FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

1. Limită și continuitate

$A \subseteq \mathbb{R}$ nevidă, $x \in A \xmapsto{f} f(x) \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

Def: Spunem că elementul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este

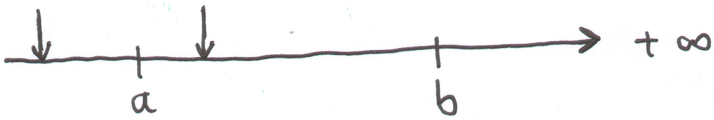
a) punct de acumulare al mulțimii A dacă $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

În acest caz scriem $x_0 \in A'$.

Notație: A' - mulțimea punctelor de acumulare ale lui A.

b) punct izolat al mulțimii A dacă $x_0 \in A \setminus A'$.

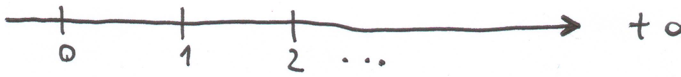
Ex: 1) $A = (a, b)$



$a \in A'$ deoarece șirul $x_n = a + \frac{b-a}{2n} \in A$, $\forall n \geq 1$ și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Analog $b \in A'$, deci $A' = [a, b]$

2) $A = \mathbb{N}$



$x_n = n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, n - punct izolat al mulțimii $\mathbb{N}$ $\Rightarrow A' = \{+\infty\}$

Def: (limita unei funcții într-un punct)

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $x_0 \in A'$. Spunem că l este limita funcției f în punctul x_0 dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Notație: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Ex: Fie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ <u>partea întreagă</u> a lui $x \in \mathbb{R}$

Arătăm că $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\nexists \lim_{x \to p} [x]$

$x_0 = p$, $x_n = p + \frac{1}{n}$,

$y_n = p - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 2 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = p$ și

$\lim_{n \to \infty} [x_n] = \lim_{n \to \infty} p = p \neq p - 1 = \lim_{n \to \infty} (p-1) = \lim_{n \to \infty} [y_n]$

Def: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A \cap A'$. Spunem că

a) <u>f este continuă în punctul x_0</u> dacă $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Putem astfel scrie $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$.

b) <u>f este continuă pe mulțimea A</u> dacă f continuă în $\forall x \in A$

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și discontinuă pe $\mathbb{Z}$.

Def: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y\}$ imaginea funcției. Spunem că

a) f este <u>mărginită inferior</u>, <u>mărginită superior</u>, respectiv <u>mărginită</u> dacă mulțimea $f(A)$ are această proprietate.

b) <u>f își atinge extremele pe A</u> dacă $\exists x_1, x_2 \in A$ a.î.

$f(x_1) = \inf f(A)$ și $f(x_2) = \sup f(A)$.

În acest caz putem scrie

$f(x_1) = \min f(A)$ și $f(x_2) = \max f(A)$ numite <u>extremele</u> funcției.

$\boxed{T}$ (Weierstrass) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. f este mărginită

2°. f își atinge extremele pe $[a,b]$

2. <u>Derivabilitate</u>

<u>Def</u>: Fie funcția $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $x_0\in(a,b)$. Spunem că

a) <u>f are derivată în punctul x_0</u> dacă

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{not}{=} f'(x_0)\in\overline{\mathbb{R}}$$

numită <u>derivata</u> lui f în x_0.

b) <u>f este derivabilă în punctul x_0</u> dacă f are derivată în punctul x_0 și $f'(x_0)\in\mathbb{R}$

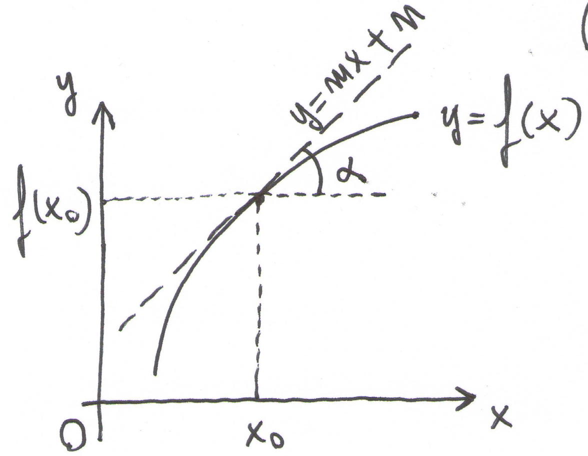
c) <u>f este derivabilă pe (a,b)</u> dacă f este derivabilă în $\forall x\in(a,b)$

<u>Ex</u>: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty, \quad f'(0)\notin\mathbb{R}$$

<u>Obs</u> (interpretarea geometrică a derivatei)

Derivata unei funcții într-un punct reprezintă panta tangentei la graficul funcției în acel punct.



- ecuația dreptei prin (x_0, y_0):

$y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$

$m = tg\,\alpha$ <u>panta dreptei</u>

- ecuația tangentei la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, $m = f'(x_0)$

<u>Prop</u>: Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca nu este adevărată.

Dem: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funcție derivabilă în $x_0\in(a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) + f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot$$

$$\cdot(x-x_0) + f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0.$$

<u>Def</u>: Fie $A\subseteq\mathbb{R}$ mulțime nevidă, $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in A$.

Spunem că:

a) <u>x_0 este punct de minim (local)</u> al lui f dacă

$\exists\,\delta>0$ a.î. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$: $f(x_0)\le f(x)$

b) <u>x_0 este punct de maxim (local)</u> al lui f dacă

$\exists\,\delta>0$ a.î. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$: $f(x_0)\ge f(x)$

c) <u>x_0 este punct de extrem (local)</u> al lui f dacă el este punct de minim sau maxim (local).

$\boxed{T}$ (Fermat). Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x_0 \in (a,b)$

ii) f are derivată în x_0

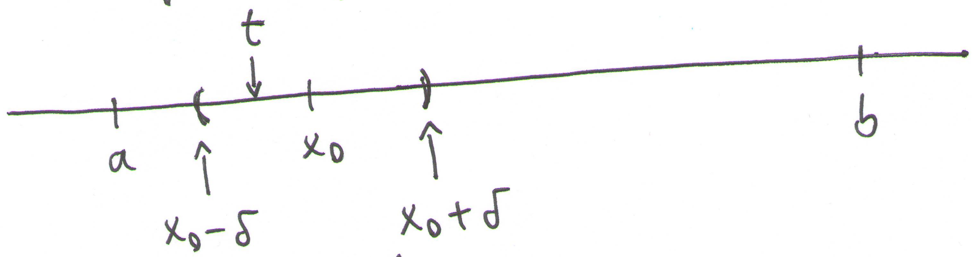
iii) x_0 este punct de extrem

atunci $f'(x_0) = 0$.

Dem: Considerăm x_0 punct de minim local.

$x_0 \in (a,b) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ a.î. $a < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < b$ și

$$f(x_0) \le f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



$$\forall t \in (x_0 - \delta, x_0): \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{t \nearrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \le 0$$

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta): \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{t \searrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \ge 0$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

$\boxed{T}$ (Rolle). Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a,b]$

ii) f derivabilă pe (a,b)

iii) $f(a) = f(b)$

atunci $\exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = 0$.

Dem: f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ își atinge extremele pe $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ a.î. $f(x_1) = \min f[a,b]$ și $f(x_2) = \max f[a,b]$.

x_1, x_2 sunt puncte de extrem (global).

Distingem cazurile:

I. $x_1 \in (a,b) \Rightarrow f'(x_1) = 0$ și alegem $x_0 = x_1$.

II. $x_2 \in (a,b) \Rightarrow f'(x_2) = 0$ și alegem $x_0 = x_2$.

III. $x_1, x_2 \notin (a,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in \{a,b\} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este constantă pe $[a,b] \Rightarrow f'(x_0) = 0$, $\forall\, x_0 \in (a,b)$

$\boxed{T}$ (teorema de medie a lui Lagrange)

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a,b]$

ii) f derivabilă pe (a,b)

atunci $\exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dem: Arătăm că funcția $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$, $\forall\, x \in [a,b]$ satisface ipotezele

teoremei lui Rolle.

g este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b),

$$g(a)=g(b)=\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b) \text{ a.î. } g'(x_0)=0\\ g'(x_0)=f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Obs (interpretarea geometrică a teoremei de medie)

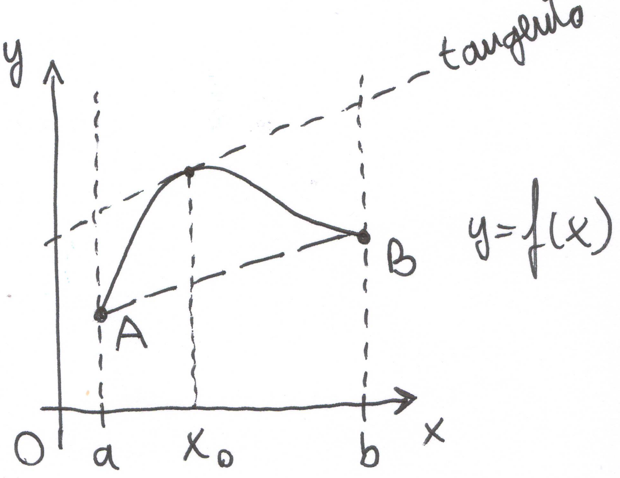
Există cel puțin o tangentă la graficul funcției paralelă cu segmentul de dreaptă determinat de extremitățile graficului.

- ecuația tangentei:

$$y-f(x_0)=\underset{\sim\sim\sim}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

- ecuația dreptei AB:

$A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$



$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\end{vmatrix}=0 \iff y=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\cdot x+\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}$$

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty\le a<b\le+\infty$

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in(a,b)$.

1) Dacă $\exists\,\delta>0$ a.î. f este derivabilă pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$, iar funcția $f':(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0, atunci spunem că <u>f este de două ori</u>