Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\in(0,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ care este convergentă

$\boxed{T}$ (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1°. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ este divergentă

2°. $\exists \lim_{n\to\infty}\left(u_n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1}\right) = K\in\overline{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K>0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K<0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem:

Din $2^\circ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$:

$$K - \varepsilon \overset{(i)}{<} u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \overset{(ii)}{<} K + \varepsilon$$

i) Alegem $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} > \frac{K}{2}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \frac{K}{2} \cdot x_{n+1} < u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \frac{K}{2}(x_{n_0+1} + \ldots + x_n) < (u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1}) + (u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} -$

$- u_{n_0+2} \cdot x_{n_0+2}) + \ldots + (u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1})$

$\Rightarrow \frac{K}{2}(x_{n_0+1} + \ldots + x_n) < u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n+1} \cdot x_{n+1} < u_{n_0} \cdot x_{n_0}$

$\Rightarrow S_n = x_{n_0+1} + \ldots + x_n$ este mărginit superior $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} x_n$ convergentă

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

ii) Alegem $\varepsilon = -K > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} < 0, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow u_n \cdot x_n < u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} < u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} <$

$< \ldots < u_n \cdot x_n \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} \leq u_n \cdot x_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \geq (u_{n_0} \cdot x_{n_0}) \cdot \frac{1}{u_n}, \forall n \geq n_0.$

Din $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{(u_{n_0} \cdot x_{n_0})}_{\neq 0} \cdot \frac{1}{u_n}$ divergentă

$\overset{c.c.}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ divergentă.

Prop (consecințe ale criteriului lui Kummer)

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi. Au loc:

1° (criteriul raportului al lui d'Alembert)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $D > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $D < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

2° (criteriul lui Raabe-Duhamel)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $R > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $R < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

3° (criteriul lui Bertrand)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $B > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $B < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem: În criteriul lui Kummer facem următoarele particularizări:

1° $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ divergentă și $K = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = D - 1$

$D - 1 > 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

$D - 1 < 0 \Rightarrow \sum x_n$ divergentă

2° $u_n = n, \forall n \geq 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă și

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1 = R - 1$$

3°. $u_n = n \cdot \ln n, \forall n \geq 2$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ divergentă (reveniți!) și

$$K = \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot \ln n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\cdot \ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\ln n \cdot\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right] + \underbrace{(n+1)\cdot\left(\ln n - \ln(n+1)\right)}_{\text{are limita } -1}\right\} = B-1$$

<u>Prop</u> (criteriul radical al lui Cauchy)

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi și cu proprietatea că $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Dacă $c < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $c > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0 : \quad c - \varepsilon \overset{(ii)}{<} \sqrt[n]{x_n} \overset{(i)}{<} c + \varepsilon$$

i) Fie $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$, notăm $\alpha = c + \varepsilon = c + \frac{1-c}{2} = \frac{c+1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < \alpha < 1$ și $\sqrt[n]{x_n} < \alpha, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \alpha^n, \forall n \geq n_0$.

Din $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă.

ii) Fie $\varepsilon = \frac{c-1}{2} > 0$, notăm $\beta = c - \varepsilon = c - \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} > 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{x_n} > \beta > 1, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Obs:

1) Criteriile enunțate nu decid natura seriei în cazul $D=1$, $R=1$, $B=1$, respectiv $C=1$.

2) Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{D}$ (la seminar!)

Ex: Stabiliți natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, $a>0$.

$$x_n = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}; \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)} \cdot \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{a+n+1}{n+1}; \quad D = \lim_{n\to\infty} \frac{a+n+1}{n+1} = 1 \text{ (nu decide)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot a}{n+1} = a$$

Dacă $a>1 \Rightarrow$ serie convergentă,

Dacă $a<1 \Rightarrow$ serie divergentă.

Dacă $a=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \underset{m=n+1}{=} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergentă.

5. Serii alternate

Fie (x_n) un șir de numere reale.

Def: Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este <u>absolut convergentă</u> dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Prop: Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Reciproca afirmației nu este adevărată.

Dem: Din $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$:

$|x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| <$

$< \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă.

Un contraexemplu pentru reciprocă se va da ulterior.

<u>Def:</u> O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numește <u>semiconvergentă</u>.

<u>Def:</u> Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește <u>alternată</u> dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă notăm $a_n = |x_n| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci vom avea $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ sau $x_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Notație: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{T}}$ (criteriul lui Leibnitz)

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere pozitive cu $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ atunci seria alternată $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

Dem: (a_n) este descrescător.

Fie $\varepsilon > 0$ și $n, p \in \mathbb{N}$.

$|(-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p} \cdot a_{n+p}| =$

$$= \left| \underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p}}_{\geq 0} \right| =$$

$$= a_{n+1} \underbrace{- a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- a_{n+4} + \dots}_{\leq 0} + \underbrace{(-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p}}_{\leq 0} \leq$$

$$\leq a_{n+1} < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad \text{căci} \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă

<u>Ex</u>: Natura <u>seriei armonice alternate</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0 \overset{L.}{\Longrightarrow}$ seria este convergentă

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ seria este semiconvergentă.

$\boxed{T}$ (dependența sumei de ordinea de însumare)

1° (Riemann) Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria nou obținută să aibă ca sumă orice număr $S \in \overline{\mathbb{R}}$.

2° (Cauchy) La o serie absolut convergentă suma sa nu depinde de ordinea de însumare a termenilor.