

## Свободные оси вращения

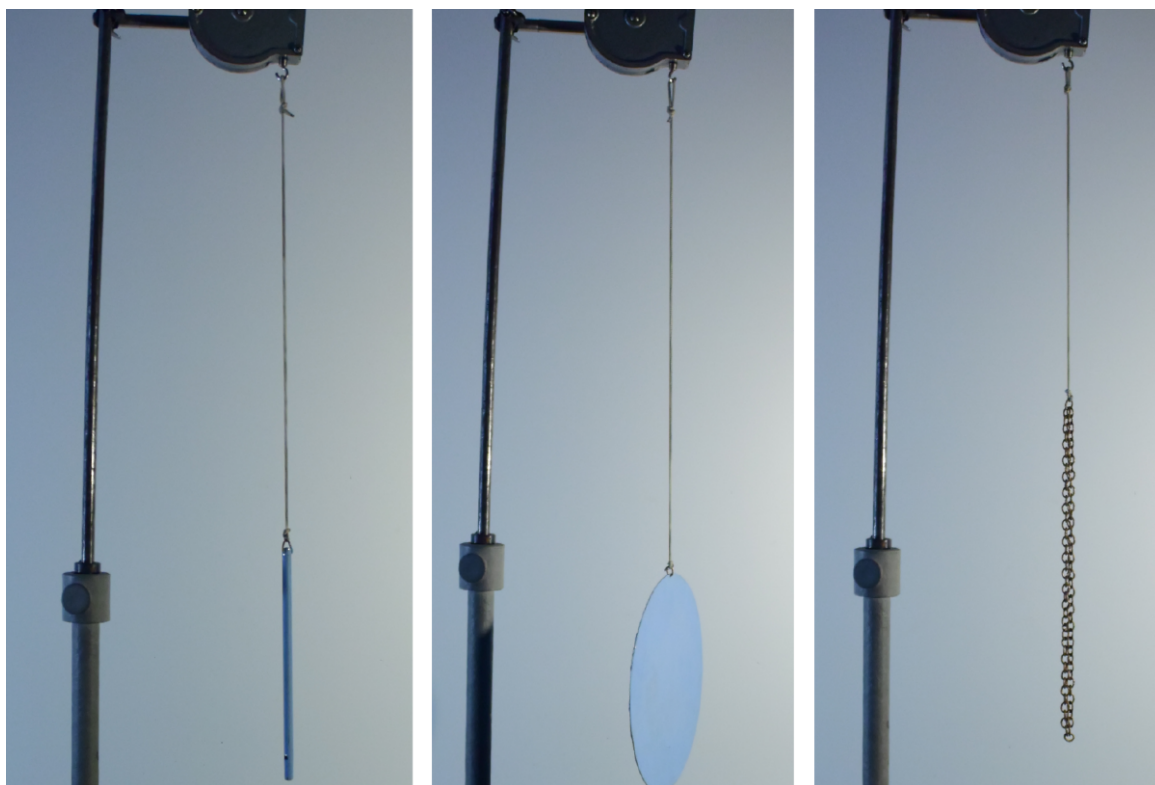


Рис. 1: Демонстрация устойчивости вращения тел вокруг свободных осей с наибольшим и наименьшим значениями момента инерции, и демонстрация того факта, что вращение с промежуточным моментом инерции неустойчиво

### Оборудование:

1. Кусок поролона или пенопласта прямоугольной формы со сторонами различной длины (200:350:50 мм)
2. Тела с подвесами (металлический диск, цилиндрический стержень, кольцо из цепочки)
3. Червячная центробежная машина
4. Штатив

## Основные определения:

При вращении тела вокруг вала, концы которого закреплены, например, в подшипниках, на вал начинают действовать так называемые динамические силы реакции опоры. Динамические реакции в отличие от статических действуют не на покоящееся тело. Связанные с телом оси, при вращении относительно которых динамические реакции опор равны статическим, называются свободными осями. При постоянной угловой скорости вращения динамические реакции перпендикулярны оси вращения (в отсутствие сил трения) и пропорциональны квадрату угловой скорости.

В любом теле произвольной формы существует три взаимно перпендикулярно оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями вращения. Их называют главными осями инерции. Ось с наименьшим моментом инерции интересна тем, что относительно нее легче всего создать вращение. Если взять тела одинаковой массы, но разной формы (диск, стержень или кольцо) и действовать на них равными моментами, то тела будут приобретать различные угловые ускорения. Их моменты инерции  $I$  будут неодинаковыми, потому что у них разная форма.

## Краткое описание:

Устойчивость вращения вокруг главной оси инерции можно продемонстрировать, вращая различные тела при помощи центробежной машины. Подвешенная за один из концов металлический стержень при малых скоростях вращается в вертикальном положении, т.е. вокруг оси с наименьшим моментом инерции.

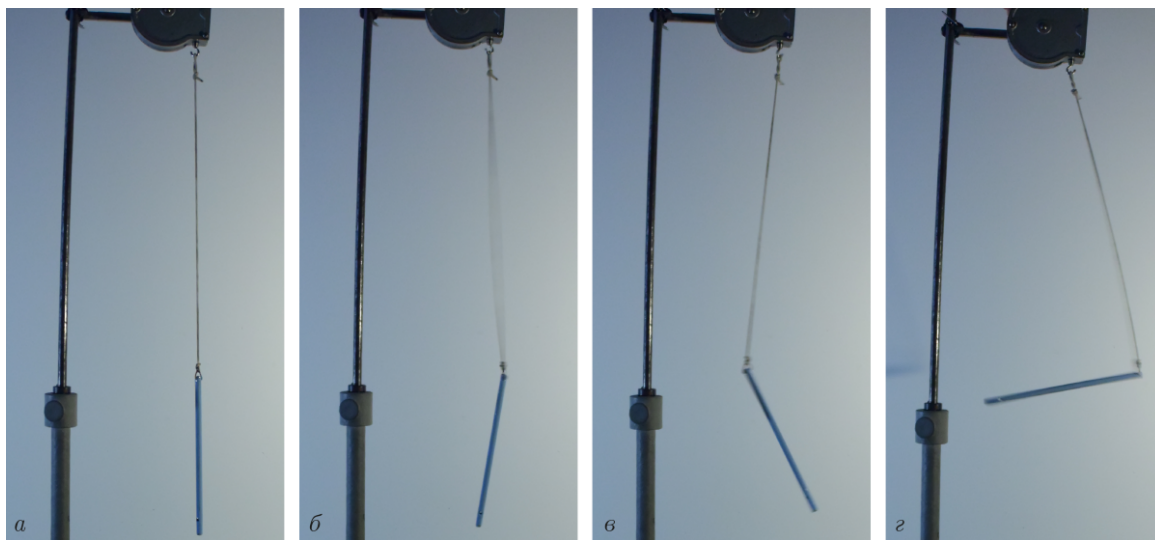


Рис. 2: Вращение цилиндрического стержня вокруг главных осей инерции

При возрастании скорости стержень вопреки действию силы тяжести располагается горизонтально и устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

При помощи червячной центробежной машины можно заставить вращаться алюминиевый диск и цепочку (рис.3, 4). Опыт показывает, что тело устойчиво вращается вокруг той из свободных осей, относительно которой момент инерции имеет наибольшее значение.

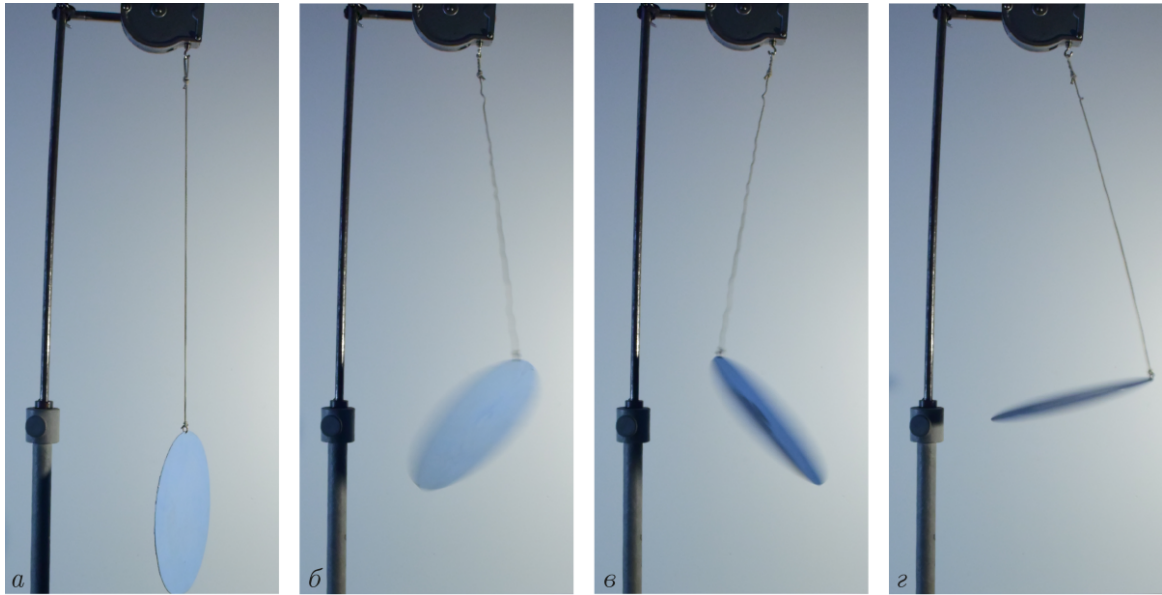


Рис. 3: Вращение алюминиевого диска вокруг главных осей инерции

Одна из особенностей поведения тела при вращении проявляется в том, что центр масс тела поднимается в поле силы тяжести.

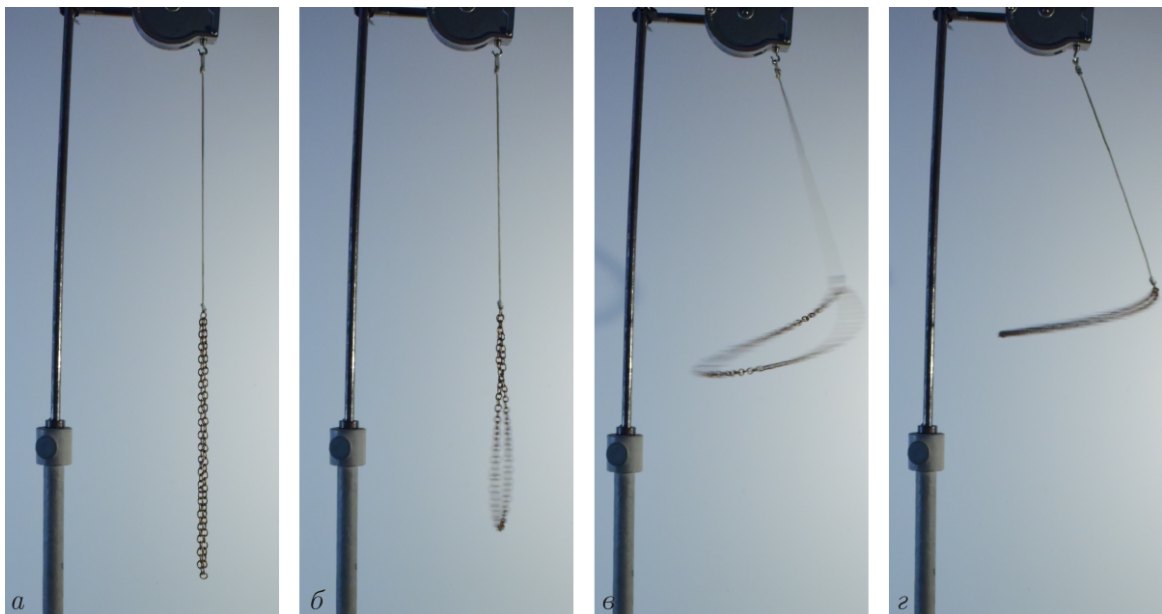


Рис. 4: Вращение металлической цепочки вокруг главных осей инерции

## Теория:

Рассмотрим в качестве примера диск, вращающийся вокруг неподвижной вертикальной оси, которая смещена от центра диска на расстояние  $OC = b$ . На тело действует сила тяжести  $mg$ , и угловая скорость вращения равна  $\omega$  (рис.5).

Определим динамические реакции опоры в точках  $A$  и  $B$ , если  $OA = OB = h$ . Будем предполагать что в точке  $A$  установлен подпятник, а в точке  $B$  — шарнир.

Проведем вращающиеся с диском оси  $Oxyz$  таким образом, чтобы ось  $y$  прошла через центр масс  $C$ . Ось  $Oz$  будет главной осью инерции диска для точки  $O$ , поскольку плоскость  $Oxy$  является плоскостью симметрии диска. Тогда момент инерции  $I_{xz} = I_{yz} = 0$  и из условия  $\omega = \text{const}$  видно, что силы инерции приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку  $O$  и направленной вдоль линии вдоль оси  $Oy$ . По модулю

$$F = ma_c = mb\omega^2.$$

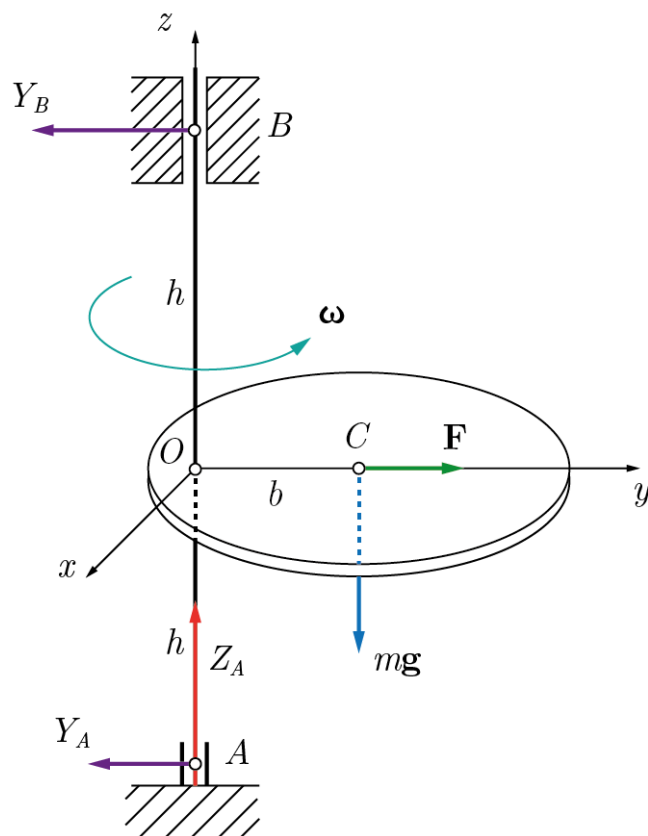


Рис. 5: При вращении твердого тела вокруг оси, концы которой жестко закреплены в подшипниках, возникающие в опорах динамические силы реакции уравновешиваются друг другом

Так как векторы сил  $m\mathbf{g}$  и  $\mathbf{F}$  лежат в плоскости  $Oyz$ , то реакции подшипников лежат в этой же плоскости, то есть имеют составляющие  $Y_A$  и  $Z_A$  в точке  $A$  и  $Y_B$  в точке  $B$ . Тогда, составляя на основании принципа Даламбера для всех действующих сил и сил инерции уравнения равновесия в проекциях на оси  $Oy$  и  $Oz$  и уравнение моментов относительно центра  $A$ , получим:

$$F - Y_A - Y_B = 0, \quad (1)$$

$$Z_A - mg = 0, \quad (2)$$

$$Y_B 2h - mgb - Fh = 0. \quad (3)$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$Y_B = mgb \left( \frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2}h \right), \quad (4)$$

$$Y_A = mgb \left( \frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2}h \right), \quad (5)$$

$$Z_A = mg. \quad (6)$$

Таким образом, реакции  $Y_A$  и  $Y_B$  все время располагаются в плоскости  $Oyz$ , вращающейся вместе с телом.