

Движение тела по «мертвой петле»

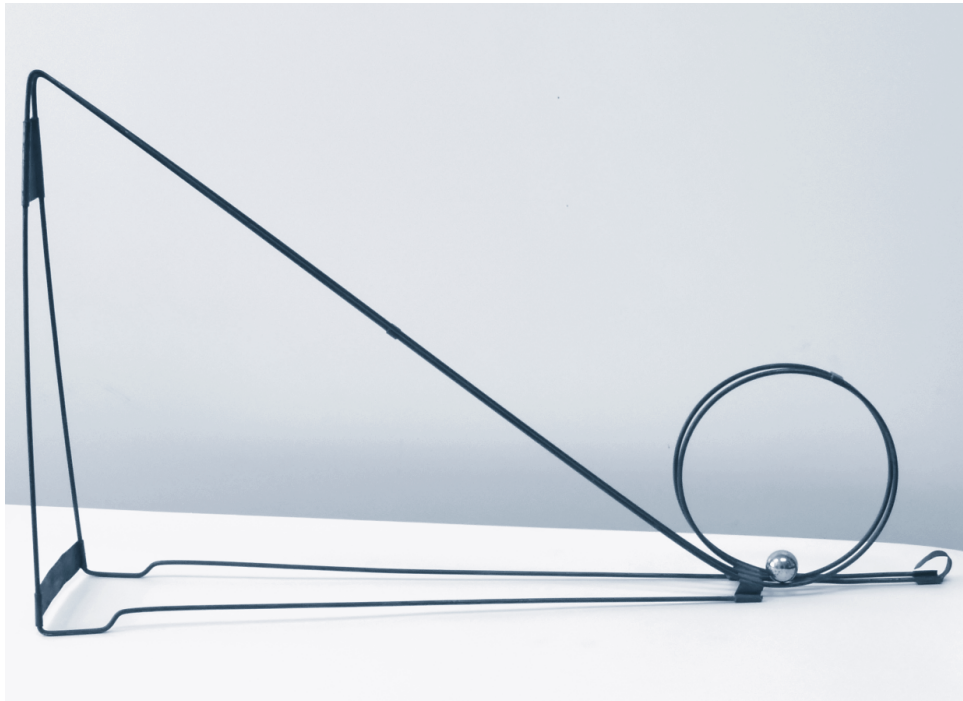


Рис. 1: Демонстрация взаимосвязи кинетической и потенциальной энергии

Оборудование:

1. Лабораторная модель «мертвой петли» (радиус кривизны 8 см)
2. Стальной шарик диаметром 2 см

Основные определения:

Нестерова петля («мертвая петля») — фигура высшего пилотажа, представляющая собой замкнутую кривую в вертикальной плоскости. Названа по имени П. Н. Нестерова, впервые в мире выполнившего ее 27 августа 1913 г.

Центробежная сила инерции — сила, с которой движущаяся материальная точка действует на тело (связь), стесняющее свободу движения точки и вынуждающее ее двигаться криволинейно. Численно такая сила равна

$$F = mv^2/r,$$

где m — масса точки, v — ее скорость, r — радиус кривизны траектории. Направление центробежной силы совпадает главной нормалью к траектории, проведенной из центра кривизны (от центра окружности при движении точки по окружности).

Центробежная сила и центростремительная сила численно равны друг другу и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, но приложены к разным телам — как силы действия и противодействия. Например, при вращении в горизонтальной плоскости привязанного к веревке груза центростремительная сила действует со стороны веревки на груз, вынуждая его двигаться по окружности, а центробежная сила действует со стороны груза на веревку, натягивает ее и при достаточно большой скорости движения может оборвать.

Кинетическая энергия — энергия механической системы, зависящая от скоростей движения ее точек. Кинетическая энергия E_k материальной точки измеряется половиной произведения массы m этой точки на квадрат ее скорости v , т. е.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы равна арифметической сумме кинетических энергий всех ее точек:

$$E_k = 1/2 \sum m_i v_i^2.$$

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из положения 1 в положение 2 происходит под действием приложенных к системе внешних и внутренних сил и равно сумме работ $A_{\text{внеш}}$ и $A_{\text{внутр}}$ этих сил на данном перемещении:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

Это равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии, с помощью которой решаются многие задачи динамики.

Краткое описание:

Прибор «мертвая петля» позволяет демонстрировать ряд опытов по динамике движения материальной точки по окружности. Эти опыты дают возможность выяснить соотношение сил (силы тяжести и реакции рельсов), действующих на катящийся по рельсам шарик, и объяснить возникновение центробежной силы, определяющей криволинейное движение шарика.

На приборе сначала демонстрируется три основных опыта: 1) с наивысшей точки 1 (рис.2) наклонных рельсов, когда шарик устойчиво описывает петлю и с некоторой скоростью вылетает с другого конца желоба; 2) с наименьшей высоты 2 (рис.2) наклонной плоскости, когда шарик только описывает петлю, не срываясь с верхней токи, и 3) с еще меньшей высоты 3 (рис.2), когда шарик, не доходя до вершины петли, отрывается от нее и падает, описав в воздухе внутри петли параболу.

Теория:

Рассмотрим этот опыт, не учитывая диссипативные силы (трение шарика о направляющие), и найдем начальное положение (высота h), достаточное для того, чтобы тело преодолело «мертвую петлю».

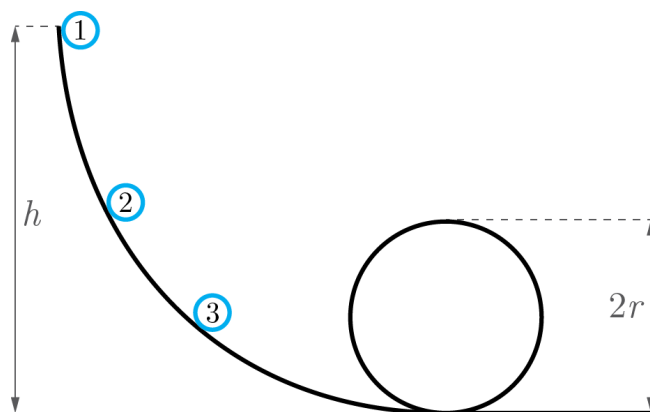


Рис. 2: Схематичное изображение направляющих, по которым движется точка. Начальное положение тела отмечено точками 1, 2 и 3

Шар в начальный момент времени обладает только потенциальной энергией.

$$E_{\text{п}} = mgh \quad (1)$$

где m — масса шарика, а h — начальная высота спуска.

При движении шарика его потенциальная энергия переходит в кинетическую, следовательно в нижней точке траектории должно выполняться условие

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh. \quad (2)$$

Выражая из этого уравнения скорость v_1 , запишем:

$$v_1^2 = 2gh, \quad (3)$$

или

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (4)$$

Рассмотрим момент, когда шарик оказывается в верхней точке петли. В этот момент тело обладает минимальным центростремительным ускорением, равным ускорению свободного падения $a_z = g$. Учитывая эту связь имеем:

$$a_z = \frac{v_2^2}{r} = g, \quad (5)$$

где v_2^2 — скорость шара достигаемая в верхнем положении петли.

Закон сохранения энергии

$$E_{к2} + E_{п2} = E_{п}, \quad (6)$$

можно записать в следующем виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + 2mgr = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (7)$$

где слагаемое $1/2mv_1^2$ совпадает с начальной потенциальной энергией тела.

Необходимо сделать важное замечание, что при скатывании шара конечных размеров (нематериальная точка), необходимо учитывать его момент инерции $I = mR^2$, где R — радиус шара. В этом случае в законе сохранения энергии следует добавить слагаемое

$$E_{в} = 1/2I\omega^2,$$

и тем самым учесть кинетическую энергию вращательного движения тела при скатывании вдоль направляющих. Однако дальнейшие выкладки приводятся в приближении материальной точки.

Из уравнения (7) после несложных преобразований получим:

$$v_2^2 + 4gr = v_1^2. \quad (8)$$

Если из выражения (5) выразить v_2^2 и подставить это соотношение в уравнение (8), то получим:

$$v_1^2 = 5gr. \quad (9)$$

Воспользовавшись уравнением 3, подставим выражение для v_1^2 и получим h :

$$h = \frac{v_1^2}{g} = \frac{5gr}{2g} = 2.5r \quad (10)$$

Таким образом, если высота $h = 2.5r$, тогда тело способно преодолеть петлю, однако при условии $h < 2.5r$ скорости тела окажется недостаточно для полного оборота.

В реальности же равенство $h = 2.5r$ не выполняется, так как в системе неизбежно появление сил сопротивления. Из-за трения шарика о металлические рельсы условие прохождения петли примет вид $h \geq 2.5r$.