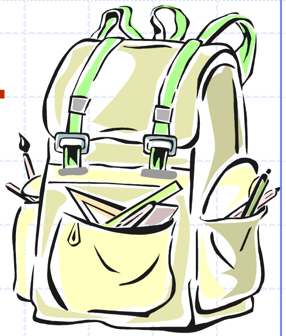
Παρουσίαση για χρήση με το σύγγραμμα, Αλγόριθμοι Σχεδίαση και Εφαρμογές, των M. T. Goodrich and R. Tamassia, Wiley, 2015 (στα ελληνικά από εκδόσεις Μ. Γκιούρδας)

Δυναμικός προγραμματισμός: Πρόβλημα σακιδίου 0-1

Civil War Knapsack. U.S. government image. Vicksburg National Military Park. Public domain.

The Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Problem

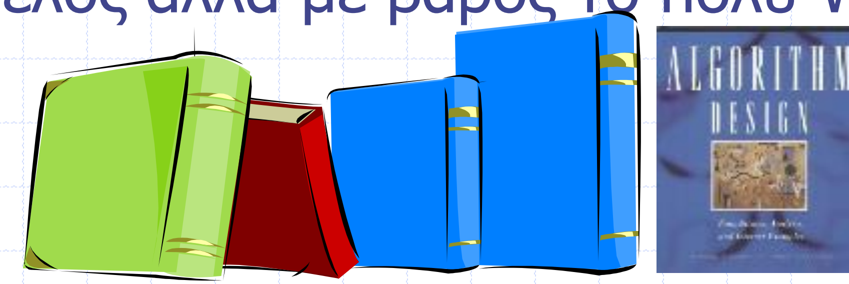


- Δεδομένα: Ένα σύνολο S n αντικειμένων, με κάθε αντικείμενο i να έχει
  - w_i – ένα θετικό βάρος
  - b_i – μία θετική τιμή οφέλους
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων με το μέγιστο συνολικό όφελος αλλά με βάρος το πολύ W.
- Εάν **δεν** επιτρέπεται να πάρουμε κλασματικά ποσά τότε αυτό είναι το **πρόβλημα σακιδίου 0-1**.
  - Σε αυτήν την περίπτωση όπου το T δηλώνει το σύνολο των αντικειμένων που θα πάρουμε
  - Σκοπός: μεγιστοποίηση του $\sum_{i \in T} b_i$
  - Περιορισμός: $\sum_{i \in T} w_i \leq W$

Παράδειγμα

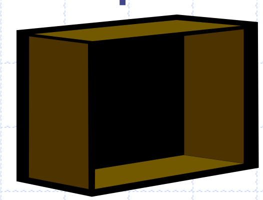
- Δεδομένα: Ένα σύνολο S n αντικειμένων, με κάθε αντικείμενο i να έχει
  - w_i – ένα θετικό βάρος
  - b_i – μία θετική τιμή οφέλους
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων με το μέγιστο συνολικό όφελος αλλά με βάρος το πολύ W.

Items:



	1	2	3	4	5
Weight:	4 in	2 in	2 in	6 in	2 in
Benefit:	$20	$3	$6	$25	$80

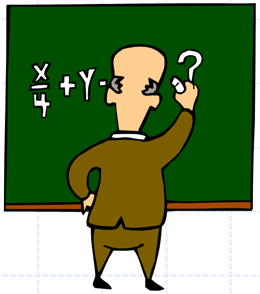
“knapsack”



κουτί πλάτους 9 ιντσών

Solution:
- item 5 ($80, 2 in)
- item 3 ($6, 2in)
- item 1 ($20, 4in)

Η Γενική τεχνική δυναμικού προγραμματισμού

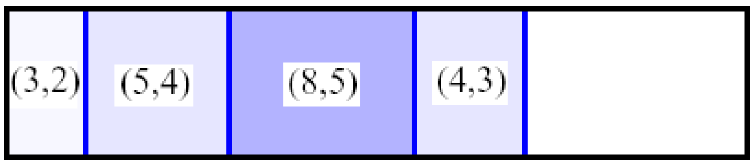


- Εφαρμόζεται σε προβλήματα που αρχικά φαίνεται να απαιτούν πολύ χρόνο (πιθανότατα εκθετικό), αρκεί να έχουμε:
  - **Απλά υπό-προβλήματα:** τα υπό-προβλήματα μπορούν να οριστούν με λίγους μόνο δείκτες, όπως j, k, l, m, κ.ο.κ..
  - **Άριστα υπό-προβλήματα:** η καθολική βέλτιστη λύση μπορεί είναι μία σύνθεση των βέλτιστων λύσεων στα υπό-προβλήματα.
  - **Επικάλυψη υπό-προβλημάτων:** τα υπό-προβλήματα δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά επικαλύπτονται (οπότε πρέπει να κατασκευαστούν από κάτω προς τα πάνω).

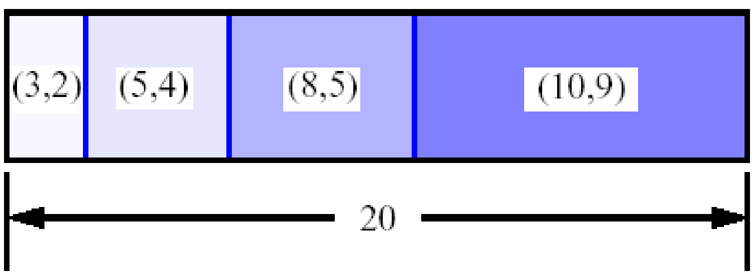
Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Αλγόριθμος, Πρώτη προσπάθεια

- S_k: Σετ αντικειμένων από το 1 μέχρι το k.
- Ορισμός B[k] = η καλύτερη επιλογή από το S_k.
- Πρόβλημα: δεν υπάρχουν άριστα υπό-προβλήματα:
  - Σκεφτείτε το σύνολο S={(3,2),(5,4),(8,5),(4,3),(10,9)} με ζεύγη (όφελος, βάρος) και συνολικό βάρος W = 20

Καλύτερο για S_4:



Καλύτερο για S_5:



Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Αλγόριθμος, Δεύτερη (καλύτερη) προσπάθεια

- S_k: Σύνολο αντικειμένων αριθμημένα από το 1 έως το k.
- Ορισμός του B[k,w] να είναι η καλύτερη επιλογή από το S_k με βάρος το πολύ w
- Καλά νέα: εδώ υπάρχουν άριστα υπό-προβλήματα.

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{if } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w],\ B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{else} \end{cases}$$

- Π.χ., το καλύτερο υποσύνολο του S_k με βάρος το πολύ w είναι ένα από τα:
  - το καλύτερο υποσύνολο του S_{k-1} με βάρος το πολύ w ή
  - το καλύτερο υποσύνολο του of S_{k-1} με βάρος το πολύ $w–w_k$ συν το αντικείμενο k

Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Αλγόριθμος

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{if } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w],\ B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{else} \end{cases}$$

- Θυμηθείτε τον ορισμό του B[k,w]
- Επειδή το B[k,w] ορίζεται με όρου του B[k–1,*], μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο πίνακες αντί για πλέγμα
- Χρόνος εκτέλεσης: O(nW).
- Δεν είναι αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου καθώς το W μπορεί να είναι μεγάλο
- Είναι αλγόριθμος ψευδό-πολυωνυμικού χρόνου

Algorithm ***01Knapsack*(*S, W*):**

Input: set ***S*** of ***n*** items with benefit b_i and weight w_i; maximum weight ***W***

Output: benefit of best subset of ***S*** with weight at most ***W***

```
let A and B be arrays of length W + 1
for w ← 0 to W do
    B[w] ← 0
for k ← 1 to n do
    copy array B into array A
    for w ← w_k to W do
        if A[w−w_k] + b_k > A[w] then
            B[w] ← A[w−w_k] + b_k
return B[W]
```