

Оглавление

1	Поступательное и вращательное движение	3
1.1	Сложение угловых скоростей	3
1.2	Сложение движений	6
1.3	Выдёргивание листа бумаги из-под стакана	9
1.4	Импульс силы. Гиря и две нити	11
1.5	Движение тела по «мёртвой петле»	14
1.6	Второй закон Ньютона. Две тележки	17
1.7	Третий закон Ньютона на примере силы Архимеда	20
2	Динамика твердого тела	23
2.1	Отыскание центра масс	23
2.2	Двойной конус	25
2.3	Гирискоскоп на вращающейся платформе	27
2.4	Прецессия гироскопа. Волчок	30
2.5	Крестообразный маятник Обербека	33
2.6	Свободные оси вращения	37
2.7	«Послушная» и «непослушная» катушка	41
2.8	Скамья Жуковского	44
3	Закон сохранения и превращения энергии	48
3.1	Упругий и неупругий удары	48
3.2	Маятник Максвелла	53
3.3	Потенциальный барьер	57
3.4	Скатывание двух цилиндров	60
3.5	Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратный переход	63
4	Силы инерции, тяготения, трения, упругости	66
4.1	Сила Кориолиса	66
4.2	Маятник Фуко	69
4.3	Сухое и жидкое трение	73
4.4	Силы сухого трения	75
4.5	Закон Гука	78
4.6	Отвесы на вращающейся платформе	81
4.7	Параболическая поверхность вращающейся жидкости	85

ЛЕКЦИОННЫЕ ДЕМОНСТРАЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Часть I
ОБЩАЯ МЕХАНИКА

Пермь
2019

1 | Поступательное и вращательное движение

1.1. Сложение угловых скоростей

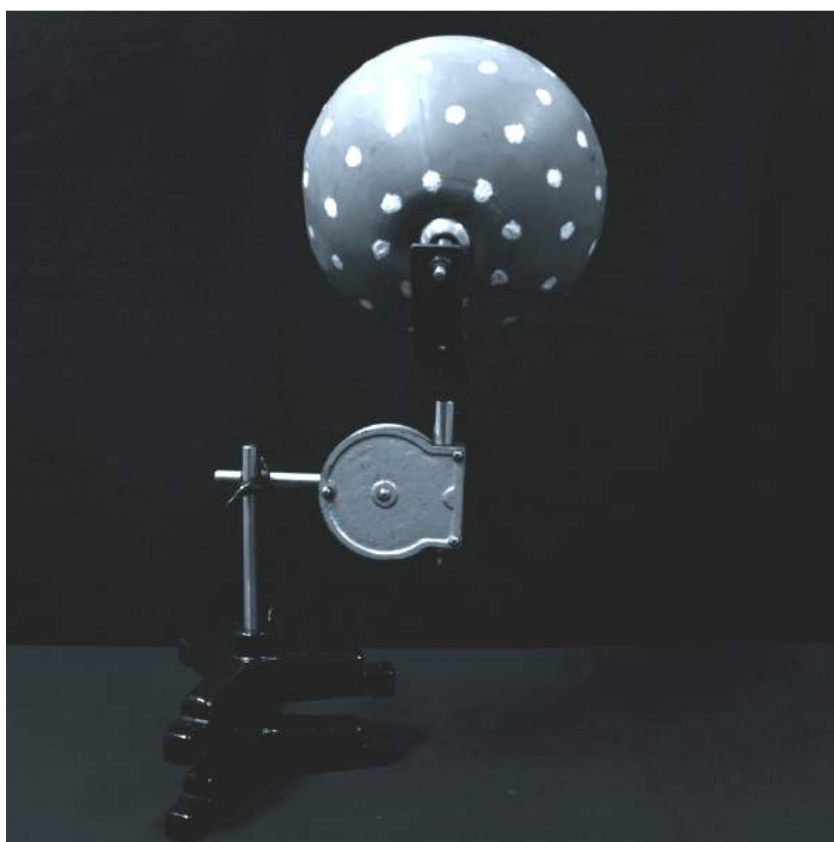


Рис. 1.1: Демонстрация сложения угловых скоростей на центробежной машине

Оборудование

1. Шар диаметром 35 см, покрытый по линиям широт рядами пятен белого цвета диаметром 1 см.
2. Вращающийся держатель.
3. Машина с червячным механизмом.

Основные определения

Угловая скорость — величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела. При равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси его угловая скорость численно равна приращению угла поворота φ за промежуток времени Δt

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t.$$

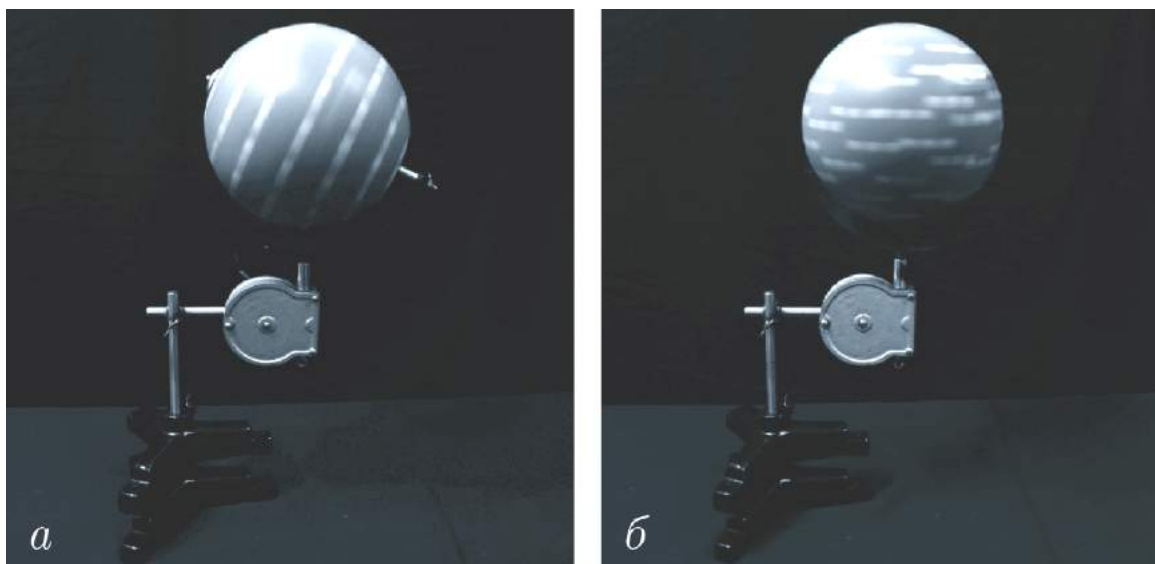


Рис. 1.2: а — вращение шара только вокруг наклонной (собственной) оси; б — вращение шара только вокруг вертикальной оси

В общем случае угловая скорость численно равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему элементарному промежутку времени dt , то есть

$$\omega = d\varphi/dt.$$

Таким образом,

вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ численно равен величине угловой скорости, лежит на оси вращения, и направление его связано с направлением вращения согласно правилу буравчика.

Поскольку угловая скорость — вектор, то приращение ее также вектор и, следовательно, вектором является угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Между векторами угловой и линейной скоростей для каждой материально точки твердого тела существует связь.

Вектор линейной скорости точки при вращательном движении равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор точки

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Краткое описание

Шар закрепляется в специальном держателе, в котором он может вращаться вокруг наклонной оси, а вместе с держателем — вокруг вертикальной оси при помощи червячной машины. Таким образом вращать шар можно либо вокруг наклонной оси, либо вокруг вертикальной оси, либо вокруг обеих осей одновременно.

При быстром вращении шара вокруг наклонной оси пятна на его поверхности сливаются и образуют параллельные ряды (рис.1.2,а), перпендикулярные к оси вращения. Направление оси вращения шара совпадает с направлением угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}_1$.

При вращении шара только вокруг вертикальной оси пятна сливаются в линии (рис.1.2,б), которые лежат в горизонтальных плоскостях, перпендикулярных оси вращения держателя, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}_2$.

В ходе эксперимента обнаруживаем, что при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя светлые пятна на его поверхности перемещаются таким образом, будто вращаются вокруг новой движущейся оси - мгновенной оси вращения твердого тела.

Теория

Когда материальная точка участвует в нескольких независимых движениях, то для перемещений, скоростей и ускорений справедливы правила векторного сложения, при этом результирующее перемещение равно векторной сумме отдельных независимых перемещений.

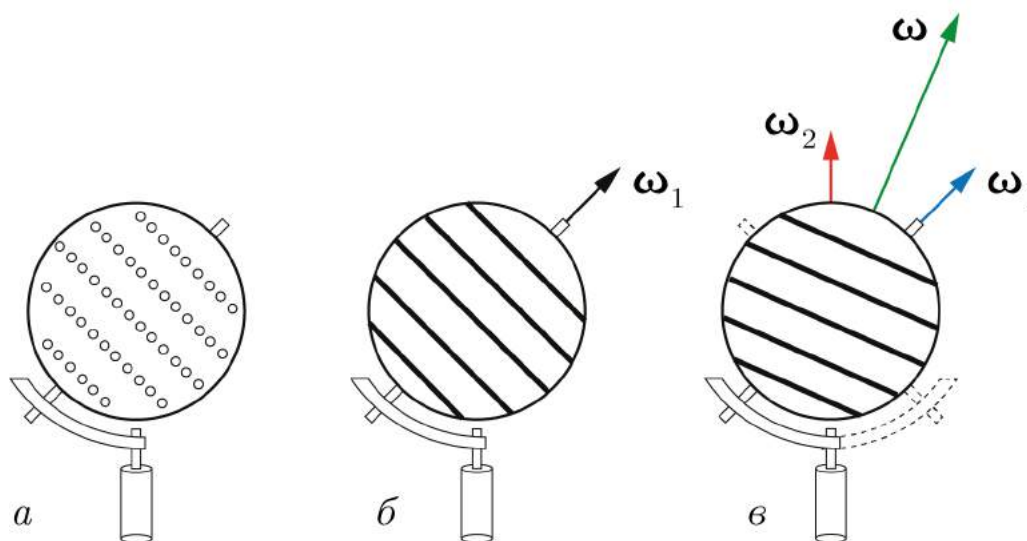


Рис. 1.3: а — схематичное изображение шара на вращающемся стержне (без вращения); б — вектор угловой скорости при вращении шара только вокруг собственной (наклонной) оси; в — сложение угловых скоростей при одновременном вращении шара вокруг собственной и вертикальной осей

В классической механике закон сложения скоростей Галилея позволяет определить результирующую скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета, которая движется во вращающейся системе отсчета. Для точки на поверхности шара, движущейся одновременно вокруг вертикальной оси со скоростью \mathbf{v}_1 и наклонной оси со скоростью \mathbf{v}_2 , результирующую линейную скорость \mathbf{v} можно представить в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \quad (1.1)$$

Используя известную связь между линейной и угловой скоростями, можно получить следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

где через \mathbf{r} обозначен радиус-вектор, направленный из центра шара в рассматриваемую точку на его поверхности.

Следовательно, при одновременном вращении шара и держателя, результирующая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ также будет представлять собой векторную сумму $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, и иметь направление, показанное на рис.1.3,в. Это направление легко определить опытным путем так как кружки, расположенные вблизи мгновенной оси (вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$), не сливаются в линии.

Таким образом, при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя вектор результирующей угловой скорости, а, следовательно, и мгновенная ось вращения также поворачиваются вокруг вертикальной оси держателя. Величина угловой скорости вращения шара относительно мгновенной оси вращения равна векторной сумме угловой скорости вращения шара вокруг своей оси и угловой скорости поворота оси шара $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

1.2. Сложение движений

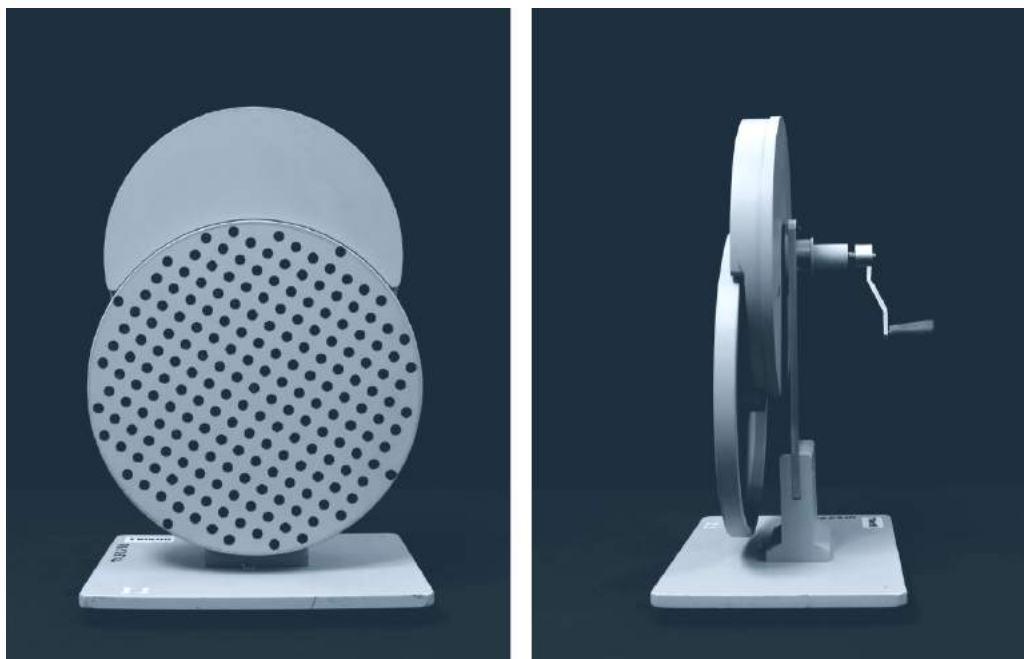


Рис. 1.4: Демонстрация сложения параллельных вращений

Оборудование

1. Диск диаметром 26 см, поверхность которого покрыта темными кружками диаметром 1 см.
2. Подставка с механизмом, приводящим диск во вращение как вокруг его собственной горизонтальной оси, так и в вертикальной плоскости его движения.

Основные определения

Вообще говоря, при движении твердого тела разные точки движутся по различным траекториям с различными скоростями. Но оказывается, что всегда можно произвольное движение твердого тела представить как сумму независимых движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся по концентрическим окружностям, а все центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Краткое описание

Закрепленный на подставке диск обладает горизонтальной осью вращения, проходящей через его центр. При этом вращательный механизм способен приводить в движение по окружности и саму ось.

Раскрутив изначально неподвижный диск вокруг собственной оси, можно наблюдать вращение темных кружков. Удаленные от центра пятна при быстром вращении начнут сливаться в линии, а кружок в центре диска, лежащий на оси вращения, останется неподвижным (рис.1.5).

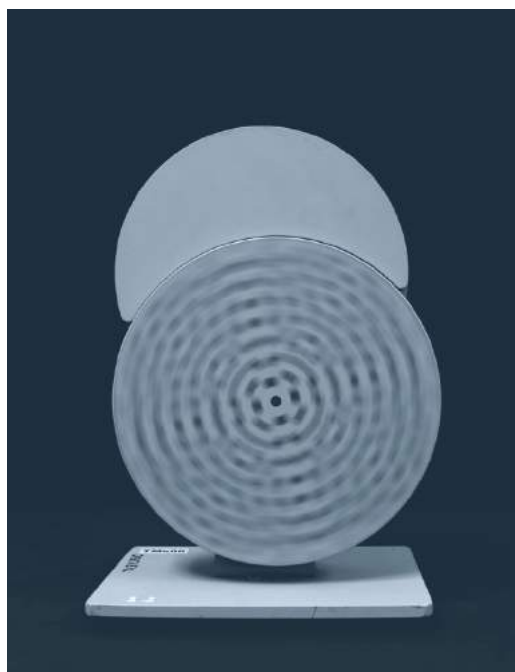


Рис. 1.5: Вращение диска вокруг собственной оси, проходящей через его центр

Если при вращении диска его центральная ось начнет двигаться по окружности в вертикальной плоскости, параллельной диску (рис.1.6), то результирующее движение можно описать как вращение вокруг мгновенной оси, которая совершает круговое движение. В каждый момент времени мгновенная ось вращения твердого тела оказывается в новом положении, которое можно обнаружить по положению кружка, кажущегося неподвижным. Этот неразмытый кружок не совпадает с центром диска, а перемещается по окружности в вертикальной плоскости.

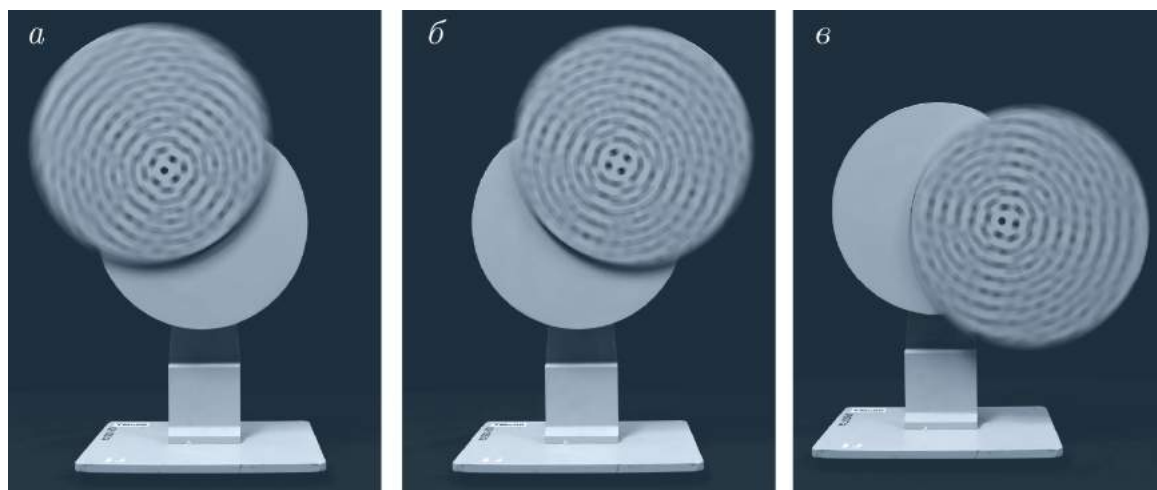


Рис. 1.6: Четкое пятно находится не в центре, что связано с появлением новой — мгновенной оси вращения. Вращение диска вокруг мгновенной оси возникает в результате наложения движения диска вокруг собственной оси и перемещении оси вращения по окружности

Теория

Пусть диск вращается против хода часовой стрелки. Обозначим угловую скорость его вращения через ω_1 (рис.1.7,б).

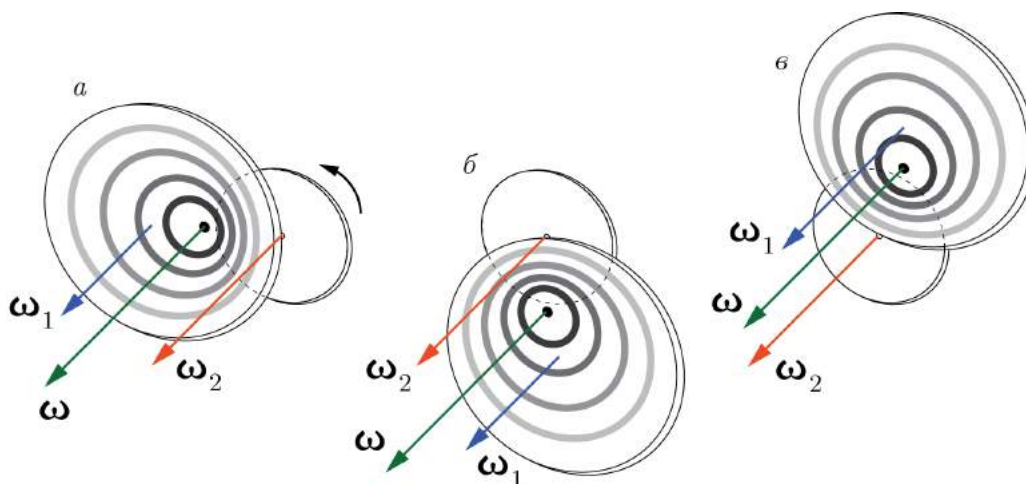


Рис. 1.8: Вектор результирующей угловой скорости ω направлен вдоль мгновенной оси вращения, проходящей через точку на прямой, соединяющей центры диска и вала

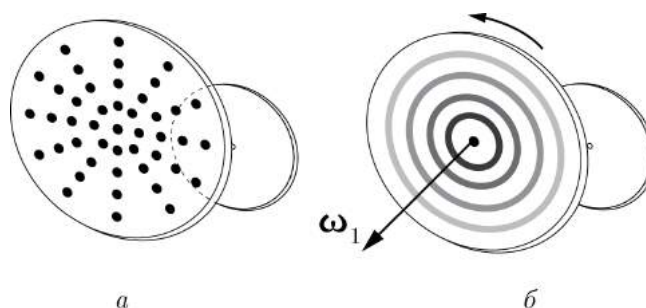


Рис. 1.7: а — схематичное изображение неподвижного диска на штативе; б — направление вектора угловой скорости диска при его вращении против хода часовой стрелки

Так как ось диска жестко связана с валом на штативе, то при вращении вала (рис.1.8а) с угловой скоростью ω_2 , результирующая угловая скорость вращения диска ω равна векторной сумме скоростей диска и вала: $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 направлены в одну сторону (как показано на рис.1.9), то мгновенная ось вращения будет лежать на отрезке, соединяющем центры диска и вала. В противном случае, мгновенная ось вращения будет лежать за пределами этого отрезка. Положение мгновенной оси вращения можно определить через соотношение угловых скоростей:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

где через l_1 и l_2 обозначены расстояния от центра диска и вала до мгновенной оси (неразмытого пятна).

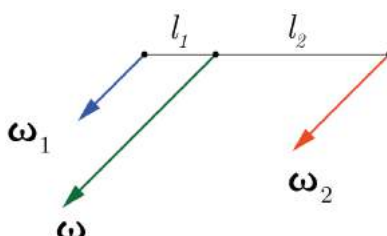


Рис. 1.9: Векторы угловых скоростей диска и вала складываются, а направление результирующего вектора угловой скорости ω совпадает с мгновенной осью вращения

Таким образом, по положению резкого пятна на вращающемся диске (рис.1.6) можно судить о соотношении угловых скоростей вращающихся тел. Чем больше собственная угловая скорость вращения диска по сравнению со скоростью вращения вала, тем ближе мгновенная ось вращения расположена к оси диска.

1.3. Выдёргивание листа бумаги из-под стакана

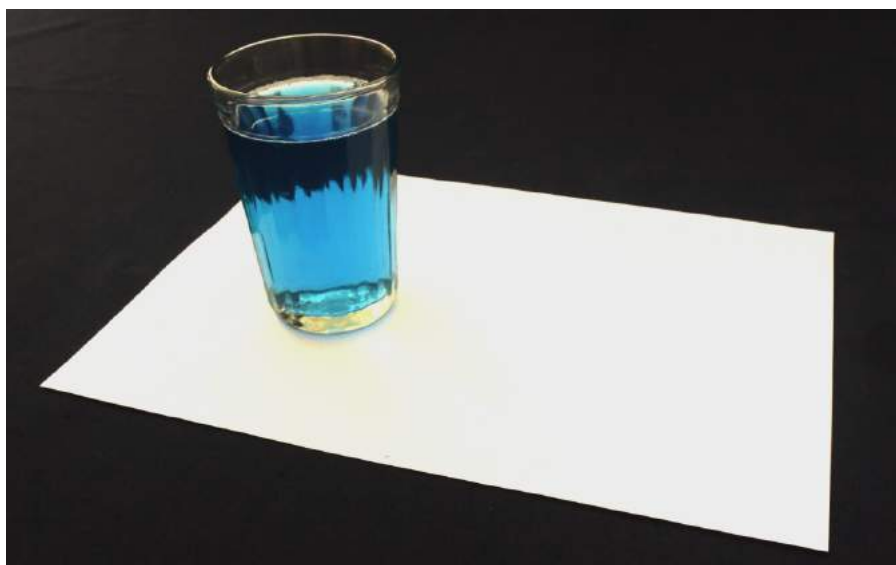


Рис. 1.10: Демонстрация явления инертности

Оборудование

1. Лабораторный стол с гладкой поверхностью.
2. Стакан с водой.
3. Лист бумаги.

Основные понятия

Инерция, инертность (в механике) — свойство материальных тел, «сопротивляться» воздействию силы. Многочисленные опыты позволили Г. Галилею (1564–1642) впервые сформулировать свой знаменитый закон инерции:

тела, свободные от внешних воздействий (сил), сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли

Впоследствии английский физик И. Ньютон (1643–1727) включил этот закон в число общих законов движения, поэтому закон инерции часто называют первым законом Ньютона. Все системы отсчета, для которых выполняется первый закон Ньютона, получили название инерциальных систем.

Когда внешние воздействия на тело (силы) отсутствуют или взаимно уравновешиваются, инертность проявляется в том, что тело сохраняет неизменным состояние своего движения или покоя по отношению к инерциальной системе отсчета. Если же на тело действует неуравновешенная система сил, то свойство инертности сказывается в том, что изменение состояния покоя или движения тела, т. е. изменение скоростей его точек, происходит постепенно, а не мгновенно; при этом движение изменяется тем медленнее, чем больше инертность тела. Величина, количественно определяющая инертные свойства тела, называется массой тела.

Краткое описание демонстрации

Для демонстрации инертности тел стакан с водой располагают на ровной горизонтальной поверхности. Под стаканом помещают обычный лист бумаги. Если начать тянуть лист с такой силой, чтобы он не проскальзывал относительно стакана, то стакан станет двигаться вместе с бумагой. В этом случае сила трения, приложенная к стакану со стороны бумаги, действует длительное время и сообщает ему необходимое количество движения (импульс), чтобы стакан перемещался вместе с бумагой.

Если же бумажный лист резко с большой силой выдернуть, то он выскользнет из-под стакана, а сам стакан останется стоять на месте. Теперь время действия силы трения на стакан мало, причем оно равно времени прохождения конца бумажного листа под дном стакана. За это время сила трения успевает сообщить стакану очень малый импульс, и стакан остается на месте.

Теория

Используя второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось x , имеем:

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = F_x, \quad (1.3)$$

где $p_x = mv_x$ — проекция импульса на ось x . Так как проекция скорости v_x является производной координаты x по времени, получается следующее:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (1.4)$$

При проскальзывании на стакан со стороны листа бумаги действует постоянная сила трения скольжения, равная $F_x = \mu mg$ (где через μ обозначен коэффициент трения между стаканом и листом). В этом случае стакан будет двигаться с постоянным ускорением $a = \mu g$ и за время выдергивания листа бумаги переместится на расстояние:

$$\Delta x = \mu g \Delta t^2 / 2. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) видно, что чем меньше время действия силы F на лист бумаги, тем меньше перемещение Δx стакана. Поэтому в пределе $t \rightarrow 0$ стакан остается неподвижным относительно поверхности стола.

1.4. Импульс силы. Гиря и две нити



Рис. 1.11: Демонстрация явления инерции

Оборудование

1. Физический штатив с муфтой и крючком.
2. Гиря с крючками, ввинченными в верхний и нижний торцы.
3. Несколько нитей одинаковой толщины и длины.
4. Резиновый коврик, используемый для амортизации удара.

Основные определения

Величина, количественно определяющая те действия тел друг на друга, которые вызывают ускорения, называется силой. С одной стороны, сила есть количественная мера действий тел друг на друга. С другой стороны, сила есть количественная мера тех действий, которые вызывают ускорения.

Конечная скорость движения тел определяется не только самой силой, но и временем действия этой силы.

Импульсом называется мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на скорость \mathbf{v} . Такая величина как импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — является векторной, направленной так же, как скорость точки. Импульс \mathbf{P} механической системы равен геометрической сумме импульсов всех ее точек, или произведению массы всей системы на скорость \mathbf{V}_c её центра масс:

$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{V}_c.$$

При действии силы \mathbf{F} импульс точки изменяется в общем случае и численно и по направлению; это изменение определяется вторым (основным) законом динамики. Изменение импульса системы происходит под действием только внешних сил, то есть сил, действующих на систему со стороны тел, в эту систему не входящих.

Импульс силы \mathbf{S} — это сложная физическая величина, которая одновременно учитывает влияние модуля, направления и времени действия силы на изменение состояния движения тела. Импульс силы $\mathbf{S} = \mathbf{F}\Delta t$ является вектором, по направлению совпадающим с направлением вектора силы \mathbf{F} . Импульс системы — величина векторная и направлен он в ту же сторону, что и вектор результирующей силы \mathbf{F}_p .

В новых понятиях второй закон Ньютона можно прочитать следующим образом:

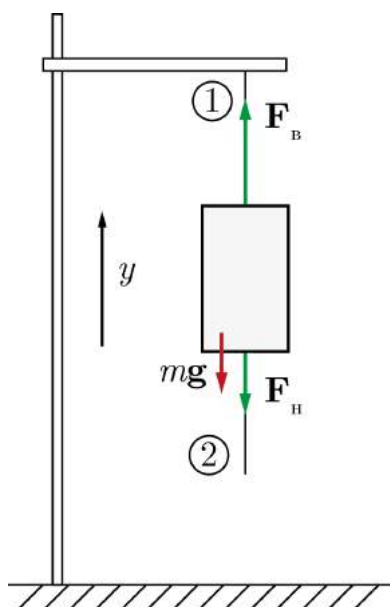


Рис. 1.12: Схематичное изображение подвешенного на нити груза

изменение импульса тела равно импульсу всех сил, действовавших на него:

$$\mathbf{F}\Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \text{ или } \mathbf{F}\Delta t = \Delta(m\mathbf{v}).$$

Именно в таком виде закон был впервые сформулирован самим И. Ньютоном.

Краткое описание демонстрации

К штативу, установленному на ровной поверхности, при помощи тонкой нити подвешивается тело (цилиндр массой 200 г). Прочность нитей подбирается так, чтобы верхняя нить могла только удерживать тело, не разрываясь. В нижнюю часть этого цилиндра ввинчивается крючок с привязанным к нему такой же нитью. Для амортизации удара на стол кладется резиновый коврик.

Если во время опыта нижнюю нить резко с большой силой дернуть, то она разорвется, а верхняя как бы не «почувствует» сильного рывка (точка 2 на рис.1.12). Причина кроется в том, что большая сила \mathbf{F} действует на груз в течение очень короткого времени Δt . Это время затрачивается только на создание деформации нижней нити во время рывка. Тело массой m получает незначительный импульс силы, поэтому не успевает набрать скорость и сдвинуться с места. По этой причине в верхней нити не возникают дополнительных деформации, и она остается целой.

Если нижнюю нить потянуть плавно с небольшой силой, то верхняя нить оборвется (точка 1 на рис.1.12) и груз упадет. Это объясняется тем, что действие небольшой силы \mathbf{F} за счет продолжительности взаимодействия, т.е. большого Δt , приводит к тому, что телу сообщается существенный импульс силы $\mathbf{F}\Delta t$. За рассматриваемый промежуток времени скорость, а, соответственно, импульс тела успевают измениться. Это приводит к небольшому смещению тела, из-за чего в верхней нити возникает дополнительная деформация. Благодаря тому, что в опыте используется тонкая нить, деформации быстро достигают предела прочности и верхняя нить обрывается.

Устройство и применение прибора. В конструкции штатива муфта обеспечивает устойчивое крепление деталей штатива или других приборов, параллельно или перпендикулярно вертикальной стойке штатива. Это условие в физическом штативе имеет существенное значение, т.к. приходится, например, закреплять в штативе блок на стержне, динамометры лабораторные и демонстрационные и другие приборы и приспособления.

Теория

В рассматриваемом эксперименте движение гири определяется следующим уравнением (второй закон Ньютона в векторной форме)

$$\mathbf{F}_н + \mathbf{F}_в + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{F}_н$, $\mathbf{F}_в$ — векторы сил натяжения нижней и верхней нитей соответственно, $m\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести, \mathbf{a} — ускорение груза.

При медленном натяжении имеет место «статическое» распределение сил (ускорение мало или $a \rightarrow 0$). В проекции на ось y уравнение [1.6] имеет вид:

$$-F_H + F_B - mg = 0, F_B > F_H, \quad (1.7)$$

то есть сила натяжения верхней нити превышает силу натяжения со стороны нижней нити на величину mg .

При резком натяжении нити ускорение движения груза будет направлено вниз, проекция уравнения [1.6] имеет вид:

$$F_B - F_H - mg = -ma, F_H = F_B - mg + ma, \quad (1.8)$$

откуда $F_H > F_B$, поэтому при значительном ускорении a (резкий рывок) в первую очередь обрывается нижняя нить.

Таким образом, разница в обрыве нижней или верхней нитей обусловливается присутствием в системе тела большой массы, подвешенного за верхнюю нить. В случае резкого рывка смещение гири в силу ее инертности оказывается малым, поэтому характерное время растяжения верхней нити значительно превышает время растяжения нижней. Поэтому для нижней нити разрывное натяжение «наступает» раньше.

1.5. Движение тела по «мёртвой петле»

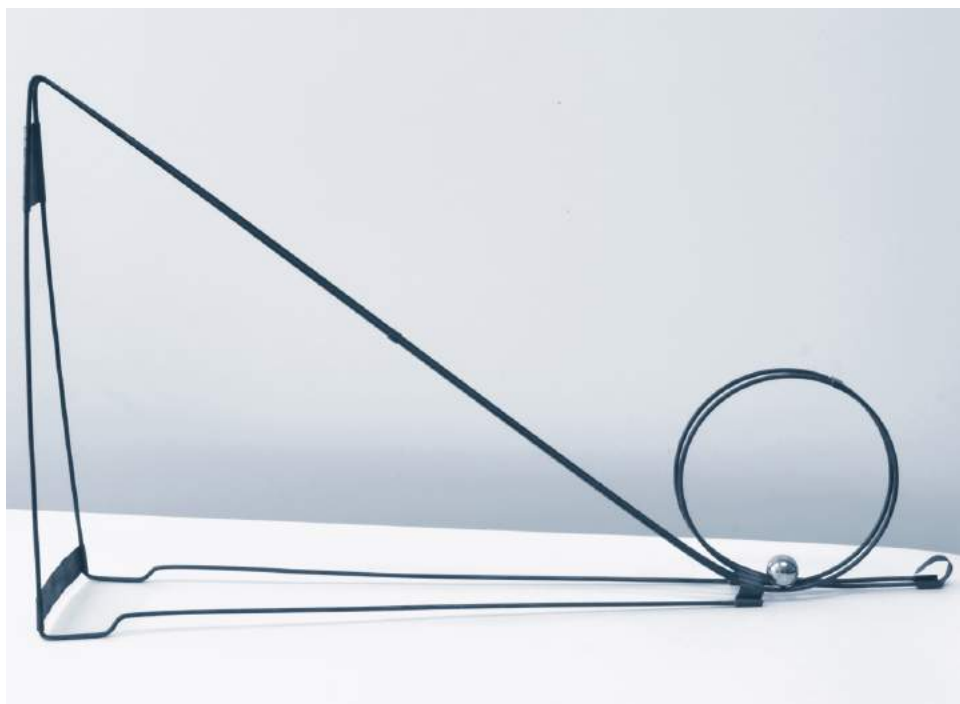


Рис. 1.13: Демонстрация взаимосвязи кинетической и потенциальной энергии

Оборудование

1. Лабораторная модель «мертвой петли» (радиус кривизны 8 см).
2. Стальной шарик диаметром 2 см.

Основные определения

Нестерова петля («мертвая петля») — фигура высшего пилотажа, представляющая собой замкнутую кривую в вертикальной плоскости. Названа по имени П. Н. Нестерова, впервые в мире выполнившего ее 27 августа 1913 г.

Для того, чтобы материальная точка совершала движение по окружности с центростремительным ускорением $a = v^2/r$, необходимо, чтобы на тело действовала внешняя сила. В представленной демонстрации роль внешней силы играет сила реакции опоры. В соответствии с 3 законом Ньютона на направляющие, вдоль которых движется тело, действует равная по модулю сила давления (сила веса).

В устаревшей литературе можно встретить такие определения: сила, с которой движущаяся материальная точка действует на опору (вес) - это центробежная сила, а сила, с которой опора давит на точку - это центростремительная сила (реакции опоры). Центробежная сила и центростремительная сила численно равны друг другу и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, но приложены к разным телам — как силы действия и противодействия. Определенные таким образом силы, считаются устаревшими понятиями и в современной литературе не используются. Согласно современным представлениям центробежная сила инерции действует в неинерциальной системе отсчета на движущееся тело, а термин "центростремительная сила" не используется вовсе.

Кинетическая энергия — энергия механической системы, зависящая от скоростей движения ее точек. Кинетическая энергия E_k материальной точки измеряется половиной произведения массы m этой точки на квадрат ее скорости v , т. е.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы равна арифметической сумме кинетических энергий всех ее точек:

$$E_k = 1/2 \sum m_i v_i^2.$$

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из положения 1 в положение 2 происходит под действием приложенных к системе внешних и внутренних сил и равно сумме работ $A_{\text{внеш}}$ и $A_{\text{внутр}}$ этих сил на данном перемещении:

$$E_{\text{к2}} - E_{\text{к1}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

Это равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии, с помощью которой решаются многие задачи динамики.

Краткое описание

Прибор «мертвая петля» позволяет демонстрировать ряд опытов по динамике движения материальной точки по окружности. Эти опыты дают возможность выяснить соотношение сил (силы тяжести и реакции рельсов), действующих на катящийся по рельсам шарик и определить, при каких условиях шарик без отрыва преодолеет мертвую петлю.

На приборе сначала демонстрируется три основных опыта: 1) с наивысшей точки 1 (рис.1.14) наклонных рельсов, когда шарик устойчиво описывает петлю и с некоторой скоростью вылетает с другого конца желоба; 2) с наименьшей высоты 2 наклонной плоскости, когда шарик только описывает петлю, не срываясь с верхней точки, и 3) с еще меньшей высоты 3, когда шарик, не доходя до вершины петли, отрывается от направляющих и движется внутри петли по параболической траектории.

Теория

Рассмотрим этот опыт, не учитывая диссипативные силы (трение шарика о направляющие), и найдем начальное положение (высота h), достаточное для того, чтобы тело преодолело «мертвую петлю».

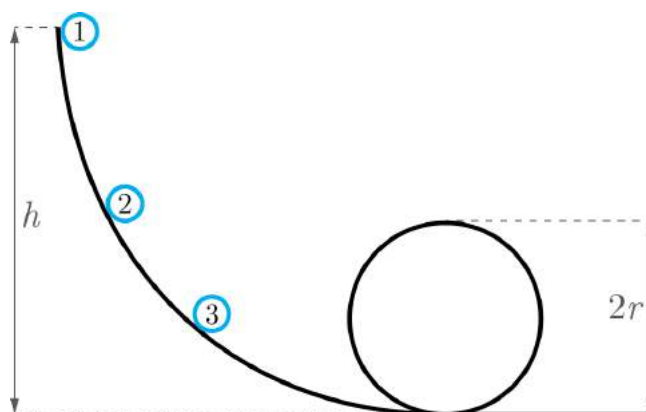


Рис. 1.14: Схематичное изображение направляющих, по которым движется точка. Начальные положения тела отмечены точками 1, 2 и 3

Шар в начальный момент времени обладает только потенциальной энергией:

$$E_{\text{п}} = mgh, \quad (1.9)$$

где m — масса шарика, а h — начальная высота спуска.

Рассмотрим момент, когда шарик оказывается в верхней точке петли. Будем считать, что скорость тела минимально возможная, тогда сила реакции опоры обращается в ноль. В этот момент тело обладает центростремительным ускорением, равным ускорению свободного падения $a_z = g$, поскольку именно сила тяжести сообщает телу центростремительное ускорение. Учитывая эту связь имеем:

$$a_z = \frac{v_2^2}{r} = g, \quad (1.10)$$

где v_2 — скорость шара в верхней точке петли.

Закон сохранения энергии примет вид:

$$E_{\text{к2}} + E_{\text{п2}} = E_{\text{п}}, \quad (1.11)$$

можно записать в следующем виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + 2mgr = mgh. \quad (1.12)$$

Необходимо сделать важное замечание о том, что при скатывании шара конечных размеров (нематериальная точка) нужно учитывать его момент инерции $I = 2mR^2/5$, где R — радиус шара. В этом случае в законе сохранения энергии следует добавить слагаемое

$$E_{\text{в}} = I\omega^2/2,$$

и тем самым учесть кинетическую энергию вращательного движения тела при скатывании вдоль направляющих. Однако дальнейшие выкладки приводятся в приближении материальной точки.

Из уравнения (1.12) после несложных преобразований получим:

$$v_2^2 + 4gr = 2gh. \quad (1.13)$$

Если из выражения (1.10) выразить v_2^2 и подставить это соотношение в уравнение (1.13), то получим:

$$h = \frac{5gr}{2g} = 2.5r. \quad (1.14)$$

Таким образом, если высота $h > 2.5r$, то тело способно преодолеть петлю, однако при условии $h < 2.5r$ скорости тела окажется недостаточно для полного оборота.

В реальности же равенство $h = 2.5r$ не выполняется, так как в системе неизбежно появление сил сопротивления. Из-за трения шарика о металлические рельсы условие прохождения петли примет вид $h \geq 2.5r$.

1.6. Второй закон Ньютона. Две тележки

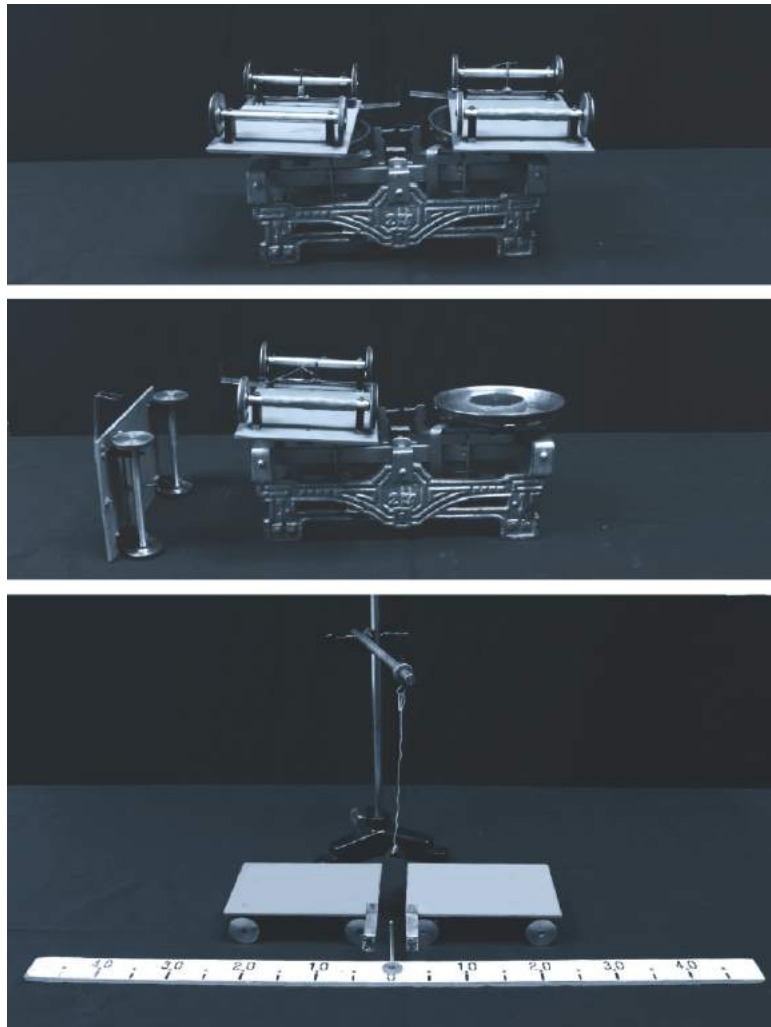


Рис. 1.15: Демонстрация второго закона Ньютона

Оборудование

1. Пара тележек равной массы (снабженные тормозным механизмом).
2. Штатив с подвешенной к нему тонкой стальной пластинкой.
3. Три нитяных кольца.
4. Метровая линейка.
5. Груз той же массой, что и одна из тележек.
6. Спички.

Основные определения

В ходе опытов можно показать, что ускорения, приобретаемые телами под действием заданной внешней силы, обратно пропорциональны массам тел:

$$a \sim \frac{1}{m}.$$

Поэтому если рассмотреть два тела с массами m_1 и m_2 , то значения ускорений a_1 и a_2 , которые будут приобретать эти тела под действием одной и той же силы \mathbf{F} , всегда будут относиться между собой как

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Зная связь между ускорениями и действующими силами: $a \sim F$, а также связь между ускорением любого тела и его массой: $a \sim 1/m$, в результате объединения этих зависимостей получится соотношение:

$$a \sim \frac{F}{m},$$

которое выражает физическое содержание второго закона Ньютона.

После этого можно сформулировать второй закон Ньютона в следующем виде:

ускорения в движении тел прямо пропорциональны действующим силам и обратно пропорциональны массам движущихся тел.

При правильном выборе единиц формулу второго закона Ньютона можно записать в обеих системах (СГС или СИ) в виде простого равенства:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

или

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Здесь уже учтено, что направления ускорений совпадают с направлениями сил. Поэтому второй закон Ньютона записан в векторной форме.

Краткое описание демонстрации

В данной демонстрации используются две тележки на колесах одинаковой массы m (рис.1.15). Тележки имеют «механический» тормоз и буфер. Перед тележками помещается демонстрационная линейка с ценой деления 10 см. Между тележками, связанными ниткой, помещается сжатая пружина.

После пережигания нити спичкой пружина распрямляется, толкая тележки в противоположных направлениях с одинаковыми силами. Так как изначально массы тележек равны, то пружина сообщает им одинаковые ускорения, в результате чего тележки приобретают одинаковые скорости и за равный промежуток времени перемещаются относительно начального положения на одно и то же расстояние (рис.1.16,б).

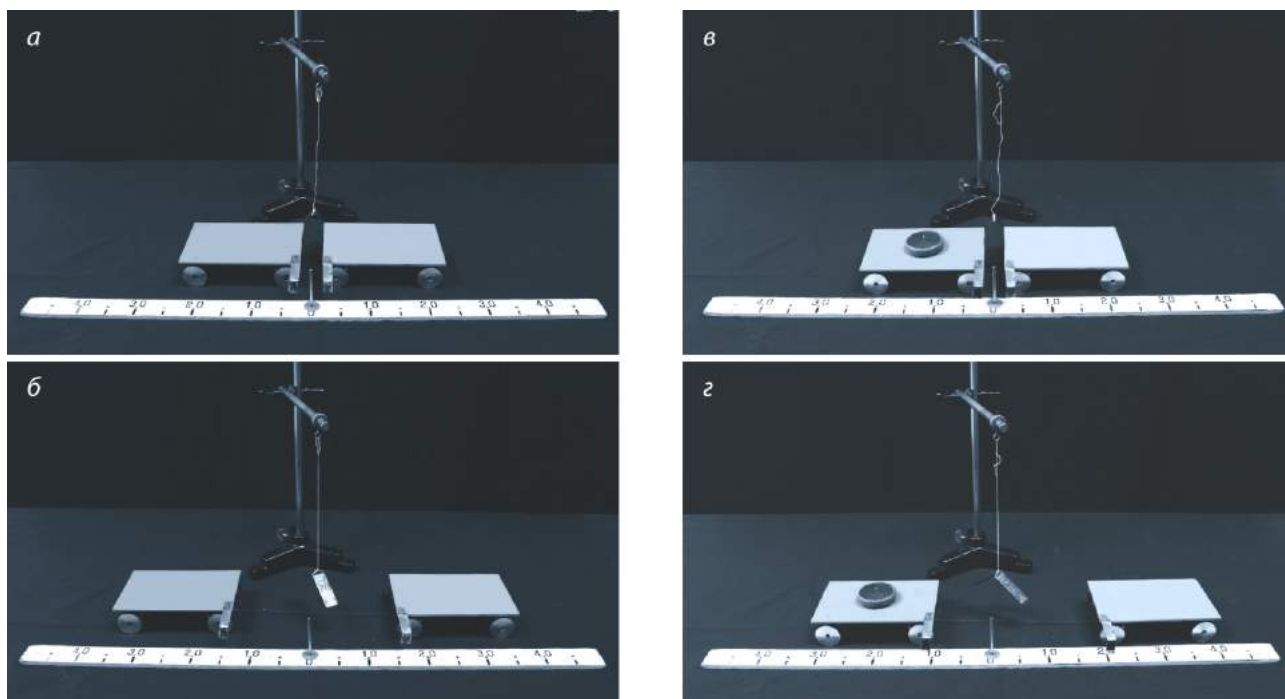


Рис. 1.16: Демонстрация с двумя тележками: а — начальное состояние системы, когда между тележками в сжатом состоянии располагается металлическая полоска; б — после пережигания нити тележки равной массы разъезжаются под действием одной и той же силы на одинаковые расстояния; в,г — при удвоении массы одной из тележек за счет дополнительного груза расстояние, которая она пройдет после пережигания нити, окажется вдвое меньше расстояния, пройденного ненагруженной тележкой

Если же теперь на одну тележку поместить груз массой $M = m$ (рис.1.16,в), ее масса возрастет вдвое. После пережигания нити и распрямления металлической пластины одинаковые силы сообщат тележкам различные ускорения. Таким образом, скорость тележки с большой массой окажется меньше скорости тележки без груза, а значит будет отличаться и пройденный путь за равные промежутки времени (рис.1.16,г).

Теория

Тележки останавливаются, когда полностью натягивается нить, соединяющая рычаги тормозов. Следовательно, время движения каждой тележки считается одинаковым, поэтому можно записать следующее равенство:

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} \quad (1.15)$$

где l — длина нити, v_1, v_2 — скорости тележек. Учитывая это соотношение, рассчитаем перемещение каждой тележки.

$$s_1 = v_1 t = \frac{v_1 l}{v_1 + v_2}, \quad s_2 = v_2 t = \frac{v_2 l}{v_1 + v_2}. \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1.17)$$

Считая, что выпрямление зажатой пружины, которая расталкивает тележки, происходит почти мгновенно, можно воспользоваться законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0. \quad (1.18)$$

Отсюда получим соотношение

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1.19)$$

Таким образом, пройденный тележками путь и их массы находятся в следующей зависимости:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1.20)$$

В этом состоит один из способов измерения массы тела, если одну из масс принять за эталон. Например, если $m_1 = 1$ кг, то $m_2 = s_1/s_2$ кг).

1.7. Третий закон Ньютона на примере силы Архимеда

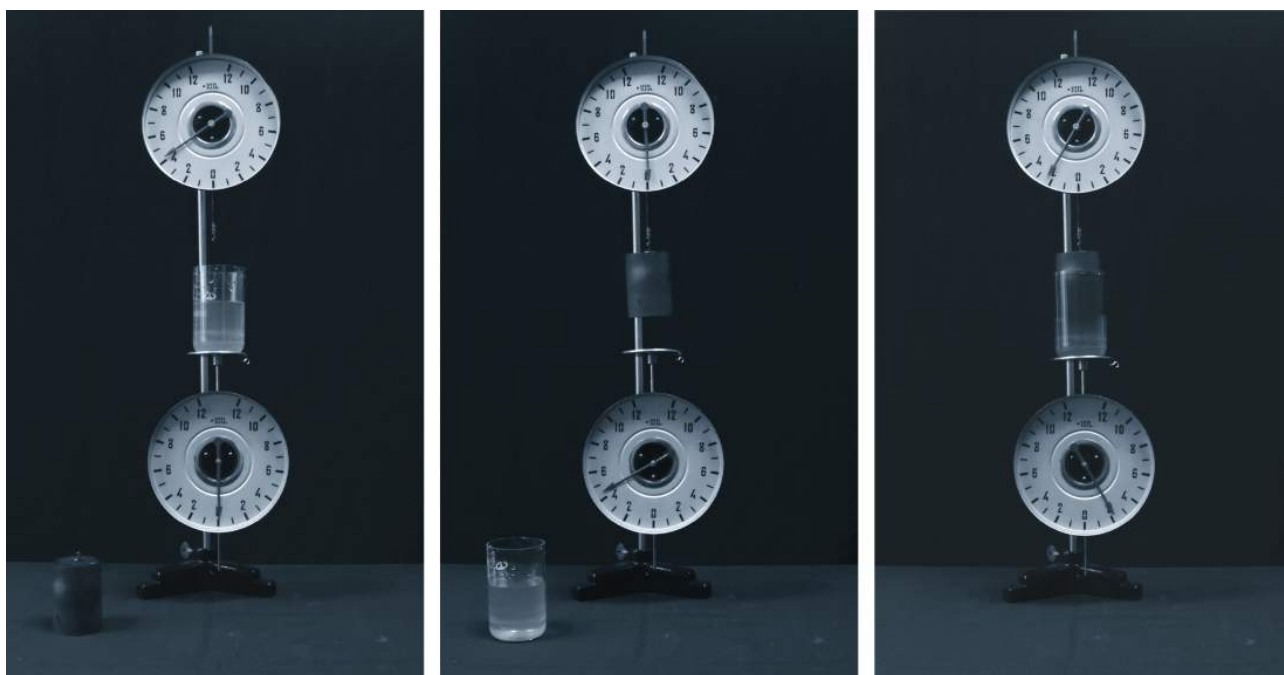


Рис. 1.17: Демонстрация третьего закона Ньютона

Оборудование

1. Физический штатив.
2. Динамометры демонстрационные с круглой шкалой до 1.2 кг для измерения сил.
3. стакан с водой.
4. Цилиндр из эбонита с подвесом.

Основные определения

Пусть тело A действует на другое тело B с некоторой силой F_1 . Тогда обязательно должна существовать ответная сила F_2 , с которой тело B будет действовать на тело A . При этом сила F_2 должна быть численно равна силе F_1 , действовать вдоль той же прямой, но в противоположном силе F_1 направлению.

Этот вывод позволяет дать третьему закону Ньютона очень простое количественное выражение:

если какое-то тело действует на другое с силой F_1 то второе тело всегда действует на первое с ответной силой F_2 , равной по модулю силе F_1 и противоположной ей по направлению:

$$F_2 = -F_1.$$

Весом называют силу, с которой тело, находящееся только под влиянием силы тяжести, действует на подвес или на горизонтальную подставку, неподвижные в выбранной системе отсчета.

Для неподвижных тела и опоры вес тела численно равен действующей на него силе тяжести, то есть $P = mg$, где m — масса тела, g — ускорение свободного падения (или ускорение силы тяжести). Поскольку масса тела — величина постоянная (в обычных условиях), а величина g изменяется на Земле с широтой и высотой над уровнем моря, то соответственно при этом изменяется и вес тела. Другой причиной изменения веса тела на Земле является вращение планеты вокруг своей оси, в разных точках тела движутся с различными центростремительными ускорениями, по этой причине вес тела на экваторе меньше, чем на полюсе.

В малой области вблизи земной поверхности значение g можно считать постоянным и вес тела — пропорциональным его массе, чем пользуются для измерения массы тел путем их взвешивания на рычажных весах; при этом значение g для взвешиваемого тела и гирь считается одним и тем же.

Вес и масса являются разными физическими величинами, которые нельзя отождествлять; они измеряются в разных единицах: вес — в единицах силы (Н, кгс, и др.), а масса — в единицах массы (кг, г, и др.).

Закон Архимеда — закон статики жидкостей и газов, согласно которому на всякое тело, погруженное в жидкость (или газ), действует со стороны этой жидкости (газа) выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа), направленная вверх и приложенная к центру тяжести вытесненного объема. Выталкивающую силу называют также архимедовой, или гидростатической подъемной силой. Давление, действующее на погруженное в жидкость тело, увеличивается с глубиной погружения, поэтому сила давления жидкости на нижние элементы поверхности тела больше, чем на верхние. В результате сложения всех сил, действующих на каждый элемент поверхности, получается равнодействующая F , направленная вверх. Это и есть поддерживающая сила.

Если тело плотно лежит на дне, то давление жидкости только сильнее прижимает его ко дну. Если вес тела меньше поддерживающей силы, тело всплывает на поверхность жидкости до тех пор, пока вес вытесненной погруженной частью тела жидкости не станет равным поддерживающей силе. Если вес тела больше поддерживающей силы, тело тонет; если же вес тела равен поддерживающей силе, тело плавает внутри жидкости.

Краткое описание демонстрации

Для демонстрации третьего закона Ньютона требуется пара динамометров, стакан с жидкостью, и тело цилиндрической формы.

Если подвесить тело цилиндрической формы к крючку верхнего динамометра (рис.1.17), то стрелка динамометра зарегистрирует вес цилиндра. Подобным образом по показаниям нижнего динамометра можно судить о величине давления оказываемого стаканом на опору.

В ходе опыта осуществлялась калибровка динамометров таким образом, чтобы стрелка нагруженного динамометра находилась в положении «0». При взвешивании цилиндра, частично погруженного в жидкость, абсолютные показания обоих динамометров совпадают, однако стрелки отклонятся в противоположные стороны. Динамометр, к которому подвешен груз, покажет уменьшение веса тела (отклонение стрелки влево), а нижний динамометр, на котором располагается стакан, будет демонстрировать увеличение веса (отклонение стрелки вправо). Согласно 3 закону Ньютона, с какой силой вода выталкивает цилиндр из стакана, с такой же по величине силой цилиндр давит на воду.

Устройство динамометров. Динамометр изготовлен в виде круглого металлического кожуха, на задней стенке которого имеется механизм из двух спиральных пружин и оси динамометра с зубчатой передачей; механизм закрыт металлической коробкой. Ось динамометра соединена зубчаткой со стрелкой. Концы оси выходят из коробки, закрывающей механизм, вверх и вниз. При действии силы на ось (сверху или снизу), стрелка динамометра отклоняется влево или вправо.

Посредством металлического стержня каждый динамометр укрепляется на стойке физического штатива. Оси можно придавать любое направление, поворачивая динамометр в муфте штатива, на котором он укреплен. На осях около коробки кожуха находятся корректоры, позволяющие регулировать механизм динамометра.

Шкала имеет влево и вправо от нуля до 12 делений ценою 100 г каждое. Таким образом вся шкала рассчитана на нагрузку 1.2 кг. Цифры обозначены на шкале через каждые 200 г условно в целых числах: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12; каждое число принимается за количество сотен граммов. Циферблат может с легким трением вращаться относительно кожуха и стрелки, что дает возможность быстро и удобно устанавливать стрелку прибора на нуль шкалы в различных положениях.

Регулировка прибора. Регулировка показаний динамометра производится специальными корректорами, сквозь которые проходит ось прибора. Поворотом верхней и нижней гаек изменяют число рабочих витков пружины, после чего производят постепенную нагрузку динамометра точными гирями от 100 до 1200 г, чтобы проверить его показания по всей шкале.

Теория

Архимедова сила действует на всякое тело погруженное в жидкость, или газ. Для того чтобы выяснить причину возникновения данной силы, рассмотрим цилиндр площадью поперечного сечения S и высотой h , погруженный в жидкость плотности ρ (рис.1.18). Основание цилиндра перпендикулярно вектору \mathbf{g} . Верхняя граница цилиндра находится на высоте h_1 , нижняя — на глубине $h_2 = h_1 + h$.

На боковую стенку цилиндра действуют силы давления, которые приводят к сжатию цилиндра и компенсируют друг друга. Эти силы в условиях данного опыта можно не учитывать.

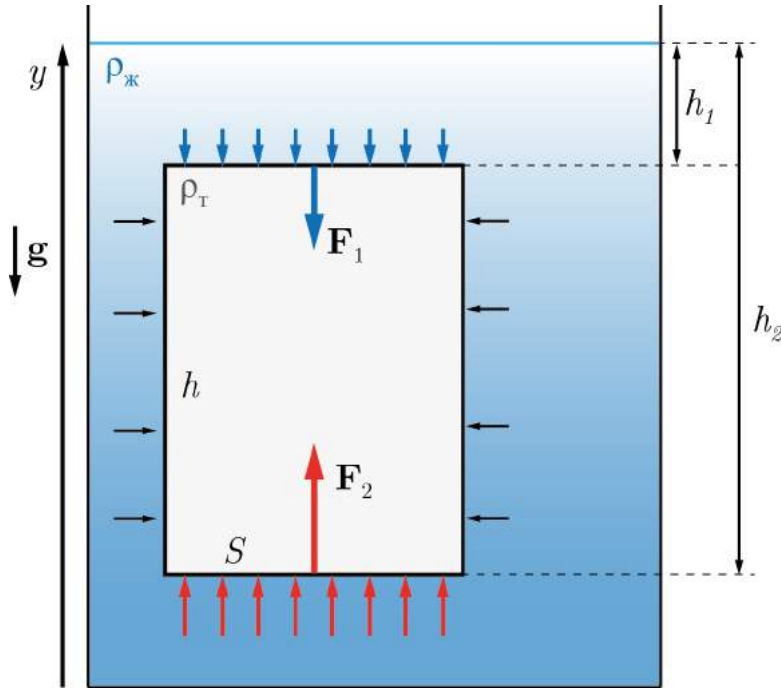


Рис. 1.18: Схематическое изображение сил, действующее на погруженное в жидкость тело

На уровне верхнего основания цилиндра давление жидкости равно

$$p_1 = \rho g h_1,$$

поэтому на него действует сила давления

$$F_1 = p_1 S = \rho g h_1 S,$$

направленная вертикально вниз.

На уровне нижнего основания давление жидкости составляет

$$p_2 = \rho g h_2.$$

Сила давления в этом случае

$$F_2 = p_2 S = \rho g h_2 S,$$

направлена вертикально вверх по закону Паскаля.

Так как $h_2 < h_1$, то $F_2 < F_1$, поэтому возникает равнодействующая сил давления, направленная вверх. Это и есть архимедова сила F_A .

В проекции на вертикальную ось y имеем:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g (h_2 - h_1) = \rho g h. \quad (1.21)$$

Так как произведение Sh равно объему тела, погруженного в жидкость, получаем:

$$F_A = \rho g V \quad (1.22)$$

Это выражение позволяет вычислять силу Архимеда. Появление выталкивающей силы обусловлено тем, что давление жидкости на нижнее основание цилиндра больше, чем на верхнее.

Выражение (1.22) можно интерпретировать следующим образом. Произведение ρV обозначает массу жидкости $m = \rho V$. Тогда

$$\rho g V = mg = P,$$

где P — вес жидкости взятой в объеме V . Таким образом, имеем:

$$F_A = P, \quad (1.23)$$

причем

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{P}. \quad (1.24)$$

Можно заключить, что выталкивающая сила, действующая на погруженный в жидкость цилиндр, численно равна весу жидкости, вытесненной этим цилиндром. Векторы силы Архимеда и веса жидкости имеют противоположные направления, следовательно подчиняются третьему закону механики Ньютона.

2 | Динамика твердого тела

2.1. Отыскание центра масс

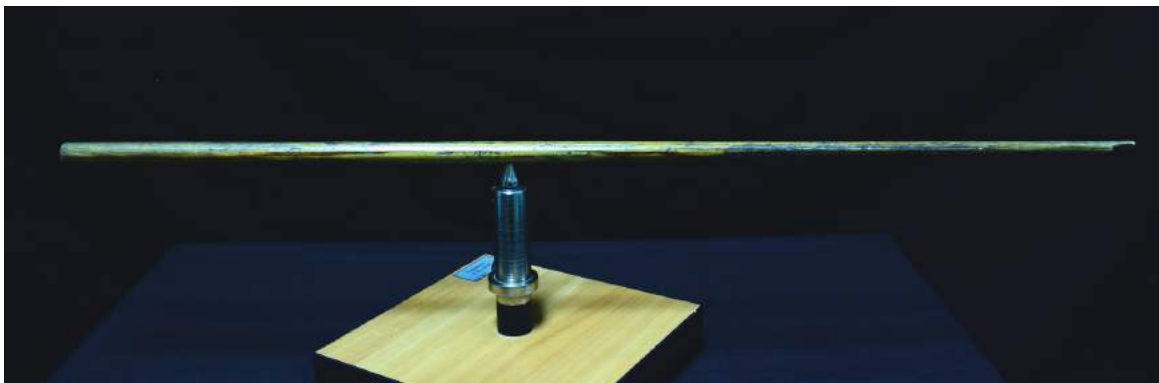


Рис. 2.1: Демонстрация одного из способов нахождения центра масс, основанного на свойствах сухого трения

Оборудование

1. Протяженный предмет переменной толщины — указка с дециметровыми делениями или линейка.

Основные определения

Центр масс — центр инерции, геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе. Координаты центра масс определяются формулами

$$x_c = \sum \frac{m_i x_i}{M}, y_c = \sum \frac{m_i y_i}{M}, z_c = \sum \frac{m_i z_i}{M},$$

или для тела при непрерывном распределении масс

$$x_c = \frac{1}{M} \int \rho x dV, y_c = \frac{1}{M} \int \rho y dV, z_c = \frac{1}{M} \int \rho z dV,$$

где m_i — массы материальных точек, образующих систему, x_i, y_i, z_i — координаты этих точек, $M = \sum m_i$ — масса системы, ρ — плотность, V — объем.

Понятие о центре масс отличается от понятия о центре тяжести тем, что последнее имеет смысл только для твердого тела, находящегося в поле тяжести; понятие же о центре масс не связано ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой механической системы. Для твердого тела в однородном поле тяжести положения центра масс и центра тяжести совпадают.

Краткое описание

В ходе демонстрации твердое тело (указка или линейка метровой длины) кладется на пальцы рук. Затем пальцы начинают сдвигать к центру тела. Тело в процессе опыта остается неподвижным, перемещаются лишь руки экспериментатора. В конечном счете место их соприкосновения произойдет в некоторой точке, которая и окажется центром масс тела. Следует обратить внимание на то, что при плавном перемещении рук проскальзывание происходит только между одним пальцем и телом, в то время как тело движется вместе с другим пальцем, оставаясь неподвижным относительно него.

Теория

На тело, находящееся в гравитационном поле Земли, всегда действует сила тяжести Mg . Если рассмотреть протяженное тело, например, стержень, расположенный на двух опорах, то со стороны каждой опоры на тело будет действовать сила реакции N_1 и N_2 соответственно (рис.2.2,а). В общем случае эти силы не равны между собой, например, если масса распределена в стержне неравномерно.

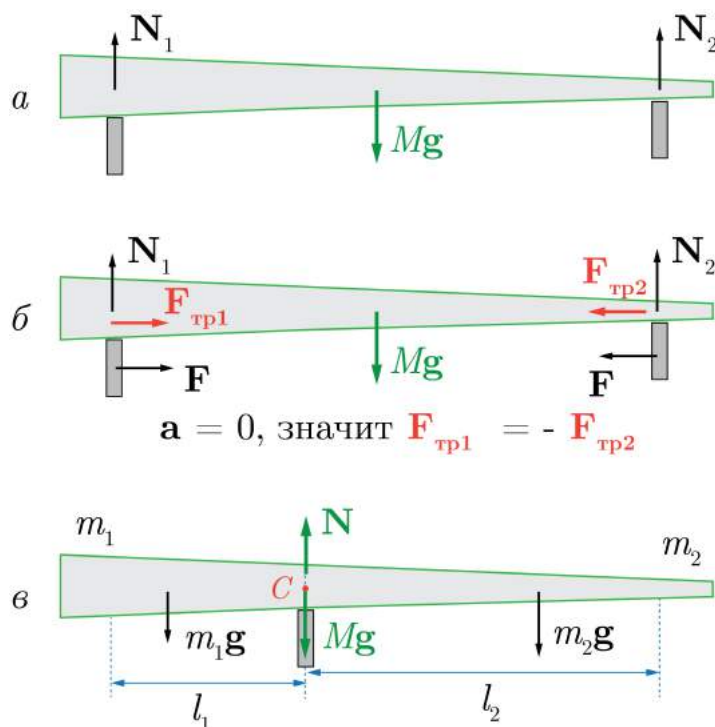


Рис. 2.2: Схематичное изображение твердого тела неправильной геометрической формы (а). положение центра масс такого тела определяется из условия его равновесия в однородном поле силы тяжести (б, в)

Если опоры (пальцы рук) начнут сближаться, то между ними и телом возникнут силы трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ (рис.2.2,б).

Из условия, что стержень под действием сил трения и реакции опоры не изменяет своей скорости, следует:

$$a_c = 0 : F_{тр1} = F_{тр2}. \quad (2.1)$$

Сумма сил в вертикальном направлении обращается в нуль, а также сумма моментов сил относительно центра масс равна нулю:

$$\begin{cases} Mg = N_1 + N_2 \\ N_1 l_1 = N_2 l_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Используя известную связь между силой трения и силой реакции опоры при скольжении тела, запишем равенство

$$\mu_1 N_1 = \mu_2 N_2, \quad (2.3)$$

и соотношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.4)$$

Таким образом, получим следующее выражение:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{l_2}{l_1}, \quad (2.5)$$

откуда следует, что $\mu_1 \neq \mu_2$. В ходе эксперимента руки проскальзывают относительно тела попеременно, при этом в одной точке соприкосновения действует сила трения скольжения, в другой -- сила трения покоя. Полученное отношение коэффициентов трения μ_1 и μ_2 соответствует соотношению коэффициентов трения скольжения и покоя, первый из которых, как правило, немного меньше второго.

2.2. Двойной конус



Рис. 2.3: Демонстрация возможности движения тела в «гору» при опускании его центра масс

Оборудование

1. Две соединенные между собой рейки переменной ширины.
2. Цилиндрический стержень.
3. Двойной конус.
4. Метки-указатели.

Основные определения

Известно, что центр масс любой механической системы движется точно так же, как и материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Потенциальная энергия — часть общей механической энергии системы, зависящая от взаимного расположения частиц, составляющих эту систему, и от их положений во внешнем силовом поле (например, гравитационном). Численно такая энергия для системы в данном ее положении равна работе, которую произведут действующие на систему силы при перемещении системы из заданного положения на бесконечность или в другое положение, где потенциальная энергия принимается равной нулю.

Для сил упругости, гравитации, кулоновского электрического взаимодействия можно ввести понятие потенциальной энергии, поскольку эти силы относятся к специальному типу консервативных (потенциальных) сил. Для диссипативных сил трения понятия потенциальной энергии не существует в принципе.

При смещении пружины из положения равновесия или поднятии тела на некоторую высоту над уровнем земли, возникают потенциальные силы, которые стремятся вернуть систему в первоначальное положение. Обычно, в этих задачах нулевое значение потенциальной энергии принимается в положении равновесия. Тогда при приближении тел к «нулевому уровню» потенциальная энергия системы уменьшается и стремится к минимальному значению, а скорость тела увеличивается.

Краткое описание

Двойной конус представляет собой тело в виде пары конусов, склеенных друг с другом несимметричным образом. Масса внутри такого объекта распределена таким образом, чтобы центр масс двойного конуса не попадал на линию, проходящую через вершины обоих конусов.

В ходе демонстрации в первую очередь следует показать направление уклона, скатив стержень с «горы». Затем необходимо установить в нижней части направляющих двойной конус и обратить внимание на его подъем в «гору».

При помощи пары указателей-меток продемонстрировать, что при подъеме тела в «гору» центр масс конусов опускается.

Теория

Опыт 1. Для начала рассмотрим тело правильной цилиндрической формы — стержень, лежащий на наклонной плоскости.

На покоящееся тело действует три силы: сила тяжести mg , сила реакции опоры N (перпендикулярная наклонной плоскости) и сила трения качения $F_{тр}$.

Под действием силы тяжести тело начинает скатываться с наклонной плоскости. При этом центр тяжести опускается.

Опыт 2. При скатывании двойного конуса, схема принципиально изменяется. На схеме (рис.2.4) внешняя окружность представляет собой линию соприкосновения двух конусов, из которых изготовлено тело. Диаметр этой окружности все время остается неизменным.

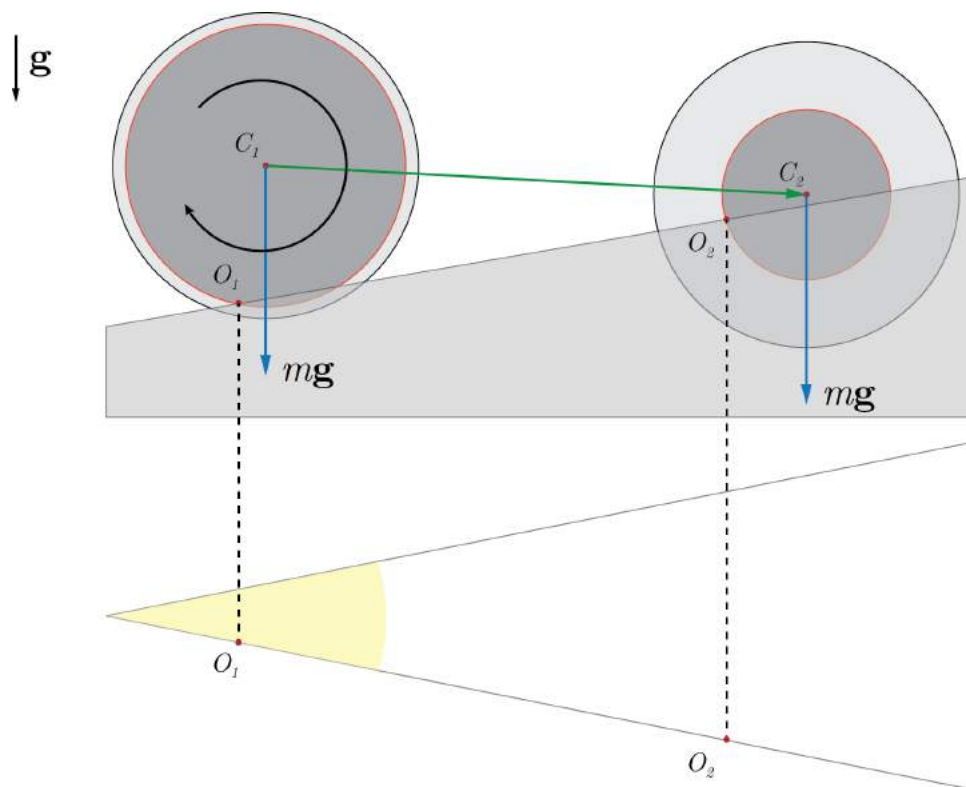


Рис. 2.4: Перемещение двойного конуса вдоль наклонной плоскости

Внутренняя окружность — это окружность проведенная через точку касания каждого из конусов с наклонной плоскостью. При большом угле между наклонными плоскостями, точки касания располагаются слева от вертикали проходящей через центр тяжести двойного конуса. Поэтому сила тяжести действует на двойной конус таким образом, что приводит к вращению конуса по часовой стрелке. При этом в опыте наблюдается «подъем» тела по наклонной плоскости. Этот «подъем» объясняется тем, что за счет такого движения центр тяжести конуса в верхнем положении C_2 оказывается ниже по сравнению с положением C_1 .

Опускание центра тяжести достигается в результате того, что, перемещаясь вверх, конус начинает опираться на свою более узкую часть и благодаря этому центр тяжести конструкции опускается быстрее, чем поднимаются концы. Таким образом, опыт показывает, что двойной конус стремится занять такое положение, в котором его потенциальная энергия оказывается минимальной.

2.3. Гироскоп на вращающейся платформе

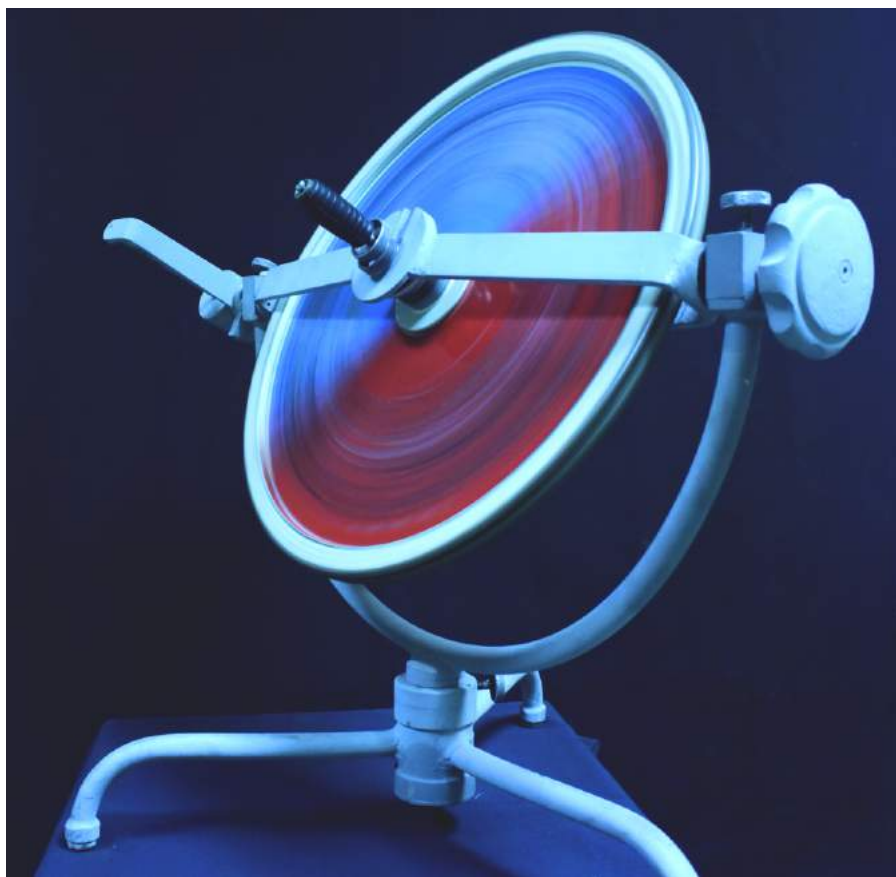


Рис. 2.5: Демонстрация гироскопического эффекта, связанного с сохранением свободным гироскопом неизменного направления оси вращения в пространстве

Оборудование

1. Гироскоп в кардановом подвесе.
2. Устройство для раскручивания гироскопа или шнур.
3. Вращающаяся платформа.

Основные определения

Гироскоп представляет собой массивное твердое тело (в данном случае - диск), способное свободно вращаться вокруг заданной оси. Для обеспечения свободы вращения гироскопа вокруг «неподвижной» точки применяют специальную систему крепления -- карданов подвес (рис.2.5) . В демонстрации с волчком отмечалось, что если центр тяжести гироскопа совпадает с его «неподвижной» точкой (точкой пересечения осей карданова подвеса), то такой гироскоп называется астатическим. Астатические гироскопы применяются в качестве измерительных элементов, определяющих заданное направление в пространстве, и, в частности, как временные «хранители» направления истинной вертикали, направления меридиана или ортодромии и являются датчиками автопилота, прицела, антенны, определяющими положение объекта относительно заданного направления в пространстве.

Принцип действия вращающегося астатического гироскопа основан на использовании способности вектора момента импульса L сохранять заданное направление в пространстве при отсутствии внешних моментов. Тогда направление оси ротора гироскопа в пространстве служит исходной базой для определения положения движущегося объекта, антенны и проч.

В процессе эксплуатации ось ротора астатического гироскопа, подверженная действию моментов внешних сил, совершает вынужденные колебания и постепенно отклоняется от заданного направления в пространстве. Скорость отклонения оси ротора гироскопа в пространстве называется собственной скоростью прецессии гироскопа Ω , или просто «уходом», и является наиболее важной характеристикой точности прибора.

Краткое описание

Перед началом опыта необходимо убедиться, что винты на приборе затянуты и гироскоп свободно вращается только вокруг своей собственной оси (эта ось проходит через втулку колеса). Гироскоп приводят во вращение шнуром, намотанным на ось, или при помощи специального устройства. После начала вращения винты ослабляются, и гироскоп становится «свободным», т.е. может вращаться в трех различных плоскостях. Затем быстро поворачивают подставку гироскопа вокруг вертикальной оси в ту или другую сторону и показывают, что при этом ось вращающегося гироскопа сохраняет неизменным свое направление в пространстве (рис.2.6).

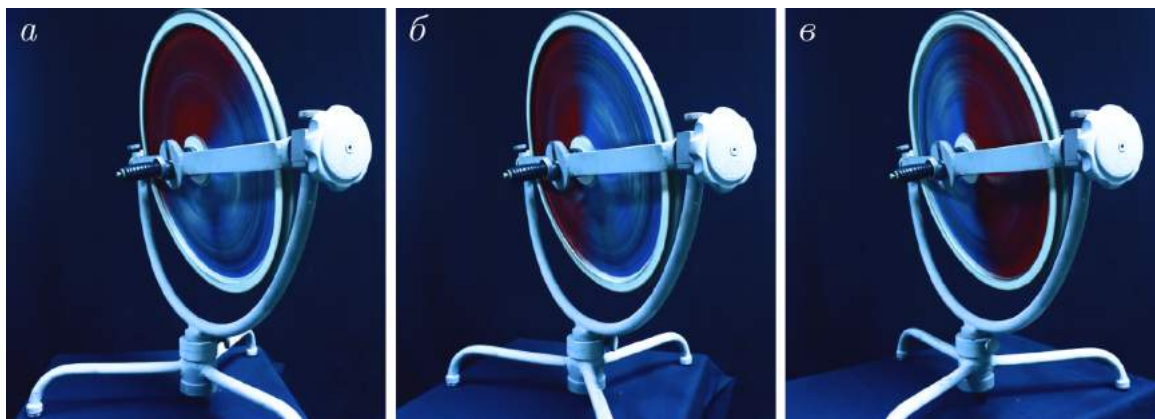


Рис. 2.6: Демонстрация гироскопического эффекта, связанного с сохранением свободным гироскопом неизменного направления оси вращения в пространстве

Вектор момента импульса, направленный вдоль оси ротора способен сохранять свое положение в пространстве даже при наклоне подставки гироскопа на некоторый угол. Чем выше скорость вращения или больше момент инерции диска, тем более явно проявляется эта особенность гироскопа.

Теория

Для свободного вращающегося гироскопа сила тяжести не может изменить ориентацию его оси вращения, так как эта сила приложена к центру масс (центр вращения в этом случае совпадает с центром масс), а момент силы тяжести относительно закрепленного центра масс равен нулю. Поэтому если на гироскоп не действуют никакие другие внешние силы, то, следовательно, отсутствует момент этих сил относительно его закрепленного центра масс. Согласно основному закону динамики вращательного движения

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

если $\mathbf{M} = 0$, то $\mathbf{L} = \text{const}$, т. е. момент импульса гироскопа сохраняет свою величину и направление в пространстве. Следовательно, вместе с ним сохраняет свое положение в пространстве и ось гироскопа.

Чтобы ось гироскопа изменила свое направление в пространстве, необходимо, согласно основному закону динамики вращательного движения твердого тела (2.6), создать отличный от нуля момент внешних сил. Поэтому если момент внешних сил, приложенных к вращающемуся гироскопу относительно его центра масс, не равен нулю, то наблюдается явление, получившее название гироскопического эффекта.

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент \mathbf{M} , создаваемый парой внешних сил \mathbf{F} , направлен вдоль прямой O_2 (рис.2.7). За время Δt момент импульса гироскопа получит приращение

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \Delta t$$

(направление $\Delta \mathbf{L}$ совпадает с направлением \mathbf{M}) и станет равным

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 + \Delta \mathbf{L}.$$

Направление вектора \mathbf{L}_2 совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг оси O_3 .

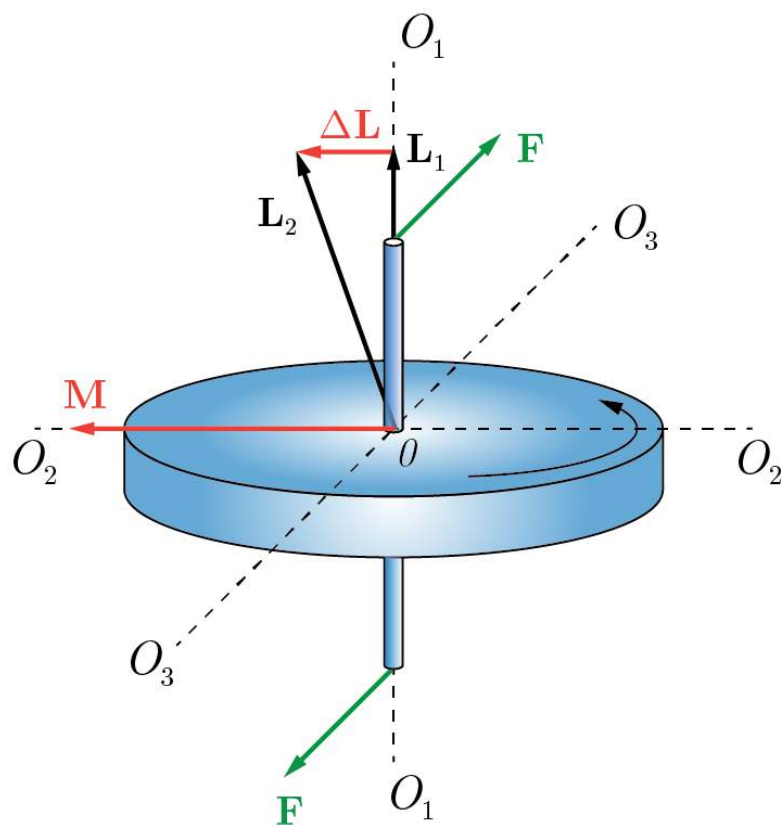


Рис. 2.7: Схематичное изображение динамики вращающегося диска гироскопа. Пара внешних сил \mathbf{F} , приложенных к оси вращения тела создает отличный от нуля момент внешних сил \mathbf{M} , который поворачивает вектор момента импульса диска \mathbf{L} вокруг оси O_3

Если время действия силы мало, то, даже при большом значении момента сил \mathbf{M} , изменение момента импульса $\Delta \mathbf{L}$ гироскопа будет очень малым. Отсюда следует вывод, что кратковременное действие внешних сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

2.4. Прецессия гироскопа. Волчок



Рис. 2.8: Демонстрация гироскопического эффекта для различных волчков

Оборудование

1. Два волчка различного размера и массы, волчок Томсона.
2. Устройство для раскручивания волчка.
3. Шнур или веревка.

Основные определения

Гироскоп — быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп обладает рядом интересных свойств, наблюдаемых у вращающихся небесных тел, у артиллерийских снарядов, у детского волчка, у роторов турбин, установленных на судах, и др.

Свойства гироскопов проявляются при выполнении одного из условий, например, угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть очень велика по сравнению с той угловой скоростью поворота оси в пространстве (другие свойства будут показаны в следующих демонстрациях).

Простейшим гироскопом является так называемый волчок, быстро вращающийся вокруг своей оси. Важно отметить, что если центр тяжести гироскопа совпадает с точкой опоры, то гироскоп называется астатическим (уравновешенным), в противном случае — тяжелым.

Прецессией волчка называется поворот самой оси вращения волчка под действием момента сил. В данной демонстрации момент силы тяжести вызывает прецессию волчка.

Если в какой-то момент времени действие силы прекратится, то одновременно прекратится прецессия и ось волчка мгновенно остановится, т. е. прецессионное движение гироскопа безынерционно.

Наряду с прецессионным движением ось гироскопа при действии на нее силы может еще совершать так называемую нутацию — небольшие, но быстрые (обычно незаметные на глаз) колебания оси около ее среднего направления, быстро затухающие из-за сопротивления воздуха.

Волчок Томсона, как правило, состоит из сферы со срезанной верхушкой. Это означает, что его центр тяжести находится ниже геометрического центра шара, из которого он изготовлен.

Краткое описание

Демонстрация позволяет наблюдать за поведением волчка, опирающегося острием своей оси симметрии на неподвижную опору (рис.2.9,а). Если попытаться поставить его в вертикальное положение, то он немедленно опрокинется, как только прекращается его поддержка.

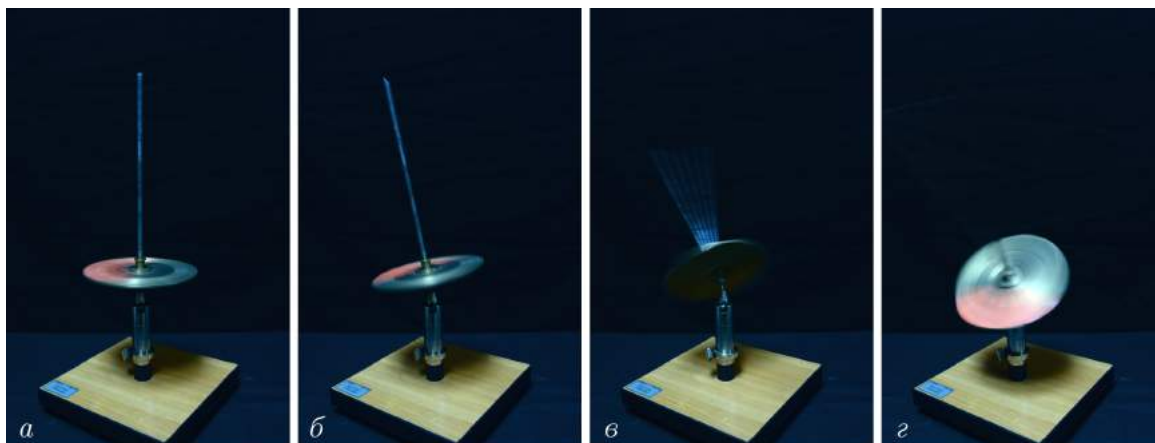


Рис. 2.9: Быстро вращающийся волчок не падает. Из-за трения угловая скорость собственного вращения уменьшается. По мере уменьшения скорости вращения, ось волчка спиралеобразно удаляется от вертикали, и волчок падает

Если центр тяжести расположен выше точки опоры, то малейшее смещение волчка в сторону от вертикального положения приводит к возникновению опрокидывающего момента силы тяжести. Вертикальное положение равновесия волчка является неустойчивым. Однако если волчку сообщить большую угловую скорость, то волчок будет располагаться вертикально, не падая, участвуя в прецессионном движении (рис.2.9,б).

У волчка роль центра подвеса играет точка опоры. Со временем под действием сил трения угловая скорость вращения волчка начнет уменьшаться, при этом его ось отклоняется от вертикали на некоторый угол. Под действием силы тяжести эта ось будет поворачиваться в направлении, перпендикулярном направлению силы тяжести, т.е. начнет прецессировать вокруг вертикальной оси (рис.2.9,в).

Чем меньше будет становится скорость вращения, тем заметнее будет прецессия волчка и тем больше станет угол отклонения оси волчка от вертикали. Если скорость вращения станет очень малой, то волчок упадет.

Теория

Опыт 1. Рассмотрим вращающийся дискообразный волчок. В начале когда угловая скорость велика, его ось практически вертикальна. Затем угловая скорость вращения под действием сил трения в точке А и о воздух уменьшается и волчок начинает прецессировать вокруг вертикальной оси, описывая коническую поверхность с вершиной в точке А (рис.2.10,а).

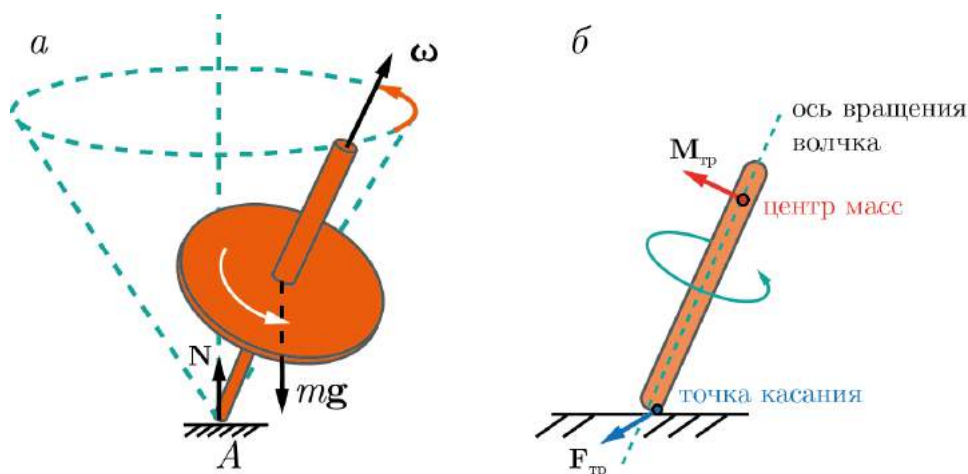


Рис. 2.10: Когда скорость вращения благодаря трению становится малой, ось волчка удаляется от вертикали, и волчок падает

Рассмотрим силы действующие на волчок. Сила тяжести mg и сила реакции опоры N создают момент сил, стремящийся опрокинуть волчок. Это приводит к тому, что ось волчка смещается перпендикулярно плоскости действия этих сил, то есть прецессирует. Направление смещения оси показано на рис.

красной стрелкой.

Следует заметить, что прецессия оси волчка существовала и в самом начале его вращения из-за неизбежного толчка при раскручивании.

Кроме момента пары сил $m\mathbf{g}$ и \mathbf{N} на волчок действует еще момент силы трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ относительно центра масс волчка. На рис.2.10,б показано увеличенное острие волчка. Если точка касания острия с поверхностью не лежит на оси вращения волчка (волчок наклонился), то момент силы трения лежит в плоскости рисунка и направлен к вертикали. Изменение момента импульса волчка под действием момента силы трения тоже направлено к вертикальной оси; поэтому благодаря трению ось волчка стремится занять вертикальное положение. То есть, на наклонный волчок действуют два момента сил: момент пары сил — реакции опоры и силы тяжести, и момент силы трения. Движение волчка всегда происходит под действием этих двух моментов.

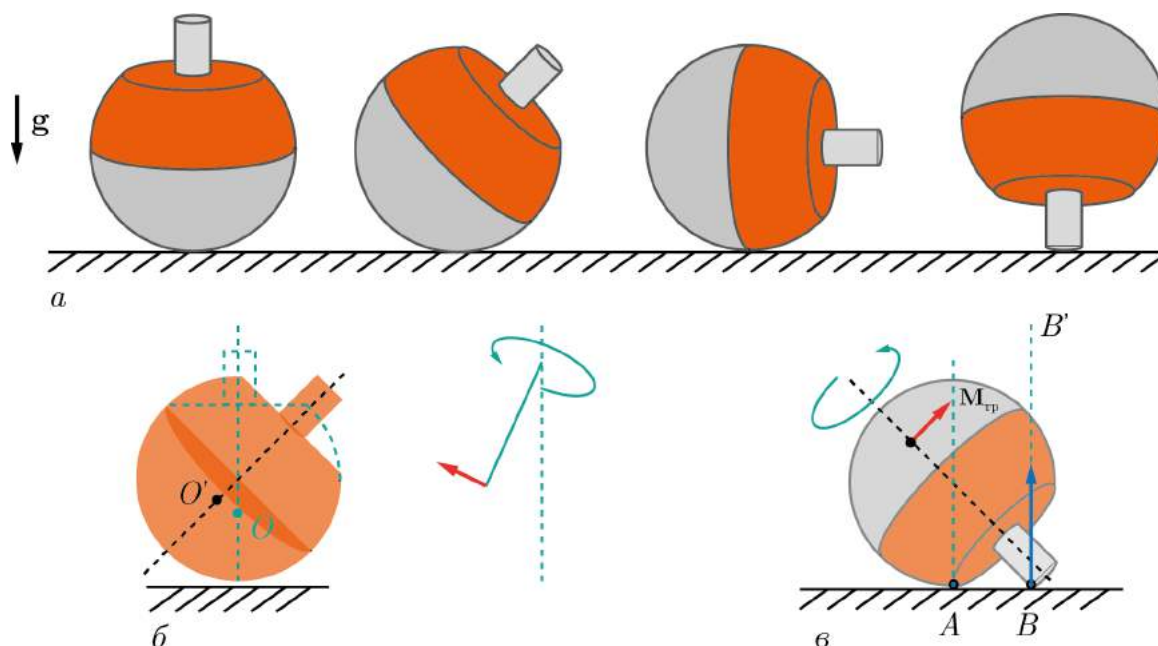


Рис. 2.11: Иллюстрация поведения вращающегося волчка Томсона, главной особенностью которого является подъем центра масса за счет момента силы трения

Опыт 2. При раскручивании волчка Томсона его ось произвольно отклоняется от вертикального положения. Однако из-за того, что волчок имеет сферическую форму, то точка его опоры в результате такого отклонения меняется. Ось же вращения волчка остается прежней — вертикальной, и не будет совпадать с его геометрической осью. А так как центр тяжести волчка лежит ниже геометрического центра шарика, то в результате такого отклонения его центр тяжести уже не будет лежать на оси вращения (рис.2.11,а). Он займет положение O' и будет вращаться вместе с волчком около вертикальной оси. При вращении с большой угловой скоростью центр тяжести волчка будет подниматься точно так же, как поднимается шарик на нити, если нить раскручивать так, как показано на (рис.2.11,б).

Волчок не задерживается в боковом положении, а по инерции проскакивает его, касаясь своей ножкой плоскости, на которой он вращается. Как только это произойдет, точка опоры волчка перескочит из точки A в точку B (рис.2.11,в), и волчок вращаясь около своей оси, начнет прецессировать около оси BB' . Иными словами, волчок Томсона будет вести себя как «обыкновенный» волчок. Под действием момента силы трения он совместит свою ось с вертикальной осью BB' и будет продолжать вращаться шариком вверх.

2.5. Крестообразный маятник Обербека

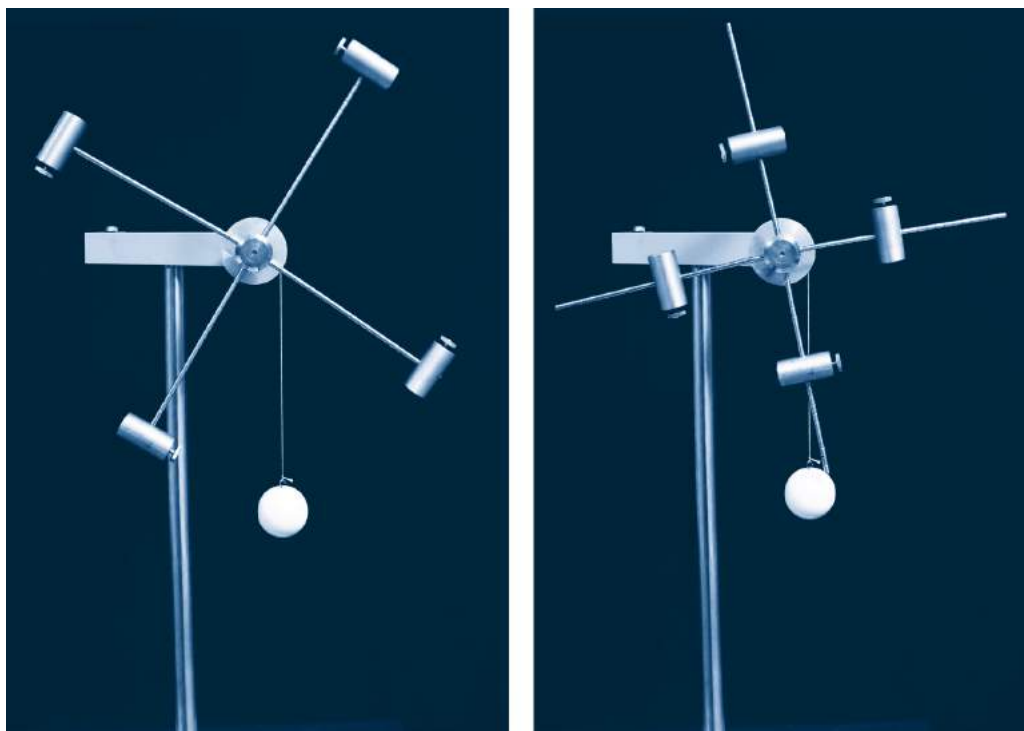


Рис. 2.12: Демонстрация инертных свойств тел при их вращении

Оборудование

1. Крестообразный маятник с четырьмя грузами одинаковой массы, закрепленный на штативе.
2. Шкив с перекинутой через него нитью.
3. Тела различной массы, подвешенные на нити.

Основные определения

Величина, которая одновременно учитывает влияние силы и ее расположения относительно оси вращения на угловое ускорение тела, называется моментом силы.

Расстояние l от линии действия силы до оси вращения тела называют плечом силы.

Момент силы относительно оси считают равным произведению модуля силы на ее плечо:

$$M = Fr.$$

Принято считать момент силы положительным, если он стремится вызывать вращение тела по часовой стрелке, и отрицательным — когда вызываемое им вращение имеет противоположное направление.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение тела прямо пропорционально моменту действующих сил:

$$\varepsilon \sim M.$$

Этот важный вывод подтверждается множеством опытов с вращением тел.

Инертность тела по отношению к вращательному движению, ее влияние на угловое ускорение зависит не только от массы тела, но и от того, как она распределена относительно оси вращения. Это означает, что на инертность во вращательном движении влияют форма и геометрические размеры тела, его расположение относительно оси вращения, в особенности распределение массы по объему тела.

Величина, которая определяет инертность тела по отношению к вращательному движению, называется моментом инерции тела. В механике различают осевые и центробежные моменты инерции.

Немецкий физик А. Обербек (1846-1900) известен как создатель механического устройства в виде крестовины с закрепленными на ее концах грузами, применяемого для изучения вращательного движения.

Краткое описание

Опыт 1. Можно показать различный характер вращения тела с различными осевыми моментами инерции приводя во вращение в воздухе коробку или кусок пенопласта вокруг главных осей инерции. Для прямоугольного параллелепипеда главные оси инерции — это оси, проходящие через центры противоположных граней. Если подбросить кусок поролона, заставив его вращаться вокруг одной из осей инерции, то в отсутствие внешних сил можно заметить, что устойчиво вращение относительно главных осей, соответствующих наибольшему и наименьшему моментам инерции тела. Вращение вокруг главной оси, соответствующей среднему моменту инерции, будет неустойчиво.

Вообще, практически оказывается, что вращение устойчиво вокруг оси с наибольшим моментом инерции. Это связано с влиянием внешних сил, в частности сил трения, которые создают момент относительно центра тяжести. Действие этого момента в случае вращения вокруг оси с наибольшим моментом инерции оказывается меньшим.

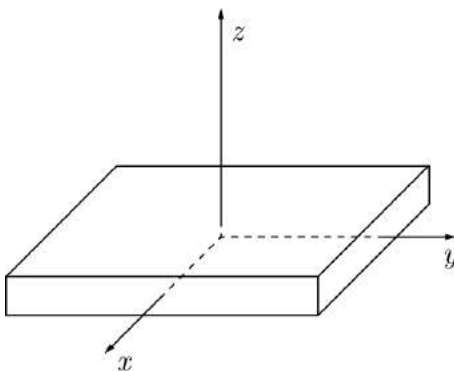


Рис. 2.13: Тело в форме прямоугольного параллелепипеда может обладать различными моментами инерции вокруг каждой из трех главных осей, характер вращения тела вокруг этих осей различается

Опыт 2. Маятник Обербека состоит из двух взаимно перпендикулярных стержней, вращающихся вокруг горизонтальной оси. На стержни насажены четыре груза одинаковой массы, перемещение которых изменяет в довольно широких пределах момент инерции прибора. На оси прибора также находятся шкив, на который наматывается нить. Подвесив к другому концу нити груз, можно создать вращающий момент и раскрутить маятник (рис.2.14, а). И наоборот, вращая маятник с грузами можно, наматывая шнурок на шкив, поднимать груз.

Если грузы на стержнях маятника расположены близко к оси вращения, то момент инерции прибора невелик и скорость его вращения быстро достигает значительной величины (рис.2.14,б). Если же грузы сдвинуть к концам стержней, то момент инерции прибора возрастет; при этом он будет медленно набирать скорость и груз коснется пола спустя заметно большее время.

Опыт можно повторить, подвесив за нить груз большей массой. Такой подход позволит изменить величину момента силы, действующей на маятник Обербека (положение грузов на спицах при этом менять не нужно), а, следовательно и характер вращения такого маятника.

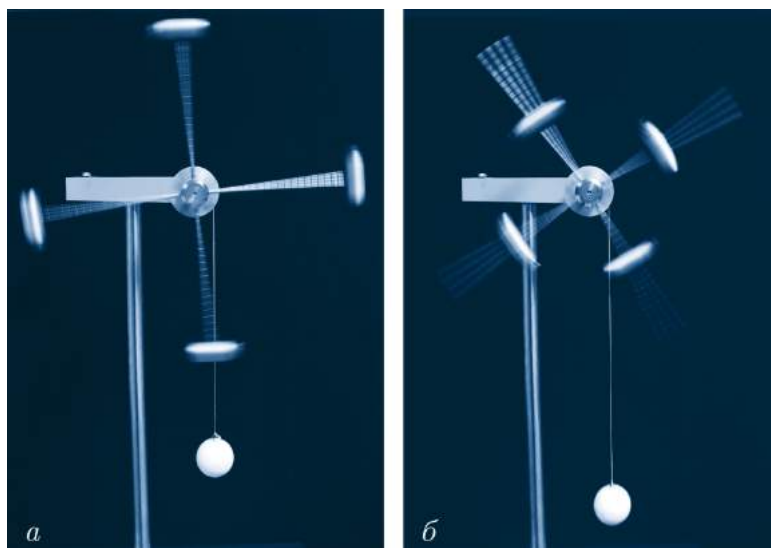


Рис. 2.14: Вращение крестообразного маятника Обербека при изменении момента инерции системы (а и б)

Теория

Рассмотрим вращение крестообразного маятника Обербека при различном положении грузов m относительно оси вращения (рис.2.15,а), и с различной нагрузкой на шкив со стороны тела, подвешенного за нить (рис.2.15,б).

Запишем уравнение вращательного движения маятника вокруг неподвижной оси, считая, что нить невесома и нерастяжима, и пренебрегая силами трения:

$$I\varepsilon = M, \quad (2.7)$$

где $M = rT$ — момент внешних сил (в частности, силы натяжения нити T), $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ — угловое ускорение, ω — угловая скорость, а I — момент инерции маятника Обербека.

После подстановки момента силы натяжения нити уравнение вращательного движения маятника в проекции на ось z можно записать как:

$$I\varepsilon = rT. \quad (2.8)$$

Второй закон Ньютона для поступательного движения большого груза в проекции на ось x имеет следующий вид:

$$m_0 a = m_0 g - T. \quad (2.9)$$

Из связи линейного и углового ускорений точек вращающегося шкива имеем:

$$a = r\varepsilon. \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.8), выразим силу натяжения и воспользуемся соотношением (2.10):

$$T = \frac{I\varepsilon}{r} = \frac{Ia}{r^2}. \quad (2.11)$$

Подставим полученное выражение в уравнение ??

$$m_0 a + \frac{Ia}{r^2} = m_0 g. \quad (2.12)$$

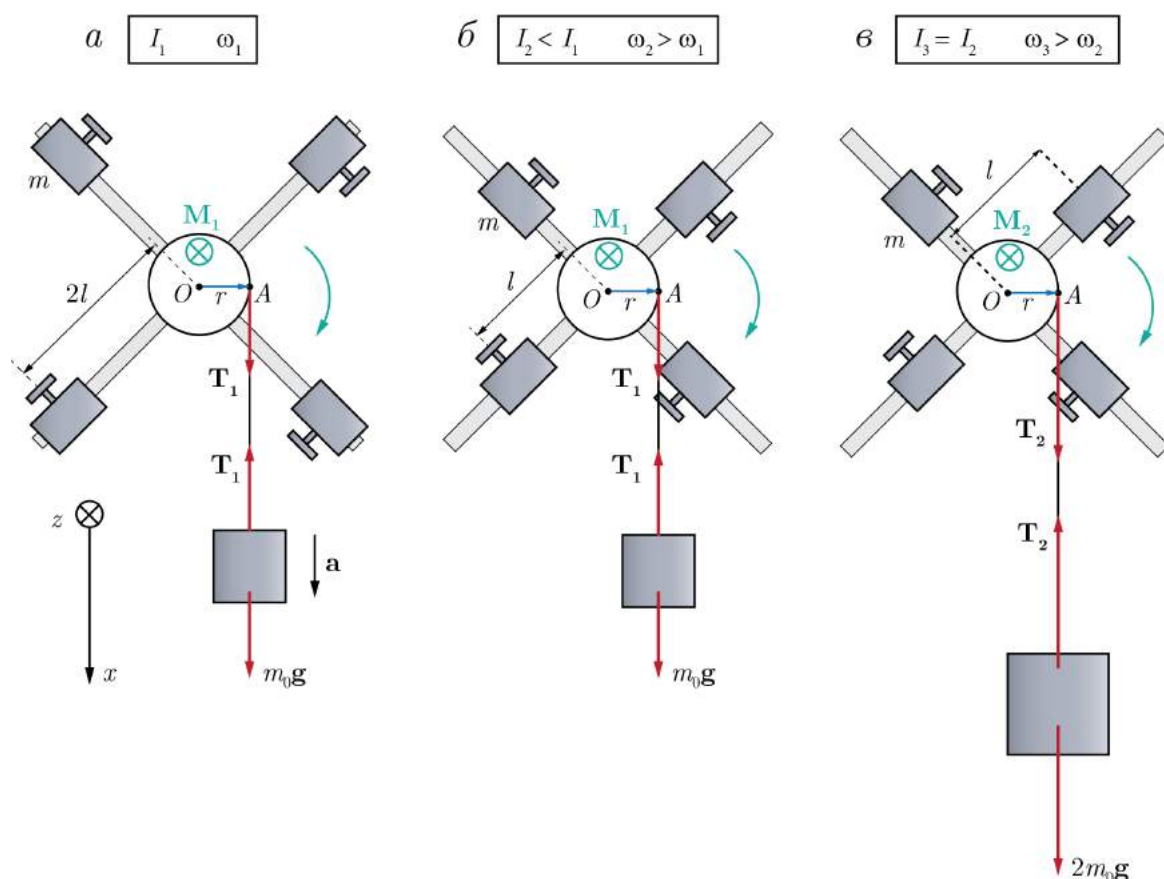


Рис. 2.15: Угловое ускорение креста Обербека зависит от расположения массы системы относительно оси вращения (а и б), а также от величины приложенной внешней силы (а и в)

Домножая последнее выражение на r^2

$$a(m_0 r^2 + I) = m_0 g r^2. \quad (2.13)$$

можно получить соотношение для линейного ускорения a :

$$a = \frac{m_0 g r^2}{m_0 r^2 + I}, \quad (2.14)$$

где I — момент инерции крестообразного маятника.

Рассмотрим несколько конфигураций маятника Обербека.

При неизменной массе грузов и радиуса шкива, будем менять расстояние между грузами массой m и осью вращения O . Опыт показывает что, приближая грузы к оси вращения, при постоянном моменте внешней силы $F_{\text{тяж}}$ маятник начинает раскручиваться с большим ускорением. Наблюдаемый эффект можно объяснить на основании теоремы Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i l_i^2), \quad (2.15)$$

где I_0 — момент крестообразного маятника без грузов на стрелках.

Из полученного соотношения видно, что при приближении грузов к оси вращения, момент инерции маятника уменьшается, то есть $I_2 < I_1$. И наоборот, с ростом l момент инерции увеличивается. Таким образом, на рис.2.15,а момент инерции больше, чем во втором случае (рис.2.15,б).

Отсюда следует, что при постоянном значении момента внешней силы вращающиеся тела тем быстрее изменяют свою угловую скорость, чем меньше их момент инерции.

При неизменном положении l грузов на крестовине, можно увеличить внешнюю силу, и, соответственно, создать больший момент силы (рис.2.15,в). Угловое ускорение маятника в этом случае также окажется больше, чем в случае на рис.2.15,б. Возрастет кроме этого и линейное ускорение массивного тела, создающего этот самый момент силы. Такая зависимость углового ускорения маятника от прикладываемого внешнего момента силы выражается соотношением (2.14).

2.6. Свободные оси вращения

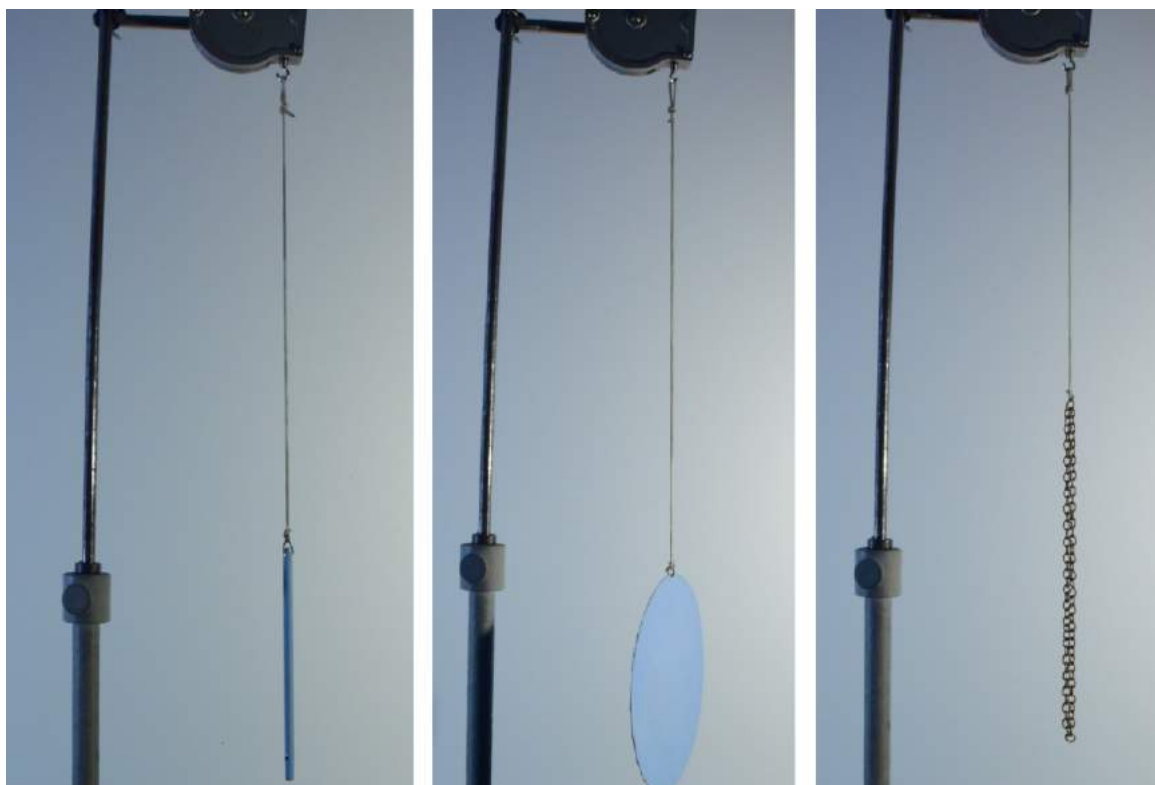


Рис. 2.16: Демонстрация устойчивости вращения тел вокруг свободных осей с наибольшим и наименьшим значениями момента инерции, и демонстрация того факта, что вращение с промежуточным моментом инерции неустойчиво

Оборудование

1. Кусок поролона или пенопласта прямоугольной формы со сторонами различной длины (200:350:50 мм).
2. Тела с подвесами (металлический диск, цилиндрический стержень, кольцо из цепочки).
3. Червячная центробежная машина.
4. Штатив.

Основные определения

При вращении тела вокруг вала, концы которого закреплены, например, в подшипниках, на вал начинают действовать так называемые динамические силы реакции опоры. Динамические реакции в отличие от статических действуют на движущееся тело. Связанные с телом оси, при вращении относительно которых динамические реакции опор равны статическим, называются свободными осями. Другими словами, при вращении твердого тела относительно свободных осей вращения без трения внешние силы прикладывать не нужно. При постоянной угловой скорости вращения динамические реакции перпендикулярны оси вращения (в отсутствие сил трения) и пропорциональны квадрату угловой скорости.

В любом теле произвольной формы существует три взаимно перпендикулярно оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями вращения. Их называют главными осями инерции. Если взять тела одинаковой массы, но разной формы (диск, стержень или кольцо) и действовать на них равными моментами, то тела будут приобретать различные угловые ускорения. Их моменты инерции I будут неодинаковыми, потому что у них разная форма.

Краткое описание

С цепочкой, стержнем и диском осуществляется демонстрация вращения тел около свободных осей с использованием имеющегося на центробежной машине крючка, к которому прикрепляются: а) стержень

длиной 15-20 см и диаметром 1 см, б) металлический диск диаметром 12-20 см или в) цепочка в виде петли.

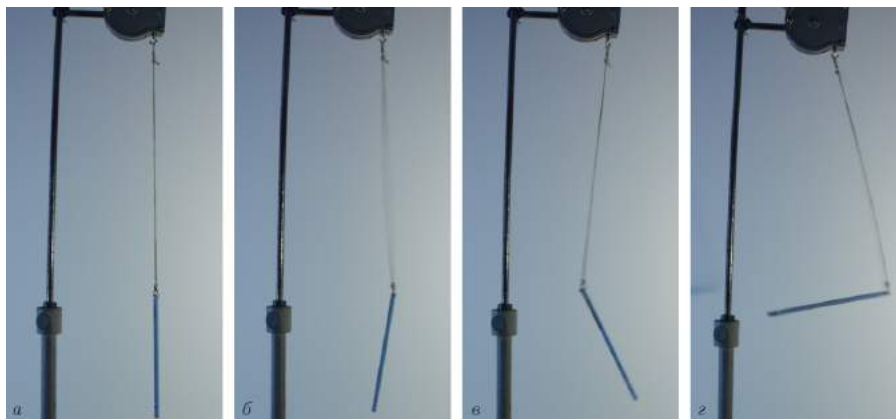


Рис. 2.17: Вращение цилиндрического стержня вокруг главной оси инерции

Подвешенная за один из концов металлический стержень при малых скоростях вращается в вертикальном положении, т.е. вокруг свободной оси с наибольшим моментом инерции (рис.2.17).

При приведении машины во вращение стержень и диск, с увеличением угловой скорости, принимают горизонтальное положение (рис.2.18), а цепочка, кроме того, растягивается в правильный круг (рис.2.19).

Этот опыт демонстрирует вращение тел около свободных осей: при быстром вращении петля растягивается в круг, при чем ее плоскость располагается перпендикулярно к оси вращения. Центр круга цепочки будет лежать на продолжении оси вращения. Таким образом, цепочка будет устойчиво вращаться вокруг оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости образовавшегося кольца, т.е. вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

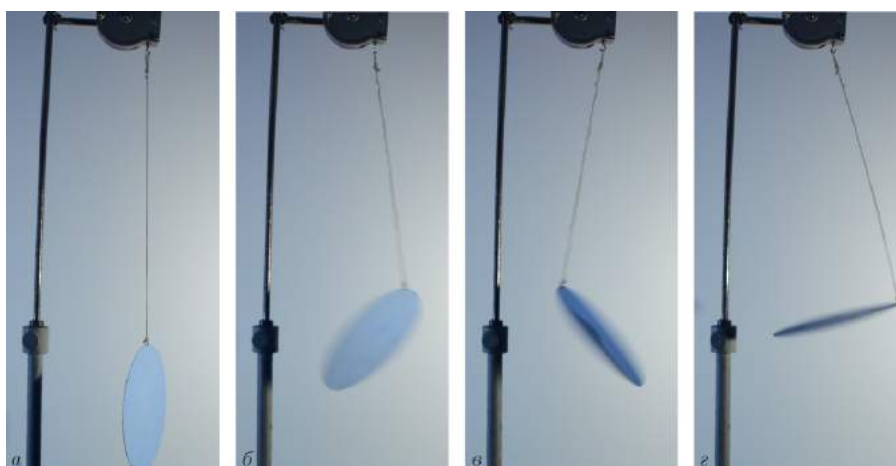


Рис. 2.18: Вращение алюминиевого диска вокруг главной оси инерции

Одна из особенностей поведения тела при вращении проявляется в том, что центр масс тела поднимается в поле силы тяжести.

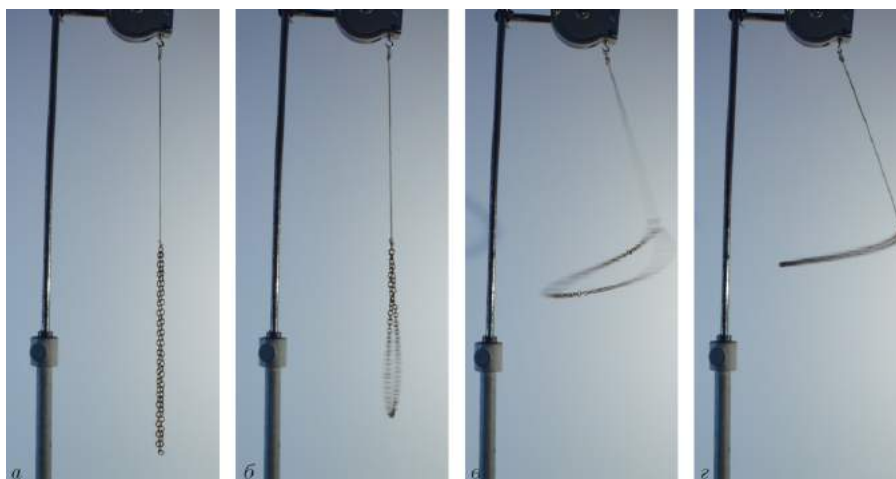


Рис. 2.19: Вращение металлической цепочки вокруг главной оси инерции

Теория

Рассмотрим в качестве примера диск, вращающийся вокруг неподвижной вертикальной оси, которая смещена от центра диска на расстояние $OC = b$ относительно неинерциальной системы отсчета. На тело действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, и угловая скорость вращения равна ω (рис.2.20).

Определим динамические реакции опоры в точках A и B , если $OA = OB = h$. Будем предполагать что в точке A установлен подпятник, а в точке B — шарнир.

Проведем вращающиеся с диском оси $Oxyz$ таким образом, чтобы ось y прошла через центр масс C . Ось Oz будет главной осью инерции диска для точки O , поскольку плоскость Oxy является плоскостью симметрии диска. Тогда момент инерции $I_{xz} = I_{yz} = 0$ и из условия $\omega = \text{const}$ видно, что силы инерции приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку O и направленной вдоль линии вдоль оси Oy . По модулю

$$F = ma_c = mb\omega^2.$$

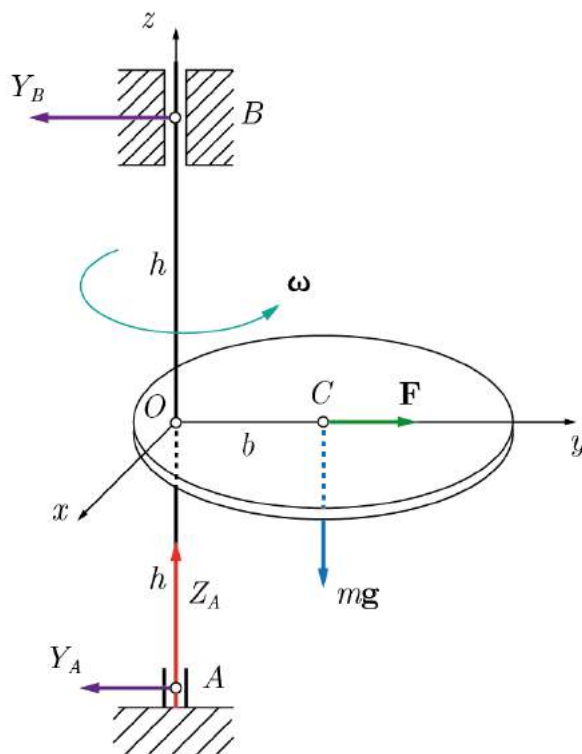


Рис. 2.20: При вращении твердого тела вокруг оси, концы которой жестко закреплены в подшипниках, возникающие в опорах динамические силы реакции уравниваются друг другом

Так как векторы сил $m\mathbf{g}$ и \mathbf{F} лежат в плоскости Oyz , то реакции подшипников лежат в этой же плоскости, то есть имеют составляющие Y_A и Z_A в точке A и Y_B в точке B . Тогда, составляя на основании принципа Даламбера для всех действующих сил и сил инерции уравнения равновесия в проекциях на оси Oy и Oz и уравнение моментов относительно центра A , получим:

$$F - Y_A - Y_B = 0, \quad (2.16)$$

$$Z_A - mg = 0, \quad (2.17)$$

$$Y_B 2h - mgb - Fh = 0. \quad (2.18)$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$Y_B = mgb \left(\frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2}h \right), \quad (2.19)$$

$$Y_A = mgb \left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2}h \right), \quad (2.20)$$

$$Z_A = mg. \quad (2.21)$$

Таким образом, реакции Y_A и Y_B все время располагаются в плоскости Oyz , вращающейся вместе с телом.

2.7. «Послушная» и «непослушная» катушка



Рис. 2.21: Демонстрация зависимости направления движения катушки от характера приложения силы

Оборудование

1. Катушка в виде оси с двумя дисками по краям.
2. Нить или широкая полоска бумажного листа, намотанная на ось катушки.

Основные определения

При движении механической системы ее центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу, равную массе системы, и находящаяся под действием всех внешних сил, приложенных к системе. Кроме того, уравнение вращательного движения твердого тела по отношению к осям, проходящим через центр масс и движущимся вместе с ним поступательно, сохраняют тот же вид, что и для движения по отношению к инерциальной системе отсчета. Ввиду этих свойств понятие о центре масс играет важную роль в динамике системы и твердого тела.

Тело находится в состоянии равновесия в поле силы тяжести, если каждая его точка остается все время неподвижной в некоторой инерциальной системе отсчета. Условием равновесия материальной точки является равенство нулю равнодействующей (векторной суммы) всех сил, приложенных к точке.

Для тела конечного объема (система из материальных точек) важно учитывать точку приложения каждой силы. Например, точка приложения вектора силы тяжести, действующего на тело вблизи поверхности Земли, называется центром тяжести. Центр тяжести твердого тела в обычных условиях совпадает с центром масс.

Однако для твердого тела недостаточно потребовать равенства нулю векторной суммы всех приложенных к телу сил — необходимо учесть его способность вращаться:

если тело обладает осью вращения и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно этой оси обращается в нуль, то тело будет оставаться в равновесии.

Краткое описание

Катушка представляет собой цилиндр из плотного картона, по краям которого расположены деревянные диски диаметром 200 мм. К середине катушки прикрепляется конец широкой полоски бумаги, которая несколько раз оборачивается вокруг цилиндра. Катушку кладут на стол и тянут за конец полоски, выходящий из-под нижней поверхности цилиндра. Катушка перемещается в ту или иную сторону в зависимости от того, какой момент силы больше относительно мгновенной оси O , находящейся в плоскости стола: внешней силы F или силы трения $F_{\text{тр}}$. В положении (а) полоска бумаги закручивает катушку по часовой стрелке (рис.2.22), в положении (б) — против.

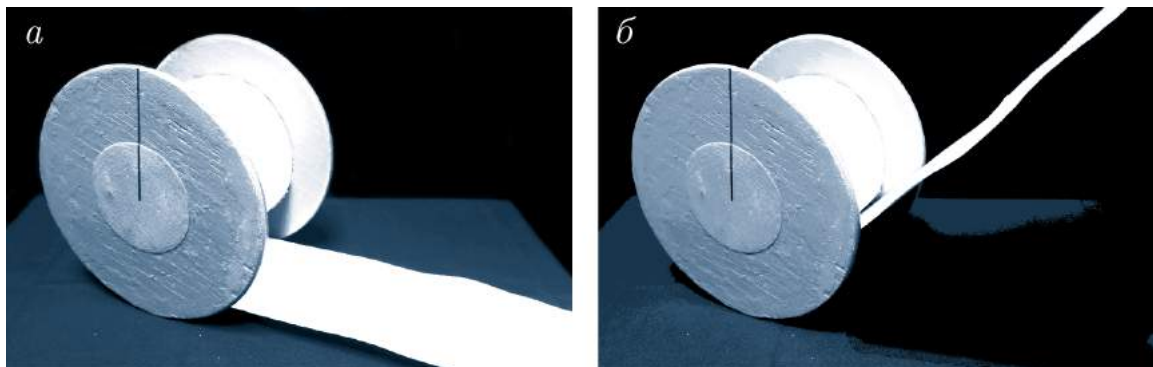


Рис. 2.22: В зависимости от способа приложения силы создаются моменты, вращающие катушку либо по ходу часовой стрелки (а), либо против (б)

Теория

Рассмотрим задачу о движении цилиндрического тела под действием силы F , приложенной так, как показано на рис.2.23.

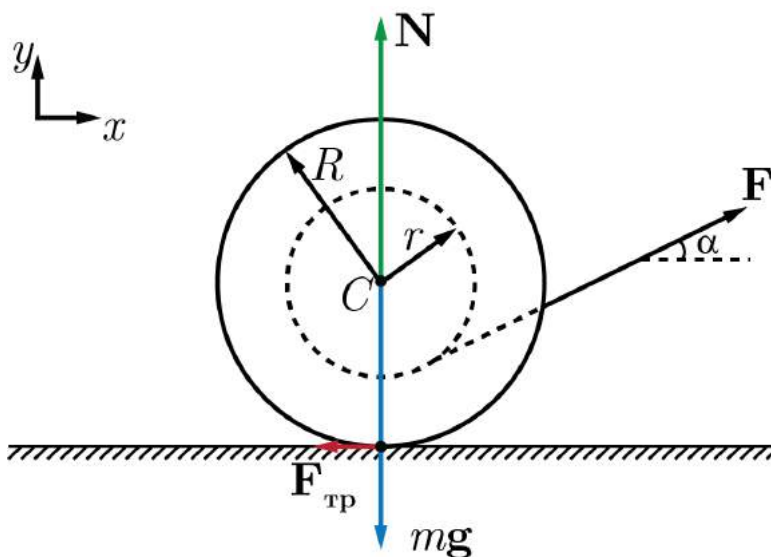


Рис. 2.23: Схематичное изображение катушки и действующих на нее сил

Запишем уравнение движения центра масс и основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = m\mathbf{a} \\ \mathbf{M}_{F_{\text{тр}}} + \mathbf{M}_F = I\boldsymbol{\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.22)$$

где m — масса катушки, \mathbf{a} — вектор поступательного ускорения точек тела, I — момент инерции катушки относительно оси, проходящей вдоль ее оси, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения тела, создаваемый моментом \mathbf{M}_F внешней силы, $\mathbf{M}_{F_{\text{тр}}}$ — момент силы трения.

Уравнения записанной выше системы необходимо спроецировать на соответствующие координатные оси:

$$\begin{cases} Ox : F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = ma \\ Oz : F_{\text{тр}} R - Fr = I\varepsilon. \end{cases} \quad (2.23)$$

Пользуясь известным соотношением между линейным и угловым ускорением ($a = \varepsilon R$), можно из первого уравнения системы выразить силу трения $F_{\text{тр}} = F \cos \alpha - m\varepsilon R$ и подставить во второе уравнение:

$$FR \cos \alpha - m\varepsilon R^2 - Fr = I\varepsilon. \quad (2.24)$$

$$\varepsilon(I + mR^2) = F(R \cos \alpha - r). \quad (2.25)$$

После этого можно получить выражение для углового ускорения ε :

$$\varepsilon = \frac{F(R \cos \alpha - r)}{(I + mR^2)} \quad (2.26)$$

Затем, используя это соотношение, можно выразить линейное ускорение a :

$$a = \varepsilon R = \frac{FR(R \cos \alpha - r)}{(I + mR^2)}. \quad (2.27)$$

Из полученного уравнения видно, что для случая $a < 0$ (движение в сторону, противоположную направлению силы \mathbf{F}), необходимо чтобы выполнялось следующее условие: $\cos \alpha < r/R$. Такая ситуация возникает, когда внешняя сила \mathbf{F} направлена под достаточно крутым углом к горизонту.

Стоит отметить, что момент инерции складывается из моментов инерции втулки и двух крайних дисков (рис.2.22). Его значение можно либо взять из таблицы, либо определить опытным путем.

2.8. Скамья Жуковского



Рис. 2.24: Демонстрация закона сохранения момента импульса в опытах со скамьей Жуковского

Оборудование

1. Скамья Жуковского (вращающаяся платформа).
2. Два груза массой 250 г каждый.
3. Гироскоп в кардановом подвесе.

Основные определения

Момент импульса — одна из мер механического движения материальной точки или системы. Особенно важную роль момент импульса играет при изучении вращательного движения. Как и для момента силы, различают момент импульса относительно центра (точки) и относительно оси. Для вычисления момента импульса \mathbf{L} материальной точки относительно центра O или оси z справедливы те же формулы, что и для вычисления момента силы, если в них заменить вектор силы \mathbf{F} вектором импульса $m\mathbf{v}$. Таким образом, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$, где \mathbf{r} — радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O .

Изменение момента импульса точки происходит под действием момента \mathbf{M}_F приложенной силы и определяется теоремой об изменении момента импульса (уравнением моментов), выражаемой уравнением

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{M}_F.$$

Главный (полный) момент импульса механической системы относительно центра O или оси z равен соответственно геометрической или алгебраической сумме моментов импульса всех точек системы относительно того же центра или оси, т. е. $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$. Вектор \mathbf{L} может быть определен его проекциями L_x , L_y , L_z на соответствующие координатные оси выбранной прямоугольной системы координат. Если ось z является главной осью инерции для начала координат O , то $L_z = I_z \omega$.

Изменение главного момента импульса системы происходит под действием только внешних сил и зависит от их главного момента $\mathbf{M}^{\text{внеш}}$. Эта зависимость определяется теоремой об изменении полного момента импульса системы, выражаемой уравнением (уравнением моментов для системы точек)

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{M}^{\text{внеш}}.$$

Аналогичным уравнением связаны моменты L_z и $M_z^{\text{внеш}}$. Если $M^{\text{внеш}} = 0$ или $M_z^{\text{внеш}} = 0$, то соответственно L или L_z будут величинами постоянными, т. е. имеет место закон сохранения момента импульса. Таким образом, внутренние силы не могут изменить полный момент импульса системы, но момент импульса отдельных частей системы или угловые скорости под действием этих сил могут изменяться.

У вращающегося вокруг вертикальной оси z фигуриста (или балерины) величина $L_z = I_z \omega$ будет постоянной, т. к. практически $M_z^{\text{внеш}} = 0$. Но изменяя движением рук или ног значение момента инерции I_z , он может изменять угловую скорость ω .

Другим примером выполнения закона сохранения момента импульса служит появление реактивного момента у двигателя с вращающимся валом (ротором). Понятие о моменте импульса широко используется в динамике твердого тела, особенно в теории гироскопа.

Краткое описание

Скамья Жуковского состоит из станины с опорным шариковым подшипником, в котором вращается верхняя часть скамьи с горизонтальной круглой платформой. Центр платформы совпадает с осью вращения скамьи.

Опыт 1: Взяв в каждую руку груз массой около 250 г, человек садится на скамью и разводит руки в стороны. Второй человек «раскручивает» скамью так, чтобы она и сидящей на ней человек вращались со скоростью приблизительно один оборот в 1.5-2 секунды, и отходит в сторону. Сидящий на скамье человек резким движением приближает руки с грузом к груди, уменьшая свой момент инерции. Так как произведение момента инерции на угловую скорость в замкнутой системе остается постоянным, то платформа с сидящим на ней человеком начинает вращаться значительно быстрее. Разведя руки с грузами в стороны для увеличения момента инерции, он вновь уменьшает свою скорость вращения. Демонстрацию следует повторить несколько раз.

Опыт 2: Возьмем колесо или деревянный круг и вставим в его втулку ось. Возьмемся за ось двумя руками по разные стороны от колеса, и попробуем повернуть ее в вертикальной плоскости. Оказывается, что сделать это довольно легко, так как невращающееся колесо не оказывает этому повороту никакого сопротивления. Придадим теперь колесу быстрое вращение вокруг его собственной оси с угловой скоростью ω и вновь попытаемся повернуть его в вертикальной плоскости. В ходе опыта можно заметить, что ось колеса, сопротивляясь этому повороту, поворачивается вместе с тем в горизонтальной плоскости.

Опыт 3: Другой вариант демонстрации закона сохранения момента импульса показывают с использованием колеса с шариковым подшипником (от гироскопа в кардановом подвесе, масса которого в основном сосредоточена на периферии. Из-за того, что вся масса колеса сосредоточена на ободе, это колесо при быстром вращении обладает большим моментом инерции. Раскрутив колесо и держа его ось горизонтально, это колесо передается в руки сидящему на скамье человеку.

Демонстратор (человек, который сидит на скамье) поворачивает ось вращающегося колеса так, чтобы она заняла вертикальное положение. Теперь момент импульса колеса относительно вертикальной оси не равен нулю, но общий момент системы относительно этой оси должен по-прежнему оставаться равным нулю; поэтому скамья с сидящим на ней человеком начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Если повернуть ось колеса на 180° , то скамья изменит направление вращения на противоположное. В этом положении общий момент импульса системы относительно вертикальной оси равен нулю (в начале опыта ось вращения колеса горизонтальна).

Теория

Опыт 1: Человек, держащий гири составляет вместе со скамьей замкнутую механическую систему, поэтому момент импульса $I\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение.

Следовательно для данного случая:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (2.28)$$

где I_1 — момент инерции человека с вытянутыми руками, находящегося на скамье (2.25,а), I_2 — момент инерции человека с прижатыми к груди руками (2.25,б), ω_1 — угловая скорость человека с вытянутыми руками (2.25,а), а ω_2 — момент инерции человека с прижатыми к груди руками (2.25,б). Выразив ω_2 :

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1. \quad (2.29)$$

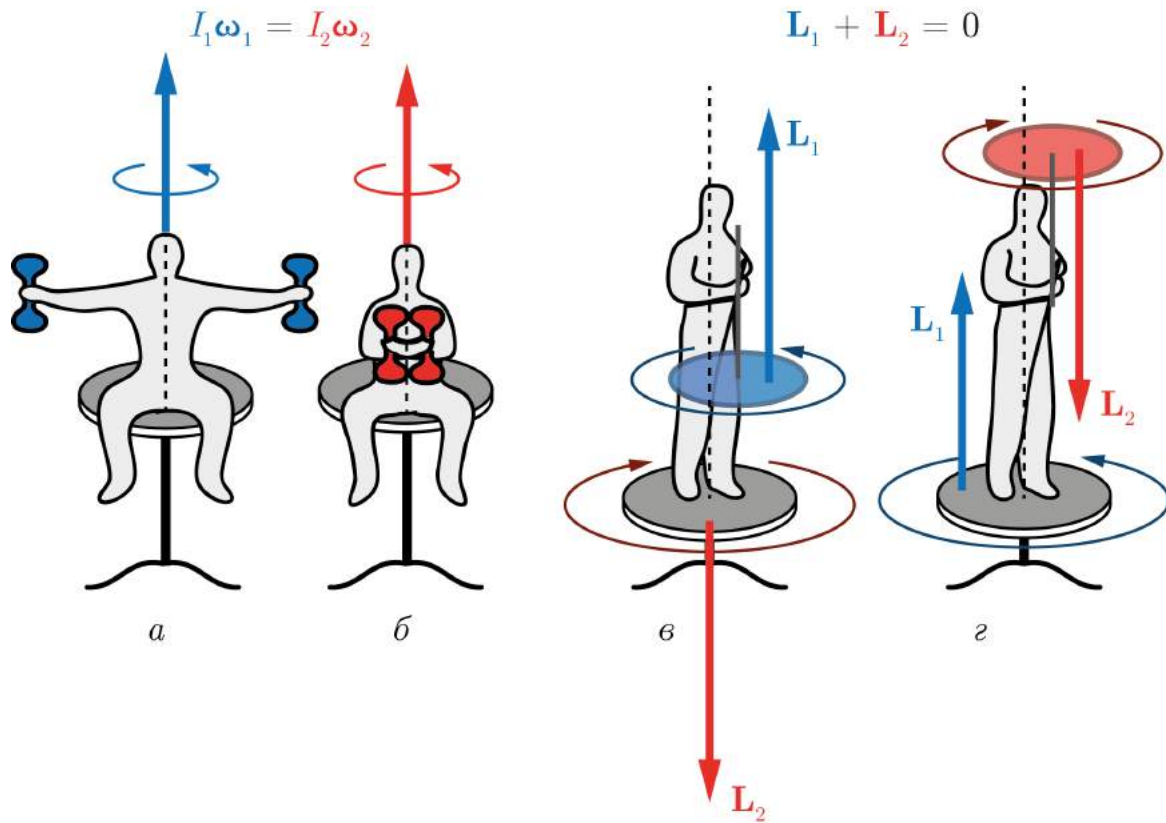


Рис. 2.25: При изменении момента инерции системы за счет перемещения рук или поворота гироскопа угловая скорость вращения скамьи Жуковского изменяется таким образом, чтобы полный момент импульса в системе остался равным начальному

Угловую скорость можно выразить, через частоту вращения соотношением $\omega = 2\pi\nu$. Произведя замену в уравнении (2.29) получим:

$$2\pi\nu_2 = 2\pi \frac{I_1}{I_2} \nu_1. \quad (2.30)$$

Сократив 2π в выражении (2.29) получаем:

$$\nu_2 = \frac{I_1}{I_2} \nu_1. \quad (2.31)$$

Момент инерции рассматриваемой системы, равен сумме моментов инерции тела человека I_0 и момента инерции гирь в руках человека. Так как размер гирь много меньше расстояния их от оси вращения, то момент инерции гирь можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $I = mr^2$. Следовательно,

$$I_1 = I_0 + 2m \left(\frac{l_1}{2} \right)^2. \quad (2.32)$$

$$I_2 = I_0 + 2m \left(\frac{l_2}{2} \right)^2, \quad (2.33)$$

где m - масса каждой гири; l_1 и l_2 - первоначальное и конечное расстояние между гирями. Подставив выражение (2.32) и (2.33) в уравнение (2.31) получим:

$$I_2 = \frac{I_0 + 2m \left(\frac{l_1}{2} \right)^2}{I_0 + 2m \left(\frac{l_2}{2} \right)^2} \nu_1. \quad (2.34)$$

Из формулы (2.32) и (2.33) видно, что момент инерции зависит от положения грузов. При положении гирь на вытянутых руках (l_1) он оказывается больше, нежели при гирях прижатых к телу (l_2). Оказывается, что $I_1 > I_2$, это и приводит к увеличению скорости вращения (2.29).

Опыт 2: Объяснить причину сопротивления вращающегося колеса изменению его ориентации в пространстве довольно легко. Действительно, стремясь повернуть ось колеса в вертикальной плоскости,

демонстратор тем самым прикладывает к этой оси пару сил, момент \mathbf{M} которой направлен вдоль оси y (рис.2.26).

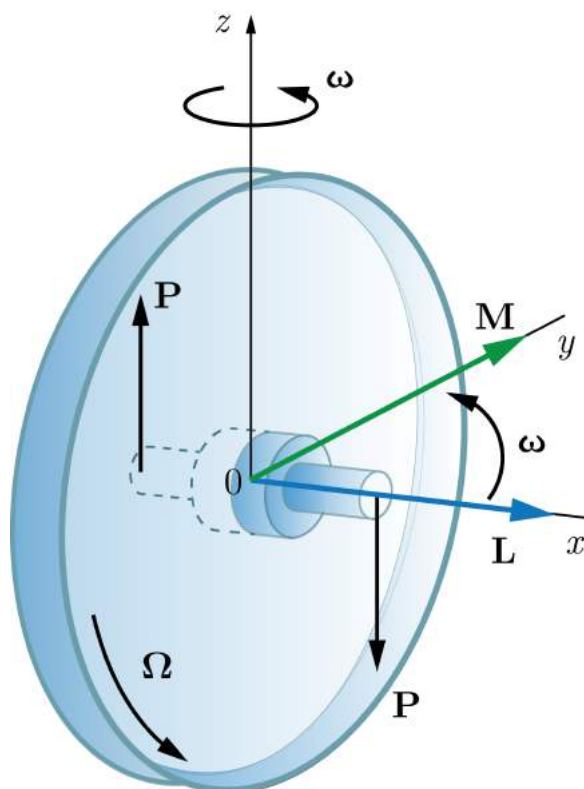


Рис. 2.26: Опыт с быстро вращающимся гироскопом. Чтобы повернуть ось гироскопа в горизонтальной плоскости, следует надавить на нее левой рукой вниз, а правой - вверх

Согласно правилу прецессии, движение оси x собственного вращения колеса должно происходить так, если бы вектор \mathbf{L} стремился к совмещению с вектором \mathbf{M} по кратчайшему пути. В результате и будет наблюдаться прецессия оси гироскопа в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω , указанной на рис.2.30. Нетрудно убедиться в том, что если попытаться повернуть ось вращающегося колеса в горизонтальной плоскости, то на самом деле эта ось будет поворачиваться в плоскости вертикальной.

Опыт 3: Человек, стоящий на неподвижной скамье, получает, вращающийся вокруг вертикальной оси (рис.2.25,в), диск гироскопа. В этом случае момент импульса системы человек и платформа-колесо определяется только моментом импульса колеса:

$$L = I_0 \dot{\theta} + I_D \omega_D = I_D \omega_D, \quad (2.35)$$

где I_0 — момент инерции человека и платформы; I_D и ω_D — момент инерции и угловая скорость диска гироскопа. Так как момент внешних сил относительно вертикальной оси равен нулю, то L сохраняется ($L = \text{const}$). Если повернуть ось вращения колеса на 180° (рис.2.25,г), то момент импульса колеса будет направлен противоположно первоначальному и равен $I_D \omega_D$. Так как вектор момента импульса колеса изменяется, а момент импульса системы сохраняется, то неизбежно должен измениться и момент импульса, человека и платформы, он уже не будет равен нулю (тут можно пренебречь небольшим несовпадением оси вращения платформы с осью вращения диска). Момент импульса системы в этом случае:

$$L = I_0 \omega_0 + (-I_D \omega_D). \quad (2.36)$$

Из закона сохранения момента импульса позволяет приравнять выражения (2.35) и (2.36):

$$I_D \omega_D = I_0 \omega_0 + (-I_D \omega_D). \quad (2.37)$$

Или в скалярной форме:

$$I_D \omega_D = I_0 \omega_0 + (-I_D \omega_D). \quad (2.38)$$

Преобразуем уравнение (2.38)

$$I_0 \omega_0 = 2I_D \omega_D. \quad (2.39)$$

Из уравнения (2.39) можно к примеру приближенно оценить момент инерции тела человека вместе с платформой, для чего необходимо измерить ω_D , ω_0 и найти I_D .

3 | Закон сохранения и превращения энергии

3.1. Упругий и неупругий удары

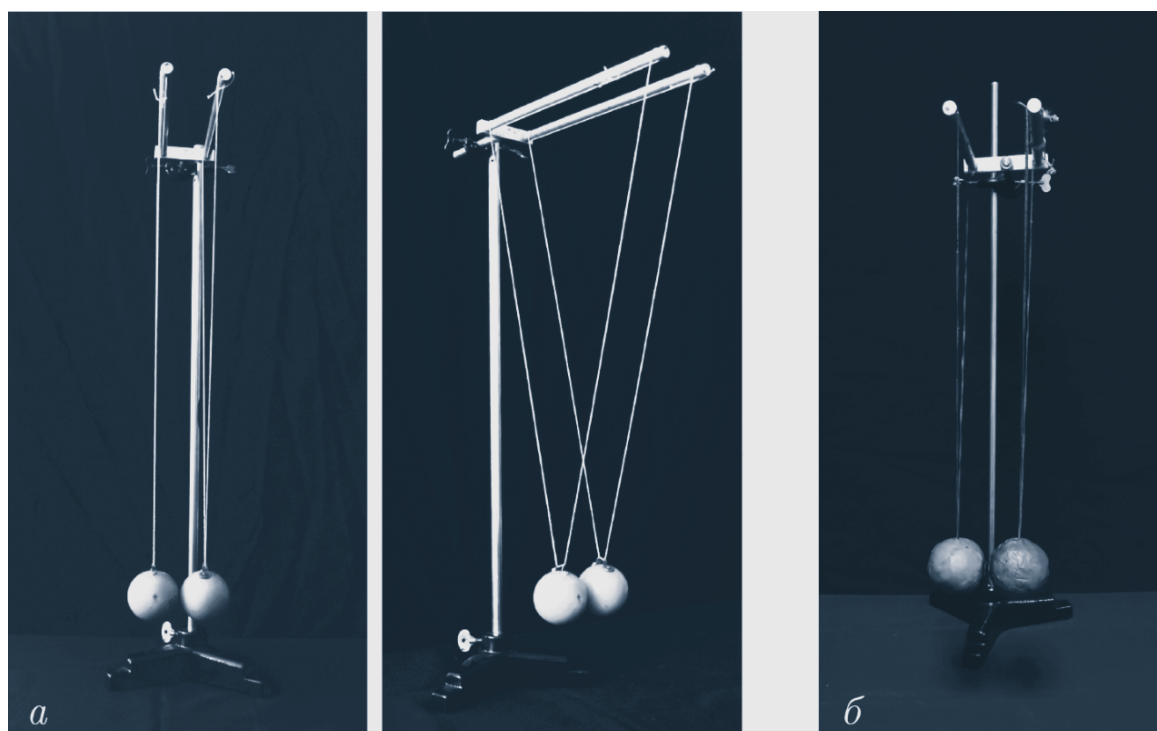


Рис. 3.1: Демонстрация сохранения импульса при центральном соударении двух тел: а — бильiardные шары (удар — упругий); б — пластилиновые шары (удар — неупругий)

Оборудование

1. Пара бильiardных шаров на бифилярных подвесах.
2. Пара шаров из пластилина с деформируемой поверхностью.
3. Специальный подвес.
4. Штатив.

Основные определения

Второй закон Ньютона в импульсной форме для системы материальных точек имеет вид

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

где $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ — результирующая внешних сил, действующих на систему, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N$ — суммарный импульс системы N тел.

Система тел называется замкнутой, если действия внешних тел на тела данной системы или пренебрежимо малы, или компенсируют друг друга. Таким образом, в случае замкнутой системы тел существенно лишь взаимодействие этих тел друг с другом, но не с какими-либо другими телами. Равнодействующая внешних сил, приложенных к замкнутой системе, равна нулю: $\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$. В этом случае

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0.$$

Если производная по времени или, другими словами, скорость изменения импульса \mathbf{P} обращается в нуль, то сам вектор не меняется со временем, т. е. сохраняется: $\mathbf{P} = \text{const}$. Закон сохранения импульса можно сформулировать в следующем виде:

Импульс замкнутой системы тел остается постоянным с течением времени при любых взаимодействиях тел внутри данной системы.

При соударении двух тел удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой.

Краткое описание

Для демонстрации закона сохранения импульса на примере системы из двух подвесных маятников вначале необходимо подобрать длину нитей такой, чтобы соударение тел было центральным.

В ходе опыта с двумя бильярдными шарами одинаковой массы, отклонив один из шаров, отпускают его (рис.3.2,а). Под действием силы тяжести этот шар начнет изменять скорость, а, следовательно до столкновения с покоящимся телом, его успеет приобрести некоторый импульс (рис.3.2,б). Ударившись о второй шар, первый останавливается, а второй отклоняется почти на такое же расстояние, на какое был отклонен первый (рис.3.2,в). Затем второй шар ударится о первый и останется на месте, а первый шар отклонится и т. д. После трех-пяти ударов шары следует остановить, т. к. вследствие не вполне упругого удара они оба приходят в движение.

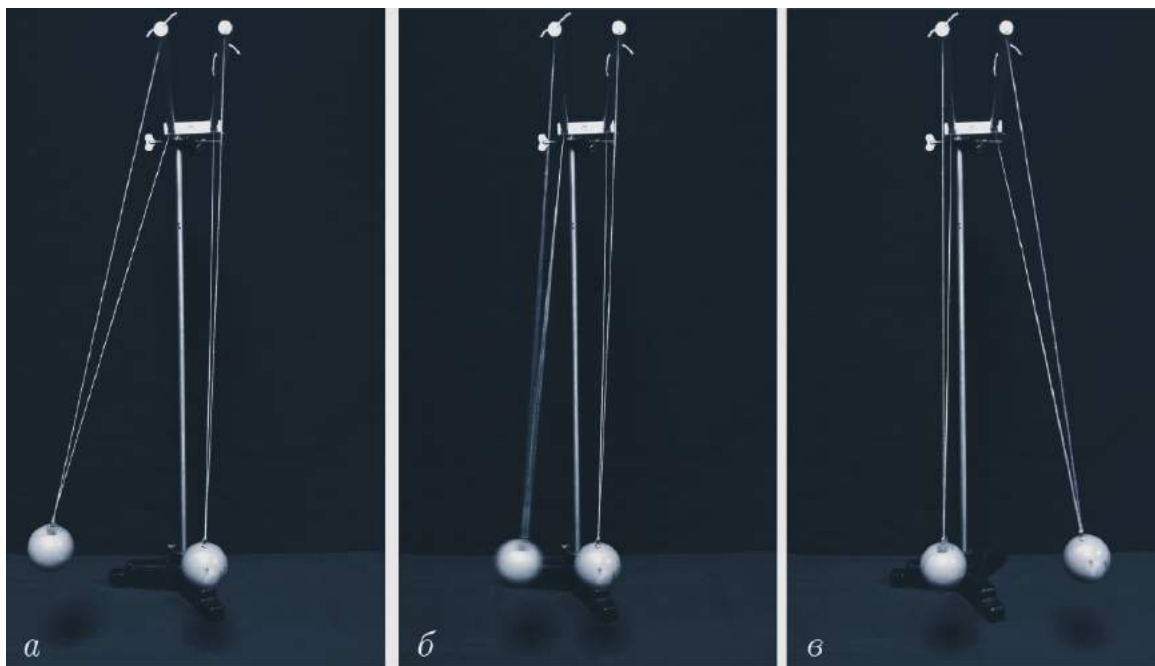


Рис. 3.2: Демонстрация сохранения импульса при упругом соударении одинаковых бильярдных шаров. Если отклонить один из шаров на некоторый угол и отпустить, то после столкновения этот шар остановится, а второй отклонится на тот же угол



Рис. 3.3: Демонстрация сохранения импульса при неупругом соударении шаров. В момент удара тела деформируются, часть кинетической энергии переходит в энергию пластичной деформации и тепло, а объединившиеся в результате столкновения шары отклоняются на меньший угол

В следующей демонстрации, которая позволяет наблюдать закон сохранения импульса при неупругом ударе, т. е. в случае, когда при столкновении двух тел существенным оказывается их деформация. Для этого на штатив подвешиваются два пластилиновых шара одинакового размера и массы. Чтобы обеспечить центральный удар и движение шаров в одной вертикальной плоскости, используются бифилярные подвесы. В положении равновесия пластилиновые шары слегка касаются друг друга.

Такая система по-прежнему является замкнутой, а, значит, для нее также справедлив закон сохранения импульса. При отведении одного из шаров в сторону его отпускают. После удара оба шара движутся совместно с одинаковой скоростью, но отклоняются на угол, меньший по сравнению с углом отклонения первого шара (рис.3.3,а). Перед опытом один из шаров следует нагреть над пламенем спички или зажигалки, усилив тем самым процесс слипания в момент удара.

Рассчитать скорость шаров после неупругого взаимодействия (рис.3.3,в), а также вычислить угол отклонения двух шаров можно при помощи закона сохранения импульса.

Теория

Закон сохранения импульса позволяет рассчитывать скорости сталкивающихся тел при абсолютно упругом или неупругом ударах.

Упругий удар. Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух тел. С целью упрощения выкладок возьмем тела равной массы m . Пусть в некоторый момент времени эти тела имеют скорости \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 и в течение времени Δt действуют друг на друга с некоторыми силами \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 . Определим, как будут связаны друг с другом скорости \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 , которые приобретут тела после такого взаимодействия.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, систему можно считать замкнутой. Поэтому для нее будет справедлив закон сохранения импульса:

$$\mathbf{p}_{\text{до}} = \mathbf{p}_{\text{после}}. \quad (3.1)$$

Импульс системы до удара — это сумма импульсов тел:

$$\mathbf{p}_{\text{до}} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2. \quad (3.2)$$

Для наглядности опыта одно из тел в начале можно рассмотреть неподвижным, т. е. его скорость \mathbf{v}_1 до столкновения следует принять равной нулю (рис.3.4,а). Полный импульс системы в этом случае складывается только из импульса второго шара, который до момента столкновения успевает приобрести скорость \mathbf{v}_2 (рис.3.4,б).

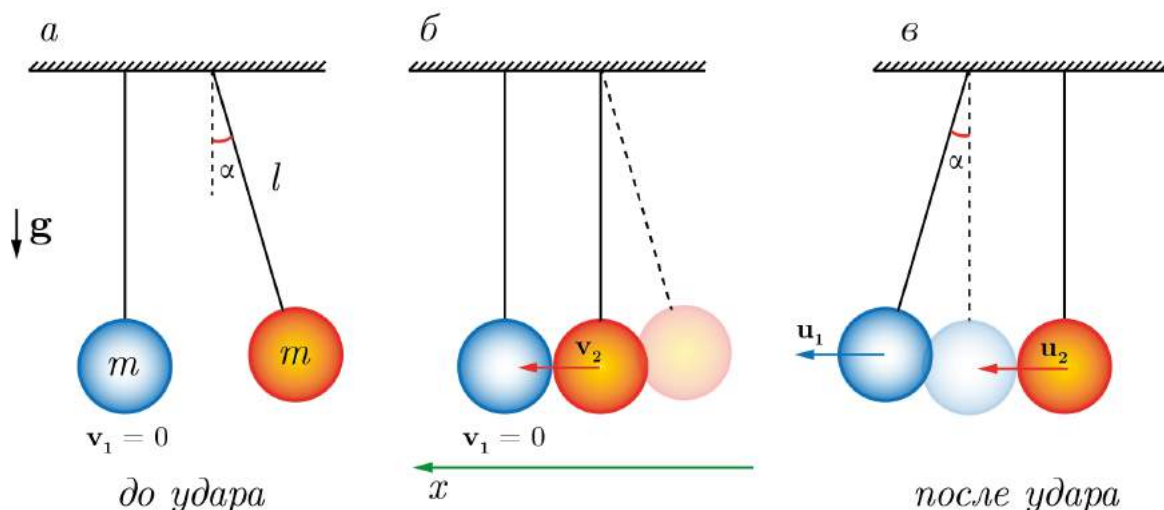


Рис. 3.4: При упругом столкновении двух шаров одинаковой массы импульс тела $p = mv_2$ полностью передается покоящемуся шару. После удара первый шар останавливается, а второй отклоняется на тот же угол

В момент упругого соударения тела взаимодействуют в течение промежутка времени Δt внутри системы происходит перераспределение импульса. Неподвижный шар, испытывая действие силы со стороны ударяющего шара, приобретает ускорение, и в результате начинает движение в ту же сторону, куда двигался второй шар (рис.3.4,б). Передав в ходе взаимодействия часть импульса, движущийся шар замедлится. После упругого соударения (без учета сопротивления воздуха и деформации шаров) полный импульс системы станет равным:

$$\mathbf{p}_{\text{после}} = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2. \quad (3.3)$$

Из закона сохранения импульса имеем:

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2, \quad (3.4)$$

или с учетом покоя в начальный момент одного из шаров ($\mathbf{v}_1 = 0$):

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2. \quad (3.5)$$

Из опыта следует, что при центральном упругом соударении шаров одинаковой массы, один из которых до удара покоится, импульс движущегося шара полностью передается неподвижному телу. При этом первый шар останавливается, то есть его скорость после взаимодействия $\mathbf{u}_2 = 0$. Из соотношения для скоростей (3.5) тогда следует, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2$. Другими словами, импульс одного из шаров ($m\mathbf{v}_2$) при упругом взаимодействии полностью переходит другому шару, который начинает движение с той же самой скоростью. Угол отклонения этого шара окажется равным начальному углу α .

Неупругий удар. Задача о нахождении скорости тел после неупругого столкновения оказывается проще, чем для упругого удара, поэтому можно рассмотреть более общий случай столкновения двух тел различной массы m_1 и m_2 . Полный импульс системы до удара в этом случае также есть величина

$$\mathbf{p}_{\text{до}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2.$$

После неупругого соударения тела деформируются и слипаются, образуя тело массой $m = m_1 + m_2$, которое начинает двигаться со скоростью \mathbf{u} как единое целое (рис.3.5,в).

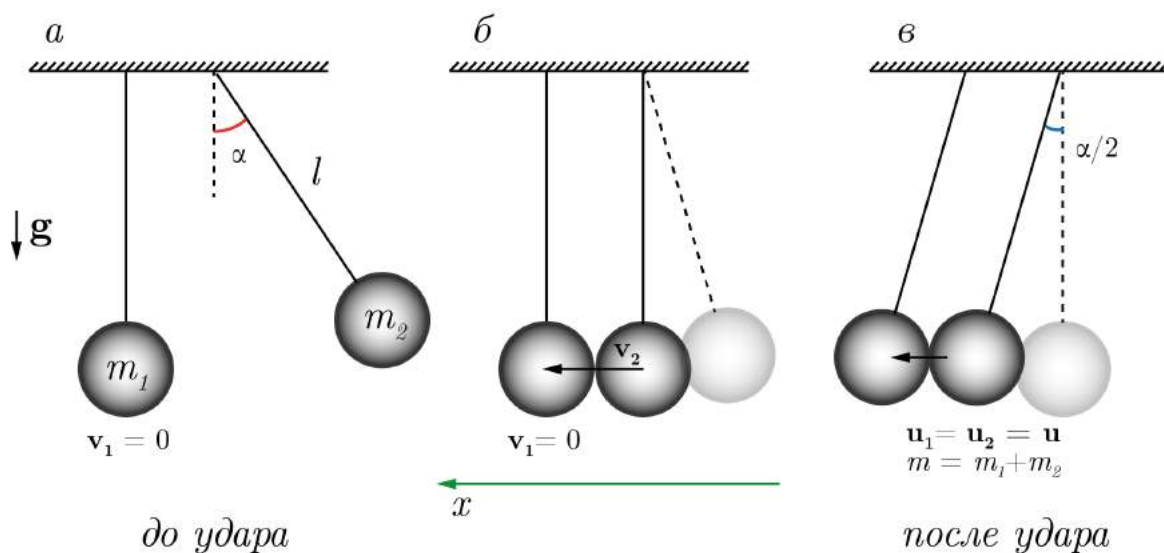


Рис. 3.5: При неупругом столкновении двух шаров импульс одного из тел ($p_2 = m_2 v_2$) перераспределяется внутри системы из двух тел общей массой $m = m_1 + m_2$. После объединения шаров в единое целое скорость движения всей системы в силу закона сохранения импульса уменьшится. Также станет меньше угол, на который отклонится вся система после взаимодействия

Импульс такой системы после соударения равен

$$\mathbf{p}_{\text{до}} = (m_1 + m_2)\mathbf{u}.$$

Отсюда можно определить скорость системы после удара:

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m}, \quad (3.6)$$

или в проекции на горизонтальную ось x :

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m}. \quad (3.7)$$

Для случая столкновения тел одинаковой массы (один из шаров по-прежнему в начале неподвижен, $v_{1x} = 0$), скорость системы после взаимодействия будет равна половине начальной скорости, т.е. $u_x = v_{2x}/2$, причем их направления будут совпадать. Можно показать, что при малом начальном угле отклонения α после неупругого соударения система отклонится на угол вдвое меньше начального угла $\alpha/2$.

3.2. Маятник Максвелла

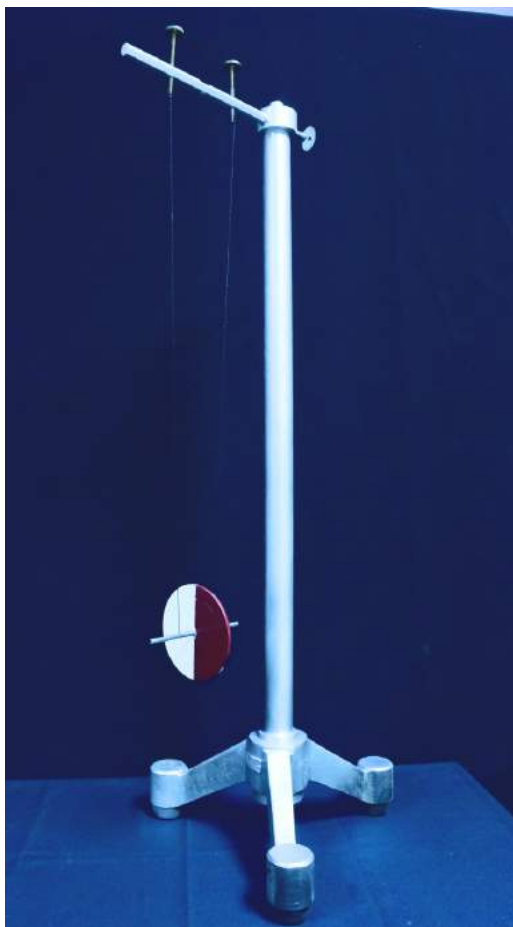


Рис. 3.6: Демонстрация перехода потенциальной энергии в кинетическую и обратно

Оборудование

1. Металлический диск радиусом 5 см и массой 300 г на бифилярном подвесе.
2. Штатив с металлическим стержнем.

Основные определения

Можно показать, что если тело вращается относительно оси, проходящей через его центр масс, и одновременно перемещается поступательно так, что ось смещается параллельно самой себе, то согласно теореме Кёнига

полная кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс тела (считая сосредоточенной в нем массу тела) и кинетической энергии вращения тела:

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где v_c — скорость поступательного движения центра масс, I — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс, ω — угловая скорость вращения тела вокруг той же оси.

Следует также отметить, что энергия вращательного движения при заданной угловой скорости существенно зависит от распределения в теле массы – момента инерции. Отсюда становится понятным, зачем маховики делают с большим моментом инерции. Очевидно, чтобы увеличить при данной угловой скорости его кинетическую энергию. Значительный запас энергии кинетический энергии необходим, например, для сохранения равномерности хода двигателя механизма при внезапно меняющейся нагрузке.

Краткое описание

Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m , туго насаженный на ось радиусом r , за которую маятник подвешивается на двух нитях к металлическому стержню (рис.3.6).

Для выполнения демонстрации стержень укрепляется на физическом штативе. Поворачивая концы оси обеими руками, накручивают на нее нити так, чтобы витки укладывались в один ряд и навинчивались от концов оси к диску. При этом диск поднимается на некоторую высоту.

Затем отпускают ось. Диск, вращаясь, начинает опускаться вниз и разматывает нити. В крайнем нижнем положении скорость вращения диска будет наибольшей. Далее диск, вращаясь по инерции, наматывает нить на ось и поднимается вверх (рис.3.7). Теперь скорость вращения диска будет постепенно уменьшаться, пока он не остановится почти на той же высоте, с которой его пустили. После этого диск, вращаясь, снова начнет опускаться вниз, а потом подниматься вверх и т.д.

Подъем и опускание диска будут продолжаться до тех пор, пока запас энергии, который сообщили диску при его подъеме на некоторую высоту, не израсходуется на преодоление упругости нити, на трение оси с нитью и на сопротивление воздуха.

Таким образом, сущность демонстрации заключается в следующем: если данной системе, состоящей из массивного диска на оси, сообщить некоторое количество энергии (совершить работу, подняв диск на определенную высоту), то последняя почти целиком (за исключением потерь) переходит из одной формы в другую. В данном случае энергия потенциальная (энергия положения) переходит в энергию кинетическую (энергию движения) и наоборот.

Если во время опускания диска несколько нажать на ось вниз, то диск начнет вращаться быстрее и поднимется затем выше уровня, с которого его пустили. Дополнительное количество энергии, которое при этом сообщили системе, прибавится к имеющемуся запасу и будет влиять на максимальную скорость вращения и высоту подъема диска.

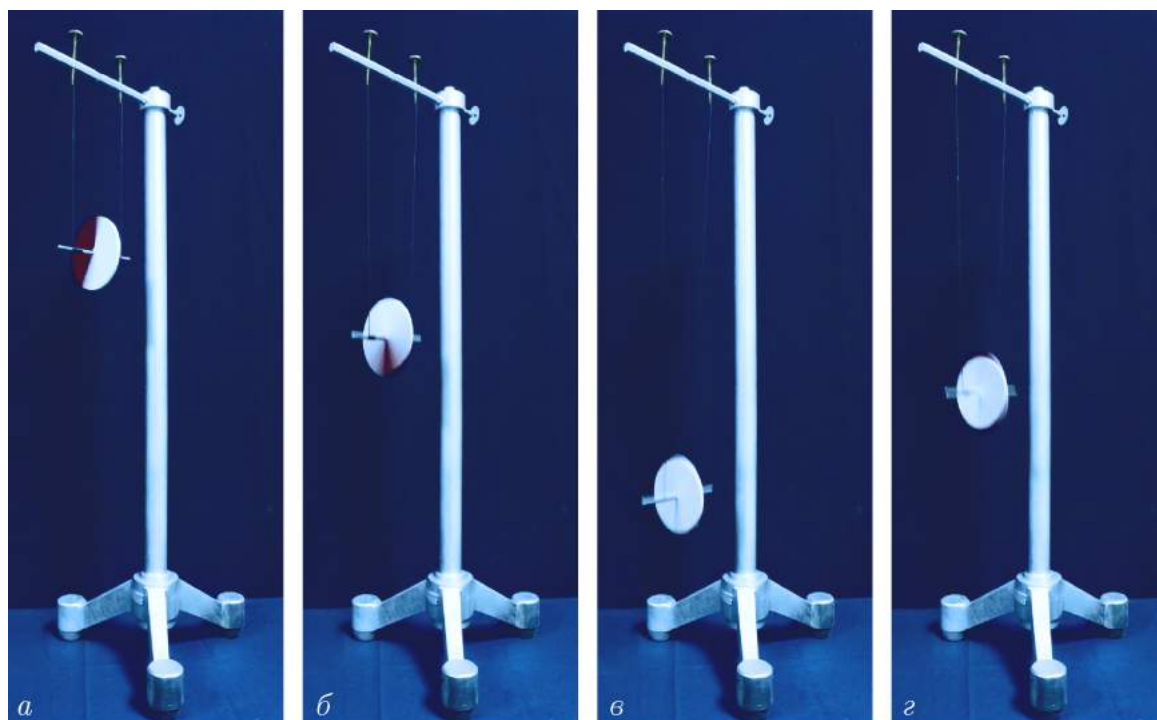


Рис. 3.7: Фотографии различных состояний маятника Максвелла: а — начальное положение с наибольшей потенциальной энергией; б — подвес маятника раскрутился наполовину; в — диск маятника находится в самой нижней точке и обладает наибольшей кинетической энергией

Подготовка опыта: При подготовке демонстрации надо обратить внимание на следующее:

- а) Стержень следует установить в штативе горизонтально и достаточно прочно зажать в муфте винтом.
- б) Штатив рекомендуется использовать наиболее массивный, чтобы устранить колебания всей системы.
- в) Ось вращения диска должна быть расположена горизонтально.
- г) Нити нужно брать одинаковой длины и симметрично расположить их относительно диска; расстояние между нитями у стержня должно быть несколько меньше, чем у оси.

Теория

Когда маятник отпускается, он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси.

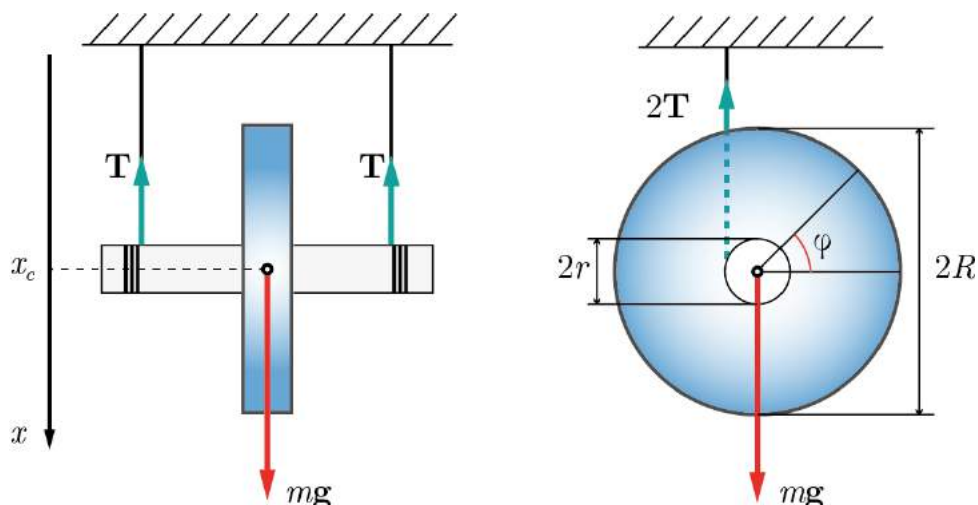


Рис. 3.8: Схематичное изображение сил, действующих на массивный диск в маятнике Максвелла

Измеряя расстояние, пройденное диском, и время движения можно рассчитать момент инерции маятника Максвелла. На рис.3.8 указаны силы, действующие на маятник. Для описания движения маятника удобно выбрать систему отсчета, связанную с центром масс маятника. Центр масс маятника опускается вниз с линейным ускорением a . Уравнение движения центра масс маятника имеет вид:

$$ma = mg + T, \quad (3.8)$$

где T — сила натяжения каждой из нитей, m — масса маятника.

Необходимо учесть, что маятник совершает также вращательное движение вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс под действием момента силы натяжения нитей $M = rT$, где M — момент сил натяжения T , а r — радиус вала.

Основное уравнение вращательного движения имеет вид

$$M = I\varepsilon, \quad (3.9)$$

где ε — угловое ускорение вращения маятника, I — момент инерции маятника.

Спроектируем силы на направление движения маятника. Так как центр масс маятника опускается на столько, на сколько раскручивается нить, то перемещение x центра масс связано с углом поворота φ соотношением:

$$x = \varphi r. \quad (3.10)$$

Дифференцируя это выражение дважды по времени, получим

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon. \quad (3.11)$$

С учетом выражения (3.9) уравнение (3.11) можно переписать следующим образом

$$rT = \frac{Ia}{r}. \quad (3.12)$$

Приведем полученное выражение к виду

$$T = \frac{Ia}{r^2}. \quad (3.13)$$

Учитывая уравнение (3.8), получим выражение для линейного ускорения центра масс маятника

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}, \quad (3.14)$$

а для силы натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{1 + mr^2/I}. \quad (3.15)$$

Из полученных соотношений следует, что ускорение маятника и сила натяжения нити не изменяются со временем. Следовательно, если при опускании маятника координату x_c его центра масс отсчитывать от начального положения равновесия, ось направить вниз, то со временем положение маятника меняется по закону:

$$x_c = \frac{at^2}{2}. \quad (3.16)$$

Подставляя выражение (3.15) в уравнение (3.16), получим для момента инерции маятника Максвелла следующее выражение

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (3.17)$$

в которое входят измеримые в эксперименте величины, такие как r — радиус вала с намотанной на него нитью, h — координата центра масс в нижней точке траектории (начальная высота), m — масса маятника. Необходимо учитывать, что масса маятника Максвелла складывается из массы вала и диска.

3.3. Потенциальный барьер

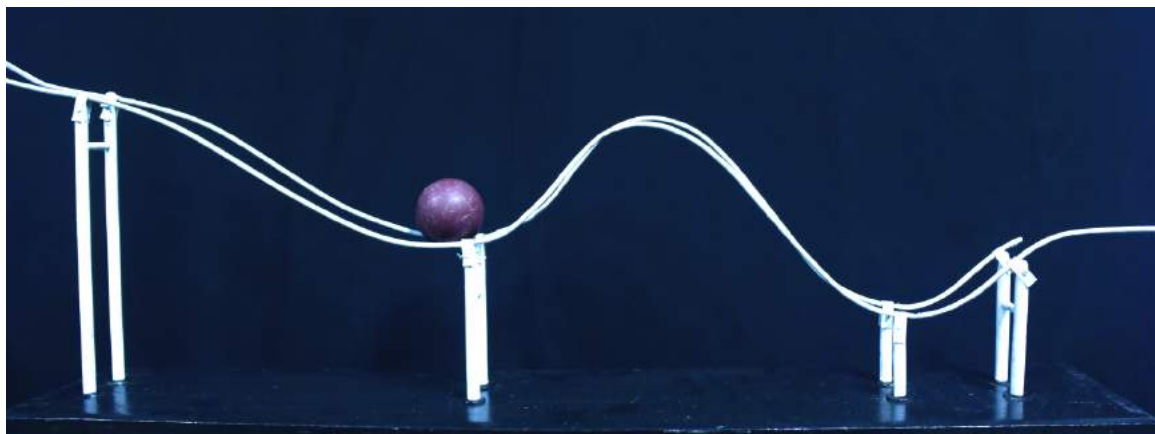


Рис. 3.9: Демонстрация особенностей движения механической системы в поле гравитационных сил

Оборудование

1. Макет потенциального барьера в виде двух металлических направляющих.
2. Массивный шар.

Основные определения

Энергия есть универсальная мера количества любых видов движения материи. Состояние, в котором находится система тел, может быть определено заданием ряда величин. Величины, с помощью которых может быть полностью охарактеризовано состояние системы, называются параметрами. Поскольку энергия — мера движения, т.е. изменения состояния системы, то ее можно количественно выразить через параметры состояния, т.е. энергия есть функция состояния.

В механике полная механическая энергия системы тел равна сумме кинетической энергии этих тел и потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом

$$W = E_k + E_p.$$

Кинетическая энергия зависит от скорости тел, а потенциальная энергия определяется взаимным расположением (зависит от координат) частей системы.

Краткое описание

Можно проследить за движением шара (рис.3.10), поднятого до наивысшей точки на горке. После того, как шар отпускают, он начинает катиться вниз под действием силы тяжести. Если на его пути окажется горка меньшей высоты, то шару удастся преодолеть этот барьер.

Если же отпустить шар с меньшей высоты, то его скорости окажется недостаточно для преодоления барьера. В следствие чего, поднявшийся на некоторую высоту шар после полной остановки начинается двигаться в обратную сторону. После того, как он поднимается на горку, по которой он был отпущен в первый раз, его движение вновь повторится. Такой периодически повторяющийся процесс подъема и опускания обусловлен наличием в системе точки минимума потенциальной энергии. Шар, попадая в так называемую потенциальную яму оказывается неспособным преодолеть потенциальный барьер (горку), если запас его энергии оказывается недостаточным.

В условиях демонстрации величина потенциальной энергии прямо пропорциональна высоте шара над поверхностью земли. Поэтому при запуске шара с высоты, больше чем высота горки (начальная потенциальная энергия в этом случае больше энергии потенциального барьера) его энергии оказывается достаточно для преодоления барьера. При движении шара с высоты равной или меньшей, чем высота барьера, ему не удастся преодолеть эту горку. При таком колебательном движении шара внутри потенциальной ямы, ограниченной двумя потенциальными барьерами, можно заметить, что шар на протяжении всего времени движения не достигнет своей начальной высоты. Постепенное уменьшение энергии происходит в результате присутствия силы трения между направляющими и шаром.

Теория

Закон сохранения энергии позволяет провести анализ общих закономерностей движения, если известна зависимость потенциальной энергии от координат. Рассмотрим движение материальной частицы, вдоль оси x в потенциальном поле, показанном на рис.3.10. Поскольку в однородном поле сил тяжести потенциальная энергия пропорциональна высоте подъема тела, то распределение потенциальной энергии можно представить в виде функции $E_n(x)$, соответствующей профилю горки, обозначенной синим цветом на рис.3.10. Участок NPQ — является потенциальной ямой, а QLF — потенциальным барьером.

Из закона сохранения энергии $W = E_k + E_n$ и из того условия, что кинетическая энергия $E_k = W - E_n$ всегда положительна, следует, что частица может находиться лишь в областях, где $E_n < W$. На схеме частица с энергией $W = E_{n1}$, находящаяся в точке N , способна двигаться только внутри области NPQ и ее энергии оказывается недостаточно для преодоления потенциального барьера QLF . Начиная движение из точки M с потенциальной энергией $E_{n2} > E_{n1}$ частица может оказаться в области за потенциальным барьером.

NPQ — потенциальная яма P — точка устойчивого равновесия
 QLF — потенциальный барьер L — точка неустойчивого равновесия

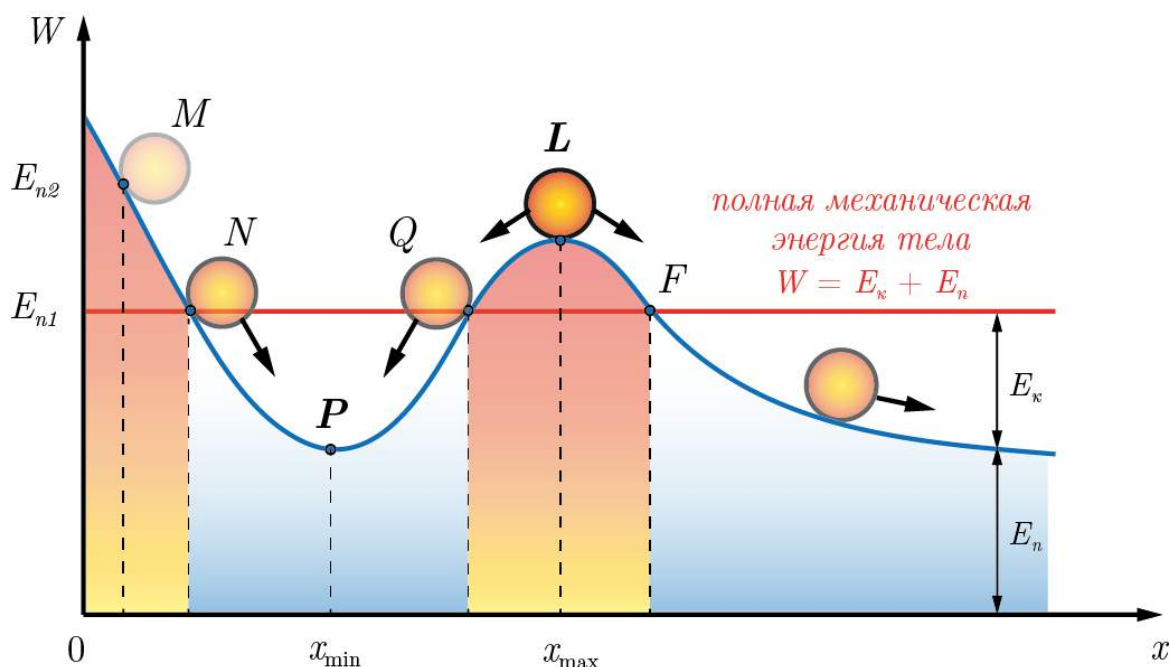


Рис. 3.10: Движение частицы вблизи положений устойчивого и неустойчивого равновесия (потенциальная яма и потенциальный барьер на кривой). Синий цвет обозначает график потенциальной энергии, красный -- полной энергии

В первом случае ее движение будет ограничено (финитно), в точке Q произойдет полная остановка и направление движения частицы изменится на противоположное. Такой процесс в теории будет происходить бесконечно долго, если в системе пренебречь силами трения и диссипацией энергии. Во второй области движение частицы будет не ограниченным (инфинитным): преодолев потенциальный барьер она способна удалиться бесконечно далеко от начала координат направо.

В точках экстремума потенциальной энергии x_{min} и x_{max} сила, действующая на частицу, равна нулю, потому что равна нулю производная потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = 0. \quad (3.18)$$

Точка P в этом случае будет называться положение устойчивого равновесия, а точка L — неустойчивого. Частица может испытывать небольшие отклонения (флуктуации) от положения равновесия. При этом в точке устойчивого равновесия возникают силы, которые возвращают частицу к положению равновесия. При малом отклонении частицы в точке неустойчивого равновесия возникающие силы еще дальше «уводят» ее от начального положения.

Попробуем показать, что описанные выше положения равновесия существуют. Для тела в точке экстремума (далее x_{min} и x_{max} обозначим через x_m) действующая на него сила равна нулю $F_x = 0$.

Пусть вследствие малого возмущения координата частицы изменяется на небольшую величину Δx . При таком изменении координаты на частицу начнет действовать сила:

$$F_x(x_m + \Delta x) = F_x(x_m) + \Delta x \frac{dF_x}{dx}(x_m) \quad (3.19)$$

С учетом выражения (3.18), имеем:

$$F_x(x_m + \Delta x) \approx -\Delta x \frac{d^2 W_x}{dx^2}(x_m) \quad (3.20)$$

В точке P с минимумом энергии вторая производная потенциальной энергии положительна:

$$\frac{d^2 W_{x_{min}}}{dx^2} > 0.$$

Поэтому при положительных отклонениях от положения равновесия ($x > 0$) возвращающая сила F отрицательна, а при $x < 0$ — положительна. В обоих случаях сила оказывается противоположно смещению частицы, из-за чего положение равновесия вблизи точки с минимумом потенциальной энергии оказывается устойчиво.

Обратная ситуация наблюдается в положении L с наибольшей энергией, так как в этом случае вторая производная потенциальной энергии по координате оказывается отрицательной:

$$\frac{\partial^2 W_{x_{max}}}{\partial x^2} < 0.$$

В результате смещение частицы Δx приводит к возникновению положительной силы F , которая в свою очередь только увеличивает смещение частицы из положения равновесия. Такое положение равновесия оказывается неустойчивым.

3.4. Скатывание двух цилиндров

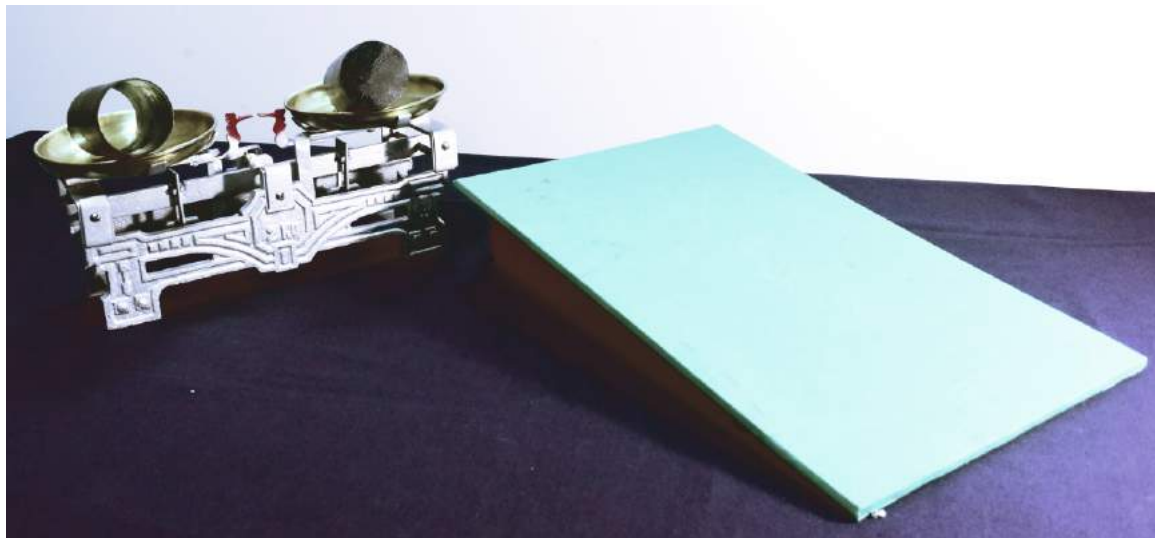


Рис. 3.11: Демонстрация зависимости инертных свойств тел от распределения массы в этих телах на примере скатывания сплошного и полого цилиндров равной массы и одинакового размера с наклонной плоскости

Оборудование

1. Два цилиндра одинаковой массы
2. Весы.
3. Наклонная плоскость.
4. Линейка или указка.

Краткое описание

На наклонную плоскость кладут два цилиндра одинаковой массы и радиуса. Цилиндры располагают так, чтобы их оси были находились одна на продолжении другой и удерживают в равновесии.

После отпускания цилиндров они скатываются одновременно с наклонной плоскости, при этом один обгоняет другой. Оказывается, что цилиндр, масса которого сосредоточена ближе к центру, движется с большим ускорением. Это объясняется тем, что его момент инерции оказывается меньше, чем у полого цилиндра, вся масса которого находится на значительном расстоянии от оси вращения.

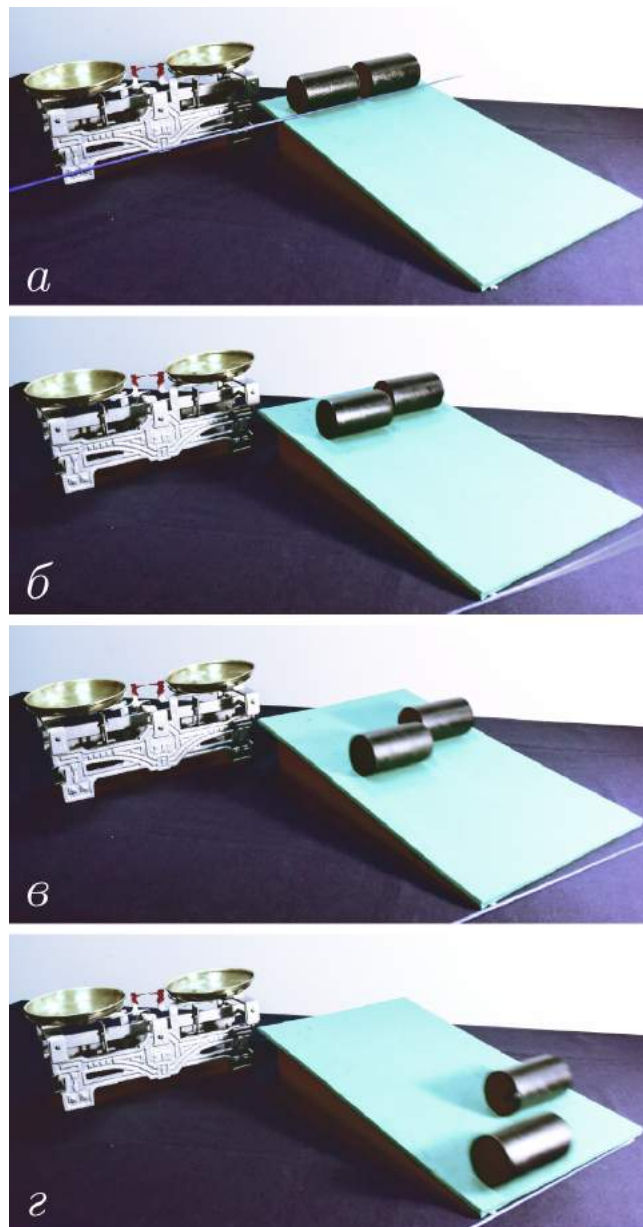


Рис. 3.12: При одновременном отпускании цилиндров быстрее будет скатываться тот, чей момент инерции окажется меньше. При одинаковых размерах и массе моменты инерции двух цилиндров (сплошной и полый) будут отличаться вдвое

Опыт позволяет наглядно продемонстрировать, что чем больше момент инерции, тем медленнее изменяется линейная скорость тел при одинаковом размере и равной массе.

Теория

При описании движения цилиндрического тела с наклонной плоскости воспользуемся уравнением движения центра масс, а также основным законом динамики вращательного движения.

В векторной форме уравнение поступательного движения центра масс цилиндра запишется следующим образом:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = m\mathbf{a}. \quad (3.21)$$

В выбранной системе координат после проектирования всех векторов можно записать уравнение движения в скалярном виде. В проекции на ось x это уравнение примет вид:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma, \quad (3.22)$$

в проекции на ось z :

$$N - mg \cos \alpha = 0. \quad (3.23)$$

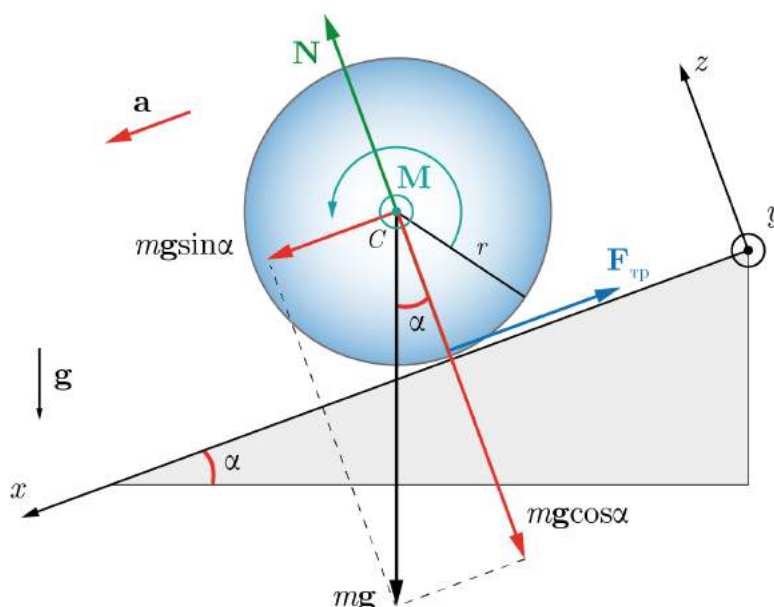


Рис. 3.13: Схематичное изображение сил, действующих на цилиндр при его движении с наклонной плоскости. Сила трения создает вращательный момент, поэтому скатывающийся ускоренно цилиндр начинает закручиваться. Согласно основному закону динамики вращательного движения угловое ускорение точек цилиндра, а следовательно, и линейное ускорение его центра масс, оказывается тем больше, чем меньше его момент инерции

Составим основное уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра. Моменты силы тяжести $m\mathbf{g}$ и реакции опоры \mathbf{N} относительно этой оси равны нулю. Угловое ускорение ε определяется только моментом силы трения $F_{\text{тр}}$ и моментом инерции I :

$$I\varepsilon = M \quad (3.24)$$

где I — момент инерции цилиндра относительно оси вращения, $\mathbf{M} = \mathbf{F}_{\text{тр}} \times \mathbf{r}$ — момент силы трения, определяемый через векторное произведение силы трения на радиус-вектор.

В проекции на ось y уравнение вращательного движения (3.24) примет вид:

$$I\varepsilon = F_{\text{тр}}r. \quad (3.25)$$

Пользуясь известным соотношением между линейным и угловым ускорениями при движении без проскальзывания $a = r\varepsilon$, выразим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{Ia}{r^2}. \quad (3.26)$$

Подставляя найденную силу трения в уравнение движения (3.22), получим:

$$mg \sin \alpha - \frac{Ia}{r^2} = ma. \quad (3.27)$$

Отсюда можно выразить линейное ускорение a центра масс скатывающегося цилиндра

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{I/r^2 + m} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mr^2}. \quad (3.28)$$

Из полученного выражения следует, что изменение скорости твердого тела при движении по наклонной плоскости зависит от его момента инерции. Увеличение момента инерции твердого тела приводит к уменьшению ускорения центра масс тела. Таким образом, сплошной цилиндр, обладающий меньшим моментом инерции (вся его масса распределена вблизи оси вращения и момент инерции равен $I_1 = mr^2/2$), скатывается быстрее, по сравнению с тонкостенным полым цилиндром, у которого масса в основном находится на периферии ($I_2 = mr^2$).

3.5. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратный переход



Рис. 3.14: Демонстрация превращения потенциальной энергии в кинетическую на примере «прыгающего» шарика

Оборудование

1. Стекло́нная линза диаметром 25 см.
2. Стальной шарик диаметром 5-6 мм.
3. Подставка с юстировочными винтами.

Основные определения

Сумма потенциальной и кинетической энергий системы тел получила название полной энергии системы:

$$W = E_k + E_p.$$

Полная энергия системы определяет ту работу, которую можно получить от данной системы тел при ее взаимодействии с какими-либо другими телами, не входящими в эту систему.

При движении тел изолированной системы только под действием потенциальных сил полная энергия системы не изменяется. При таких движениях тел происходит превращение части потенциальной энергии в кинетическую. В этом и состоит закон сохранения энергии, который можно сформулировать следующим образом:

в системе тел, где действуют только потенциальные силы, полная энергия остается постоянной во все время движения тел; в системе происходят лишь превращения энергии из одного вида в другой.

Краткое описание

В рамках этой демонстрации можно наблюдать переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно с потерей некоторой части энергии вследствие не вполне упругого удара. Перед демонстрацией опыта опора, на которой плоской поверхностью кверху помещена линза, при помощи юстировочных винтов выставляется в горизонтальное положение. Тогда стальной шарик, опущенный без начальной скорости с некоторой высоты над линзой, отскочит строго вертикально вверх, а не в разные стороны. В таких условиях шарик будет прыгать до тех пор, пока не растратит весь запас механической энергии. Опыт также можно проводить в теневой проекции или бросив шарик вдоль открытой с двух концов стеклянной трубки.

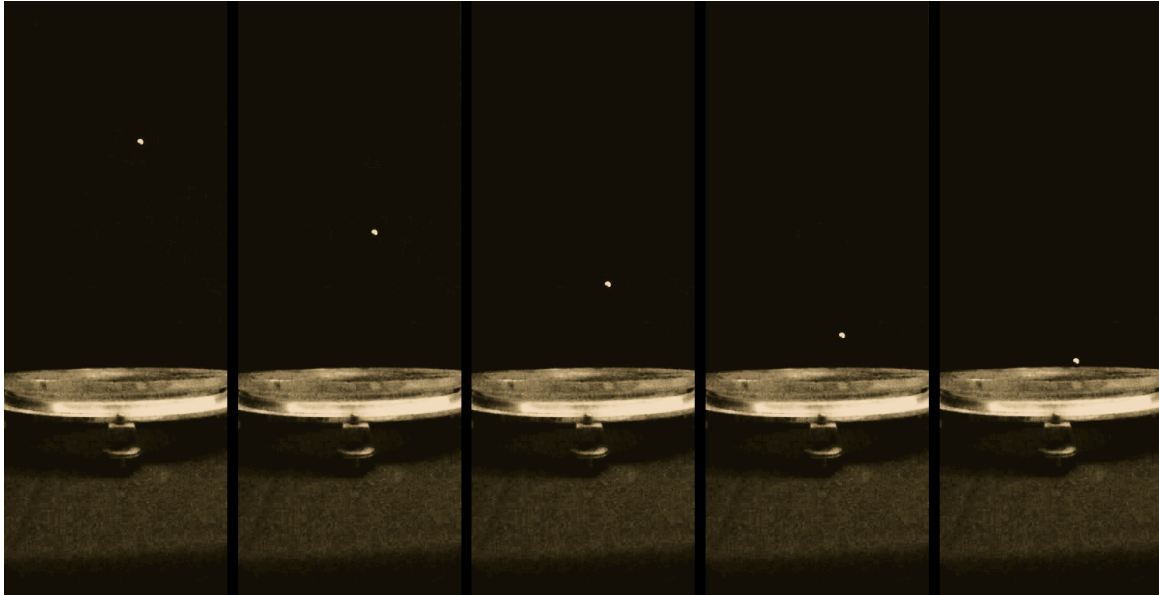


Рис. 3.15: Демонстрация потери механической энергии прыгающего на стеклянной линзе стального шарика

Теория

Рассмотрим вначале, что происходит с энергией изолированной системы, если телам предоставить возможность свободно двигаться под действием внутренних сил.

Пусть тело массы m находится на высоте h_1 над поверхностью Земли и не имеет начальной скорости (рис.3.16). В этом положении тело будет обладать потенциальной энергией $E_{\text{п}} = mgh_1$, но не будет иметь кинетическую энергию, $E_{\text{к}} = 0$.

Полная механическая энергия численно будет равна потенциальной $W = E_{\text{п}} = mgh_1$.

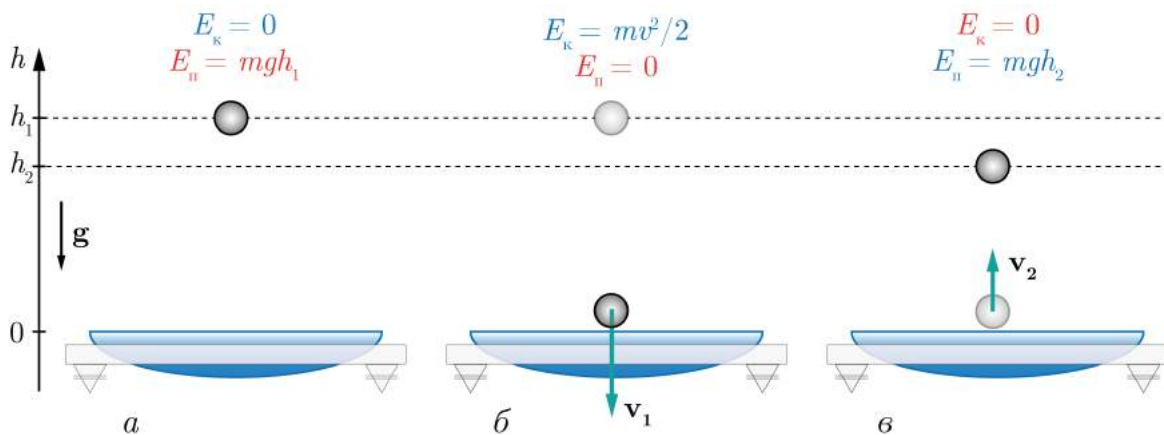


Рис. 3.16: Демонстрация превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратного превращения

Допустим, что тело опустилось на некоторую высоту и его скорость увеличилась (в самой нижней точке скорость тела возрастет до v_1). При таком движении сила тяжести совершит работу, равную убыли потенциальной энергии

$$\Delta A = mgh_1. \quad (3.29)$$

Вся эта работа ΔA будет израсходована на увеличение кинетической энергии тела:

$$\Delta A = mv_1^2. \quad (3.30)$$

при условии, что трения и внешних сил не было.

Подставляя в это выражение значение работы ΔA , можно получить:

$$mgh_1 = mv_1^2. \quad (3.31)$$

Левая часть полученного выражения определяет полную энергию системы для начального момента времени (в рассматриваемом случае тело обладает только потенциальной энергией), а правая — полную энергию системы для конечного момента времени, когда тело приблизилось к земле.

Если в системе действуют силы трения, то полная энергия системы при движении тел уменьшается. Она расходуется на работу против этих сил. Одновременно работа сил трения приводит к нагреву системы. Как известно, при работе сил трения происходит превращение механического движения в тепловое. Количество выделившегося тепла при этом в точности равно убыли полной механической энергии системы.

Возвращаясь к опыту с шариком, при падении его начальная потенциальная энергия перейдет в кинетическую энергию вблизи поверхности линзы, где потенциальная энергия равна нулю. После отскока шарик начнет движение вверх, и при подъеме кинетическая энергия тела начнет превращаться в потенциальную энергию, зависящую от высоты шарика. Если трения нет, тело, двигаясь вверх, должно подняться до начальной высоты h . Такой процесс падения и последующего подъема должен был бы повторяться неограниченно много раз при условии отсутствия трения.

Постепенное уменьшение высоты подъема шарика при многократном отскоке от линзы, которое можно наблюдать в ходе опыта (рис.3.15), полностью объясняется потерями энергии на трение. Другими словами полная механическая энергия W в такой системе не сохраняется.

Для рассматриваемой системы также применимо понятие коэффициента восстановления при ударе k . Если известны высота h_1 , с которой тело начинает движение без начальной скорости, и высота h_2 подъема шарика после удара о массивную плиту, то при помощи формул Галилея

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2gh_1} \\ v_2 = \sqrt{2gh_2} \end{cases} \quad (3.32)$$

можно получить выражение для определения коэффициента k :

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (3.33)$$

4 | Силы инерции, тяготения, трения, упругости

4.1. Сила Кориолиса



Рис. 4.1: Демонстрация действия силы Кориолиса на модели шара, движущегося во вращающейся системе отсчета

Оборудование

1. Бильярдный шар, окрашенный чернилами.
2. Наклонный желоб.
3. Круглая платформа на вращающейся подставке.
4. Электродвигатель с ременной передачей.
5. Лабораторный трансформатор для регулирования скорости вращения платформы.

Основные определения

Система отсчета, связанная с земным шаром, строго говоря, неинерциальная система отсчета (НИСО). Решения основных уравнений динамики в неинерциальных системах отсчета, в общем случае, расходятся с результатами экспериментов. Однако существует способ, используя 2 закон Ньютона, получить верный результат — ввести в рассмотрение фиктивные силы инерции в НИСО. Если сравнить решения уравнений движения для какого-либо конкретного тела, полученные в предположении, что система отсчета, связанная с Землей, инерциальная, и решения этих же уравнений с учетом сил инерции, можно обнаружить их расхождение. Сравнивая те и другие решения с данными опыта, можно также установить, является ли выбранная нами система инерциальной или же движется ускоренно. Такие проверки показали, что система координат, связанная с Землей, для большого класса механических задач может рассматриваться как инерциальная система отсчета.

Краткое описание

Круглая платформа диаметром 100 см располагается на специальной вращающейся подставке. Над платформой устанавливается неподвижно небольшой наклонный желоб, с которого скатывается бильярдный шар (конец наклонного желоба находится над центром круга). Чтобы наблюдать траекторию шара, его поверхность покрывается чернилами.

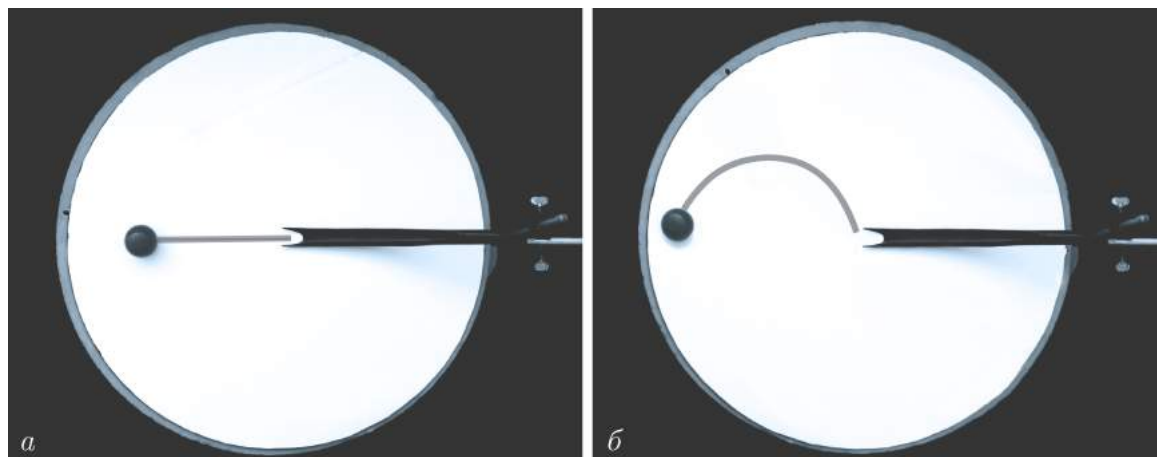


Рис. 4.2: а — в отсутствие вращения платформы ($\omega = 0$, платформа является инерциальной системой отсчета) шарик движется относительно стола по прямой линии, а вектор его скорости \mathbf{v} сохраняет направление; б — при вращении платформы на шарик начинает действовать кориолисова сила инерции, и вектор \mathbf{v} изменяет направление. След, оставленный шариком на бумаге, демонстрирует траекторию движения тела относительно вращающейся системе отсчета (НИСО), в неподвижной системе отсчета движение шарика оставалось прямолинейным

Сначала шарик скатывают по неподвижной платформе: его траектория представляет собой прямую линию. При медленном равномерном вращении платформы шарик отклоняется от прямолинейного пути в сторону, противоположную направлению вращения круга. След, оставленный подкрашенным шаром, показывает, что траекторией движущегося во вращающейся системе отсчета тела является дуга.

При вращении круга против часовой стрелки, что соответствует движению Земли (вследствие суточного вращения) в северном полушарии, шарик отклоняется вправо. При вращении круга по часовой стрелке, что соответствует движению Земли в южном полушарии, шарик отклоняется влево.

Если запустить шар с периферии, то его траектория окажется в виде петли, подобно тому, какую траекторию описывает маятник Фуко над той же вращающейся платформой. Такой опыт демонстрирует действие кориолисовой силы инерции на тела, движущиеся в неинерциальной (вращающейся) системе отсчета.

Теория

Во вращающейся системе отсчета на движущееся с начальной скоростью тело помимо центробежной силы инерции действует дополнительная сила инерции, называемая силой Кориолиса.

Пусть по платформе начинает двигаться шар массой m . При его движении от центра платформы вдоль радиуса трением можно пренебречь и считать скорость постоянной.

Шарик, начав скатываться из центра по неподвижной платформе (рис.4.3,а), через некоторое время окажется в точке A .

Если платформу раскрутить с угловой скоростью ω (рис.4.3,б), то к моменту достижения шариком края диска он окажется в точке B . При движении по платформе шар вместо прямой OA опишет дугу OB . При этом в неподвижной системе отсчета на шарик не будут действовать никакие силы, кроме силы тяжести и реакции опоры, и относительно инерциальной системы его движение будет оставаться равномерным $\mathbf{v} = \text{const}$.

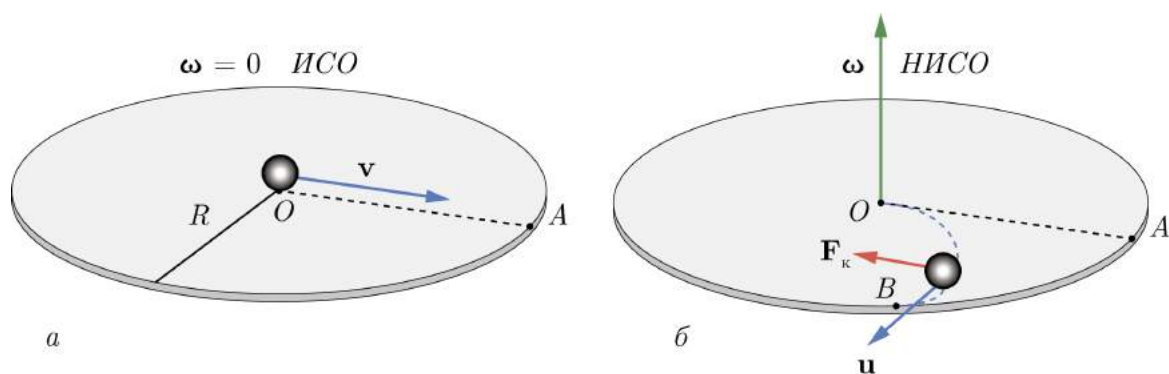


Рис. 4.3: Вектор скорости \mathbf{v} шарика во вращающейся системе отсчета под действием силы Кориолиса будет изменять свое направление. Вращение платформы приведет к тому, что шарик, достигнув края, окажется не в точке A , как это было бы в отсутствие вращения, а в точке B

Скорость шарика в системе отсчета, связанной с платформой, изменит направление и будет равна u . Изменение скорости в НИСО объясняется проявлением инерционных свойств, в частности, на за счет действия сил инерции вектор скорости изменяет направление. Такая сила, меняющая направление вектора скорости тела в НИСО, но не изменяющая его модуля, называется силой Кориолиса. В общем виде сила Кориолиса определяется векторным произведением

$$\mathbf{F}_K = 2m\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (4.1)$$

где m — масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения неинерциальной системы отсчета, \mathbf{u} — вектор относительной скорости движения тела в НИСО. Ее направление совпадает с направлением поступательного движения штопора, ручка которого поворачивается от вектора скорости \mathbf{u} к вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

4.2. Маятник Фуко

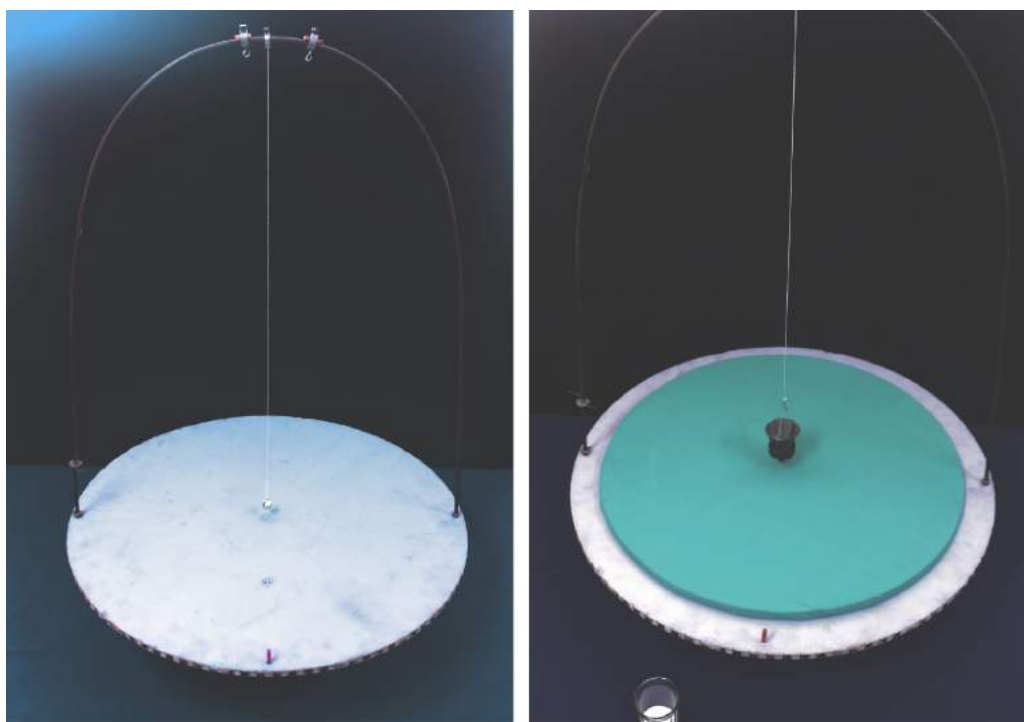


Рис. 4.4: Демонстрация способности математического маятника сохранять плоскость качания в пространстве при вращении платформы

Оборудование

1. Платформа на вращающейся подставке.
2. Отвес на специальном штативе (шарик и воронка с песком).
3. Маятник в виде ядра массой 20 кг, подвешенном за стальной трос к потолку.

Основные определения

В середине XIX века Жан Бернард Леон Фуко смог провести опыт, который продемонстрировал суточное вращение Земли достаточно наглядно. Опыт этот был проведен неоднократно, а публично сам экспериментатор представил его в 1851 году в здании Пантеона в Париже.

Маятник Фуко — устройство, используемое для демонстраций, подтверждающих факт суточного вращения Земли. Маятник представляет собой массивный груз, подвешенный на проволоке или нити, верхний конец которой укреплен (например, с помощью карданного шарнира) так, что позволяет маятнику качаться в любой вертикальной плоскости. Если маятник Фуко отклонить от вертикали и отпустить без начальной скорости, то, поскольку действующие на груз маятника силы тяжести и натяжения нити лежат все время в плоскости качаний маятника и не могут вызвать ее вращения, эта плоскость будет сохранять неизменное положение по отношению к звездам (к инерциальной системе отсчета, связанной со звездами).

В основу опыта был положен уже известный в то время экспериментальный факт: плоскость качания маятника на нити сохраняется независимо от вращения основания, к которому подвешен маятник. Маятник стремится сохранить параметры движения в инерциальной системе отсчета, плоскость которой неподвижна относительно звезд. На плоскость вращения маятника влияет как географическая широта места, где он установлен, так и длина подвеса (длинные маятники вращаются быстрее). Если поместить маятник Фуко на полюсе, то при вращении Земли плоскость маятника будет оставаться неизменной, и наблюдатели, вращающиеся вместе с планетой, должны видеть, как плоскость качаний маятника поворачивается без воздействия на него каких-либо сил. Таким образом, период вращения маятника на полюсе равен периоду обращения Земли вокруг своей оси — 24 часам. На других широтах период будет несколько больше, т. к. на маятник действуют силы инерции, возникающие во вращающихся системах — силы Кориолиса. На экваторе плоскость маятника вращаться не будет — период равен бесконечности.

Краткое описание

Убедиться в способности маятника сохранять плоскость колебаний в пространстве можно при помощи специальной модели, состоящей из небольшого маятника в виде шарика на нити 20—30 мм (рис.4.5), подвешенного над круглой платформой, вращающейся на центробежной машине. Диаметр вращающейся платформы такой же, как в опыте с отвесами.

Шарик крепится к специальной опоре в виде дуги из проволоки за нить длиной 70 см. После начала движения маятник в плоскости подвеса платформа приводится в равномерное вращение. При этом можно наблюдать, как плоскость колебания маятника по отношению к аудитории остается неизменной. Наблюдатель же, находящийся на Земле и вращающийся вместе с ней, будет видеть, что плоскость качаний маятника медленно поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Этим и подтверждается факт суточного вращения Земли.

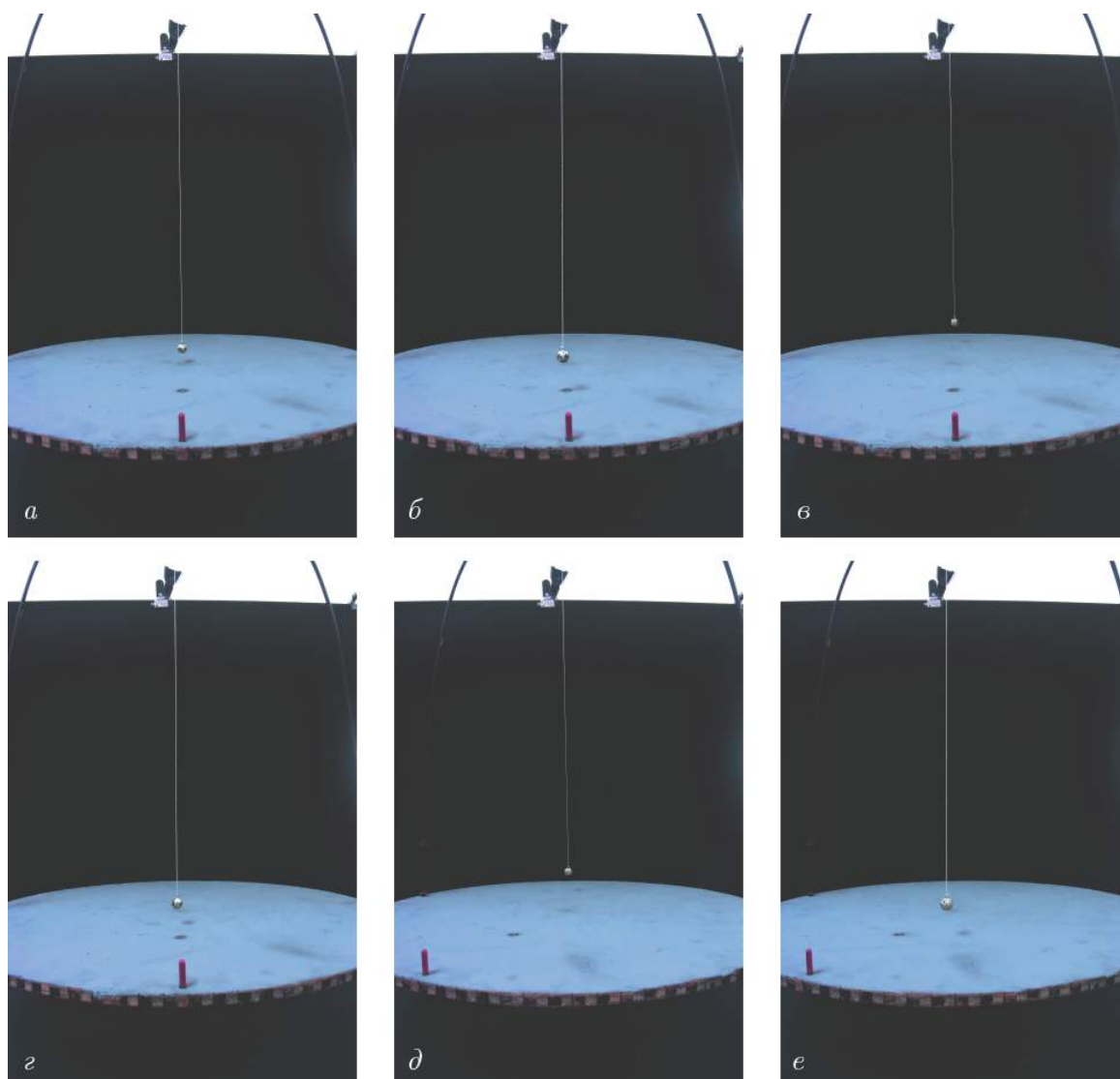


Рис. 4.5: Опыт с шариком демонстрирует сохранение плоскости качания маятника при вращении платформы

Этот опыт можно показать с воронкой, из которой на платформу высыпается песок. После полного оборота высыпавшийся песок изобразит на платформе несколько фигур, в зависимости от того, какой была скорость вращения платформы. Период качаний маятника в ходе опыта не изменяется.

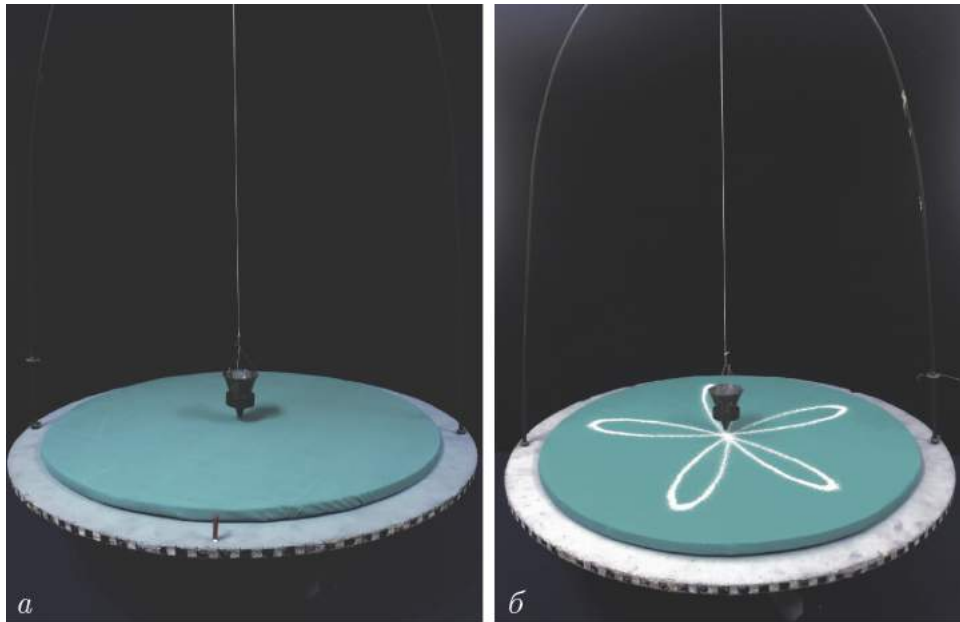


Рис. 4.6: Розетка, получаемая при записи качаний маятника во вращающейся системе. В представленном случае платформа начинала вращаться при прохождении маятником положения равновесия

Теория

Представим себе маятник, помещенный над Северным полюсом Земли (рис.4.7) на длинном, свободно вращающемся подвесе. Отведем его из положения равновесия и дадим возможность свободно качаться. Маятник движется под действием силы тяжести и натяжения подвеса. Обе они лежат в плоскости качания маятника, следовательно, плоскость качания должна сохранять свое положение в пространстве. Земля же поворачивается под маятником. Проекция плоскости качания на поверхность Земли у полюса поворачивается в направлении, противоположном вращению Земли, со скоростью $360/24 = 15$ градусов в час. Таким образом, в неподвижной системе отсчета поворот проекции плоскости качания маятника есть результат постоянства положения плоскости качания и вращения относительно Земли.

Рассматривая движение маятника в системе координат, связанной с Землей, необходимо к указанным выше силам добавить силу Кориолиса. На полюсе скорость маятника \mathbf{v} при большой длине подвеса можно считать перпендикулярной оси вращения Земли и, следовательно, вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Сила Кориолиса, действующая на маятник, будет равна $F_k = 2m\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}$.

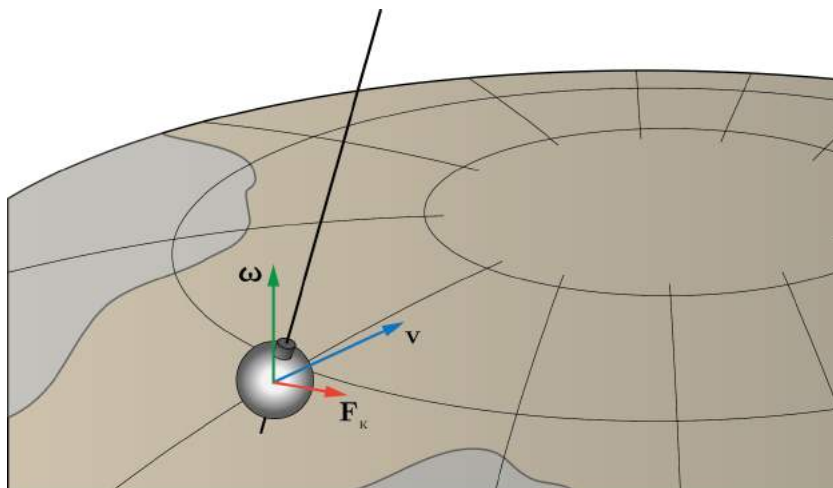


Рис. 4.7: Схема опыта Фуко

Будучи перпендикулярной плоскости, включающей векторы \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$, эта сила инерции лежит в горизонтальной плоскости и в соответствии с правилом буравчика направлена вправо от направления движения маятника. Так как сила Кориолиса никакой другой силой не уравновешивается, она заставляет поворачиваться плоскость качания маятника по часовой стрелки (рис.4.8).

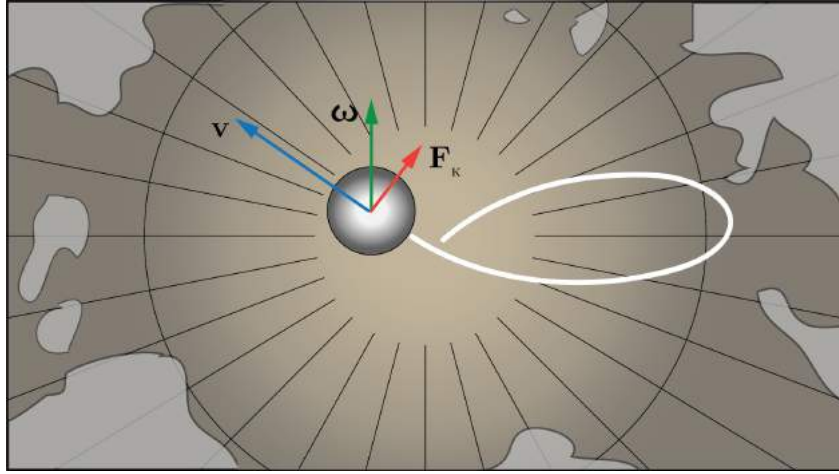


Рис. 4.8: Схематичное изображение траектории маятника, которую описывает на поверхности Земли груз, совершающий колебания на северном полюсе

Можно сделать следующее замечание по поводу выбора размеров маятника для демонстрации опыта Фуко.

Если наибольшее отклонение l при качании маятника мало по сравнению с его длиной L , то есть $l \ll L$, то можно считать колебания гармоническими. Для таких колебаний период определяется следующим выражением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4.2)$$

Запишем время затухания t , в течение которого колебания прекратятся, в виде $t = nT$

$$t = nT, \quad (4.3)$$

где n — число колебаний маятника.

Разумно положить, что по порядку величины n определяется отношением максимального значения потенциальной энергии маятника к среднему значению работы \bar{A} силы сопротивления за период колебаний:

$$n \sim \frac{U}{\bar{A}} \quad (4.4)$$

В каждый момент сила сопротивления, действующая на груз со стороны воздуха, представляет собой:

$$F_c \sim \rho v^2 R^2, \quad (4.5)$$

где ρ_v — плотность воздуха, v — мгновенная скорость, R — линейный размер груза.

После осреднения получим

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 l^2, \quad (4.6)$$

где $\omega = \sqrt{g/L}$ — циклическая частота колебаний. Тогда $\bar{F}_c \sim \rho_v R^2 \omega^2 l^2$ и $\bar{A} \sim \bar{F}_c l \sim \rho_v R^2 \omega^2 l^3$.

Далее можно показать, что максимальная высота подъема маятника

$$H = L - L \cos \alpha \approx \frac{l^2}{2L}, \quad (4.7)$$

и

$$U = M g H \approx \frac{M g l^2}{2L} \sim \frac{\rho g R^3 l^2}{2L}, \quad (4.8)$$

где M — масса груза, ρ — его плотность.

В результате получаем искомое время затухания колебаний маятника Фуко:

$$t = nT \sim \frac{U}{\bar{A}} T \sim \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\rho}{\rho_v} \frac{R}{l} \quad (4.9)$$

Именно в этом выражении заключается ответ на замечание по поводу параметров подвеса для демонстрации опыта Фуко. Рассмотрев маятник, линейные размеры которого меньше используемого в данной демонстрации в 100 раз. Согласно выражению (4.9) время затухания t для такого маятника уменьшится в 10 раз, а, соответственно, ослабнет эффект вращения плоскости колебаний. По этой причине для демонстрации суточного вращения Земли применяется маятник Фуко в виде массивного ядра на очень большом подвесе.

4.3. Сухое и жидкое трение



Рис. 4.9: Демонстрация отсутствия у ньютоновской жидкости такого свойства как трение покоя (начальное напряжение сдвига)

Оборудование

1. Деревянный брусок.
2. Упругая пластина (металлическая линейка).
3. Кювета с водой.

Основные определения

Силы, возникающие при движении тел в газе или жидкости и зависящие от скорости их относительного движения, называются силами вязкого (жидкого) трения или силами сопротивления среды. Силы трения всегда направлены в сторону, противоположную скорости относительного движения. Кроме того, они также направлены по касательной к соприкасающимся поверхностям.

При относительном движении двух слоев жидкости (газа) под сдвигом (градиентом) скорости понимают отношение изменения скорости к поперечному изменению координаты $\Delta v / \Delta x$. Для широкого круга веществ сила вязкого трения f пропорциональна сдвигу скорости и площади слоя $f = \eta S \Delta v / \Delta x$, где η — коэффициент динамической вязкости, S — площадь слоя. Ньютоновская жидкость — такая вязкая жидкость, которая при своем течении подчиняется указанному закону Ньютона для вязкого трения. Свойствами ньютоновской жидкости обладают большинство жидкостей (вода, смазочное масло и др.) и все газы. Течение ньютоновских жидкостей изучается в гидро- аэромеханике.

Жидкости, для которых закон вязкого трения Ньютона не выполняется, называются неньютоновскими. К ним относится ряд суспензий и растворов полимеров. Такие течения изучает реология.

Краткое описание

На демонстрационном столе располагается плоская ванна с водой. Рядом с ванной находится прямоугольный деревянный брусок с гладкой поверхностью. На брусок при помощи гибкой металлической пластинки оказывается давление так, что один из концов пластинки касается края бруска (рис. 4.10, а). Опыт показывает, что при небольшой деформации самой линейки тело остается в покое, а если постепенно увеличивать силу давления на брусок, то тело способно придти в движение в сторону приложения силы. Однако деформация линейки в таком случае окажется значительной.

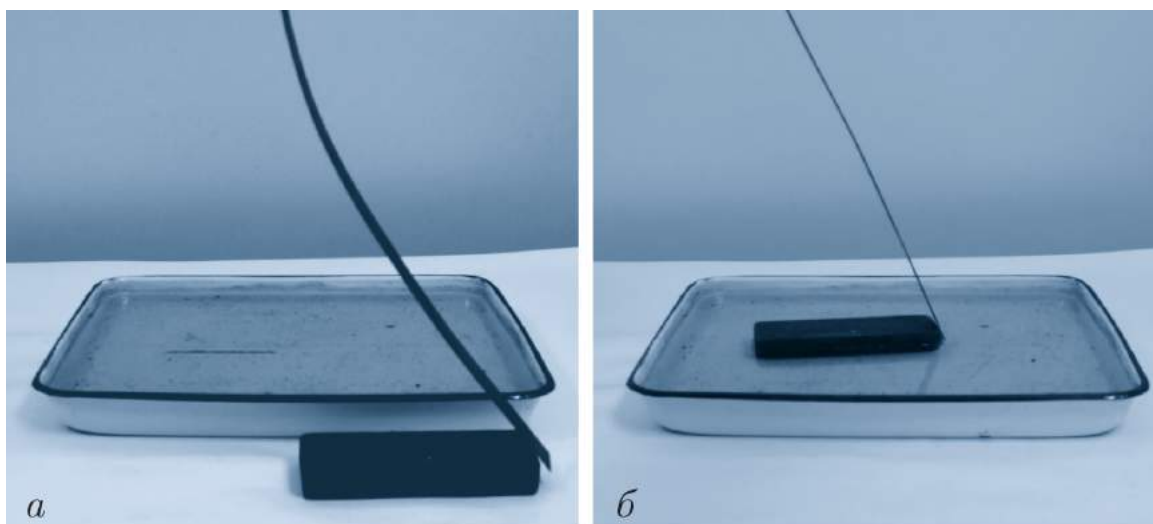


Рис. 4.10: а — чтобы привести брусок в движение по столу необходимо приложить заметное усилие, которое можно оценить по величине изгиба упругой пластинки; б — при погружении бруска в воду его движение возникает при малом усилии (пластинка не изгибается)

Важно отметить, что сила трения пропорциональна силе реакции опоры. Если поставить на брусок груз, вес которого равен весу бруска, то вес движимого тела возрастет вдвое. При этом для приведения в движение системы с увеличенной массой необходимо приложить большую силу (изгиб линейки при этом увеличится). При этом коэффициент трения бруска о поверхность стола останется постоянным.

Для демонстрации жидкого трения брусок помещается на поверхность воды. В ходе опыта можно заметить, что брусок начинает двигаться по воде под влиянием едва действующей на него линейки. В этом случае коэффициент трения оказывается настолько малым, что линейка, которой действуют на брусок, практически не деформируется (рис.4.10,б). Кроме того, можно показать, что брусок начнет двигаться по воде даже в том случае, если слегка на него подуть.

Теория

Опыт позволяет показать, что для перемещения деревянного бруска вдоль свободной поверхности слоя жидкости с постоянной скоростью v необходимо действовать на него с вполне определенной силой F . Причем в случае равномерного перемещения действие внешней силы F уравнивается равной ей по величине противоположно направленной силой трения f .

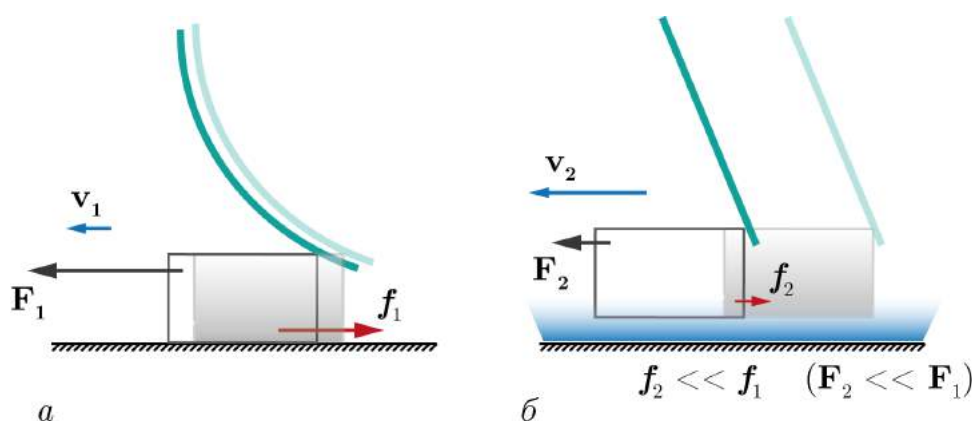


Рис. 4.11: а — схематичное изображение тела на горизонтальной поверхности и действующие на него силы; б — распределение сил, действующих на груз на поверхности жидкости

Самое важное в характере сил вязкого трения то, что брусок начинает движение под действием очень малой силы ($F_2 \ll F_1$). Таким образом, можно утверждать, что для жидкости не существует трения покоя. Это отличает вязкое трение от сухого.

4.4. Силы сухого трения

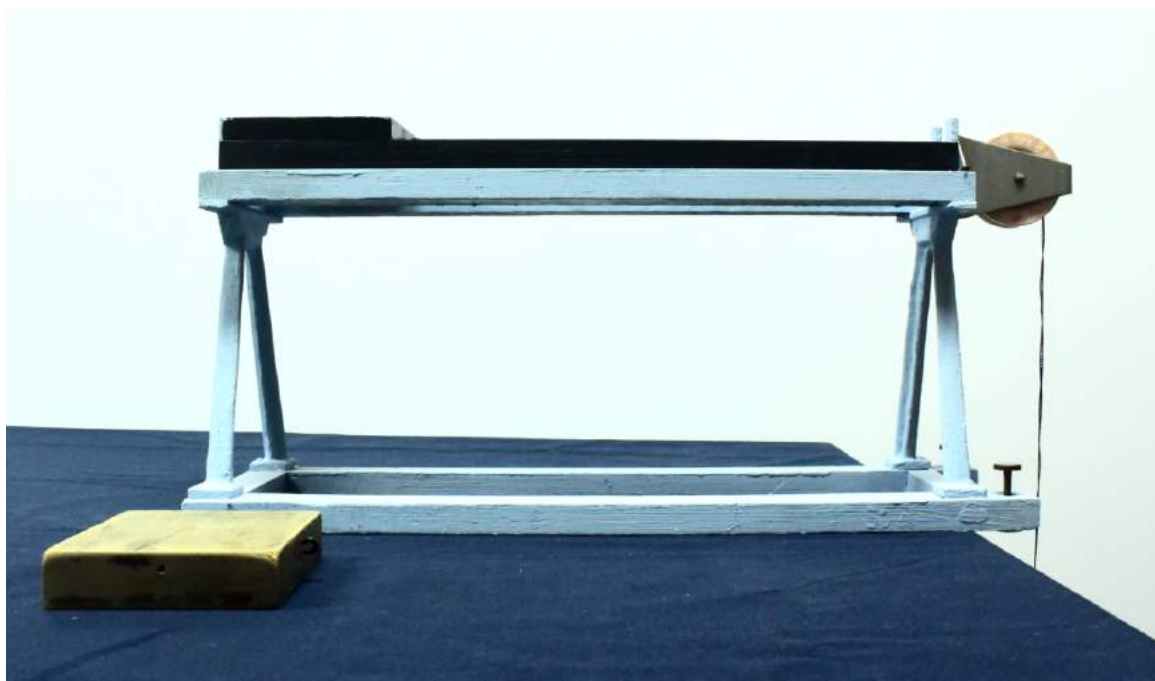


Рис. 4.12: Демонстрация трения покоя и трения скольжения

Оборудование

1. Трибометр Кулона.
2. Разновесы массой 100 г каждый.
3. Бруски из сосны и железа.

Основные определения

Силы трения могут возникать при непосредственном соприкосновении твердых тел. Для этих сил характерно то, что они действуют вдоль поверхности соприкосновения и всегда направлены так, что препятствуют движению соприкасающихся тел друг относительно друга. Эти силы часто называют силами сухого трения. Здесь будет рассмотрено только два вида сил сухого трения: трение покоя и трение скольжения (трение качения опускается).

Трение — диссипативный процесс, сопровождающийся выделением тепла, электризацией тел, их разрушением и т. д. Характеристикой трения скольжения выступает коэффициент трения скольжения — безразмерная величина, равная отношению силы трения к нормальной нагрузке. Внешние условия (нагрузка, скорость, шероховатость, температура, смазка) влияют на величину трения не меньше, чем природа трущихся тел, меняя его в несколько раз.

Если начать действовать с малой силой F , то предмет не сдвинется с места. Он останется в покое потому, что одновременно с силой F на него начнет действовать со стороны пола сила трения покоя $F_{\text{тр}}$. Эта сила $F_{\text{тр}}$ по модулю равна внешней силе F , но направлена в противоположную сторону и препятствует возникновению движения. Одновременно с изменениями модуля и направления внешней силы сила трения покоя тоже меняет свой модуль и направление.

Трибометрия — система методов измерения силы или коэффициента трения, порога трения и величины износа трущихся поверхностей. Трибометрические измерения делятся на два вида: *лабораторные*, при которых производится оценка сил трения и износостойкости материалов в тех или иных условиях, и *натурные*, когда производится оценка целиком данного узла трения.

Краткое описание

Прибор состоит из плоскости, образуемой отполированными металлическими направляющими, и угол наклона этой плоскости можно менять. В ходе опытов используется железный и деревянный бру-

сок, широкие грани которых имеют одинаковую площадь. Прибор можно использовать для демонстраций многих эффектов, связанных с трением.

Наклонный трибометр. Поместив стальной брусок на трибометр гладкой стороной, необходимо постепенно увеличивать угол наклона плоскости. При угле наклона, тангенс которого равен коэффициенту трения, брусок начнет скользить по плоскости. Условие для угла наклона плоскости, при котором тело начинает движение, имеет простой вид

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu.$$

Если выполнить опыт с тем же бруском, но расположив его на трибометре шероховатой стороной, то можно заметить, что скольжение начинается при гораздо большем угле наклона плоскости, так как коэффициент трения μ в этом случае значительно возрастает.

После этого опыт повторяется с бруском из дерева. В ходе демонстрации можно показать, что коэффициент трения не зависит от массы тела. Для этого необходимо провести измерения угла с парой деревянных брусков.

Трение покоя. В ходе опыта можно определить наибольшее значение силы трения покоя. Для этого трибометр необходимо расположить горизонтально на краю стола. Брусок помещается на направляющие трибометра, а при помощи нити, перекинутой через шкив, к телу подвешивается груз m . Если постепенно увеличивать массу груза m , то при некоторой нагрузке возникнет скольжение бруска M вдоль рельсов. При этом сила трения покоя примет наибольшее возможное значение и станет равна силе тяжести груза mg . Для проверки брусок и полученный набор разновесов можно взвесить.

Ряд таких простых опытов позволяет установить все основные свойства сил трения скольжения. Опыты показывают, что сила трения скольжения оказывается немного меньше, чем наибольшая сила трения покоя.

Теория

Используя трибометр, можно подметить важную особенность сил трения покоя: сила трения покоя f растет пропорционально силе нормального давления (реакции опоры) N , прижимающей тела друг к другу. Действительно, нагружая брусок m дополнительным грузом, можно увеличивать силу давления и наблюдать повышение наибольшей силы трения, пропорциональное изменению N . Поэтому можно записать:

$$f_0 = \mu N. \quad (4.10)$$

Здесь N — сила реакции опоры, μ — коэффициент трения. Часто при решении задач, если это не оговаривается дополнительно, используется уравнение $f_0 = \mu N$ как дополнительное, выражающее особые свойства сил трения скольжения.

Брусок на горизонтальной поверхности. Рассмотрим вначале брусок массой m , расположенный на горизонтальной шероховатой поверхности (рис.4.13,а). К телу со стороны одной из боковых граней прикреплен нерастяжимая нить, а на противоположном конце нити находится другой груз, массу M которого можно легко менять (разновесы). Нить перекинута через шкив, поэтому брусок способен перемещаться под действием создаваемой разновесами силы натяжения нити.

Второй закон Ньютона для бруска m в векторной форме имеет вид:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{f}_0. \quad (4.11)$$

Вдоль оси y брусок не совершает движения, значит $a_y = 0$. Проектируя уравнение движения на ось y , получим равенство:

$$0 = -mg + N,$$

откуда

$$N = mg.$$

В проекции на ось x :

$$0 = T - f.$$

Максимальная величина силы трения покоя (она же сила трения скольжения) $f_0 = \mu N = \mu mg$. Следовательно, при условии $T < \mu mg$ брусок останется на месте и сила трения будет силой трения покоя: $f = T$. Если $T \geq \mu mg$ (больше максимальной силы трения покоя), то брусок начнет скользить, и сила трения будет силой трения скольжения: $f = f_0 = \mu mg$.

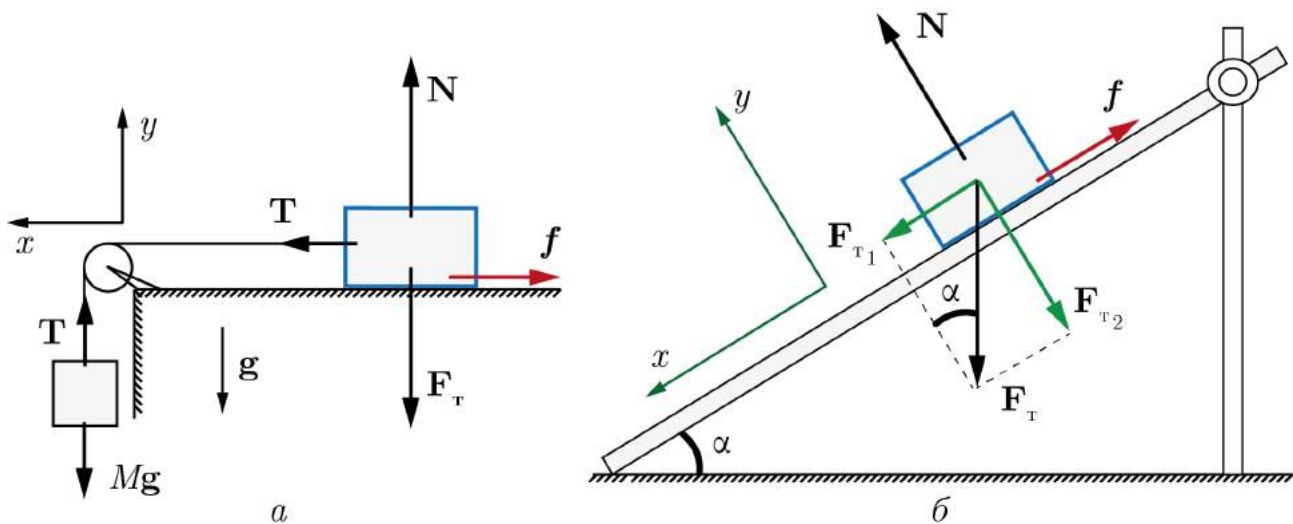


Рис. 4.13: а — схематичное изображение тела на горизонтальной поверхности и действующие на него силы; б — распределение сил, действующих на груз, скатывающийся вдоль наклонной плоскости

Брусок на наклонной плоскости.

Для того, чтобы брусок начал движение по наклонной плоскости, ему нужно преодолеть силу трения покоя меньше, чем в случае с горизонтальной плоскостью. Движение бруска начинается тогда, когда составляющая F_{T1} силы тяжести, которая действует параллельно плоскости, достигнет величины силы трения покоя f_0 . Векторная разность между силой тяжести и составляющей F_{T1} , направленной вниз по плоскости, выражается составляющей, перпендикулярной плоскости, F_{T2} (рис.4.13,б). Величины этих сил определяются проекциями силы тяжести на оси x и y соответственно:

$$F_{T1} = F_T \cdot \sin\alpha, F_{T2} = F_T \cdot \cos\alpha. \quad (4.12)$$

Ввиду того, что движение бруска происходит при условии $F_{T1} = f_0$, причем в это же время выполняется равенство $F_{T2} = N$, то связь силы реакции опоры с силой трения скольжения $f_0 = \mu N$ можно переписать в следующем виде:

$$F_{T1} = \mu F_{T2}. \quad (4.13)$$

Тогда

$$mg \cdot \sin\alpha = \mu mg \cdot \cos\alpha, \quad (4.14)$$

откуда следует, что:

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu. \quad (4.15)$$

Тот факт, что составляющая $F_{T1} = mg \cdot \sin\alpha$ меньше полной силы тяжести mg ($\sin\alpha < 1$), становится более очевидным по мере уменьшения угла наклона плоскости α .

4.5. Закон Гука



Рис. 4.14: Демонстрация закона Гука при упругих деформациях

Оборудование

1. Набор грузов равной массы (по 100 г каждый)
2. Пружина
3. Демонстрационная линейка
4. Штатив

Основные определения

Закон Гука выражает основной закон между напряженным состоянием и деформацией упругого тела. Установлен английским физиком Р. Гуком в 1660 г. для простейшего случая растяжения или сжатия стержня и сформулирован в следующем виде:

абсолютное удлинение (укорочение) Δl цилиндрического стержня прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе f , т.е. $\Delta l \sim f/ES$, где l — длина стержня, S — площадь его поперечного сечения, E — модуль продольной упругости, являющийся механической характеристикой (константой) материала.

При малых деформациях, когда величина растяжения или сжатия много меньше размеров стержня, сила упругости пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации:

$$f = -k\Delta l. \quad (4.16)$$

Это соотношение выражает экспериментально установленный закон Гука. Коэффициент k называется жесткостью тела и зависит от модуля упругости материала пружины и от ее геометрических размеров.

Особенности поведения тела под действием внешних механических нагрузок и возможности практического применения материалов для различных нужд полностью определяются значениями модулей упругости (всестороннего сжатия, Юнга и др.) и расположением точек пределов упругости и прочности. Такие материалы, как сталь и титан, обладают высокими значениями модулей упругости, высокими пределами упругости и прочности. Это позволяет широко использовать их в различных сооружениях и машинах.

Свинец и воск обладают низким пределом упругости и намного более высоким пределом прочности. Это — мягкие пластичные тела, которые начинают течь уже при небольших деформациях.

У стекла и кварца предел прочности лежит в области очень малых деформаций и ниже предела упругости. Это — хрупкие тела, которые могут испытывать только очень небольшие упругие деформации и затем разрушаются.

В технике часто применяются спиралеобразные пружины. При растяжении или сжатии пружин возникают упругие силы, которые также подчиняются закону Гука. В пределах применимости закона Гука пружины способны сильно изменять свою длину. Поэтому их часто используют для измерения сил. Пружину, растяжение которой проградуировано в единицах силы, называют динамометром. Следует иметь в виду, что при растяжении или сжатии пружины в ее витках возникают сложные деформации кручения и изгиба.

Соотношение (4.16) оказывается справедливым для всех упругих пружин и тел. Поэтому для расчета внешних действий упругих пружин закон Гука можно сформулировать так:

сила действия упругой пружины пропорциональна растяжению (сжатию) этой пружины.

Краткое описание

С целью демонстрации проявления закона Гука на штативе закрепляются пружина с грузом и линейка. Опыт заключается в измерении положения груза, подвешенного за пружину. В первую очередь записывается начальное положение конца ненагруженной пружины — x_0 . Затем за нижний конец пружины подвешивается груз массой 100 г и в таблицу записывается новая координата — x_1 . Постепенно пружину необходимо нагрузить четырьмя или пятью грузами и записать все результаты в виде таблицы. После этого можно построить график зависимости силы упругости (численно равна силе тяжести нагрузки, создаваемой грузами) от величины удлинения пружины $x_1 - x_0$.

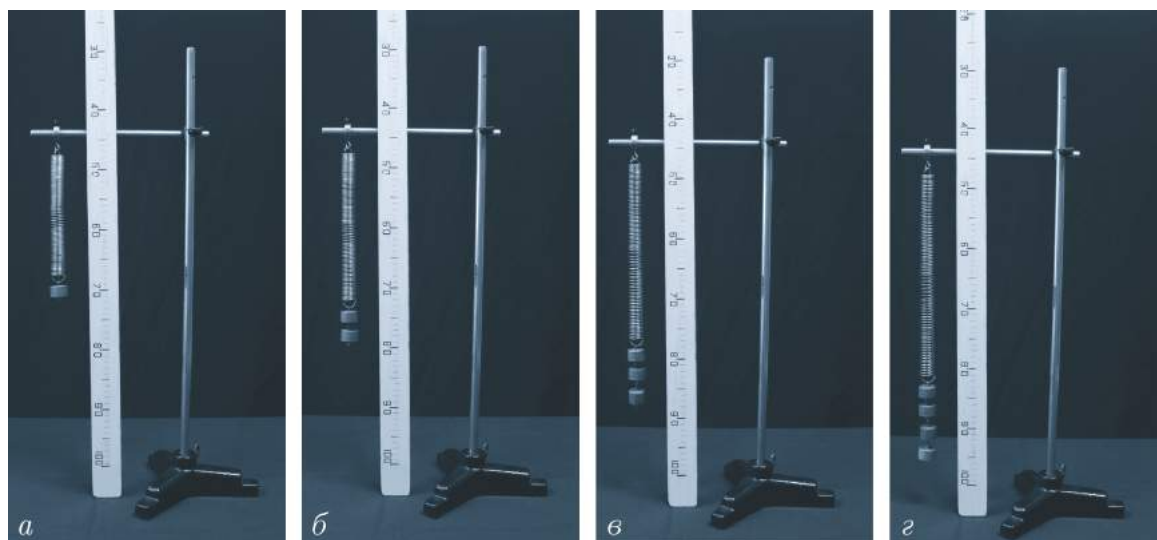


Рис. 4.15: Демонстрация растяжения пружины под действием силы тяжести со стороны одного, двух, трех и четырех грузов соответственно

Таким образом, измеряя удлинения Δx , которые будет приобретать пружина, можно убедиться в том, что они растут пропорционально напряжениям, которые создаются в пружине подвешенными грузами.

Теория

Рассмотрим деформацию (растяжение) упругой пружины, один из концов которой жестко закреплен, а снизу к пружине повешен груз массой m (рис.4.16). Под действием силы тяжести (веса) со стороны гру-

за пружина деформируется (при растяжении ее длина увеличится на величину Δx). При этом в пружине возникнет сила, противодействующая деформации — сила упругости f .

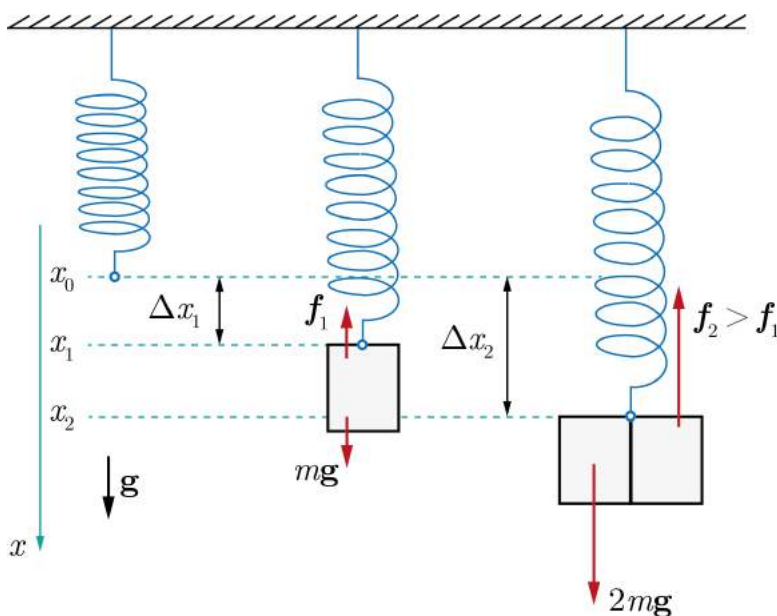


Рис. 4.16: Схема растяжения пружины, показывающая как ее удлинение зависит от массы подвешиваемого груза

Эта сила будет действовать на груз, который и вызывает деформацию. Если движение в системе не происходит, пружина и груз находятся в покое ($\mathbf{a} = 0$), то сила упругости растянутой пружины уравновесит силу тяжести:

$$0 = m\mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (4.17)$$

или в проекции на ось x :

$$f = mg. \quad (4.18)$$

Используя закон Гука, можно получить:

$$k\Delta x = mg \quad (4.19)$$

или

$$\Delta x = g \frac{m}{k}. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что удлинение пружины прямо пропорционально массе повешенного к ней груза и обратно пропорционально ее жесткости.

4.6. Отвесы на вращающейся платформе

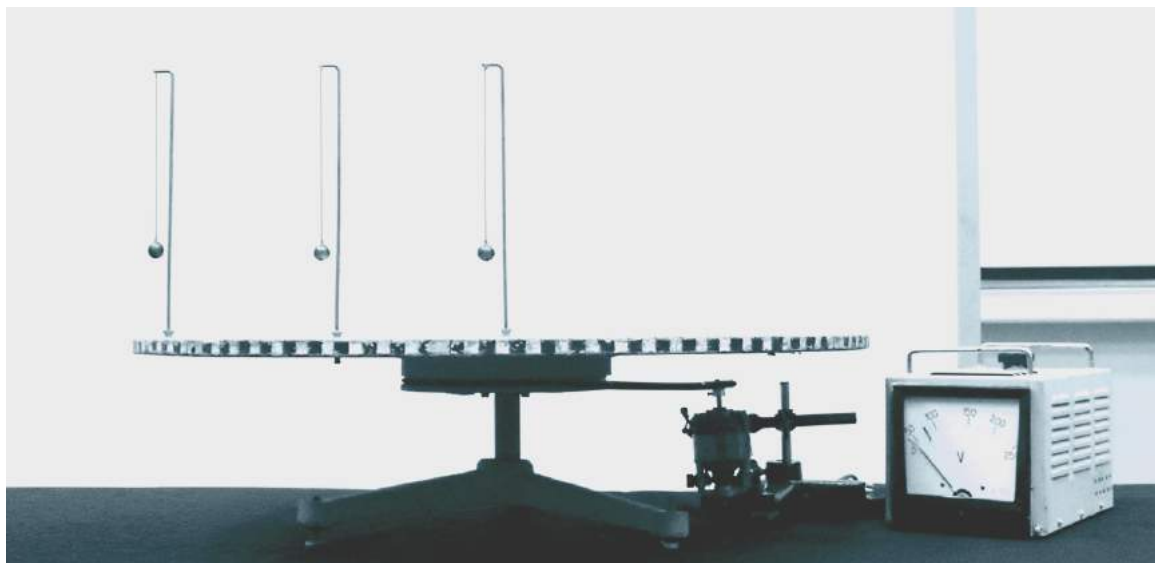


Рис. 4.17: Демонстрация центробежной силы инерции

Оборудование

1. Шарик одинакового размера и массы, подвешенные на специальных стойках.
2. Платформа с отверстиями для укрепления стоек с шариками.
3. Электродвигатель с фрикционным индуктором.
4. Вращающаяся подставка для платформы.
5. Резиновое кольцо для передачи вращательного момента от вала двигателя к платформе.
6. Лабораторный трансформатор (ЛАТР).
7. Центробежная машина с червячной передачей.

Основные определения

Центробежная сила инерции — псевдосила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчета, направленная по главной нормали к ее траектории от центра кривизны (от центра окружности при движении точки по окружности). Численно центробежная сила равна mv^2/l , где m — масса точки, v — модуль ее линейной скорости, l — радиус кривизны траектории. Под действием центробежной силы материальная точка движется криволинейно. Поэтому при прямолинейном движении эта сила равна нулю.

Нормальное ускорение является составляющей полного ускорения точки при криволинейном движении. Направлено такое ускорение по главной нормали к траектории в сторону центра кривизны. Обычно термин «нормальное ускорение» применяют в случае движения точки по окружности.

Численно нормальная составляющая ускорения материальной точки равна v^2/l , где v — скорость точки, l — радиус кривизны траектории. При движении по окружности нормальное ускорение может вычисляться по формуле

$$a = R\omega^2,$$

где R — радиус окружности, ω — угловая скорость вращения этого радиуса. В случае прямолинейного движения нормальное ускорение также как и центробежная сила инерции обращается в нуль.

Краткое описание

На вращающейся подставке укрепляют деревянный диск, вдоль радиуса которого на равных расстояниях друг от друга располагаются отвесы с металлическими шариками (рис.4.18). Первый отвес

находится на оси вращения диска, поэтому на него при вращении диска не действует центробежная сила инерции и шарик не отклоняется.

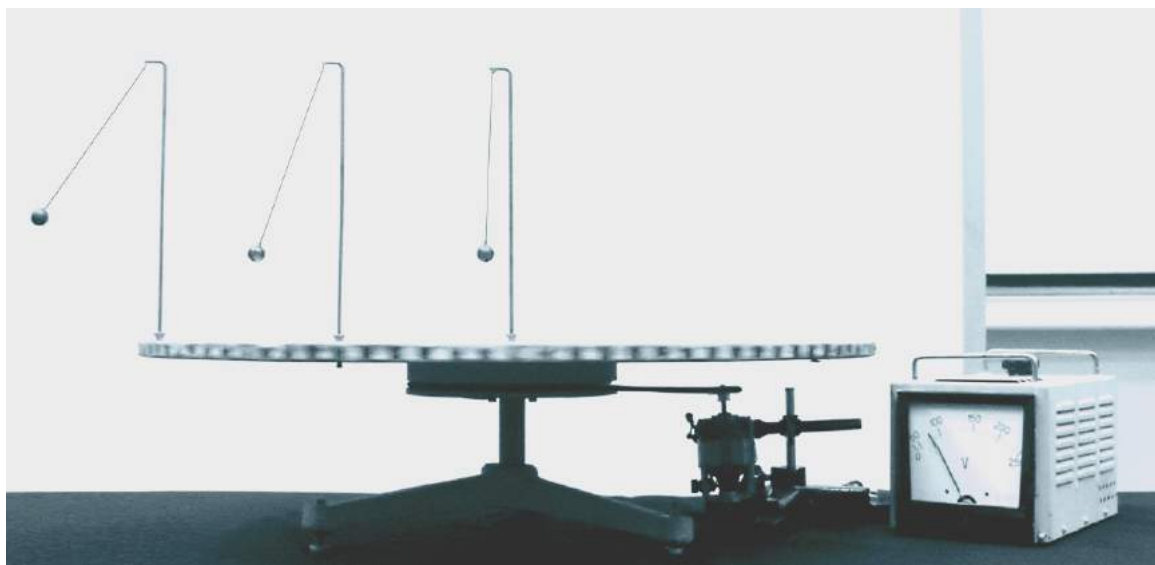


Рис. 4.18: Отклонение маятников от вертикали на вращающейся платформе. В зависимости от расстояния до оси вращения на одинаковые тела будут действовать различные силы инерции. О величине этих сил можно косвенно судить по величине угла отклонения каждого отвеса

На остальные отвесы действует центробежная сила инерции, пропорциональная расстоянию от оси вращения соответствующего отвеса. Поэтому все шарики отклоняются на различные углы, тем больше, чем больше их расстояние от оси вращения.

Демонстрационные приборы на центробежной машине. Центробежная машина служит для демонстрации опытов с физическими приборами:

1. *Два тела неравной массы.* Прибор (рис.!!!!) состоит из скобы, загнутые концы которой соединены стержнем. На стержень надеты два тела различной массы, соединенные между собой нитью. Скоба укреплена на конусном стержне, который служит для установки прибора в шпинделе центробежной машины. Такой же конусный стержень имеют все перечисленные ниже приборы.
2. *Регулятор центробежный.* Прибор (рис. 4.19) представляет собой два стержня с металлическими шарами на концах. Оба стержня подвижно укреплены к верхней части основного вертикального стержня. Эти стержни шарнирно связаны с тягами и с муфтой, скользящей по вертикальному стержню. Между верхней частью этого стержня и муфтой находится пружина, которая при подъеме муфты давит на нее и стремится поставить в исходное положение. При приведении в действие центробежной машины шары со стержнями в результате действия центробежной силы расходятся в стороны от вертикального стержня, а муфта поднимается вверх.

Опыт 1. Два тела неравной массы, изготовленные в виде цилиндров, связанных нитью, раздвигают на 4-6 см один от другого и помещают на стержне так, чтобы расстояние их центров от оси вращения были приблизительно равными. При приведении машины во вращательное движение большой цилиндр перемещается к концу скобы и увлекает за собой малый. Если же расположить цилиндры от оси вращения на расстояния, обратно пропорциональные их массам, то во время вращения машины они останутся на своих местах.

Опыт 2. В ходе демонстрации центробежного регулятора его вставляют в шпиндель машины. При приведении машины во вращение наблюдают сжатие пружины вследствие подъема шариков вдоль вертикальной оси.

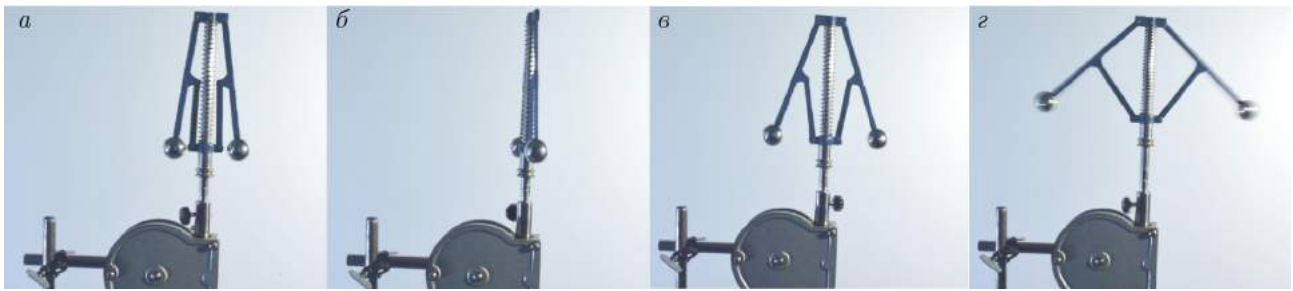


Рис. 4.19: Возникающие при вращении центробежные силы инерции создают вращательный момент на стержни, и шары, поднимаясь в вертикальной плоскости, вызывают сжатие пружины регулятора

Теория

При вращении платформы с постоянной угловой скоростью ω отвесы маятников отклоняются от вертикального положения, причем углы отклонения отвесов будут тем больше, чем дальше от центра платформы располагаются отвесы (рис.4.20).

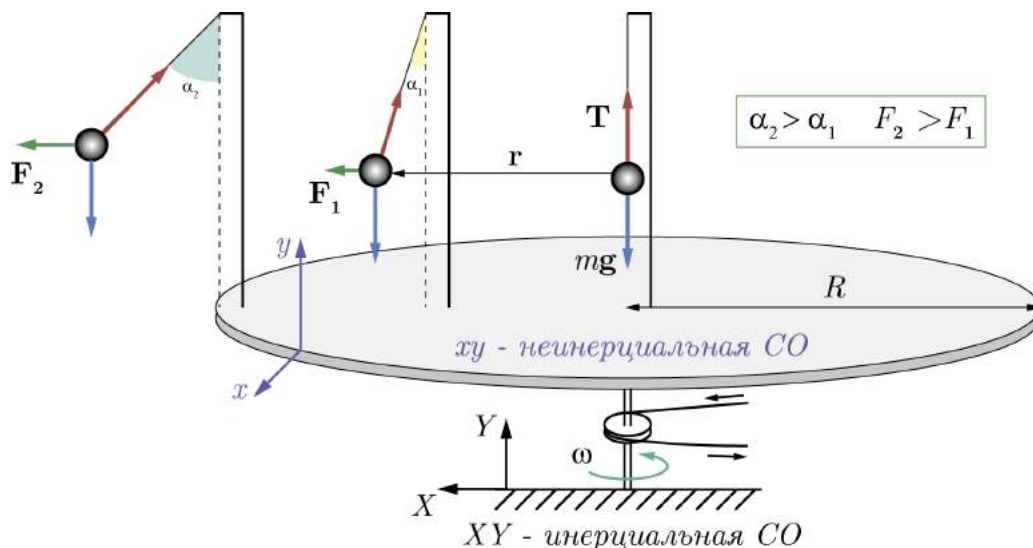


Рис. 4.20: Схематичное изображение поведения грузов на вращающейся платформе, расстояние от каждого из которых до оси вращения различается

Рассмотрим отклонения отвесов маятников относительно наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета XY (связана с Землей), и относительно наблюдателя, находящегося в неинерциальной вращающейся системе xy (связана с вращающейся платформой).

Относительно наблюдателя в ИСО отвесы отклоняются, а груз в этом случае находится под действием двух реальных сил: силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы натяжения нити \mathbf{T} . Результирующая сила сообщает маятнику нормальное ускорение $\mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$, поэтому можно записать

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = -m\omega^2 \mathbf{r}, \quad (4.21)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от оси вращения платформы до рассматриваемого груза.

Угол отклонения отвесов будет определяться соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (4.22)$$

Относительно наблюдателя, находящегося в НИСО (на подвижной платформе), при равномерной скорости вращения отвесы остаются в покое (неподвижны относительно наблюдателя). Из этого следует, что сумма всех сил, действующих на груз m , в этой системе отсчета должна обращаться в нуль. Таким образом, наблюдатель, вращающийся вместе с грузами в системе отсчета xy может сделать вывод, что на каждый маятник должна действовать некоторая сила, уравнивающая известную пару реальных сил (притяжения и реакции со стороны подвеса). Причем эта сила будет обязательно направлена из

центра вдоль Вектора \mathbf{r} . В качестве такой силы обычно рассматривается центробежная сила инерции \mathbf{F} (рис.4.20), которая по своей природе является силой инерции.

Запишем уравнение движения маятника во вращающейся системе отсчета в векторной форме с учетом этой силы

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F} = 0. \quad (4.23)$$

Сравнивая его с выражением (4.21), видим, что центробежная сила инерции может быть определена как $\mathbf{F} = m\omega^2\mathbf{r}$.

Величина центробежной силы инерции, действующей на тела во вращающихся системах отсчета, зависит только от угловой скорости вращения ω этой системы отсчета и от расстояния r до оси вращения. Важно, что она не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчета. Иными словами, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все без исключения материальные тела независимо от того, покоятся ли они в этих системах или движутся с некоторой относительной скоростью.

4.7. Параболическая поверхность вращающейся жидкости

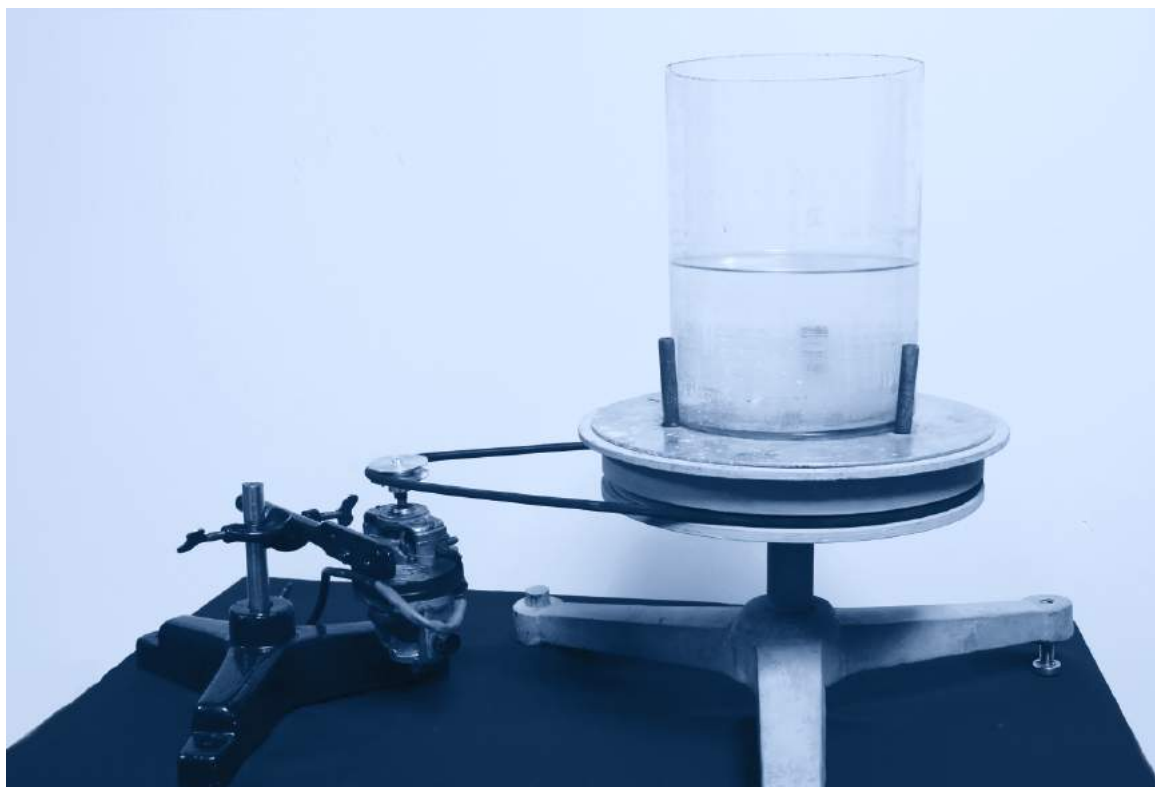


Рис. 4.21: Демонстрация параболического профиля при вращении жидкости

Оборудование

1. Стекланный цилиндрический сосуд диаметром 15 и высотой 30 см.
2. Жидкость, подкрашенная флуоресцеином.
3. Вращающаяся платформа.
4. Электродвигатель с ременной передачей.
5. Лампа накаливания.

Основные определения

Поверхностями равного давления называются поверхности с одинаковыми во всех точках давлениями. Любая горизонтальная плоскость, проведенная в покоящейся жидкости, находящейся под действием силы тяжести, является поверхностью равного давления.

Свободной поверхностью называют плоскость раздела между жидкостью и газообразной средой. Равнодействующая всех сил, приложенных к каждой частице, лежащей на свободной поверхности покоящейся жидкости, нормальна к этой поверхности.

Относительным равновесием жидкости называется такое состояние, при котором отдельные ее частицы не смещаются одна относительно другой, а также стенок сосуда — и вся масса жидкости движется как твердое тело.

В абсолютно покоящейся жидкости (сосуд неподвижен) действующей массовой силой (в поле сил тяжести) является только сила тяжести. При относительном покое к ней добавляется еще одна массовая сила — сила инерции.

Законы относительного равновесия жидкости находят широкое применение в промышленности, а именно, в измерительной технике (жидкостные тахометры), в металлургии (центробежное литье) и других областях техники. При изучении относительного равновесия необходимо заниматься, во-первых, установлением закона распределения давления внутри жидкости, а, во-вторых, определением формы поверхности равного давления, т.е. такой поверхности, все точки которой испытывают одинаковое давление.

Краткое описание

На шкив центробежной машины устанавливается подставка с большим цилиндрическим стеклянным стаканом, в который примерно до 1/3 его высоты налита слегка подкрашенная вода. Стакан вращают вначале медленно, а затем, по мере того как вода приходит во вращение, скорость постепенно увеличивают. Через некоторое время поверхность воды принимает форму параболоида, что достаточно хорошо видно аудитории, если за стаканом поместить лист белого картона и освещать стакан сверху лампой. Для большей наглядности опыта рекомендуется пользоваться чистой водой, осветив вращающийся стакан сверху лампой с абажуром. Когда поверхность воды примет форму параболоида, следует налить на нее сверху немного раствора флюоресцеина. В этом случае параболоид ясно виден вследствие яркого свечения (рис.4.22).

При постепенном повышении скорости центробежная сила инерции, действующая на элементы жидкости, заставляет жидкость прижиматься к стенкам сосуда и свободная поверхность принимает вид параболоида.



Рис. 4.22: Демонстрация поведения жидкости при вращении. Под действием сил инерции свободная поверхность жидкости при ее вращении принимает вид параболоида. Благодаря вязкости и эффекту прилипания к стенкам сосуда жидкость движется как твердое тело и профиль свободной поверхности при равномерном вращении платформы со временем сохраняется

Теория

Можно установить связь между высотой столба жидкости h_0 в сосуде при отсутствии вращения и величинами h_{min} и h_{max} при вращении с угловой скоростью ω (рис.4.23)

$$h_{max} = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{4g}, \quad (4.24)$$

$$h_{min} = h_0 - \frac{\omega^2 r^2}{4g}, \quad (4.25)$$

где r — радиус цилиндрического сосуда.

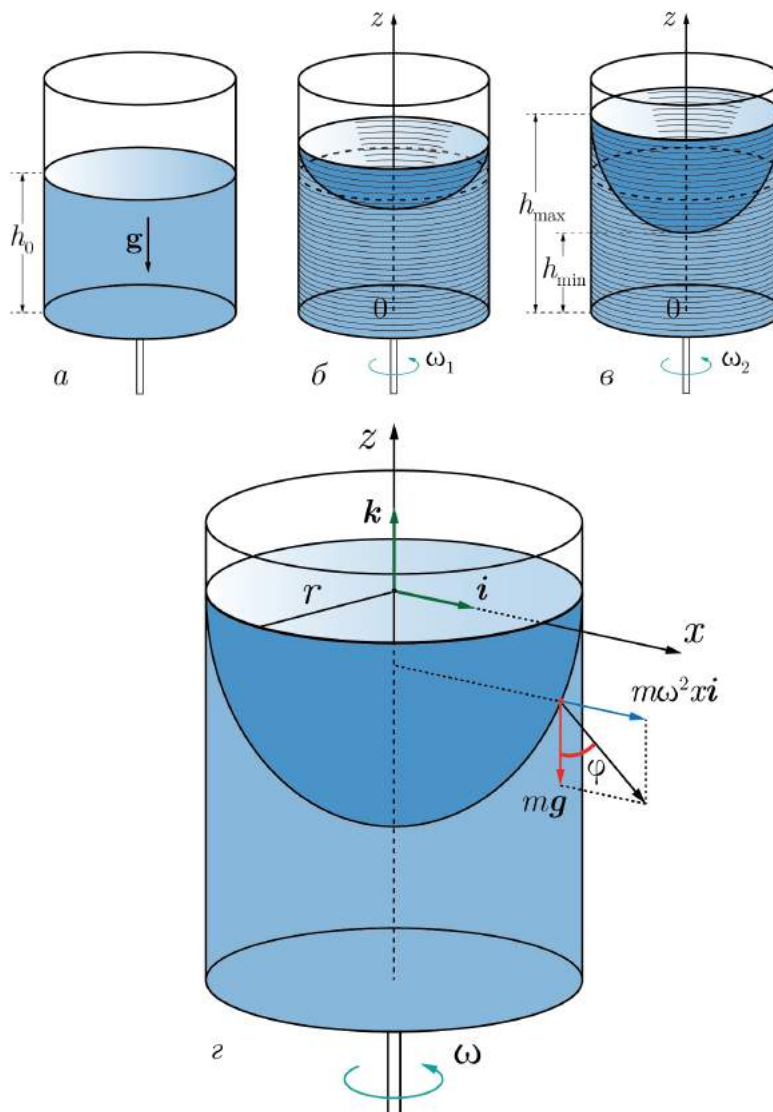


Рис. 4.23: Формирование параболоида в жидкости при различной угловой скорости вращения подставки

Таким образом, полную глубину воронки в жидкости

$$h_{max} - h_{min} = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (4.26)$$

можно определить угловую скорость вращения цилиндра.

Подобный эффект, благодаря которому чайники при перемешивании воды собираются в центре образовавшейся воронки, заключается в следующем.

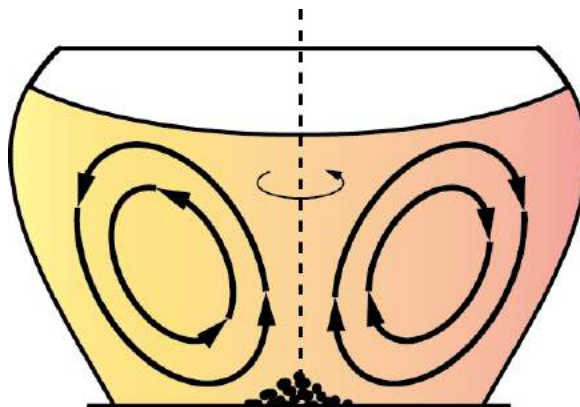


Рис. 4.24: Структура течения и поведение чайнок в чашке при вращении жидкости

Когда жидкость начинает вращаться, то благодаря вязкости ее частицы постоянно вовлекается во вращение с возрастающей угловой скоростью. Постепенно ускоренные слои жидкости достигают вращающихся чаинок, и тут проявляет себя то обстоятельство, что вода и чаинки имеют разную плотность. Плотность чаинок больше, а значит, их труднее вовлекать в ускоренное движение, чем расположенные рядом слои жидкости. Чаинки отстают от окружающей их жидкости и, следовательно, перемещаются к оси цилиндра. Если же цилиндр не ускоряется, а тормозится, то все будет происходить наоборот.