Geometrie şi grafică pe calculator

Geometrie analitică, transformări şi proiecţii

Paul A. Blaga

Cuprins

CAPITOLUL 1

Vectori (rezumat)

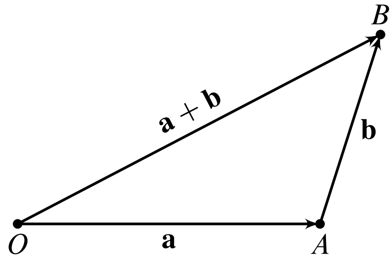
1.1 Operaţii cu vectori liberi

1.1.1 Adunarea vectorilor

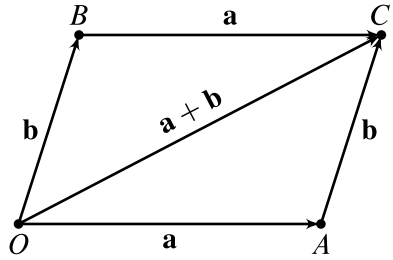
Considerăm doi vectori **a** şi **b**. Alegem un punct O oarecare din spaţiu şi construim un punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiţia 1.1. Vectorul $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *suma vectorilor* **a** şi **b** şi se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Este clar, din raţiuni geometrice elementare, că suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nu depinde de alegerea punctului O. Modalitatea de construcţie a sumei a doi vectori descrisă mai sus se numeşte *regula triunghiului* (sau a *închiderii*, pentru că suma celor doi vectori este determinată de segmentul orientat care închide triunghiul care are ca celelalte două laturi segmentele orientate care determină cei doi vectori liberi care se însumează). Dacă vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, atunci avem şi o altă metodă de a determina



(a) Regula triunghiului



(b) Regula paralelogramului

Figura 1.1: Adunarea vectorilor

suma a doi vectori, care, fireşte, dă acelaşi rezultat ca şi regula triunghiului. Fie, prin urmare, **a** şi **b** doi vectori necoliniari. Alegem un punct O şi ataşăm cei doi vectori de punctul O, cu alte cuvinte, determinăm punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Cum vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, de aici rezultă că nici punctele O, A şi B nu sunt coliniare, deci ele determină un plan. În acest plan, construim paralelogramul $OACB$. Cum se constată cu uşurinţă că $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, rezultă, pe baza regulii triunghiului, menţionată mai sus, că au loc egalităţile:

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{1.1.1}$$

Avem două egalităţi, pentru că avem două situaţii în care putem aplica regula triunghiului, şi de fiecare dată vectorul care închide triunghiul este $\overrightarrow{OC}$.

Rezultă, prin urmare, noua regulă de calcul a sumei a doi vectori (*regula paralelogramului*):

> pentru a găsi suma a doi vectori necoliniari, se ataşează aceşti doi vectori unui punct O şi se construieşte pe segmentele orientate obţinute, ca laturi, un paralelogram. Diagonala paralelogramului care pleacă din punctul O va fi atunci segmentul orientat care determină suma celor doi vectori.

Regula paralelogramului permite (vezi formula (1.1.1)) demonstrarea foarte simplă a *comutativităţii* adunării vectorilor liberi, pentru cazul vectorilor *necoliniari*. Pentru cazul vectorilor coliniari, comutativitatea se poate verifica foarte uşor cu ajutorul regulii închiderii, atât pentru vectorii orientaţi în acelaşi sens, cât şi pentru cei având sensuri opuse. Aşadar,

> operaţia de adunare a vectorilor liberi este comutativă.

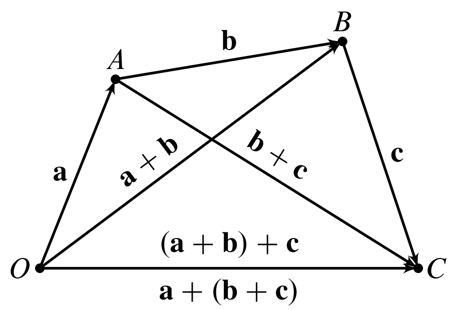


Figura 1.2: Asociativitatea adunării vectorilor

Considerăm acum trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Ataşăm vectorul **a** unui punct O, construind, astfel, punctul A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. Construim, mai departe, punctul B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Conform definiţiei sumei, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Adunăm acum la acest vector vectorul **c**. Pentru aceasta construim punctul C astfel încât $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$. Avem, atunci

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \tag{1.1.2}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{1.1.3}$$

Combinând (1.1.2) cu (1.1.3) obţinem

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

adică

> adunarea vectorilor este *asociativă*.

Operaţia de adunare a vectorilor liberi admite şi *element neutru*, care este, fireşte, vectorul nul, $\mathbf{0}$, deoarece este evident că pentru orice vector $\mathbf{a}$ avem:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}.$$

Remarcăm, în sfârşit, că fiecare vector admite un opus relativ la operaţia de adunare. Astfel, dacă vectorul liber $\mathbf{a}$ este reprezentat de segmentul orientat $\overline{AB}$, atunci vom nota cu $-\mathbf{a}$ vectorul liber reprezentat de segmentul orientat $\overline{BA}$ şi se constată imediat că avem:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0.$$

Acestea fiind spuse, putem afirma că *mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu formează un grup abelian în raport cu operaţia de adunare a vectorilor*.

Aşa cum se întâmplă în orice grup abelian (aditiv), odată cu adunarea vectorilor putem defini şi scăderea lor, punând, prin definiţie:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}:=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Dacă ataşam vectorul $\mathbf{a}$ unui punct O şi alegem A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, atunci, după cum se constată cu uşurinţă, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$ sau

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

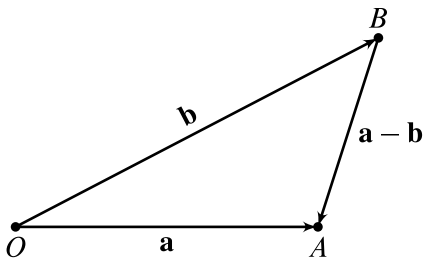
Regula paralelogramului se poate aplica fără dificultate şi pentru determinarea diferenţei a doi vectori, nu doar pentru determinarea sumei. Astfel, după cum am văzut mai sus, pentru a determina suma a doi vectori, se consideră, mai întâi, câte un reprezentant al fiecărui vector, având originile în acelaşi punct. Se completează paralelogramul, ducându-se paralelele la dreptele suport ale celor două segmente orientate, prin extremităţile lor. Atunci

> suma celor doi vectori este vectorul reprezentat de segmentul orientat asociat diagonalei ce are originea în punctul de aplicare al celor doi vectori. Diferenţa celor doi vectori, în schimb, este determinată de cea de-a doua diagonală, orientarea fiind aleasă în aşa fel încât originea să fie situată în extremitatea scăzătorului, iar extremitatea în extremitatea descăzutului.

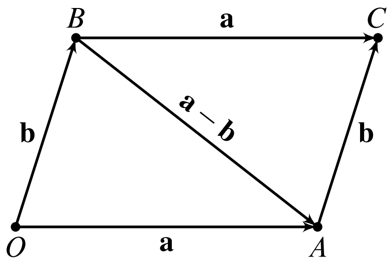
1.2 Înmulţirea unui vector cu un număr real (cu un scalar)

Scopul nostru este să înzestrăm mulţimea vectorilor liberi din spaţiu cu o structură de spaţiu vectorial. Am văzut, până acum, că această mulţime, împreună cu adunarea vectorilor, este un grup abelian. Ne-a mai rămas de definit înmulţirea exterioară (înmulţirea cu scalari) şi verificarea compatibilităţii acestei operaţii cu adunarea vectorilor.

Definiţia 1.2. Fie $\mathbf{a}$ un vector şi $\lambda\in\mathbb{R}$ un număr real. *Produsul vectorului* $\mathbf{a}$ *cu scalarul* λ este, prin definiţie, un vector, notat $\lambda\mathbf{a}$ caracterizat în modul următor:



(a) Regula triunghiului



(b) Regula paralelogramului

Figura 1.3: Diferenţa vectorilor

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

unde produsul din membrul drept este produsul de numere reale;

(ii) direcţia lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcţia lui $\mathbf{a}$;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda < 0$.

Vom enumera acum o serie de proprietăţi fundamentale pe care le are operaţia de înmulţire a vectorilor cu scalari.

1) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

2) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

3) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, pentru orice scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi orice vector $\mathbf{a}$.

Aceste trei proprietăţi sunt evidente, ele rezultând în mod direct din definiţia înmulţirii cu scalari.

4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi pentru orice doi vectori liberi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

5) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi pentru orice vector liber $\mathbf{a}$.

Proprietăţile 1)–5), împreună cu faptul că mulţimea $\mathcal{V}$ este un grup abelian (ceea ce am demonstrat în secţiunea precedentă), înseamnă că această mulţime este un *spaţiu vectorial* peste mulţimea numerelor reale.

Observaţie. Proprietăţile 4) şi 5) pot fi extinse, prin inducţie, la orice număr finit de sumanzi, cu alte cuvinte, se poate demonstra cu uşurinţă că:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} + \cdots + \lambda_k\mathbf{a},$$

pentru orice k natural, cel puţin egal cu 2, orice numere reale, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şi orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

1.3 Proiecţiile vectorilor pe axe sau plane

1.3.1 Axe

Alegem o dreaptă oarecare în spaţiu. Vom numi unul dintre cele două sensuri de pe această dreaptă *pozitiv* şi îl vom nota pe desen cu o săgeată. Sensul opus va fi numit *negativ*. O dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv se numeşte *axă* sau *dreaptă orientată*.

Alegem acum o axă Δ şi pe ea alegem un segment nenul ca unitate de lungime. Vom numi *lungime cu semn* a unui segment orientat $\overline{AB}$ de pe axă şi-l vom nota cu simbolul (AB) numărul dat de

$$(AB) = \begin{cases} \|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ are acelaşi sens cu } \Delta \\ -\|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ şi } \Delta \text{ au sensuri opuse} \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Numărul (AB) se mai numeşte şi *lungimea orientată* a segmentului orientat $\overline{AB}$. Avem, în mod evident, $(AB) = -(BA)$.

Teorema 1.1 (Chasles)**.** *Pentru orice trei puncte A, B, C situate pe o axă pe care s-a ales o unitate de lungime, are loc următoarea relaţie:*

$$(AB) + (BC) = (AC). \tag{1.3.2}$$

Demonstraţie Verificare directă, după diferitele poziţii reciproce ale punctelor A, B, C (vezi figura 1.4). □

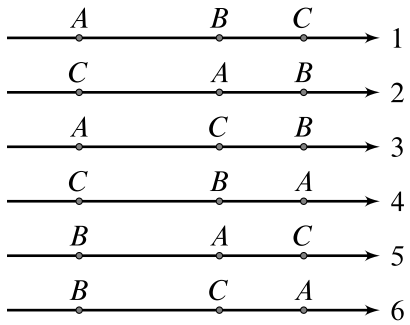


Figura 1.4: Teorema lui Chasles

1.3.2 Proiecţia pe o axă în spaţiu

Fie Δ o axă în spaţiu şi Π un plan care nu este paralel cu Δ. Printr-un punct oarecare A din spaţiu ducem un plan Π_1, paralel cu planul Π. Acest plan intersectează axa Δ într-un punct A'. Punctul A' se numeşte *proiecţia punctului A pe axa Δ, paralelă cu planul* Π. Dacă planul Π este perpendicular pe axa Δ, atunci proiecţia se numeşte *ortogonală*. În acest caz, A' este piciorul perpendicularei coborâte din punctul A pe axa Δ.

Alegem acum un segment orientat oarecare $\overline{AB}$. Dacă proiectăm punctele A şi B pe axa Δ, paralel cu planul Π, obţinem un segment orientat $\overline{A'B'}$, care se numeşte *proiecţia segmentului orientat*

$\overline{AB}$ *pe axa* Δ*, paralelă cu planul* Π. Presupunem acum că pe axa Δ s-a ales şi o unitate de lungime (o scală). Atunci putem vorbi şi despre lungimea orientată a proiecţiei unui segment pe axă, lungime pe care o vom nota cu $\mathrm{pr}_\Delta \overline{AB} (\parallel \Pi)$.

Este clar că două segmente orientate echivalente vor avea ca proiecţii pe orice axă segmente orientate echivalente, iar lungimile orientate ale acestor proiecţii vor fi egale.

Considerăm acum un vector liber $\mathbf{a}$, adică o clasă de echivalenţă de segmente orientate. Proiecţiile acestor segmente pe axa Δ, paralel cu planul Π, formează, după cum am menţionat mai sus, o familie de segmente orientate echipolente între ele, adică formează *un vector liber pe dreaptă*. Acest vector se numeşte *proiecţia vectorului* $\mathbf{a}$ *pe axa* Δ*, paralel cu planul* Π şi se notează cu $\mathrm{pr}_\Delta \mathbf{a} (\parallel \Pi)$.

1.3.3 Proiecţia pe o axă într-un plan

Presupunem acum că atât axa Δ, cât şi figura care se proiectează sunt situate într-un acelaşi plan Π. Vom reformula definiţia proiecţiei în modul următor. Fie Δ_1 o dreaptă din planul Π, care nu este paralelă cu axa Δ. Ducem, printr-un punct A al planului, o dreaptă paralelă cu dreapta Δ_1, care intersectează axa într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe axa* Δ*, paralelă cu dreapta* Δ_1 . Celelalte noţiuni din paragraful precedent se definesc în mod analog şi se bucură de aceleaşi proprietăţi.

1.3.4 Proiecţia pe un plan

Fie Π un plan şi Δ o dreaptă care nu este paralelă cu planul. Ducem printr-un punct A al spaţiului o dreaptă Δ_1, paralelă cu dreapta Δ. Dreapta Δ_1 intersectează planul într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe planul* Π*, paralelă cu dreapta* Δ. Dacă dreapta Δ este perpendiculară pe planul Π, proiecţia se numeşte *ortogonală*.

1.3.5 Proiecţia sumei vectorilor

Presupunem că pe axa Δ se proiectează doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Proiecţia se face paralel cu un plan Π sau paralel cu o dreaptă Δ_1, dacă atât vectorii, cât şi axa se află într-un acelaşi plan.

Alegem un punct O şi construim punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Dacă O', A', B' sunt proiecţiile punctelor O, A, B pe axa Δ, atunci vectorii $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{O'B'}$ sunt, respectiv, proiecţiile vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. De aici rezultă că *proiecţia sumei vectorilor este egală cu suma proiecţiilor termenilor*. Este clar că această proprietate se poate extinde, fără dificultate, şi la sume de mai mult de doi vectori. Mai mult, dacă pe axă s-a ales şi o unitate de lungime, atunci, în virtutea egalităţii (1.3.2), avem şi

$$(O'B') = (O'A') + (A'B')$$

sau, utilizând notaţia introdusă mai devreme,

$$\mathrm{pr}_\Delta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{pr}_\Delta \mathbf{a} + \mathrm{pr}_\Delta \mathbf{b}, \tag{1.3.3}$$

adică magnitudinea proiecţiei sumei vectorilor pe o axă este egală cu suma magnitudinilor proiecţiilor termenilor.

1.3.6 Proiecţia produsului unui vector cu un scalar

Vom demonstra că prin înmulţirea unui vector $\mathbf{a}$ cu un scalar λ, proiecţia acestui vector pe orice axă Δ, ca şi magnitudinea acestei proiecţii se înmulţesc cu acelaşi scalar.

Dacă $\mathbf{a} = 0$ sau $\lambda = 0$, este clar că nu avem ce demonstra. Presupunem, prin urmare, că $\mathbf{a} \neq 0$ şi $\lambda \neq 0$. Alegem o axă Δ, fixăm un punct O pe ea şi determinăm punctele A şi B din spaţiu astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \lambda\mathbf{a}$. Cei doi vectori, după cum se ştie, au aceeaşi direcţie, iar sensurile coincid pentru $\lambda > 0$ şi sunt opuse pentru $\lambda < 0$.

Proiectând punctele A şi B pe axa Δ în punctele A' şi B', obţinem două triunghiuri asemenea, OAA' şi OBB'. Din proprietăţile asemănării afirmaţia noastră rezultă imediat, prin urmare avem:

$$\mathrm{pr}_\Delta(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}. \tag{1.3.4}$$

1.3.7 Proiecţia unei combinaţii liniare de vectori

Fie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ un sistem oarecare de vectori (nu neapărat distincţi), şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ un sistem oarecare de k numere reale. Atunci vectorul

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k$$

se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor consideraţi.

Din egalităţile (1.3.3) şi (1.3.4) rezultă următoarea egalitate:

$$\mathrm{pr}_\Delta(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k) = \lambda_1\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_1 + \lambda_2\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_k,$$

adică *magnitudinea proiecţiei unei combinaţii liniare de vectori pe o axă este egală cu combinaţia liniară a proiecţiilor vectorilor (cu aceeaşi coeficienţi).*

1.4 Dependenţa liniară a vectorilor

Definiţia 1.3. Vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{1.4.1}$$

se numesc *liniar dependenţi* dacă există numerele reale

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \tag{1.4.2}$$

nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1.4.3}$$

În caz contrar, vectorii se numesc *liniar independenţi*.

Este clar că vectorii sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă din egalitatea (1.4.3) rezultă că

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Se mai spune, de asemenea, că vectorii (1.4.1) formează *un sistem liniar dependent*, respectiv *un sistem liniar independent*.

Dacă un vector **a** se poate scrie în funcţie de vectorii (1.4.1) sub forma

$$\mathbf{a} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{a}_k,$$

atunci vom spune că **a** este *o combinaţie liniară a acestor vectori* .

Teorema 1.2. *Pentru ca vectorii (1.4.1) (cu $k > 1$) să fie liniar dependenţi, este necesar şi suficient ca cel puţin unul dintre aceşti vectori să poată fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Consecinţa 1.1. *Dacă vectorii (1.4.1) sunt liniar independenţi, atunci nici unul nu poate fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi. În particular, nici unul dintre vectori nu poate fi egal cu zero.*

În cadrul acestui curs,vom avea de-a face, de regulă, cu sisteme formate din cel mult trei vectori. De aceea este interesant să evidenţiem sensul geometric al dependentei liniare sau al independenţei liniare pentru sisteme formate din 1, 2 sau trei vectori.

Este evident că un sistem format dintr-un singur vector este liniar dependent dacă şi numai dacă vectorul este nul.

Pentru cazul a doi vectori, avem următorul rezultat:

Teorema 1.3. *Doi vectori sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sunt coliniari.*

Consecinţa 1.2. *Doi vectori sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă ei* nu sunt coliniari.

Vectorii liniar independenţi vor juca un rol esenţial. În particular, ei ne furnizează descompuneri ale altor vectori. Un prototip de astfel de descompunere este dat de următoarea teoremă:

Teorema 1.4. *Să presupunem că într-un plan Π sunt daţi doi vectori necoliniari $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$. Atunci orice alt vector **a** din plan se poate descompune în funcţie de vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$, cu alte cuvinte există două numere reale (unic determinate) x şi y astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{1.4.4}$$

Să vedem acum ce se întâmplă în cazul în care avem *trei* vectori. Avem următorul rezultat:

Teorema 1.5. *Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenţi este necesar şi suficient ca ei să fie coplanari.*

Drept consecinţă a acestei teoreme, putem conchide că *în spaţiu există triplete de vectori liniar independenţi*.

Şi în spaţiu avem un rezultat similar teoremei 1.4, adică:

Teorema 1.6. *Dacă vectorii*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \tag{1.4.5}$$

*sunt liniar independenţi şi **a** este un vector oarecare, atunci există trei numere reale, x, y, z astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{1.4.6}$$

*Această descompunere a lui **a** este unică.*

Întrebarea naturală care se pune este: ce se întâmplă dacă avem mai mult de trei vectori? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Teorema 1.7. *Orice patru vectori sunt liniar dependenţi.*

1.5 Orientarea sistemelor de doi şi trei vectori liniar independenţi

Definiţia 1.4. Un sistem (ordonat) de vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ într-un plan se numeşte un sistem *drept* dacă atunci când ataşăm cei doi vectori punctului O din plan, adică alegem două puncte A_1 şi A_2 din plan astfel încât $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ şi $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, când rotim vectorul $\mathbf{a}_1$ în jurul punctului O pentru a-l aplica peste vectorul $\mathbf{a}_2$ (ca direcţie şi sens), pe drumul cel mai scurt, rotaţia se face în sens trigonometric (invers sensului acelor de ceasornic).

Acelaşi sistem se numeşte *stâng* dacă rotaţia menţionată mai sus se face în sensul acelor de ceasornic.

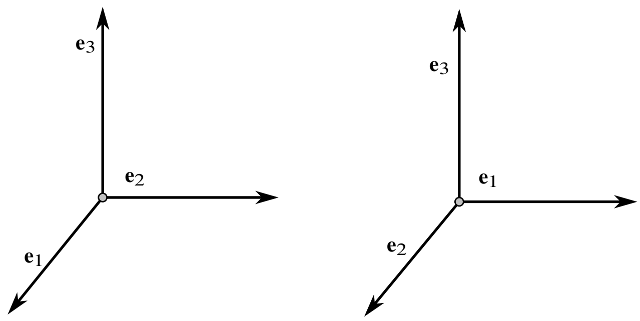


Figura 1.5:

Observaţie. Este clar că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ este drept, atunci sistemul $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$ este stâng şi viceversa.

Definiţia 1.5. Fie $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ un sistem ordonat de trei vectori liniar independenţi din spaţiu. Fixăm, ca şi mai sus, un punct O şi alegem trei puncte A_1, A_2, A_3 astfel încât să avem $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i},\ i = 1, 2, 3$. Sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se numeşte *drept* dacă în planul OA_1A_2, văzut din punctul A_3, rotaţia în jurul punctului O care aplică A_1 peste A_2 pe cel mai scurt drum, se face în sens trigonometric. În caz contrar, adică dacă rotaţia se face în sensul acelor de ceasornic, sistemul se numeşte *stâng*.

Observaţie. Se poate constata imediat că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ este drept, atunci tot drepte sunt şi sistemele $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\}$ şi $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, în timp ce sistemele $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\}$ şi $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ sunt stângi.

1.6 Coordonate pe dreaptă

Fie Δ o dreaptă oarecare. Alegem pe ea un vector nenul oarecare, $\mathbf{e}$, pe care îl vom numi *vector unitar* sau *versor*.

Dacă acum $\mathbf{a}$ este un vector oarecare de pe dreaptă, atunci, conform secţiunii precedente, există un singur număr real x astfel încât $\mathbf{a} = x\mathbf{e}$. Numărul x se numeşte *componenta* vectorului $\mathbf{a}$, relativ la dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$.

Alegem pe dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$, un punct O, pe care îl vom numi *originea coordonatelor*. Dreapta Δ se va numi de-acum *axă de coordonate*. Dacă M este un punct oarecare al dreptei, vectorul $\overrightarrow{OM}$ se va numi *rază vectoare* sau *vector de poziţie* al punctului M, iar componenta acestui vector se numeşte *coordonata punctului M*.

Alegem, mai departe, punctul E pe dreaptă astfel încât să avem $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$. Segmentul OE va fi ales ca scară a lungimilor pe dreapta Δ. Prin urmare, coordonata unui punct M de pe dreaptă nu este altceva decât magnitudinea (OM) a segmentului orientat $\overline{AB}$. Pentru a scoate în evidenţă că numărul real x este coordonata punctului M, vom scrie, de regulă, $M(x)$.

Trebuie remarcat că există o infinitate de moduri de a asocia coordonate punctelor de pe dreaptă. Coordonata unui punct este unic determinată doar în momentul în care s-au ales:

- versorul dreptei;
- originea dreptei.

Datorită introducerii coordonatelor, fiecărui punct M de pe axa de coordonate Δ i se pune în corespondenţă un singur număr real – coordonata sa x. Invers, pentru fiecare număr real x există un singur punct M de pe axa Δ a cărui coordonată este x. Astfel, poziţia fiecărui punct de pe axa de coordonate este unic determinată prin prescrierea coordonatei acelui punct.

Notăm cu $\rho(M_1, M_2)$ distanţa dintre punctele M_1 şi M_2, adică lungimea segmentului M_1M_2. Această distanţă se poate exprima cu ajutorul coordonatelor. Mai precis, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.8. *Pentru orice puncte $M_1(x_1)$ şi $M_2(x_2)$ de pe axa de coordonate au loc egalităţile:*

$$(M_1M_2) = x_2 - x_1, \tag{1.6.1}$$

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \tag{1.6.2}$$

Demonstraţie Din teorema lui Chasles rezultă că

$$(OM_1) + (M_1M_2) = (OM_2) \implies (M_1M_2) = (OM_2) - (OM_1).$$

Utilizând definiţia coordonatelor, obţinem egalitatea (1.6.1). Formula (1.6.2) rezultă imediat din formula (1.6.1). □

1.7 Coordonate în plan

1.7.1 Coordonate afine

Peste tot în această secţiune vom considera că toate punctele şi toţi vectorii se află într-un plan Π.

Definiţia 1.6. Fie O un punct şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – doi vectori liniar independenţi (necoliniari) din planul Π. Tripletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afin* în planul Π.

Ataşăm vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ punctului O, construind punctele E_1 şi E_1 astfel încât $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$ şi $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Segmentele orientate $\overline{OE_1}$ şi $\overline{OE_2}$ definesc două axe de coordonate, Ox şi Oy. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ – *vectorii bazei*.

Fie acum $\mathbf{a}$ un vector oarecare din planul Π. Din teorema 1.4 rezultă că $\mathbf{a}$ se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{1.7.1}$$

Definiţia 1.7. Coeficienţii x şi y din descompunerea (1.7.1) se numesc *componentele* vectorului $\mathbf{a}$ relativ la sistemul de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

După cum s-a văzut în secţiunea 1.3, x şi y sunt, de fapt, magnitudinile proiecţiilor vectorului $\mathbf{a}$ pe axele Ox şi Oy, paralel cu axele OY, respectiv Ox. Pentru a scoate în evidenţă faptul că x şi y sunt componentele vectorului $\mathbf{a}$ vom scrie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ sau, pur şi simplu, $\mathbf{a}(x, y)$.

Fie, acum, M un punct oarecare al planului Π, în care s-a fixat un sistem de coordonate afine $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *raza vectoare* sau *vectorul de poziţie* al punctului M.

Definiţia 1.8. Componentele x şi y ale vectorului $\overrightarrow{OM}$ se numesc *coordonate afine* ale punctului M relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. De regulă, x se numeşte *abscisă*, în timp ce y se numeşte *ordonată*.

Un sistem de coordonate afine se mai notează şi cu Oxy, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi. Dacă x şi y sunt coordonatele unui punct M, vom utiliza în mod frecvent notaţia $M(x, y)$.

Introducerea componentelor vectorilor permite înlocuirea diferitelor relaţii dintre vectori cu relaţii între componentele lor. Avem, de exemplu:

Teorema 1.9. *Componentele unei combinaţii liniare de vectori sunt egale cu aceeaşi combinaţie liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă*

$$\mathbf{a}(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Y_j.$$

Consecinţa 1.3. *Dacă $X(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte din plan, atunci*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

adică pentru a obţine componentele vectorului definit de segmentul orientat $\overline{AB}$, trebuie să scădem din coordonatele extremităţii sale coordonatele originii.

Consecinţa 1.4. *Pentru ca doi vectori $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ şi $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ să fie coliniari, este necesar şi suficient ca ei să aibă componentele corespunzătoare proporţionale.*

Consecinţa 1.5. *Coordonatele mijlocului A al unui segment de dreaptă cu capetele în punctele $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$ sunt*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

1.7.2 Coordonate rectangulare

Presupunem că în planul Π a fost aleasă o unitate de măsură pentru lungime. Alegem un punct O şi doi vectori de lungime 1, perpendiculari unul pe celălalt, $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$. Sistemul afin de coordonate $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ se numeşte *sistem de coordonate rectangular* sau *cartezian*. Despre baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ vom spune că este *ortonormată* (ceea ce înseamnă că vectorii sunt *ortogonali*, adică perpendiculari şi "normaţi", adică de lungime 1).

Toate proprietăţile valabile într-un sistem de coordonate afin oarecare rămân adevărate şi într-un sistem rectangular, dar, de regulă, expresiile care intervin sunt mult mai simple atunci când sunt scrise în coordonate carteziene.

1.8 Coordonate în spaţiu

1.8.1 Coordonate afine şi rectangulare

Fie O un punct oarecare al spaţiului şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – trei vectori liniar independenţi (adică necoplanari).

Definiţia 1.9. Cuadrupletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afine* în spaţiu. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se numesc *vectorii bazei*.

Definiţia 1.10. Se numesc *componente* ale unui vector $\mathbf{a}$ relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ coeficienţii x, y, z ai descompunerii:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Coordonatele unui punct M, relativ la acelaşi reper sunt, prin definiţie, componentele x, y, z ale vectorului său de poziţie, $\overrightarrow{OM}$. Coordonata x se numeşte *abscisă*, coordonata y – *ordonată*, iar coordonata z – *cotă*.

Un sistem de coordonate afin se mai notează cu $Oxyz$, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi. Construim punctele E_1, E_2, E_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3. \tag{1.8.1}$$

Segmentele orientate $\overline{OE_1}$, $\overline{OE_2}$ şi $\overline{OE_3}$ determină cele trei *axe de coordonate*, Ox, Oy şi Oz. Cele trei plane determinate de câte două axe de coordonate se numesc *plane de coordonate*. Aceste plane împart spaţiul în opt zone, care se numesc *octanţi de coordonate*.

Ca şi în cazul reperelor plane, distingem sisteme de coordonate *drepte* şi stângi. Considerăm un triplet de vectori necoplanari $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ataşam aceşti vectori unui punct O, adică determinăm punctele E_1, E_2, E_3, astfel încât să fie verificate relaţiile (1.8.1). Rotim segmentul orientat $\overline{OE_1}$, în planul OE_1E_2, în jurul lui O, pe cel mai scurt drum, până când el coincide, ca direcţie şi sens, cu segmentul orientat $\overline{OE_2}$. Dacă această rotaţie, privită din extremitatea segmentului orientat $\overline{OE_3}$ (cu alte cuvinte, din punctul E_3) se produce în sensul invers mersului acelor de ceasornic, vom spune că tripletul de vectori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este *drept*, altfel vom spune că este *stâng*.

Un sistem de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *drept* sau stâng, după cum tripletul $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este drept sau stâng. Peste tot, în cele ce urmează, sistemele de coordonate vor fi totdeauna drepte, dacă nu se menţionează altfel. Cel mai simplu dintre sistemele de coordonate afine în spaţiu este

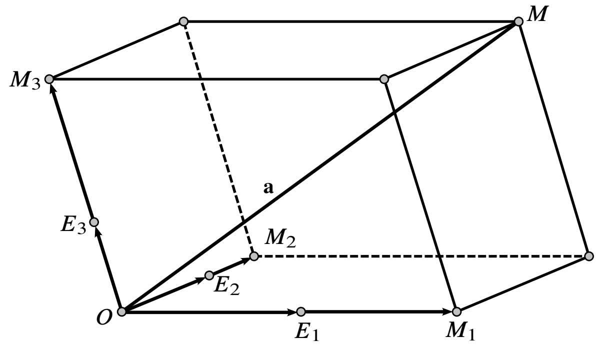


Figura 1.6:

sistemul de coordonate rectangular sau cartezian. Presupunem că în spaţiu s-a ales o unitate de măsură pentru lungime. Atunci un sistem de coordonate rectangular sau cartezian în spaţiu este determinat de alegerea unui punct O şi a trei vectori de lungine 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculari între ei.

Teorema 1.9 şi consecinţele sale se pot adapta fără probleme la cazul spaţiului, singura diferenţă fiind faptul că se mai adaugă încă o coordonată.

1.9 Produsul scalar al vectorilor

1.9.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Definiţia 1.11. Fie $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori. Se numeşte *produs scalar* al celor doi vectori numărul real, notat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, egal cu produsul dintre normele celor doi vectori şi al cosinusului unghiului dintre ei, adică:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\varphi, \tag{1.9.1}$$

unde φ este unghiul dintre cei doi vectori.

Proprietăţi

1. comutativitatea:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.9.2}$$

2. compatibilitatea cu înmulţirea vectorilor cu scalari:
$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.9.3}$$
$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.9.4}$$

3. distributivitatea faţă de adunarea vectorilor:
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \tag{1.9.5}$$
$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.9.6}$$

Pe baza acestor trei proprietăţi, putem trage concluzia că înmulţirea combinaţiilor liniare de vectori se poate face termen cu termen, ca în exemplul următor:

$$(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(4\mathbf{c} - 5\mathbf{d}) = 8\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 10\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + 12\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 15\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}.$$

Ultimele două proprietăţi au un caracter oarecum mai "geometric".

4. Doi vectori **a** şi **b** sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \tag{1.9.7}$$

5. Produsul scalar a unui vector cu el însuşi este egal cu pătratul normei acestui vector:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \tag{1.9.8}$$

1.9.2 Exprimarea produsului scalar în coordonate

Alegem, în spaţiu, un sistem de coordonate rectangular, cu originea într-un punct O. Fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată care generează acest sistem de coordonate. Faptul că baza este ortonormată înseamnă, reamintim, că toţi vectorii au lungime 1, iar vectorii sunt perpendiculari unii pe alţii. Din proprietăţile produsului scalar, descrise mai sus, se constată imediat că produsele scalare dintre vectorii bazei sunt date de următoarea tablă de multiplicare:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{1.9.9}$$

Presupunem acum că se dau doi vectori **a** şi **b**, care au următoarele expresii în raport cu baza de coordonate:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Utilizând tabla de înmulţire scalară (1.9.9) a vectorilor bazei, produsul scalar dintre **a** şi **b** va fi

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) \cdot (X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}) = XX'\mathbf{i}^2 + XY'\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ + XZ'\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + YX'\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + YY'\mathbf{j}^2 + YZ'\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + ZX'\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + ZZ'\mathbf{k}^2 = \\ = XX' + YY' + ZZ'. \end{aligned}$$

Aşadar, produsul scalar a doi vectori, daţi prin componentele lor relativ la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$, se exprimă prin formula

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = XX' + YY' + ZZ'. \tag{1.9.10}$$

Cu această expresie, condiţia de ortogonalitate a vectorilor **a** şi **b** se va scrie, prin urmare,

$$XX' + YY' + ZZ' = 0. \tag{1.9.11}$$

De asemenea, combinând formulele (1.9.8) şi (1.9.10), obţinem pentru lungimea vectorului **a** formula

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{1.9.12}$$

Să presupunem acum că se dau două puncte din spaţiu prin coordonatele lor carteziene ortogonale, $M(x, y, z)$ şi $M'(x', y', z')$. După cum se ştie, distanţa $d(M, M')$ dintre cele două puncte este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y, z' - z)$, adică este dată de formula

$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

În sfârşit, utilizând formulele (1.9.1), (1.9.10) şi (1.9.12), putem stabili o formulă pentru calculul cosinusului unghiului format de vectorii $\mathbf{a}(X, Y, Z)$ şi $\mathbf{b}(X', Y', Z')$, daţi prin componentele lor relativ la o bază ortonormată:

$$\cos\varphi = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}.$$

1.10 Produsul vectorial al vectorilor

1.10.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Definiţia 1.12. Produsul vectorial dintre vectorul **a** şi vectorul **b** este, prin definiţie, vectorul, notat prin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, determinat prin următoarele condiţii:

1) dacă vectorii **a** şi **b** sunt coliniari, atunci, prin definiţie, produsul lor vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egal cu zero.

2) dacă cei doi vectori nu sunt paraleli, adică fac între ei un unghi φ, cu $0 < \varphi < \pi$, atunci produsul lor vectorial se defineşte prin următoarele trei condiţii:

   (i) lungimea vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\varphi$;

   (ii) vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular pe ambii vectori **a** şi **b**;

   (iii) tripletul de vectori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ este direct.

Proprietăţi

1. Prima proprietate exprimă un fapt de natură geometrică: dacă vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, atunci norma vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe segmentele OA şi OB, unde O este un punct arbitrar din spaţiu, iar $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. De asemenea, este clar că aria triunghiului OAB este egală cu jumătate din norma produsului vectorial a vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

2. Produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \tag{1.10.1}$$

3. Produsul vectorial este compatibil cu înmulţirea cu scalari a vectorilor:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \tag{1.10.2}$$
$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \tag{1.10.3}$$

4. Produsul vectorial este distributiv faţă de adunarea vectorilor:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \tag{1.10.4}$$
$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \tag{1.10.5}$$

Observaţie. Produsul vectorial are o serie de similarităţi cu produsul scalar al vectorilor. Sunt, totuşi, o serie de diferenţe care trebuie ţinute minte:

1) Produsul vectorial *nu* este comutativ – ordinea factorilor contează.

2) Produsul vectorial a doi vectori este un vector, nu un scalar. Ca urmare, de data aceasta are sens să considerăm produse de mai mulţi factori. Totuşi, aşa cum vom vedea ceva mai târziu, produsul vectorial *nu* este asociativ.

1.10.2 Expresia produsului vectorial în funcţie de componentele factorilor

Considerăm un sistem de coordonate ortogonal $Oxyz$ şi fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată de coordonate. Este uşor de verificat că vectorii bazei se înmulţesc vectorial după regulile descrise în următoarea tabelă:

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Fie, acum, **a** şi **b** doi vectori daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Utilizând distributivitatea produsului vectorial în raport cu adunarea vectorilor, obţinem

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})(X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}) = (YZ' - ZY')\mathbf{i} + \\ + (ZX' - XZ')\mathbf{j} + (XY' - YX')\mathbf{k},\end{aligned}$$

deci

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (YZ' - ZY')\mathbf{i} + (ZX' - XZ')\mathbf{j} + (XY' - YX')\mathbf{k}. \tag{1.10.6}$$

Ţinând cont de regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul al treilea după prima linie, formula precedentă se mai poate scrie sub următoarea formă, mult mai uşor de reţinut:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}. \tag{1.10.7}$$

Observaţie. Din expresia analitică (1.10.7) rezultă imediat formule analitice pentru aria paralelogramului şi aria triunghiului determinate de cei doi vectori. Astfel, din formula menţionată rezultă imediat că

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix},$$

adică

$$Aria_{par}\equiv\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\sqrt{\begin{vmatrix}Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix}^2}. \tag{1.10.8}$$

Prin urmare, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este

$$Aria_{triun}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix}^2}. \tag{1.10.9}$$

Să considerăm acum cazul în care avem trei puncte oarecare din planul xOy:

$$A(x_A,y_A,0),B(x_B,y_B,0),C(x_C,y_C,0)$$

. Ei determină doi vectori: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$. Este clar că $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x_B-x_A,y_B-y_A,0)$ şi $\mathbf{b}=\mathbf{b}(x_C-x_A,y_B-y_A,0)$. Prin urmare,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\\ x_C-x_A & y_C-y_A & 0\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix}x_B-x_A & y_B-y_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\pm\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}.$$

Avem, aşadar,

> Aria triunghiului ABC din planul xOy este dată de formula
>
> $$Aria_{ABC}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}. \tag{1.10.10}$$

Fireşte, semnul se alege astfel încît membrul drept să fie pozitiv. Este, de asemenea, de remarcat, că formula de mai sus ne dă un criteriu de coliniaritate pentru punctele A,B,C. Cum ele sunt coliniare exact atunci când aria triunghiului determinat de ele este zero, adică atunci când triunghiul este degenerat, înseamnă că cele trei puncte sunt coliniare exact atunci când determinantul din membrul drept al ecuaţiei (1.10.10) se anulează.

1.10.3 Dublul produs vectorial

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}. \tag{1.10.11}$$

1.11 Produsul mixt al vectorilor

1.11.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori. Se numeşte *produs mixt* al celor trei vectori numărul

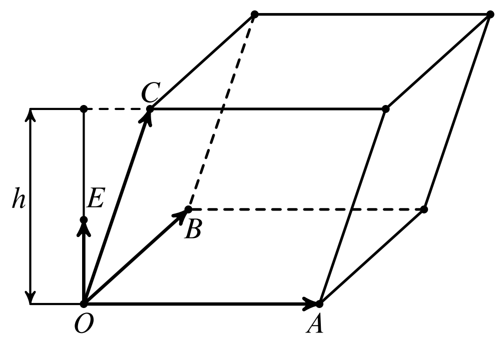
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \tag{1.11.1}$$

Produsul mixt al vectorilor are o interpretare geometrică remarcabilă, exprimată de următoarea teoremă.

Teorema 1.10. *Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori necoplanari. Îi ataşam unui punct O şi fie A, B, C punctele pentru care*

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Atunci produsul mixt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA, OB, OC, luat cu semnul plus dacă tripletul $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este direct şi cu semnul minus dacă tripletul este stâng.



Consecinţa 1.6. *Volumul tetraedrului $OABC$ este dat de formula*

$$Vol_{OABC} = \pm\frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Consecinţa 1.7. *Un sistem de trei vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ şi stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.*

Consecinţa 1.8. *Un sistem* ortonormat *de trei vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ şi stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$.*

Produsul mixt al vectorilor ne permite, de asemenea, să stabilim un criteriu de coplanaritate a trei vectori, cuprins în teorema care urmează.

Teorema 1.11. *Pentru ca trei vectori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{c}$ *să fie coplanari este necesar şi suficient ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0. \tag{1.11.2}$$

1.11.2 Expresia produsului mixt în coordonate

Presupunem că, relativ la o bază ortonormată, vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a}(X_1, Y_1, Z_1), \ \mathbf{b}(X_2, Y_2, Z_2), \ \mathbf{c}(X_3, Y_3, Z_3). \tag{1.11.3}$$

Utilizând expresiile în coordonate pentru produsul vectorial şi produsul mixt, obţinem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) X_3 + (X_2 Z_1 - X_1 Z_2) Y_3 + \\ + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3 = X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_3 - X_1 Y_3 Z_2 - \\ - X_3 Y_2 Z_1 - X_2 Y_1 Z_3.\end{aligned}$$

Este uşor de constatat că această relaţie se poate rescrie cu uşurinţă cu ajutorul unui determinant de ordinul al treilea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3. \end{vmatrix} \tag{1.11.4}$$

Din proprietăţile determinanţilor se obţin imediat următoarele relaţii între produsele mixte a trei vectori, luaţi în diferite ordini:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Prin urmare:

- dacă facem o permutare circulară a factorilor într-un produs mixt, valoarea produsului nu se schimbă;
- dacă se schimbă ordinea a doi factori (nu neapărat vecini), *semnul* produsului se schimbă (dar valoarea absolută nu!).

Se constată, de asemenea, fie din definiţie, fie din proprietăţile determinanţilor, că *dacă doi factori dintr-un produs mixt sunt liniar dependenţi, produsul se anulează.* În particular, din (1.11.4) rezultă că putem rescrie condiţia necesară şi suficientă (1.11.2) pentru ca vectorii (1.11.3) să fie coplanari sub forma

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.11.5}$$