Упругое соударение шаров

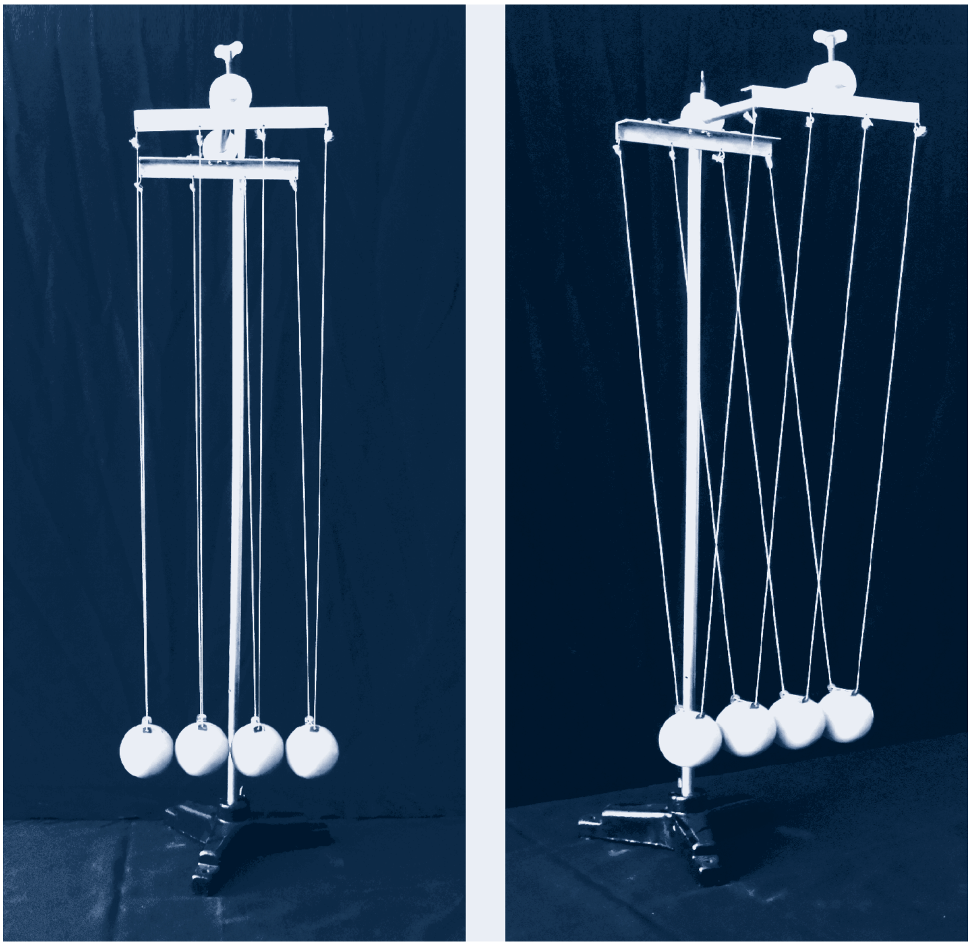

Рис. 1: Демонстрация закона сохранения импульса при упругом ударе нескольких шаров

Оборудование:

1. Четыре одинаковых бильярдных шара на бифилярных подвесах
2. Штатив

Основные определения:

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуются величиной, называемой коэффициентом восстановления.

Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду (другое тело) отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = \frac{v}{u}.$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем.

В качестве предельных случаев рассматривают случай абсолютно упругого удара ($k = 1$), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай абсолютно неупругого удара ($k = 0$), когда вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Краткое описание:

Опыт заключается в том, что к штативу подвешиваются четыре шара равной массы. После этого подвес регулируется так, чтобы удар шаров был центральным (рис.2) и взаимодействие происходило попарно. Второе условие означает, что между шарами имеется небольшой зазор, необходимый для того, чтобы после соударения один шар успвал остановится, а другой получить и передать полученный импульс.

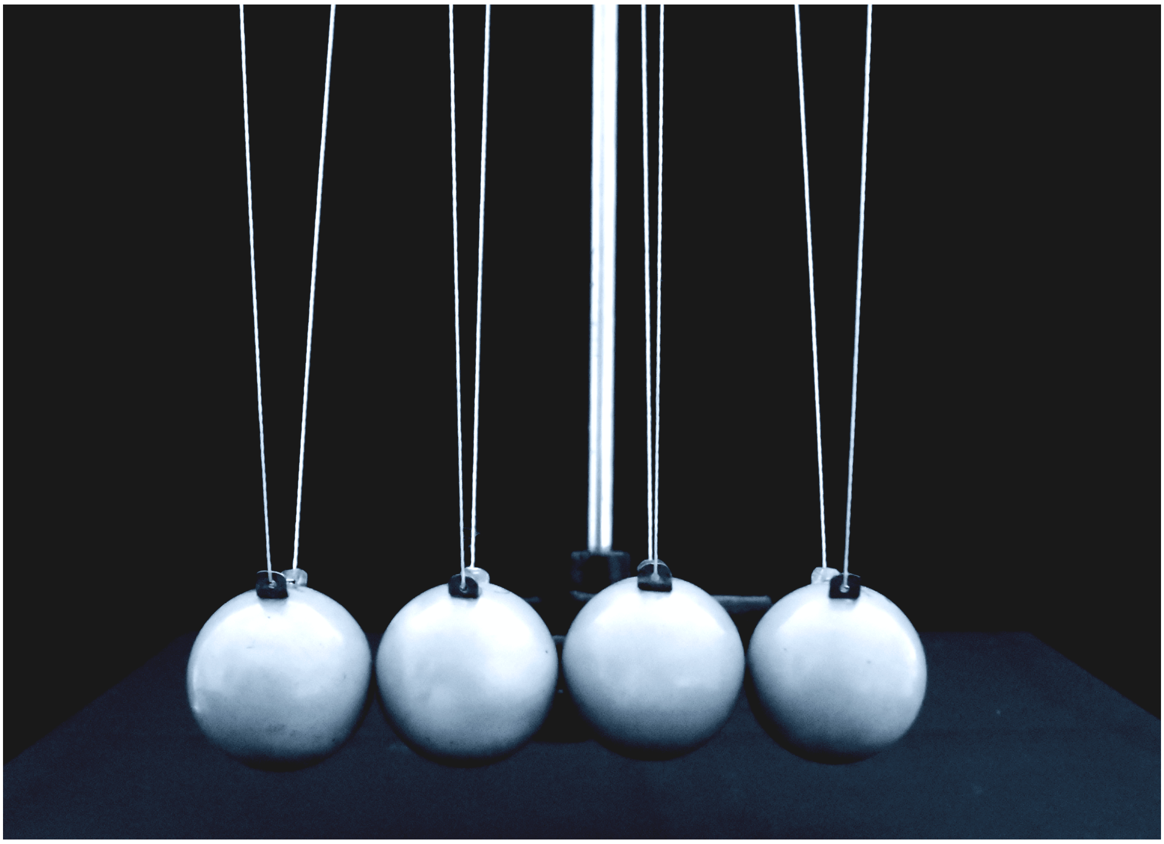

Рис. 2: Начальное расположение шаров

По завершению настройки подвеса один крайний шар, подвешенный слева, отклоняется. В этом случае после соударения и передачи импульса между шарами можно увидеть как отскакивает шар, находящийся с правой стороны цепочки. При этом все остальные шары, в том числе и ударяющий, остаются неподвижны (рис.3, *а*).

Если отклонить два шара одновременно, то после удара от противоположного конца цепочки отскочат тоже два шара (рис.3, *б*).

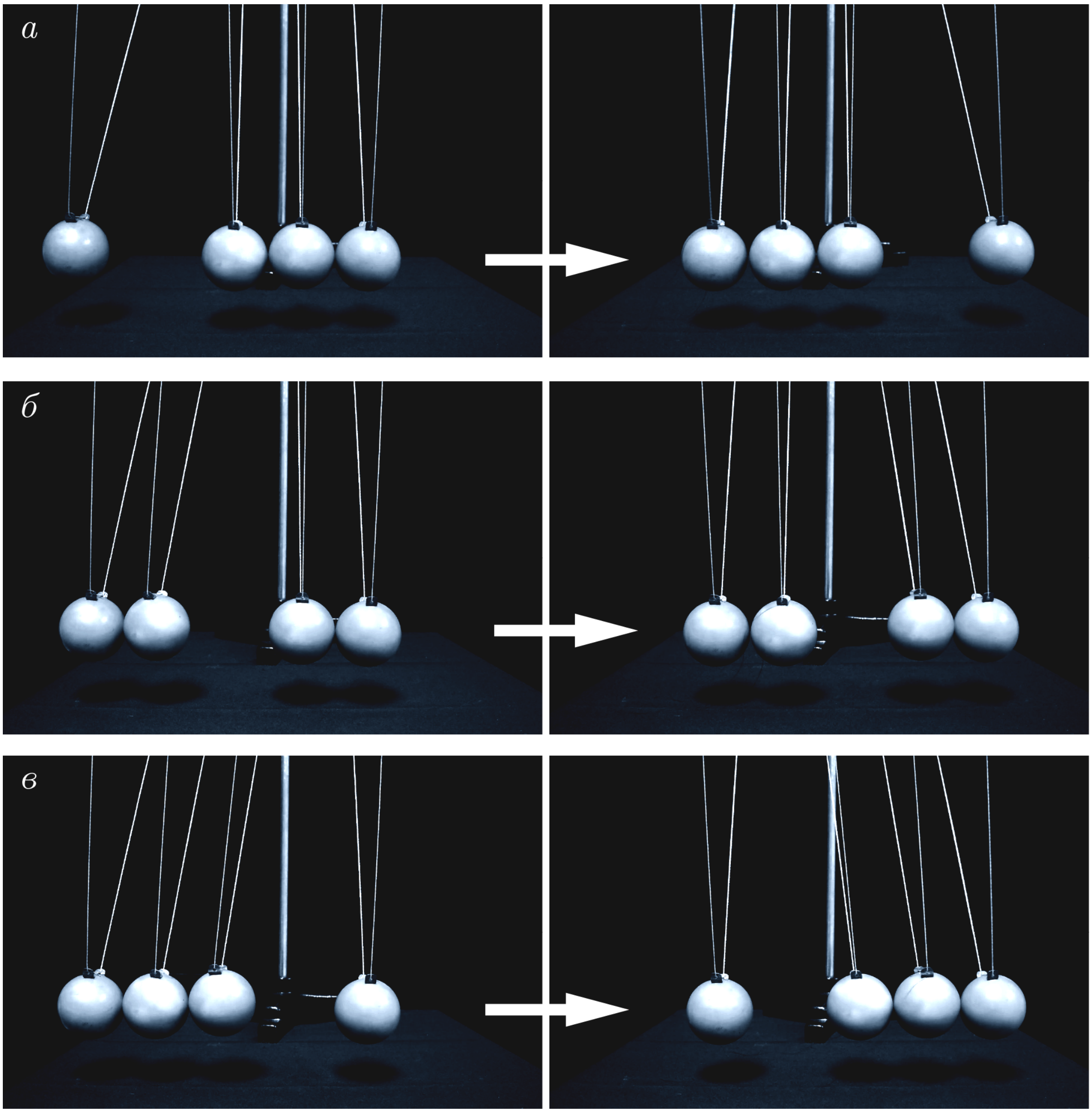

Рис. 3: После упругого соударения отскакивает такое же число шаров (та же масса), которое изначально было отклонено на некоторый угол

Наконец если отклонить три соседних шара, то после удара можно наблюдать как три ударяющих шара останавливаются, зато отклоняются три шара с противоположной стороны (рис.3, *в*). При таком столкновении на месте всегда остается один шар, а отклоняется три.

Теория:

Использование законов сохранения позволяет найти скорость движения шаров после упругого взаимодействия. Из-за того, что в опыте количество шаров, которые в начальный момент отведены на некоторый угол, может быть различным (один, два или три шара), а массы шаров одинаковы, задачу о нахождении скорости шаров после соударения проще рассмотреть в приближении взаимодействия только двух тел:

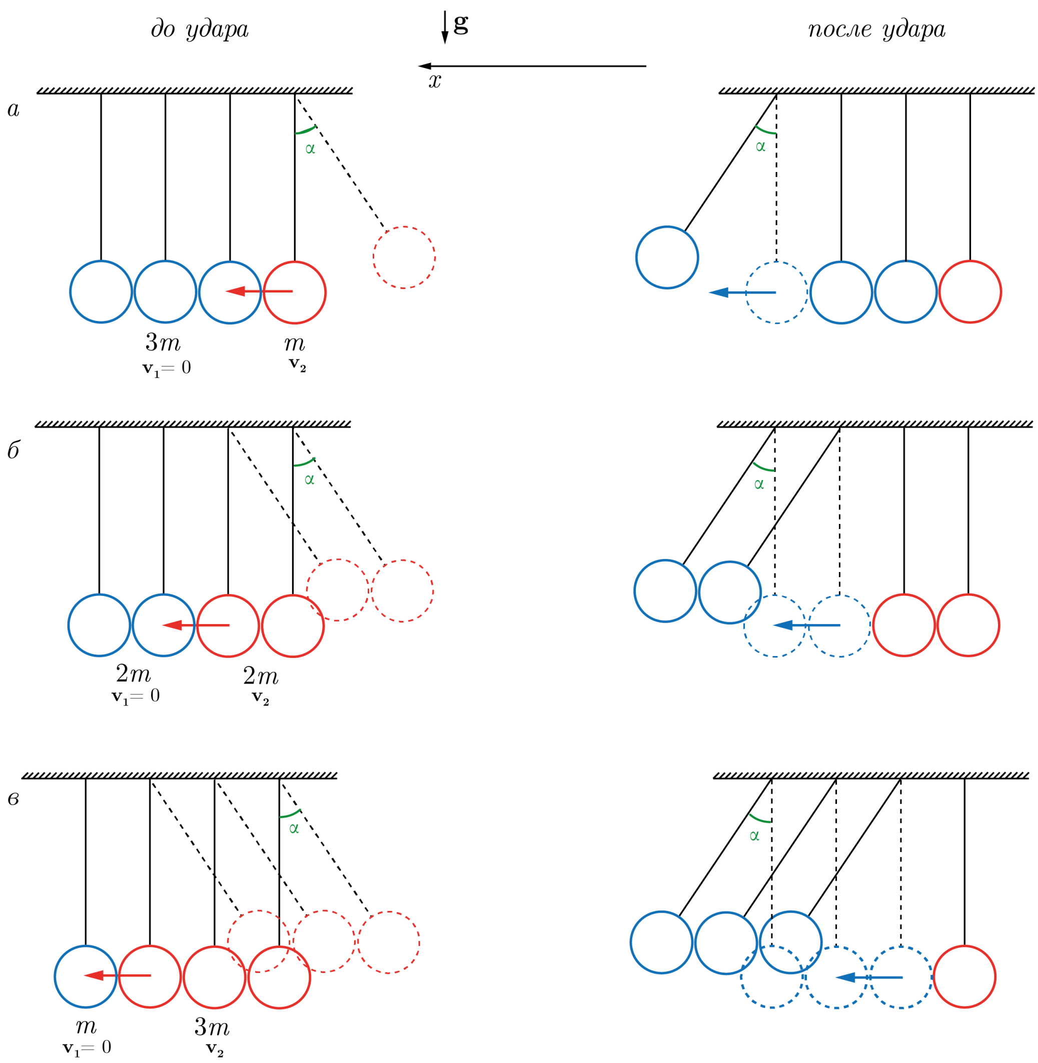

Рис. 4: Демонстрация передачи импульса при упругом столкновении шаров одинаковой массы m: *а* — вначале на угол α отклонен один шар, который при ударе передает импульс крайнему шару с противоположной стороны; *б* — на угол α отклонены два шара, которые после удара останавливаются, но зато на тот же угол откланяются два других шара; *в* — в результате столкновения трех шаров с четвертым останавливается лишь крайний шар, причем три других шара продолжают движение в другую сторону

1. отклонен один шар массой $m_1 = m$, а три других шара общей массой $m_2 = 3m$ неподвижны (рис.4, *а*);

2. $m_1 = m_2 = 2m$ — отклонены два шара (рис.4, *б*);

3. $m_1 = 3m$, $m_2 = m$ — три шара сталкиваются с одним (рис.4, *в*).

В этом случае закон сохранения проекции импульса на ось x (индекс x в уравнениях опущен) и энергии можно записать в виде

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + +m_4 v_4 = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_1^2 \end{cases} \tag{1}$$

где v_1 , v_2 — модули вектора скорости тел массой m_1 и m_2 до соударения, u_1 и u_2 — модули вектора скорости этих тел после взаимодействия.

Сокращая одинаковые множители во втором уравнении системы (1) и группируя слагаемые при m_1 и m_2, получим:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). \tag{2}$$

Пользуясь формулой сокращенного умножения последнее уравнение можно переписать:

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \tag{3}$$

Считая, что $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$ или $u_1 = v_2 + u_2 - v_1$, можно записать:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_2 + m_1(v_2 + v_1) + m_2 u_2, \tag{5}$$

или

$$u_2(m_1 + m_2) = 2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2 \tag{6}$$

Тогда для скорости второго (отскочившего) шара m_2 после соударения получим выражение:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

или

$$u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{8}$$

Для первого шара m_1 скорость после соударения можно рассчитать по формуле:

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{9}$$

В частном случае, если сталкиваются одинаковые тела ($m_2 = m_1$, причем одно из них в момент абсолютно упругого удара покоится ($v_2 = 0$), то скорость этого тела после взаимодействия с телом той же массы станет равна скорости движущегося тела, $u_2 = v_1$. При этом тот шар, который сталкивается с изначально неподвижным телом, остановится, а его импульс передастся второму шару, который отклонится на тот же угол, что и первый.