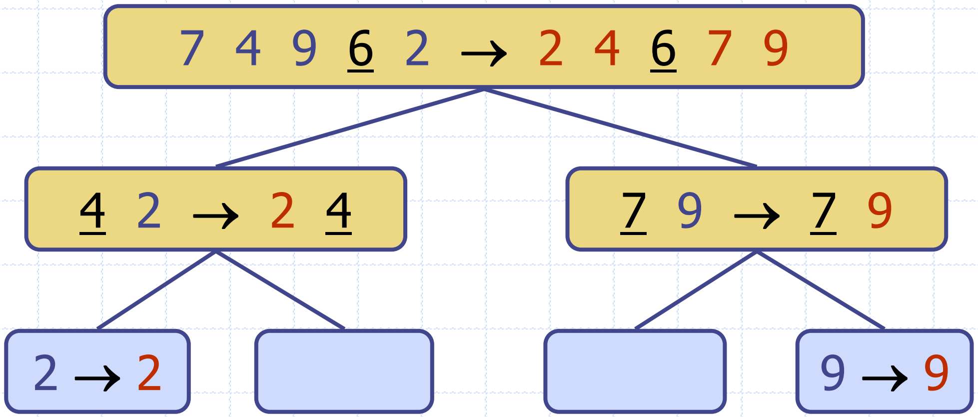
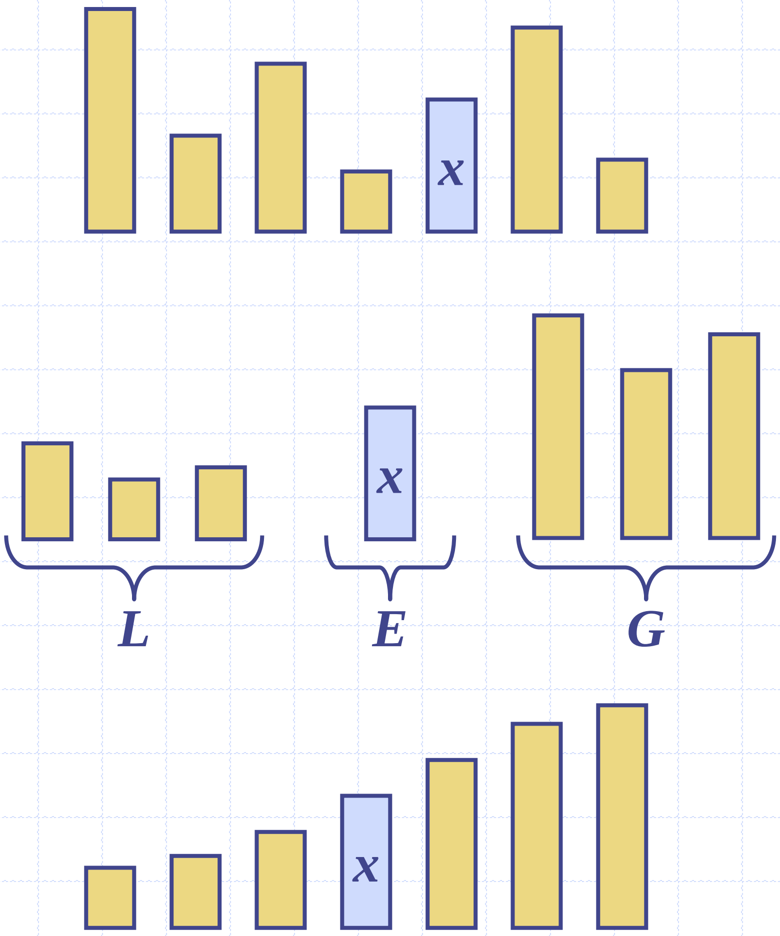
Παρουσίαση για χρήση με το σύγγραμμα, Αλγόριθμοι Σχεδίαση και Εφαρμογές, των M. T. Goodrich and R. Tamassia, Wiley, 2015 (στα ελληνικά από εκδόσεις Μ. Γκιούρδας)

Γρήγορη ταξινόμηση (Quick-Sort)



Quick-Sort

- Ο quick-sort είναι ένας τυχαιοποιημένος (randomized) αλγόριθμος ταξινόμησης που βασίζεται στο παράδειγμα διαίρει και βασίλευε:
  - Διαίρει: επιλογή ενός τυχαίου στοιχείου x (ονομάζεται σημείο περιστροφής) και διαμερισμός του S σε
    - L στοιχεία μικρότερα του x
    - E στοιχεία ίσα του x
    - G στοιχεία μεγαλύτερα του x
  - Επανάλαβε (αναδρομικά): ταξινόμηση του L και G
  - Κυρίευσε: συνένωσε L, E και G



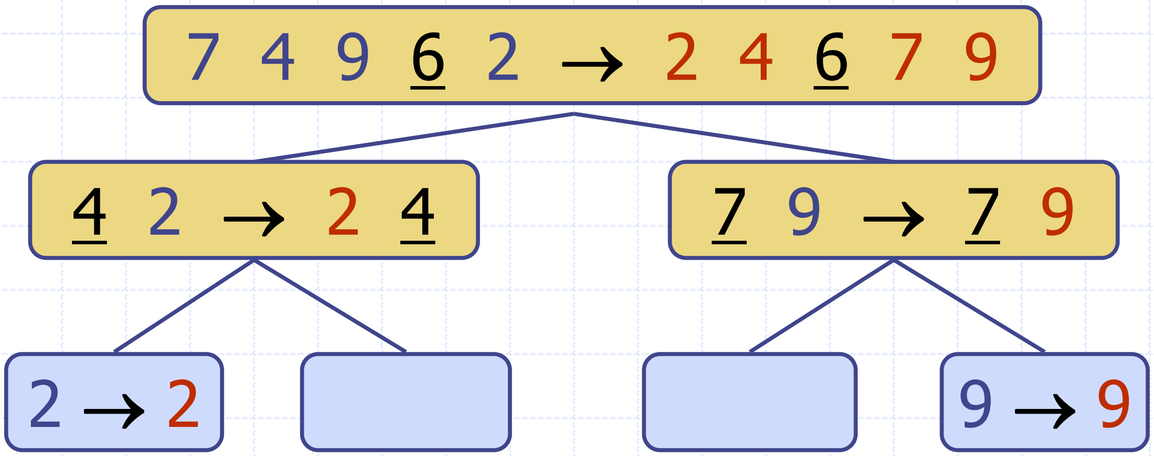
Διαμερισμός

- Διαμερίζουμε την ακολουθία εισόδου ως εξής:
  - Αφαιρούμε στη σειρά κάθε στοιχείο y από το S και
  - Εισάγουμε το y στο L, E ή G, βάσει του αποτελέσματος της σύγκρισης με το σημείο περιστροφής x
- Κάθε εισαγωγή ή διαγραφή γίνεται στην αρχή ή στο τέλος της ακολουθίας οπότε χρειάζεται χρόνο $O(1)$
- Έτσι, το βήμα διαμερισμού του quick-sort απαιτεί χρόνο $O(n)$

```
Algorithm partition(S, p)
    Input sequence S, position p of pivot
    Output subsequences L, E, G of the
        elements of S less than, equal to,
        or greater than the pivot, resp.
    L, E, G ← empty sequences
    x ← S.remove(p)
    while ¬S.isEmpty()
        y ← S.remove(S.first())
        if y < x
            L.addLast(y)
        else if y = x
            E.addLast(y)
        else { y > x }
            G.addLast(y)
    return L, E, G
```

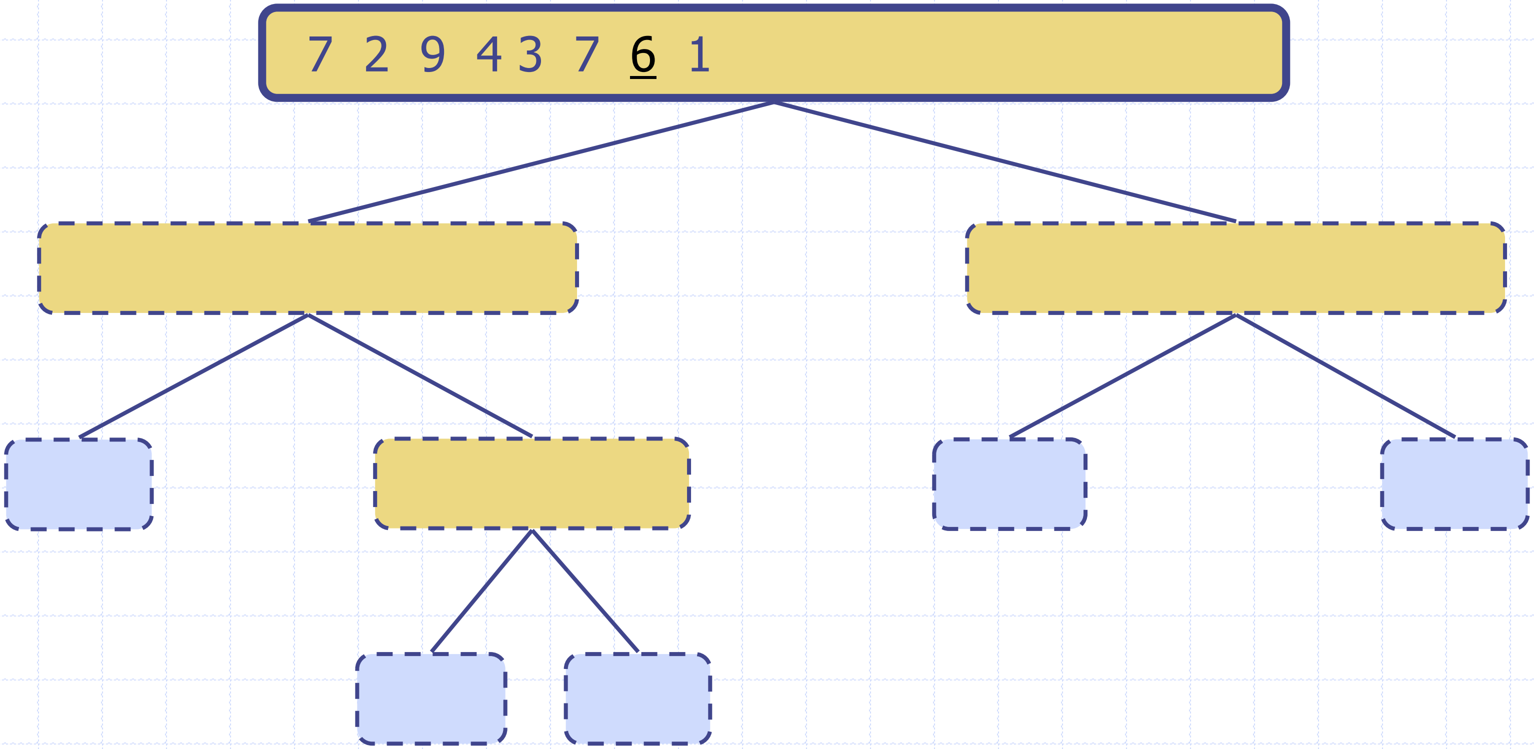
Δένδρο Quick-Sort

- Η εκτέλεση του quick-sort μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα δυαδικό δένδρο
  - Κάθε κόμβος αναπαριστά μία αναδρομική κλήση του quick-sort και αποθηκεύει
    - Τη μη-ταξινομημένη ακολουθία πριν την εκτέλεση και το σημείο περιστροφής
    - Την ταξινομημένη ακολουθία στο τέλος της εκτέλεσης
  - Η ρίζα αναπαριστά την αρχική κλήση
  - Τα φύλλα αναπαριστούν κλήσεις υπό-ακολουθιών μεγέθους 0 ή 1



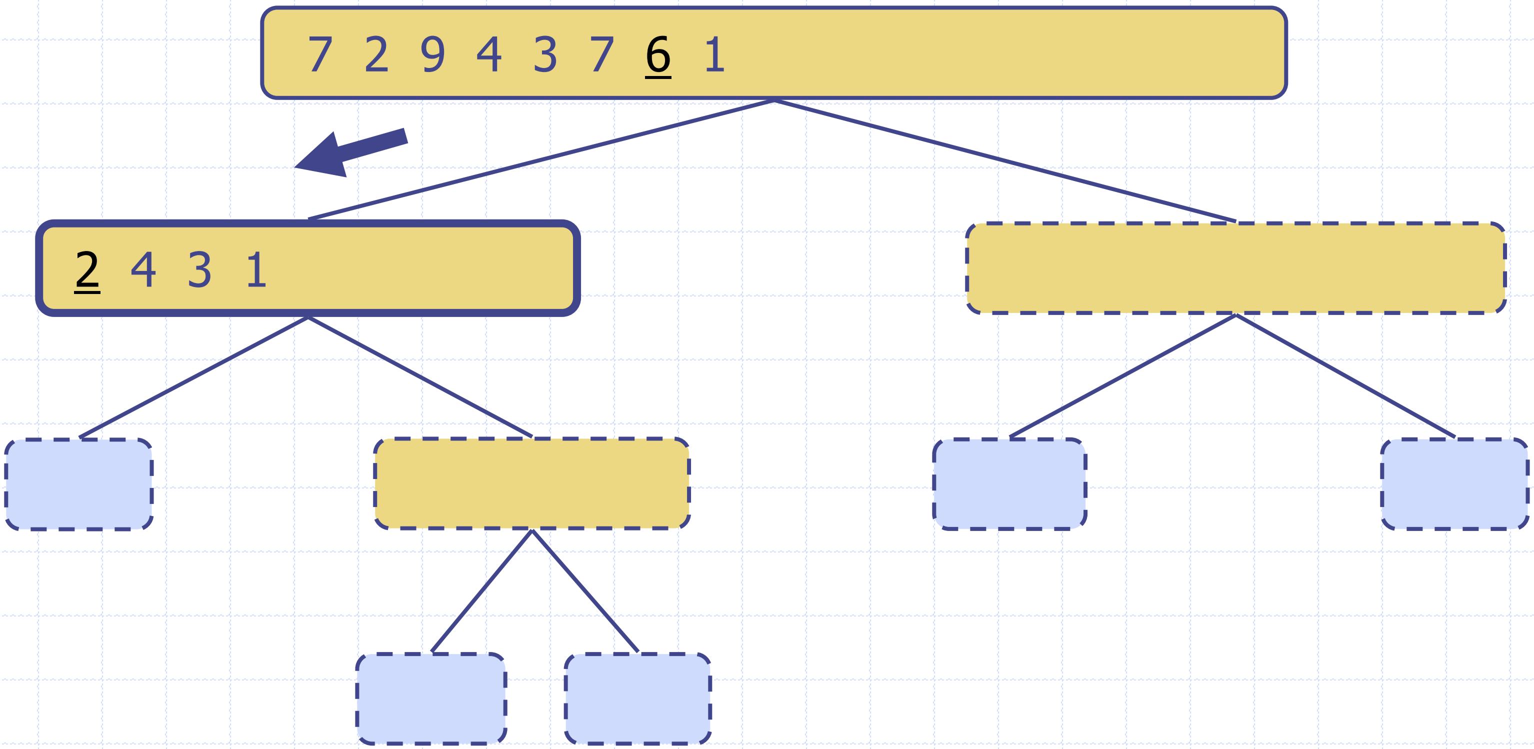
Παράδειγμα εκτέλεσης

- Επιλογή σημείου περιστροφής



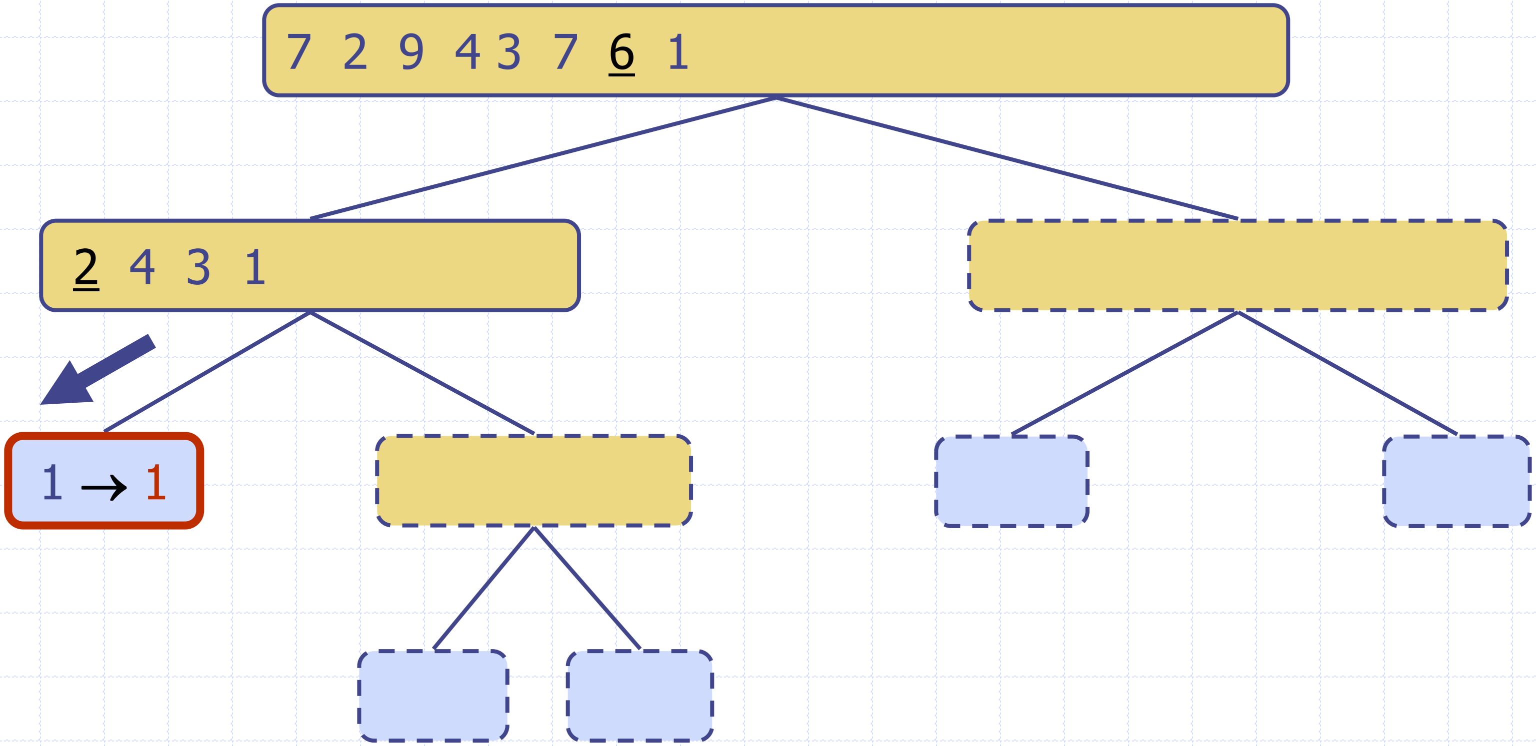
Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Διαμερισμός, αναδρομική κλήση, επιλογή σημείου περιστροφής



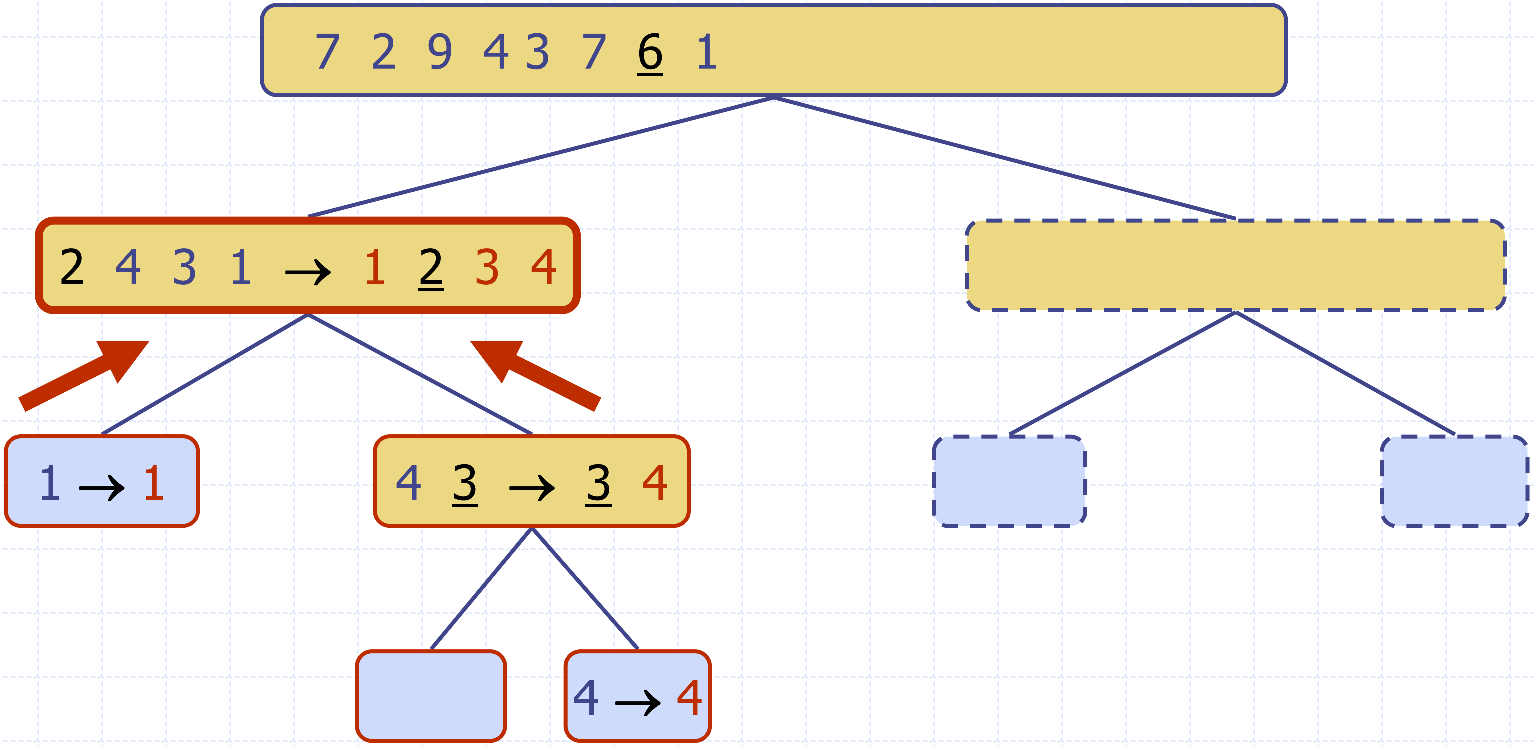
Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Διαμερισμός, αναδρομική κλήση, βασική περίπτωση



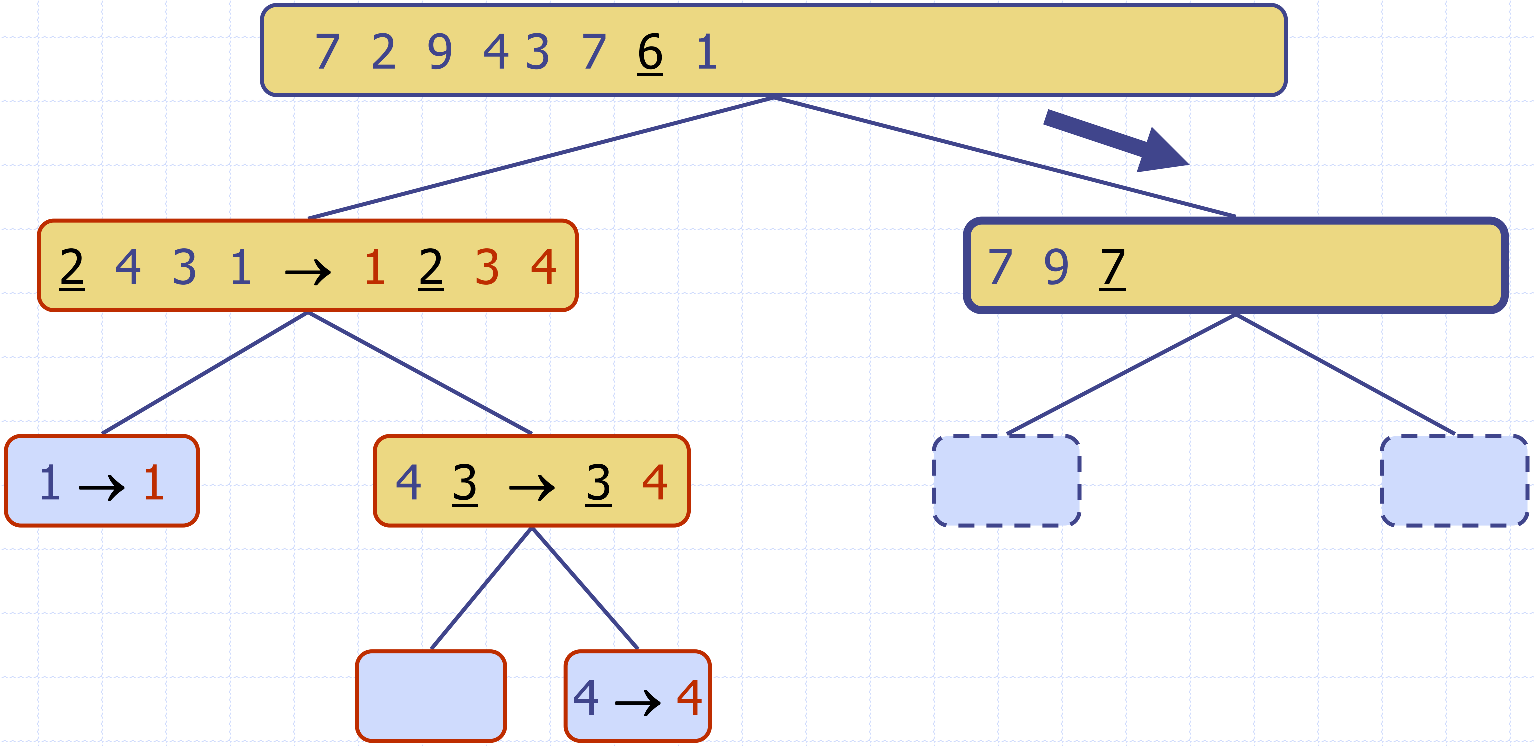
Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Αναδρομική κλήση, ..., βασική περίπτωση, ένωση



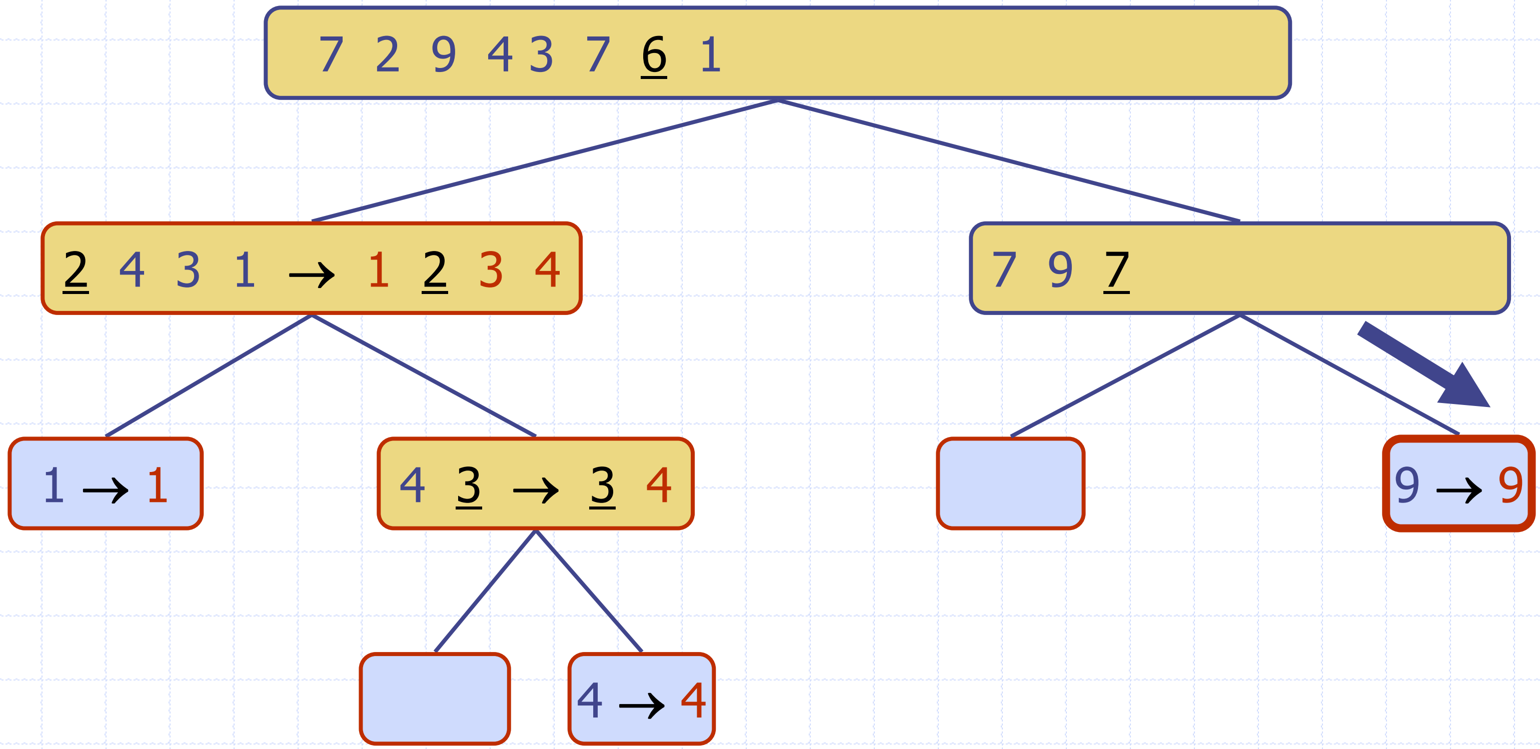
Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Αναδρομική κλήση, επιλογή σημείου περιστροφής



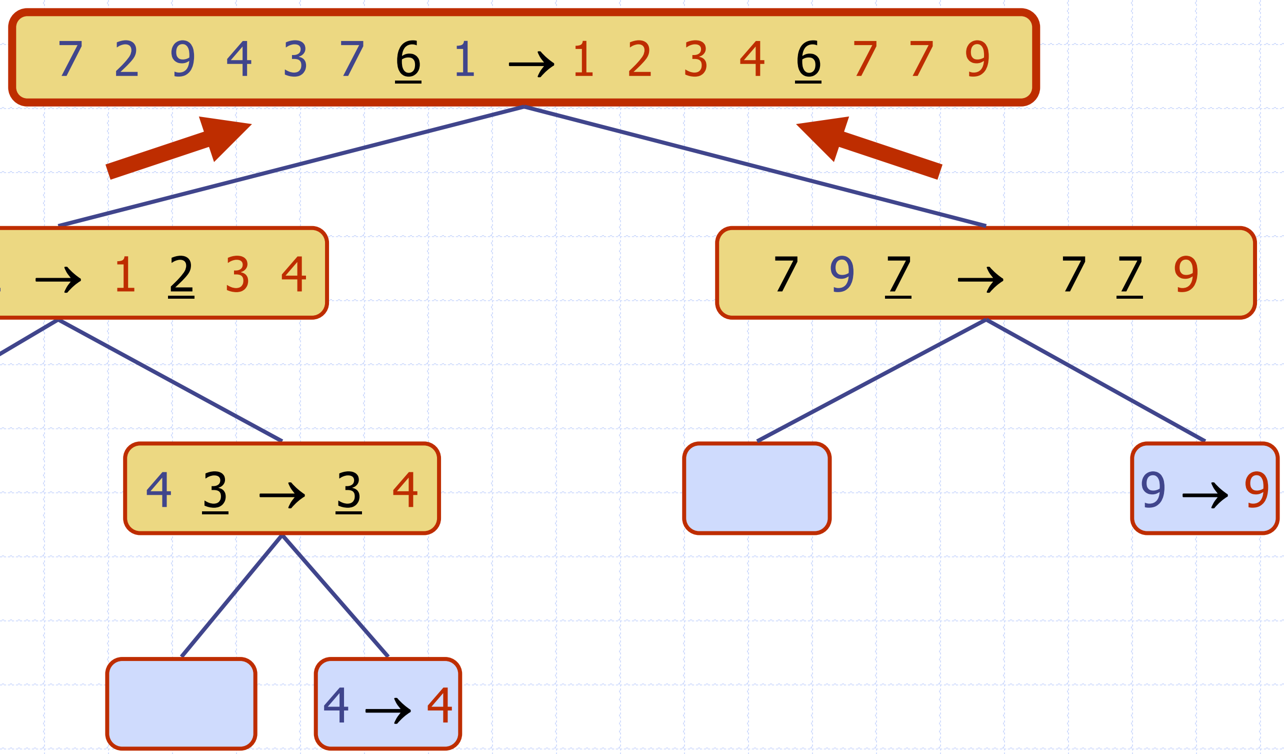
Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Διαχωρισμός, …, αναδρομική κλήση, βασική περίπτωση



Παράδειγμα εκτέλεσης (συν.)

- Ένωση, ένωση



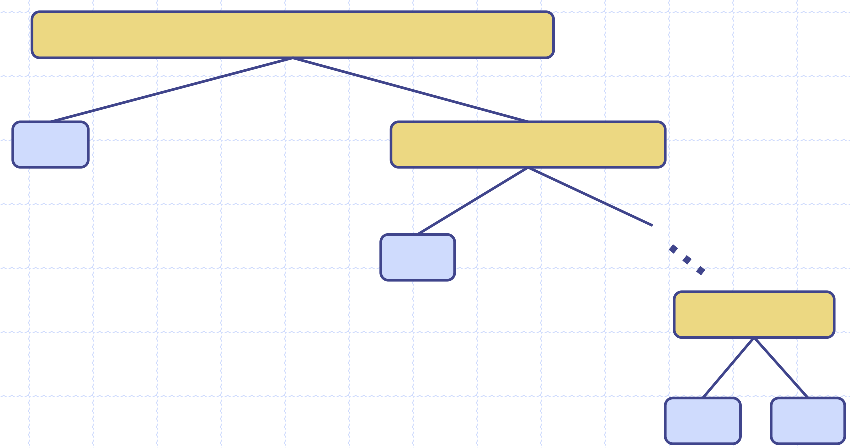
Χρόνος εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση

- Η χειρότερη περίπτωση για τον quick-sort είναι όταν το σημείο περιστροφής είναι το ελάχιστο ή το μέγιστο στοιχείο της ακολουθίας
- Τότε, ένα από τα L και G έχει μέγεθος $n - 1$ και το άλλο έχει μέγεθος 0
- Ο χρόνος εκτέλεσης είναι ανάλογος του

$$n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$$

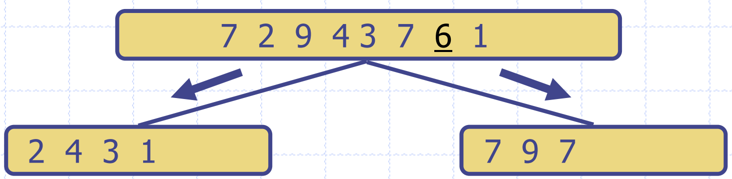
- Έτσι, ο χρόνος εκτέλεσης του quick-sort στην χειρότερη περίπτωση είναι $O(n^2)$

depth	time
0	n
1	$n - 1$
…	…
$n - 1$	1

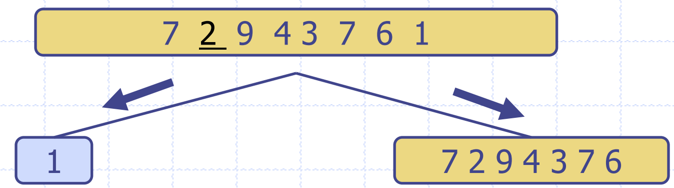


Αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης (1/2)

- Έστω μια αναδρομική κλήση του quick-sort σε μία ακολουθία μεγέθους s
  - **Καλή κλήση:** τα μεγέθη του L και του G είναι μικρότερα του $3s/4$
  - **Κακή κλήση:** το L ή το G είναι μεγαλύτερο του $3s/4$



Καλή κλήση



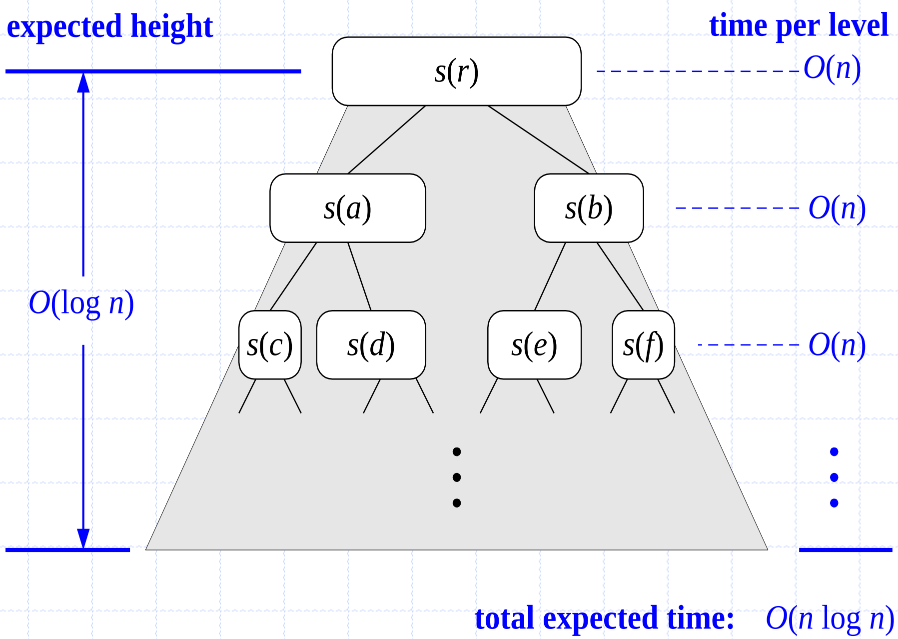
Κακή κλήση

- Μία κλήση είναι καλή με πιθανότητα $1/2$
  - 1/2 από όλα τα πιθανά σημείο περιστροφής (σ.π.) προκαλούν καλές κλήσεις:

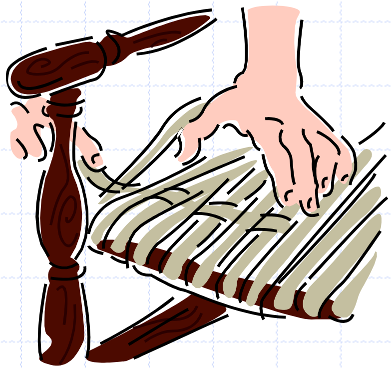
$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}_{\text{Κακά σ.π.}}\ \underbrace{5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12}_{\text{Καλά σ.π.}}\ \underbrace{13\ 14\ 15\ 16}_{\text{Κακά σ.π.}}$$

Αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης (2/2)

- Ισχύει από τη θεωρία πιθανοτήτων: Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων κερμάτων για να έρθουν k κορώνες είναι $2k$
- Για έναν κόμβο μεγέθους i, περιμένουμε
  - $i/2$ των γονέων να είναι καλές κλήσεις
  - Το μέγεθος της ακολουθίας εισόδου για την τρέχουσα κλήση είναι το πολύ $(3/4)^{i/2}n$
- Έτσι, έχουμε
  - Για κόμβο βάθους $2\log_{4/3}n$, το αναμενόμενο μέγεθος εισόδου να είναι 1
  - Το αναμενόμενο ύψος του δένδρου του quick-sort να είναι $O(\log n)$
- Ο χρόνος που δαπανάται σε κόμβους του ίδιου βάθους είναι $O(n)$
- Έτσι, ο αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης του quick-sort είναι $O(n \log n)$



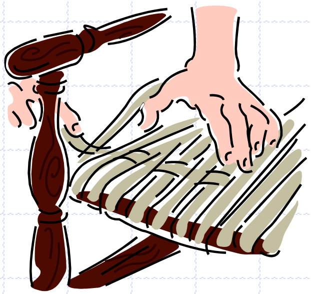
Επί-τόπου Quick-Sort



- Ο Quick-sort μπορεί να υλοποιηθεί έτσι ώστε να εκτελείται επί τόπου
- Στο βήμα του διαμερισμού, χρησιμοποιούμε λειτουργίες αντικατάστασης για να αναδιατάξουμε τα στοιχεία της ακολουθίας εισόδου έτσι ώστε
  - Τα στοιχεία που είναι μικρότερα του σημείου περιστροφής να έχουν θέση μικρότερη του ***h***
  - Τα στοιχεία ίσα με το σημείο περιστροφής να έχουν θέση μεταξύ ***h*** και ***k***
  - Τα στοιχεία μεγαλύτερα του σημείου περιστροφής να έχουν θέση μεγαλύτερη του ***k***
- Οι αναδρομικές κλήσεις λαμβάνουν υπόψη
  - Στοιχεία με θέση μικρότερη του ***h***
  - Στοιχεία με θέση μεγαλύτερη του ***k***

Algorithm ***inPlaceQuickSort***(***S***, ***l***, ***r***)
  Input sequence ***S***, ranks ***l*** and ***r***
  Output sequence ***S*** with the
    elements of rank between ***l*** and ***r***
    rearranged in increasing order
  if $l \geq r$
    return
  $i \leftarrow$ a random integer between ***l*** and ***r***
  $x \leftarrow$ ***S.elemAtRank***(***i***)
  (***h***, ***k***) $\leftarrow$ ***inPlacePartition***(***x***)
  inPlaceQuickSort(***S***, ***l***, ***h*** − 1)
  inPlaceQuickSort(***S***, ***k*** + 1, ***r***)

Επί-τόπου διαμερισμός



- Εκτέλεση του διαμερισμού χρησιμοποιώντας δύο δείκτες για διαίρεση του S σε L και E U G (μία παρόμοια μέθοδος μπορεί να χωρίσει τα E U G σε E και G).

j k

3 2 5 1 0 7 3 5 9 2 7 9 8 9 7 **6** 9 (pivot = 6)

- Επανάληψη μέχρι να συναντηθούν τα j και k:
  - Έλεγχος από το j προς τα δεξιά μέχρι να βρεθεί στοιχείο $\geq$ x.
  - Έλεγχος από το k προς τα αριστερά μέχρι να βρεθεί στοιχείο < x.
  - Ανταλλαγή των στοιχείων στους δείκτες j και k

j k

3 2 5 1 0 $\boxed{7}$ 3 5 9 $\boxed{2}$ 7 9 8 9 7 **6** 9

Σύνοψη αλγορίθμων ταξινόμησης

Αλγόριθμος	Χρόνος	Σημειώσεις
selection-sort	$O(n^2)$	▪ επί-τόπου ▪ αργό (καλό για μικρά σετ)
insertion-sort	$O(n^2)$	▪ επί-τόπου ▪ αργό (καλό για μικρά σετ)
quick-sort	$O(n \log n)$ αναμενόμενο	▪ επί-τόπου, τυχαιοποιημένο ▪ πολύ γρήγορο (για μεγάλα δεδομένα)
heap-sort	$O(n \log n)$	▪ επί-τόπου, τυχαιοποιημένο ▪ γρήγορο (για μεγάλα δεδομένα)
merge-sort	$O(n \log n)$	▪ διαδοχική προσπέλαση δεδομένων ▪ γρήγορο (για πολύ μεγάλα δεδομένα)