0$$
3. $f_n\xrightarrow{\text{m}} f \iff$ 对 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n'}\}$, 存在其子列 $\{f_{n'_k}\}$, 使得
$$f_{n'_k}\xrightarrow{\text{a. un.}} f$$

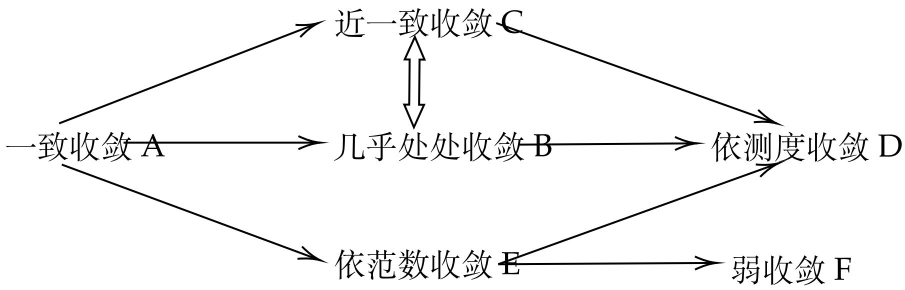
【theorem 2.21】 设 $\{f_n(x)\},f(x)$ 是 E 上实值可测函数, 则

1. $f_n\xrightarrow{\text{a.un.}} f\Rightarrow f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f;\ f_n\xrightarrow{\text{a.un.}} f\Rightarrow f_n\xrightarrow{m} f.$
2. 若 $m(E)<\infty$, 则有 $f_n\xrightarrow{\text{a. e.}} f\iff f_n\xrightarrow{\text{a. un.}} f$
3. 设 $f_n\xrightarrow{m} f$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a. e}} f$

【remark 2.22】 上述定理的 2 的 $\Rightarrow$ 通常被称为 Egrorv 定理, 3 通常被称为 Riesz 定理

附录：各种收敛的图示

1.$m(E) < \infty$ 的情形

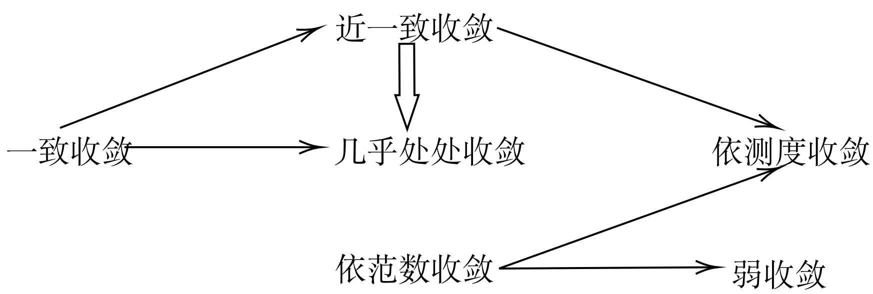


Proof.

1. (A $\Longrightarrow$ C) 由定义立得
2. (A $\Longrightarrow$ B) 由定义立得
3. (A $\Longrightarrow$ E)
4. (C $\Longrightarrow$ B) 由等价定义立得 (定理2.20)
5. (B $\Longrightarrow$ C) Egorov 定理
6. (B $\Longrightarrow$ D) 由 $m(E) < \infty$ 使用递减集合得测度连续性 (或由 B$\Longleftrightarrow$C 且 C $\Longrightarrow$ D)
7. (C $\Longrightarrow$ D) 测度连续性 (或由 B$\Longleftrightarrow$C 且 B $\Longrightarrow$ D)
8. (E $\Longrightarrow$ D) Markov 不等式
9. (E $\Longrightarrow$ F)

□

2.$m(E) = \infty$ 的情形



Chapter 3

Lebesgue 积分

§3.1 非负可测函数的积分

【definition 3.1】(非负简单可测函数的积分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{A_i}(x), \quad \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \mathbb{R}^n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing (\forall i \neq j).$$

若 $E \in \mathscr{M}$，则定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} c_i m\left(E \cap A_i\right).$$

【theorem 3.2】(线性空间) 记简单函数全体为 $\mathcal{S}$, 则 $\mathcal{S}$ 构成线性空间。

【remark 3.3】 设 $f, g \in \mathcal{S}$ 若不额外说明，我们都默认 $f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{A_i}(x), g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}(x)$

【theorem 3.4】(积分的线性性质) 设 $f(x), g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则有

1. 若 $C \in \mathbb{R}_{>0}$，则 $\int_E Cf(x)\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\mathrm{d}x$

2. $\int_E (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

Proof. 仅证明 2，直接计算得

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\, m\left(E\cap A_i\cap B_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} m\left(E\cap A_i\cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j \sum_{i=1}^{p} m\left(E\cap A_i\cap B_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m\left(E\cap A_i\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j m\left(E\cap B_j\right)\\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

【theorem 3.5】 若 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增可测集列，$f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Proof. 直接计算

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p} c_i m\left(E_k\cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} c_i m\left(E\cap A_i\right) = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

【definition 3.6】**(非负可测函数的积分)** 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x : h(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), h(x)\le f(x)\right\},$$

【remark 3.7】 这里的积分可以是 ∞，若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$，则称 $f(x)$ 在 E 上是可积的，记为 $f(x)\in\mathcal{L}^+$

【proposition 3.8】 我们有如下事实 (不予证明)

1. 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 若 $f(x)\in\mu^+(E)$，A 是 E 中可测子集，则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

3. $f(x)=0\quad \text{a.e.}x\in E \Longleftrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$

4. 设 $f(x), g(x) \in \mu^{+}(E)$. 若 $f(x)=g(x)$ a.e. $x \in E$, 则

$$\int_{E} f(x) \mathrm{d} x=\int_{E} g(x) \mathrm{d} x.$$

【theorem 3.9】 若 $f(x) \in \mathcal{L}^{+}(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

Proof. 考虑 $E_{k}=\{x \in E: f(x)>k\}$, 则有

$$\{x \in E: f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k}.$$

对于每个 k , 可得

$$k m\left(E_{k}\right) \leqslant \int_{E_{k}} f(x) \mathrm{d} x \leqslant \int_{E} f(x) \mathrm{d} x<+\infty,$$

从而知道 $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} m\left(E_{k}\right)=0$. 这就是说

$$m(\{x \in E: f(x)=+\infty\})=0.$$

□

【theorem 3.10】(单调收敛定理 (非负版本)) 设 $\left\{f_{k}(x)\right\} \subset \mu^{+}(E), f_{k}(x) \leqslant f_{k+1}(x)$, 且有 $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} f_{k}(x)=f(x), x \in E$, 则

$$\lim _{k \rightarrow \infty} \int_{E} f_{k}(x) \mathrm{d} x=\int_{E} f(x) \mathrm{d} x.$$

Proof. 由于 $\left\{f_{k}(x)\right\} \subset \mu^{+}(E)$ 易知 $f \in \mu^{+}(E)$, 又由于

$$\int_{E} f_{k}(x) \mathrm{d} x \leqslant \int_{E} f_{k+1}(x) \mathrm{d} x \quad(\forall k \geqslant 1),$$

所以 $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} \int_{E} f_{k}(x) \mathrm{d} x$ 有定义, 而且从函数列的渐升性可知

$$\lim _{k \rightarrow \infty} \int_{E} f_{k}(x) \mathrm{d} x \leqslant \int_{E} f(x) \mathrm{d} x.$$

令 $c \in(0,1), h(x) \in \mathcal{S}^{+}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, 且 $h(x) \leqslant f(x), x \in E$. 记

$$E_{k}=\left\{x \in E: f_{k}(x) \geqslant c h(x)\right\},$$

则我们有 $E_{k} \subset E_{k+1}$ 且 $\lim\limits_{k} E_{k}=E$ 由定理3.5知

$$\lim _{k \rightarrow \infty} c \int_{E_{k}} h(x) \mathrm{d} x=c \int_{E} h(x) \mathrm{d} x,$$

于是从不等式

$$\int_{E} f_{k}(x) \mathrm{d} x \geqslant \int_{E_{k}} f_{k}(x) \mathrm{d} x \geqslant \int_{E_{k}} c h(x) \mathrm{d} x=c \int_{E_{k}} h(x) \mathrm{d} x$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant c\int_E h(x)\mathrm{d}x$$

在上式中令 $c\to 1^-$ ，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

由 $h(x)$ 的任意性和上确界的性质得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

【theorem 3.11】(积分的线性性质) 设 $f(x), g(x)\in\mu^+(E)$ ， α,β 是非负常数，则

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 只需证明 $\alpha=\beta=1$，设 $\{\varphi_k(x)\},\{\psi_k(x)\}$ 是非负可测简单函数渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=g(x),\quad x\in E,$$

则 $\{\varphi_k(x)+\psi_k(x)\}$ 仍为非负可测简单函数渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_k(x)+\psi_k(x))=f(x)+g(x),\quad x\in E.$$

从而由简单函数积分的线性性质和定理3.10可知，

$$\int_E(f+g)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E(\varphi_k+\psi_k)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k\mathrm{d}x+\lim_{k\to\infty}\int_E\psi_k\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x+\int_E g\mathrm{d}x.$$

□

【remark 3.12】 定理条件可以弱化为 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \text{a.e.}x\in E$

【corollary 3.13】 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递增可测集列，且 $\lim\limits_k E_k=E$. 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 只需注意到

$$\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_{E_k}\mathrm{d}x,\quad f(x)\chi_{E_k}\leqslant f(x)$$

□

【corollary 3.14】 设 $\{f_k(x)\}\subset\mathcal{L}^+(E), f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)$ ，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \text{a.e } x\in E$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

Proof. 由 $0 \leqslant f(x) \leqslant f_1(x)$ 可知，$f(x)$ 在 E 上可积. 记

$$g_k(x) = f_1(x) - f_k(x) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{g_k(x)\}$ 是非负可积函数渐升列. 从而有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E (f_1(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到 $f_1(x) = (f_1(x) - f_k(x)) + f_k(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_E f_1(x)\mathrm{d}x &= \int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\mathrm{d}x, \\ \int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x &= \int_E f_1(x)\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

【remark 3.15】 由于要对积分移项，故递减版本的 MCT 要求函数可积而不仅仅可测。

【corollary 3.16】(逐项积分定理) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 令 $S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$，则我们有 $S_m(x) \nearrow S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 由定理 3.10 得证 □

【theorem 3.17】(Fatou 引理) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 令 $g_k(x) = \inf_{j\geqslant k} f_j(x)$，我们有

$$g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x) \quad 和 \quad \liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x), \quad x \in E,$$

根据定理3.10

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

□

【corollary 3.18】(依测度 Fatou) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

□

【example 3.19】(Fatou 严格不等号)

【theorem 3.20】 设 $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数，$m(E)<+\infty$. 在 $[0,+\infty)$ 上作如下划分：

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty,$$

其中 $y_{k+1}-y_k<\delta$ 。若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}\}\quad(k=0,1,\cdots),$$

则

$$f(x)\in\mathcal{L}^+(E)\iff\sum_{k=0}^{\infty}y_k m\left(E_k\right)<+\infty$$

此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k\to 0}^{\infty}y_k m\left(E_k\right)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 注意到

$$y_k m\left(E_k\right)\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant y_{k+1}m\left(E_k\right)$$

对 k 求和得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_k m\left(E_k\right)\leqslant\int_E f\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}y_{k+1}m\left(E_k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(y_{k+1}-y_k\right)m\left(E_k\right)+\sum_{k=0}^{\infty}y_k m\left(E_k\right)\leqslant\delta m(E)+\sum_{k=0}^{\infty}y_k m\left(E_k\right)$$

由此知结论成立 □

【example 3.21】 设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数,$m(E)<\infty$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E: f(x)\geqslant n\})<+\infty.$$

【example 3.22】 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 的上非负实值可测函数，则 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}nm(\{x\in[a,b]: f(x)\geqslant n\})<+\infty.$$

§3.2 一般可测函数的积分

【definition 3.23】(一般可测函数的积分) 设 $f(x)\in\mu(E)$. 若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x,\quad\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值，则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分；当上式右端两个积分值皆为有限时，则称 $f(x)$ 在 E 上是可积的，记为 $f \in \mathcal{L}(E)$.

【remark 3.24】 由于等式

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立，故知在 $f(x)$ 可测的条件下，$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的，且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

【proposition 3.25】 下面是一系列和非负可测函数类似的命题

1. 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，且 $m(E) < +\infty$ ， 则 $f \in L(E)$.
2. 若 $f \in L(E)$ ，则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.
3. 若 $E \in \mathcal{M}$ ，且 $f(x) = 0$ ，a. e. $x \in E$ ，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$
4. 若 $f(x) \in \mu(E)$，$g \in L(E)$ ，且 $|f(x)| \leqslant g(x)$ ，$x \in E$，则 $f \in L(E)$.

【theorem 3.26】 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ，则

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，使得

$$\int_{\{x ; |x| \geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

【proposition 3.27】(积分的线性性质 <3>) 若 $f, g \in \mathcal{L}(E), C \in \mathbb{R}$ ，则

1. $\int_E Cf(x)\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_E (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

【theorem 3.28】(积分的绝对连续性) 若 $f \in L(E)$ ，则对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e) < \delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_e |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

【theorem 3.29】(控制收敛定理) 设 $f_k \in \mathcal{L}(E) \quad \forall k$ ，且有

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

若存在 $F(x) \in \mathcal{L}(E)$ ，使得

$$|f_k(x)| \leqslant F(x), \quad \text{a. e. } x \in E,$$

则

$$f(x) \in \mathcal{L}(E), \quad \lim_k \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

Proof.

1. 由 $f_k(x)\in\mu(E)\implies f(x)\in\mu(E)$，$|f_k(x)|\leqslant F(x)\implies|f(x)|\leqslant F(x)\implies f(x)\in\mathcal{L}(E)$

2. 作函数列
$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|$$
则 $g_k\in\mathcal{L}(E)$，且 $0\leqslant g_k(x)\leqslant 2F(x)\quad \text{a.e.}x\in E$．根据 Fatou Lemma，我们有
$$\int_E\lim_{k\to\infty}(2F(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E(2F(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x.$$
因为 $F(x)$ 以及每个 $g_k(x)$ 都是可积的，所以得到
$$\int_E2F(x)\mathrm{d}x-\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E2F(x)\mathrm{d}x-\limsup_{k\to\infty}\int_Eg_k(x)\mathrm{d}x.$$
消去 $\int_E2F(x)\mathrm{d}x$，并注意到 $\lim_{k\to\infty}g_k(x)=0\quad\text{a.e.}x\in E$，可得
$$\limsup_{k\to\infty}\int_Eg_k(x)\mathrm{d}x=0.$$
最后，从不等式
$$\left|\int_Ef_k(x)\mathrm{d}x-\int_Ef(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_E(f_k(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_Eg_k(x)\mathrm{d}x$$
立即可知，定理的结论成立.

□

【remark 3.30】

【corollary 3.31】 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，$m(E)<+\infty$，且对 $x\in E$ 有
$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad|f_k(x)|\leqslant M\quad(k=1,2,\cdots),$$
则 $f\in L(E)$，且
$$\lim_{k\to\infty}\int_Ef_k(x)\mathrm{d}x=\int_Ef(x)\mathrm{d}x.$$
【theorem 3.32】(依测度收敛型控制收敛定理) 设 $f_k\in L\left(\mathbb{R}^n\right)(k=1,2,\cdots)$，且 $f_k(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上依测度收敛于 $f(x)$．若存在 $F\in L\left(\mathbb{R}^n\right)$，使得
$$|f_k(x)|\leqslant F(x)\quad(\forall k\geqslant 1\text{ a.e. }x\in\mathbb{R}^n),$$
则 $f\in L\left(\mathbf{R}^n\right)$，且有
$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.$$
Proof.

□

【example 3.33】 设 $f_n\in C^{(1)}((a,b))$，且有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=F(x),\quad x\in(a,b)$$
若 $f'(x),F(x)$ 在 (a,b) 上连续，则 $f'(x)=F(x),x\in(a,b)$．

§3.3 可积函数与连续函数

§3.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分

§3.5 重积分与累次积分

§3.6 变量替换