

Движение тела по «мертвой петле»

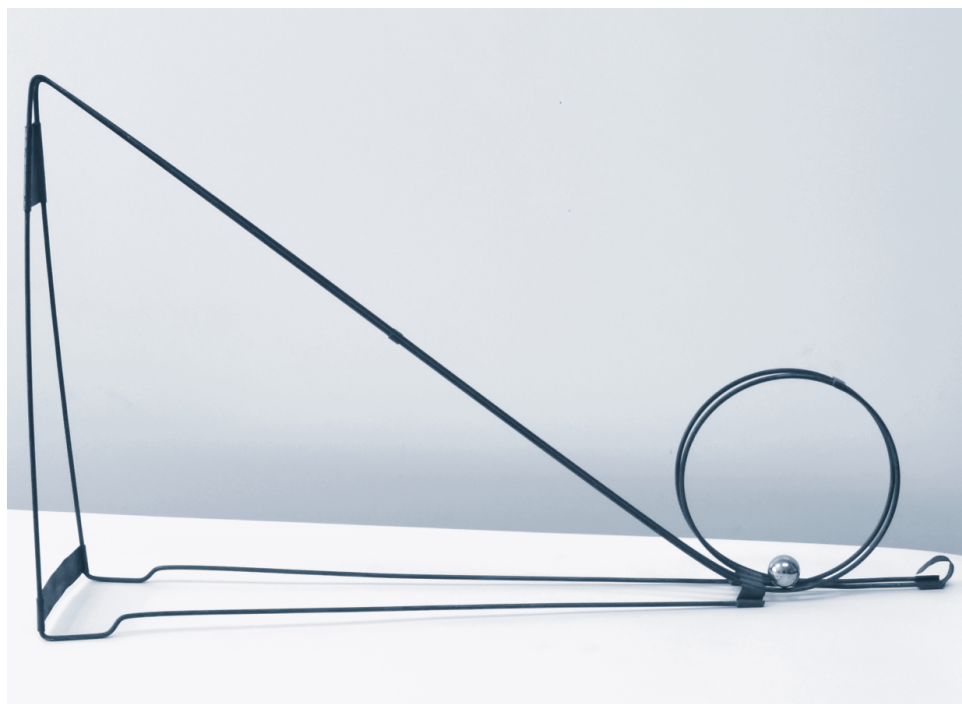


Рис. 1: Демонстрация взаимосвязи кинетической и потенциальной энергии

Оборудование:

1. Лабораторная модель «мертвой петли» (радиус кривизны 8 см).
2. Стальной шарик диаметром 2 см.

Основные определения:

Нестерова петля («мертвая петля») — фигура высшего пилотажа, представляющая собой замкнутую кривую в вертикальной плоскости. Названа по имени П. Н. Нестерова, впервые в мире выполнившего ее 27 августа 1913 г.

Для того, чтобы материальная точка совершала движение по окружности с центростремительным ускорением $a = v^2/r$, необходимо, чтобы на тело действовала внешняя сила. В представленной демонстрации роль внешней силы играет сила реакции опоры. В соответствии с 3 законом Ньютона на направляющие, вдоль которых движется тело, действует равная по модулю сила давления (сила веса).

В устаревшей литературе можно встретить такие определения: сила, с которой движущаяся материальная точка действует на опору (вес) - это центробежная сила, а сила, с которой опора давит на точку - это центростремительная сила (реакции опоры). Центробежная сила и центростремительная сила численно равны друг другу и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, но приложены к разным телам — как силы действия и противодействия. Определенные таким образом силы, считаются устаревшими понятиями и в современной литературе не используются. Согласно современным представлениям центробежная сила инерции действует в неинерциальной системе отсчета на движущееся тело, а термин "центростремительная сила" не используется вовсе.

Кинетическая энергия — энергия механической системы, зависящая от скоростей движения ее точек. Кинетическая энергия E_k материальной точки измеряется половиной произведения массы m этой точки на квадрат ее скорости v , т. е.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы равна арифметической сумме кинетических энергий всех ее точек:

$$E_k = 1/2 \sum m_i v_i^2.$$

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из положения 1 в положение 2 происходит под действием приложенных к системе внешних и внутренних сил и равно сумме работ $A_{\text{внеш}}$ и $A_{\text{внутр}}$ этих сил на данном перемещении:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

Это равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии, с помощью которой решаются многие задачи динамики.

Краткое описание:

Прибор «мертвая петля» позволяет демонстрировать ряд опытов по динамике движения материальной точки по окружности. Эти опыты дают возможность выяснить соотношение сил (силы тяжести и реакции рельсов), действующих на катящийся по рельсам шарик и определить, при каких условиях шарик без отрыва преодолевает мертвую петлю.

На приборе сначала демонстрируется три основных опыта: 1) с наивысшей точки 1 (рис. 2) наклонных рельсов, когда шарик устойчиво описывает петлю и с некоторой скоростью вылетает с другого конца желоба; 2) с наименьшей высоты 2 наклонной плоскости, когда шарик только описывает петлю, не срываясь с верхней точки, и 3) с еще меньшей высоты 3, когда шарик, не доходя до вершины петли, отрывается от направляющих и движется внутри петли по параболической траектории.

Теория:

Рассмотрим этот опыт, не учитывая диссипативные силы (трение шарика о направляющие), и найдем начальное положение (высота h), достаточное для того, чтобы тело преодолело «мертвую петлю».

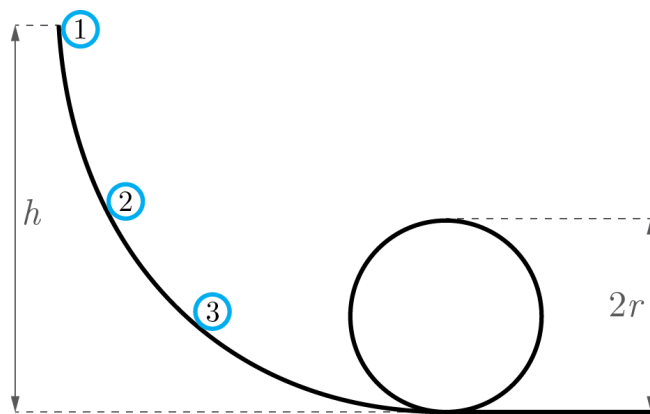


Рис. 2: Схематичное изображение направляющих, по которым движется точка. Начальные положения тела отмечены точками 1, 2 и 3

Шар в начальный момент времени обладает только потенциальной энергией:

$$E_{\text{п}} = mgh, \quad (1)$$

где m — масса шарика, а h — начальная высота спуска.

Рассмотрим момент, когда шарик оказывается в верхней точке петли. Будем считать, что скорость тела минимально возможная, тогда сила реакции опоры обращается в ноль. В этот момент тело обладает центростремительным ускорением, равным ускорению свободного падения $a_z = g$, поскольку именно сила тяжести сообщает телу центростремительное ускорение. Учитывая эту связь имеем:

$$a_z = \frac{v_2^2}{r} = g, \quad (2)$$

где v_2 — скорость шара в верхней точке петли.

Закон сохранения энергии примет вид:

$$E_{к2} + E_{п2} = E_{п}, \quad (3)$$

можно записать в следующем виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + 2mgr = mgh. \quad (4)$$

Необходимо сделать важное замечание о том, что при скатывании шара конечных размеров (нематериальная точка) нужно учитывать его момент инерции $I = 2mR^2/5$, где R — радиус шара. В этом случае в законе сохранения энергии следует добавить слагаемое

$$E_{в} = I\omega^2/2,$$

и тем самым учесть кинетическую энергию вращательного движения тела при скатывании вдоль направляющих. Однако дальнейшие выкладки приводятся в приближении материальной точки.

Из уравнения (4) после несложных преобразований получим:

$$v_2^2 + 4gr = 2gh. \quad (5)$$

Если из выражения (2) выразить v_2^2 и подставить это соотношение в уравнение (5), то получим:

$$h = \frac{5gr}{2g} = 2.5r. \quad (6)$$

Таким образом, если высота $h > 2.5r$, то тело способно преодолеть петлю, однако при условии $h < 2.5r$ скорости тела окажется недостаточно для полного оборота.

В реальности же равенство $h = 2.5r$ не выполняется, так как в системе неизбежно появление сил сопротивления. Из-за трения шарика о металлические рельсы условие прохождения петли примет вид $h \geq 2.5r$.