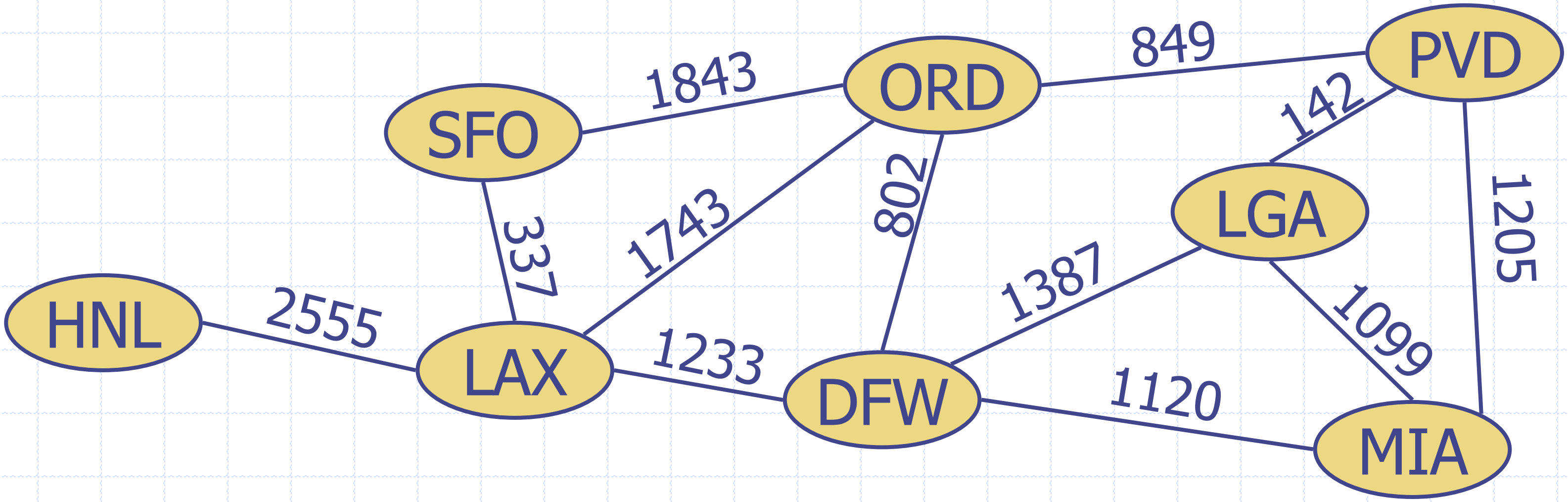
Παρουσίαση για χρήση με το σύγγραμμα, Αλγόριθμοι Σχεδίαση και Εφαρμογές, των M. T. Goodrich and R. Tamassia, Wiley, 2015 (στα ελληνικά από εκδόσεις Μ. Γκιούρδας)

Συντομότερες διαδρομές

Lightning strike, 2009. U.S. government image. NOAA.

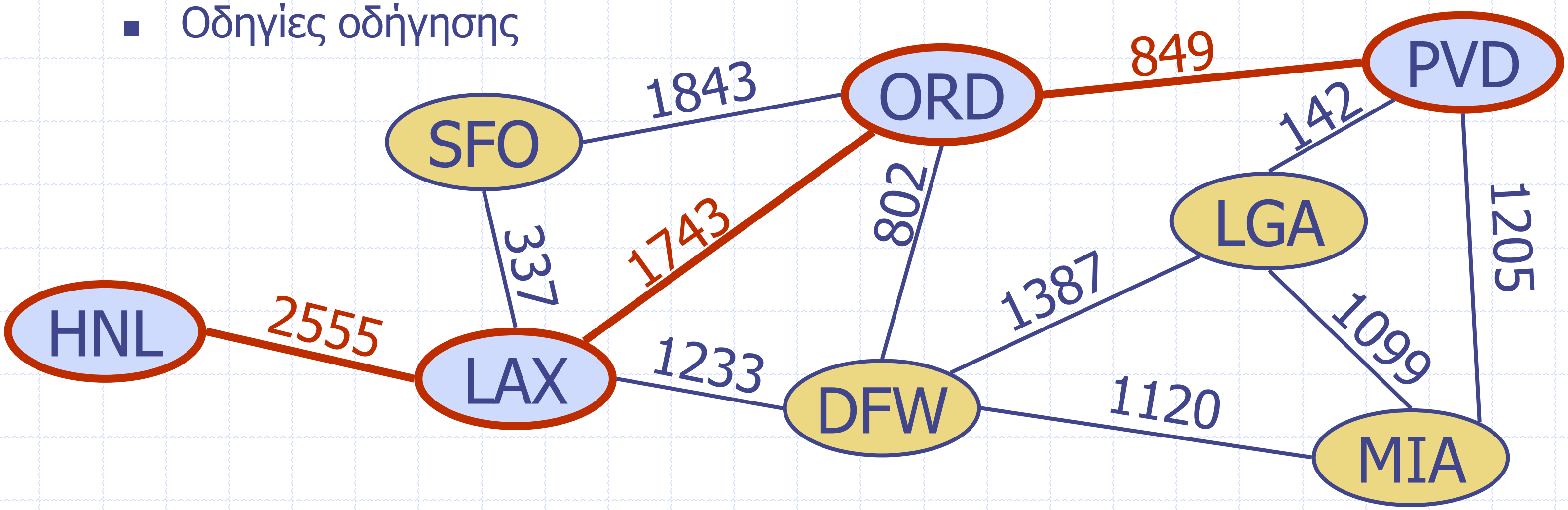
Σταθμισμένοι γράφοι

- Σε έναν σταθμισμένο γράφο, κάθε ακμή συσχετίζεται με μία αριθμητική τιμή, που ονομάζεται βάρος της ακμής.
- Τα βάρη των ακμών μπορούν να αντιπροσωπεύουν αποστάσεις, κόστη, κτλ.
- Παράδειγμα:
  - Σε ένα γράφο αεροπορικών πτήσεων, το βάρος μίας ακμής αντιπροσωπεύει την απόσταση μεταξύ των αεροδρομίων



Συντομότερες διαδρομές

- Δεδομένου ενός σταθμισμένου γράφου και δύο κορυφών u και v θέλουμε να βρούμε την διαδρομή με το μικρότερο συνολικό βάρος μεταξύ των κορυφών u και v.
  - Το μήκος της διαδρομής είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών της.
- Παράδειγμα:
  - Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ Providence και Honolulu
- Εφαρμογές
  - Δρομολόγηση πακέτων Internet
  - Κρατήσεις πτήσεων
  - Οδηγίες οδήγησης



Ιδιότητες συντομότερης διαδρομής

Ιδιότητα 1:

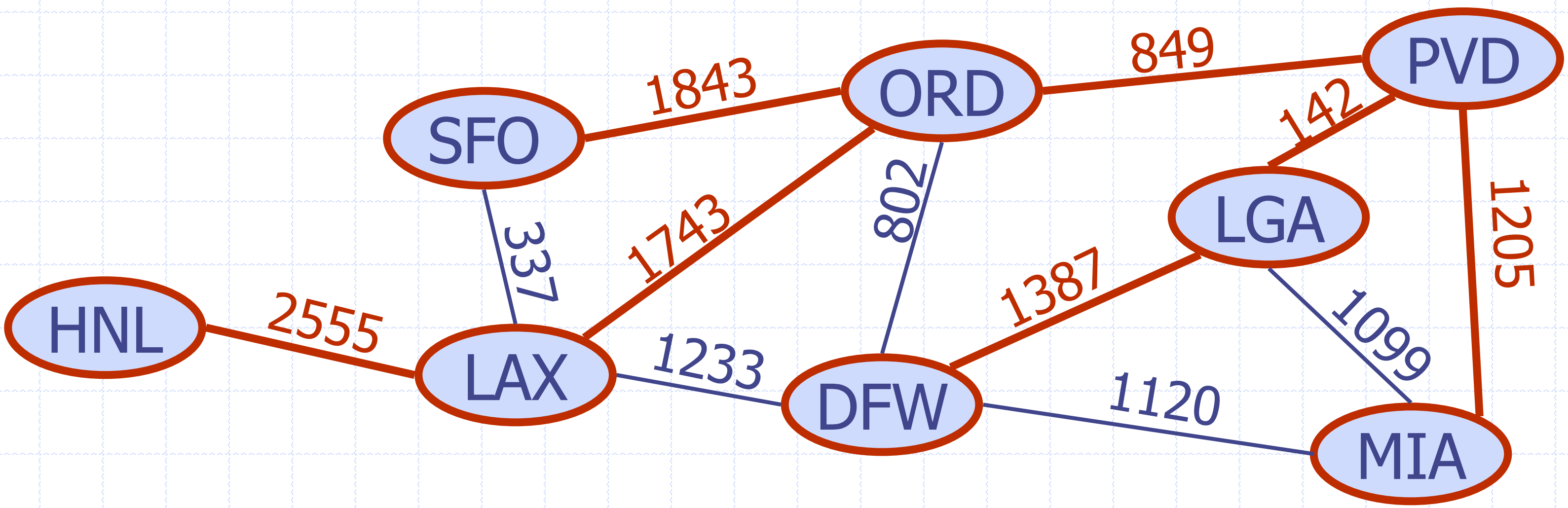
Μια υπό-διαδρομή τις συντομότερης διαδρομής είναι η ίδια μια συντομότερη διαδρομή.

Ιδιότητα 2:

Υπάρχει ένα δένδρο συντομότερων διαδρομών από την αρχική κορυφή προς όλες τις άλλες κορυφές

Παράδειγμα:

Δένδρο συντομότερων διαδρομών προς Providence



Ο αλγόριθμος του Dijkstra

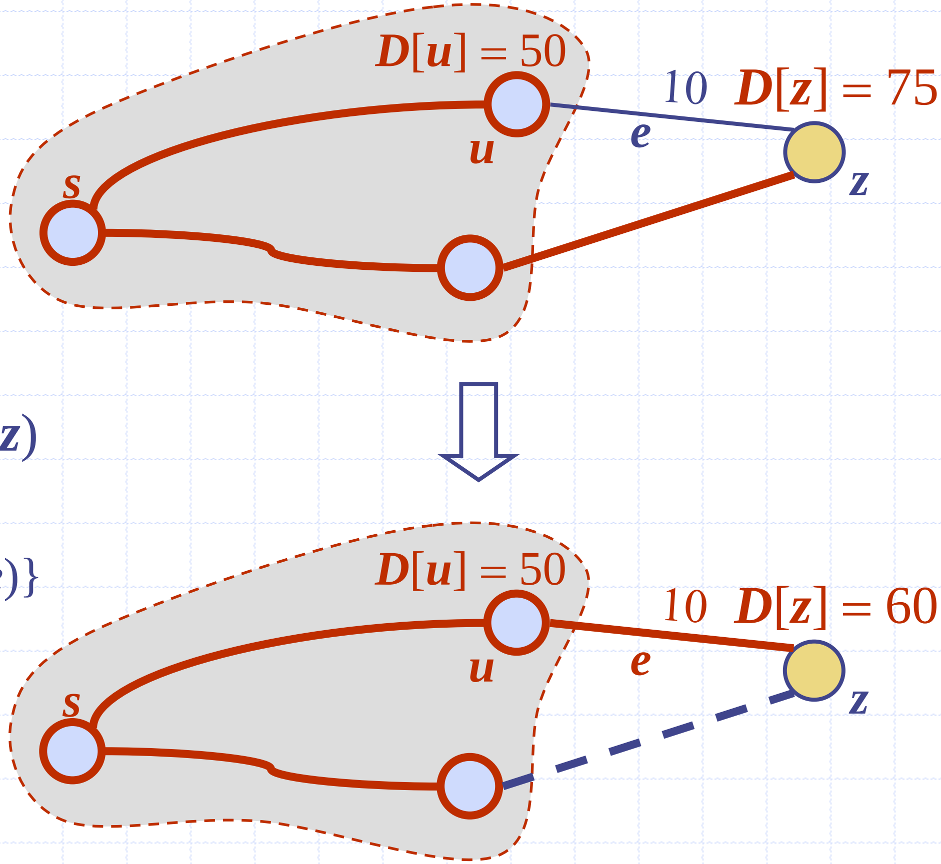
- Η απόσταση μίας κορυφής v από μία κορυφή s είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα στις s και v
- Ο αλγόριθμος του Dijkstra υπολογίζει τις αποστάσεις όλων των κορυφών από την αρχική κορυφή s
- Υποθέσεις:
  - ο γράφος είναι συνεκτικός
  - οι ακμές είναι μη κατευθυνόμενες
  - τα βάρη των ακμών είναι μη αρνητικά

- Αναπτύσσουμε ένα “σύννεφο” κορυφών, που εξέρχονται από την s και εν τέλει καλύπτει όλες τις κορυφές.
- Αποθηκεύουμε με κάθε κορυφή v μια ετικέτα $D[v]$ που αντιπροσωπεύει την απόσταση για την v από την s στον υπογράφο που αποτελείται από το σύννεφο και τις γειτονικές κορυφές του
- Σε κάθε βήμα:
  - Προσθέτουμε στο σύννεφο την κορυφή u εκτός του σύννεφου με την μικρότερη ετικέτα απόστασης, $D[u]$
  - Ενημερώνουμε τις ετικέτες των γειτονικών ακμών της u

Χαλάρωση ακμών

- Θεωρήστε μία ακμή $e = (u,z)$ έτσι ώστε
  - η u είναι η κορυφή που προστέθηκε πιο πρόσφατα στο σύννεφο
  - η z δεν είναι στο σύννεφο
- Η χαλάρωση της ακμής e ενημερώνει την απόσταση $d(z)$ ως εξής:

$$D[z] \leftarrow \min\{D[z], D[u] + weight(e)\}$$



Ο αλγόριθμος του Dijkstra: Λεπτομέρειες

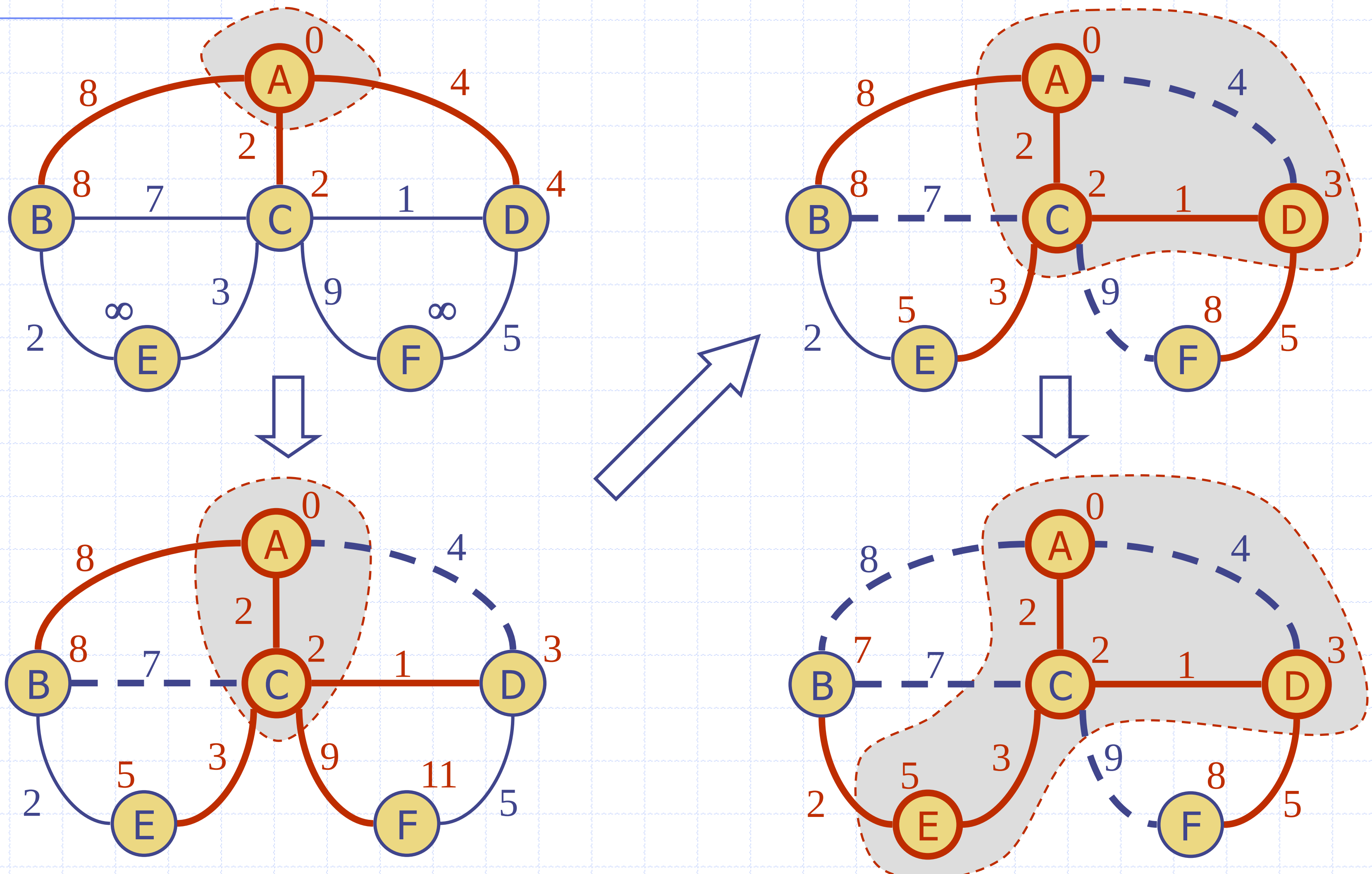
Algorithm DijkstraShortestPaths(G, v):

Input: A simple undirected weighted graph G with nonnegative edge weights, and a distinguished vertex v of G

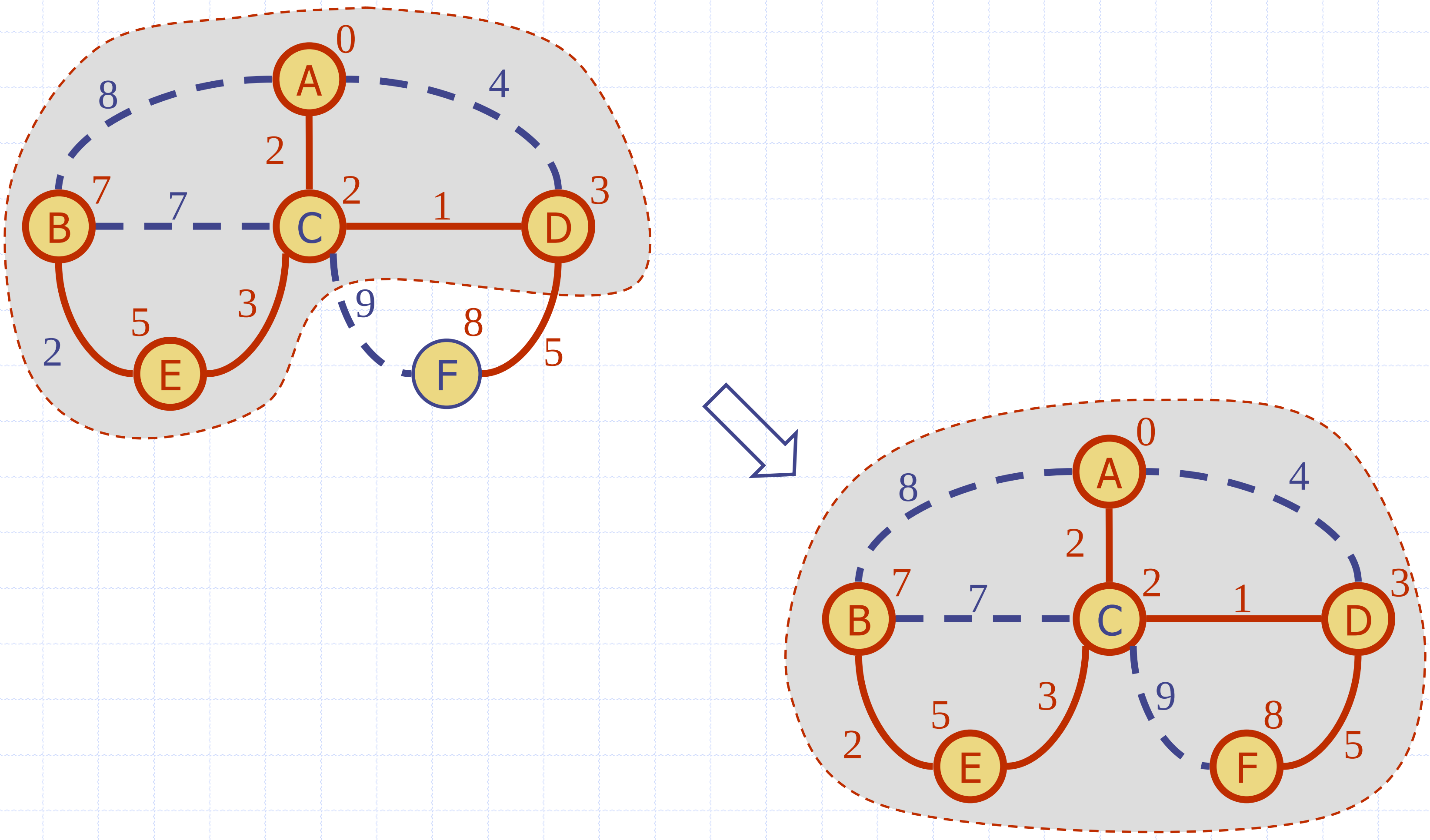
Output: A label, $D[u]$, for each vertex u of G, such that $D[u]$ is the distance from v to u in G

$D[v] \leftarrow 0$
for each vertex $u \neq v$ of G **do**
  $D[u] \leftarrow +\infty$
Let a priority queue, Q, contain all the vertices of G using the D labels as keys.
while Q is not empty **do**
  // pull a new vertex u into the cloud
  $u \leftarrow Q$.removeMin()
  for each vertex z adjacent to u such that z is in Q **do**
    // perform the ***relaxation*** procedure on edge (u, z)
    if $D[u] + w((u, z)) < D[z]$ **then**
      $D[z] \leftarrow D[u] + w((u, z))$
      Change the key for vertex z in Q to $D[z]$
return the label $D[u]$ of each vertex u

Παράδειγμα



Παράδειγμα (συν.)

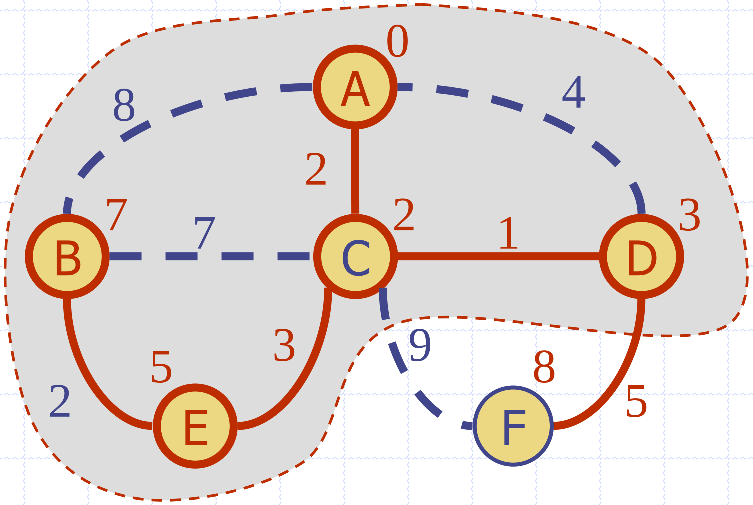


Ανάλυση αλγόριθμου του Dijkstra

- Πράξη γράφου
  - Βρίσκουμε όλες τις εφαπτόμενες ακμές για κάθε κορυφή
- Πράξεις ετικέτας
  - Θέτουμε/ανακτούμε τις ετικέτες απόστασης και θέσης της κορυφής z $O(\deg(z))$ φορές
  - Η τοποθέτηση/ανάκτηση μιας ετικέτας είναι χρόνου $O(1)$
- Πράξεις ουράς προτεραιότητας
  - Κάθε κορυφή τοποθετείτε και αφαιρείται μία φορά από την ουρά προτεραιότητας, κάθε εισαγωγή ή αφαίρεση είναι χρόνου $O(\log n)$
  - Το κλειδί μιας κορυφής στην ουρά προτεραιότητας τροποποιείται το πολύ $\deg(w)$ φορές, κάθε αλλαγή κλειδιού είναι χρόνου $O(\log n)$
- Ο αλγόριθμος του Dijkstra είναι χρόνου $O((n + m) \log n)$ όταν ο γράφος αναπαρίσταται με δομή λίστας/πίνακα γειτνίασης
  - Θυμηθείτε ότι $\Sigma_v \deg(v) = 2m$
- Ο χρόνος εκτέλεσης μπορεί να εκφραστεί ως $O(m \log n)$ από την στιγμή που ο γράφος είναι συνεκτικός

Γιατί λειτουργεί ο αλγόριθμος του Dijkstra

- Ο αλγόριθμος του Dijkstra βασίζεται στην άπληστη μέθοδο. Προσθέτει τις κορυφές αυξάνοντας την απόσταση.
  - Ας υποθέσουμε ότι δεν βρήκε τις συντομότερες αποστάσεις. Έστω w η πρώτη λάθος κορυφή.
  - Όταν η προηγούμενη κορυφή, u, υπολογίστηκε στην πραγματικά μικρότερη διαδρομή, η απόσταση ήταν σωστή
  - Αλλά η ακμή (u,w) ήταν χαλαρή εκείνη την στιγμή!
  - Έτσι, όσο ισχύει D[w]≥D[u], η απόσταση τις w δεν μπορεί να είναι λάθος. Οπότε δεν υπάρχει λάθος κορυφή.

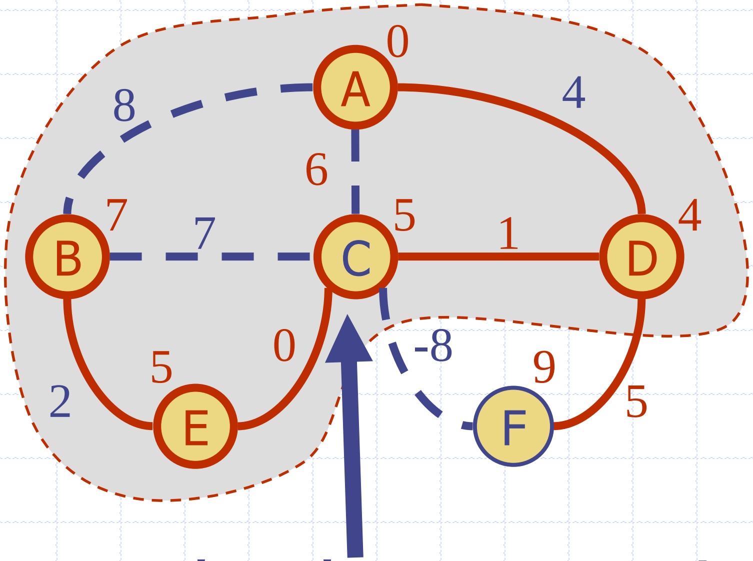


(u,w) = (D,F) σε αυτό το παράδειγμα

Γιατί δεν λειτουργεί για ακμές αρνητικού βάρους

Ο αλγόριθμος του Dijkstra βασίζεται στην άπληστη μέθοδο. Προσθέτει τις κορυφές αυξάνοντας την απόσταση.

- Εάν μία κορυφή με εφαπτόμενη ακμή αρνητικού βάρους προστεθεί αργά στο σύννεφο, θα επηρεάσει τις αποστάσεις των κορυφών που υπάρχουν ήδη στο σύννεφο.



Η πραγματική απόσταση της C’ s είναι 1, αλλά υπάρχει ήδη στο σύννεφο με d(C)=5!

Ο αλγόριθμος Bellman-Ford

- Λειτουργεί ακόμη και με ακμές αρνητικού βάρους
- Πρέπει να υποθέσουμε ότι έχουμε κατευθυνόμενες ακμές (αλλιώς θα είχαμε κύκλους αρνητικού βάρους)
- Η i επανάληψης βρίσκει όλες τις συντομότερες διαδρομές που χρησιμοποιούν i ακμές.
- Χρόνος: O(nm).
- Μπορεί να επεκταθεί ώστε να ανιχνεύει κύκλο αρνητικού βάρους
  - Πως?

Ο αλγόριθμος Bellman-Ford Algorithm: Λεπτομέρειες

Algorithm BellmanFordShortestPaths($\vec{G}, v$):

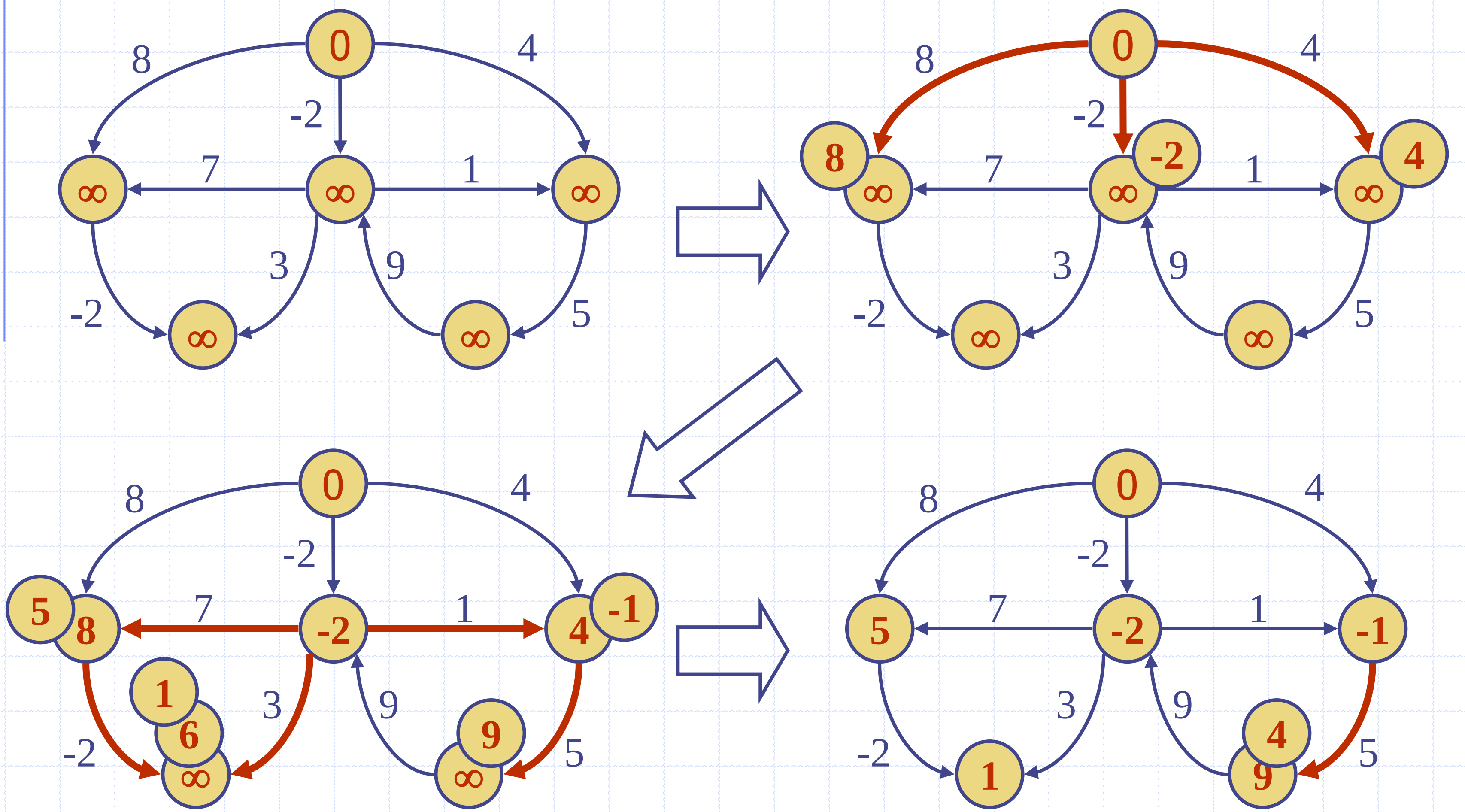
  Input: A weighted directed graph $\vec{G}$ with n vertices, and a vertex v of $\vec{G}$

  Output: A label $D[u]$, for each vertex u of $\vec{G}$, such that $D[u]$ is the distance from v to u in $\vec{G}$, or an indication that $\vec{G}$ has a negative-weight cycle

```
D[v] ← 0
for each vertex u ≠ v of G do
    D[u] ← +∞
for i ← 1 to n − 1 do
    for each (directed) edge (u, z) outgoing from u do
        // Perform the relaxation operation on (u, z)
        if D[u] + w((u, z)) < D[z] then
            D[z] ← D[u] + w((u, z))
if there are no edges left with potential relaxation operations then
    return the label D[u] of each vertex u
else
    return "G contains a negative-weight cycle"
```

Παράδειγμα Bellman-Ford

- Οι κορυφές έχουν ετικέτες με τις D[v] τιμές τους



Αλγόριθμος βάση DAG

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένας εξειδικευμένο αλγόριθμο εύρεσης μικρότερης διαδρομής για κατευθυνόμενους ακυκλικούς γράφους (directed acyclic graph - DAG)
- Λειτουργεί ακόμη και για ακμές αρνητικού βάρους
- Χρησιμοποιεί τοπολογική διάταξη
- Δεν χρησιμοποιεί ιδιαίτερες δομές δεδομένων
- Είναι πολύ γρηγορότερος από τον αλγόριθμο του Dijkstra
- Χρόνος: O(n+m).

Αλγόριθμος βάση DAG: Λεπτομέρειες

Algorithm DAGShortestPaths($\vec{G}, s$):

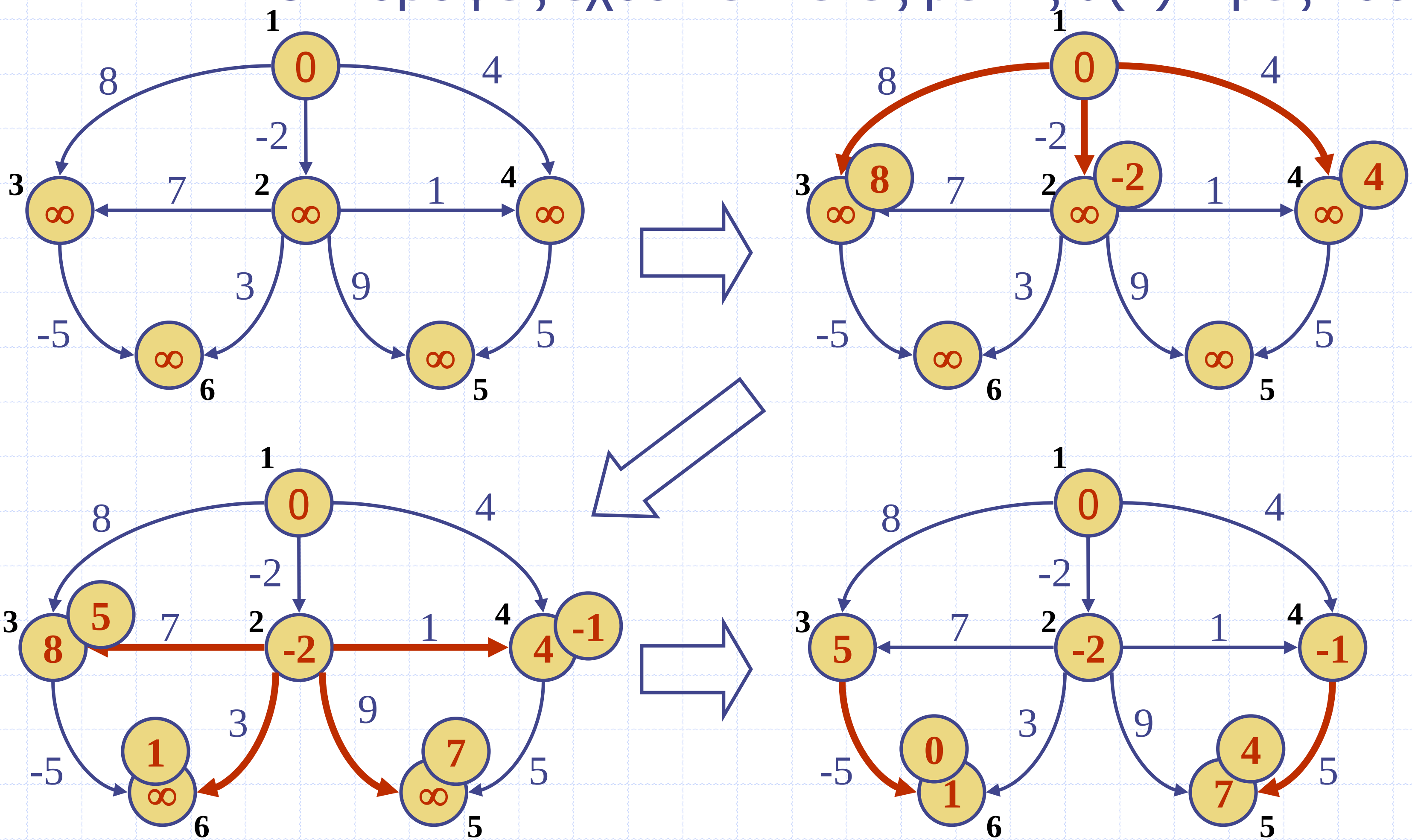
Input: A weighted directed acyclic graph (DAG) $\vec{G}$ with n vertices and m edges, and a distinguished vertex s in $\vec{G}$

Output: A label $D[u]$, for each vertex u of $\vec{G}$, such that $D[u]$ is the distance from v to u in $\vec{G}$

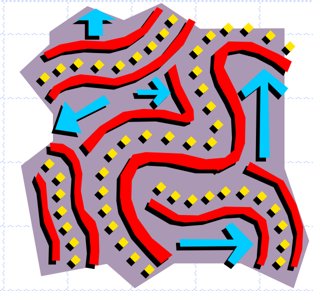
Compute a topological ordering $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for $\vec{G}$
$D[s] \leftarrow 0$
for each vertex $u \neq s$ of $\vec{G}$ **do**
  $D[u] \leftarrow +\infty$
for $i \leftarrow 1$ to $n - 1$ **do**
  // Relax each outgoing edge from v_i
  for each edge (v_i, u) outgoing from v_i **do**
    if $D[v_i] + w((v_i, u)) < D[u]$ **then**
      $D[u] \leftarrow D[v_i] + w((v_i, u))$
Output the distance labels D as the distances from s.

Παράδειγμα DAG

Οι κορυφές έχουν ετικέτες με τις d(v) τιμές τους



Συντομότερες διαδρομές όλων των ζευγών



- Εύρεση της απόστασης κάθε ζεύγους κορυφών σε έναν σταθμισμένο κατευθυνόμενο γράφο G.
- Μπορούμε να κάνουμε n κλήσεις στον αλγόριθμο του Dijkstra (εάν δεν υπάρχουν αρνητικές ακμές), σε χρόνο O(nm log n).
- Αντίστοιχα, n κλήσεις στον αλγόριθμο Bellman-Ford σε χρόνο $O(n^2m)$.
- Μπορούμε να επιτύχουμε χρόνο $O(n^3)$ χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό (παρόμοιο με τον αλγόριθμο Floyd-Warshall).

Algorithm *AllPair(G)* {assumes vertices 1,…,*n*}
 for all *vertex pairs (i,j)*
   if $i = j$
      $D_0[i,i] \leftarrow 0$
   else if *(i,j) is an edge in G*
      $D_0[i,j] \leftarrow$ *weight of edge (i,j)*
   else
      $D_0[i,j] \leftarrow +\infty$
 for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
   for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
     for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
       $D_k[i,j] \leftarrow \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k]+D_{k-1}[k,j]\}$
 return D_n