Содержание

Глава 1

Сложение угловых скоростей

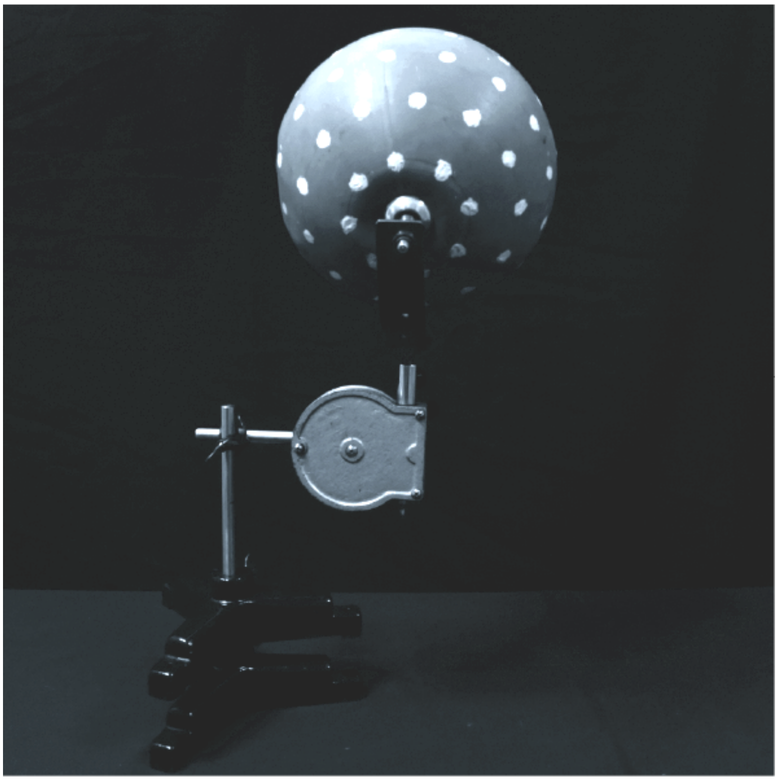

Рис. 1.1: Демонстрация сложения угловых скоростей на центробежной машине

Оборудование:

1. Шар диаметром 35 см, покрытый по линиям широт рядами пятен белого цвета диаметром 1 см.
2. Вращающийся держатель.
3. Машина с червячным механизмом.

Основные определения:

Угловая скорость — величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела. При равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси его угловая скорость численно равна приращению угла поворота φ за промежуток времени Δt

$$\omega = \Delta\varphi / \Delta t.$$

В общем случае угловая скорость численно равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему элементарному промежутку времени dt, то есть

$$\omega = d\varphi / dt.$$

Таким образом,

вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ *численно равен величине угловой скорости, лежит на оси вращения, и направление его связано с направлением вращения согласно правилу буравчика.*

Поскольку угловая скорость — вектор, то приращение ее также вектор и, следовательно, вектором является угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Между векторами угловой и линейной скоростей для каждой материально точки твердого тела существует связь.

Вектор линейной скорости точки при вращательном движении равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор точки

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Краткое описание:

Шар закрепляется в специальном держателе, в котором он может вращаться вокруг наклонной оси, а вместе с держателем — вокруг вертикальной оси при помощи червячной машины. Таким образом вращать шар можно либо вокруг наклонной оси, либо вокруг вертикальной оси, либо вокруг обеих осей одновременно.

При быстром вращении шара вокруг наклонной оси пятна на его поверхности сливаются и образуют параллельные ряды (рис.1.2,*а*), перпендикулярные к оси вращения. Направление оси вращения шара совпадает с направлением угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}_1$.

При вращении шара только вокруг вертикальной оси пятна сливаются в линии (рис.1.2,*б*), которые лежат в горизонтальных плоскостях, перпендикулярных оси вращения держателя, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}_2$.

В ходе эксперимента обнаруживаем, что при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя светлые пятна на его поверхности перемещаются таким образом, будто вращаются вокруг новой движущейся оси - мгновенной оси вращения твердого тела.

Теория:

Когда материальная точка участвует в нескольких независимых движениях, то для перемещений, скоростей и ускорений справедливы правила векторного сложения, при этом результирующее перемещение равно векторной сумме отдельных независимых перемещений.

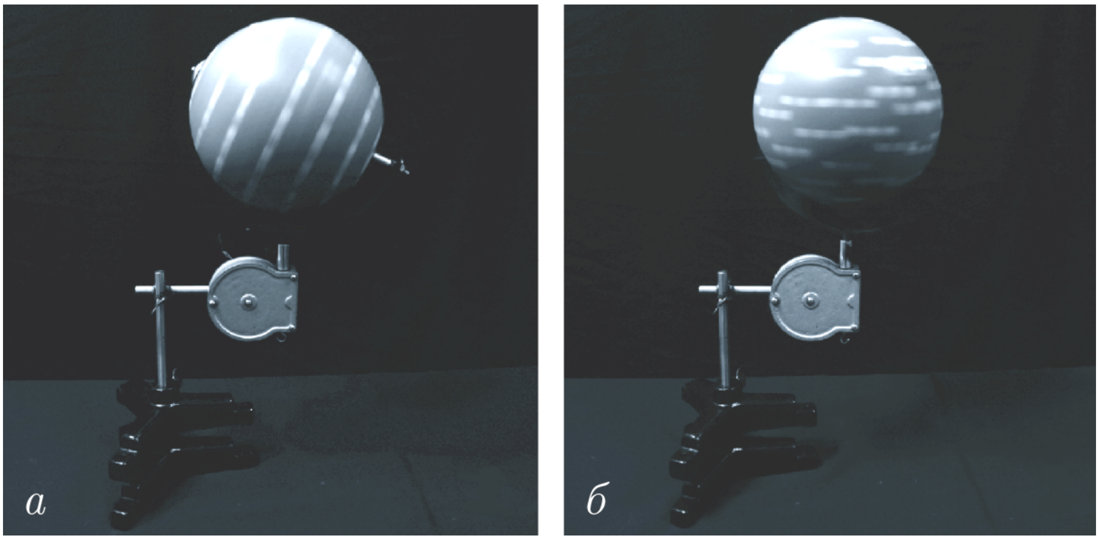

Рис. 1.2: *а* — вращение шара только вокруг наклонной (собственной) оси; *б* — вращение шара только вокруг вертикальной оси

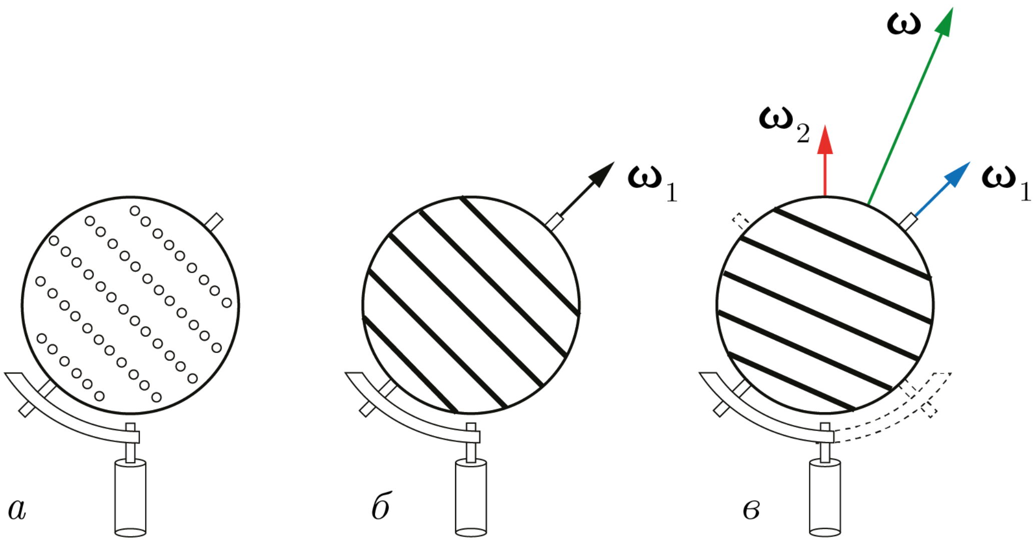

Рис. 1.3: *а* — схематичное изображение шара на вращающемся стержне (без вращения); *б* — вектор угловой скорости при вращении шара только вокруг собственной (наклонной) оси; *в* — сложение угловых скоростей при одновременном вращении шара вокруг собственной и вертикальной осей

В классической механике закон сложения скоростей Галилея позволяет определить результирующую скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета, которая движется во вращающейся системе отсчета. Для точки на поверхности шара, движущейся одновременно вокруг вертикальной оси со скоростью $\mathbf{v}_1$ и наклонной оси со скоростью $\mathbf{v}_2$, результирующую линейную скорость $\mathbf{v}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{1.1}$$

Используя известную связь между линейной и угловой скоростями, можно получить следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}, \tag{1.2}$$

где через $\mathbf{r}$ обозначен радиус-вектор, направленный из центра шара в рассматриваемую точку на его поверхности.

Следовательно, при одновременном вращении шара и держателя, результирующая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ также будет представлять собой векторную сумму $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, и иметь направление, показанное на рис.1.3,*в*. Это направление легко определить опытным путем так как кружки, расположенные вблизи мгновенной оси (вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$), не сливаются в линии.

Таким образом, при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя вектор результирующей угловой скорости, а, следовательно, и мгновенная ось вращения также поворачиваются вокруг вертикальной оси держателя. Величина угловой скорости вращения шара относительно мгновенной оси вращения равна векторной сумме угловой скорости вращения шара вокруг своей оси и угловой скорости поворота оси шара $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Глава 2

Сложение движений

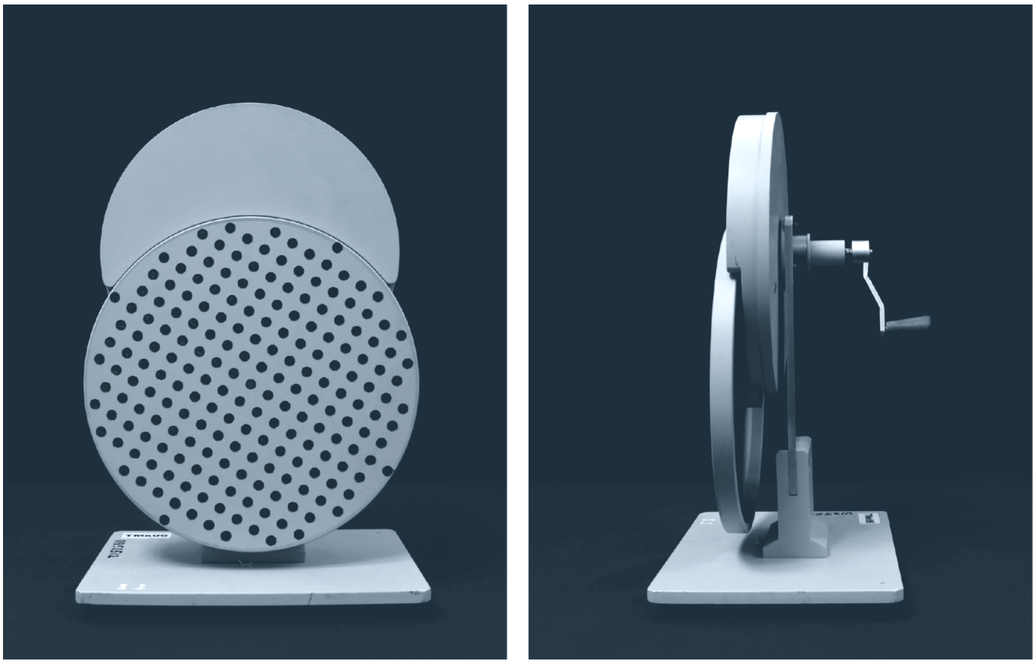

Рис. 2.1: Демонстрация сложения параллельных вращений

Оборудование:

1. Диск диаметром 26 см, поверхность которого покрыта темными кружками диаметром 1 см.

2. Подставка с механизмом, приводящим диск во вращение как вокруг его собственной горизонтальной оси, так и в вертикальной плоскости его движения.

Основные определения:

Вообще говоря, при движении твердого тела разные точки движутся по различным траекториям с различными скоростями. Но оказывается, что всегда можно произвольное движение твердого тела представить как сумму независимых движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся по концентрическим окружностям, а все центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Краткое описание:

Закрепленный на подставке диск обладает горизонтальной осью вращения, проходящей через его центр. При этом вращательный механизм способен приводить в движение по окружности и саму ось.

Раскрутив изначально неподвижный диск вокруг собственной оси, можно наблюдать вращение темных кружков. Удаленные от центра пятна при быстром вращении начнут сливаться в линии, а кружок в центре диска, лежащий на оси вращения, останется неподвижным (рис.2.2).

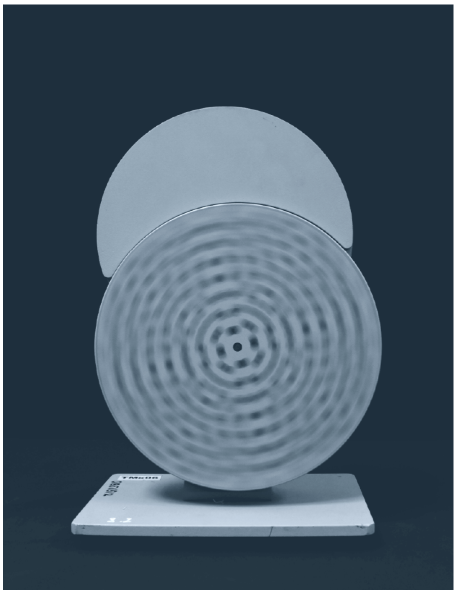

Рис. 2.2: Вращение диска вокруг собственной оси, проходящей через его центр

Если при вращении диска его центральная ось начнет двигаться оп окружности в вертикальной плоскости, параллельной диску (рис.2.3), то результирующее движение можно описать как вращение вокруг мгновенной оси, которая совершает круговое движение. В каждый момент времени мгновенная ось вращения твердого тела оказывается в новом положении, которое можно обнаружить по положению кружка, кажущегося неподвижным. Этот неразмытый кружок не совпадает с центром диска, а перемещается по окружности в вертикальной плоскости.

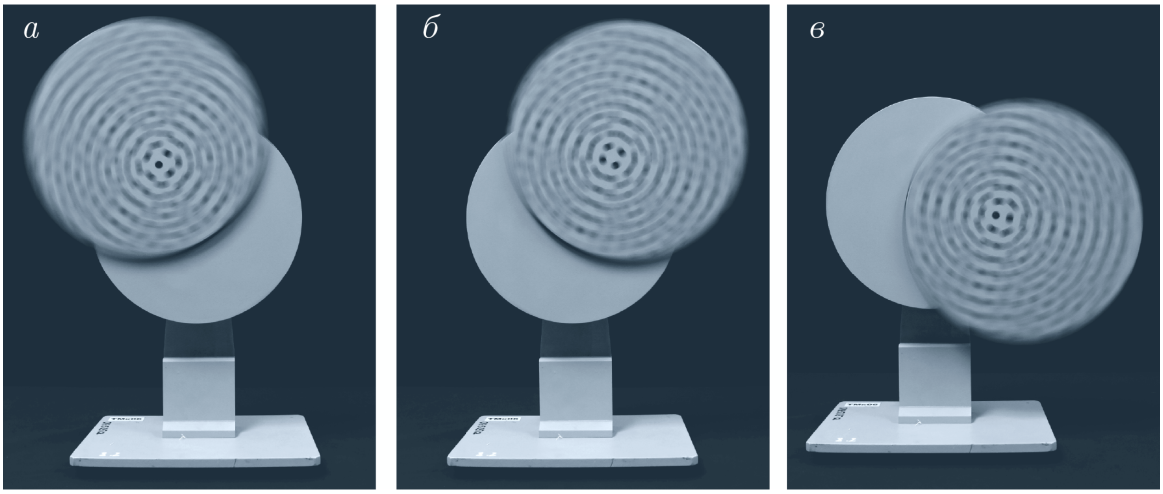

Рис. 2.3: Четкое пятно находится не в центре, что связано с появлением новой — мгновенной оси вращения. Вращение диска вокруг мгновенной оси возникает в результате наложения движения диска вокруг собственной ось и перемещении оси вращения по окружности

Теория:

Пусть диск вращается против хода часовой стрелки. Обозначим угловую скорость его вращения через $\boldsymbol{\omega}_1$ (рис.2.4,*б*).

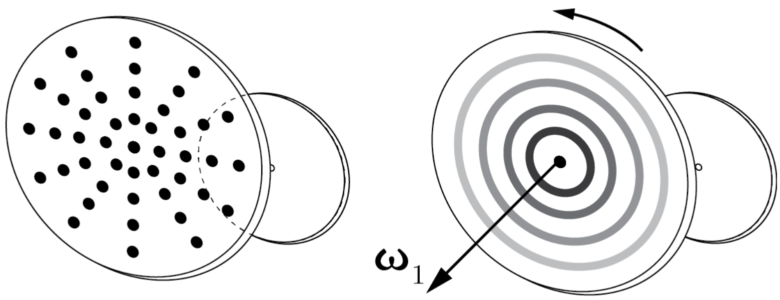

Рис. 2.4: *а* — схематичное изображение неподвижного диска на штативе; *б* — направление вектора угловой скорости диска при его вращении против хода часовой стрелки

Так как ось диска жестко связана с валом на штативе, то при вращении вала (рис.2.5*а*) с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, результирующая угловая скорость вращения диска $\boldsymbol{\omega}$ равна векторной сумме скоростей диска и вала: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Если угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ направлены в одну сторону (как показано на рис.2.6), то мгновенная ось вращения будет лежать на отрезке, соединяющем центры диска и вала. В противном случае, мгновенная ось вращения будет лежит за пределами этого отрезка. Положение мгновенной оси вращения можно определить через соотношение угловых скоростей:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

где через l_1 и l_2 обозначены расстояния от центра диска и вала до мгновенной оси (неразмытого пятна).

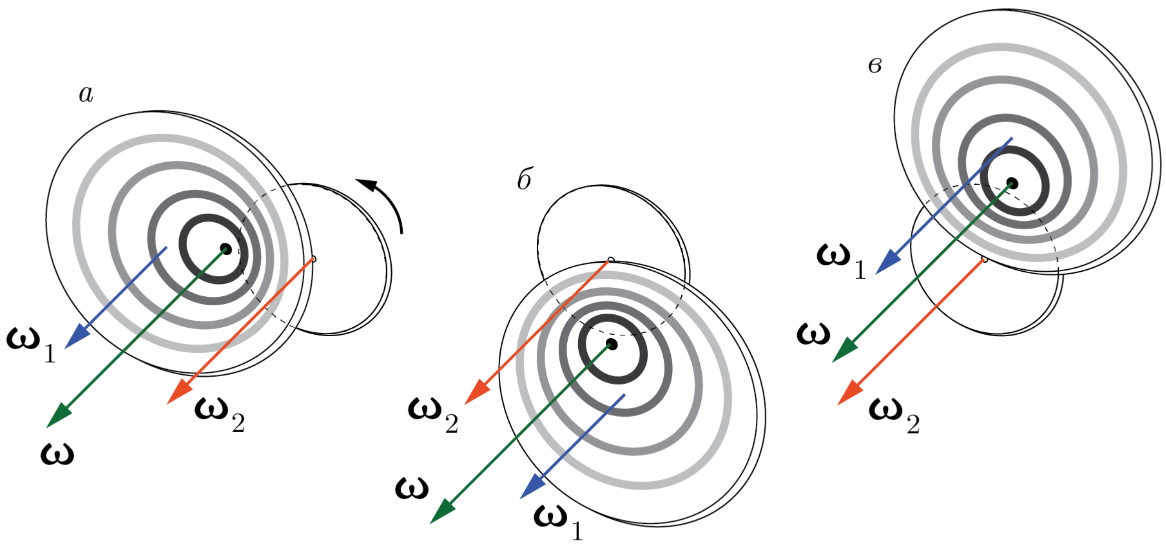

Рис. 2.5: Вектор результирующей угловой скорости **ω** направлен вдоль мгновенной оси вращения, проходящей через точку на прямой, соединяющей центры диска и вала

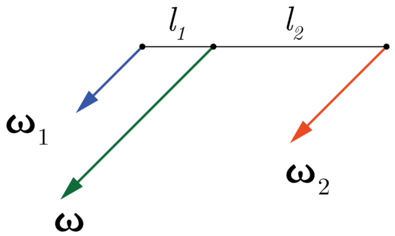

Рис. 2.6: Векторы угловых скоростей диска и вала складываются, а направление результирующего вектора угловой скорости **ω** совпадает с мгновенной осью вращения

Таким образом, по положению резкого пятна на вращающемся диске (рис.2.3) можно судить о соотношении угловых скоростей вращающихся тел. Чем больше собственная угловая скорость вращения диска по сравнению со скоростью вращения вала, там ближе мгновенная ось вращения расположена к оси диска.