Projekt z przedmiotu GIS - sprawozdanie II

Marek Jasiński, Przemysław Piotrowski

4 kwietnia 2013

1 Treść zadania

Temat zadania Znajdowanie zbioru najkrótszych ścieżek pomiędzy parą wybranych lub wylosowanych wierzchołków grafu przy awaryjnych krawędziach.

Opis zadania Muszą być spełnione następujące warunki: a)pierwsza wygenerowana ścieżka: najkrótsza ścieżka pomiędzy wybraną parą wierzchołków b)każda następna wygenerowana ścieżka posiada krawędź różną od co najmniej jednej krawędzi ścieżki z punktu a) i minimalną długość. Krok b) jest powtarzany kolejno aż do wyczerpania wszystkich krawędzi ścieżki z punktu a) Dane do projektu: G=(V,E) - graf o zadanej strukturze, wylosowana lub wybrana para wierzchołków. Zastosowanie: wyznaczanie ścieżek rezerwowych w sieci w sytuacji awarii pojedynczej krawędzi sieci. Literatura: N.Christofides, Graph Theory - an algorithmic approach, Academic Press 1975, str. 150- 157, 167-170. M.Sysło, N.Deo, J.Kowalik, Algorytmy optymalizacji dyskretnej, PWN 1995. N.Deo, Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce. PWN 1980.

2 Algorytmy

Wyszukiwanie alternatywnych ścieżek Graf jest wewnętrznie reprezentowany w postaci listy sąsiedztwa, której implementację dostarcza biblioteka Boost Graph [2]. Pomimo, że biblioteka dostarcza implementację algorytmu znajdującego najkrótszą ścieżkę pomiędzy dwoma wierzchołkami, zaimplementowaliśmy własny algorytm oparty na algorytmie Dijkstry. Ogólny algorytm polega na znalezieniu najkrótszej ścieżki pomiędzy wierzchołkami źródłowym i docelowym oraz wykorzystaniu jej do dalszego przetwarzania.

Kolejne krawędzie z tej ścieżki są tymczasowo usuwane, aby uruchamiać algorytm znajdywania najkrótszej ścieżki, który dostarcza alternatywną ścieżkę dla awaryjnej krawędzi. Warto zwrócić uwagę na to, że mogą istnieć krawędzie, których usunięcie spowoduje, że graf przestanie być spójny. Takie krawędzie oznaczane są kolorem czerwonym, jako krytyczne. Nie ma alternatywnych ścieżek w grafie dla krawędzi krytycznych.

Złożność algorytmu Dijkstry zależy od liczby wierzchołków V i krawędzi E. O rzedzie tej wielkości decyduje rodzaj kolejki priorytetowej wykorzystywanej do pobierania wierzchołka o najmniejszym dystansie. W przypadku naiwnej implementacji poprzez tablice złożoność ta wynosi $O(V^2)$. W naszym programie zastosowaliśmy implementacje kolejki opartą na stercie. W tym przypadku złożoność wynosi $O(E \log V)$. Wariant ten jest znacznie lepszy dla grafów rzadkich, którymi są sieci małego świata.

Rozpatrywany problem ma złożoność $O(P_{avg} * O_{Dijkstra})$, gdzie P_{avg} to średnia długość ścieżki w grafie, natomiast $O_{Dijkstra}$ to złożoność algorytmu Dijkstry. Wynika to z podejścia widocznego w poniższym pseudokodzie.

Extern *graph #struktura grafu*
Extern s, t *#wierzchołki startowy i końcowy*

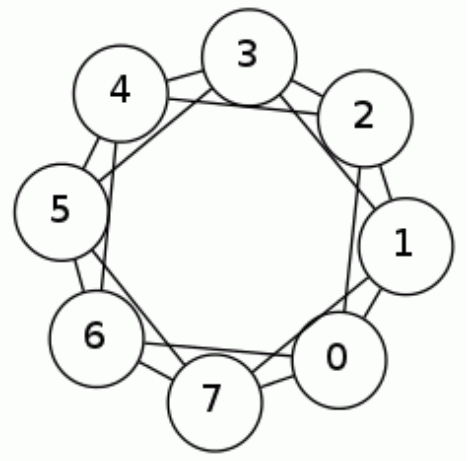
$emergencyPaths \leftarrow [\,]$
$path \leftarrow shortestPath(s, t, graph)$
for *edge* e **in** *path* **do**
    $graph.removeEdge(e)$
    $emergencyPath \leftarrow shortestPath(s, t, graph)$
    $emergencyPaths.append(\ pair(e, emergencyPath)\ )$
    $graph.addEdge(e)$
end for
return $path, emergencyPaths$

Jak widać pętla wykonuje się średnio tyle razy, ile wynosi średnia długość ścieżki w grafie. W pętli najbardziej czasochłonną procedurą jest znalezienie najkrótszej ścieżki (funkcja *shortestPath*). Jej złożoność zależy od złożoności obliczeniowej algorytmu Dijkstry oraz odczytania ścieżki od t do s, czyli wynosi $f(n) = O_{Dijkstra} + P_{avg}$. Drugi człon ma jednak wolniejszy stopień wzrozstu w związku z czym można przyjąć $O_{shortestPath} = O(f(n)) = O(O_{Dijkstra} + P_{avg}) = O(O_{Dijkstra}) = O(E \log V)$. W związku z powyższym złożoność algorytmu to $O_{alg} = O(P_{avg} E \log V)$.

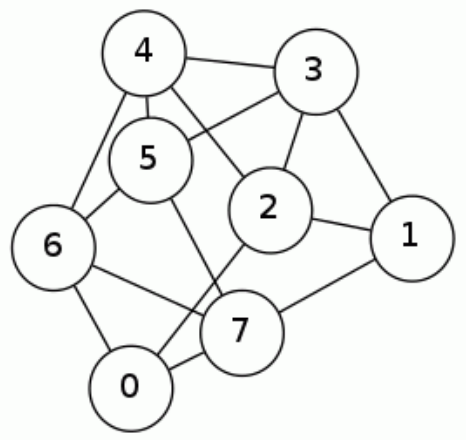
Generator grafów Złożoność obliczeniowa programu została zbadana na wygenerowanych grafach pochodzących z generatora grafów. Danymi wyjściowymi generatora są grafy zapisane w formacie DOT. Grafy te odwzo-

rowują sieci małego świata[4]. Oznacza to, że większość wierzchołków nie sąsiaduje ze sobą, ale pomiędzy większością par wierzchołków można znaleźć ścieżkę składającą się z małej liczby krawędzi. Sieci takie często obserwowane są np. w sieciach społecznościowych. Krawędź oznacza wtedy, że dwie osoby się znają.

Tworzenie przykładowego grafu małego świata składa się z dwóch kroków. Pierwszym z nich jest stworzenie grafu o regularnej strukturze. Przykład zaprezentowany jest na Rys. 1. Następnie należy dla każdej z krawędzi wylosować, czy powinna ona zostać przepięta, czy też nienaruszona. W efekcie powstaje graf jak na Rys. 2. Dla większej liczby wierzchołków graf widocznie nabiera cech „małego świata". Widoczne jest to na Rys. 3.



Rysunek 1: *Graf o regularnej strukturze*



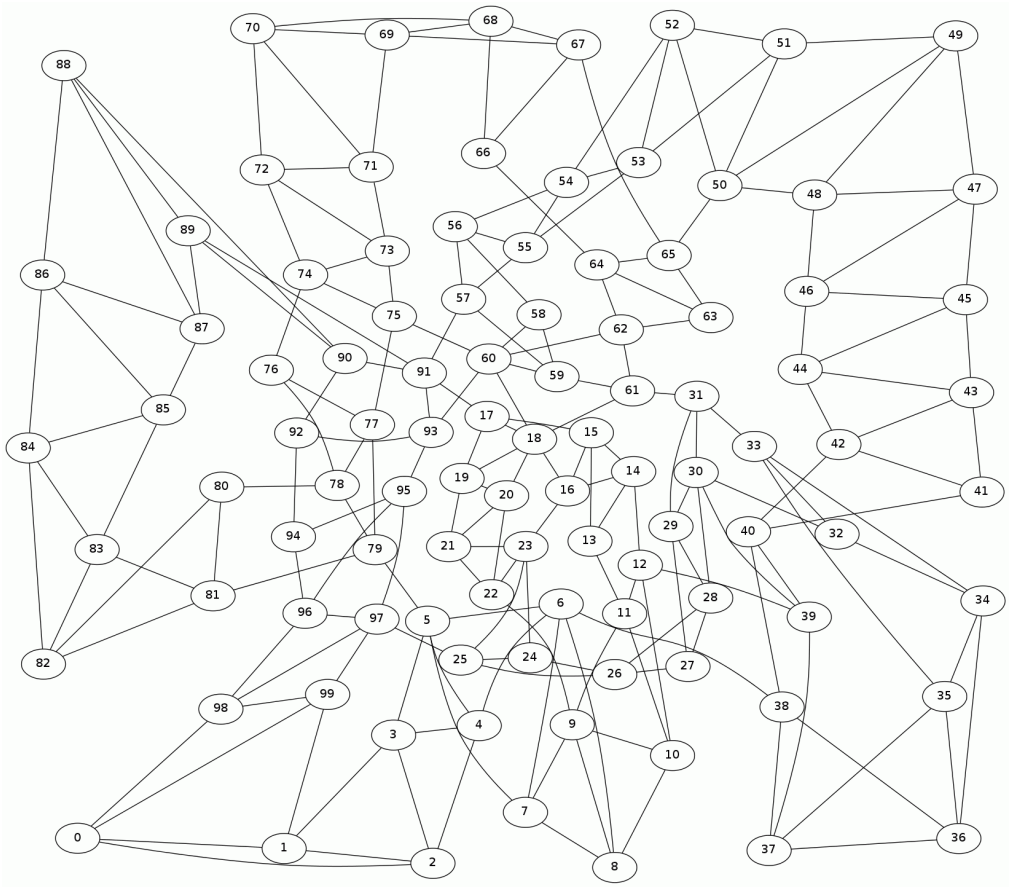
Rysunek 2: *Graf po przemieszaniu krawędzi*

3 Programy

architektura

Wejście programu Program przyjmuje na wejściu graf oraz dwa wierzchołki: źródłowy i docelowy. Graf musi być grafem nieskierowanym z ważonymi krawędziami (wagi nieujemne) bez krawędzi równoległych. Graf jest zadawany w pliku tekstowym. Format tego pliku jest zgodny z formatem DOT [1]. Parametrami programu są:

- nazwa pliku tekstowego zawierającego opis grafu w formacie DOT,



Rysunek 3: *Duży graf wygenerowany przez generator. Posiada cechy małego świata.*

- nazwa wierzchołka źródłowego (ang. *source*) i nazwa wierzchołka docelowego (ang. *target*).

Przykładowe wywołanie programu może wyglądać w ten sposób:

```
$ ./ap graph.dot -s w1 -t w5
```

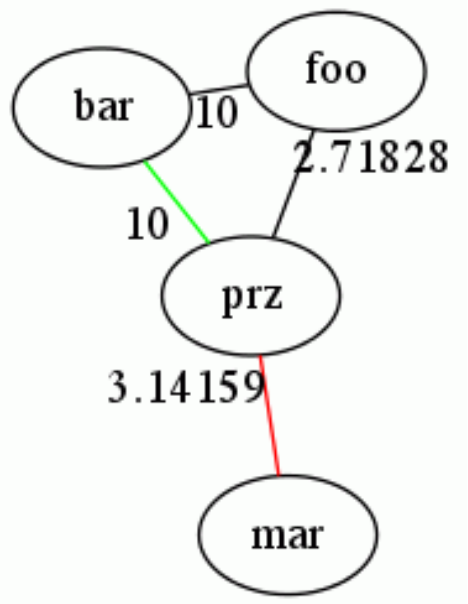
ap jest skrótem od *Alternate Path* - tak nazywa się nasz program. Przykładowy plik z zadanym grafem wejściowym może wyglądać w ten sposób:

```
/* graph.dot */
graph G {
w1 -- w2 [weight=1];
w2 -- w3 [weight=1];
```

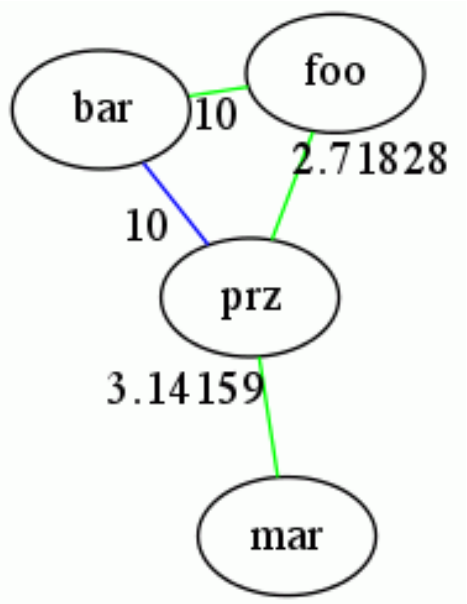
```
w1 -- w4 [weight=1];
w4 -- w2 [weight=1];
w2 -- w5 [weight=1];
w5 -- w3 [weight=1];
}
```

Plik opisujący graf może być przygotowany ręcznie, zostać pobrany z Internetu, a także może być wygenerowany przy pomocy naszego drugiego programu, tj. generatora grafów. Opis działania generatora grafów można znaleźć w paragrafie 2.

Wyjście programu Wizualizację rezultatu działania programu zapewnia program NEATO z pakietu Graphviz [3]. Służy on do rysowania grafów nieskierowanych. Za pomocą programu NEATO generowane są pliki, na podstawie których generowane są strony HTML. Na stronach można zobaczyć jak wyglądają najkrótsza ścieżka pomiędzy wierzchołkami źródłowym i docelowym oraz najkrótsze ścieżki alternatywne (po kliknięciu na krawędź, którą uznaje się za awaryjną). Przykładowa zawartość stron może wyglądać w ten sposób:



Rysunek 4: *Główny obrazek (na stronie index.html)*



Rysunek 5: *Po kliknięciu na zieloną krawędź na głównym obrazku*

Na rysunku po lewo widzimy najkrótszą ścieżkę pomiędzy wierzchołkami `mar` a `bar`. Została ona oznaczona na kolorowo. Składa się z dwóch krawędzi.

Na wypadek awarii krawędzi zielonej istnieje ścieżka alternatywna, która jest przedstawiona na rysunku po prawo. Czerwona krawędź jest krytyczna - nie ma dla niej alternatywnych ścieżek.

Drugim rezultatem działania programu jest plik `report.txt` zawierający informacje o najkrótszej ścieżce oraz ścieżkach alternatywnych. Przy każdej ze ścieżek jest informacja o koszcie (sumie wag krawędzi) i liczbie krawędzi (liczbie przeskoków). Przykładowa zawartość pliku raportu może wyglądać w ten sposób:

```
Shortest path: mar--prz--bar Cost: 13.1416 Hops: 2
mar--prz | No emergency path
prz--bar | mar--prz--foo--bar Cost: 15.8599 Hops: 3
```

4 Testy i eksperymenty

W celu zbadania złożoności algorytmu stworzony został skrypt zapisujący czas działania programu wraz z długością najkrótszej ścieżki pomiędzy wylosowanymi wierzchołkami. Przykładowy wynik działania prezentuje Rys. 6.

	A	B	C
1	**czas wykonania**	**długość ścieżki**	
2	0.478909	1.0	
3	0.492453	1.0	
4	0.699502	2.0	
5	0.708394	2.0	
6	0.712314	2.0	
7	0.716741	2.0	
8	0.935963	3.0	
9	0.944184	3.0	
10	0.945143	3.0	
11	0.953695	3.0	
12	0.956594	3.0	
13	1.159218	4.0	

Rysunek 6: *Zestawienie wynikow*

Dzięki takiemu zestawieniu można sprawdzić, czy złożoność teoretyczna algorytmu została wyznaczona poprawnie.

5 Bibliografia

[1] „The DOT Language”
`http://www.graphviz.org/doc/info/lang.html`

[2] „The Boost Graph Library”
http://www.boost.org/doc/libs/1_53_0/libs/graph/doc/index.html

[3] „Graphviz - Graph Visualization Software”
http://www.graphviz.org/

[4] „Classes of small-world networks”, Amaral, Luis A Nunes and Scala, Antonio and Barthélémy, Marc and Stanley, H Eugene