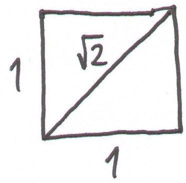
ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE

1. Numere reale

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}$



, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\boxed{T}$ Fie $p,q\in\mathbb{Z}^*$ numere prime între ele. Dacă numărul rațional $\frac{p}{q}$ este rădăcină a ecuației polinomiale cu coeficienți întregi

$$a_m x^m+\dots+a_1x+a_0=0,$$

$$a_0,a_1,\dots,a_m\in\mathbb{Z},\ a_0\neq 0,\ a_m\neq 0\ (m\in\mathbb{N}^*)$$

atunci 1°. p divide a_0

2°. q divide a_m

Dem: Arătăm 1°, analog 2°.

$$a_m\left(\frac{p}{q}\right)^m+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0 \Rightarrow a_mp^m+\dots+a_1pq^{m-1}+a_0\cdot q^m=0$$

$$\Rightarrow a_0\cdot q^m=-p\cdot\left(a_m\cdot p^{m-1}+\dots+a_1\cdot q^{m-1}\right) \Rightarrow p \text{ divide } a_0\cdot q^m \Rightarrow$$

$\Rightarrow p$ divide a_0.

Ex: a) $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Arătăm că ecuația $x^2-2=0$ nu are rădăcini raționale, dar $\alpha=\sqrt{2}$ este rădăcină $\Rightarrow \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Presupunem prin absurd că $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ este rădăcină a ec.

$\Rightarrow p/2$ și $q/1$ $\Rightarrow \frac{p}{q}\in\{-2,-1,1,2\}$ absurd!

b) $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$.

$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^3 = 3+\sqrt{2} \Rightarrow (\alpha^3-3)^2 = 2$,

adică α este rădăcina ec. polinomiale $x^6-6x^3+7=0$

Dacă $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină așa $\Rightarrow p/7$ și $q/1$

$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-7,-1,1,7\}$ absurd!

c) $\pi, e \notin \mathbb{Q}$

<u>Def</u>: Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este acea mulțime de numere care satisface <u>axioma infimumului</u> și, respectiv, axioma <u>supremumului</u>.

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

a) $MIN(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \leq a\}$ se numește <u>mulțimea minoranților</u> lui A

b) $MAJ(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \geq a\}$ se numește <u>mulțimea majoranților</u> lui A

c) A se numește <u>mărginită inferior</u> dacă $MIN(A) \neq \emptyset$

d) A se numește <u>mărginită superior</u> dacă $MAJ(A) \neq \emptyset$

e) A se numește <u>mărginită</u> dacă c) și d) au loc simultan.

<u>Axioma infimumului</u>: Orice submulțime nevidă și mărginită inferior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mare minorant, numit <u>marginea inferioară</u> (<u>infimum</u>) a lui A, notat inf A.

<u>Axioma supremumului</u>: Orice submulțime nevidă și mărginită superior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mic majorant, numit <u>marginea superioară</u> (<u>supremum</u>) a lui A, notat sup A.

Ex: a) Mulțimea $\mathbb{Q}$ nu satisface axioma infimumului sau a supremumului

$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}\subseteq\mathbb{Q}$, $A=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$

$MIN(A)=(-\infty,-\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$; $MAJ(A)=(\sqrt{2},+\infty)\cap\mathbb{Q}$

$\inf A$, $\sup A$?

b) $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}\subseteq\mathbb{R}$

$MIN(A)=(-\infty,-\sqrt{2}]$; $MAJ(A)=[\sqrt{2},+\infty)$

$\inf A=-\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, $\sup A=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

Obs:

$$m=\inf A \iff \begin{cases} m\in MIN(A) \\ \forall m'\in MIN(A) \text{ avem } m'\leq m \end{cases}$$

$$M=\sup A \iff \begin{cases} M\in MAJ(A) \\ \forall M'\in MAJ(A) \text{ avem } M'\geq M \end{cases}$$

Prop (caracterizarea algebrică a inf. și sup.)

$$m=\inf A \iff \begin{cases} (i)\ \forall x\in A,\ x\geq m \\ (ii)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists y\in A \text{ a.î. } y<m+\varepsilon \end{cases}$$

$$M=\sup A \iff \begin{cases} (i)\ \forall x\in A,\ x\leq M \\ (ii)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists y\in A \text{ a.î. } y>M-\varepsilon \end{cases}$$

Ex: $A=\mathbb{N}$, $\inf\mathbb{N}=0$, $\sup\mathbb{N}$? $\mathbb{N}$ nemărginită.

Def: Considerăm două elemente $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$

$$x + \infty = \infty + x = \infty \; ; \; x - \infty = -\infty + x = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty \; , \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

$\forall x > 0$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$

$\forall x < 0$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}} \overset{not}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ se numește <u>mulțimea extinsă a numerelor reale</u>.

<u>Obs</u>: a) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

b) Următoarele operații nu se definesc:

$$\infty - \infty, \; -\infty + \infty, \; 0 \cdot (\pm\infty), \; (\pm\infty) \cdot 0, \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

<u>Convenție</u>:

a) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită inferior atunci $\inf A = -\infty$.

b) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită superior atunci $\sup A = +\infty$.

c) $\inf \phi = +\infty$, $\sup \phi = -\infty$.

<u>Ex</u>: $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

<u>Def</u>: Numim <u>valoarea absolută</u> (modul) a numărului $x \in \mathbb{R}$, numărul

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Prop: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $a > 0$. Au loc

1°. $|x| \geq 0$

2°. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3°. $|x| = |-x|$

4°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5°. $|x+y| \leq |x| + |y|$

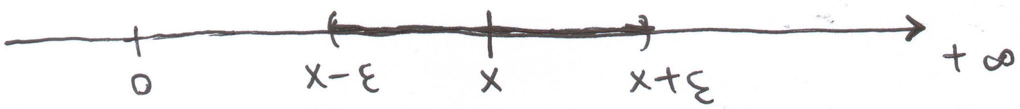
6°. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Un interval de forma

a) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ se numește vecinătate a lui x

b) $(\varepsilon, +\infty)$ — // — vecinătate a lui $+\infty$

c) $(-\infty, -\varepsilon)$ — // — vecinătate a lui $-\infty$



x – centrul vecinătății

ε – raza vecinătății

2. Șiruri de numere reale

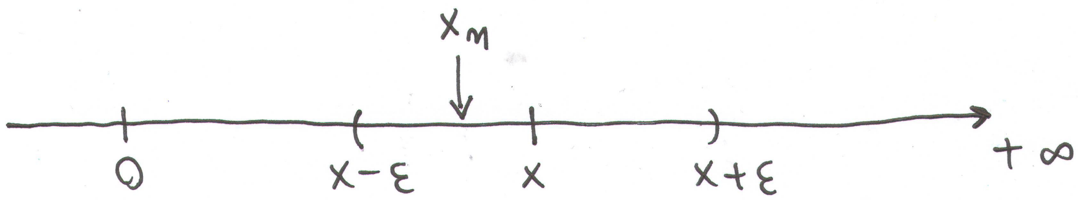
Def: O funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se numește șir de nr. reale.
Dacă $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ atunci șirul se va nota $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Spunem că șirul (x_n) este convergent dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0 : \ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Numărul x cu proprietatea de mai sus este unic și se numește <u>limita</u> șirului (x_n).

<u>Notații</u>: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $x_n \to x \ (n \to \infty)$



$|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

$\iff x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Unicitatea: Dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ și $|x_n - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ arbitrar $\Rightarrow x = y$.

b) Spunem că șirul (x_n) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_0$: $x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < -\varepsilon$)

și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$)

c) Un șir care nu este convergent se numește <u>divergent</u>.

<u>Ex</u>: Justificați cu definiția că $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, $\forall\, a \in (-1, 1)$.

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_0$: $|a^n - 0| < \varepsilon$.

$|a^n| < \varepsilon \iff |a|^n < \varepsilon \iff n \cdot \ln|a| < \ln\varepsilon \iff n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$, $a \neq 0$

Cum alegem $n_0 \in \mathbb{N}$?

$$n_0 = \max\left\{0, \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right] + 1\right\}.$$