

# Grafuri

Definitie; Tipuri de grafuri; Terminologie;  
Reprezentari

## Definitie

---

- Grafurile sunt structuri de date foarte raspandite in stiinta calculatoarelor, iar algoritmi de grafuri sunt fundamentali in acest domeniu.
- Un graf consta dintr-o multime de noduri si o multime de muchii, astfel incat o muchie leaga doua noduri.
- Arborii si listele sunt cazuri speciale de grafuri.

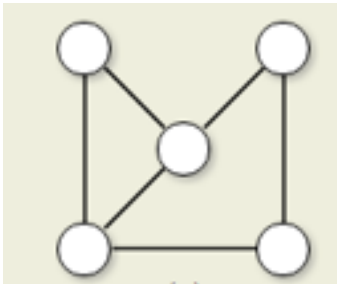
# Definitie

---

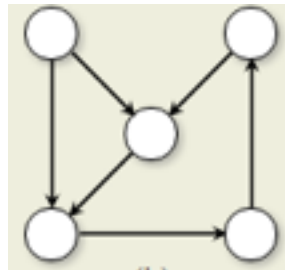
- Un **graf**  $G=(V,E)$  – pereche ordonata de multimi care cuprinde:
  - o multime  $V$  finita si nevida de varfuri sau noduri
  - o multime  $E$  de perechi (ordonate sau neordonate) de elemente din  $V$  numite:
    - muchii – daca sunt perechi neordonate (graf neorientat)
    - arce – daca sunt perechi ordonate (graf orientat)
  - Fiecare muchie leaga o pereche de varfuri din  $V$ .
- **Ordinul** unui graf: numarul de varfuri  $n = |V|$
- Numarul de muchii  $e = |E|$ 
  - e poate lua valori intre 0 si  $|V|^2-|V|$

# Tipuri de grafuri

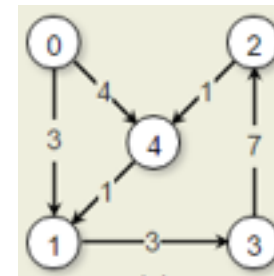
Graf **neorientat** – graf ale carui muchii nu au o directie



Graf **orientat** – un graf ale carui muchii au o directive definite de la un varf la alt varf.

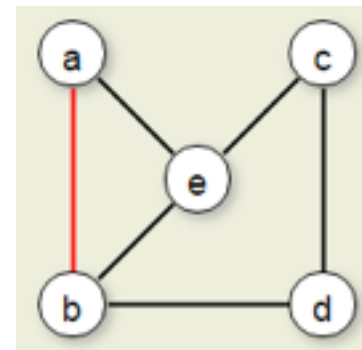
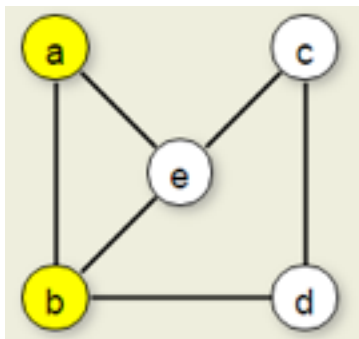


Graf **etichetat** – un graf care are atasata o eticheta, o pondere sau un cost la fiecare muchie.



# Notiuni fundamentale

- O muchie care leaga varfurile  $a$  si  $b$  ale unui graf se noteaza  $(a,b)$ 
  - O astfel de muchie este **incidenta** la varfurile  $a$  si  $b$ .
  - Varfurile  $a$  si  $b$  sunt **varfuri adiacente sau vecine**.



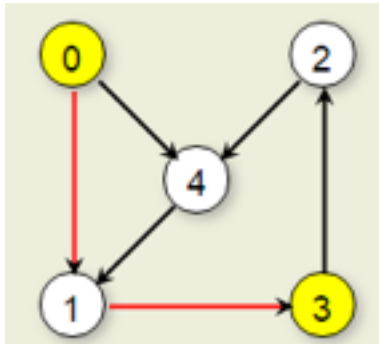
## Notiuni fundamentale

---

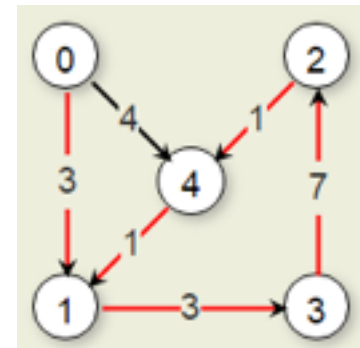
- **Gradul unui varf** este numarul de muchii incidente acelui varf.
- Cat este suma gradele tuturor nodurilor din graful  $G$  in functie de numarul de muchii ?
- Intr-un graf orientat:
  - **gradul exterior** (out degree) al unui varf este dat de numarul de vecini adiacenti de la el (numarul de muchii care ies din varf).
  - **Gradul interior** (in degree) este numarul de vecini adiacenti varfului (numarul de muchii care intra in varf)

# Notiuni fundamentale

- **Drum (cale)** – o secventa de varfuri  $v_1, v_2, \dots, v_n$  formeaza un drum de lungime  $n-1$  daca exista muchii de la  $v_i$  la  $v_{i+1}$  pentru  $1 \leq i < n$
- **Lungimea drumului** – numarul de muchii ale drumului.
- **Drum simplu** – drum cu varfuri distincte.



Drum simplu de la 0 la 3

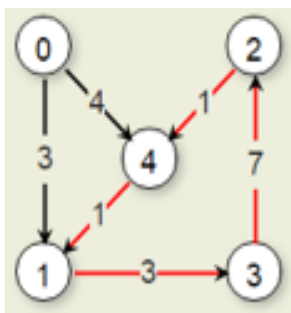


Drumul 0, 1, 3, 2, 4, 1  
nu este simplu

# Notiuni fundamentale

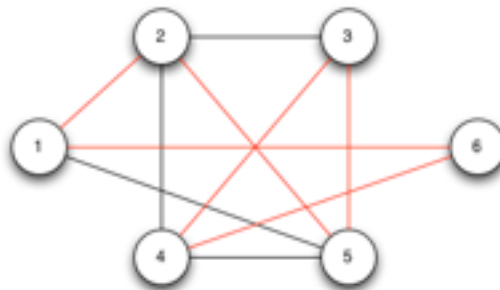
- **Ciclu** – drum de lungime minim 3 care conecteaza un varf  $v_1$  la el insusi.

Ciclu simplu: ciclu care are un drum simplu, exceptie facand primul si ultimul varf care sunt identice.



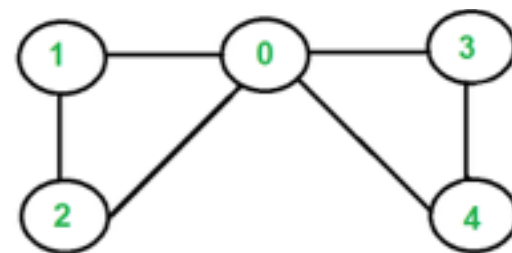
Ciclu simplu: 1, 3, 2, 4, 1

Ciclu hamiltonian: ciclu simplu care trece prin toate nodurile grafului  $G$ , exact o dată,



Ciclu hamiltonian:  
1, 2, 5, 3, 4, 6, 1

Ciclu eulerian: ciclu care trece prin toate muchiile grafului  $G$ , exact o dată,

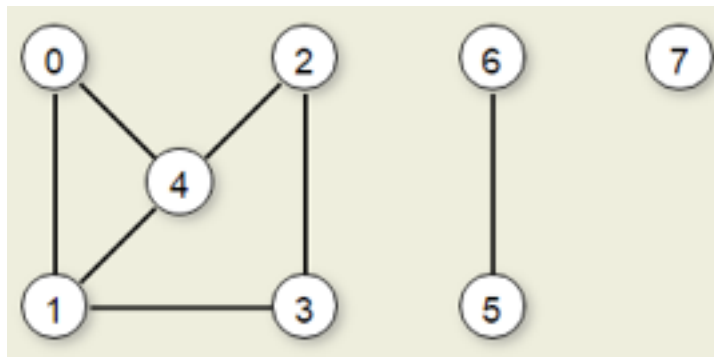


Ciclu eulerian:  
2,1,0,3,4,0,2



## Notiuni fundamentale

- **Graf conex** – între oricare doua varfuri exista cel putin un drum.
- **Componente conexe** – subgrafurile maximal conectate ale unui graf neorientat.

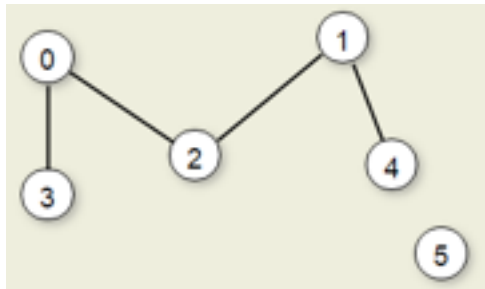


Graf neorientat care are 3 componente conexe.

# Notiuni fundamentale

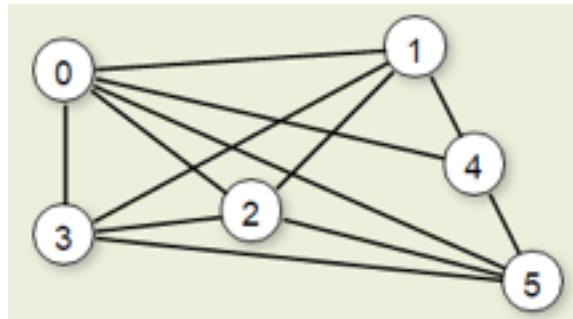
**Graf rar** (sparse graf) – graf cu putine muchii:

$$|E| \ll |V|^2$$



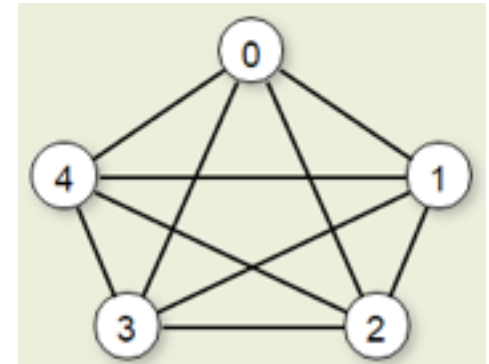
**Graf dens** – graf cu multe muchii:

$$|E| \sim |V|^2$$



**Graf complet** – graf care are toate muchiile posibile:

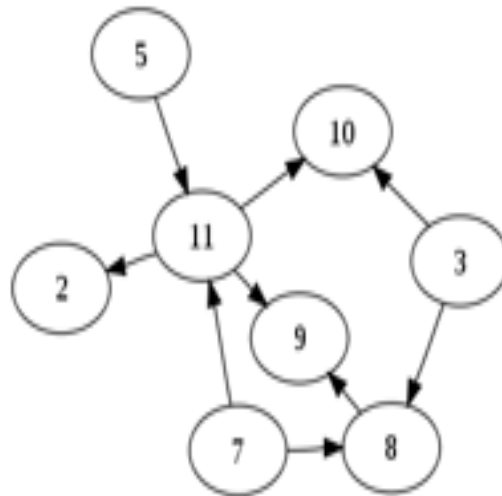
$$|E| = 1/2|V|^2 - |V|$$



## Notiuni fundamentale

---

- **Graf aciclic** – graf fara cicluri.
- **Graf aciclic directionat** – un graf directionat fara cicluri.



# Modalitati de reprezentare a grafurilor

---

## 1. Matricea de adiacenta:

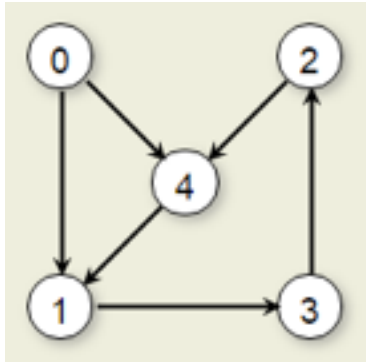
- Matrice de dimensiune  $|V| \times |V|$
- Randul  $i$  din matrice contine intrarile pentru varful  $v_i$
- Coloana  $j$  din randul  $i$  este marcata (fie 1, True, pondere, cost) daca exista o muchie de la varful  $v_i$  la varful  $v_j$ .

## 2. Lista de adiacenta:

- Sir care contine  $|V|$  liste inlantuite.
- Pozitia  $i$  din sir contine un pointer la lista varfurilor adiacente varfului  $v_i$ .
- Reprezentarile sunt potrivite atat pentru grafuri orientate cat si pentru grafuri neorientate.

# Modalitati de reprezentare a grafurilor

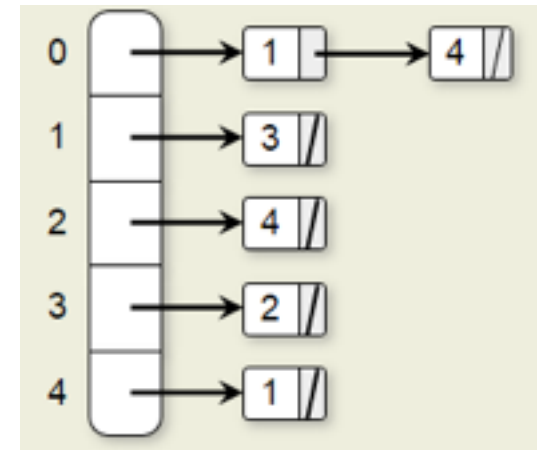
- Exemplu pentru graf orientat:



Graf orientat

	0	1	2	3	4
0		1			1
1				1	
2					1
3			1		
4		1			

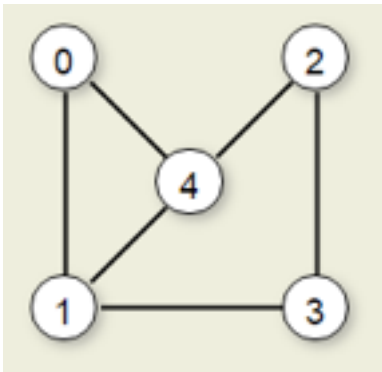
Matricea de adiacenta



Lista de adiacenta

# Modalitati de reprezentare a grafurilor

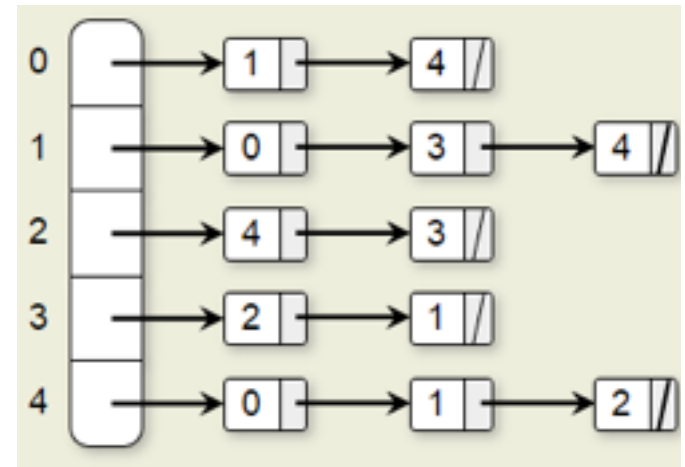
- Exemplu pentru graf neorientat:



Graf neorientat

	0	1	2	3	4
0		1			1
1	1			1	1
2				1	1
3		1	1		
4	1	1	1		

Matricea de adiacenta

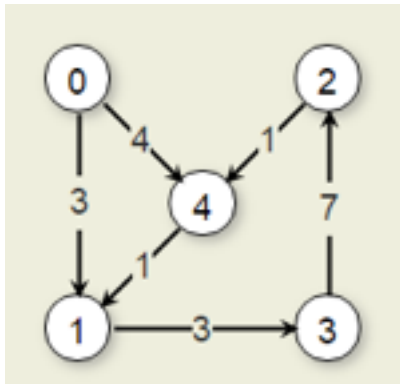


Lista de adiacenta

Fiecare muchie dintre varfurile  $u$  si  $v$  a unui graf neorientat este reprezentata de doua muchii orientate: una de la  $u$  la  $v$  si alta de la  $v$  la  $u$ .

# Modalitati de reprezentare a grafurilor

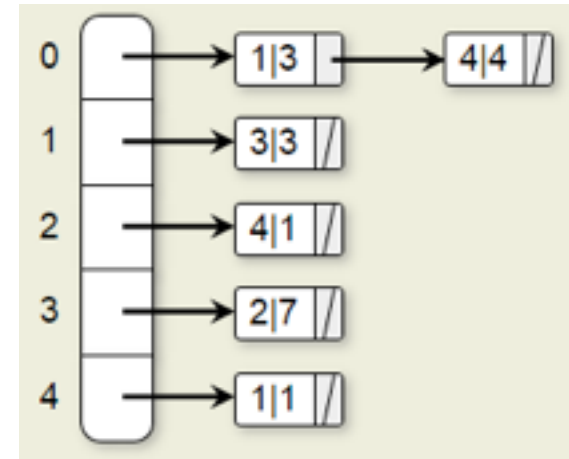
- Exemplu pentru graf etichetat:



Graf etichetat

	0	1	2	3	4
0		3			4
1				3	
2					4
3			7		
4		1			

Matricea de adiacenta



Liste de adiacenta

# Modalitati de reprezentare a grafurilor

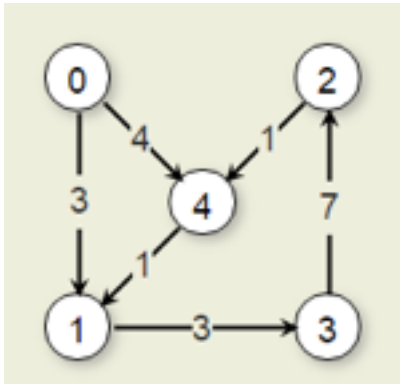
---

- Care reprezentare este mai eficienta ca spatiu de stocare?
  - Depinde de numarul de muchii
  - Lista de adiacenta stocheaza informatii doar pentru acele muchii care apar in graf
  - Matricea de adiacenta alocata spatiu pentru orice muchie posibila din graf, dar nu necesita o incarcare suplimentara de pointeri
  - Cu cat graful devine mai dens cu atat matricea de adiacenta devine mai eficienta ca spatiu alocat.
  - Cu cat graful este mai rar cu atat este mai indicate o reprezentare cu liste de adiacenta.



# Modalitati de reprezentare a grafurilor

- Eficienta reprezentarilor - exemplu



Graf etichetat

- Se da graful din figura alaturata.
- Se cunosc urmatoarele detalii de stocare:

- indicele unui varf – 2 bytes
- Pointer – 4 bytes
- Eticheta unui arc – 2 bytes.

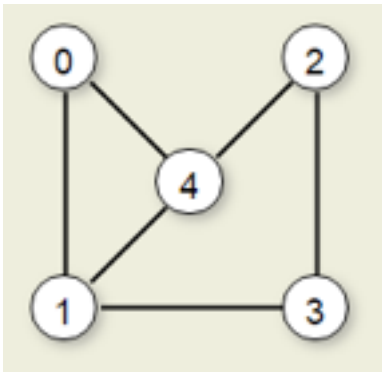
Care e spatiul necesar pentru stocarea prin matrice de adiacenta si prin liste de adiacenta ?

Matricea de adiacenta:  $2|V|^2 = 50$  bytes

Lista de adiacenta:  $4|V| + 6|E| = 56$  bytes

# Modalitati de reprezentare a grafurilor

- Eficienta reprezentarilor - exemplu



Graf neorientat

- Se da graful din figura alaturata.
  - Se cunosc urmatoarele detalii de stocare:
    - indicele unui varf – 2 bytes
    - Pointer – 4 bytes
    - Eticheta unui arc – 2 bytes.
- Care e spatiul necesar pentru stocarea prin matrice de adiacenta si prin liste de adiacenta ?

## Bibliografie:

---

- Sursa figuri: <http://algoviz.org/OpenDSA/Books/Everything/html/GraphIntro.html>