5. Extreme locale pentru funcții reale de variabilă vectorială

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x^0 \in A$.

Spunem că:

a) x^0 este punct de minim (local) al lui f dacă

$$\exists\, r > 0 \text{ a.î. } f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \cap A$$

b) x^0 este punct de maxim (local) al lui f dacă

$$\exists\, r > 0 \text{ a.î. } f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \cap A.$$

c) x^0 este punct de extrem (local) al lui f dacă el este punct de minim sau maxim local.

$\boxed{T}$ (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x^0 \in \operatorname{int} A$

ii) f este derivabilă parțial în x^0.

iii) x^0 este punct de extrem

atunci $\nabla f(x^0) = 0_m$.

Dem: Considerăm că x^0 este punct de minim local $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \subseteq A$,

deoarece $x^0 \in \operatorname{int} A$.

Fie $H(x^0, l) = [x_1^0 - l, x_1^0 + l] \times \ldots \times [x_m^0 - l, x_m^0 + l]$

hipercubul de centru x^0 și latură $2l$.

Evident $\exists\, l > 0$ a.î. $H(x^0, l) \subseteq B(x^0, r)$.

Fie $i \in \{1, \dots, m\}$ fixat şi funcţia $\varphi : (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \to \mathbb{R}$,

$\varphi(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$.

Funcţia φ este derivabilă în $t = x_i^0$ şi $\varphi'(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$.

Avem $\varphi(x_i^0) = f(x^0) \leq \varphi(t)$, $\forall t \in (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^0$ este punct de minim al lui $\varphi \xRightarrow{T.F.} \varphi'(x_i^0) = 0$, deci

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$.

<u>Def</u>: Cu notaţiile din teorema anterioară, un punct $x^0 \in \operatorname{int} A$ cu proprietatea că $\nabla f(x^0) = 0_m$ se numeşte <u>punct critic</u> al lui f.

<u>Obs</u>: Orice punct de extrem local din interiorul domeniului lui f este punct critic al lui f. Reciproca nu este adevărată.

<u>Ex</u>: a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^4$.

Evident $(0,0)$ este punct de extrem, $f(0,0) \leq f(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dar $(0,0)$ este şi punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$.

$(0,0)$ este punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$, dar $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

$\forall r > 0$, $(t,0), (0,t) \in B(0_2, r)$ pentru $t \neq 0$ suficient de mic.

$f(0,0) = 0 < t^2 = f(t,0)$ şi $f(0,0) = 0 > -t^2 = f(0,t)$.

Def: Punctele critice ale unei funcții care nu sunt puncte de extrem local se numesc <u>puncte șa</u>.

Obs: Studiul punctelor de extrem local se poate face cu ajutorul diferențialei de ordinul 2.

Def: Fie $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ o matrice pătratică cu coeficienți reali.

a) Funcția $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\phi(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$, $\forall u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

se numește <u>formă pătratică</u> asociată matricei C.

b) Spunem că ϕ este <u>pozitiv definită</u> dacă

$$\phi(u) > 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$$

c) Spunem că ϕ este <u>negativ definită</u> dacă

$$\phi(u) < 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$$

d) Spunem că ϕ este <u>indefinită</u> dacă

$$\exists u, v \in \mathbb{R}^m \text{ a.î. } \phi(u) < 0 < \phi(v).$$

Obs: a) $\phi(0_m) = 0$

b) Diferențiala de ordinul 2 a unei funcții f într-un punct x^0 este o formă pătratică asociată matricei hessiene, $H(f)(x^0)$.

Ex: Natura următoarelor forme pătratice:

a) $\phi(u_1, u_2) = -(u_1)^2 - (u_2)^2$; b) $\phi(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$; c) $\phi(u_1, u_2) = (u_1 + u_2)^2$.

Prop (criteriul lui Sylvester)

Fie $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată unei matrici simetrice $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ și $\Delta_K = \det (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,K} \\ j=\overline{1,K}}}$, $K = \overline{1,m}$ (numiți determinanții lui Sylvester). Au loc afirmațiile:

1°. ϕ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_K > 0$, $\forall K = \overline{1,m}$

2°. ϕ este negativ definită $\Leftrightarrow (-1)^K \cdot \Delta_K > 0$, $\forall K = \overline{1,m}$

Obs: $\Delta_1 = c_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$, $\ldots$, $\Delta_m = \det(C)$.

$\boxed{T}$ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 într-un punct $x^0 \in \operatorname{int} A$ și $\nabla f(x^0) = 0_m$. Au loc afirmațiile:

1°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este pozitiv definită $\Rightarrow x^0$ punct de minim local

2°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este negativ definită $\Rightarrow x^0$ punct de maxim local

3°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este indefinită $\Rightarrow x^0$ punct ș.a.

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + x_1 \cdot x_2 + (x_2)^2 + a \cdot x_1 + b \cdot x_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ constante date.

I). Căutăm punctele critice:

$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 + a, 2x_2 + x_1 + b) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + a = 0 \\ 2x_2 + x_1 + b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3} \right)$

II) Semnul diferențialei de ordinul 2:

$$H(f)(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = 3 > 0$$

$d^2 f(x_1^0, x_2^0)(u_1, u_2) = 2\cdot(u_1)^2 + 2\cdot(u_2)^2 + 2u_1u_2$ pozitiv definită

$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ punct de minim local.

$\inf f(\mathbb{R}^2) = -\frac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)$, $\sup f(\mathbb{R}^2) = +\infty$

Ex: Considerăm problema determinării distanței de la un punct dat la un plan dat în spațiul $\mathbb{R}^3$.

Fie $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ punctul dat și

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = c\}$ un plan dat,

$b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$ date.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in S$: $\|x - a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3^2)}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2$

De minimizat $f|_S \Rightarrow$ problemă de extrem condiționat.

În continuare considerăm numerele naturale $m > p \geq 1$.

Def: Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $F = (F_1, \dots, F_p): A \to \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială, notăm

$$S = \{x \in A \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\} \qquad (1)$$

numită <u>mulțimea restricțiilor</u>.

Un punct $x^0 \in S$ se numește <u>punct de extrem condiționat</u> al lui f relativ la S dacă x^0 este punct de extrem local al funcției $f|_S$.

$\boxed{T}$ (metoda multiplicatorilor lui Lagrange)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ și $F = (F_1, \dots, F_p) : A \to \mathbb{R}^p$ funcții cu proprietatea că $f, F_1, \dots, F_p$ sunt toate de clasă C^1 pe A, $x^0 \in S$ un punct de extrem condiționat al lui f relativ la mulțimea S dată de (1) și rang $J(F)(x^0) = p$. Atunci funcția $L : A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin

$$L(x, y) = f(x) + y \cdot F(x) \quad , \quad \forall x \in A, \ \forall y \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

admite un punct critic de forma (x^0, λ), cu $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Cu alte cuvinte

$$\nabla L(x^0, \lambda) = 0_{m+p} \tag{3}$$

<u>Obs:</u> a) Teorema dă o condiție necesară ca x^0 să fie punct de extrem condiționat.

b). Funcția L dată de (2) se numește <u>funcția lui Lagrange</u> asociată funcțiilor f și F. Ea se mai scrie:

$$L(x, y) = f(x) + y_1 \cdot F_1(x) + \dots + y_p \cdot F_p(x) \quad , \quad \forall x \in A, \ \forall y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$$

c) Numerele $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \lambda \in \mathbb{R}^p$ a căror existență este garantată de teoremă se numesc <u>multiplicatorii lui Lagrange.</u>

d) Relația (3) se poate scrie

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0, \lambda) = 0 \ , \ \forall i = \overline{1,m} \ , \quad \frac{\partial L}{\partial y_j}(x^0, \lambda) = 0, \ \forall j = \overline{1,p}$$

al doilea set de egalități fiind echivalent cu $F_j(x^0) = 0$, $j = \overline{1,p}$, ceea ce este evident.

<u>Ex:</u> Revenim la exemplul anterior.

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2$, $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x_1,x_2,x_3)=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3-c$, $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$, $c\in\mathbb{R}$

$S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x_1,x_2,x_3)=0\}$.

$m=3$, $p=1$

$J(F)(x_1,x_2,x_3)=(b_1,b_2,b_3) \Rightarrow \text{rang}\, J(F)=1$ dacă $(b_1,b_2,b_3)\neq 0_3$.

Introducem funcția lui Lagrange:

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda)=(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2+\lambda(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3-c)$$

Formăm sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda)=0\\ F(x_1,x_2,x_3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x_1-a_1)+\lambda b_1=0 & /\cdot b_1\\ 2(x_2-a_2)+\lambda b_2=0 & /\cdot b_2\\ 2(x_3-a_3)+\lambda b_3=0 & /\cdot b_3\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3-c=0\end{cases}$$

cu necunoscutele x_1,x_2,x_3,λ.

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2\cdot(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+\lambda\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{2\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-c)}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

$$x_1-a_1=-\frac{\lambda b_1}{2},\quad x_2-a_2=-\frac{\lambda\cdot b_2}{2},\quad x_3-a_3=-\frac{\lambda\cdot b_3}{2}$$

ce permite determinarea lui (x_1,x_2,x_3) punct de extrem condiționat al lui f relativ la S.

$$\Rightarrow \min f(S) = \left(-\frac{\lambda b_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - c)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Distanța căutată va fi egală cu

$$\frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - c|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$