

## Скатывание двух цилиндров

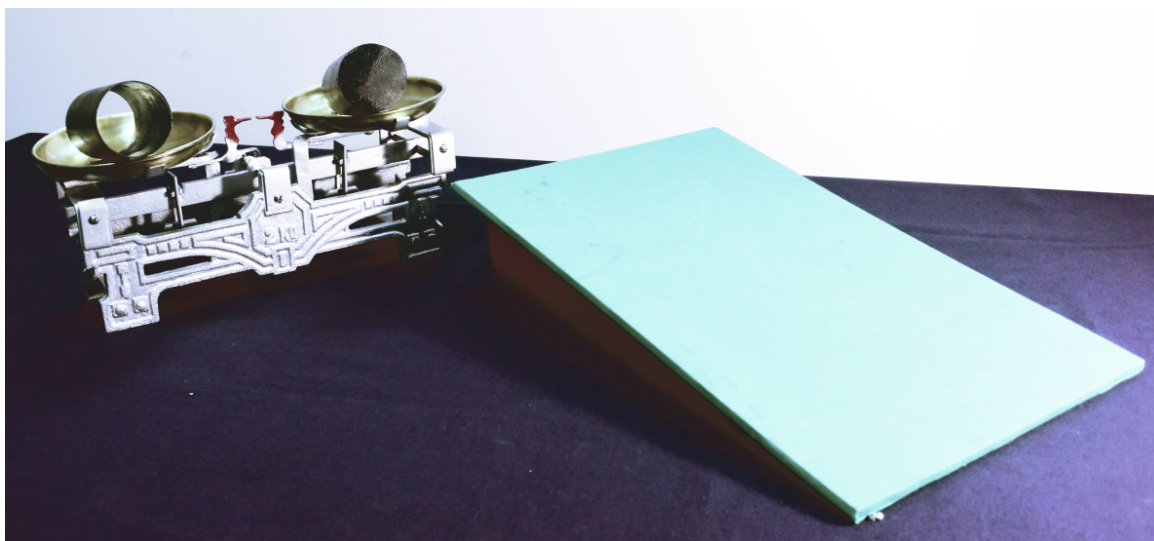


Рис. 1: Демонстрация зависимости инертных свойств тел от распределения массы в этих телах на примере скатывания сплошного и полого цилиндров равной массы и одинакового размера с наклонной плоскости

### Оборудование:

1. Два цилиндра одинаковой массы
2. Весы.
3. Наклонная плоскость.
4. Линейка или указка.

### Краткое описание:

На наклонную плоскость кладут два цилиндра одинаковой массы и радиуса. Цилиндры располагают так, чтобы их оси были находились одна на продолжении другой и удерживают в равновесии.

После отпускания цилиндров они скатываются одновременно с наклонной плоскости, при этом один обгоняет другой. Оказывается, что цилиндр, масса которого сосредоточена ближе к центру, движется с большим ускорением. Это объясняется тем, что его момент инерции оказывается меньше, чем у полого цилиндра, вся масса которого находится на значительном расстоянии от оси вращения.

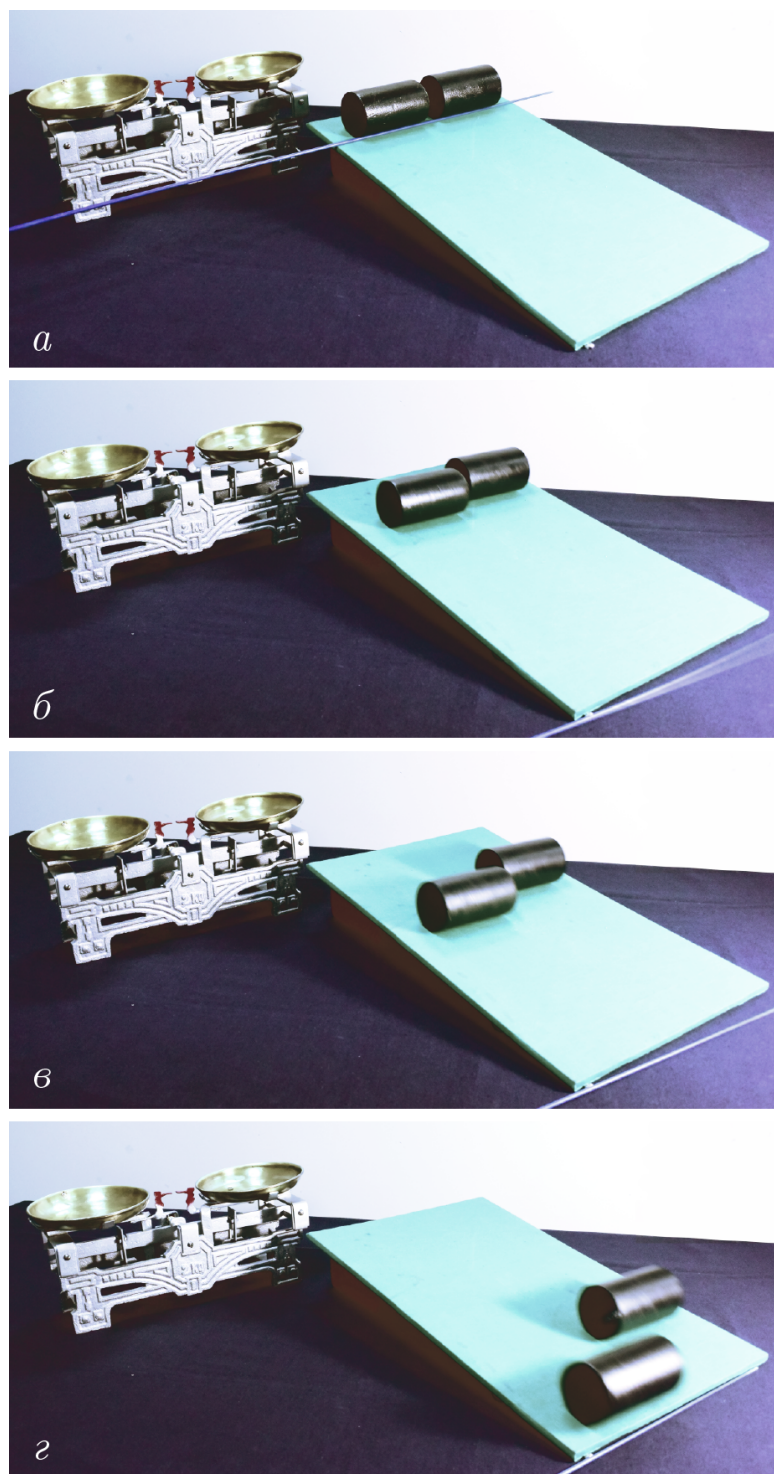


Рис. 2: При одновременном отпускании цилиндров быстрее будет скатываться тот, чей момент инерции окажется меньше. При одинаковых размерах и массе моменты инерции двух цилиндров (сплошной и полый) будут отличаться вдвое

Опыт позволяет наглядно продемонстрировать, что чем больше момент инерции, тем медленнее изменяется линейная скорость тел при одинаковом размере и равной массе.

## Теория:

При описании движения цилиндрического тела с наклонной плоскости воспользуемся уравнением движения центра масс, а также основным законом динамики вращательного движения.

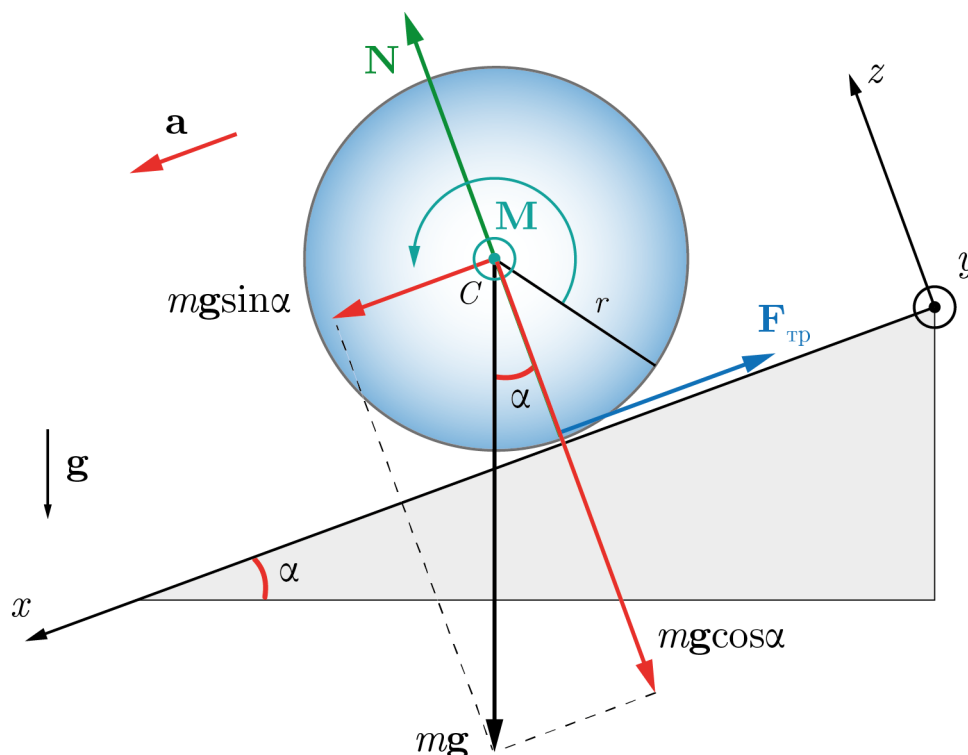


Рис. 3: Схематичное изображение сил, действующих на цилиндр при его движении с наклонной плоскости. Сила трения создает вращательный момент, поэтому скатывающийся ускоренно цилиндр начинает закручиваться. Согласно основному закону динамики вращательного движения угловое ускорение точек цилиндра, а следовательно, и линейное ускорение его центра масс, оказывается тем больше, чем меньше его момент инерции

В векторной форме уравнение поступательного движения центра масс цилиндра запишется следующим образом:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = m\mathbf{a}. \quad (1)$$

В выбранной системе координат после проектирования всех векторов можно записать уравнение движения в скалярном виде. В проекции на ось  $x$  это уравнение примет вид:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma, \quad (2)$$

в проекции на ось  $z$ :

$$N - mg \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Составим основное уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра. Моменты силы тяжести  $m\mathbf{g}$  и реакции опоры  $\mathbf{N}$  относительно этой оси равны нулю. Угловое ускорение  $\varepsilon$  определяется только моментом силы трения  $F_{\text{тр}}$  и моментом инерции  $I$ :

$$I\varepsilon = \mathbf{M} \quad (4)$$

где  $I$  — момент инерции цилиндра относительно оси вращения,  $\mathbf{M} = \mathbf{F}_{\text{тр}} \times \mathbf{r}$  — момент силы трения, определяемый через векторное произведение силы трения на радиус-вектор.

В проекции на ось  $y$  уравнение вращательного движения (4) примет вид:

$$I\varepsilon = F_{\text{тр}}r. \quad (5)$$

Пользуясь известным соотношением между линейным и угловым ускорениями при движении без проскальзывания  $a = r\varepsilon$ , выразим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{Ia}{r^2}. \quad (6)$$

Подставляя найденную силу трения в уравнение движения (2), получим:

$$mg \sin \alpha - \frac{Ia}{r^2} = ma. \quad (7)$$

Отсюда можно выразить линейное ускорение  $a$  центра масс скатывающегося цилиндра

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{I/r^2 + m} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mr^2}. \quad (8)$$

Из полученного выражения следует, что изменение скорости твердого тела при движении по наклонной плоскости зависит от его момента инерции. Увеличение момента инерции твердого тела приводит к уменьшению ускорения центра масс тела. Таким образом, сплошной цилиндр, обладающий меньшим моментом инерции (вся его масса распределена вблизи оси вращения и момент инерции равен  $I_1 = mr^2/2$ ), скатывается быстрее, по сравнению с тонкостенным полым цилиндром, у которого масса в основном находится на периферии ( $I_2 = mr^2$ ).