Маятник Максвелла

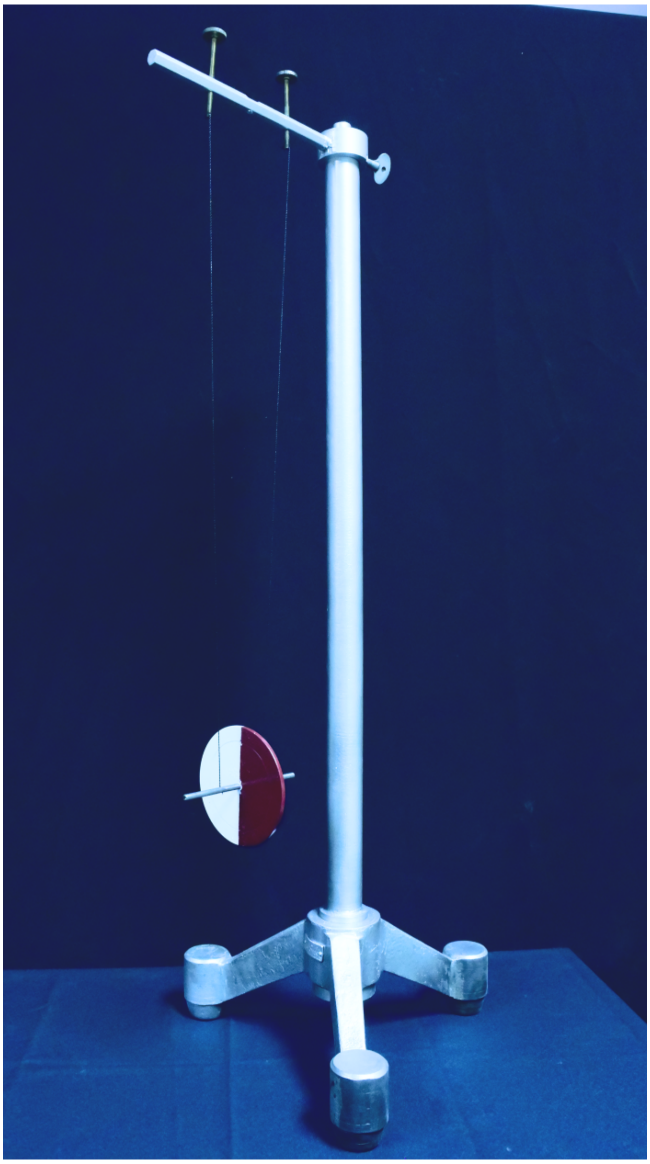

Рис. 1: Демонстрация превращения потенциальной энергии в кинетическую энергию и обратно

Оборудование:

1. Металлический круг радиусом 5 см и массой 500 г на бифилярном подвесе
2. Штатив

Основные определения:

Можно показать, что если тело вращается относительно оси, проходящей через его центр масс, и одновременно перемещается поступательно так, что ось смещается параллельно самой себе, то для него справедливо следующее

полная кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс тела (считая сосредоточенной в нем массу тела) и кинетической энергии вращения тела:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где v_c — скорость поступательного движения центра масс, I — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс, ω — угловая скорость вращения тела вокруг той же оси.

Следует также отметить, что энергия вращательного движения при заданной угловой скорости существенно зависит от распределения в теле массы – момента инерции. Отсюда становится понятным, зачем маховики делают с большим моментом инерции. Очевидно, чтобы увеличить при данной угловой скорости его кинетическую энергию. Значительный запас энергии кинетический энергии необходим, например, для сохранения равномерности хода двигателя механизма при внезапно меняющейся нагрузке.

Краткое описание:

Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, за которую маятник подвешивается за две нити (рис.1). При вращении маятника нити могут наматываться на стержень или сматываться с него, обеспечивая тем самым перемещение маятника либо вверх, либо вниз (рис.2). Если, намотав нити на ось, поднять маятник на некоторую высоту и отпустить его, то он начнёт опускаться под действием силы тяжести, приобретая одновременно и вращательное движение. В нижней точке, когда маятник опустится на полную длину нитей, поступательное движение вниз прекратится. Нити станут наматываться на вращающийся по инерции стержень, а маятник начнёт подниматься вверх, постепенно замедляя своё вращение. После достижения наивысшей точки цикл колебательного движения возобновится.

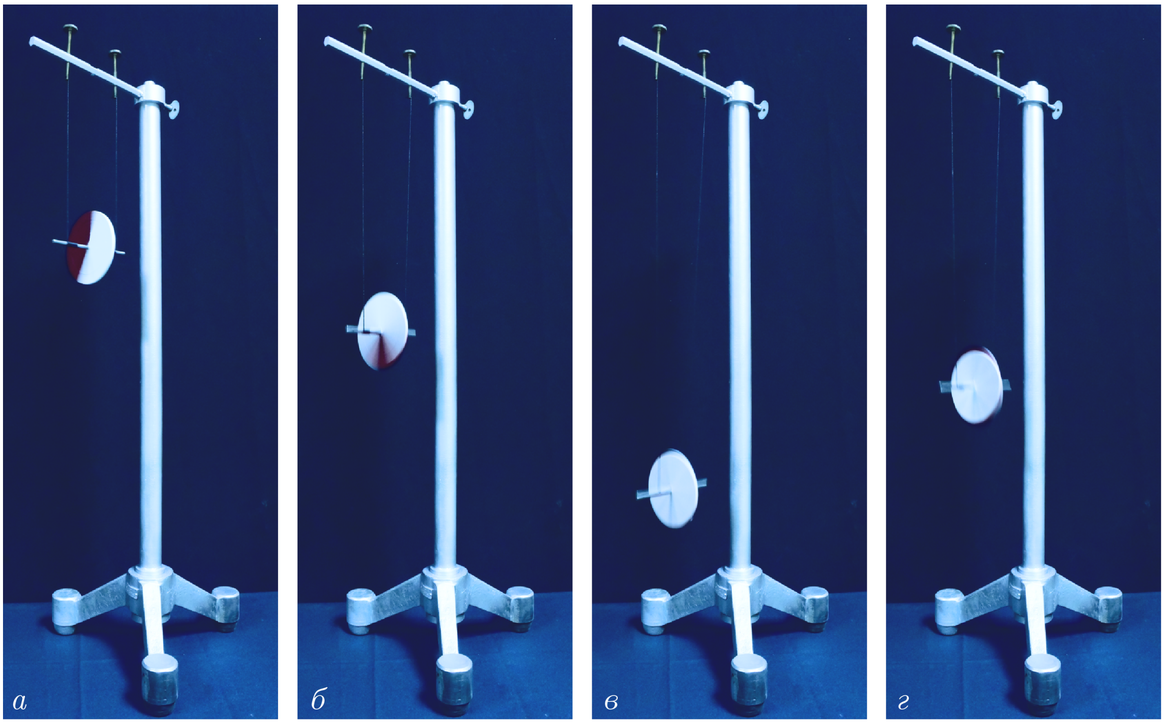

Рис. 2: Фотографии различных состояний маятника Максвелла: *а* — начальное положение с наибольшей потенциальной энергией; *б* — подвес маятника раскрутился наполовину; *в* — диск маятника находится в самой нижней точке и обладает наибольшей кинетической энергией

Теория:

Когда маятник отпускается, он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси.

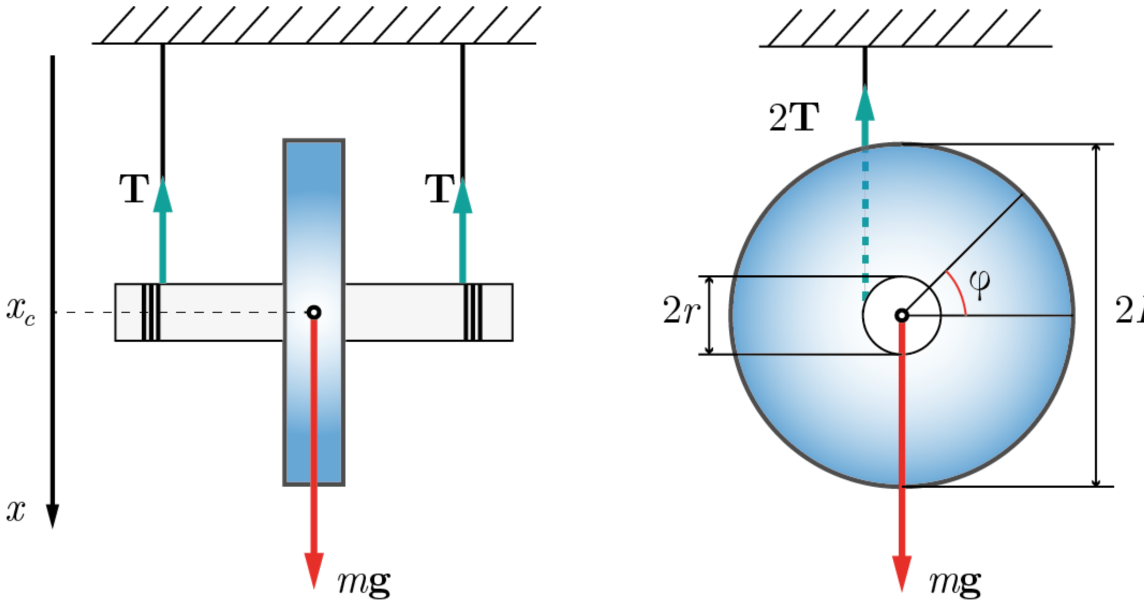

Рис. 3: Схематичное изображение сил, действующих на массивный диск в маятнике Максвелла

Определим момент инерции маятника Максвелла, поэтому запишем уравнение движения. На рис.3 указаны силы, действующие на маятник. Для описания движения маятника удобно выбрать систему отсчета, связанную с центром масс маятника. Центр масс маятника опускается вниз с линейным ускорением **a**. Уравнение движения центра масс маятника имеет вид:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}, \tag{1}$$

где **T** — сила натяжения каждой из нитей, m — масса маятника.

Необходимо учесть, что маятник совершает также вращательное движение вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс под действием момента силы натяжения нитей $M = rT$, где M - момент силы натяжения T, а r — радиус вала.

Основное уравнение вращательного движения имеет вид

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение вращения маятника, I — момент инерции маятника.

Спроектируем силы на направление движения маятника. Так как центр масс маятника опускается на столько, на сколько раскручивается нить, то перемещение x центра масс связано с углом поворота φ соотношением:

$$x = \varphi r \tag{3}$$

Дифференцируя это выражение дважды по времени, получим

$$a = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = r\varepsilon. \tag{4}$$

С учетом выражения (2) уравнение (4) можно переписать следующим образом

$$rT = \frac{Ia}{r}. \tag{5}$$

Приведем полученное выражение к виду

$$T = \frac{Ia}{r^2}. \tag{6}$$

Учитывая уравнение (1), получим выражение для линейного ускорения центра масс маятника

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}, \tag{7}$$

а для силы натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{1 + mr^2/I} \tag{8}$$

Из полученных соотношений следует, что ускорение маятника и сила натяжения нити не изменяются со временем. Следовательно, если при опускании маятника координату x_c его центра масс отсчитывать от точки его закрепления, то со временем координата меняется по закону:

$$x_c = \frac{at^2}{2} \tag{9}$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (9), получим для момента инерции маятника Максвелла следующее выражение

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2x} - 1\right) \tag{10}$$

в которое входят измеримые в эксперименте величины, такие как r — радиус вала с намотанной на него нитью, x — координата центра масс, m — масса маятника. Необходимо учитывать, что масса маятника Максвелла складывается из массы вала и диска.