$$g(a)=g(b)=\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b) \text{ a.î. } g'(x_0)=0 \\ g'(x_0)=f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>Obs</u> (interpretarea geometrică a teoremei de medie)

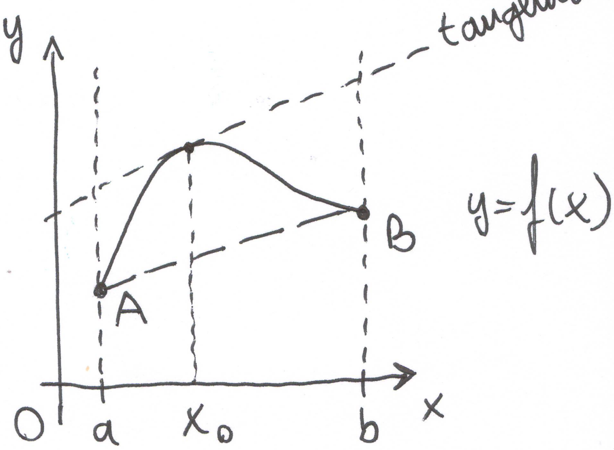
Există cel puțin o tangentă la graficul funcției paralelă cu segmentul de dreaptă determinat de extremitățile graficului.

- ecuația tangentei:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

- ecuația dreptei AB:

$A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1\end{vmatrix}=0 \iff y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x+\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}$$

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty\le a<b\le+\infty$

<u>Def:</u> Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in(a,b)$.

1) Dacă $\exists\,\delta>0$ a.î. f este derivabilă pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq$ $\subseteq(a,b)$, iar funcția $f':(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0, atunci spunem că <u>f este de două ori</u>

<u>derivabilă</u> în punctul x_0. Notăm $(f')'(x_0) = f''(x_0)$ numită <u>derivata de ordinul 2</u> în punctul x_0.

2) Succesiv putem construi <u>derivata de ordinul n</u> a funcției f în punctul x_0, notată $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Prin convenție $f^{(0)} = f$.

3) Spunem că f este <u>indefinit derivabilă în x_0</u> dacă există $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Spunem că f este <u>indefinit derivabilă pe (a,b)</u> dacă f este indefinit derivabilă în $\forall x \in (a,b)$.

<u>Prop</u> (formula lui Leibnitz)

Dacă $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sunt funcții indefinit derivabile pe (a,b) atunci are loc formula de derivare:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Def</u>: Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in (a,b)$. Polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

se numește <u>polinomul lui Taylor de grad n</u> asociat funcției f în punctul x_0.

<u>Obs</u>: Derivatele de ordin superior (până la ordinul n) ale polinomului T_n și ale funcției f în punctul x_0 coincid.

Adică
$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad \forall k = \overline{0,n}$$

Dem: Evident $T_n(x_0) = f(x_0)$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n'(x_0) = f'(x_0), \text{ ș.a.m.d.}$$

<u>Ex</u>: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(k)}(0) = 1, \forall k = \overline{0,n}, \quad T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ce legătură există între polinom și funcție când $n \to \infty$?

4. <u>Serii Taylor</u> și <u>serii de puteri</u>

<u>Def</u>: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in (a,b)$.

a) Seria de numere
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
se numește <u>seria Taylor</u> asociată funcției f în punctul x_0.

b) Spunem că <u>f este dezvoltabilă în serie Taylor în punctul x_0</u> pe mulțimea $I \subseteq (a,b)$ dacă seria (1) este convergentă și are suma $f(x)$, $\forall x \in I$

Obs: Cu notațiile din definiția anterioară, f este dezvoltabilă în serie Taylor pe mulțimea I $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-T_n(x)\right)=0,\ \forall x\in I$$

Ex: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $x_0=0$.

Seria Taylor asociată este $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$

Este adevărat că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x-1-\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^2}{2!}-\dots-\dfrac{x^n}{n!}\right)=0$, $x\in\mathbb{R}$?

Obs: Funcțiile elementare sunt dezvoltabile în serie Taylor, dar nu pe întreg domeniul lor de definiție, ci doar pentru acele valori ale lui x pentru care seria Taylor asociată este convergentă.

Ex: Studiem convergența seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$

Considerăm s.t.p. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}$ și aplicăm criteriul raportului

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|x|}=+\infty>1\Rightarrow \text{seria}$$

inițială este absolut convergentă, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Vom scrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Caz particular: $x=1\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$.

Studiul convergenței seriilor Taylor poate fi făcut într-un cadru mai general.

Def: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale și $x_0, x \in \mathbb{R}$.

a) Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)^2 + \dots \qquad (2)$$

se numește <u>serie de puteri centrată în x_0</u> (de variabilă x).

b) Mulțimea $I = \{x\in\mathbb{R} \mid \text{seria (2) este convergentă}\}$ se numește <u>mulțimea de convergență</u> a seriei de puteri.

<u>Obs:</u> 1) Orice serie Taylor este o serie de puteri.

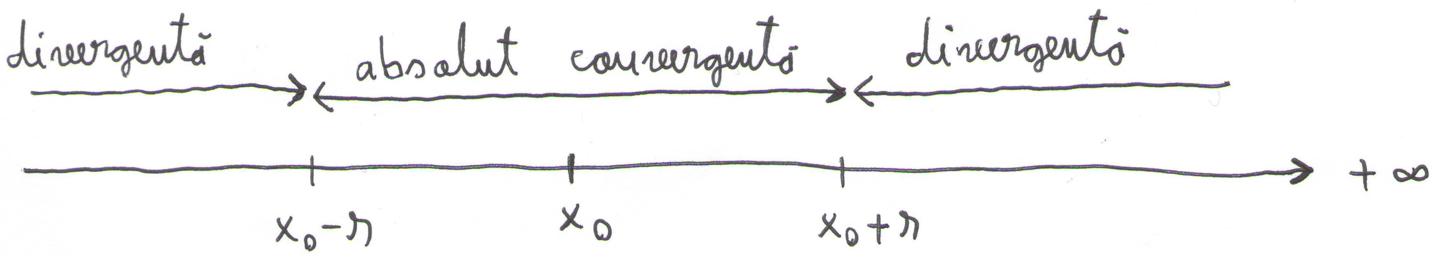
2) Mulțimea de convergență a unei serii de puteri este nevidă ($x_0 \in I$).

<u>Ex:</u> Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n$ are $I = \mathbb{R}$.

$\boxed{T}$ (caracterizarea mulțimii de convergență a unei serii de puteri)

Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ notează mulțimea de convergență a unei serii de puteri centrată în x_0 atunci $\exists!\, r\in[0,+\infty]$ astfel încât seria este absolut convergentă $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$ și seria este divergentă $\forall x\in(-\infty, x_0-r)\cup(x_0+r,+\infty)$. În acest caz putem scrie

$$(x_0-r, x_0+r) \subseteq I \subseteq [x_0-r, x_0+r]$$



Obs: 1) Teorema nu precizează natura seriei în punctele $x = x_0 - r$ și $x = x_0 + r$

2) Dacă $r = +\infty$ atunci seria este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$

Def: Numărul $r \in [0, +\infty]$ din teorema anterioară se numește raza de convergență a seriei de puteri.

Prop (calculul razei de convergență)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergență $r \in [0, +\infty]$. Atunci $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, în ipoteza că limita există.

Dem: Studiem convergența s.t.p. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n = |a_n \cdot (x - x_0)^n|$.

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{l}{|x - x_0|}, \quad l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

serie convergentă dacă $D > 1 \iff l > |x - x_0| \iff x \in (x_0 - l, x_0 + l)$

serie divergentă dacă $D < 1 \iff l < |x - x_0| \iff x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - l, x_0 + l]$.

$\Rightarrow r = l$.

Ex: Mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

$x_0 = 0$, $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subseteq I \subseteq [-1, 1]$.

Deoarece $-1, 1 \notin I \Rightarrow I = (-1, 1)$.

5. Operații cu serii de puteri

Pentru simplitate vom considera doar cazul seriilor de puteri centrate în origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

<u>Prop</u> (substituția într-o serie de puteri)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și suma $S(x)$, iar $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea $\varphi([\alpha,\beta])\subseteq(-R,R)$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi(t))^n$ este convergentă și are suma $S(\varphi(t))$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$.

<u>Ex</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\forall x\in(-1,1)$

a) $x=-t$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n = \frac{1}{1+t}$, $\forall t\in(-1,1)$

b) $x=-t^2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$, $\forall t\in(-1,1)$

<u>Prop</u> (derivarea și integrarea seriilor de puteri)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și suma $S(x)$. Atunci

1°. Seria poate fi derivată termen cu termen și are loc

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}, \quad \forall x\in(-R,R)$$

2°. Seria poate fi integrată termen cu termen și are loc

$$\int_0^t S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot t^{n+1}, \quad \forall t\in(-R,R)$$

Mai mult, seriile obținute au aceeași rază de convergență R, dar nu neapărat aceeași mulțime de convergență.

<u>Ex</u>: a) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$, $\forall x\in(-1,1)$

$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t (-1)^n\cdot x^n\,dx$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot t^n, \quad \forall t \in (-1, 1]$$

deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă.

$$\Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{(suma seriei armonice alternate)}$$

b) $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n \cdot x^{2n}\, dx$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot t^{2n+1}, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ este convergentă

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

este o serie de puteri, având

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$