

## Крестообразный маятник Обербека

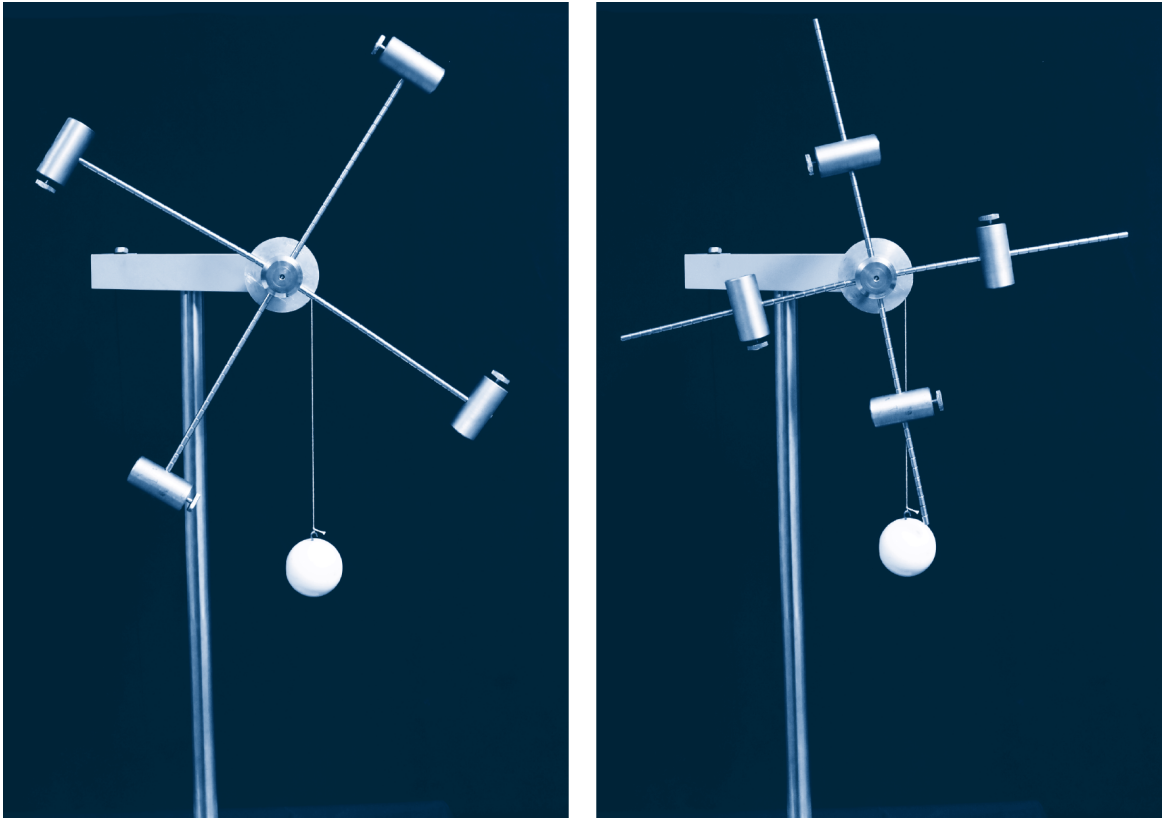


Рис. 1: Демонстрация инертных свойств тел при их вращении

### Оборудование:

1. Крестообразный маятник с четырьмя грузами одинаковой массы, закрепленный на штативе
2. Шкив с перекинутой через него нитью
3. Тела различной массы, подвешенные за нить

## Основные определения:

Величина, которая одновременно учитывает влияние силы и ее расположения относительно оси вращения на угловое ускорение тела, называется моментом силы.

Расстояние  $r$  от линии действия силы до оси вращения тела называют плечом силы.

Момент силы считают равным произведению модуля силы на ее плечо:

$$M = Fr.$$

Можно показать, что момент силы обладает свойствами вектора и может быть выражен через вектор силы  $\mathbf{F}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$  той точки, в которой приложена эта сила. Но учитывать это приходится тогда, когда ось вращения может менять свое положение во время движения. При рассмотрении вращения около неподвижной оси можно ограничиться нахождением модуля и знака момента силы. Принято считать момент силы положительным, если он стремится вызывать вращение тела по часовой стрелке, и отрицательным — когда вызываемое им вращение имеет противоположное направление.

Угловые ускорения тел прямо пропорциональны моменту действующих сил:

$$\varepsilon \sim M.$$

Этот важный вывод подтверждается множеством опытов с вращением тел.

Инертность тела по отношению к вращательному движению, ее влияние на угловое ускорение зависит не только от массы тела, но и от того, как она распределена относительно оси вращения. Это означает, что на инертность во вращательном движении влияют форма и геометрические размеры тела, его расположение относительно оси вращения, в особенности распределение массы по объему тела.

Величина, которая определяет инертность тела по отношению к вращательному движению, называется моментом инерции тела. В механике различают осевые и центробежные моменты инерции.

Немецкий физик А. Обербек (1846-1900) известен как создатель механического устройства в виде крестовины с закрепленными на ее концах грузами, применяемого для изучения вращательного движения.

## Краткое описание:

*Опыт 1.* Можно показать различный характер вращения тела с различными осевыми моментами инерции приводя во вращение в воздухе коробку или кусок пенопласта вокруг главных осей инерции. Для прямоугольного параллелепипеда главные оси инерции — это оси, проходящие через центры противоположных граней. Если подбросить кусок поролона, заставив его вращаться вокруг одной из осей инерции, то в отсутствие внешних сил можно заметить, что устойчиво вращение относительно главных осей, соответствующих наибольшему и наименьшему моментам инерции тела. Вращение вокруг главной оси, соответствующей среднему моменту инерции, будет неустойчиво.

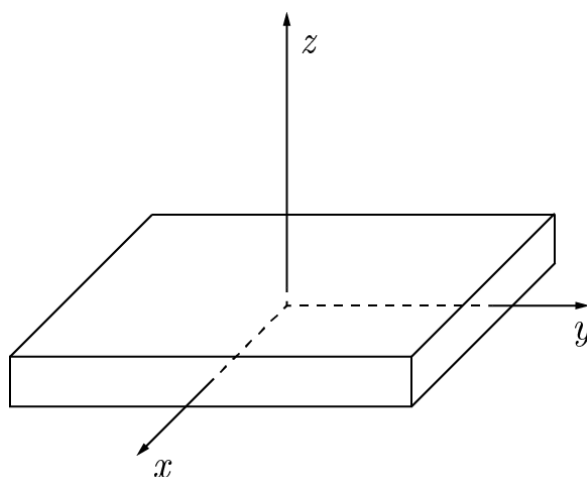


Рис. 2: Тело в форме прямоугольного параллелепипеда может обладать тремя различными моментами инерции, поэтому характер вращения тела вокруг каждой из трех главных осей различается

Вообще, практически оказывается, что вращение устойчиво вокруг оси с наибольшим моментом инерции. Это связано с влиянием внешних сил, в частности сил трения, которые создают момент относительно центра тяжести. Действие этого момента в случае вращения вокруг оси с наибольшим моментом инерции оказывается меньшим.

*Опыт 2.* Маятник Обербека состоит из двух взаимно перпендикулярных стержней, вращающихся вокруг горизонтальной оси. На стержни насажены четыре груза одинаковой массы, перемещение которых изменяет в довольно широких пределах момент инерции прибора. На оси прибора также находятся шкив, на который наматывается нить. Подвесив к другому концу нити груз, можно создать вращающий момент и раскрутить маятник (рис.3, а). И наоборот, вращая маятник с грузами можно, наматывая шнурок на шкив, поднимать груз.

Если грузы на стержнях маятника расположены близко к оси вращения, то момент инерции прибора невелик и скорость его вращения быстро достигает значительной величины (рис.3,б). Если же грузы сдвинуть к концам стержней, то момент инерции прибора возрастет; при этом он будет медленно набирать скорость и груз коснется пола спустя заметно большее время.

Опыт можно повторить, подвесив за нить груз большей массой. Такой подход позволит изменить величину момента силы, действующей на маятник Обербека (положение грузов на спицах при этом менять не нужно), а, следовательно и характер вращения такого маятника.

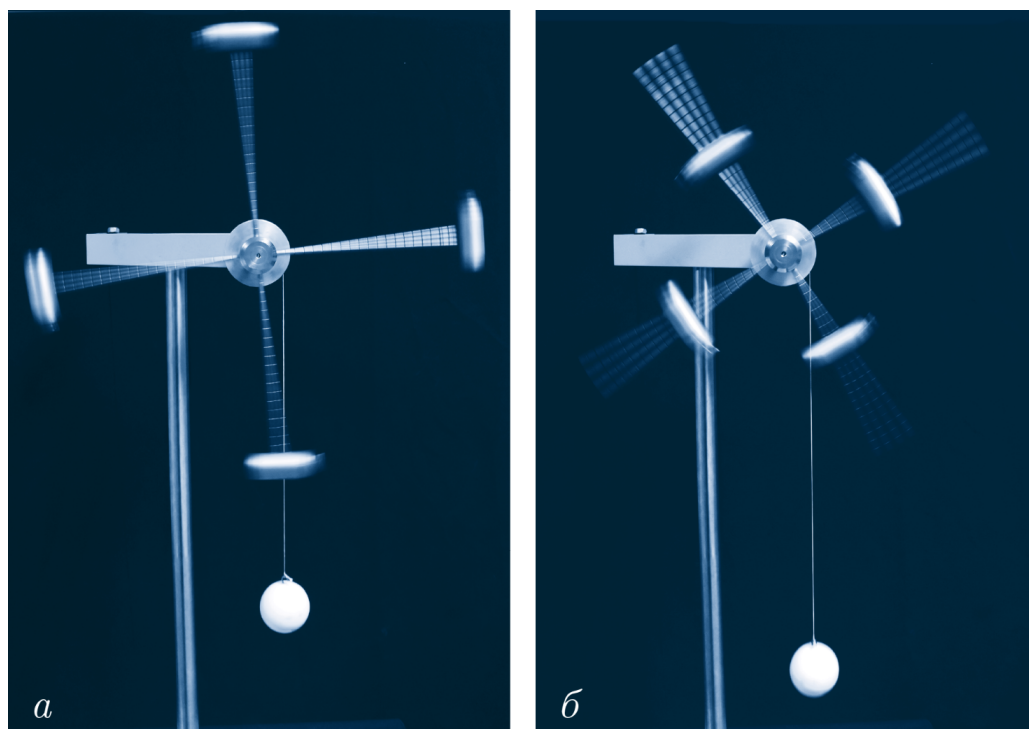


Рис. 3: Угловое ускорение вращающегося тела зависит от силы, действующей на это тело, а также от расположения действующей силы относительно оси вращения тела (а); угловое ускорение вращающегося тела зависит от массы этого тела и от расположения массы этого тела относительно оси вращения (б)

## Теория:

Рассмотрим вращение крестообразного маятника Обербека при различном положении грузов  $m$  относительно оси вращения (рис.4,а), и с различной нагрузкой на шкив со стороны тела, подвешенного за нить (рис.4,б).

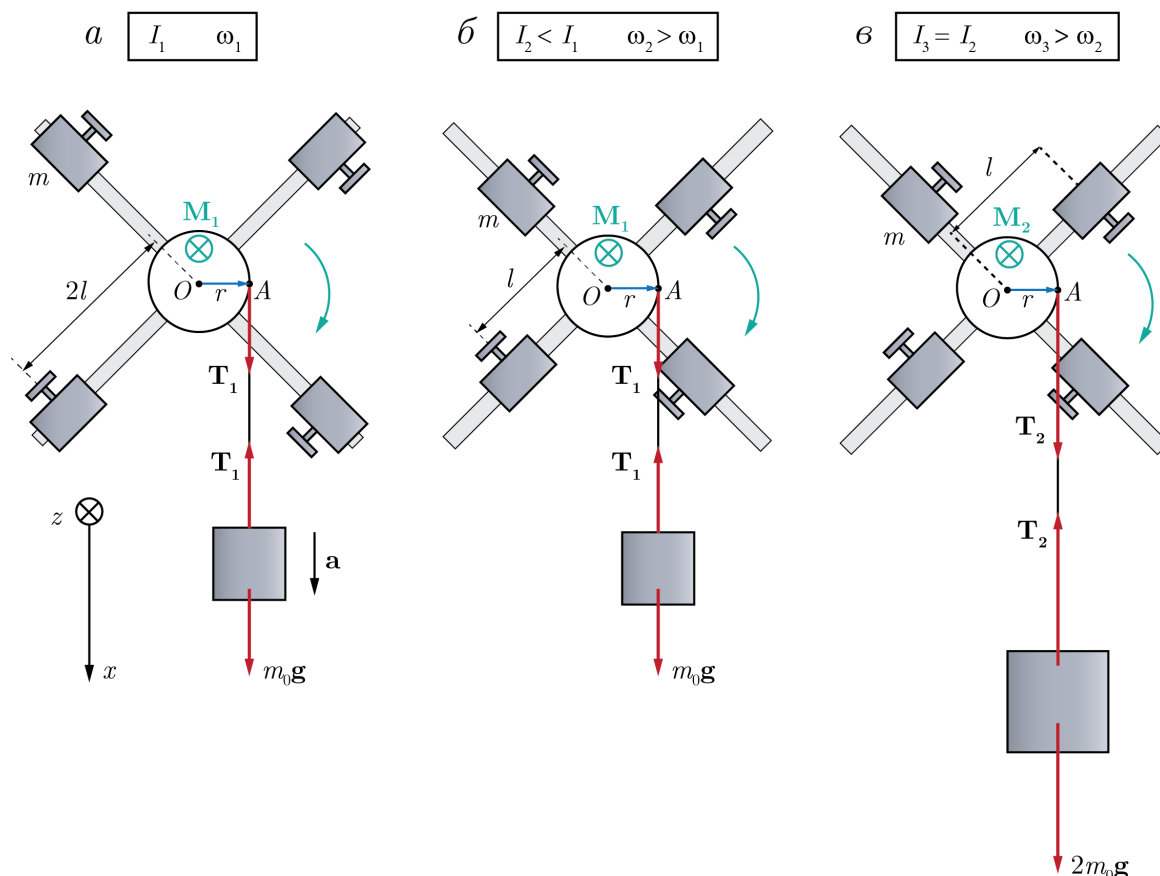


Рис. 4: Демонстрация инертных свойств тел при их вращении

Запишем уравнение вращательного движения маятника вокруг неподвижной оси:

$$I\varepsilon = M, \quad (1)$$

где  $M = rT$  — момент внешних сил (в частности, силы натяжения нити  $T$ ),  $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$  — угловое ускорение,  $\omega$  — угловая скорость, а  $I$  — момент инерции маятника Обербека.

Для простоты будем считать, что нить невесома и нерастяжима, а силы трения в шкиве пренебрежимо малы. Тогда уравнение вращательного движения маятника в проекции на ось  $z$  можно записать как:

$$I\varepsilon = rT. \quad (2)$$

Второй закон Ньютона для поступательного движения большого груза в проекции на ось  $x$  имеет следующий вид:

$$m_0 a = m_0 g - T \quad (3)$$

Из связи линейного и углового ускорения точек вращающегося шкива имеем:

$$a = r\varepsilon \quad (4)$$

Из уравнения (2), выразим силу натяжения и воспользуемся соотношением (4):

$$T = \frac{I\varepsilon}{r} = \frac{Ia}{r^2} \quad (5)$$

Подставим полученное выражение в уравнение ??

$$m_0 a + \frac{Ia}{r^2} = m_0 g \quad (6)$$

Домножая последнее выражение на  $r^2$

$$a(m_0 r^2 + I) = m_0 g r^2 \quad (7)$$

можно получить соотношение для линейного ускорения  $a$ :

$$a = \frac{m_0 g r^2}{m_0 r^2 + I}, \quad (8)$$

где  $I$  — момент инерции крестообразного маятника.

Рассмотрим несколько конфигураций маятника Обербека.

При неизменной массе грузов и радиуса шкива, будем менять расстояние между грузами массой  $m$  и осью вращения  $O$ . Опыт показывает что, приближая грузы к оси вращения, при постоянном моменте внешней силы  $F_{\text{тяж}}$  маятник начинает раскручиваться с большим ускорением. Наблюдаемый эффект можно объяснить на основании теоремы Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i l_i^2) \quad (9)$$

Из полученного соотношения видно, что при приближении грузов к оси вращения, момент инерции маятника уменьшается, то есть  $I_2 < I_1$ . И наоборот, с ростом  $l$  момент инерции увеличивается. Таким образом, на рис.4,а момент инерции больше, чем во втором случае (рис.4,б).

Отсюда следует, что при постоянном значении момента внешней силы вращающиеся тела тем быстрее изменяют свою угловую скорость, чем меньше их момент инерции.

При неизменном положении  $l$  грузов на крестовине, можно увеличить внешнюю силу, и, соответственно, создать больший момент силы (рис.4,б). Угловое ускорение маятника в этом случае также окажется больше, чем в случае на рис.4,а. Возрастет кроме этого и линейное ускорение массивного тела, создающего этот самый момент силы. Такая зависимость углового ускорения маятника от прикладываемого внешнего момента силы выражается соотношением (8).