Свободные оси вращения

Рис. 1: Демонстрация устойчивости вращения тел вокруг свободных осей с наибольшим и наименьшим значениями момента инерции, и демонстрация того факта, что вращение с промежуточным моментом инерции неустойчиво

Оборудование:

1. Кусок поролона или пенопласта прямоугольной формы со сторонами различной длины (200:350:50 мм)

2. Тела с подвесами (металлический диск, цилиндрический стержень, кольцо из цепочки)

3. Центробежная машина

4. Штатив

Основные определения:

При вращении тела вокруг вала, концы которого закреплены, например, в подшипниках, на вал начинают действовать так называемые динамические силы реакции опоры. Динамические реакции в отличие от статических действуют не на покоящееся тело. Связанные с телом оси, при вращении относительно которых динамические реакции опор равны статическим, называются свободными осями. При постоянной угловой скорости вращения динамические реакции перпендикулярны оси вращения (в отсутствие сил трения) и пропорциональны квадрату угловой скорости.

В любом теле произвольной формы существует три взаимно перпендикулярно оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями вращения. Их называют главными осями инерции. Ось с наименьшим моментом инерции интересна тем, что относительно нее легче всего создать вращение. Если взять тела одинаковой массы, но разной формы (диск, стержень или кольцо) и действовать на них равными моментами, то тела будут приобретать различные угловые ускорения. Их моменты инерции I будут неодинаковыми, потому что у них разная форма.

Краткое описание:

С цепочкой, стержнем и диском осуществляется демонстрация вращения тел около свободных осей с использованием имеющегося на центробежной машине крючка, к которому прикрепляются: а) стержень длиной 15-20 см и диаметром 1 см, б) металлический диск диаметром 12-20 см или в) цепочка с завязанным концом в виде петли.

Подвешенная за один из концов металлический стержень при малых скоростях вращается в вертикальном положении, т.е. вокруг оси с наименьшим моментом инерции (рис.2).

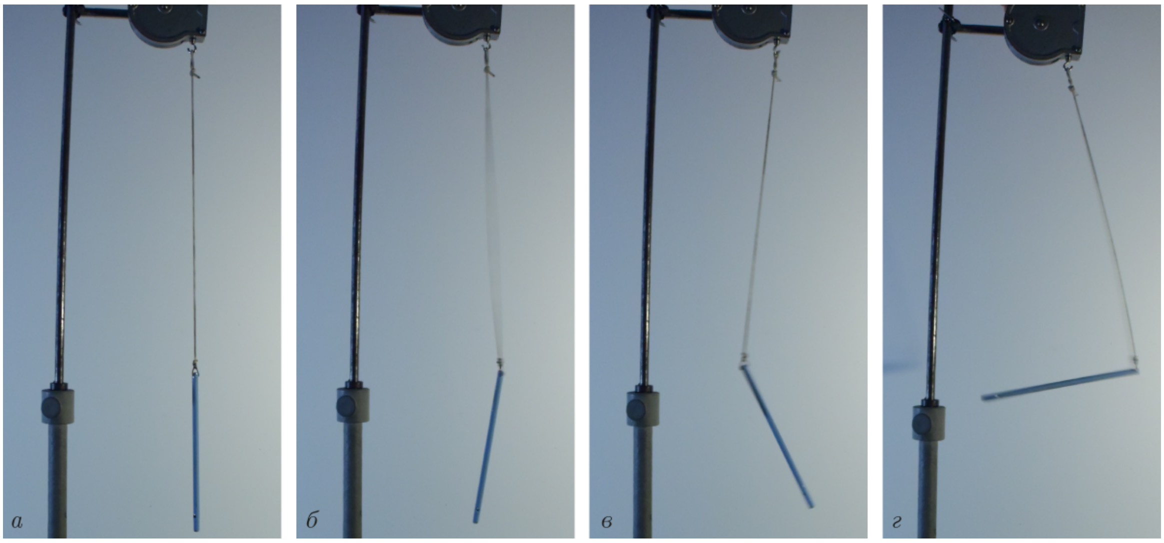

Рис. 2: Вращение цилиндрического стержня вокруг главных осей инерции

При приведении машины во врещение стержень и диск, с увеличением угловой скорости, принимает горизонтальное положение (рис.3), а цепочка, кроме того, растягивается в правильный круг (рис.4).

Этот опыт демонстрирует вращение тел около свободных осей: при быстром вращении петля растягивается в круг, при чем ее плоскость располагается перпендикулярно к оси вращения. Центр круга цепочки будет лежать на продолжении оси вращения. Таким образом, цепочка будет устойчиво вращаться вокруг оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости образовавшегося кольца, т.е. вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

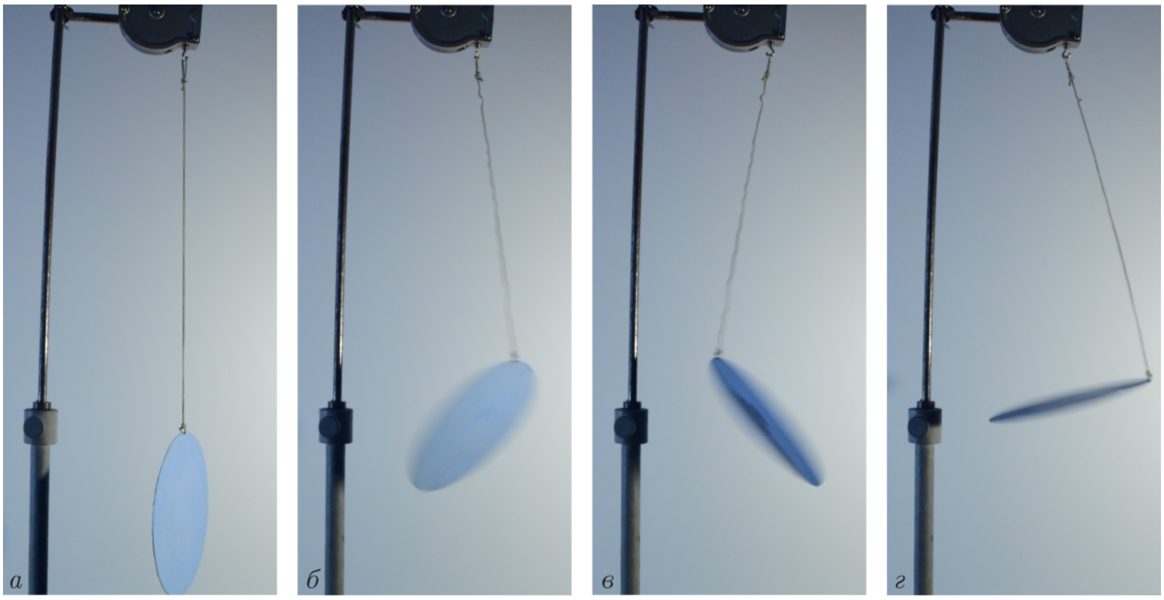

Рис. 3: Вращение алюминиевого диска вокруг главных осей инерции

Одна из особенностей поведения тела при вращении проявляется в том, что центр масс тела поднимается в поле силы тяжести.

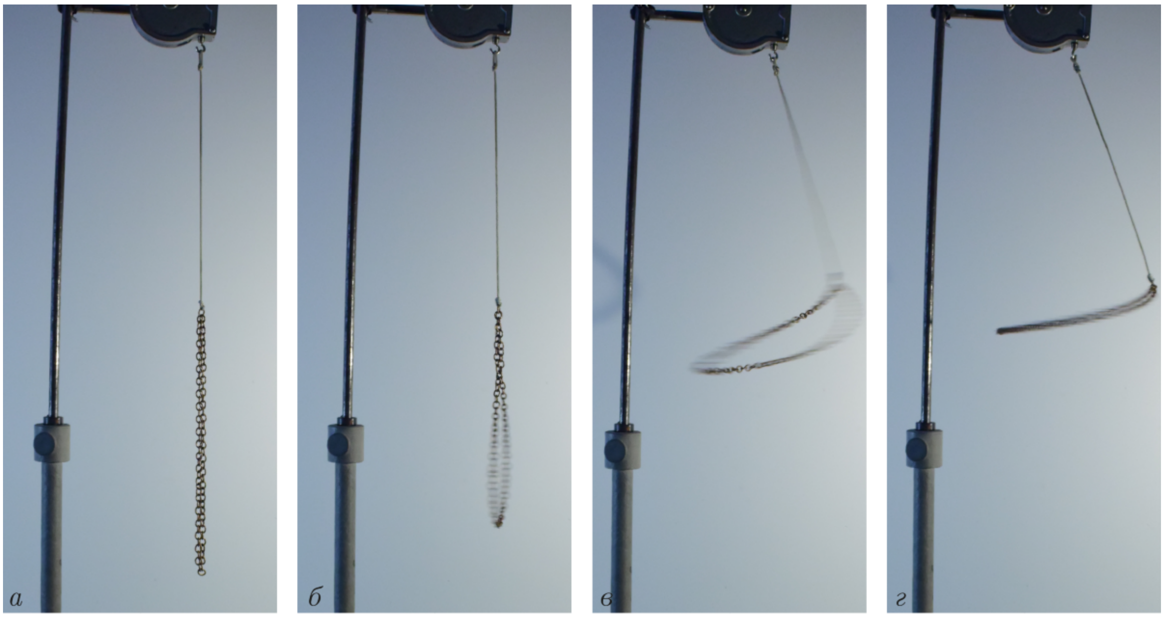

Рис. 4: Вращение металлической цепочки вокруг главных осей инерции

Теория:

Рассмотрим в качестве примера диск, вращающийся вокруг неподвижной вертикальной оси, которая смещена от центра диска на расстояние $OC = b$. На тело действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, и угловая скорость вращения равна $\boldsymbol{\omega}$ (рис.5).

Определим динамические реакции опоры в точках A и B, если $OA = OB = h$. Будем предполагать что в точке A установлен подпятник, а в точке B — шарнир.

Проведем вращающиеся с диском оси $Oxyz$ таким образом, чтобы ось y прошла через центр масс C. Ось Oz будет главной осью инерции диска для точки O, поскольку плоскость Oxy является плоскостью симметрии диска. Тогда момент инерции $I_{xz} = I_{yz} = 0$ и из условия ω = const видно, что силы инерции приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку O и направленной вдоль линии вдоль оси Oy. По модулю

$$F = ma_c = mb\omega^2.$$

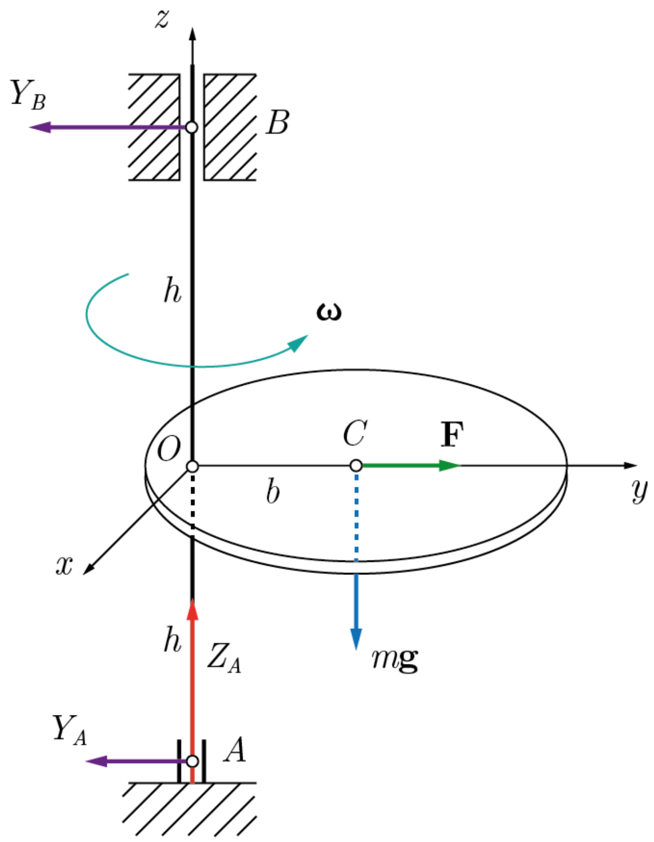

Рис. 5: Пи вращении твердого тела вокруг оси, концы которой жестко закреплены в подшипниках, возникающие в опорах динамические силы реакции уравновешиваются друг другом

Так как векторы сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}$ лежат в плоскости Oyz, то реакции подшипников лежат в этой же плоскости, то есть имеют составляющие Y_A и Z_A в точке A и Y_B в точке B. Тогда, составляя на основании принципа Даламбера для всех действующих сил и сил инерции уравнения равновесия в проекциях на оси Oy и Oz и уравнение моментов относительно центра A, получим:

$$F - Y_A - Y_B = 0, \tag{1}$$

$$Z_A - mg = 0, \tag{2}$$

$$Y_B 2h - mgb - Fh = 0. \tag{3}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$Y_B = mgb\left(\frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2}h\right), \tag{4}$$

$$Y_A = mgb\left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2}h\right), \tag{5}$$

$$Z_A = mg. \tag{6}$$

Таким образом, реакции Y_A и Y_B все время располагаются в плоскости Oyz, вращающейся вместе с телом.