作业答案与答疑

周 晓 聪

中山大学计算机学院

2023年3月

isszxc@mail.sysu.edu.cn

作业点评

课堂练习与讲评

练习2.3

练习* 2.3 证明：若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是命题逻辑公式A的形成序列，则A的所有子公式构成的集合$Sub(A) \subseteq A_1, \cdots, A_n$，特别的，若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是命题逻辑公式$A$的完全形成序列，则$Sub(A) = A_1, \cdots, A_n$。

证明 对公式A的结构做归纳证明：

(1) 归纳基：如果公式A是命题变量p，则$Sub(A) = \{p\}$，而若$A_1, \cdots, A_n$是公式p的形成序列，则必有$A_n = p$，而p的完全形成序列只能是p，因此待证命题成立；

(2) 归纳步：若公式A具有形式$(\neg B)$，则按照归纳假设$Sub(B)$是B的形成序列的子集，且等于B的完全形成序列中公式构成的集合。而$Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B)$，若$A_1, \cdots, A_n$是$A$的形成序列，则必有$A_n = A$，且由于$A = (\neg B)$，按照形成序列的定义，存在$j < n$，使得$A_j = B$，且$A_1, \cdots, A_j$是$B$的形成序列，按归纳假设有$Sub(B) \subseteq \{A_1, \cdots, A_j\}$，从而$Sub(A) \subseteq \{A_1, \cdots, A_n\}$。若$A_1, \cdots, A_n$是$A$的完全形成序列，则有$A_n = A$，且$A_{n-1} = B$，且$A_1, \cdots, A_{n-1}$是$B$的完全形成序列，根据归纳假设这时有$Sub(B) = \{A_1, \cdots, A_{n-1}\}$，从而有$Sub(A) = \{A_1, \cdots, A_n\}$。

若公式A具有形式$(B \vee C)$，则按照归纳假设$Sub(B)$是B的形成序列的子集，且等于B的完全形成序列中公式构成的集合，$Sub(C)$是C的形成序列的子集，且等于C的完全形成序列中公式构成的集合。从而若$A_1, \cdots, A_n$是公式A的形成序列，则按照形成序列的定义，存在$j < n$使得$A_1, \cdots, A_j$是B的形成序列，且存在$k < n$使得$A_1, \cdots, A_k$是C的形成序列，从而按照归纳假设$Sub(B) \subseteq \{A_1, \cdots, A_j\}$且$Sub(C) \subseteq \{A_1, \cdots, A_k\}$，由于$A_n = A$，而$Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B) \cup Sub(C)$，因此有$Sub(A) \subseteq \{A_1, \cdots, A_n\}$。

而若$\{A_1, \cdots, A_n\}$是A的完全形成序列，则根据完全形成序列的定义$A_n = A$，且存在j使得$A_1, \cdots, A_j$是B的完全形成序列，且$A_{j+1}, \cdots, A_{n-1}$是C的完全形成序列，根据归纳假设这时有$Sub(B) = \{A_1, \cdots, A_j\}$且$Sub(C) = \{A_{j+1}, \cdots, A_{n-1}\}$，而$Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B) \cup Sub(C)$，因此也有$Sub(A) = \{A_1, \cdots, A_n\}$。

当公式A具有形式$(B \wedge C)$, $(B \to C)$或$(B \leftrightarrow C)$时，类似可证。 □

- 所有命题逻辑公式构成的集合$\mathcal{F}$是归纳定义的
- 待证命题是：$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathcal{P}(A)$，其中$\mathcal{P}(A)$是：$\forall A_1, \cdots, A_n$，若$A_1, \cdots, A_n$是$A$的形成序列，则

  $$Sub(A) \subseteq \{A_1, \cdots, A_n\};$$
- 以及：$\forall A \in \mathcal{F}\ \mathcal{Q}(A)$，其中$\mathcal{Q}(A)$是：$\forall A_1, \cdots, A_n$，若$A_1, \cdots, A_n$是$A$的完全形成序列，则

  $$Sub(A) = \{A_1, \cdots, A_n\}$$

当A是$(\neg B)$，归纳假设是$P(B)$成立。归纳步要证明$P(B) \to P(A)$，要从$\forall A_1, \cdots, A_n$，若$A_1, \cdots, A_n$是A的形成序列开始，证明$Sub(A) \subseteq \{A_1, \cdots, A_n\}$，证明过程中要用到归纳假设$P(B)$，而不是从$B$的形成序列开始。

练习2.3-学生作业展示

2.3 解

①若A是命题变量P，则A完全形成序列是P，A的形成序列是A…P，有P⊆A…P

②若A是(¬B)，B的完全形成序列是其形成序列的子集

设B的完全形成序列为$B_1 \cdots B_m$ ($B_m=B$) 则A的一为 $B_1 \cdots B_m A$

对任一A的完成序列 $A_1 \cdots A_n$ ($A_n=A$) ∵ $A_n=A=(\neg B)$ ∴ $\exists j$, $1 \le j \le n$, 使 $A_j=B$

则 $A_1 \cdots A_j$ 是B一个形成序列，∴ $B_1 \cdots B_m \subseteq A_1 \cdots A_j$

故有 $B_1 \cdots B_m A \subseteq A_1 \cdots A_j \cdots A_n$

即A的完全形成序列是其形成序列子集

这位同学先证明A的完成形成序列是A的任意形成序列的子集，这个思路挺好！只是证明细节还需要完善。

对任意A，若$A_1,\cdots,A_n$是A的完全形成序列，则对A的任意形成序列$A'_1,\cdots,A'_m$，都有$\{A_1,\cdots,A_n\} \subseteq \{A'_1,\cdots,A'_m\}$

根据形成序列的定义有：若$A_1,\cdots,A_n$是A_n的形成序列，对任意$1 \le k \le n$，$A_1,\cdots,A_k$是A_k的形成序列

当A是$(\neg B)$时应该这样证明：若$A_1,\cdots,A_n$是A的完全形成序列，$A'_1,\cdots,A'_m$是A的任意形成序列，则根据形成序列的定义有$A'_m = A$且存在$k < m$使得$B = A'_k$，且$A'_1,\cdots,A'_k$是B的形成序列。而根据完成形成序列的定义A_{n-1}是B，且$A_1,\cdots,A_{n-1}$是B的完全形成序列，根据归纳假设有$\{A_1,\cdots,A_{n-1}\} \subseteq \{A'_1,\cdots,A'_k\}$，从而有$\{A_1,\cdots,A_n = A'_m\} \subseteq \{A'_1,\cdots,A'_k\cdots,A'_m\}$

练习2.4

练习* 2.4 记命题逻辑公式A出现的命题变量数为$\#var(A)$，同一个命题变量的多次出现要分别计数。记公式A出现的二元逻辑运算符（即$\wedge, \vee, \rightarrow$或$\leftrightarrow$）的个数为$\#bop(A)$，同一个逻辑运算符的多次出现也要分别计数。请给出函数$\#var(A)$和$\#bop(A)$的归纳定义，并证明$\#var(A) = \#bop(A)+1$。

解答：1. 函数$\#var(A)$可归纳定义为：

(1) 归纳基：若A是命题变量p，则$\#var(A) = 1$；

(2) 归纳步：若A具有形式$(\neg B)$，则$\#var(A) = \#var(B)$；

若A具有形式$(B \wedge C)$或$(B \vee C)$或$(B \rightarrow C)$或$(B \leftrightarrow C)$，则$\#var(A) = \#var(B) + \#var(C)$。

2. 函数$\#bop(A)$可归纳定义为：

(1) 归纳基：若A是命题变量p，则$\#bop(A) = 0$；

(2) 归纳步：若A具有形式$(\neg B)$，则$\#bop(A) = \#bop(B)$（注意#不计算否定运算符的个数）；

若A具有形式$(B \wedge C)$或$(B \vee C)$或$(B \rightarrow C)$或$(B \leftrightarrow C)$，则$\#bop(A) = \#bop(B) + \#bop(C) + 1$。

3. 针对A的结构归纳证明$\#var(A) = \#bop(A) + 1$：

(1) 归纳基：若A是命题变量p，则$\#var(A) = 1$，而$\#bop(A) = 0$，因此$\#var(A) = \#bop(A) + 1$；

(2) 归纳步：若A具有形式$(\neg B)$，则按照归纳假设$\#var(B) = \#bop(B) + 1$，而$\#var(A) = \#var(B)$，$\#bop(A) = \#bop(B)$，因此也有$\#var(A) = \#bop(A) + 1$；

若A具有形式$(B \wedge C)$或$(B \vee C)$或$(B \rightarrow C)$或$(B \leftrightarrow C)$，则按照归纳假设有$\#var(B) = \#bop(B)+1$且$\#var(C) = \#bop(C)+1$，而$\#var(A) = \#var(B)+\#var(C)$，$\#bop(A) = \#bop(B)+\#bop(C) + 1$，因此

$$
\begin{aligned}
\#var(A) &= \#var(B) + \#var(B) = \#bop(B) + 1 + \#bop(C) + 1 \\
&= (\#bop(B) + \#bop(C) + 1) + 1 = \#bop(A) + 1
\end{aligned}
$$

即这时也有$\#var(A) = \#bop(A) + 1$。

这一题难度不大，好像大家都能做对！但有人没有明确给出这两个函数的定义

练习2.6

练习* 2.6 设A, B, C是公式，定义$A[C/B]$为使用C置换公式A中从左至右第一次出现的子公式B，则$A[C/B]$可使用归纳法定义吗？类`Formula`的计算子公式置换的方法`getReplaceResult()`做怎样的修改可实现这种子公式置换？能归纳定义使用公式C置换公式A中从左至右的第i次出现$i > 1$的子公式B，或者最后一次出现的子公式B吗？为什么？

解答 为了定义置换第一次出现的子公式，或最后一次出现的子公式，我们也许可先定义函数$IsSub(A, B)$，判断公式B是否是公式A的子公式，当然这个函数可通过判断B是否属于A子公式集合$Sub(A)$直接得到，但也可直接针对A的结构使用归纳法定义：

(1) 归纳基：若公式A是命题变量p，且B也是p，则$IsSub(A, B) = \mathbf{true}$，否则$IsSub(A, B) = \mathbf{false}$；

(2) 归纳步：若公式A具有形式$(\neg C)$，则若$B = A$，则$IsSub(A, B) = 1$，否则$IsSub(A, B) = IsSub(C, B)$；

若公式A具有形式$(C \wedge D), (C \vee D), (C \rightarrow D), (C \leftrightarrow D)$，则若$B = A$，则$IsSub(A, B) = 1$，否则$IsSub(A, B) = IsSub(C, B) \vee IsSub(D, B)$；

练习2.6

有了函数$IsSub(A,b)$之后，我们也许可以如下定义使用C置换公式A中从左至右第一次出现的子公式B，记为$A[C/B]$：

(1) 归纳基：若公式A是命题变量p，且B也是p，则$A[C/B]=C$，否则$A[C/B]=A$；

(2) 归纳步：若公式A具有形式$(\neg D)$，则若$B=A$，则$A[C/B]=C$，否则$A[C/B]=(\neg D[C/B])$；

若公式A具有形式$(D\oplus E)$，这里$\oplus$是$\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$之一，则若$B=A$，则$A[C/B]=C$，否则若$IsSub(D,B)=\textbf{ture}$，则$A[C/B]=(D[C/B]\oplus E)$，否则$A[C/B]=(D\oplus E[C/B])$。

有了函数$IsSub(A,b)$之后，我们也许可以如下定义使用C置换公式A中从右至左第一次出现的子公式B，也记为$A[C/B]$：

(1) 归纳基：若公式A是命题变量p，且B也是p，则$A[C/B]=C$，否则$A[C/B]=A$；

(2) 归纳步：若公式A具有形式$(\neg D)$，则若$B=A$，则$A[C/B]=C$，否则$A[C/B]=(\neg D[C/B])$；

若公式A具有形式$(D\oplus E)$，这里$\oplus$是$\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$之一，则若$B=A$，则$A[C/B]=C$，否则若$IsSub(E,B)=\textbf{ture}$，则$A[C/B]=(D\oplus E[C/B])$，否则$A[C/B]=(D[C/B]\oplus E)$。

练习2.6

```
public boolean isSubFormula(Formula subformula) {
    if (syntaxEqualTo(subformula)) return true;
    if (isAtomicFormula()) return false;
    if (isNegFormula()) {
        return right.isSubFormula(subformula);
    } else return (left.isSubFormula(subformula) || right.isSubFormula(subformula));
}
```

```
public Formula getReplaceFirstResult(Formula subformula, Formula otherformula) {
    if (syntaxEqualTo(subformula)) return otherformula.getACopy();
    Formula leftResult = left;
    Formula rightResult = right;
    if (left.isSubFormula(subformula)) {
        leftResult = left.getReplaceFirstResult(subformula, otherformula);
        rightResult = right.getACopy();
    } else {
        leftResult = left.getACopy();
        rightResult = right.getReplaceFirstResult(subformula, otherformula);
    }
    Formula result = new AndFormula(leftResult, rightResult);
    return result;
}
```

练习2.6

```java
    public Formula getReplaceLastResult(Formula subformula, Formula otherformula) {
        if (syntaxEqualTo(subformula)) return otherformula.getACopy();
        Formula leftResult = left;
        Formula rightResult = right;
        if (right.isSubFormula(subformula)) {
            leftResult = left.getACopy();
            rightResult = right.getReplaceLastResult(subformula, otherformula);
        } else {
            leftResult = left.getReplaceLastResult(subformula, otherformula);
            rightResult = right.getACopy();
        }
        Formula result = new AndFormula(leftResult, rightResult);
        return result;
    }
```

这里只给出了类AndFormula的实现，其他类的实现类似！

这里的问题是：处理二元运算的类的很多方法的实现是类似，好像也产生了很多重复代码，但因为不同二元运算创建的对象不同，所以还必须在不同类实现，这个设计上的问题能怎样改进吗？

练习2.6

```java
String formulaLaTeXString = "(p\\rightarrow q)\\vee (q\\wedge(p\\rightarrow q))\\wedge (r\\vee (p\\rightarrow q))";
Formula form = FormulaBuilder.buildFromLaTexFormulaString(formulaLaTeXString);
String formula2LaTeXString = "(p\\rightarrow q)";
String formula3LaTeXString = "((\\neg p)\\vee q)";
Formula form2 = FormulaBuilder.buildFromStrictLaTexFormulaString(formula2LaTeXString);
Formula form3 = FormulaBuilder.buildFromStrictLaTexFormulaString(formula3LaTeXString);
Formula replaceResult = form.getReplaceResult(form2, form3);
System.out.println("子公式全部置换 " + form.toLaTeXString() + "[" + form3.toLaTeXString() + "/" + form2.toLaTeXString() + "] 的结果如下 : ");
System.out.println("\t" + replaceResult.toLaTeXString());
replaceResult = form.getReplaceFirstResult(form2, form3);
System.out.println("置换第一个子公式 " + form.toLaTeXString() + "[" + form3.toLaTeXString() + "/" + form2.toLaTeXString() + "] 的结果如下 : ");
System.out.println("\t" + replaceResult.toLaTeXString());
replaceResult = form.getReplaceLastResult(form2, form3);
System.out.println("置换最后一个子公式 " + form.toLaTeXString() + "[" + form3.toLaTeXString() + "/" + form2.toLaTeXString() + "] 的结果如下 : ");
System.out.println("\t" + replaceResult.toLaTeXString());
```

```
子公式全部置换 ((p\rightarrow q)\vee ((q\wedge (p\rightarrow q))\wedge (r\vee (p\rightarrow q))))[((\neg p)\vee q)/(p\rightarrow q)] 的结果如下 :
	(((\neg p)\vee q)\vee ((q\wedge ((\neg p)\vee q))\wedge (r\vee ((\neg p)\vee q))))
置换第一个子公式 ((p\rightarrow q)\vee ((q\wedge (p\rightarrow q))\wedge (r\vee (p\rightarrow q))))[((\neg p)\vee q)/(p\rightarrow q)] 的结果如下 :
	(((\neg p)\vee q)\vee ((q\wedge (p\rightarrow q))\wedge (r\vee (p\rightarrow q))))
置换最后一个子公式 ((p\rightarrow q)\vee ((q\wedge (p\rightarrow q))\wedge (r\vee (p\rightarrow q))))[((\neg p)\vee q)/(p\rightarrow q)] 的结果如下 :
	((p\rightarrow q)\vee ((q\wedge (p\rightarrow q))\wedge (r\vee ((\neg p)\vee q))))
```

练习2.9

练习* 2.9 构造命题逻辑公式$A=((p\wedge r)\vee q)\wedge((q\wedge p)\vee\neg q)$的真值表，并计算它的对偶公式$A^*$，构造公式$A^*$的真值表。对比公式$A$与$A^*$的真值表，你发现了什么？

解答：公式$A=((p\wedge r)\vee q)\wedge((q\wedge p)\vee\neg q)$的真值表如下：

p	q	r	$p\wedge r$	$(p\wedge r)\vee q$	$q\wedge p$	$\neg q$	$(q\wedge p)\vee\neg q$	$((p\wedge r)\vee q)\wedge((q\wedge p)\vee\neg q)$
0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1

而A的对偶式$A^*=((p\vee r)\wedge q)\vee((q\vee p)\wedge\neg q)$，它的真值表如下：

p	q	r	$p\vee r$	$(p\vee r)\wedge q$	$q\vee p$	$\neg q$	$(q\vee p)\wedge\neg q$	$((p\vee r)\wedge q)\vee((q\vee p)\wedge\neg q)$
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1

A^*的真值表可通过将A的真值表中的所有1换成0，同时将所有0换成1而得到，当然这时得到的真值表前三行对命题变量p,q,r的赋值是从111到000，再按二进制顺序从000排到111就是通常我们构造的A^*的真值表。

练习2.13

练习* 2.13 证明逻辑运算符集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$不是逻辑运算符完备集。

【分析】我们只要找到一个真值函数，使得不能由只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的公式定义即可。

证明　我们证明一元函数$f_0^{(1)}$: $\mathbf{2}\to\mathbf{2}$不能被只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的公式定义。这里一元函数$f_0^{(1)}$: $\mathbf{2}\to\mathbf{2}$定义为$f_0^{(1)}(\mathbf{0}) = 0$且$f_0^{(1)}(1) = 0$。为证明这一点，定义真值赋值函数$\sigma : \{p\} \to \mathbf{2}$，$\sigma(p) = 1$，我们证明，对只含命题变量$p$且只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的任意公式$A$，总有$\sigma(A) = 1$。针对公式$A$的结构做归纳：

(1) 归纳基：A是原子公式，这时只能是p，因为$\sigma(p) = 1$，所以$\sigma(A) = 1$。

(2) 归纳步：因为公式A只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符，因此当$A$不是原子公式式，只能具有形式$(B \wedge C), (B \vee C), (B \to C)$或$(B \leftrightarrow C)$之一，且$B$和$C$也是只含命题变量$p$且只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的公式，这时归纳假设是$\sigma(B) = 1$且$\sigma(C) = 1$，显然无论$A$具有$(B \wedge C), (B \vee C), (B \to C)$或$(B \leftrightarrow C)$的哪种形式，也总有$\sigma(A) = 1$。

这就证明了，对只含命题变量p且只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的任意公式$A$，在前面定义的真值赋值函数$\sigma$下的真值总有$\sigma(A) = 1$，而上面给出的一元函数$f_0^{(1)}(\sigma(p)) = f_0^{(1)}(1) = 0$，所以一元函数$f_0^{(1)}$不能由只含一个命题变量且只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的任意公式$A$所定义，所以集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$不是逻辑运算符完备集。 □

一般来说，任意函数值总为0的n元真值函数，不能被只含集合$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$中逻辑运算符的公式所定义，因为当对其中命题变量的真值都赋值为1时，这样的公式的真值总是为1，而不会为0。

练习2.15

练习* 2.15 证明逻辑运算→不能由只含$\vee,\wedge$的命题逻辑公式定义。

证明 这实际上是要证明二元真值函数$f:\mathbf{2}\times\mathbf{2}\to\mathbf{2}$不能由只含$\vee,\wedge$的逻辑公式定义，这里$\forall x,y\in\mathbf{2}=0,1$，$f(x,y)=x\to y$，即$f(0,0)=f(0,1)=f(1,1)=1$而$f(1,0)=0$。

我们证明这个真值赋值函数不能由只含两个命题变量p,q且只含$\vee,\wedge$的逻辑公式定义。定义真值赋值函数$\sigma:\{p,q\}\to\mathbf{2}$为$\sigma(p)=\sigma(q)=0$，我们证明对任意只含命题变量$p,q$且只含$\vee,\wedge$的公式$A$，总有$\sigma(A)=0$，从而因为$f(\sigma(p),\sigma(q))=f(0,0)=1$，因此$f$不能被任意的这样的公式所定义。

针对公式A的结构做归纳：

(1) 归纳基：公式A是原子公式，即公式A是p或是q，因为$\sigma(p)=\sigma(q)=0$，因此总有$\sigma(A)=0$；

(2) 归纳步：因为公式A只含集合$\vee,\wedge$，因此公式A只能具有形式$(B\wedge C)$或$(B\vee C)$，且B和C也只含命题变量p,q以及逻辑运算符$\vee,\wedge$，这时归纳假设是$\sigma(B)=\sigma(C)=0$，从而显然无论A是$(B\wedge C)$或是$(B\vee C)$也总有$\sigma(A)=0$。 □

【讨论】简单来说就是，对任意只含$\vee,\wedge$的命题逻辑公式A，当其中的命题变量都赋值为0时，它的真值总为0，但对于$p\to q$，当p和q都赋值为0时，$p\to q$的真值为1，所以只含$\vee,\wedge$的任意公式都不可能定义$p\to q$。

学生作业点评

尚可接受的证明，虽然表达不是很规范，但能让人基本明白命题成立的关键点在哪

2.13

只需要找到反例$\sigma(A)$，使得其不能通过仅有$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$的逻辑公式表示即可。

p	A^*
1	0

对于所含有的运算符个数n作归纳法，证明当$\sigma(p) = 1$时，对于任意长度公式A均有$\sigma(A) = 1 \neq \sigma(A^*)$

归纳基：当$n = 0$，则仅为命题变量p，则$\sigma(A_0) = \sigma(p) = 1 \neq \sigma(A^*)$。

归纳步：当$n \leq k$时，任意k个题中逻辑运算符组成的逻辑公式都满足$\sigma(A_k) = 1$，则对于$n = k + 1$：

若$A_{k+1} = B \wedge C$，则B和C的逻辑运算符个数小于等于k，则$\sigma(B) = 1, \sigma(C) = 1$，则$\sigma(A_{k+1}) = 1$；

若$A_{k+1} = B \vee C$，同理$\sigma(B) = 1, \sigma(C) = 1$，则$\sigma(A_{k+1}) = 1$；

若$A_{k+1} = B \rightarrow C$，同理$\sigma(B) = 1, \sigma(C) = 1$，则$\sigma(A_{k+1}) = 1$；

若$A_{k+1} = B \leftrightarrow C$，同理$\sigma(B) = 1, \sigma(C) = 1$，则$\sigma(A_{k+1}) = 1$；

故对于任意仅包含$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$的任意公式$A$，都有$\sigma(A) = 1 \neq 0$，故其不是完备集。

2.13

不存在只含$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$运算符且恰含一个变量$P$的公式$A$，使得当$P=1$时有$A=0$。

对这样的公式含有的运算符个数n进行数学归纳。

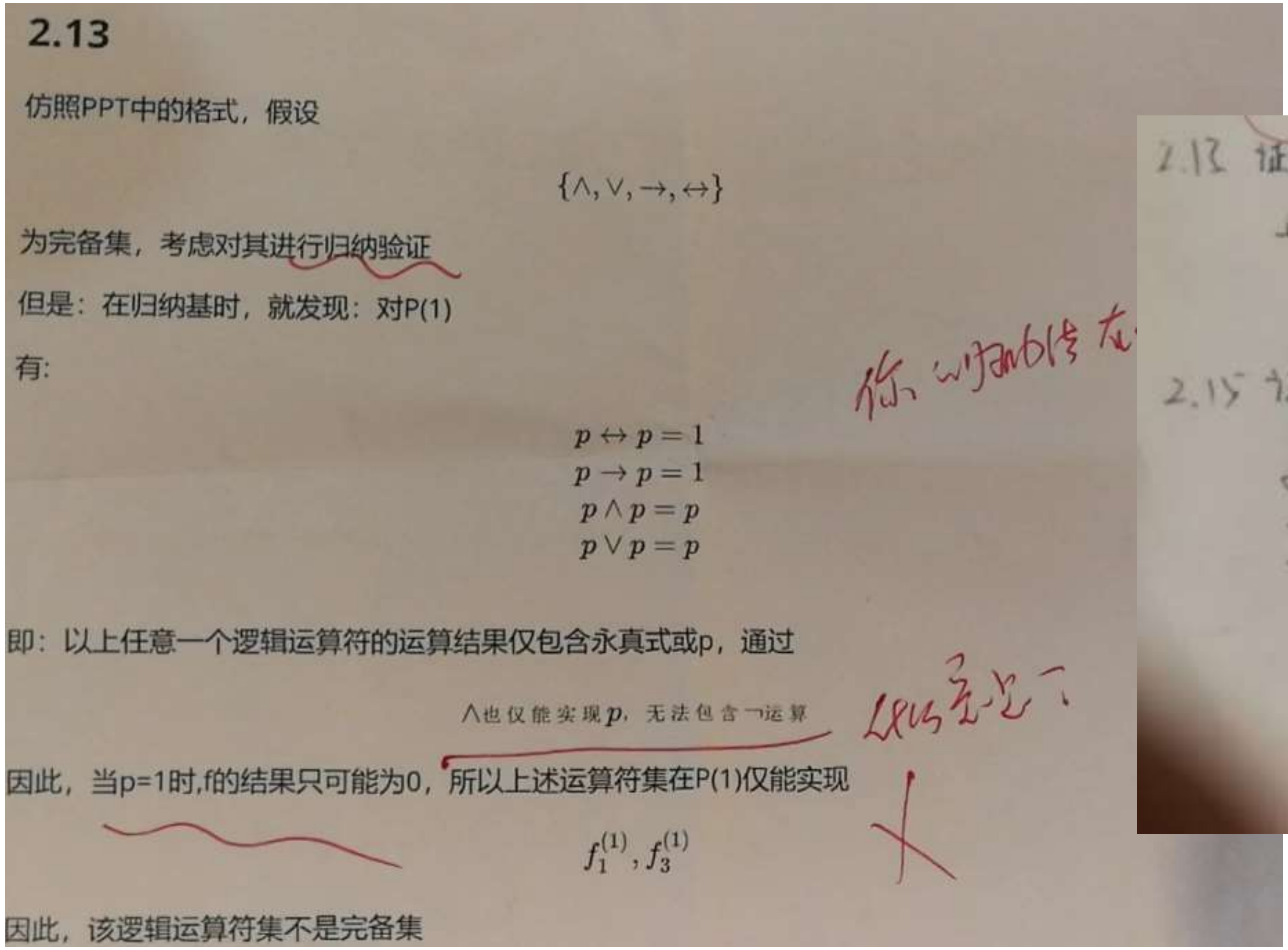
$n=1$，有~~P∧Q~~ $P\wedge P$, $P\vee P$, $P\rightarrow P$, $P\leftrightarrow P$，此时均不能使$P=1$时$A=0$。

$n>1$时，假设k个运算符均不能使$P=1$时$A=0$，则意味着$P=1$时$A=1$

对于一个$k+1$个运算符的公式A，(B, C为两个运算符的公式) B C如何连接均不会得出0，故A不可能为0。

学生作业点评

不可接受的证明，看完之后还是不知道命题成立的关键点到底在哪里



2.13

仿照PPT中的格式，假设

$$\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$$

为完备集，考虑对其进行归纳验证

但是：在归纳基时，就发现：对P(1)

有:

$$p \leftrightarrow p = 1$$
$$p \to p = 1$$
$$p \wedge p = p$$
$$p \vee p = p$$

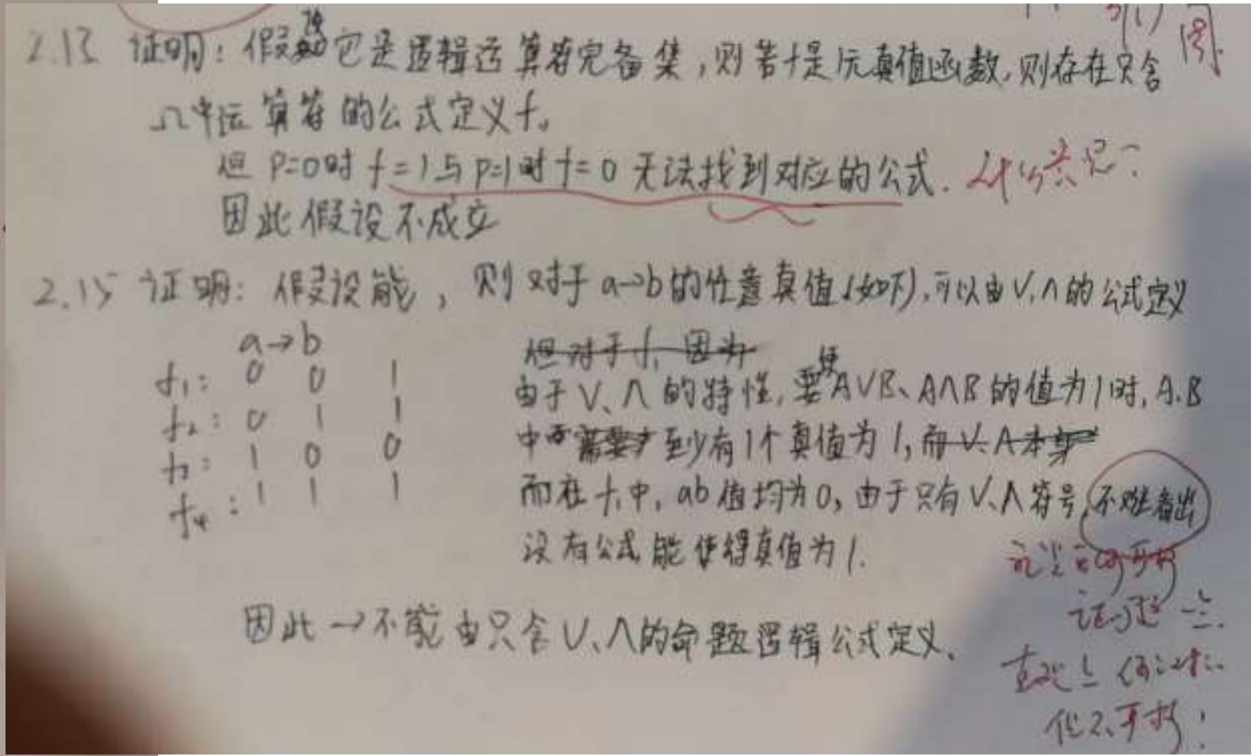
即：以上任意一个逻辑运算符的运算结果仅包含永真式或p，通过

∧也仅能实现p，无法包含¬运算

因此，当p=1时,f的结果只可能为0，所以上述运算符集在P(1)仅能实现

$$f_1^{(1)}, f_3^{(1)}$$

因此，该逻辑运算符集不是完备集



2.13 证明：假设它是逻辑运算符完备集，则若f是任意真值函数，则存在只含几种运算符的公式定义f。

但 p=0时 f=1与 p=1时 f=0 无法找到对应的公式.

因此假设不成立

2.15 证明：假设能，则对于 a→b 的任意真值(如下)，可以由∨,∧的公式定义

	a	b	a→b
f_1:	0	0	1
f_2:	0	1	1
f_3:	1	0	0
f_4:	1	1	1

~~但对于f，因为~~

由于∨、∧的特性，要A∨B、A∧B的值为1时，A.B中至少有1个真值为1，~~而∨、∧本身~~

而在f_1中，ab值均为0，由于只有∨∧符号，不难看出没有公式能使得真值为1.

因此→不能由只含∨、∧的命题逻辑公式定义。

练习2.15

练习 2.16 证明下面的命题：

(1) 证明逻辑运算$\wedge$不能由只含$\rightarrow$的命题逻辑公式定义；

(2) 证明逻辑运算$\leftrightarrow$不能由只含$\rightarrow$的命题逻辑公式定义；

(3) 证明逻辑运算$\vee$可以由只含$\rightarrow$的命题逻辑公式定义。

解答：对于(1)和(2)，我们可以证明：恰含两个命题变量p, q且只含$\rightarrow$的任意公式A，它至少有3个真值赋值函数σ，使得$\sigma(A) = 1$，也就是说这样的公式的真值表4行中至少有3行的真值为1。而$p \wedge q$的真值表有3行为0，$p \leftrightarrow q$的真值表有两行为0，因此$\wedge$和$\leftrightarrow q$都不能由只含$\rightarrow$的公式定义。

对于(3)，则有$p \vee q$与$(p \rightarrow q) \rightarrow q$逻辑等值。

这一题不是作业。

练习2.17

练习* 2.17 补充完整定理的证明：若真值赋值要求集合Ω是辛提卡集合，则Ω是可满足的。

【证明】定义真值赋值函数σ，对任意命题变量p，若$\mathrm{T}\ p\in\Omega$，则$\sigma(p)=1$；若$\mathrm{F}\ p\in\Omega$则$\sigma(p)=0$；若$\mathrm{T}\ p$和$\mathrm{F}\ p$都不在Ω中，则$\sigma(p)$的值可随意定义（例如可约定为0）。因为$\mathrm{T}\ p$和$\mathrm{F}\ p$不同时属于Ω，因此这样定义的σ确实是函数。

可基于公式A中的逻辑运算符号数n进行强归纳证明命题：对任意公式A，如果$\mathrm{F}\ A\in\Omega$，则$\sigma(A)=0$，如果$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，则$\sigma(A)=1$，从而得到Ω是可满足的。

(1) 归纳基：当$n=0$时，则公式A是命题变量p，根据σ的定义，显然成立；

(2) 归纳步：假定对任意含小于等于k个逻辑运算符的公式命题成立，对任意含$k+1$个运算符的公式A：

- 若公式是$(\neg B)$，则B含k个逻辑运算符。从而若$\mathrm{F}\ A\in\Omega$, 即$\mathrm{F}\ \neg B\in\Omega$，根据辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$，根据归纳假设$\sigma(B)=1$，从而$\sigma(A)=0$；若$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，类似可得$\sigma(B)=1$；
- 若公式是$(B\wedge C)$，则B和C都含小于等于k个逻辑运算符。从而若$\mathrm{F}\ A\in\Omega$，则$\mathrm{F}\ B\wedge C\in\Omega$，根据辛提卡集合性质有$\mathrm{F}\ B\in\Omega$或$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，若$\mathrm{F}\ B\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=0$，从而$\sigma(A)=0$，类似若$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，也有$\sigma(A)=0$；若$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，则由辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，根据归纳假设有$\sigma(B)=\sigma(C)=1$，从而$\sigma(A)=1$。
- 若公式是$(B\vee C)$，则B和C都含小于等于k个逻辑运算符。从而若$\mathrm{F}\ A\in\Omega$，则$\mathrm{F}\ B\vee C\in\Omega$，根据辛提卡集合性质有$\mathrm{F}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=0$且$\sigma(C)=0$，从而$\sigma(A)=0$；若$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，则由辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$或$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，若$\mathrm{T}\ B\in\Omega$，根据归纳假设有$\sigma(B)=1$，从而$\sigma(A)=1$，而若$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，根据归纳假设有$\sigma(C)=1$，从而也有$\sigma(A)=1$。
- 若公式是$(B\to C)$，则B和C都含小于等于k个逻辑运算符。从而若$\mathrm{F}\ A\in\Omega$，则$\mathrm{F}\ B\to C\in\Omega$，根据辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=1$且$\sigma(C)=0$，从而$\sigma(A)=0$；若$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，则由辛提卡集合性质有$\mathrm{F}\ B\in\Omega$或$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，若$\mathrm{F}\ B\in\Omega$，根据归纳假设有$\sigma(B)=0$，从而$\sigma(A)=1$，而若$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，根据归纳假设有$\sigma(C)=1$，从而也有$\sigma(A)=1$。
- 若公式是$(B\leftrightarrow C)$，则B和C都含小于等于k个逻辑运算符。从而若$\mathrm{F}\ A\in\Omega$，则$\mathrm{F}\ B\leftrightarrow C\in\Omega$，根据辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，或者$\mathrm{F}\ B\in\Omega$且$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，若$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=1$且$\sigma(C)=0$，从而$\sigma(A)=0$；若$\mathrm{F}\ B\in\Omega$且$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=0$且$\sigma(C)=1$，从而也有$\sigma(A)=0$。若$\mathrm{T}\ A\in\Omega$，则由辛提卡集合性质有$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，或者$\mathrm{F}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，若$\mathrm{T}\ B\in\Omega$且$\mathrm{T}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=1$且$\sigma(C)=1$，从而$\sigma(A)=1$；若$\mathrm{F}\ B\in\Omega$且$\mathrm{F}\ C\in\Omega$，则根据归纳假设有$\sigma(B)=0$且$\sigma(C)=0$，从而也有$\sigma(A)=1$。

练习* 2.19 使用归谬赋值法判断下面的公式是否是永真式

(1) $(q \wedge p) \wedge (p \leftrightarrow r) \to r$　　(2) $(p \vee r) \wedge (p \to r) \to (q \to s) \to (\neg r \vee s)$

(1) 对于公式 $(q \wedge p) \wedge (p \leftrightarrow r) \to r$

F $((q \wedge p) \wedge (p \leftrightarrow r) \to r)$

T $(q \wedge p) \wedge (p \leftrightarrow r)$, F r

T $(q \wedge p)$, T $(p \leftrightarrow r)$, F r

T q, T p, T $(p \leftrightarrow r)$, F r

T q, T p, T p, T r, F r | T q, T p, F p, F r, F r

每个分支都是封闭的，因此公式 $(q \wedge p) \wedge (p \leftrightarrow r) \to r$ 是永真式。

(2) 对于公式 $(p \vee r) \wedge (p \to r) \to (q \to s) \to (\neg r \vee s)$

F $(p \vee r) \wedge (p \to r) \to (q \to s) \to (\neg r \vee s)$

T $(p \vee r) \wedge (p \to r)$, F $(q \to s) \to (\neg r \vee s)$

T $(p \vee r)$, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F $(\neg r \vee s)$

T $(p \vee r)$, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F $\neg r$, F s

T p, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, T r, F s | T r, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F s

T p, F p, T $(q \to s)$, T r, F s | T p, T $(q \to s)$, T r, F s | T r, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F s

T p, T $(q \to s)$, T r, F s | T r, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F s

T p, F q, T r, F s | T p, T s, T r, F s | T r, T $(p \to r)$, T $(q \to s)$, F s

得到一个不封闭的分支T p, F q, T r, F s，即当 p 的真值为真，q 的真值为假，r 的真值为真，s 的真值为假式，公式 $(p \vee r) \wedge (p \to r) \to (q \to s) \to (\neg r \vee s$ 的真值为假，因此这个公式不是永真式。

练习* 2.20 使用真值树法判断下面的公式是否是永真式

(1) $(p \wedge q) \to (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$ (2) $q \wedge r \wedge (s \vee p \to (p \leftrightarrow q))$

(1) F $(p \wedge q) \to (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$
(2) T $(p \wedge q)$
(3) T p
(4) T q
(5) F $(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$
(6) F $(p \wedge r)$
(7) F $(q \wedge \neg r)$

- (8) F p × [7]
- (9) F r [7]
  - (10) F q ×
  - (11) F $\neg r$
    (12) T r ×

因此(1)给出的公式是永真式！

(1) F $(q \wedge r) \wedge (s \vee p \to (p \leftrightarrow q))$

- (2) F $(q \wedge r)$
  - (4) F q
  - (5) F r
- (3) F $(s \vee p \to (p \leftrightarrow q))$
  (6) T $s \vee p$
  (7) F $p \leftrightarrow q$
  - (8) T s [7]
    - (8) T p
      (9) F q
    - (8) F p
      (9) T q
  - (9) T p [7]
    - (8) T p
      (9) F q
    - (8) F p
      (9) T q ×

因此(2)给出的公式不是永真式，从真值树可看到对于pqrs的赋值-0--, --0-, 01-1都是它的成假赋值，这里-表示赋值为0或1均可。

练习2.23

练习* 2.23 使用命题逻辑等值演算证明下面的逻辑等值式：

(1) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$

(2) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

(3) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$

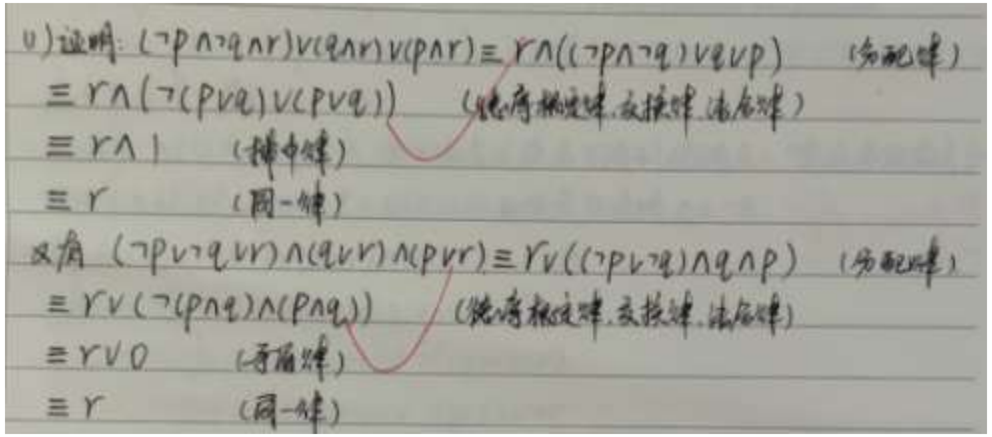
证明 对于(1)有：

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) && \text{// 排中律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee ((q \wedge r) \wedge (p \vee \neg p)) \vee ((p \wedge r) \wedge (q \vee \neg q)) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{// 幂等律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

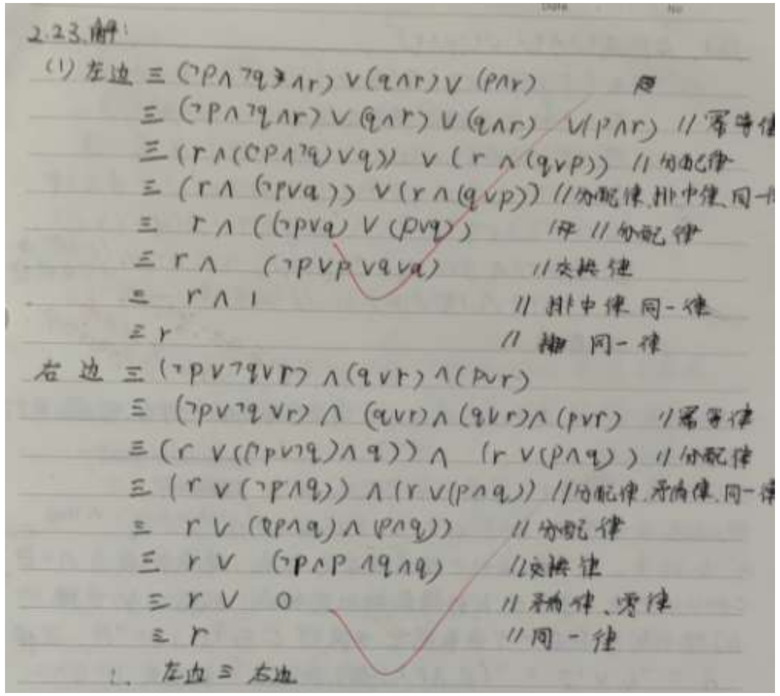
因此$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$的主析取范式是$m_1 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3$，而

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r) && \text{// 矛盾律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee q \vee r) \wedge (p \vee r \vee (q \wedge \neg q)) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) && \text{// 幂等律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)
\end{aligned}
$$

因此$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$的主合取范式是$M_6 \wedge M_0 \wedge M_4 \wedge M_2$，而根据主析取范式与主合取范式之间的关系有$m_1 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \equiv M_6 \wedge M_0 \wedge M_4 \wedge M_2$，因此有$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$。



(1) 证明：$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv r \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee p)$ （分配律）
$\equiv r \wedge (\neg(p \vee q) \vee (p \vee q))$ （德摩根定律、交换律、结合律）
$\equiv r \wedge 1$ （排中律）
$\equiv r$ （同一律）
又有 $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r) \equiv r \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge q \wedge p)$ （分配律）
$\equiv r \vee (\neg(p \wedge q) \wedge (p \wedge q))$ （德摩根定律、交换律、结合律）
$\equiv r \vee 0$ （矛盾律）
$\equiv r$ （同一律）



2.23 解：
(1) 左边 $\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ // 幂等律
$\equiv (r \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee q)) \vee (r \wedge (q \vee p))$ // 分配律
$\equiv (r \wedge (\neg p \vee q)) \vee (r \wedge (q \vee p))$ // 分配律、排中律、同一律
$\equiv r \wedge ((\neg p \vee q) \vee (p \vee q))$ // 分配律
$\equiv r \wedge (\neg p \vee p \vee q \vee q)$ // 交换律
$\equiv r \wedge 1$ // 排中律 同一律
$\equiv r$ // 同一律
右边 $\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$
$\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$ // 幂等律
$\equiv (r \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge q)) \wedge (r \vee (p \wedge q))$ // 分配律
$\equiv (r \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (r \vee (p \wedge q))$ // 分配律、矛盾律、同一律
$\equiv r \vee ((\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge q))$ // 分配律
$\equiv r \vee (\neg p \wedge p \wedge q \wedge q)$ // 交换律
$\equiv r \vee 0$ // 矛盾律、零律
$\equiv r$ // 同一律
∴ 左边 $\equiv$ 右边

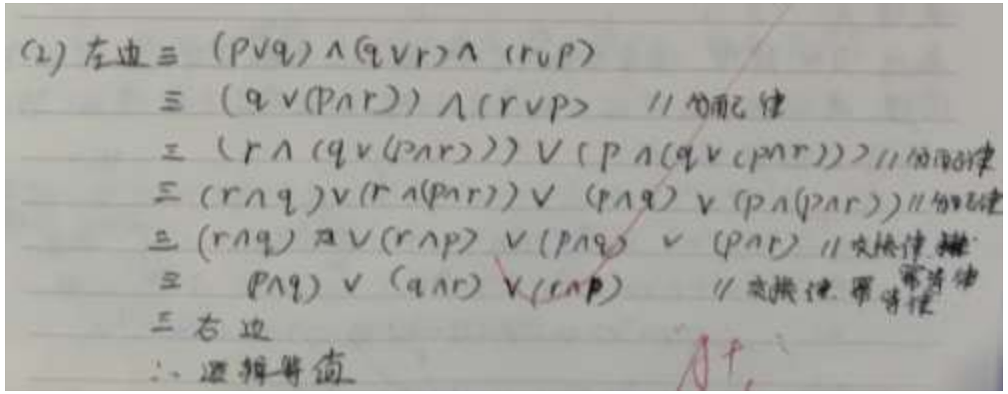
练习2.23

练习* 2.23 使用命题逻辑等值演算证明下面的逻辑等值式：

(1) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$

(2) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

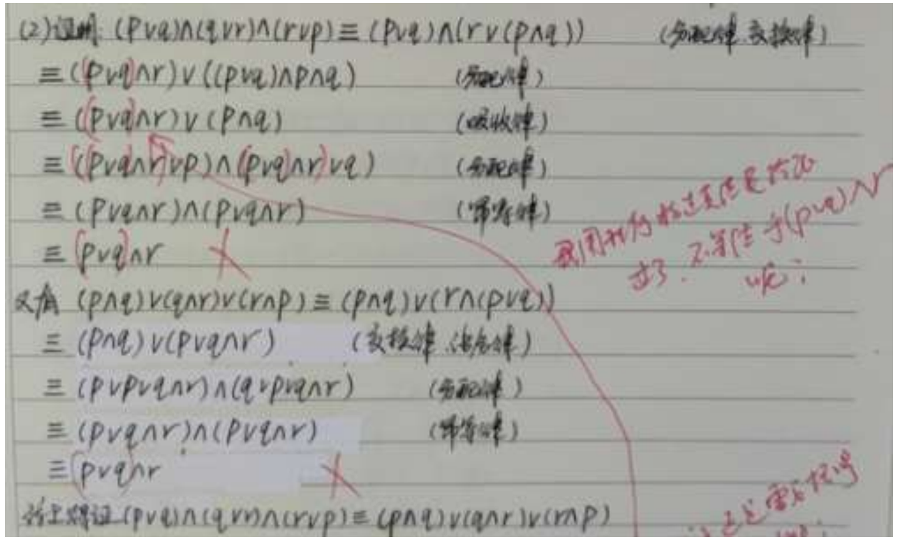
(3) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$



对于(2)有：

$$
\begin{aligned}
& (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) && \text{// 矛盾律} \\
\equiv\ & (p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee q \vee r) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) && \text{// 幂等律} \\
\equiv\ & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)
\end{aligned}
$$

因此$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$的主合取范式是$M_0 \wedge M_1 \wedge M_4 \wedge M_2$，而



$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) && \text{// 排中律} \\
\equiv\ & (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{// 幂等律} \\
\equiv\ & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

因此$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$的主析取范式是$m_7 \vee m_6 \vee m_3 \vee m_5$，因此根据主析取范式与主合取范式之间关系有$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ □

这种演算稍微不仔细就可能会出错！

练习2.23

练习* 2.23 使用命题逻辑等值演算证明下面的逻辑等值式：

(1) $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)\equiv(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(q\vee r)\wedge(p\vee r)$

(2) $(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)\equiv(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$

(3) $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\equiv(p\vee r)\wedge(\neg p\vee q)$

对于(3)有：

$$
\begin{aligned}
&(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r) && // \text{排中律}\\
\equiv\ &(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r) && // \text{分配律}\\
\equiv\ &(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r))\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)
\end{aligned}
$$

因此$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$的主析取范式是$m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_1$，而

$$
\begin{aligned}
&(p\vee r)\wedge(\neg p\vee q) && // \text{矛盾律}\\
\equiv\ &(p\vee(q\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee(r\wedge\neg r)) && // \text{分配律}\\
\equiv\ &(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)
\end{aligned}
$$

因此$(p\vee r)\wedge(\neg p\vee q)$的主合取范式是$M_0\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_5$，因此根据主析取范式与主合取范式之间的关系有$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\equiv(p\vee r)\wedge(\neg p\vee q)$。

练习2.24

练习* 2.24 证明对任意析取范式A都存在合取范式B使得$A \equiv \neg B$，同样对任意合取范式A都存在析取范式B使得$A \equiv \neg B$。根据你的证明，对于合取范式$A = (p \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge r$，构造使得$A \equiv \neg B$的析取范式$B$。

证明 由于对任意真值赋值函数σ，有$\sigma(A^*) = \sigma^-(\neg A)$，因此$\sigma(\neg A) = \sigma(A^*[\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n])$，也即有$\neg A \equiv A^*[\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n]$。因此若$A$是析取范式，则$A^*$是合取范式，由于否定只出现在文字上，因此$A^*[\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n]$使用双重否定律消除命题变量前的双重否定之后就是与$\neg A$等值的合取范式。类似地，若$A$是合取范式，则$A^*[\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n]$使用双重否定律消除命题变量前的双重否定之后就是与$\neg A$等值的析取范式。

因此对于合取范式$A = (p \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge r$，与$\neg A$逻辑等值的析取范式是$B = (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee \neg r$。 $\square$

练习2.24

练习* 2.24 证明对任意析取范式A都存在合取范式B使得$A \equiv \neg B$，同样对任意合取范式A都存在析取范式B使得$A \equiv \neg B$。根据你的证明，对于合取范式$A = (p \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge r$，构造使得$A \equiv \neg B$的析取范式$B$。

稍微严格一点，实际上每个析取范式A具有形式$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}$，这里$l_{ij}$都是文字，因此由德摩尔根律有：

$$\neg A \equiv \neg(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} (\neg l_{ij})$$

从而对任意文字l_{ij}，我们定义文字$\overline{l_{ij}}$为，当l_{ij}是一个命题变量时，$\overline{l_{ij}}$是该命题变量否定，而当l_{ij}是一个命题变量的否定时，$\overline{l_{ij}}$就是这个命题变量本身。从而：

$$\neg A \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \overline{l_{ij}}$$

显然$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \overline{l_{ij}}$是合取范式。 □

有的同学在这一题试图使用归纳证明。这个想法和意识是好的，不过由于析取范式本身不是归纳定义的，所以不好证，针对简单合取式的个数进行归纳意义不大。

练习2.26

练习* 2.26 使用消解原理验证下面的公式是永真式（提示：先求与公式的否定逻辑等值的合取范式，然后给出简化版的消解过程证明公式的否定是矛盾式）：

(1) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee p$　　(2) $((p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)) \to \neg p$

解答：对于(1)有：

$$\begin{aligned} & \neg((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee p) && \text{// 德摩根律} \\ \equiv\ & (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p) \end{aligned}$$

对子句集$\{\{p, q, \neg r\}, \{p, r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p\}\}$进行消解：

(1) $\{p, q, \neg r\}$与$\{\neg p\}$消解得到$\{q, \neg r\}$；

(2) $\{p, r\}$与$\{\neg p\}$消解得到$\{r\}$；

(3) $\{q, \neg r\}$与$\{p, \neg q\}$消解得到$\{p, \neg r\}$；

(4) $\{p, \neg r\}$与$\{\neg p\}$消解得到$\{\neg r\}$；

(5) 最后$\{r\}$与$\{\neg r\}$消解得到$\varnothing$。

因此$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee p$是永真式。

对于(2)有：

$$\begin{aligned} & \neg(((p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)) \to \neg p) && \text{// 蕴涵等值式} \\ \equiv\ & \neg(\neg((p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee \neg p) && \text{// 德摩根律、双重否定律} \\ \equiv\ & (p \to q) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge p && \text{// 蕴涵等值式、幂等律} \\ \equiv\ & (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q \end{aligned}$$

对子句集$\{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$进行消解：

(1) $\{\neg p, q\}$与$\{p\}$消解得到$\{q\}$；

(2) $\{q\}$与$\{\neg q\}$消解得到$\varnothing$。

因此$((p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)) \to \neg p$是永真式。

练习2.27

练习* 2.27 使用列真值表法求与公式$A=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee p)$逻辑等值的主析取范式和主合取范式，并给出与$\neg A$和$A^*$的逻辑等值的主析取范式和主合取范式。

解答：公式$A=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee p)$的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$\neg q$	$\neg q\vee r$	$(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$	$\neg r$	$\neg r\vee p$	$(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee p)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

因此公式A的主析取范式是$m_0\vee m_7$，主合取范式是$M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$，从而$\neg A$的主合取范式是$M_0\wedge M_7$，主析取范式是$m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6$，而$A^*$的主合取范式也是$M_0\wedge M_7$，主析取范式也是$m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6$。

练习2.28

练习* 2.28 一案情涉及张三、李四、王五和赵六四人，根据已有线索了解到如下情况：

(1) 若张三和李四都没有作案，则王五和赵六也都没有作案；

(2) 若王五和赵六都没有作案，则张三和李四也都没有作案；

(3) 若张三和李四同时作案，则王五和赵六有一人且只有一人作案；

(4) 若李四与王五同时作案，则张三与赵六同时作案或都未作案。

请问从以上情况能得出什么结论？为什么？

解答：设p, q, r, s分别表示原子命题“张三作案”、“李四作案”、“王五作案”和“赵六作案”，则：

(1) “若张三和李四都没有作案，则王五和赵六也都没有作案”符号化为：

$$\begin{aligned}\neg p \wedge \neg q \to \neg r \wedge \neg s &\equiv (p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg s) \\ \equiv &\equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \equiv M_2 \wedge M_3 \wedge M_1 \wedge M_3\end{aligned}$$

(2) “王五和赵六都没有作案，则张三和李四也都没有作案”符号化为：

$$\begin{aligned}\neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge \neg q &\equiv (r \vee s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee s) \equiv M_8 \wedge M_{12} \wedge M_4 \wedge M_{12}\end{aligned}$$

(3) “若张三和李四同时作案，则王五和赵六有一人且只有一人作案”符号化为：

$$\begin{aligned}p \wedge q \to (r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s) &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee ((r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) \equiv M_{12} \wedge M_{15}\end{aligned}$$

(4) “若李四与王五同时作案，则张三与赵六同时作案或都未作案”符号化为：

$$\begin{aligned}q \wedge r \to (p \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg s) &\equiv (\neg q \vee \neg r) \vee ((p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee s)) \\ &\equiv (p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \equiv M_7 \wedge M_{14}\end{aligned}$$

因此所有条件合取的主合取范式是$M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_7 \wedge M_8 \wedge M_{12} \wedge M_{14} \wedge M_{15}$，相应地主析取范式是$m_0 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{11} \vee m_{13}$。

因此要么四人都没有作案，要么李四、王五作案，要么李四、赵六作案，要么张三、王五作案，要么张三、赵六作案，要么张三、王五、赵六作案，要么张三、李四、赵六作案。简单地说要么四人同时作案，要么至少两人作案。

练习2.30

练习* 2.30 给出描述算法NNF(ϕ)正确性的完整命题，并使用归纳法进行证明。

解答:

描述算法NNF(ϕ)正确性的完整命题是：对任意含有n个运算符$\neg, \vee, \wedge$的公式ϕ，算法NNF(ϕ)给出与ϕ逻辑等值且$\neg$只出现在命题变量前面的公式。

证明　针对公式ϕ中所含$\neg, \vee, \wedge$这些运算符的运算符个数n进行第二数学归纳法证明。

归纳基：若ϕ不含运算符，则ϕ是文字，算法NNF(ϕ)直接返回ϕ，命题成立。

归纳步：假设对任意含有小于等于$k(k \geq 0)$个运算符的公式ϕ，算法NNF(ϕ)都返回与ϕ逻辑等值，且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，则对于含有$k+1$个与、或、非运算符公式ϕ，

(1) 如果公式ϕ是$\neg\psi$，则这时若ψ是命题变量，则ϕ是文字，算法NNF直接返回ϕ，命题成立；否则就总有$k \geq 1$，这时若ψ是$\neg\theta$，则θ含有小于等于k个运算符，按照归纳假设，算法NNF(θ)返回与θ逻辑等值，且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，而这时ϕ逻辑等值θ，且算法NNF(ϕ)这时返回NNF(θ)，因此命题成；而若ψ是$\psi_1 \wedge \psi_2$或$\psi_1 \vee \psi_2$时，则由于ϕ是含有$k+1$个运算符，ψ含有k个运算符，所以ψ_1和ψ_2都只含有$k-1$个运算符，而$\neg\psi_1$和$\neg\psi_2$都含有小于等于k个运算符，因此按照归纳假设NNF($\neg\psi_1$)和NNF($\neg\psi_2$)分别得到与$\neg\psi_1$和$\neg\psi_2$逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，从而NNF($\neg\psi_1$) $\vee$ NNF($\neg\psi_2$)可得到与$\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，而NNF($\neg\psi_1$) $\wedge$ NNF($\neg\psi_2$)可得到与$\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式。

(2) 如果公式ϕ是$\psi_1 \vee \psi_2$或$\psi_1 \wedge \psi_2$，则ψ_1和ψ_2都含有小于等于k个运算符，因此按照归纳假设NNF(ψ_1)和NNF(ψ_2)分别得到与ψ_1和ψ_2逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，从而NNF(ψ_1) $\wedge$ NNF(ψ_2)可得到与($\psi_1 \wedge \psi_2$)逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式，而NNF(ψ_1) $\vee$ NNF(ψ_2)可得到与($\psi_1 \vee \psi_2$)逻辑等值的且$\neg$只出现在命题变量前面的公式。 □

练习* 2.31 在命题演算的公理化系统中，从三条公理模式出发，使用分离规则证明下面的内定理（模式）：

(1) $A \to (A \to B) \to B$ (2) $\neg\neg A \to (B \to A)$

解答：对于(1)有下面的证明序列：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (A \to B) \to (A \to B) & // \ A \to A\text{是内定理} \\
(2) & (A \to B) \to (A \to B) \to (A \to ((A \to B) \to (A \to B))) & // \ \text{公理A1} \\
(3) & (A \to ((A \to B) \to (A \to B))) & // \ (1),(2)\text{分离} \\
(4) & (A \to ((A \to B) \to (A \to B))) \to & \\
 & \quad ((A \to ((A \to B) \to A)) \to (A \to ((A \to B) \to B))) & // \ \text{公理A2} \\
(5) & (A \to ((A \to B) \to A)) \to (A \to ((A \to B) \to B)) & // \ (3),(4)\text{分离} \\
(6) & A \to ((A \to B) \to A) & // \ \text{公理A1} \\
(7) & A \to (A \to B) \to B & // \ (5),(6)\text{分离}
\end{array}
$$

练习* 2.31 在命题演算的公理化系统中，从三条公理模式出发，使用分离规则证明下面的内定理（模式）：

(1) $A \to (A \to B) \to B$　　(2) $\neg\neg A \to (B \to A)$

对于(2)有下面的证明序列：

(1) $A \to (B \to A)$ // 公理A1

(2) $(A \to (B \to A)) \to (\neg\neg A \to (A \to (B \to A)))$ // 公理A1

(3) $\neg\neg A \to (A \to (B \to A))$ // (1),(2)分离

(4) $\neg\neg A \to (A \to (B \to A)) \to ((\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to (B \to A)))$ // 公理A2

(5) $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to (B \to A))$ // (3),(4)分离

(6) $\neg\neg A \to A$ // 双重否定律

(7) $\neg\neg A \to (B \to A)$ // (5),(6)分离

练习* 2.33 在命题演算的公理化系统中，允许使用演绎定理、反证法等证明下面的内定理：

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to A))$ (4) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to B))$

解答：对于(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$，有下面的证明序列：

(1) $B \to C, A \to B, A \vdash A$ // 前提引入

(2) $B \to C, A \to B, A \vdash A \to B$ // 前提引入

(3) $B \to C, A \to B, A \vdash B$ // (1),(2)分离

(4) $B \to C, A \to B, A \vdash B \to C$ // 前提引入

(5) $B \to C, A \to B, A \vdash C$ // (3),(4)分离

(6) $B \to C, A \to B \vdash A \to C$ // (5)演绎定理

(7) $B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ // (6)演绎定理

(8) $\vdash (B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$ // (7)演绎定理

练习* 2.33 在命题演算的公理化系统中，允许使用演绎定理、反证法等证明下面的内定理：

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to A))$ (4) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to B))$

对于(2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$，有下面的证明序列：

(1) $A, \neg B, A \to B \vdash A$ // 前提引入

(2) $A, \neg B, A \to B \vdash A \to B$ // 前提引入

(3) $A, \neg B, A \to B \vdash B$ // (1),(2)分离

(4) $A, \neg B, A \to B \vdash \neg B$ // 前提引入

(5) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$ // (3),(4)反证法

(6) $A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$ // (5)演绎定理

(7) $\vdash A \to \neg B \to \neg(A \to B)$ // (6)演绎定理

练习* 2.33 在命题演算的公理化系统中，允许使用演绎定理、反证法等证明下面的内定理：

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to A))$ (4) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to B))$

对于(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to A))$，有下面的证明序列：

(1) $\neg A \to B, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ // 前提引入

(2) $\neg A \to B, \neg A, \neg B \vdash \neg A \to B$ // 前提引入

(3) $\neg A \to B, \neg A, \neg B \vdash B$ // (1),(2)分离

(4) $\neg A \to B, \neg A, \neg B \vdash\vdash \neg B$ // 前提引入

(5) $\neg A \to B, \neg A, \neg B \vdash A$ // (3),(4)反证法

(6) $\neg A \to B, \neg A \vdash \neg B \to A$ // (6)演绎定理

(7) $\neg A \to B \vdash \neg A \to (\neg B \to A)$ // (5)演绎定理

(7) $\vdash (\neg A \to B) \to \neg A \to (\neg B \to A)$ // (6)演绎定理

练习* 2.33 在命题演算的公理化系统中，允许使用演绎定理、反证法等证明下面的内定理：

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$　　(2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to A))$　　(4) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to B))$

对于(4) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to B))$，有下面的证明序列：

(1) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B, \neg B \vdash \neg B$ // 前提引入

(2) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B, \neg B \vdash \neg B \to \neg A$ // 前提引入

(3) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B, \neg B \vdash \neg A$ // (1),(2)分离

(4) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B, \neg B \vdash \neg A \to B$ // 前提引入

(5) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B, \neg B \vdash B$ // (3),(4)分离

(6) $\neg B \to \neg A, \neg A \to B \vdash \neg B \to B$ // (6)演绎定理

(7) $\neg B \to \neg A \vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to B)$ // (5)演绎定理

(7) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (\neg A \to B) \to (\neg B \to B)$ // (6)演绎定理

练习2.34

练习* 2.34 设Γ是任意公式集，A, B是任意公式，证明下面的命题：

(1) 若$A \to B \in \Gamma$，且$\Gamma \cup \{\neg A\}$和$\Gamma \cup \{B\}$都是不一致的，则Γ是不一致的；

(2) 若$\Gamma \vdash \neg(A \to B)$，并且$\Gamma \cup \{A, \neg B\}$是不一致的，则$\Gamma$是不一致的。

证明 (1) 因为$\Gamma \cup \{\neg A\}$不一致当且仅当$\Gamma \vdash A$，而$\Gamma \cup \{B\}$不一致当且仅当$\Gamma \vdash \neg B$，从而再由$A \to B \in \Gamma$，得$\Gamma \vdash A \to B$，从而$\Gamma \vdash B$，从而存在公式B，使得$\Gamma \vdash B$且$\Gamma \vdash \neg B$，因此Γ是不一致的。

(2) 因为$\Gamma \cup \{A, \neg B\}$是不一致的当且仅当$\Gamma, A \vdash B$，从而由演绎定理有$\Gamma \vdash A \to B$，而又有$\Gamma \vdash \neg(A \to B)$，因此$\Gamma$是不一致的。 □

有些同学认为$\Gamma \cup \{A, \neg B\}$不一致的，则$\Gamma \vdash A$且$\Gamma \vdash \neg B$，这是错误的！

练习2.35

练习* 2.35 设Γ是公式集，如果对任意公式A有$\Gamma\vdash A$或$\Gamma\vdash\neg A$之一成立，则称Γ是**P**完全的。

(1) 每个命题变量都是原子公式，证明原子公式构成的集合$\Gamma=\{p\mid p\in\mathbf{Var}\}$是**P**完全的；

(2) 对任意公式集Γ，记$T=\{A\mid\Gamma\vdash A\}$，证明$T$是极大一致的当且仅当$\Gamma$是**P**完全的。

证明 (1) 首先注意到，Γ是可满足的，而根据命题演算系统的可靠形和完全性，则Γ是一致的，因此对任意公式A，$\Gamma\vdash A$和$\Gamma\vdash\neg A$不可能同时成立。然后针对公式A的结构，我们证明对任意公式有$\Gamma\vdash A$或$\Gamma\vdash\neg A$之一成立：

归纳基：若公式A是命题变量p，则由于$p\in\Gamma$，所以$\Gamma\vdash p$，且显然没有$\Gamma\vdash\neg p$。

归纳步：若公式A是$\neg B$，则根据归纳假设有$\Gamma\vdash B$或$\Gamma\vdash\neg B$之一成立。如果$\Gamma\vdash B$，则$B\to\neg\neg B$是内定理，因此你$\Gamma\vdash\neg\neg B$，从而$\Gamma\vdash\neg A$；若$\Gamma\vdash\neg B$，则就是有$\Gamma\vdash A$；

若公式A是$B\to C$，则根据归纳假设有$\Gamma\vdash B$或$\Gamma\vdash\neg B$之一成立，而且有$\Gamma\vdash C$或$\Gamma\vdash\neg C$之一成立。如果$\Gamma\vdash\neg B$，则由$\neg B\to(B\to C)$是内定理，则有$\Gamma\vdash B\to C$，即有$\Gamma\vdash A$；而若$\Gamma\vdash C$，则由$C\to(B\to C)$是内定理，也有$\Gamma\vdash B\to C$，即$\Gamma\vdash A$；最后若$\Gamma\vdash B$且$\Gamma\vdash\neg C$，则不难得到$\Gamma\vdash\neg(B\to C)$（例如，由$\Gamma\vdash B$可得$\Gamma,B\to C\vdash B$，而$\Gamma,B\to C\vdash B\to C$，因此$\Gamma,B\to C\vdash C$，但$\Gamma\vdash\neg C$，则有$\Gamma,B\to C\vdash\neg C$，从而由反证法有$\Gamma\vdash\neg(B\to C)$。

练习2.35

练习* 2.35 设Γ是公式集，如果对任意公式A有$\Gamma \vdash A$或$\Gamma \vdash \neg A$之一成立，则称Γ是**P**完全的。

(1) 每个命题变量都是原子公式，证明原子公式构成的集合$\Gamma = \{p \mid p \in \mathbf{Var}\}$是**P**完全的；

(2) 对任意公式集Γ，记$T = \{A \mid \Gamma \vdash A\}$，证明$T$是极大一致的当且仅当$\Gamma$是**P**完全的。

(2) 若T是极大一致的，则T是一致的，且对任意公式A有$A \in T$或$\neg A \in T$，显然$A \in T$和$\neg A \in T$不可能同时成立，否则T不是一致的，因此$A \in T$或$\neg A \in T$恰有一个成立，按照T的定义，即有$\Gamma \vdash A$和$\Gamma \vdash \neg A$之一成立，因此Γ是**P**完全的。反之，若Γ是**P**完全的，即对任意公式A有$\Gamma \vdash A$且$\Gamma \vdash \neg A$之一成立，从而$A \in T$或$\neg A \in T$之一成立，显然这时T是一致的，且是极大一致的。 □

这里主要是(1)的证明有难度，需要对A使用结构归纳证明有$\Gamma \vdash A$或$\Gamma \vdash \neg A$之一成立，(2)实际上是从极大一致的定义和P完全的定义很容易得到。

练习2.36

练习* 2.36 只使用自然推理系统的前提引入、反证法、合取规则、化简规则、附加律、析取消除、蕴涵引入、假言推理、双蕴涵引入、双蕴涵消除、假言三段论、假言易位、析取三段论这些规则证明下面的形式推出：

$$(1)\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C) \qquad (2)\ \neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$$

解答：对于(1)$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$有下面的证明序列：

(1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A \wedge B$ // 前提引入

(2) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A$ // (1)化简规则

(3) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B$ // (1)化简规则

(4) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B \vee C$ // (3)附加律

(5) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$ // (2),(4)合取规则

(6) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A \wedge C$ // 前提引入

(7) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A$ // (6)化简规则

(8) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash C$ // (6)化简规则

(9) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B \vee C$ // (8)附加律

(10) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$ // (7),(9)合取规则

(11) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ // 前提引入

(12) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ // (5),(10),(11)析取消除

练习2.36

练习* 2.36 只使用自然推理系统的前提引入、反证法、合取规则、化简规则、附加律、析取消除、蕴涵引入、假言推理、双蕴涵引入、双蕴涵消除、假言三段论、假言易位、析取三段论这些规则证明下面的形式推出：

(1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$　　(2) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

对于(2)$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$有下面的证明序列：

(1) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A$　　// 前提引入

(2) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B, \neg A \vdash \neg A \wedge \neg B$　　// 前提引入

(3) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B, \neg A \vdash \neg B$　　// (2)化简规则

(4) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B, \neg A \vdash B$　　// 前提引入

(5) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash A$　　// (2),(3)反证法

(6) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B$　　// 前提引入

(7) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A$　　// (1),(5),(6)析取消除

(8) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg A \wedge \neg B$　　// 前提引入

(9) $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg A$　　// (8)化简规则

(10) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$　　// (7),(9)反证法

练习2.37

练习* 2.37 依次使用p, q, r, s, t表示下面推理中的原子命题，并将自然语言陈述的推理符号化自然推理系统中的形式推出，然后构造证明（序列）证明该形式推出是自然推理系统的内定理，从而验证该推理的有效性（只使用上一题列出的规则）。

(1) 如果语言与它们所表达的含义之间有实质性的联系，那么，所有的人都将使用同一种语言。但事实上人类有多种语言。而语言具有民族特点是语言与它们所表达的含义之间不具有实质性联系的必要条件。因此，语言具有民族特点。

(1) 令p表示“语言与它们所表达的含义之间有实质性的联系”，q表示“所有的人都将使用同一种语言”，r表示“语言具有民族特点”。这里“人类有多种语言”需要看作是“所有的人都将使用同一语言”的否定。从而：

a) “如果语言与它们所表达的含义之间有实质性的联系，那么，所有的人都将使用同一种语言”符号化为$p \to q$；

b) “但事实上人类有多种语言”符号化为$\neg q$；

c) “语言具有民族特点是语言与它们所表达的含义之间不具有实质性联系的必要条件”符号化为：$\neg p \to r$。

因此要验证的推理是：$p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash r$，可使用下面的证明序列验证：

(1) $p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash \neg q$ // 前提引入

(2) $p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash p \to q$ // 前提引入

(3) $p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash \neg p$ // (1),(2)假言易位

(4) $p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash \neg p \to r$ // 前提引入

(5) $p \to q, \neg q, \neg p \to r \vdash r$ // (3),(4)假言推理

练习2.37

(2) 如果人的思维是纯个人的，那么我就不可能知道除我之外任何一个也有思维。而有思维是一个人之所以成为人的必要条件。如果这点成立的话，则如果我不知道除我之外任何一个人也有思维，那我就不会知道除我之外的任何人也是人。因此，只要我知道除我之外某个人也是人，就说明人的思维不是纯个人的。(提示：p表示“人的思维是纯个人的”；q表示“我能知道除我之外某个人也有思维”；r表示“有思维是一个人之所以成为人的必要条件”；s表示“我能知道除我之外某个人也是人”)

(2) 根据题中提示所给定的原子命题有：

a) “如果人的思维是纯个人的，那么我就不可能知道除我之外任何一个也有思维”是：$p \to \neg q$；

b) “如果这点成立的话，则如果我不知道除我之外任何一个人也有思维，那我就不会知道除我之外的任何人也是人”是：$r \to (\neg q \to \neg s)$；

c) “只要我知道除我之外某个人也是人，就说明人的思维不是纯个人的”是：$s \to \neg p$。

因此要验证的推理是：$p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s) \vdash s \to \neg p$，可使用下面的证明序列验证：

(1) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash r$ // 前提引入

(2) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash r \to (\neg q \to \neg s)$ // 前提引入

(3) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash \neg q \to \neg s$ // (1),(2)假言推理

(4) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash s$ // 前提引入

(5) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash q$ // (3),(4)假言易位

(6) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash p \to \neg q$ // 前提引入

(7) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s), s \vdash \neg p$ // (5),(6)假言易位

(8) $p \to \neg q, r, r \to (\neg q \to \neg s) \vdash s \to \neg p$ // (7)蕴涵引入

练习2.37

(3) 有效性是指形式的有效性。我们两个人的推理具有完全相同的形式。如果这两个断定都成立的话，那么，你的推理是有效的，当且仅当我的推理是有效的。我的推理具有真前提和假结论。我的推理不能既是有效的，又出现真前提和假结论。因此你的推理是无效的。(提示：p表示“有效性是指形式的有效性”；q表示“我们两个人的推理具有完全相同的形式”；r表示“我的推理具有真前提和假结论”；s表示“你的推理是有效的”；t表示“我的推理是有效的”)

(3) 根据题中提示所给定的原子命题有：

a) “如果这两个断定都成立的话，那么，你的推理是有效的，当且仅当我的推理是有效的”是：$(p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t)$；

b) “我的推理不能既是有效的，又出现真前提和假结论”是：$\neg(t \wedge r)$；

因此要验证的推理是：$p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r) \vdash \neg s$，可使用下面的证明序列验证：

(1) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash p$ // 前提引入

(2) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash q$ // 前提引入

(3) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash p \wedge q$ // (1),(2)合取规则

(4) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t)$ // 前提引入

(5) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash s \leftrightarrow t$ // (3),(4)假言推理

(6) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash s \to t$ // (5)蕴涵消除

(7) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash s$ // 前提引入

(8) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash t$ // (6),(7)假言推理

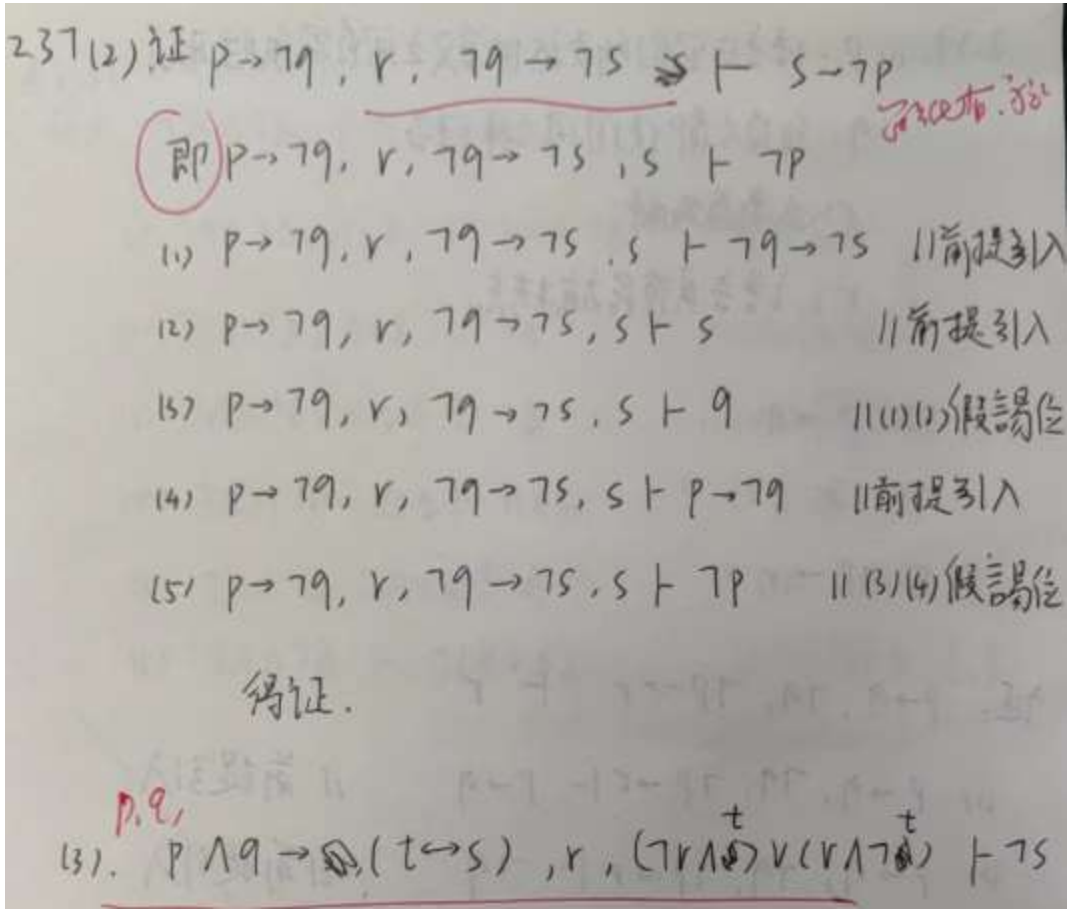
(9) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash r$ // 前提引入

(10) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash t \wedge r$ // (8),(9)合取规则

(11) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r), s \vdash \neg(t \wedge r)$ // 前提引入

(12) $p, q, (p \wedge q) \to (s \leftrightarrow t), r, \neg(t \wedge r) \vdash \neg s$ // (10),(11)反证法

自然推理部分作业存在的一些问题



2.37(2) 证 $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s \vdash s\to\neg p$

即 $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash \neg p$

(1) $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash \neg q\to\neg s$ //前提引入

(2) $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash s$ //前提引入

(3) $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash q$ //(1)(2)假言易位

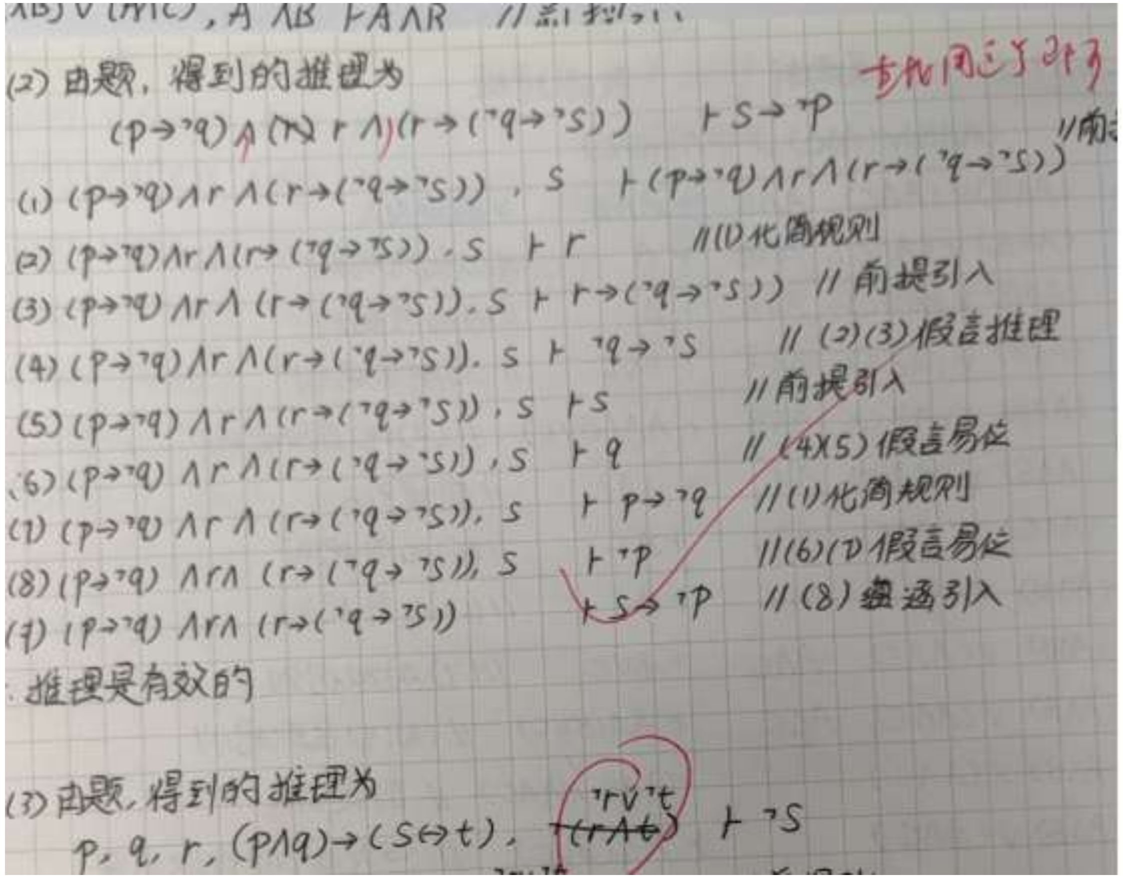
(4) $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash p\to\neg q$ //前提引入

(5) $p\to\neg q, r, \neg q\to\neg s, s \vdash \neg p$ //(3)(4)假言易位

得证.

$p, q,$

(3). $p\wedge q\to(t\leftrightarrow s), r, (\neg r\wedge t)\vee(r\wedge\neg t) \vdash \neg s$



(2) 由题，得到的推理为

$(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)) \vdash s\to\neg p$

(1) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash (p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s))$

(2) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash r$ //(1)化简规则

(3) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash r\to(\neg q\to\neg s)$ //前提引入

(4) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash \neg q\to\neg s$ //(2)(3)假言推理

(5) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash s$ //前提引入

(6) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash q$ //(4)(5)假言易位

(7) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash p\to\neg q$ //(1)化简规则

(8) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)), s \vdash \neg p$ //(6)(7)假言易位

(9) $(p\to\neg q)\wedge r\wedge(r\to(\neg q\to\neg s)) \vdash s\to\neg p$ //(8)蕴涵引入

∴推理是有效的

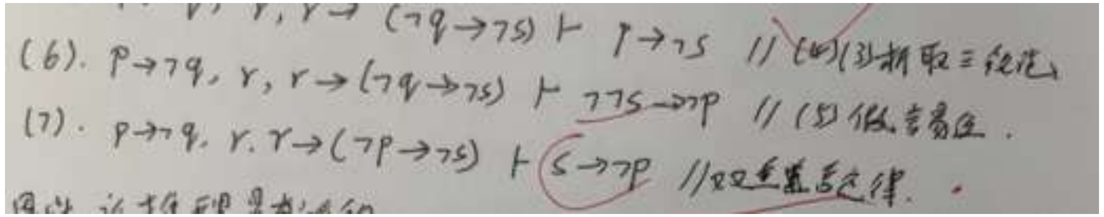
(3) 由题，得到的推理为

$p, q, r, (p\wedge q)\to(s\leftrightarrow t), \neg r\vee\neg t \vdash \neg s$

符号化错误！

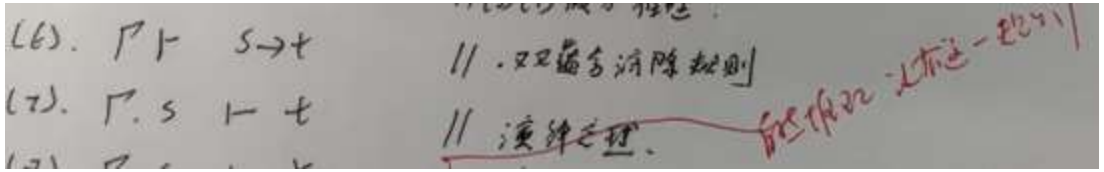
多个前提之间无需用合取，直接用逗号即可！

自然推理部分作业存在的一些问题

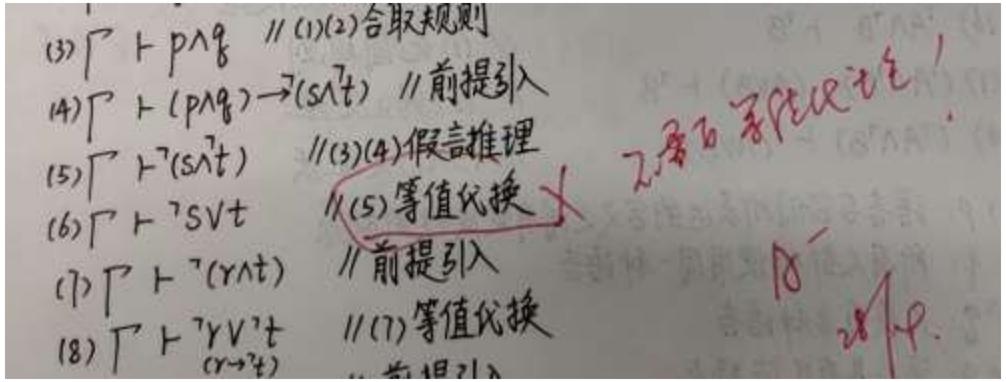

(6). $p\to\neg q, r, r\to(\neg q\to\neg s) \vdash r\to\neg s$ // (4)(3)析取三段论

(7). $p\to\neg q, r, r\to(\neg q\to\neg s) \vdash \neg\neg s\to\neg p$ // (5)假言易位.

$\vdash s\to\neg p$ //双重否定律.


(6). $\Gamma \vdash s\to t$ // 双蕴含消除规则

(7). $\Gamma, s \vdash t$ // 演绎定理.


(3) $\Gamma \vdash p\wedge q$ // (1)(2)合取规则

(4) $\Gamma \vdash (p\wedge q)\to\neg(s\wedge\neg t)$ // 前提引入

(5) $\Gamma \vdash \neg(s\wedge\neg t)$ // (3)(4)假言推理

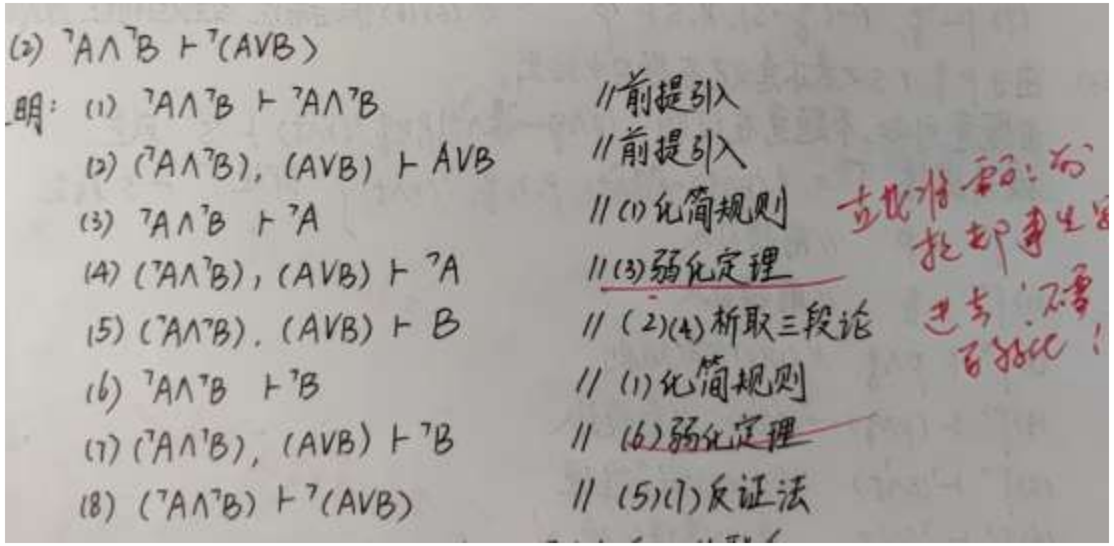
(6) $\Gamma \vdash \neg s\vee t$ // (5)等值代换

(7) $\Gamma \vdash \neg(r\wedge t)$ // 前提引入

(8) $\Gamma \vdash \neg r\vee\neg t$ // (7)等值代换

不要用等值代换!

错误使用规则!


(2) $\neg A\wedge\neg B \vdash \neg(A\vee B)$

证明: (1) $\neg A\wedge\neg B \vdash \neg A\wedge\neg B$ // 前提引入

(2) $(\neg A\wedge\neg B), (A\vee B) \vdash A\vee B$ // 前提引入

(3) $\neg A\wedge\neg B \vdash \neg A$ // (1)化简规则

(4) $(\neg A\wedge\neg B), (A\vee B) \vdash \neg A$ // (3)弱化定理

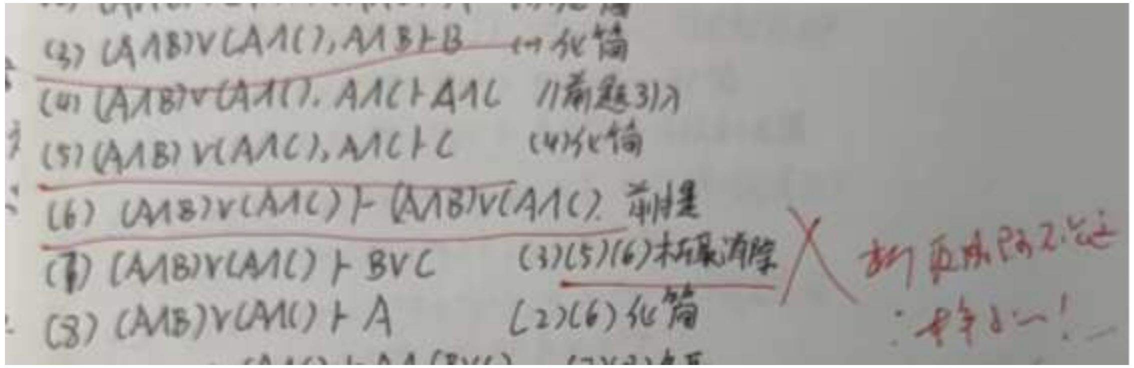
(5) $(\neg A\wedge\neg B), (A\vee B) \vdash B$ // (2)(4)析取三段论

(6) $\neg A\wedge\neg B \vdash \neg B$ // (1)化简规则

(7) $(\neg A\wedge\neg B), (A\vee B) \vdash \neg B$ // (6)弱化定理

(8) $(\neg A\wedge\neg B) \vdash \neg(A\vee B)$ // (5)(7)反证法

在实际证明中通常不需要使用弱化定理，因为通常可将所有需要的前提预先写在前提集中！


(3) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C), A\wedge B \vdash B$ (1)化简

(4) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C), A\wedge C \vdash A\wedge C$ //前提引入

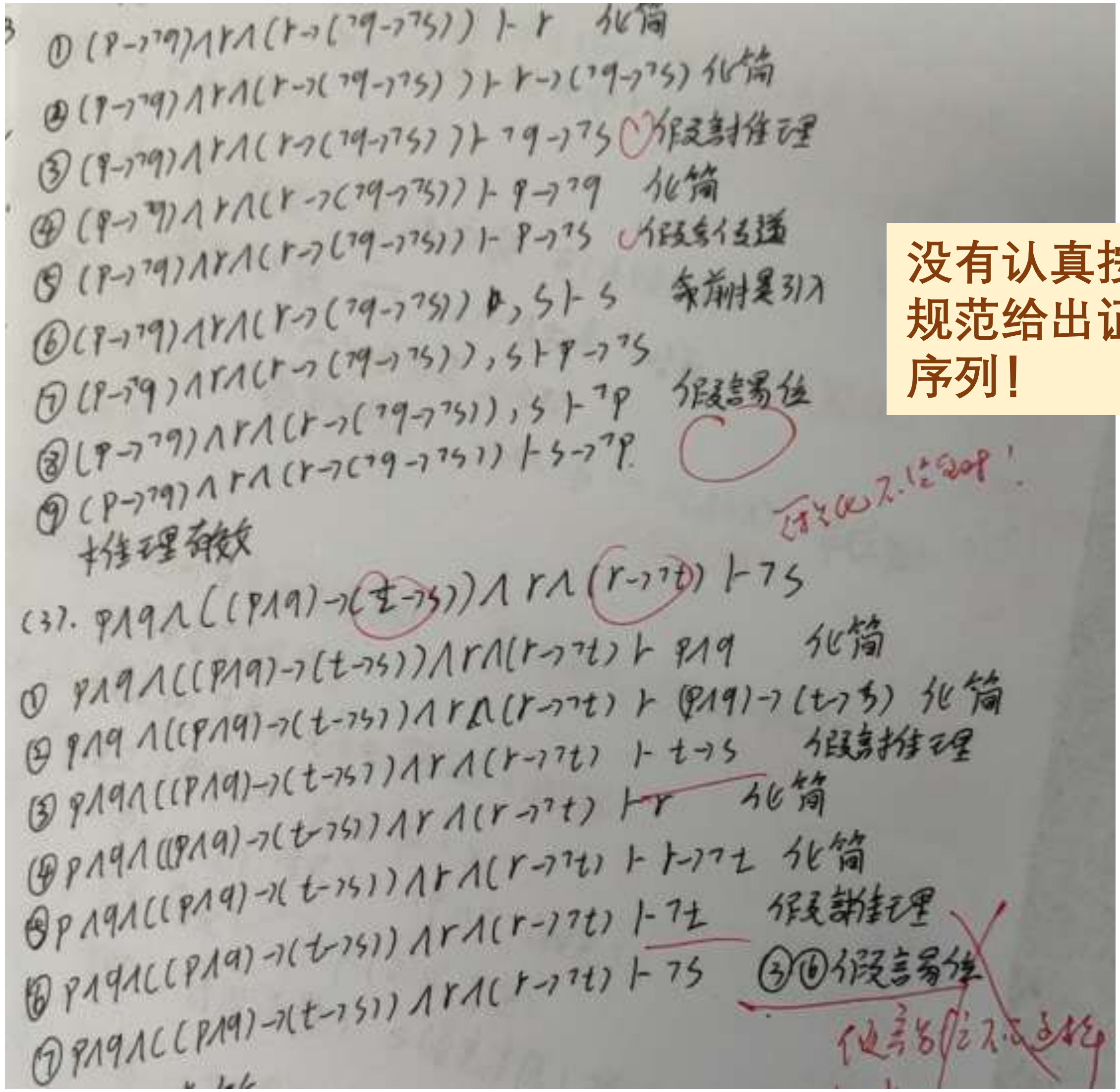
(5) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C), A\wedge C \vdash C$ (4)化简

(6) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \vdash (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 前提

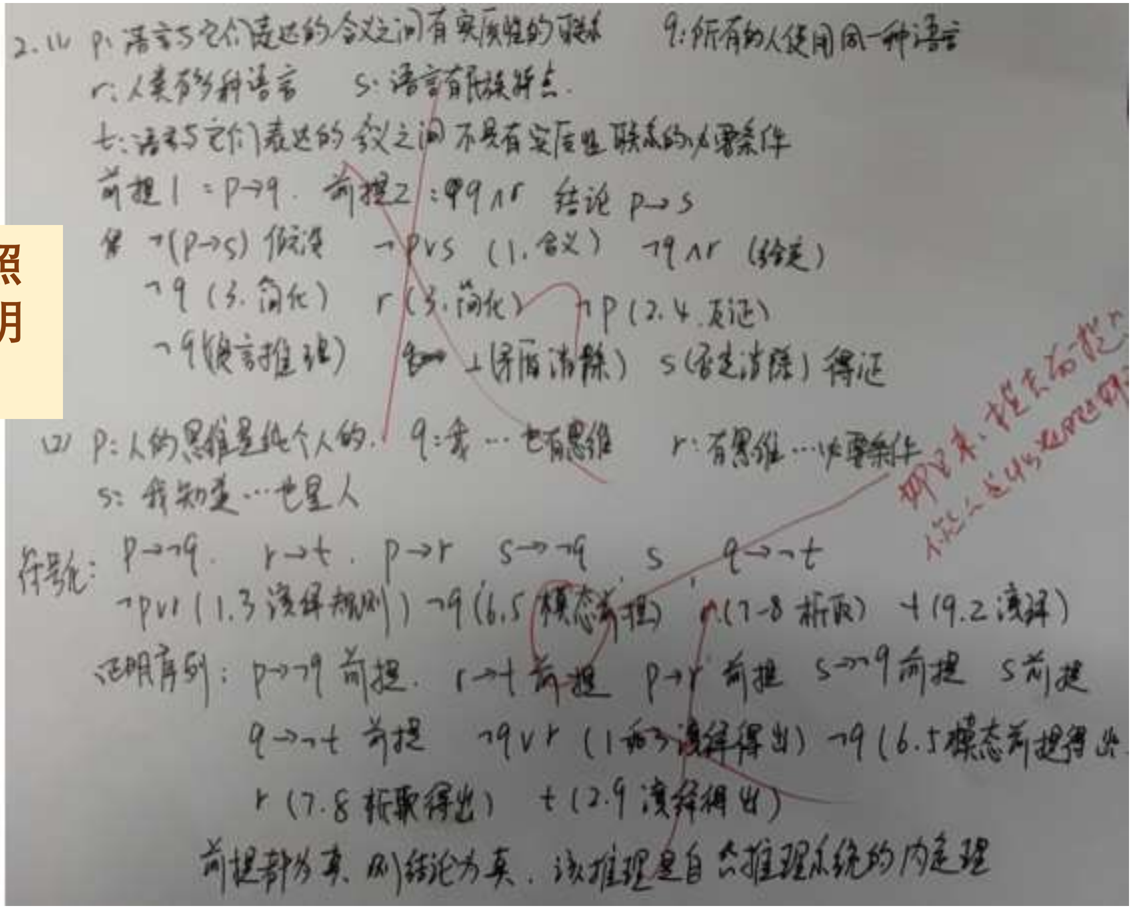
(7) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \vdash B\vee C$ (3)(5)(6)析取消除

(8) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \vdash A$ (2)(6)化简

自然推理部分作业存在的一些问题



没有认真按照规范给出证明序列！



上面这个完全是乱写，考试时写成这样不会给分！

谢谢大家！

有什么问题和建议请及时反馈给老师！