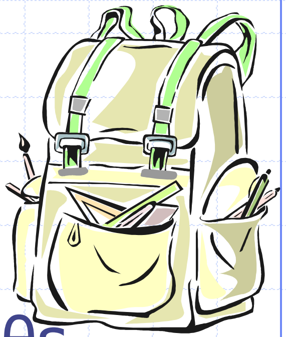
Παρουσίαση για χρήση με το σύγγραμμα, Αλγόριθμοι Σχεδίαση και Εφαρμογές, των M. T. Goodrich and R. Tamassia, Wiley, 2015 (στα ελληνικά από εκδόσεις Μ. Γκιούρδας)

Δυναμικός προγραμματισμός: Πρόβλημα σακιδίου 0-1

Civil War Knapsack. U.S. government image. Vicksburg National Military Park. Public domain.

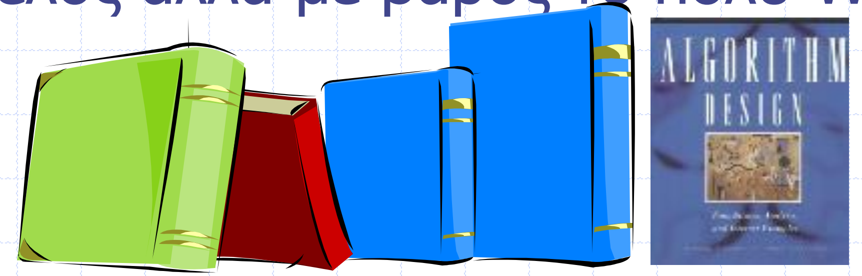
Το πρόβλημα σακιδίου 0-1



- Δεδομένα: Ένα σύνολο S, n αντικειμένων, με κάθε αντικείμενο i να έχει
  - w_i – ένα θετικό βάρος
  - b_i – μία θετική τιμή οφέλους
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων με το μέγιστο συνολικό όφελος αλλά με βάρος το πολύ W.
- Εάν **δεν** επιτρέπεται να πάρουμε κλασματικά ποσά τότε πρόκειται για το **πρόβλημα σακιδίου 0-1**.
  - Σε αυτήν την περίπτωση όπου το T δηλώνει το σύνολο των αντικειμένων που θα πάρουμε
  - Σκοπός: μεγιστοποίηση του $\sum_{i \in T} b_i$
  - Περιορισμός: $\sum_{i \in T} w_i \le W$

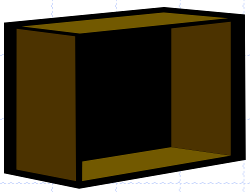
Παράδειγμα

- Δεδομένα: Ένα σύνολο S n αντικειμένων, με κάθε αντικείμενο i να έχει
  - w_i – ένα θετικό βάρος
  - b_i – μία θετική τιμή οφέλους
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων με το μέγιστο συνολικό όφελος αλλά με βάρος το πολύ W.



Items:	1	2	3	4	5
Weight:	4 in	2 in	2 in	6 in	2 in
Benefit:	$20	$3	$6	$25	$80

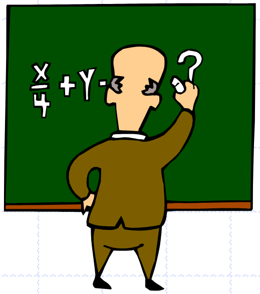
“knapsack”



κουτί πλάτους 9 ιντσών

Solution:
- item 5 ($80, 2 in)
- item 3 ($6, 2in)
- item 1 ($20, 4in)

Η γενική τεχνική δυναμικού προγραμματισμού



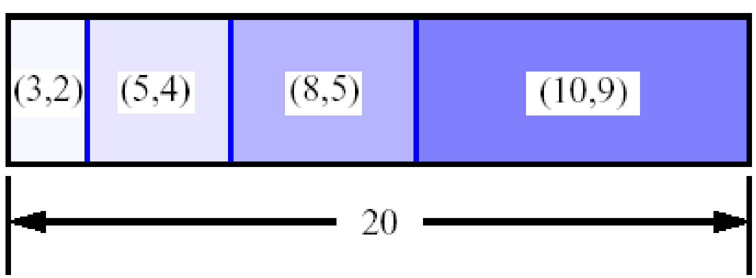
- Εφαρμόζεται σε προβλήματα που αρχικά φαίνεται να απαιτούν πολύ χρόνο (πιθανότατα εκθετικό), αρκεί να έχουμε:
  - **Απλά υπό-προβλήματα:** τα υπό-προβλήματα να μπορούν να οριστούν χρησιμοποιώντας λίγες μόνο μεταβλητές, όπως j, k, l, m, κ.ο.κ.
  - **Βελτιστότητα υπό-προβλημάτων:** η καθολικά βέλτιστη λύση να μπορεί να οριστεί με όρους βέλτιστων λύσεων υπό-προβλημάτων.
  - **Επικάλυψη υπό-προβλημάτων:** τα υπό-προβλήματα να μην είναι ανεξάρτητα, αλλά να επικαλύπτονται (οπότε να πρέπει να κατασκευαστούν από κάτω προς τα πάνω).

Πρόβλημα σακιδίου 0-1
Αλγόριθμος, Πρώτη προσπάθεια

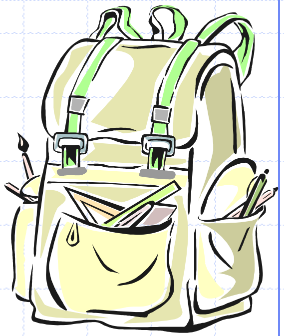
- S_k: Σετ αντικειμένων από το 1 μέχρι το k.
- Ορισμός B[k] = η καλύτερη επιλογή από το S_k.
- Πρόβλημα: δεν υπάρχουν βέλτιστα υπό-προβλήματα:
  - Σκεφτείτε το σύνολο S={(3,2),(5,4),(8,5),(4,3),(10,9)} με ζεύγη (όφελος, βάρος) και συνολικό βάρος W = 20

Καλύτερο για S_4:

Καλύτερο για S_5:



Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Αλγόριθμος, Δεύτερη (καλύτερη) προσπάθεια



- S_k: Σύνολο αντικειμένων αριθμημένα από το 1 έως το k.
- Ορισμός του B[k,w] να είναι η καλύτερη επιλογή από το S_k με βάρος το πολύ w.
- Καλά νέα: εδώ υπάρχουν άριστα υπό-προβλήματα.

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{if } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w],\, B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{else} \end{cases}$$

- Π.χ., το καλύτερο υποσύνολο του S_k με βάρος το πολύ w είναι ένα από τα:
  - το καλύτερο υποσύνολο του S_{k-1} με βάρος το πολύ w ή
  - το καλύτερο υποσύνολο του of S_{k-1} με βάρος το πολύ $w\!-\!w_k$ συν το αντικείμενο k

Πρόβλημα σακιδίου 0-1 Αλγόριθμος

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{if } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w],\ B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{else} \end{cases}$$

- Θυμηθείτε τον ορισμό του B[k,w]
- Επειδή το B[k,w] ορίζεται με όρους του B[k–1,*], μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο πίνακες αντί για πλέγμα
- Χρόνος εκτέλεσης: O(nW).
- Δεν είναι αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου καθώς το W μπορεί να είναι μεγάλο
- Είναι αλγόριθμος ψευδό-πολυωνυμικού χρόνου

Algorithm ***01Knapsack(S, W):***
  Input: set S of n items with benefit b_i and weight w_i; maximum weight W
  Output: benefit of best subset of S with weight at most W
  let A and B be arrays of length $W + 1$
  for $w \leftarrow 0$ **to** W **do**
    $B[w] \leftarrow 0$
  for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
    copy array B into array A
    for $w \leftarrow w_k$ **to** W **do**
      if $A[w-w_k] + b_k > A[w]$ **then**
        $B[w] \leftarrow A[w-w_k] + b_k$
  return $B[W]$