

Скатывание двух цилиндров

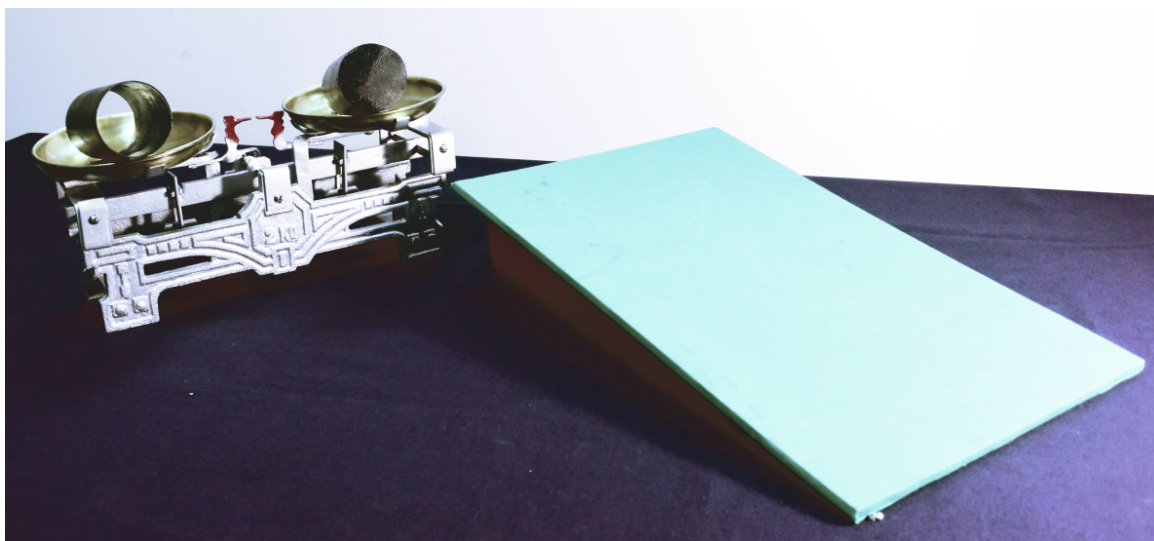


Рис. 1: Демонстрация зависимости инертных свойств тел от распределения массы в этих телах на примере скатывания сплошного и полого цилиндров равной массы и одинакового размера с наклонной плоскости

Оборудование:

1. Два цилиндра одинаковой массы на весах
2. Наклонная плоскость
3. Линейка или указка

Краткое описание:

На наклонную плоскость кладут два цилиндра одинаковой массы и радиуса. Цилиндры располагают так, чтобы их оси были находились одна на продолжении другой.

Пустив цилиндры скатываться одновременно с наклонной плоскости, наблюдают более быстрое скатывание цилиндра, масса которого сосредоточена ближе к центру, так как его момент инерции оказывается меньше. При этом полый цилиндр, в котором вся масса находится на значительном расстоянии от оси вращения, обладает большим моментом инерции.

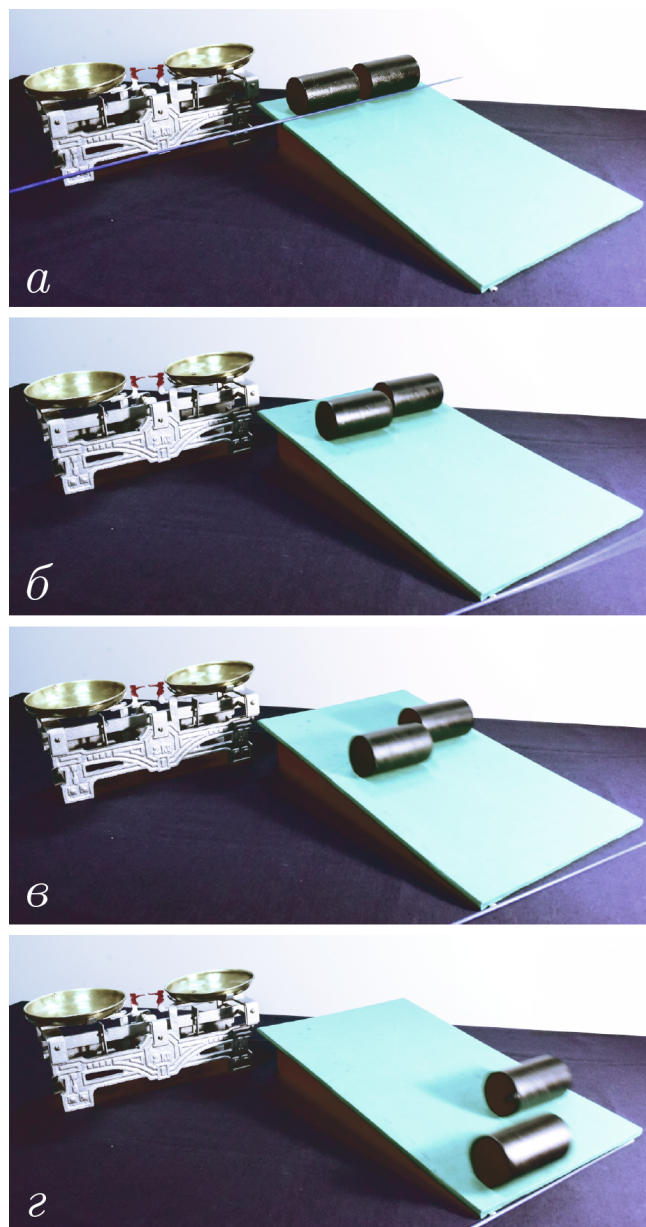


Рис. 2: При одновременном отпускании цилиндров быстрее будет скатываться тот, чей момент инерции окажется меньше. При одинаковых размерах и массе моменты инерции двух цилиндров (сплошной и полый) будут отличаться вдвое. Из-за того, что момент инерции сплошного цилиндра в среднем оказывается меньше момента инерции полого цилиндра, с наклонной поверхности первым скатится сплошной цилиндр

Из-за разницы в распределении массы внутри скатывающихся цилиндров, их центры масс движутся вдоль наклонной плоскости с разными ускорениями. Опыт позволяет наглядно продемонстрировать, что чем больше момент инерции, тем медленнее изменяется линейная скорость тел при одинаковом размере и равной массе.

Теория:

При описании движения цилиндрического тела с наклонной плоскости удобно использовать уравнение движения или второй закон Ньютона, а также записать основной закон динамики вращательного движения.

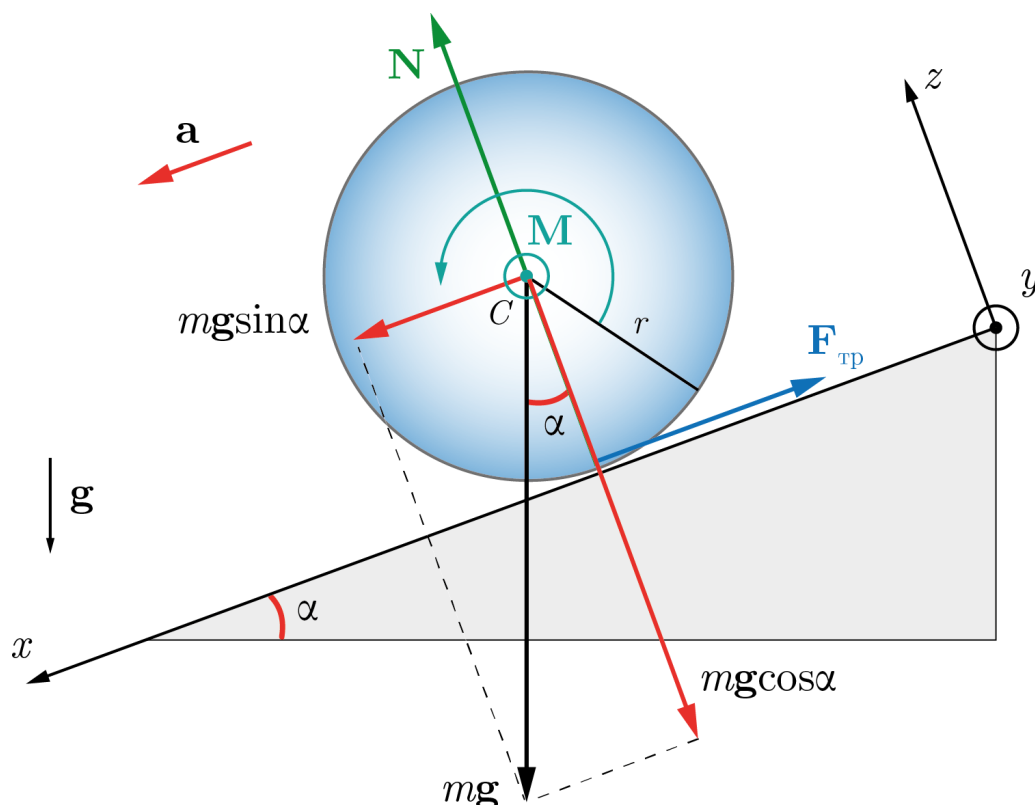


Рис. 3: Схематичное изображение сил, действующих на цилиндр при его движении с наклонной плоскости. Сила трения создает вращательный момент, поэтому скатывающийся ускоренно цилиндр начинает закручиваться. Согласно основному закону динамики вращательного движения угловое ускорение точек цилиндра, а следовательно, и линейное ускорение его центра масс, оказывается тем больше, чем меньше его момент инерции

В векторной форме уравнение поступательного движения центра масс цилиндра запишется следующим образом:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = m\mathbf{a}. \quad (1)$$

В выбранной системе координат после проектирования всех векторов можно записать уравнение движения в скалярном виде. В проекции на ось x это уравнение примет вид:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma, \quad (2)$$

в проекции на ось z :

$$N - mg \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Составим основное уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра. Моменты силы тяжести mg и реакции опоры N относительно этой оси равны нулю. Угловое ускорение ε определяется только моментом силы трения $F_{\text{тр}}$ и моментом инерции I :

$$I\varepsilon = M \quad (4)$$

где I — момент инерции цилиндра относительно оси вращения, $M = F_{\text{тр}} \times r$ — момент силы трения, определяемый через векторное произведение силы трения на плечо.

В проекции на y уравнение вращательного движения (4) примет вид:

$$I\varepsilon = F_{\text{тр}}r. \quad (5)$$

Пользуясь известным соотношением между линейным и угловым ускорениями $a = r\varepsilon$, выразим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{Ia}{r^2}. \quad (6)$$

Подставляя найденную силу трения в уравнение движения (2), получим:

$$mg \sin \alpha - \frac{Ia}{r^2} = ma. \quad (7)$$

Отсюда можно выразить линейное ускорение a центра масс скатывающегося цилиндра

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{I/r^2 + m} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mr^2}. \quad (8)$$

Из полученного выражения следует, что изменение скорости твердого тела при движении по наклонной плоскости зависит от его момента инерции. Увеличение момента инерции твердого тела приводит к уменьшению ускорения центра масс тела. Таким образом, сплошной цилиндр, обладающий меньшим моментом инерции (вся его масса распределена вблизи оси вращения и момент инерции равен $I_1 = mr^2/2$), скатывается быстрее, по сравнению с тонкостенным полым цилиндром, у которого масса в основном находится на периферии ($I_2 = mr^2$).