ODE

作者：知北游

最后编辑时间：2025 年 7 月 17 日

目录

1 初等积分法 1

1.1 线性方程 1

1.2 可分离变量方程 2

1.3 全微分方程 2

1.4 变量替换 3

1.5 一阶隐式微分方程 5

1.6 可降阶微分方程 5

2 解的存在唯一定理 7

2.1 预备知识 7

2.2 Picard 定理 9

3 线性系统 11

3.1 一般理论 11

3.1.1 齐次线性微分方程组 11

3.1.2 非齐次线性微分方程组 13

3.2 常系数线性微分方程组 14

3.2.1 $\boldsymbol{A}$ 无重特征值 17

3.2.2 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值 17

3.3 高阶线性微分方程 20

3.3.1 一般理论 20

3.3.2 常系数高阶方程 23

Chapter 1

初等积分法

§ 1.1 线性方程

【Definition 1.1】 线性齐次方程形如

$$y' + p(x)y = 0.$$

【Proposition 1.2】 线性齐次方程

$$y' + p(x)y = 0$$

的通解为

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

Proof.

$$y' + p(x)y = 0 \implies \exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)(y' + p(x)y) = 0 \implies \left(\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)y\right)' = 0$$
$$\left(\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)y\right) = C \implies y = C\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

□

【Definition 1.3】 线性非齐次方程形如

$$y' + p(x)y = q(x).$$

【Proposition 1.4】 线性非齐次方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的通解为

$$y = \exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\left(C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)$$

【Definition 1.5】 Berlnoulli 方程形如

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

其可化为一阶非齐次线性微分方程. 方程两边同时乘 $y^{-\alpha}$ 有

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y^{1-\alpha}}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x).$$

§1.2 可分离变量方程

【Definition 1.6】 变量可分离方程形如

$$y' = f(x)g(x).$$

【Proposition 1.7】 变量可分离方程

$$y' = f(x)g(y)$$

的解为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

Proof.

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) &\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

□

【Definition 1.8】(齐次方程) 齐次方程形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

其可以化为变量可分离方程. 事实上由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\cdot x\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(F\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\right).$$

§1.3 全微分方程

【Definition 1.9】 若存在函数 $F(x, y)$ 使得

$$\mathrm{d}F(x, y) = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y$$

则称

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程. 并且容易看出该微分方程的通解就是 $F(x,y)=C$.

【theorem 1.10】(全微分方程的判据) 设微分方程为

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $M(x,y),N(x,y)$ 在一个矩形区域 R 中连续且有连续的一阶偏导数, 则该微分方程是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\quad \text{或者}\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ M(x,y) & N(x,y) \end{vmatrix}=0.$$

【Definition 1.11】 对于微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

而言, 若存在函数 $\mu(x,y)$, 使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$ 是一个积分因子.

【theorem 1.12】 微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

存在一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

仅与 x 有关.

§1.4 变量替换

【Definition 1.13】(Riccati 方程) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+f(x)$$

的方程称为Riccati 方程.

【Proposition 1.14】 1. 当 $p(x),q(x),f(x)$ 都是常数时, Riccati 方程是变量可分离方程

2. 当 $p(x)=0$，Riccati 方程是线性方程

3. 当 $f(x)=0$ 时，Riccati 方程时 Bernoulli 方程

4. 当 Riccati 方程的形式为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=\frac{\ell}{x}y+\frac{b}{x^2}$$
可令 $z=xy$，将上述方程可化为变量可分离方程.

Proof. 设 Riccati 方程为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=\frac{\ell}{x}y+\frac{b}{x^2}$$
注意到
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((xy)\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}$$
$\Longrightarrow$
$$x\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x}+a(xy)^2=(\ell+1)xy+b$$
这是一个可分离变量的微分方程. □

【Example 1.15】 求通解
$$y'=-\frac{1}{x}+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$$

Solution. 容易看出 $y=x$ 是原方程的解，故考虑 $y=z+x$ 带入得
$$z'=(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})z+\frac{1}{x^3}z^2$$
这是一个 Bernoulli 方程，易得通解为
$$y=x\frac{k\exp(\frac{2}{x})+1}{k\exp(\frac{2}{x})-1}\quad k\in\mathbb{R}$$
□

【Example 1.16】 求通解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan x(\tan y+\sec x\sec y)$$

Solution. 直接计算得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin y}{\cos y}+\frac{1}{\cos x\cos y}\right)\Longrightarrow\cos x\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin x\sin y+\frac{\sin x}{\cos x}$$
注意到 $\cos y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}x}$，故
$$\cos x\frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}x}-\sin x\sin y=\frac{\sin x}{\cos x}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x\sin y)=\tan x$$
$$\Longrightarrow\cos x\sin y=\log|\cos x|+C\quad C\in\mathbb{R}$$
□

§1.5 一阶隐式微分方程

【Example 1.17】 求通解

$$x\sqrt{1+(y')^2}=y'$$

Solution. 令 $y'=\tan t$，则

$$x\sec t=\tan t \implies x=\sin t$$

$\implies$

$$\mathrm{d}y=\tan t\,\mathrm{d}x=\tan t\,\mathrm{d}(\sin t)=\sin t\,\mathrm{d}t \implies y=-\cos t+C$$

□

§1.6 可降阶微分方程

【Example 1.18】 求通解

$$x'''=2\left(x''-1\right)\cot(t)$$

Solution. 令 $y=x''$ 则

$$y'=2(y-1)\cot(t) \implies y=1+C_1\sin^2(t)$$

带回 x 得

$$x(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{C_1}{4}t^2+\frac{C_1}{8}\cos(2t)+C_2t+C_3$$

□

【Example 1.19】 求通解

$$2x'''-3\left(x'\right)^2=0 \quad x(0)=-3, x'(0)=1, x''(0)=-1$$

Solution. 令 $p=x'$ 则

$$2p''-3(p')^2=0$$

再令 $p'=v$，则 $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dp}\dfrac{dp}{dt}=v\dfrac{dv}{dp}$ 进而

$$2v\frac{dv}{dp}-3p^2=0 \implies 2vdv=3p^2dp \implies v^2=p^3+C_1$$

由于 $v=p'=x''$，所以

$$\left(x''\right)^2=\left(x'\right)^3+C_1$$

当 $t=0$ 时，$x'(0)=1, x''(0)=-1 \implies C_1=0$，故

$$\left(x''\right)^2=\left(x'\right)^3$$

又 $x'(0)=1, x''(0)=-1$

$$x''=-\left(x'\right)^{3/2}$$

经过一系列初等积分，得到

$$x=-\frac{4}{t+2}-1$$

$\square$

Chapter 2

解的存在唯一定理

§2.1 预备知识

【theorem 2.1】(Gronwall) 设 $f(x),g(x)\in C[a,b],g(x)\geqslant 0,c\in\mathbb{R}$. 如果

$$f(x)\leqslant c+\int_a^x g(s)f(s)\mathrm{d}s$$

则

$$f(x)\leqslant c\exp\left(\int_a^x g(s)\mathrm{d}s\right)$$

Proof. 令

$$\Phi(x)=\int_a^x g(s)f(s)\mathrm{d}s$$

由已知条件

$$\Phi'(x)=g(x)f(x)\leqslant g(x)(c+\Phi(x))\iff\Phi'(x)-g(x)\Phi(x)\leqslant cg(x)$$

定义 $\mu(x)=\exp\left(-\int_a^x g(s)\mathrm{d}s\right)$ 等式两边同时乘 $\mu(x)$ 并积分.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ \mu(x)\Phi(x)-\mu(a)\Phi(a)\leqslant\int_a^x cg(s)\mu(x)\,\mathrm{d}s\\
&\Longrightarrow\ \Phi(x)\mu(x)\leqslant c\,(1-\mu(x))\quad(\Phi(a)=0)\\
&\Longrightarrow\ f(x)\leqslant c+\Phi(x)\leqslant c\exp\left(\int_a^x g(s)\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

□

【Remark 2.2】 当 $f(x)\geqslant 0,c\leqslant 0$ 时，可以得到 $f(x)\equiv 0$.

【theorem 2.3】(Arzelà-Ascoli) 设 $\mathcal{F}\subseteq C([a,b],\mathbb{R})$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数族. 若 $\mathcal{F}$ 满足:

1. 一致有界：存在常数 $M>0$，使得 $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant M$

2. 等度连续：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x,y\in[a,b]$ 满足 $|x-y|<\delta$ 及任意 $f\in\mathcal{F}$，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

则 $\mathcal{F}$ 是相对紧集，即 $\mathcal{F}$ 的任意序列存在一致收敛的子序列

在证明这个定理之前，我们先证明两个引理.

【Lemma 2.4】 设 Λ 是一个可数集. 如果函数列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上一致有界，则对于任意的可数点列 $\{r_m\}\subset E$，存在该函数列的一个子序列 $\{f_{\alpha_k}\}$，使得数列 $\{f_{\alpha_k}(r_m)\}$ 是收敛的.

Proof. 数列 $\{f_\alpha(r_1)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是有界的. 由 Weierstrass-Balzano 定理可知，该数列存在一个收敛的子数列，记为

$$f_{11}(r_1),f_{12}(r_1),\cdots,f_{1n}(r_1),\cdots$$

现在考虑数列

$$f_{11}(r_2),f_{12}(r_2),\cdots,f_{1n}(r_2),\cdots$$

该数列也是有界数列，再次利用 Weierstrass-Balzano 定理，存在该数列的一个收敛子数列，记为

$$f_{21}(r_2),f_{22}(r_2),\cdots,f_{2n}(r_2),\cdots$$

重复上述流程，定义 $g_n(x)=f_{nn}(x)$，则 $g_n(x)$ 在所有的 $r_k,k\leqslant n$ 上收敛，即为所求. □

【Lemma 2.5】 设函数列 $\{f_n\}$ 在紧集 $E\subseteq\mathbb{R}$ 上是等度连续的，且存在 E 的一个稠密子集 E_0，使得 $\{f_n\}$ 在该子集上是收敛的，则 $\{f_n\}$ 在 E 上是一致收敛的.

Proof. 等价于证明：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\qquad\forall m,n>N,\forall x\in E$$

不妨设 $E_0=E\cap\mathbb{Q}$. 首先，$\{f_n\}$ 等度连续 $\implies$ 对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $|x-y|<\delta$ 时，有

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

利用 E 的紧性，

$$E\subset\bigcup_{x\in E_0}B(x,\delta)\implies E\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(x_j,\delta)$$

$\{f_n(x_j)\}$ 收敛 $\implies$ 存在 $N=N(j)$ 使得

$$|f_n(x_j)-f_m(x_j)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall m,n>N(j)$$

取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_m\}$ 对 $\forall x\in E$ 不妨设 $x\in B(x_1,\delta)$，则 $\forall m,n>N$

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_j)|+|f_m(x)-f_m(x_j)|+|f_n(x_j)-f_m(x_j)|<\varepsilon$$

□

Arzelà-Ascoli 定理的证明. 有引理易得，留给读者练习. □

§2.2 Picard 定理

【Definition 2.6】 考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

其中函数 $f(x, y)$ 在矩形闭区域

$$D : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

上连续

【Definition 2.7】 称函数 $f(x, y)$ 在区域 G 上对 y 满足 Lipschitz 条件，如果存在常数 L，使得对于任意的 $(x, y_1), (x, y_2) \in G$，有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L |y_1 - y_2|$$

【theorem 2.8】(Picard) 假设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续且对 y 满足 Lipschitz 条件，则微分方程初值问题(2.1)的解在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上存在且唯一，其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

<u>**Proof.**</u> 证明分为四步

步骤 **1**：将微分方程转化为等价的<u>积分方程</u>，即

$$(2.1) \iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

步骤 **2**：<u>构造 Picard 序列</u>$\{y_n(x)\}$

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, \mathrm{d}s \quad |x - x_0| \leqslant h$$

验证：

1. $|x - x_0| \leqslant h \implies |x - x_0| \leqslant a$
2. $|y_n - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\mathrm{d}s| \leqslant M|x - x_0| \leqslant b$

于是 $y_n(x)$ well-defined.

步骤 **3**：<u>解的存在性</u>. 先证明 $y_n(x)$ 一致收敛，由于

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\, \mathrm{d}s\right| \leqslant M |x - x_0| \\ |y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, \mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\, \mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant L \left|\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)|\mathrm{d}s\right| = \frac{LM}{2} |x - x_0|^2 \end{aligned}$$

利用数学归纳法，可以证明

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant \frac{M}{L}\cdot\frac{L^n}{n!}\,|x-x_0|^n,\quad n=1,2,\cdots$$

故

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(y_k(x)-y_{k-1}(x))+y_0(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}|y_k(x)-y_{k-1}(x)|+|y_0(x)|\leqslant\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{n}\frac{(Lh)^k}{k!}$$

由于 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}<\infty$，利用 weierstrass 判别法知 $y_n(x)$ 一致收敛 (设极限函数为 $\phi(x)$)，于是

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\phi(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f\left(s,y_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(s,\phi(s)\right)\mathrm{d}s$$

故 $\phi(x)$ 即为初值问题(2.1)的解（思考右边极限与 f 为什么能换序）.
步骤 **4**：解的唯一性. 假设 $y=\phi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 均是满足上述条件的解，即

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\mathrm{d}s$$
$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\psi(s))\mathrm{d}s$$

两式相减得到

$$\begin{aligned}|\phi(x)-\psi(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}(f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s)))\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\phi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s\right|\end{aligned}$$

令 $\Phi(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}|\phi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s$ ，则

$$\Phi(x)\geqslant 0,x\geqslant x_0\quad\Phi(x)\leqslant 0,x\leqslant x_0$$

于是，当 $x\geqslant x_0$ 时，可以得到

$$\Phi'(x)\leqslant L\Phi(x)$$

由 Gronwall 不等式可知

$$\Phi(x)\leqslant 0,\quad x\geqslant x_0\implies\Phi(x)\equiv 0,\quad x\geqslant x_0\implies\phi(x)\equiv\psi(x),\quad x\geqslant x_0$$

同理，可以证明

$$\phi(x)\equiv\psi(x),\quad x\leqslant x_0$$

我们完成了证明. □

Chapter 3

线性系统

§3.1 一般理论

【**Definition 3.1**】 形如:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

的方程被称为线性微分方程组, 进一步

1. $\boldsymbol{f}(x) \neq \mathbf{0} :\Longleftrightarrow$ 非齐次线性微分方程组.
2. $\boldsymbol{f}(x) \equiv \mathbf{0} :\Longleftrightarrow$ 齐次微分方程组.

【**theorem 3.2**】 线性微分方程组, 满足初始条件

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{y}\left(x_0\right) = \boldsymbol{y}_0$$

的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在区间 (a, b) 上存在唯一, 其中初值 $x_0 \in (a, b)$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 任意给定.

3.1.1 齐次线性微分方程组

【**Lemma 3.3**】 记 S 为 n 次齐次方程组的所有解组成的集合, 则 S 是 n 维线性空间.

Proof. 容易证明 S 是线性空间, 即

$$y_1, y_2 \in S \implies c_1 y_1 + c_2 y_2 \in S \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

下证 $\dim S = n$. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 到 S 的映射

$$\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{y}_0 \mapsto \boldsymbol{y}(x) \in S \quad \forall \boldsymbol{y_0} \in S.$$

我们有

1. 满射: 解的存在性

2. 单射：解的唯一性

3. 线性：线性空间

于是 $\boldsymbol{H}$ 是线性同构，故 $\dim S = n$. □

【Remark 3.4】 由于 S 是 n 维线性空间，则 $\forall y \in S$，在取定 S 的一组基 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 后，都有

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

于是，对于 S 中任意 n 个线性无关的解，由线性代数知识知道其是 S 的一组基，我们称其为该方程的基础解系.

有了基础解系的概念，自然的考虑任意给定 n 个解，如何判断这 n 个解是否线性无关. 为此我们给出下面的定义.

【Definition 3.5】(Wronsky 行列式) 称行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

为解组 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 的 Wronsky 行列式.

【Lemma 3.6】(Liouville) $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 满足

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right) \quad a < x_0, x < b$$

Proof. 对行列式求导得

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y'_{i1}(x) & y'_{i2}(x) & \cdots & y'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 是齐次方程组 的解，因此

$$y'_{i1}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_{j1}(x), \cdots, y'_{in}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_{jn}(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(x) \cdot W$$

于是

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right) \quad a < x_0, x < b$$

□

【theorem 3.7】 设 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 是齐次方程组的 n 个解，则

1. $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 是 S 的一组基 $\iff W(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$
2. $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 线性相关 $\iff W(x) \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b)$.

为了进一步讨论时比较方便，引入下面的矩阵记号.

【Definition 3.8】 令 $\boldsymbol{Y}(x) = [\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)]$ 容易验证

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(x)}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)$$

称 $\boldsymbol{Y}(x)$ 为齐次线性微分方程组的解矩阵，进一步若 $\det \boldsymbol{Y}(x) \neq 0$，则称其为基本解矩阵.

【Proposition 3.9】 由解矩阵的定义，有下列显然的结论，

1. 如果 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是方程组的一个基本解矩阵，则原方程组的通解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

2. 设 $\Phi(x)$ 是方程组的一个基本解矩阵，则对于任意的非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，矩阵

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

也是原方程组的一个基本解矩阵

3. 设 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是方程组的两个基本解矩阵，则存在一个非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

3.1.2 非齐次线性微分方程组

【Lemma 3.10】 如果 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的一个基本解矩阵，$\boldsymbol{\phi}^*(x)$ 是非齐次方程组的一个特解，则非齐次方程组的任意解 $\boldsymbol{y} = \phi(x)$ 可以表示为

$$\phi(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} + \phi^*(x) \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

Proof. $\phi(x) - \phi^*(x)$ 是齐次方程组的解. 故存在一个常数向量 $\boldsymbol{c}$，使得

$$\phi(x) - \phi^*(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)c$$

□

上面的引理告诉我们，想要得到非齐次方程组的通解，只需要找到其对应齐次方程组的基础解系和非齐次方程组的一个特解. 下面我们引入常数变易法来求得非齐次方程的特解.

【theorem 3.11】(常数变易法) 考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

设其对应齐次方程组的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$，则

$$\boldsymbol{\phi}^*(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

是原非齐次方程的一个特解.

Proof. 不失一般性，设非齐次方程组的特解的形式为 $\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$ 带入得

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x)+\boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{c}(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{f}(x)$$

注意到 $\det\boldsymbol{\Phi}(x)=W(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies \boldsymbol{\Phi}(x)$ 可逆. 于是，

$$\boldsymbol{c}(x)=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\phi}^*(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

□

【theorem 3.12】(解的结构定理) 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的基本解矩阵，则对应非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right)\quad x_0,x\in(a,b)\,;\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$$

【Remark 3.13】 一般来说，齐次线性微分方程组的基本解矩阵是很难用初等积分法求出的，即使当

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a(x) & 0\end{bmatrix}$$

时，仍然不能用初等积分法求出它的基本解矩阵.

§3.2 常系数线性微分方程组

按照上一节的逻辑，问题依次约化为：

$$\text{非齐次} \implies \text{齐次} \iff \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\quad\text{基解矩阵} \tag{3.1}$$

在矩阵阶数 $n=1$ 时 $\boldsymbol{A}=A\in\mathbb{R}$，此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay \implies y=c\exp(Ax)\quad c\in\mathbb{R}$$

注意到指数函数的 Taylor 展开：

$$\exp(Ax)=1+Ax+\frac{1}{2!}(Ax)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(Ax)^k+\cdots$$

受上式启发，定义

$$\exp(\boldsymbol{A}x):=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}x)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}x)^k+\cdots.$$

下面我们需要验证上面的定义 (well-defined)

【Lemma 3.14】 对于任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n$ ，定义

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$$

则 $\|\boldsymbol{A}\|$ 是范数. 且 $\|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Proof. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{M}_n$ ，容易验证：

1. $\|\boldsymbol{A}\|\geqslant 0; \|\boldsymbol{A}\|=0 \iff \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$
2. $\|k\boldsymbol{A}\|=|k|\|\boldsymbol{A}\|, \forall k\in\mathbb{R}$
3. $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$

□

【Lemma 3.15】 由定义容易验证下列结果

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 则

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp(\boldsymbol{A})\cdot\exp(\boldsymbol{B})$$

2. $\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_n$, $(\exp\boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$
3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}\in\mathcal{M}_n$ 且 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则

$$\exp(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}})=\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1}$$

【Lemma 3.16】 矩阵无穷级数

$$\exp(\boldsymbol{A}x)=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}x)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}x)^k+\cdots\in\mathcal{M}_n$$

在 $\mathbb{R}$ 的任意有界区间上绝对一致收敛.

【theorem 3.17】 矩阵指数函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\exp(\boldsymbol{A}x)$ 是方程组(3.1)的基解矩阵

Proof. $\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R}, \boldsymbol{\Phi}(x)$ 一致收敛, 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}x}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^kx^{k-1}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(\boldsymbol{A}x)^{k-1}+\cdots\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(x)\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}_n$ ，可知 $\det\boldsymbol{\Phi}(0)=1\neq 0$. 因此，$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次方程组的一个基解矩阵. □

【Corollary 3.18】 常系数非齐次线性微分方程组在区间 (a,b) 上的通解为

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意 n 维常数向量；满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

【Proposition 3.19】 $\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})$ 也是方程组(3.1)的一个基本解矩阵.

Proof. $\exp(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ 是基解矩阵 $\implies$ $\exp(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}$ 是基解矩阵 ($\boldsymbol{P}$ 是非异常数矩阵)，又由于

$$\exp(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}^{-1} \implies \exp(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})$$

□

接下来我们研究 $\exp(\boldsymbol{A}x)$ 的算法. 考虑如下的约化:

$$\forall \boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_n \implies \boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\quad (\boldsymbol{J}\text{是}\boldsymbol{A}\text{的 Jordan 标准型}) \iff \boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_n)$$

【Example 3.20】 设 $\boldsymbol{J}\in\mathcal{M}_s$ 是 s 级 Jordan 块，试求 $\exp(\boldsymbol{J}x)$

Solution. 由于

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{s\times s} = \lambda\boldsymbol{I}_s + \boldsymbol{N}$$

而 $\boldsymbol{N}$ 是以 s 为幂零指数的幂零矩阵. 且 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{N}$ 可交换，于是

$$\exp(\boldsymbol{J}x) = \exp\left((\lambda\boldsymbol{I}_s+\boldsymbol{N})x\right) = \exp(\lambda x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{N}x)^k}{k!}$$

$$\implies \exp(\boldsymbol{J}x) = \exp(\lambda x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(\boldsymbol{N}x)^k}{k!} = \exp(\lambda x)\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}\\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{s-2}}{(s-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

□

【Lemma 3.21】 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$ ，且 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}$ ，则

$$\exp(\boldsymbol{A}x) = P\begin{bmatrix} \exp(\boldsymbol{J}_1x) & & & \\ & \exp(\boldsymbol{J}_2x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\boldsymbol{J}_mx) \end{bmatrix}P^{-1}$$

Proof. 由矩阵指数函数的定义及性质，

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{A}x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^k = \boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{J}x)\boldsymbol{P}^{-1}\\ &= \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\exp(\boldsymbol{J}_1)x,\cdots,\exp(\boldsymbol{J}_m)x)\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

□

但这样的计算量还是非常巨大，下面介绍一种较为简单的办法. 我们需要对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值进行分类.

3.2.1 A 无重特征值

【theorem 3.22】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵指数函数

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{\xi}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{\xi}_n\right)$$

是方程组(3.1)的一个基本解矩阵，其中 $\boldsymbol{\xi}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_j 的特征向量.

【Remark 3.23】 事实上，我们可以放宽条件，只需要 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量线性无关.

Proof. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值各不相同，于是其Jordan标准型为对角阵，即 $\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则由命题 (3.19) 知方程组(3.1)的基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\exp(\boldsymbol{A}x)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{J}x)=\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{\xi}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{\xi}_n\right)$$

□

3.2.2 A 有重特征值

【Lemma 3.24】(根子空间分解) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_s$. 记 V 为 n 维线性空间，则

1. V 的子集
$$V_j=\{\boldsymbol{\xi}\in V\mid(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}_n)^{n_j}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}\},\quad j=1,2,\cdots,s$$
是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n_j 维不变子空间

2. V 有直和分解
$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

现在选取 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_n$ 的一个特征值 λ_j，并设其根子空间为 V_{λ_j} 由于

$$V=V_{\lambda_j}\bigoplus_{k\neq j}V_{\lambda_k}\quad 1\leqslant k\leqslant s$$

故可以选取 V 的一组基使得

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{L}\end{bmatrix}[\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2]^{-1}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{m_1}(\lambda_j)&&\\&\ddots&\\&&\boldsymbol{J}_{m_k}(\lambda_j)\end{bmatrix}$$

显然，我们有 $n_j=\sum_{r=1}^{k}m_r$，现设

$$\boldsymbol{P}_1=[\underbrace{\boldsymbol{\xi}_{1,m_1-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{1,0}}_{m_1},\cdots,\underbrace{\boldsymbol{\xi}_{k,m_k-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k,0}}_{m_k}]$$

$\boldsymbol{P}_1$ 的列向量是 λ_j 对应的广义特征向量，对第 r 个 Jordan 块，有

$$\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{\xi}_{r,m_r-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r,0}\right]=\left[\boldsymbol{\xi}_{r,m_r-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r,0}\right]\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j\end{bmatrix}$$

考虑基解矩阵

$$\exp(\boldsymbol{A}x)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\exp\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{L}\end{bmatrix}x\right)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\exp(\boldsymbol{K}x) & \\ & \exp(\boldsymbol{L}x)\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{P}_1\exp(\boldsymbol{K}x),\boldsymbol{P}_2\exp(\boldsymbol{L}x)\right]$$

由example(3.20)知 $\boldsymbol{P}_1\exp(\boldsymbol{K}x)$ 的第 r 个循环子空间对应部分为

$$\left[\boldsymbol{\xi}_{r,m_r-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r,0}\right]\exp(\boldsymbol{J}_{m_r}(\lambda_j))=\exp(\lambda_j x)\left[\boldsymbol{\xi}_{r,m_r-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r,0}\right]\begin{bmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m_r-1}}{(m_r-1)!}\\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{m_r-2}}{(m_r-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$=\exp(\lambda_j x)\left[\boldsymbol{\xi}_{r,m_r-1},\cdots,\sum_{i=0}^{m_r-2}\boldsymbol{\xi}_{r,i+1}x^i,\sum_{i=0}^{m_r-1}\boldsymbol{\xi}_{r,i}x^i\right]$$

【Lemma 3.25】 设 λ_j 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n_j 重特征值，则方程组(3.1)有形如

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{\lambda_j x}\left[\boldsymbol{\xi}_0+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\boldsymbol{\xi}_{n_j-1}\right]$$

的非零解的充要条件是，ξ_0 为齐次线性方程组

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}_n\right)^{n_j}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$$

的一个非零解，其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n_j-1}$ 由下式给出：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1=\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}_n\right)\boldsymbol{\xi}_0\\ \boldsymbol{\xi}_2=\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}_n\right)^2\boldsymbol{\xi}_0\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\xi}_{n_j-1}=\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E}_n\right)^{n_j-1}\boldsymbol{\xi}_0\end{cases}$$

练习

此处题目多为三阶矩阵，我们重新归纳 $n=3$ 的情形. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，那么其 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

2. 若其不可对角化，那么必然存在一个特征值，使得其几何重数小于代数重数.

   (a) 若有一个二重特征值 λ ，另一个特征值为 μ . 且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n:\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 1 ，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix}$$

   (b) 若有三重特征值 λ ，且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n:\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 1 ，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$$

   (c) 若有三重特征值 λ ，且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n:\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 2 ，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$$

将重心放在不可对角化的情况上.

分析. 不妨设其 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \mu\end{pmatrix}$$

这是一个分块对角矩阵，对于 $\boldsymbol{J}_1$. 注意到

$$\boldsymbol{J}_1=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

是一个幂零矩阵，即

$$H^2=O$$

从而

$$\begin{aligned}\exp\left(\boldsymbol{J}_1 t\right)&=\exp(\lambda\boldsymbol{I}t+\boldsymbol{H}t)=\exp(\lambda\boldsymbol{I}t)\cdot\exp(\boldsymbol{H}t)=e^{\lambda t}\cdot\exp(\boldsymbol{H})\\&=e^{\lambda t}\cdot\left(I+t\boldsymbol{H}+\frac{1}{2!}(t\boldsymbol{H})^2+\cdots\right)=e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix}1&t\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\exp(\boldsymbol{J}\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\exp\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{t}_1\right)&\\&e^{\mu t}\end{pmatrix}\Longrightarrow\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{P}^{-1}\exp(\boldsymbol{J}t)\boldsymbol{P}$$

□

§3.3 高阶线性微分方程

3.3.1 一般理论

【Definition 3.26】 形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

被称为高阶线性微分方程，进一步

1. $f(x)\not\equiv 0:\Longleftrightarrow$ 非齐次高阶线性微分方程
2. $f(x)\equiv 0:\Longleftrightarrow$ 齐次高阶线性微分方程

【Remark 3.27】 引入向量 $\boldsymbol{y}=\left(y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}$，则原方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)\tag{3.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&-a_{n-2}(x)&\cdots&-a_1(x)\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{f}(x)=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\f(x)\end{bmatrix}$$

【theorem 3.28】 方程(3.2)满足初始条件

$$y\left(x_0\right)=y_0,y'\left(x_0\right)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}$$

的解 $y=y(x)$ 在区间 (a,b) 上存在且唯一.

【Definition 3.29】 设 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的解，则矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{bmatrix}\phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x)\\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}$$

是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$$

的解矩阵. 记 $W(x)=\det\boldsymbol{\Phi}(x)$，称 $W(x)$ 是函数组 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 的Wronsky 行列式.

【Lemma 3.30】 假设 $y=\phi_1(x), y=\phi_2(x), \cdots, y=\phi_n(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的 n 个解，则对于 $x, x_0\in(a,b)$，有

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}a_1(s)\mathrm{d}s\right)$$

从而这 n 个解线性无关的充要条件是 $W(x_0)\neq 0$.

【Proposition 3.31】 设 $y=\phi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的一个解，其中 $p(x), q(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，又假设 $\phi(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$. 则，该方程的通解为

$$y=c_1\phi(x)+c_2\phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

Proof. 设 $\psi(x)$ 是与 $\phi(x)$ 线性无关的解. 由 Liouville 引理知

$$\psi'(x)\phi(x)-\psi(x)\phi'(x)=\left(\psi'(x_0)\phi(x_0)-\psi(x_0)\phi'(x_0)\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)$$

选择初值 $\psi(x_0), \psi'(x_0)$，使得

$$\psi'(x_0)\phi(x_0)-\psi(x_0)\phi'(x_0)=1$$

则 $\psi(x)$ 与 $\phi(x)$ 线性无关. 此时

$$\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right)'=\frac{1}{\phi^2(x)}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)$$

积分后得到

$$\psi(x)=\frac{\psi\left(x_0\right)}{\phi\left(x_0\right)}\phi(x)+\phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

由此可以得到该方程的通解为

$$y=c_1\phi(x)+c_2\phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

【theorem 3.32】 设 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)$ 是方程(3.2)对应的齐次方程 在区间 (a,b) 上的一个基本解组，则方程(3.2)的通解为

$$y=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\cdots+c_n\phi_n(x)+\phi^*(x)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数，而

$$\phi^*(x)=\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_j(s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s$$

是方程(3.2)的一个特解. $W(x)$ 是 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)$ 的 Wronsky 行列式.$W_j(x)$ 是 $W(x)$ 中第 n 行第 j 列元素的代数余子式.

Proof.1. 直接利用线性微分方程组的理论得到方程(3.2)的通解为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right)$$

设 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 的伴随矩阵是 $\boldsymbol{\Phi}^*(s)$, 则 $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{\Phi}^*(s)=W(s)\boldsymbol{I}$, 代入得

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s=\int_{x_0}^{x}\frac{\boldsymbol{\Phi}(x)}{W(s)}\begin{pmatrix}* & * & \cdots & W_1(s)\\ * & * & \cdots & W_2(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & * & \cdots & W_n(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s&=\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)}{W(s)}\begin{pmatrix}\phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x)\\ * & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & * & \cdots & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_1(s)\\ W_2(s)\\ \vdots\\ W_n(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\&=\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_j(s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s,\star,\cdots,\star\right)\end{aligned}$$

第一个分量即为所求. □

3.3.2 常系数高阶方程

【Definition 3.33】 形如

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{3.3}$$

被称为常系数高阶线性齐次微分方程

【Definition 3.34】(特征方程) 记

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

称其为方程(3.3)的特征多项式，并称 $p(\lambda)=0$ 为其特征方程.

【Definition 3.35】(微分算子) 引入

$$L_n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_n$$

即对于 (a,b) 上的光滑函数 $g(x)$ ，有

$$L_n(g)=g^{(n)}(x)+a_1g^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}g'(x)+a_ng(x).$$

【Lemma 3.36】 函数 $\exp(\lambda x)$ 是方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

的非零解的充要条件是

$$p(\lambda)=0$$

【theorem 3.37】 设特征多项式 $p(\lambda)$ 有 s 个不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ ，λ_s ，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ ，则方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

有 n 个线性无关解

$$x^{k_j}\exp(\lambda_jx)\quad 0\leqslant k_j\leqslant n_j-1;\quad 1\leqslant j\leqslant s$$

非齐次只需待定系数求解即可.

【Definition 3.38】(Euler 方程) Euler 方程形如

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,\quad x>0$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 都是常数.

只需要引入微分算子

$$D_n=x^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_n$$

即可求解.

【Example 3.39】(2025YCMC) Find the solution $R(r)(r \geqslant 1)$ of the differential equation

$$r^3R'''(r) + 2r^2R''(r) - rR'(r) + R(r) = 2025, r > 1$$

satisfying the conditions

$$R(1) = 2025, R'(1) = 0, R''(1) = 1$$

Solution. 令 $r = \exp(t)$ 并用 D 代表 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 得到

$$D(D-1)(D-2)R + 2D(D-1)R - DR + R = 2025 \implies \left(D^3 - D^2 - D + 1\right)R = 2025$$

即特征方程 $k_{1,2} = 1, k_3 = -1$ 即齐次解为 $R_h(r) = C_1r + C_2r\log r + \dfrac{C_3}{r}$ 代入初值得到

$$R(r) = \frac{1}{2}r\log r - \frac{1}{4}r + \frac{1}{4r} + 2025$$

□