Chapter 1

线性微分方程组

§1.1 一般理论

【定义 1.1】 形如:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$$

的方程被称为线性微分方程组, 进一步

1. $\boldsymbol{f}(x)\not\equiv\mathbf{0}:\iff$ 非齐次线性微分方程组.
2. $\boldsymbol{f}(x)\equiv\mathbf{0}:\iff$ 齐次微分方程组.

【定理 1.2】 线性微分方程组, 满足初始条件

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x),\quad \boldsymbol{y}\left(x_0\right)=\boldsymbol{y}_0$$

的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$ 在区间 (a,b) 上存在唯一，其中初值 $x_0\in(a,b)$ 和 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 任意给定.

1.1.1 齐次线性微分方程组

【引理 1.3】 记 S 为 n 次齐次方程组的所有解组成的集合，则 S 是 n 维线性空间.

证明. 容易证明 S 是线性空间，即

$$y_1,y_2\in S\implies c_1y_1+c_2y_2\in S\quad\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

下证 $\dim S=n$. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 到 S 的映射

$$\boldsymbol{H}:\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{y}_0\mapsto\boldsymbol{y}(x)\in S\quad\forall\boldsymbol{y_0}\in S.$$

我们有

1. 满射：解的存在性

2. 单射：解的唯一性

3. 线性：线性空间

于是 $\boldsymbol{H}$ 是线性同构，故 $\dim S = n$. □

【注 1.4】 由于 S 是 n 维线性空间，则 $\forall y \in S$，在取定 S 的一组基 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 后，都有

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

于是，对于 S 中任意 n 个线性无关的解，由线性代数知识知道其是 S 的一组基，我们称其为该方程的基础解系.

有了基础解系的概念，自然的考虑任意给定 n 个解，如何判断这 n 个解是否线性无关. 为此我们给出下面的定义.

【定义 1.5】(Wronsky 行列式) 称行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

为解组 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 的 Wronsky 行列式.

【引理 1.6】(Liouville) $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 满足

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(t) \mathrm{d}t\right) \quad a < x_0, x < b$$

证明.

□

【定理 1.7】 设 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 是齐次方程组的 n 个解，则

1. $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 是 S 的一组基 $\iff W(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$

2. $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 线性相关 $\iff W(x) \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b)$.

为了进一步讨论时比较方便，引入下面的矩阵记号.

【定义 1.8】 令 $\boldsymbol{Y}(x) = [\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)]$ 容易验证

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(x)}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)$$

称 $\boldsymbol{Y}(x)$ 为齐次线性微分方程组的解矩阵，进一步若 $\det \boldsymbol{Y}(x) \neq 0$，则称其为基本解矩阵.

【命题 1.9】 由解矩阵的定义，有下列显然的结论，

1. 如果 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是方程组的一个基本解矩阵，则原方程组的通解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

2. 设 $\Phi(x)$ 是方程组的一个基本解矩阵，则对于任意的非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，矩阵

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

也是原方程组的一个基本解矩阵

3. 设 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是方程组的两个基本解矩阵，则存在一个非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

1.1.2 非齐次线性微分方程组

【引理 1.10】 如果 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的一个基本解矩阵，$\boldsymbol{\phi}^*(x)$ 是非齐次方程组的一个特解，则非齐次方程组的任意解 $\boldsymbol{y} = \phi(x)$ 可以表示为

$$\phi(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} + \phi^*(x) \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

证明. $\phi(x) - \phi^*(x)$ 是齐次方程组的解．故存在一个常数向量 $\boldsymbol{c}$，使得

$$\phi(x) - \phi^*(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)c$$

□

上面的引理告诉我们，想要得到非齐次方程组的通解，只需要找到其对应齐次方程组的基础解系和非齐次方程组的一个特解。下面我们引入常数变易法来求得非齐次方程的特解.

【定理 1.11】(常数变易法) 考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

设其对应齐次方程组的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$，则

$$\boldsymbol{\phi}^*(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

是原非齐次方程的一个特解.

证明. 不失一般性，设非齐次方程组的特解的形式为 $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$ 带入得

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) + \boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{f}(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$$

注意到 $\det\boldsymbol{\Phi}(x) = W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \implies \boldsymbol{\Phi}(x)$ 可逆．于是，

$$\boldsymbol{c}(x) = \int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\phi}^*(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

□

【定理 1.12】(解的结构定理) 设 $\mathbf{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的基本解矩阵，则对应非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\mathbf{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right)\quad x_0,x\in(a,b)\,;\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$$

【注 1.13】 一般来说，齐次线性微分方程组的基本解矩阵是很难用初等积分法求出的，即使当

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a(x) & 0\end{bmatrix}$$

时，仍然不能用初等积分法求出它的基本解矩阵.

§1.2 常系数线性微分方程组

按照上一节的逻辑，问题依次约化为:

$$\text{非齐次}\implies\text{齐次}\iff\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\quad\text{基解矩阵}$$

在矩阵阶数 $n=1$ 时 $\boldsymbol{A}=A\in\mathbb{R}$，此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay\implies y=c\exp(Ax)\quad c\in\mathbb{R}$$

注意到指数函数的 Taylor 展开:

$$\exp(Ax)=1+Ax+\frac{1}{2!}(Ax)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(Ax)^k+\cdots$$

受上式启发，定义

$$\exp(\boldsymbol{A}x):=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}x)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}x)^k+\cdots.$$

下面我们需要验证上面的定义 (well-defined)

【引理 1.14】 对于任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n$，定义

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$$

则 $\|\boldsymbol{A}\|$ 是范数.

证明. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{M}_n$，容易验证:

1. $\|\boldsymbol{A}\|\geqslant 0;\|\boldsymbol{A}\|=0\iff\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$
2. $\|k\boldsymbol{A}\|=|k|\|\boldsymbol{A}\|,\forall k\in\mathbb{R}$
3. $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$

□

【引理 1.15】 由定义容易验证下列结果

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 则

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp(\boldsymbol{A})\cdot\exp(\boldsymbol{B})$$

2. $\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_n$，$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}\in\mathcal{M}_n$ 且 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则

$$\exp(\boldsymbol{PAP^{-1}})=\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1}$$

【引理 1.16】 矩阵无穷级数

$$\exp(\boldsymbol{A}x)=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}x)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}x)^k+\cdots\in\mathcal{M}_n$$

在 $\mathbb{R}$ 的任意有界区间上绝对一致收敛.

【定理 1.17】 矩阵指数函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\exp(\boldsymbol{A}x)$ 是常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

证明. $\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R},\boldsymbol{\Phi}(x)$ 一致收敛, 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}x}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^kx^{k-1}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(\boldsymbol{A}x)^{k-1}+\cdots\right]=\boldsymbol{A\Phi}(x)\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}_n$，可知 $\det\boldsymbol{\Phi}(0)=1\neq0$. 因此，$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的一个基解矩阵. □

接下来我们研究 $\exp(\boldsymbol{A}x)$ 是否能用初等函数表达. 考虑如下的约化：

$$\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_n\implies\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P^{-1}AP}\quad(\boldsymbol{J}\text{是}\boldsymbol{A}\text{的 Jordan 标准型})\implies\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_n)$$

于是，我们只需研究清楚 Jordan 标准型形式的指数矩阵函数.

【命题 1.18】 若 $\exp(\boldsymbol{Ax})$ 是齐次方程组的一个基本解矩阵，则 $\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{Jx})$ 也是齐次方程组的一个基本解矩阵.

证明. $\exp(\boldsymbol{Ax})$ 是基解矩阵 $\implies\exp(\boldsymbol{Ax})\boldsymbol{P}$ 是基解矩阵 ($\boldsymbol{P}$ 是非异常数矩阵)，又由于

$$\exp(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{Jx})\boldsymbol{P^{-1}}\implies\exp(\boldsymbol{Ax})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{Jx})$$

□

现在按照 $\boldsymbol{A}$ 特征值情况进行分类.

1.2.1 A 无重特征值

1.2.2 A 有重特征值

§1.3 高阶线性微分方程

【定义 1.19】 形如

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

被称为高阶线性微分方程，进一步

1. $f(x) \not\equiv 0 :\Longleftrightarrow$ 非齐次高阶线性微分方程
2. $f(x) \equiv 0 :\Longleftrightarrow$ 齐次高阶线性微分方程

【注 1.20】 引入向量 $\boldsymbol{y} = \left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}$，则原方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

其中

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$