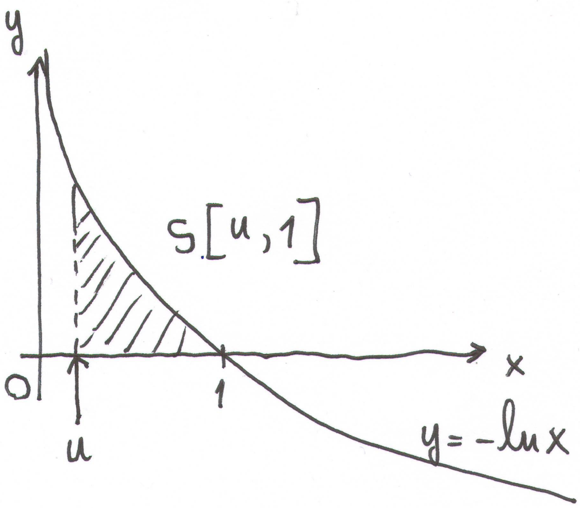
7. Integrale improprii



Ex: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\ln x$

$S(0,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le 1,\ 0\le y\le f(x)\}$

nemărginită, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty$.

$$\text{aria } S(0,1] = \lim_{u\searrow 0} \text{aria } S[u,1] =$$

$$= \lim_{u\searrow 0}\int_u^1 (-\ln x)\,dx = \lim_{u\searrow 0}(x-x\cdot\ln x)\Big|_u^1 = \lim_{u\searrow 0}(1-u+\underbrace{u\cdot\ln u}_{\to 0}) = 1$$

$\Rightarrow S(0,1]$ este nemărginită dar de arie finită.

Obs: Teoria integrării poate fi extinsă și la funcții definite pe intervale necompacte. Astfel de intervale fie nu sunt mărginite, fie nu sunt închise.

$a,b\in\mathbb{R}$

interval compact: $[a,b]$

intervale necompacte:
- tipul I: $[a,b)$, $[a,+\infty)$
- tipul II: $(a,b]$, $(-\infty,b]$
- tipul III: (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$

Def: Dacă $I\subseteq\mathbb{R}$ este un interval, spunem că funcția $f: I\to\mathbb{R}$ este local integrabilă pe I dacă f este integrabilă Riemann pe orice subinterval compact $[u,v]\subseteq I$.

<u>Def</u>: a) Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ şi $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă pe $[a,b)$. Limita

$$\lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\,dx \qquad (1)$$

se numeşte <u>integrala improprie a lui f pe $[a,b)$</u> şi se notează cu $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$.

b) Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ şi $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă pe $(a,b]$. Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

se numeşte <u>integrala improprie a lui f pe $(a,b]$</u> şi se notează cu $\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$.

c) Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ şi $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă pe (a,b). Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^c f(x)\,dx + \lim_{v \nearrow b} \int_c^v f(x)\,dx, \quad c \in (a,b) \qquad (3)$$

se numeşte <u>integrala improprie a lui f pe (a,b)</u> şi se notează cu $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$.

d) O integrală improprie este <u>convergentă</u> dacă limita corespunzătoare există şi este finită.

e) O integrală improprie care nu este convergentă se numește divergentă.

Obs: a) Dacă limita (3) există atunci valoarea sa nu depinde de alegerea punctului intermediar $c \in (a,b)$.

b) Studiul integralelor de tipul (3) se reduce la studiul integralelor de tipul (1) și (2).

c). Studiul integralelor de tipul (2) se reduce la studiul integralelor de tipul (1).

$$\int_{a+0}^{b} f(x)dx = \lim_{u \searrow a} \int_{u}^{b} f(x)dx \overset{v=-u}{\downarrow =} \lim_{v \nearrow -a} \int_{-v}^{b} f(x)dx = \lim_{v \nearrow -a} \int_{b}^{-v} (-f(x))\,dx =$$

$$\underset{x=-t}{\uparrow =} \lim_{v \nearrow -a} \int_{-b}^{v} f(-t)dt = \int_{-b}^{-a-0} f(-t)dt.$$

Ex: a) Calculați $\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p} dx$, $p \in \mathbb{R}$

Caz $p \neq 1$, $\lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^{v} \frac{1}{(b-x)^p} dx = \lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^{v} (b-x)^{-p} dx =$

$$= \lim_{v \nearrow b} \frac{-1}{-p+1} \cdot (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{v} = \lim_{v \nearrow b} \frac{1}{p-1} \cdot \left[\underbrace{(b-v)^{-p+1}} - (b-a)^{-p+1} \right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p} & , \quad p < 1 \\ +\infty & , \quad p > 1 \end{cases}$$

Caz $p = 1$, $\lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^{v} \frac{1}{b-x} dx = \lim\limits_{v \nearrow b} \left(-\ln|b-x| \right) \Big|_a^{v} =$

$$= \lim_{u \nearrow b} \left(-\ln(b-u) + \ln(b-a) \right) = +\infty$$

$$\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx \text{ convergentă} \iff p < 1.$$

b) Calculați $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Caz $p \neq 1$, $\lim_{u \to \infty} \int_a^u \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \Big|_a^u =$

$$= \lim_{u \to \infty} \frac{1}{1-p} \cdot \left(u^{-p+1} - a^{-p+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \cdot a^{1-p}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

Caz $p = 1$,

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^u \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to \infty} \ln|x| \Big|_a^u = +\infty$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ convergentă} \iff p > 1$$

$\boxed{T}$ Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă ce poate fi prelungită prin continuitate la intervalul $[a,b]$, atunci

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \int_a^b f^*(x)\,dx,$$

unde f^* este prelungirea lui f la $[a,b]$.

Dem: f poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = b$ dacă $\exists \lim_{x \nearrow b} f(x) \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f^* : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b) \\ \lim_{x \nearrow b} f(x), & x = b. \end{cases}$$

f^* continuă pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ $F^*(t) = \int_a^t f^*(x)\,dx$, $\forall t \in [a,b]$

este o primitivă a sa.

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)\,dx = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f^*(x)\,dx = \lim_{u \nearrow b} F^*(u) = F^*(b) =$$

$$= F^*(b) - \underbrace{F^*(a)}_{=0} = \int_a^b f^*(x)\,dx.$$

În continuare considerăm cazul funcțiilor cu valori pozitive.

<u>Prop</u>: Dacă $-\infty < a < b \le +\infty$, iar $f : [a,b) \to [0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$, atunci

$$\exists \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)\,dx$$

Dem: Fie $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$, $\forall u \in [a,b)$.

F este derivabilă pe $[a,b)$ și $F'(u) = f(u) \ge 0$ $\Rightarrow$ F crescătoare

$\Rightarrow \exists \lim_{u \nearrow b} F(u) = \sup(F[a,b))$.

<u>Obs</u>: În ipotezele proprietății anterioare avem

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx \text{ este convergentă} \iff \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)\,dx < +\infty.$$

$\boxed{T}$ (criteriul comparației)

Dacă $-\infty < a < b \le +\infty$, iar $f, g : [a,b) \to [0,+\infty)$ sunt funcții pozitive și local integrabile pe $[a,b)$, atunci au loc:

1° Dacă $\exists\, c \in [a,b)$ a.î. $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [c,b)$ atunci

i) Dacă $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă

ii) Dacă $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x)dx$ este divergentă.

2° (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, +\infty]$ atunci

i) Dacă $l < +\infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă

ii) Dacă $l > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ divergentă.

<u>Prop</u>: Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f : [a,b) \to [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$ și $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p < 1$ și $\lambda < +\infty$ $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă

ii) Dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0$ $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergentă.

Dem: Fie $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$, $\forall x \in [a,b)$; $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Leftrightarrow p < 1$

$\lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) \cdot (b-x)^p = \lambda$, deci concluzia rezultă din criteriul comparației sub formă de limită.

<u>Prop</u>: Dacă $a, p \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a, +\infty)$ și $\exists \lim\limits_{x \to \infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p > 1$ și $\lambda < +\infty$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă

ii) Dacă $p \leq 1$ și $\lambda > 0$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă.

Dem: utilizăm $g(x)=\frac{1}{x^p}$, $\forall x\in(0,+\infty)$

<u>Prop</u>: Dacă $a,b,p\in\mathbb{R}$, $f:(a,b]\to[0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(a,b]$ și $\exists \lim\limits_{x\searrow a}(x-a)^p\cdot f(x)=\lambda$, atunci

i) Dacă $p<1$ și $\lambda<+\infty \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)dx$ este convergentă

ii) Dacă $p\geq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)dx$ este divergentă

<u>Prop</u>: Dacă $b,p\in\mathbb{R}$, $f:(-\infty,b]\to[0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(-\infty,b]$ și $\exists \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)^p\cdot f(x)=\lambda$, atunci

i) Dacă $p>1$ și $\lambda<+\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ este convergentă

ii) Dacă $p\leq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ este divergentă.

<u>Ex</u>: Natura integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=-\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}}-\ln(\sin x)\,dx$$

Fie $f:(0,\frac{\pi}{2}]\to[0,+\infty)$, $f(x)=-\ln(\sin x)$

$$\lambda=\lim_{x\searrow 0}x^p\cdot f(x)=\lim_{x\searrow 0}x^p\cdot(-\ln(\sin x))\overset{p=\frac{1}{2}}{=}\lim_{x\searrow 0}\sqrt{x}\cdot(-\ln(\sin x))=$$

$$=\lim_{x\searrow 0}\frac{-\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=\lim_{x\searrow 0}2\sqrt{x}\cdot\cos x\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{\sin x}=0<+\infty,\ p=\frac{1}{2}<1\Rightarrow \text{integrală convergentă.}$$