6. M/M/s(∞)

概要: M/M/s(∞)はランダムな訪問頻度、ランダムなサービス時間、複数のサービスメンバー(s), そして系にいることのできる人数は無限大の状況に対応する理論である。 これは待ち行列理論の最も基本的なものである。我々は待ち人数の平均、系にいる人数の平均、系に滞在する時間の平均、待ち時間の平均を求める。

キーワード: M/M/1(∞); M/M/s(∞);状態確率;状態確率遷移;待ち行列;滞在時間;アーランの方程式;オペレーション率

6.1. 序

銀行やレストランでは、我々は待ち、サービスを受け、そして去っていく。我々はその場合に待っている人数、待ち時間の情報を知りたい。ケンドールの表記 M/M/1(∞) および M/M/s(∞) は、訪問、サービスがランダム、対応するサービスのメンバーがそれぞれ 1 人、s 人、系にいることのできる人数が無限大であること表している。この系の解析は待ち行列理論の基本的なものである。

6.2. 一人の顧客の訪問確率およびサービス終了確率

微小時間間隔 Δt の間に一人の顧客が系にくる確率を考える。

単位時間あたり顧客が系を訪問する数、つまり訪問頻度を λ とする。したがって、一人の顧客が系を訪問する平均時間を t_c とすると以下の式が成り立つ。

$$\lambda t_c = 1 \tag{1}$$

したがって、以下を得る。

$$t_c = \frac{1}{\lambda} \tag{2}$$

一人の顧客が微小時間 Δt の間に系を訪問する確率は以下となる。

$$\frac{\Delta t}{t_c} = \lambda \Delta t \tag{3}$$

同様に、一人の顧客のサービスが終了する確率は $\mu\Delta t$ となる。これは、サービスをする人が 1 人の場合で、それが s 人であれば、その確率は $s\mu\Delta t$ となる。

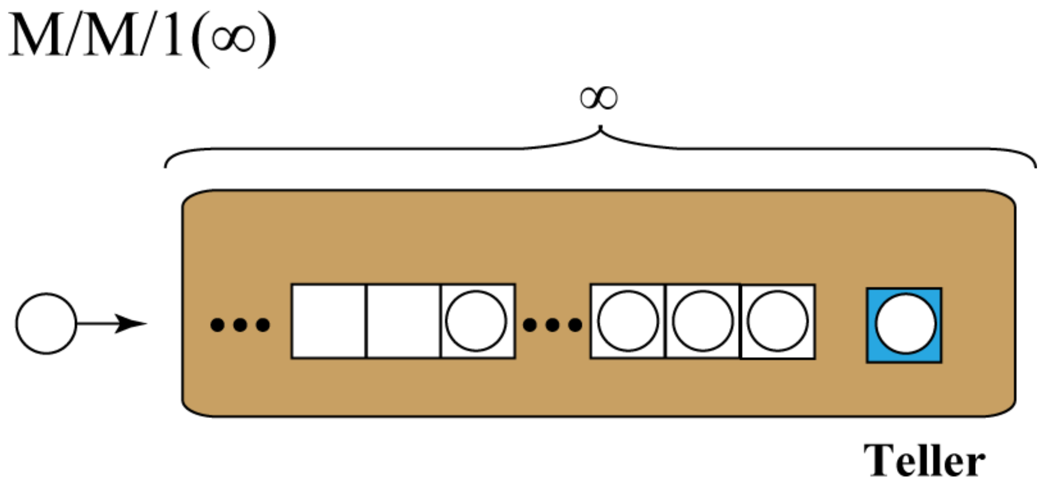


図 1　M/M/1(∞)の系の模式図

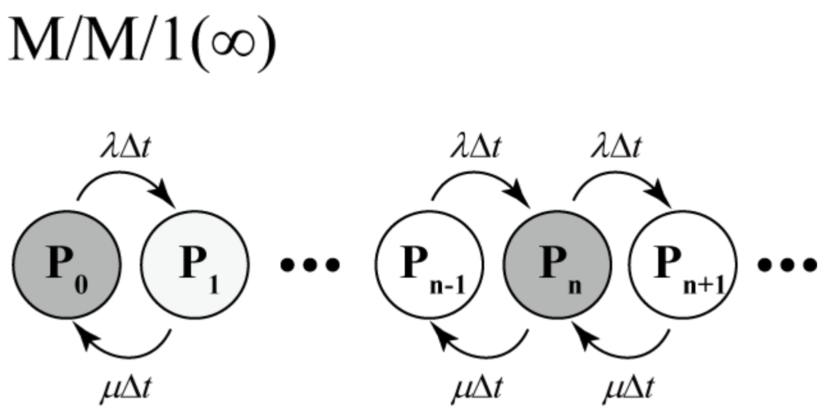


図 2　M/M/1(∞)に対応する状態確率の遷移

6.3.　M/M/1(∞)

6.3.1.　サービス対応者が 1 人の場合の遷移確率

図 1 に $M/M/1(\infty)$ の系を示す。$M/M/1(\infty)$ はランダムな訪問、ランダムなサービス時間、1 人のサービス対応者、系にいることができる人数は無限大、であることを表す。

P_n は系に n 人いる状態に対する確率である。系にいる顧客の数は時間とともに変動する。しかし、我々は長い時間の平均値をとる。その平均値がある値に落ち着くと仮定する。つまり、長い時間経過後、P_n はある値に落ち着くと考える。このような状態を定常状態と呼ぶ。我われは、定常状態が存在すると仮定する。もしも入力頻度が出力頻度よりも大きけ

れば、時間とともに系にいる人数は増加し、このような定常状態は存在しない。したがって、定常状態が存在するためには、入力頻度が出力頻度よりも小さくなければならない。それを、この解析では仮定する。

状態確率の遷移の状況を図 2 に示す。

微小時間Δt は十分小さな値を設定する。つまり、この微小時間Δtの間に二つのことが起こらないと仮定する。したがって、微小時間Δtの間に二人の顧客は系に来ることはないし、二人の顧客のサービスが終わることもないし、一人の顧客は系に来てかつ一人の顧客のサービスが終わるということもない。したがって、状態確率P_n と関連する確率はP_{n-1}, P_{n+1}, またはP_nの三つである。

状態が $n-1$ から nに移る場合を考える。これは、顧客の系への訪問と関連する。一人の顧客が系を訪問する確率は$\lambda\Delta t$ である。したがって、 P_n は $\lambda\Delta t P_{n-1}$だけ増加する。

状態が$n+1$ から nに移動する場合を考える。これはサービスの終了と関連する。一人のサービスメンバーがそのサービスを終了する確率は$\mu\Delta t$である。したがって、P_nは$\mu\Delta t P_n$だけ増加する。

最後に状態がnのままである場合を考える。この場合は訪問もサービスの終了も起こらないから、対応する確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) \approx 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$である。ここで、二次の微小量$\lambda\mu(\Delta t)^2$は無視している。したがって、$P_n$は次の微小時間後には$(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_n$になる。

上の結果をまとめると、P_n の状態遷移は以下のようになる。

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) + \mu\Delta t P_{n+1}(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) - \mu\Delta t P_n(t) - \lambda\Delta t P_n(t) \tag{4}$$

$\Delta t \to 0$の極限を考え、定常状態を仮定すると、以下を得る。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - \mu P_n - \lambda P_n = 0 \tag{5}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} \mu P_{n+1} - \lambda P_n &= \mu P_n - \lambda P_{n-1} \\ &= \mu P_{n-1} - \lambda P_{n-2} \\ &\cdots \\ &= \mu P_1 - \lambda P_0 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。Eq. (6) の最後の項は以下のように評価できる。

系に誰もいない状態に対する確率P_0を考える。これは、端点になり、他の場合とは異なる。その様相を**エラー! 参照元が見つかりません。**に示す。

この状態では顧客は系内に一人もいないから、サービスは考えなくていい。この状態と系に一人だけいる状態を考えればいい。つまり、P_0 の他には P_1のみを考えればいい。

状態が1から0に移動する場合を考える。これはサービスの終了と関連する。一人のサービスメンバーがそのサービスを終了する確率は$\mu\Delta t$である。したがって、P_0は$\mu\Delta t P_n$だけ増加する。

最後に状態が 0 のままである場合を考える。この場合は訪問が起こらないから、対応する確率は$1-\lambda\Delta t$ である。したがって、P_0は次の微小時間後には$\left(1-\lambda\Delta t\right)P_0$になる。

上の結果をまとめると、P_0 の状態遷移は以下のようになる。y

$$P_0\left(t+\Delta t\right)=P_0\left(t\right)+\mu\Delta tP_1\left(t\right)-\lambda\Delta tP_0\left(t\right) \tag{7}$$

$\Delta t\to 0$の極限状態を考え、定常状態を考えると以下のようになる。

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}=\mu P_1-\lambda P_0=0 \tag{8}$$

Eq. (8) の結果を Eq. (6)に代入する、以下を得る。

$$\begin{aligned}\mu P_{n+1}-\lambda P_n&=\mu P_1-\lambda P_0\\&=0\end{aligned} \tag{9}$$

これから

$$P_{n+1}=\rho P_n \tag{10}$$

となる。ただし、

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{11}$$

である。定常状態が存在するためには$\lambda<\mu$ であるから、

$$0<\rho<1 \tag{12}$$

である。

したがって、 P_n は以下のようになる。

$$\begin{aligned}P_n&=\rho P_{n-1}\\&=\rho\rho P_{n-2}=\rho^2P_{n-2}\\&\cdots\\&=\rho^nP_0\end{aligned} \tag{13}$$

ここで、P_0は決まっていない。このP_0は、全ての確率の和が 1 になることから決定される。すなわち

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)P_0=\frac{1}{1-\rho}P_0=1 \tag{14}$$

となる。これからP_0 は以下のようになる。

$$P_0=1-\rho \tag{15}$$

これにより、すべての状態確率は求まった。

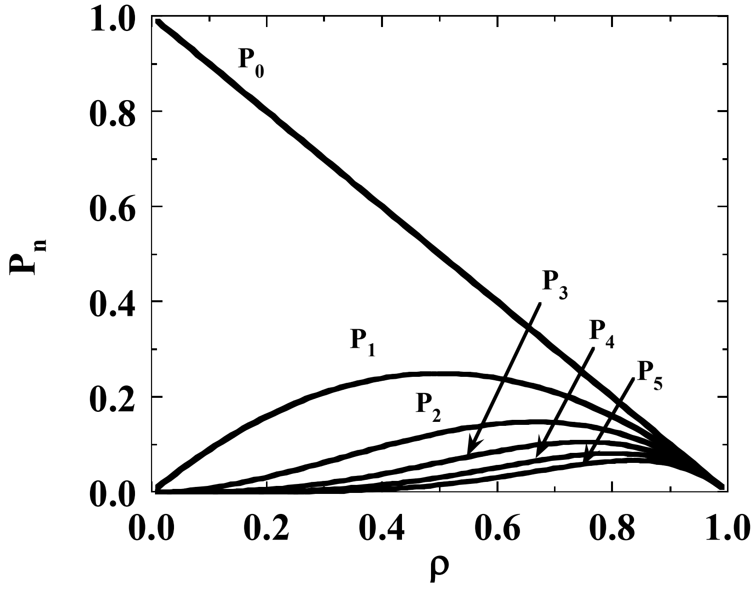


図 3　M/M/1(∞)における P_n の ρ 依存性

図 3 に P_n の ρ 依存性を示す。 P_0 は常に最大値であり、ρ が増えるにつれ単調に減少していく。P_n は n が増えるにつれ減少していく。また、$n \geq 1$ で常にピークを持つ。

P_n のピーク位置は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_n}{\partial \rho} &= n\rho^{n-1}P_0 - \rho^n \\ &= n\rho^{n-1}\left(1-\rho\right) - \rho^n \\ &= n\rho^n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{n+1}{n}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{16}$$

P_n のピーク位置の ρ は以下である。

$$\rho = \frac{n}{n+1} \tag{17}$$

この時の P_n の値 $P_{n\_\max}$ は

$$\begin{aligned}P_{n\_\max} &= \rho^n\left(1-\rho\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\end{aligned} \tag{18}$$

となる。

ピーク位置はnが大きくなるにつれ 1 に近づいていく。そして、すべての確率は$\rho=1$に近づくにつれ等しくなっていく。

もし、系に一人の顧客がいればサービス対応メンバーは埋まっている。したがって、顧客は待つことになる。系にそれ以上のメンバーがいても、顧客はサービスを待つことになる。したがって、顧客が待つ確率は$P_1, P_2, \cdots$である。したがって、一人の顧客が系を訪問した場合、待つ確率P_wは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_w &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= 1 - P_0 \\ &= 1 - (1-\rho) \\ &= \rho \end{aligned} \tag{19}$$

図 4 に P_wのρ依存性を示す。ρが増えればP_wは単調に増えていく。

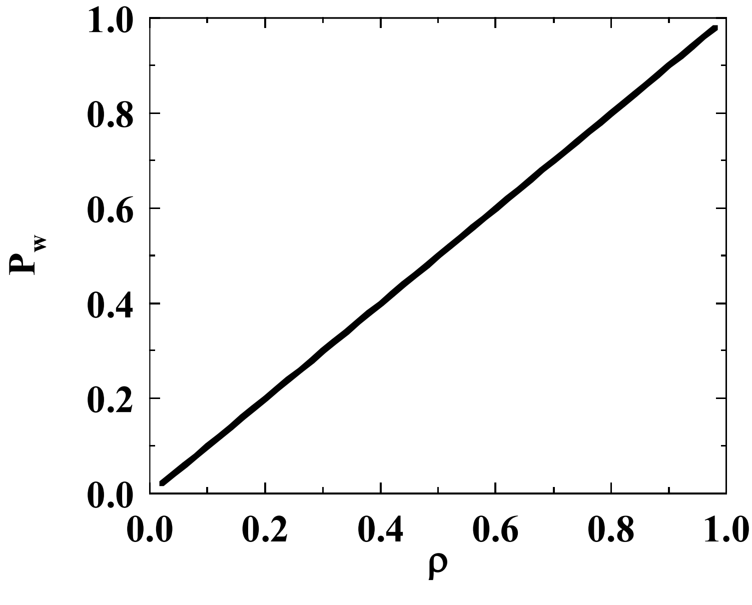


図 4　M/M/1(∞)におけるP_wのρ依存性

6.3.2. 一人のサービス提供者の場合の平均待ち人数L_qおよびその分散 V_{Lq}

ここで、平均の待ち人数L_qとその分散V_{Lq}を評価する。

状態が 2 の場合は待ち人数は 1 である。状態が 3 の場合は待ち人数は 2 である。それを

繰り返し考えると状態が $n+1$ の場合の待ち人数は n である。したがって、L_q は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{1+n} \\
&= 1P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \cdots \\
&= \left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots\right) P_0 \\
&= \left(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots\right) \rho^2 P_0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Eq. (20)の両辺に ρ をかけて以下を得る。

$$
\rho L_q = \left(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots\right) \rho^2 P_0 \tag{21}
$$

Eq(20) から Eq (21)を辺々引いて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\left(1-\rho\right) L_q &= \left(1 + \rho + \rho^2 + \cdots\right) \rho^2 P_0 \\
&= \frac{\rho^2}{1-\rho} P_0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

したがって、L_q は以下となる。

$$
L_q = \frac{\rho^2}{\left(1-\rho\right)^2} P_0 \tag{23}
$$

次にその分散 V_{L_q} を以下のように評価する。

$$
\begin{aligned}
V_{L_q} &= \left(0 - L_q\right)^2 \left(P_0 + P_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - L_q\right)^2 P_{n+1} \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - 2L_q n + L_q{}^2\right) P_{n+1} \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n+1} - 2L_q \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1} + L_q{}^2 \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n+1} - 2L_q{}^2 + \left(1 - \sum_{n=0}^{1} P_n\right) L_q{}^2 \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\left(n-1\right) + n\right] P_{n+1} - \left(1 + \sum_{n=0}^{1} P_n\right) L_q{}^2 \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(n-1\right) P_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1} - \left(1 + \sum_{n=0}^{1} P_n\right) L_q{}^2 \\
&= L_q^2 \left(P_0 + P_1\right) + V_{Lq1} + L_q - \left(1 + \sum_{n=0}^{1} P_n\right) L_q{}^2 \\
&= V_{Lq1} + L_q - L_q{}^2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

ここで、以下を利用している。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1} = L_q \tag{25}$$

ここで、以下の変数を定義および導入している。

$$V_{Lq1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{1+n} \tag{26}$$

V_{Lq1} はさらに以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} V_{L_q1} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\rho^n P_1 \\ &= \left[1{\bullet}0\rho + 2{\bullet}1\rho^2 + 3{\bullet}2\rho^3 + 4{\bullet}3\rho^4 + \cdots\right]P_1 \end{aligned} \tag{27}$$

Eq. (27)の両辺に ρ を掛けて、以下を得る。

$$\rho V_{L_q1} = \left[1{\bullet}0\rho^2 + 2{\bullet}1\rho^3 + 3{\bullet}2\rho^4 + 4{\bullet}3\rho^5 + \cdots\right]P_1 \tag{28}$$

Eqs. (27)から (28)を辺々引いて以下を得る。

$$(1-\rho)V_{L_q1} = \left[1{\bullet}2\rho^2 + 2{\bullet}2\rho^3 + 3{\bullet}2\rho^4 + \cdots\right]P_1 \tag{29}$$

Eq.(29)の両辺に ρ を掛けて、以下を得る。

$$\rho(1-\rho)V_{L_q1} = \left[1{\bullet}2\rho^3 + 2{\bullet}2\rho^4 + 3{\bullet}2\rho^5 + \cdots\right]P_1 \tag{30}$$

Eqs. (29) から Eq. (30)を辺々引いて以下を得る。

$$\begin{aligned} (1-\rho)^2 V_{L_q1} &= \left[1{\bullet}2\rho^2 + 1{\bullet}2\rho^3 + 1{\bullet}2\rho^4 + \cdots\right]P_1 \\ &= 2\rho^2 \frac{1}{1-\rho} P_1 \end{aligned} \tag{31}$$

これから V_{Lq1} は以下のように求まる。

$$V_{L_q1} = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3} P_1 \tag{32}$$

これは L_q を使って以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
V_{L_q1} &= \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3} P_1 \\
&= \frac{2\rho}{1-\rho} \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} P_0 \\
&= \frac{2\rho}{1-\rho} L_q
\end{aligned}
\tag{33}
$$

したがって、待ち人数の分散 V_{Lq} は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
V_{L_q} &= V_{Lq1} + L_q - L_q{}^2 \\
&= \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3} P_1 + L_q - L_q{}^2 \\
&= \frac{2\rho}{1-\rho} L_q + L_q - L_q{}^2 \\
&= \frac{1+\rho}{1-\rho} L_q - L_q{}^2
\end{aligned}
\tag{34}
$$

待ち人数の標準偏差 σ_{L_q} は以下のように評価される。

$$
\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{Lq}} \tag{35}
$$

これはさらに以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
\sigma_{L_q} &= \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho} L_q - L_q{}^2} \\
&= \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho} \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2 P_0} L_q{}^2 - L_q{}^2} \\
&= L_q \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho} \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2 (1-\rho)} - 1} \\
&= L_q \sqrt{\frac{1+\rho}{\rho^2} - 1} \\
&= L_q \sqrt{\frac{1+\rho-\rho^2}{\rho^2}} \\
&= L_q \sqrt{\frac{1}{\rho} + \frac{1-\rho^2}{\rho^2}}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

L_q および σ_{L_q} の ρ 依存性を図 5 に示す。両者とも ρ 増加するにともない単調に増加する。

また両者とも ρ が 1 に近づくと急激に増加する。また、σ_{L_q} は L_q より常に大きい。この大小関係をさらに解析する。

L_q に対する σ_{L_q} の比は以下となる。

$$\frac{\sigma_{L_q}}{L_q} = \sqrt{\frac{1}{\rho} + \frac{1-\rho^2}{\rho^2}} \tag{37}$$

ρ は 1 より小さいから、σ_{L_q} は常に L_q より大きくなる。

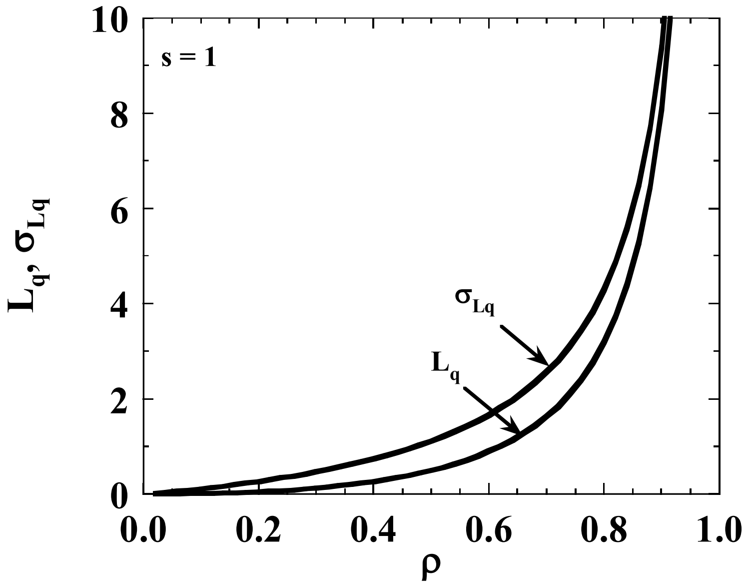


図 5　M/M/1(∞)における L_q および σ_{L_q} の ρ 依存性

6.3.3.　一人のサービス提供者の場合の平均滞在人数 L およびその分散 V_L

系の平均滞在人数 L およびその分散 V_L を評価する。
系の平均滞在に人数 L は以下のように評価する。

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n P_0 \\ &= \left(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots\right) P_0 \end{aligned} \tag{38}$$

Eq.(38)の両辺にρを掛けると以下を得る。

$$\rho L = \left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots\right) P_0 \tag{39}$$

Es. (38) から Eq. (39)を辺々引いて、以下を得る。

$$\begin{aligned}(1-\rho)L &= \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots\right) P_0 \\ &= \rho \frac{1}{1-\rho} P_0\end{aligned} \tag{40}$$

したがて、L は以下のようになる。

$$L = \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} P_0 \tag{41}$$

L と L_q の関係は以下のようになる。

$$\begin{aligned}L &= \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} P_0 \\ &= \frac{\rho^2 - \rho^2 + \rho}{(1-\rho)^2} P_0 \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} P_0 + L_q \\ &= \rho + L_q\end{aligned} \tag{42}$$

次に、系の滞在人数の分散を評価する。それは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
V_L &= (0-L)^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-L)^2 P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 - 2Ln + L^2\right) P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n - 2L^2 + (1-P_0) L^2 \\
&= L^2 P_0 + 1^2 P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P_n - (1+P_0) L^2 \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 P_{n+1} + P_1 - (1+P_0) L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 + 2n + 1\right) P_{n+1} + P_1 - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n-1) + 3n + 1\right] P_{n+1} + P_1 - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P_{n+1} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} + P_1 - L^2 \\
&= V_{Lq1} + 3L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^{1} P_n\right) + P_1 - L^2 \\
&= \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3} P_1 + 3L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^{1} P_n\right) + P_1 - L^2
\end{aligned}
\tag{43}
$$

図 6 に L および L_q の ρ 依存性を示す。 L および L_q は ρ が増えるにしたがって単調に増加し、1 に近づくにしたがって急激に増加する。訪問時間間隔やサービス時間が一定であれば、我々は待ち時間が 0 であることを期待するが、このようにそれらがバラバラである場合には、待ち人数は 0 でなくなる。

図 7 は σ_L と L の ρ 依存性を示している。σ_L は L よりも常に少し大きい。

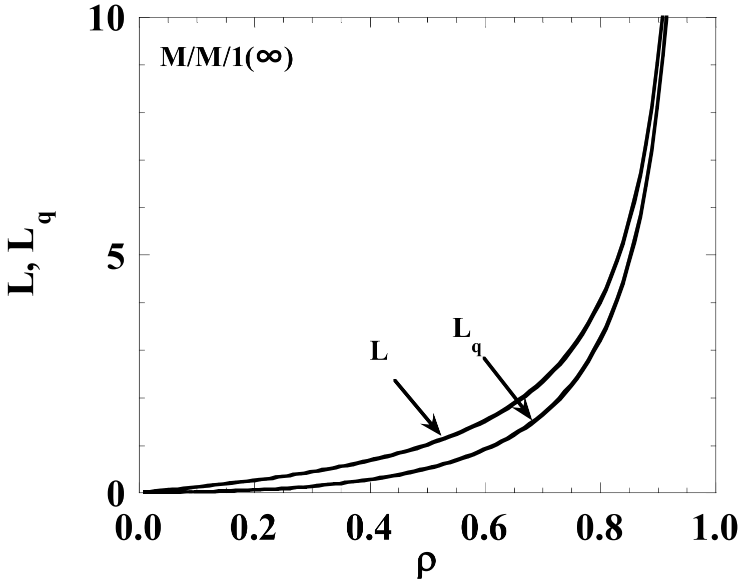


図 6　M/M/1(∞)における L および L_q の on ρ 依存性

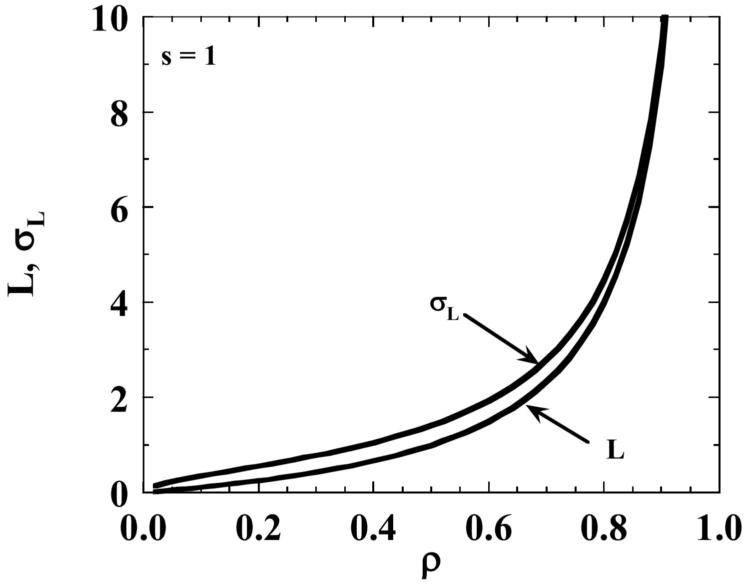


図 7　M/M/1(∞)における σ_L および L の ρ 依存性

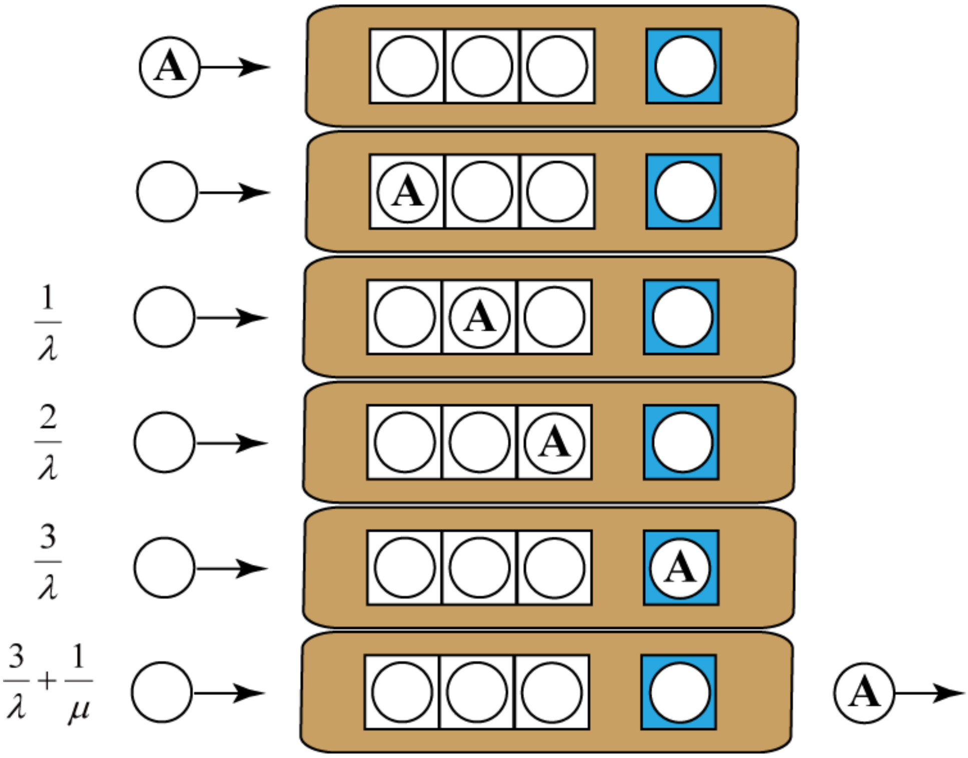


図 8　$L_q = 3$ の場合の M/M/1(∞)における、メンバーA の履歴

6.3.4.　一人のサービス提供者の場合の滞在時間および待ち時間の平均

リトルの定理を利用すれば、系の平均人数が求まれば、ここで求めようとしている系での滞在時間や待ち時間の平均は求まる。しかし、ここでは、リトルの定理を利用せずに、系で起こっているプロセスの詳細を考えそれらを導出していく。

上の議論においては、平均値の議論をする。さらに、定常状態を仮定している。定常状態を仮定するとは流入と流出の流束はλになるように待ち行列を設定していることに相当する。すると時間ステップ$1/\lambda$毎に一人の顧客が系を訪れることになる。したがって、時間ステップとして$1/\lambda$を考える。

まず、待ち時間の平均W_qを考える。ここで、$L_q = 3$を考える。実際は待ち人数はふらついているが、先に述べたように、ここでは現象は平均値を使って記述している。

対応する模式図を図 8 に示す。ここでは、定常状態を仮定しているから、系での待ち人数は一定で 3 である。

メンバーA　が系を訪問し、系に入る(一番上の図)。

次の時間間隔$1/\lambda$を考える。別の人が訪問し、系に入る。メンバーAは列の順番を上げる。このプロセスは繰り返される。したがって、メンバーAの待っている時間は以下で評価され

る。

$$\frac{1}{\lambda}\times 3=\frac{3}{\lambda} \tag{44}$$

したがって、一般的に待っている時間は以下で与えられる。

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda} \tag{45}$$

顧客がサービスを受け始めると、そのサービス時間の平均は$1/\mu$である。したがって、系での総滞在時間Wは以下のように与えられる。

$$W=W_q+\frac{1}{\mu} \tag{46}$$

図 9 に W および W_q の ρ 依存性を示す。W と W_q は ρ が増加するにつれ、緩やかに増加し、それが 1 に近づくと急激に増加する。

ここで、求めたW,W_qはリトルの定理から導かれるものと一致している。

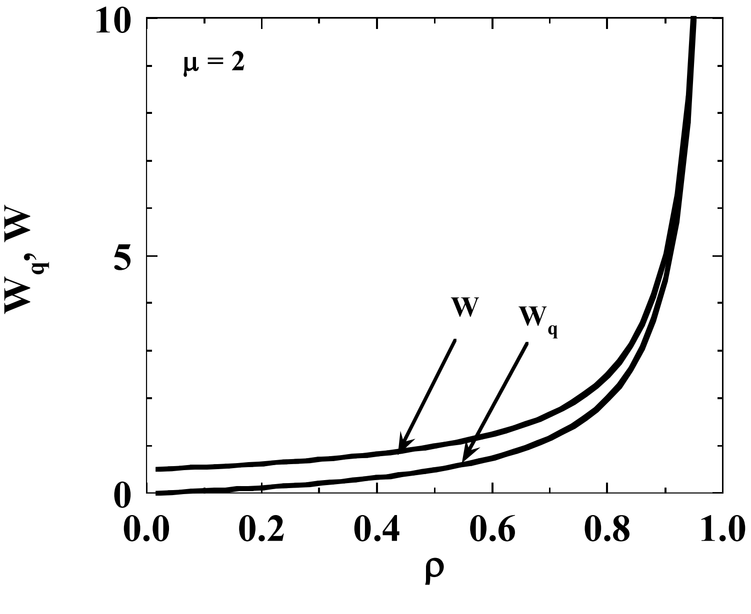
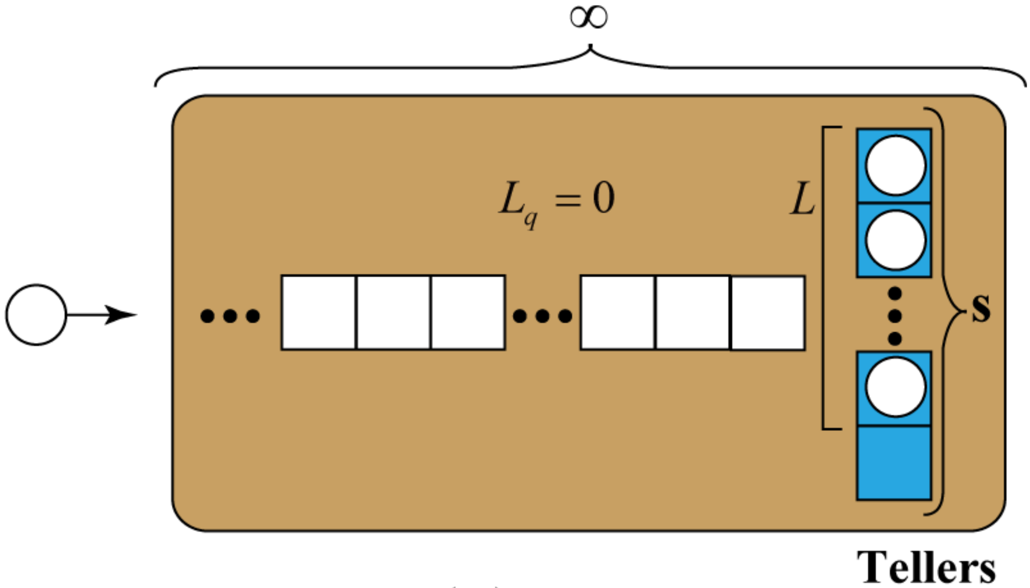


図 9 M/M/1(∞)におけるW と W_q のρ依存性

M/M/s(∞)



$(a)\; n \leq s$

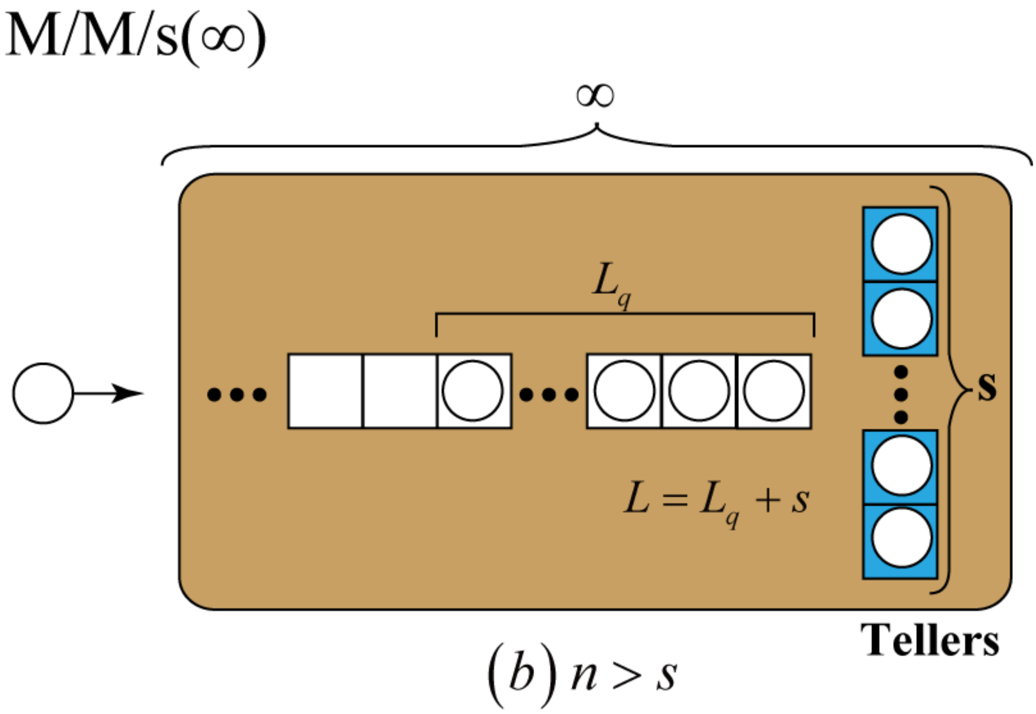


図 10 $M/M/s(\infty)$ の系に対応する模式図(a) $n \le s$ (b) $n > s$.

6.4. M/M/s(∞)

6.4.1. サービス対応者が複数の場合の遷移確率

前節のサービス提供者が一人の場合の解析を、ことでは複数のサービス提供者の場合に拡張する。

図 10 に $M/M/s(\infty)$ に対応する系の模式図を示す。これは、ランダム訪問、ランダムサービス、サービス提供者数 s 、系に存在できる数無限大に相当する。ここでは、図に示すように待ちに対しては単一ラインを仮定する。

ここでは、解析する領域を二つに分けて行う。系にいる顧客の総数 n がサービス提供者の数 s よりも小さい場合と大きい場合である。

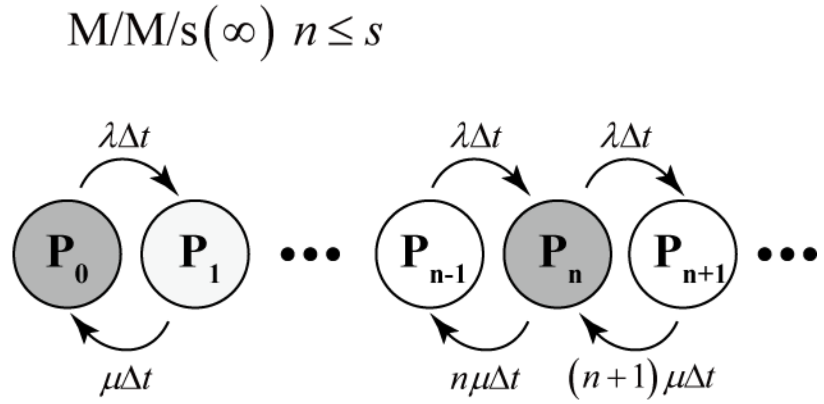


図 11　M/M/s(∞) における状態確率の遷移。ここでは、$n \le s$ を仮定している

(a) $n \le s$

個々ではまず、系にいる顧客の総数 n がサービス提供者の数 s よりも小さい場合を扱う。この中では、顧客は常にサービスを受けている。

この場合は、全ての顧客がサービスを受けている。したがって、サービス提供者がそのサービスを終える確率は顧客の数に比例する。それは $n\mu\Delta t$ で与えられる。

図 11 に $n \le s$ の場合の状態確率の遷移を示す。この中では P_n に注目している。

P_n が変化するものとして考えるのは P_{n-1}, P_{n+1} , or P_n のみである。

状態 $n-1$ から n への遷移を考える。これは系に一人の顧客が訪問したことに相当する。系に顧客が訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、P_n は $\lambda\Delta t P_{n-1}$ だけ増加する。

状態 $n+1$ から n への遷移を考える。これは一人の客のサービスが終わったことに相当する。この確率は $(n+1)\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は $(n+1)\mu\Delta t P_{n+1}$ だけ増加する。

最後に何も変わらない場合を考える。何も起こらない確率は $(1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t) \approx 1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は次の時間ステップでは $(1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t)P_n$ になる。

以上を纏めると以下のようになる。

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) + (n+1)\mu\Delta t P_{n+1}(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) - n\mu\Delta t P_n(t) - \lambda\Delta t P_n(t) \tag{47}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - n\mu P_n - \lambda P_n = 0 \tag{48}$$

これは整理すると以下になる。

$$\begin{aligned}(n+1)\mu P_{n+1} - \lambda P &= n\mu P_n - \lambda P_{n-1} \\ &= (n-1)\mu P_{n-1} - \lambda P_{n-2} \\ &\cdots \\ &= \mu P_1 - \lambda P_0\end{aligned} \tag{49}$$

ここで P_0 は端点になるので特別に考えなくてはならない。P_0 の状態遷移も図 11 に示してある。

状態 0 では、顧客がいないので、サービスをすることができない。また、状態確率の遷移としては P_0 と P_1.のみを考えればよく、P_{-1} は存在しない。

すると確率の遷移は以下のようになる。

$$P_0\left(t+\Delta t\right)=P_0\left(t\right)+\mu\Delta t P_1\left(t\right)-\lambda\Delta t P_0\left(t\right) \tag{50}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}=\mu P_1-\lambda P_0=0 \tag{51}$$

したがって、以下を得る。

$$\mu P_1=\lambda P_0 \tag{52}$$

Eq. (52) を Eq. (49)に代入して以下を得る。

$$\begin{aligned}\left(n+1\right)\mu P_{n+1}-\lambda P &= \mu P_1-\lambda P_0\\ &=0\end{aligned} \tag{53}$$

これから、以下となる。

$$P_{n+1}=\frac{\rho}{n+1}P_n \tag{54}$$

したがって、P_n は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\rho}{n}P_{n-1}\\ &= \frac{\rho}{n}\frac{\rho}{n-1}P_{n-2}\\ &\cdots\\ &= \frac{\rho^n}{n!}P_0\end{aligned} \tag{55}$$

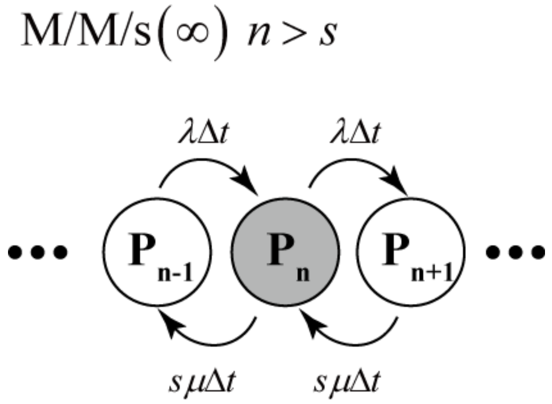


図 12　M/M/s(∞)の場合の状態遷移図。$n > s$ を仮定している

(b) $n > s$

次に $n > s$ の場合を考える。

これに相当する状態遷移を図 12 に示す。

この場合、全てのサービス提供者は稼働している。したがって、一人の顧客のサービスが終了する確率はnに関わらず一定で$s\mu\Delta t$となる。

確率P_n と関連してかんがえなければならない確率はP_{n-1}, P_{n+1} ，および P_nである。

状態 $n-1$ から nへの遷移を考える。この変化は一人の顧客の系への訪問と関連する。一人の顧客が系を訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、P_n は$\lambda\Delta t P_{n-1}$だけ増加する。

次に、状態$n+1$ からnへの遷移を考える。この変化は一人の顧客のサービスが終了したことに相当する。一人の顧客のサービスが終了する確率は$s\mu\Delta t$である。したがって、P_nは $s\mu\Delta t P_n$だけ増加する。

最後に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-s\mu\Delta t) \approx 1-\lambda\Delta t - s\mu\Delta t$である。したがって、$P_n$は$(1-\lambda\Delta t - s\mu\Delta t)P_n$になる。

以上をまとめると以下になる。

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) + s\mu\Delta t P_{n+1}(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) - s\mu\Delta t P_n(t) - \lambda\Delta t P_n(t) \tag{56}$$

$\Delta t \to 0$の極限を考え、さらに定常状態を仮定すると以下になる。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = s\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - s\mu P_n - \lambda P_n = 0 \tag{57}$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{aligned} s\mu P_{n+1} - \lambda P_n &= s\mu P_n - \lambda P_{n-1} \\ &= s\mu P_{n-1} - \lambda P_{n-2} \\ &\cdots \\ &= s\mu P_{s+1} - \lambda P_s \end{aligned} \tag{58}$$

ここで、我々はP_{s+1} と P_sを知らない。しかし、$n<s$の場合の確率P_nは前の解析から知っている。したがって、P_{s+1} と P_sを以下のように評価する。

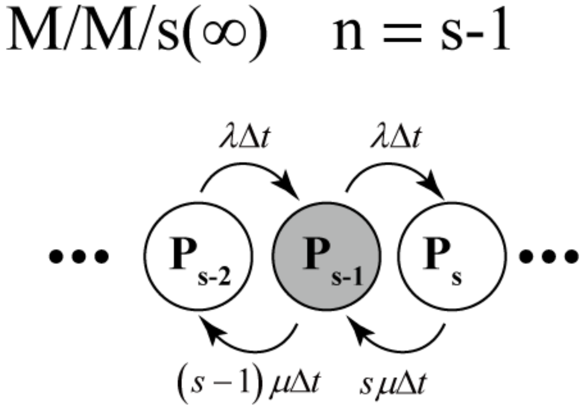


図 13　M/M/s(∞)において、 $n=s-1$に注目した状態遷移

まず、P_sを求める。

P_{s-1} に注目した状態遷移を図 13 に示す。

状態確率P_{s-1} と関連して考慮する確率はP_{s-2}, P_s, および P_{s-1}である。

状態$s-2$から $s-1$への遷移を考える。この変化は一人の顧客が系を訪問したことに相当する。一人の顧客が系を訪問する確率は$\lambda\Delta t$である。したがって、P_{s-1} は $\lambda\Delta t P_{s-2}$だけ増加する。

状態s から $s-1$への遷移を考える。この変化は一人の顧客のサービスが終了したことに相当する。一人の顧客のサービスが終了する確率は $s\mu\Delta t$である。したがって、P_{s-1} は $s\mu\Delta t P_s$だけ増える。

最後に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)\left[1-(s-1)\mu\Delta t\right]\approx 1-\lambda\Delta t-(s-1)\mu\Delta t$ である。したがって、P_{s-1} は$\left[1-\lambda\Delta t-(s-1)\mu\Delta t\right]P_{s-1}$になる。

以上をまとめると以下になる。

$$P_{s-1}(t+\Delta t)=P_{s-1}(t)+s\mu\Delta t P_s(t)+\lambda\Delta t P_{s-2}(t)-(s-1)\mu\Delta t P_{s-1}(t)-\lambda\Delta t P_{s-1}(t) \tag{59}$$

$\Delta t\to 0$の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。n

$$\frac{\partial P_{s-1}}{\partial t}=s\mu P_s+\lambda P_{s-2}-(s-1)\mu P_{s-1}-\lambda P_{s-1}=0 \tag{60}$$

したがって、P_s として以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P_s &= \frac{1}{s\mu}\left[(s-1)\mu+\lambda\right]P_{s-1}-\frac{\lambda}{s\mu}P_{s-2} \\
&= \left[\frac{s-1}{s}+\frac{\rho}{s}\right]\frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!}P_0-\frac{\rho}{s}\frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!}P_0 \\
&= \frac{\rho^s}{s!}P_0
\end{aligned}
\tag{61}
$$

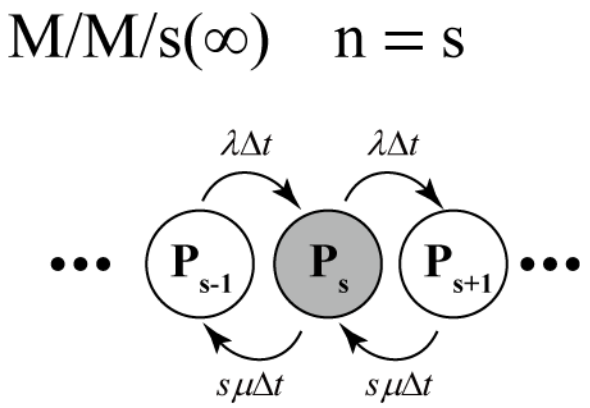


図 14　M/M/s(∞)において、$n = s$ に注目した状態遷移図

次に P_{s+1} を求める。

P_s に注目した遷移図を図 14 に示す。

P_s と関連して考えなければならない確率は P_{s-1}, P_{s+1} ，および P_s である。

状態 $s-1$ から s への遷移を考える。これは一人の顧客が系を訪問したことに相当する。一人の顧客が系を訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、P_s は $\lambda\Delta t P_{s-1}$ だけ増加する。

状態 $s+1$ から s への遷移を考える。この変化は顧客一人のサービスが終了したことに相当する。顧客一人のサービスが終了する確率は $s\mu\Delta t$ である。したがって、P_s は $s\mu\Delta t P_{s+1}$ だけ増加する。

最後に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $(1-\lambda\Delta t)\left[1-s\mu\Delta t\right]\approx 1-\lambda\Delta t-s\mu\Delta t$ である。したがって、P_s は $\left[1-\lambda\Delta t-s\mu\Delta t\right]P_s$ になる。

以上を纏めると P_s は以下となる。

$$
P_s(t+\Delta t)=P_s(t)+s\mu\Delta t P_{s+1}(t)+\lambda\Delta t P_{s-1}(t)-s\mu\Delta t P_s(t)-\lambda\Delta t P_s(t) \tag{62}
$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、さらに定常状態を仮定すると以下を得る。

$$
\frac{\partial P_s}{\partial t}=s\mu P_{s+1}+\lambda P_{s-1}-s\mu P_s-\lambda P_s=0 \tag{63}
$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_{s+1} &= \frac{1}{s\mu}\left[s\mu+\lambda\right]P_s - \frac{\lambda}{s\mu}P_{s-1} \\
&= \left[1+\frac{\rho}{s}\right]\frac{\rho^s}{s!}P_0 - \frac{\rho}{s}\frac{\rho^{s-1}}{\left(s-1\right)!}P_0 \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{s\cdot s!}P_0
\end{aligned} \tag{64}
$$

Eqs. (61)と (64)を Eq. (58)に代入して以下を得る。

$$
\begin{aligned}
s\mu P_{s+1} - \lambda P_s &= s\mu\frac{\rho^{s+1}}{s\cdot s!}P_0 - \lambda\frac{\rho^s}{s!}P_0 \\
&= \mu\left[\frac{\rho^{s+1}}{s!}P_0 - \frac{\rho^{s+1}}{s!}P_0\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{65}
$$

したがって、以下を得る。

$$
s\mu P_{n+1} - \lambda P_n = 0 \tag{66}
$$

したがって、以下になる。

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= \frac{\rho}{s}P_n \\
&= \eta P_n
\end{aligned} \tag{67}
$$

ただし、

$$
\eta = \frac{\rho}{s} \tag{68}
$$

である。定常状態が存在するためには、η は 0 から 1 の間の値をとる。

最終的には以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_n &= \eta P_{n-1} \\
&= \eta^{n-s}P_s
\end{aligned} \tag{69}
$$

二つの領域の結果をまとめると、状態確率は以下となる。

$$
P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}P_0 & \left(n \le s\right) \\ \eta^{n-s}P_s & \left(n \ge s\right) \end{cases} \tag{70}
$$

ただし、

$$
P_s = \frac{\rho^s}{s!}P_0 \tag{71}
$$

である。

この中で P_0 はまだ決まっていない。P_0 は全ての確率の和が 1 になることから決定でき

る。それは以下のようになる。

$$\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}+\sum_{n=s+1}^{\infty}\eta^{n-s}\frac{\rho^s}{s!}\right]P_0=\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s}{s!}\left(\eta+\eta^2+\cdots\right)\right]P_0$$
$$=\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s}{s!}\frac{\eta}{1-\eta}\right]P_0 \tag{72}$$
$$=1$$

したがって、 P_0 は以下のように求まる。

$$P_0=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\eta}{1-\eta}\frac{\rho^s}{s!}} \tag{73}$$

図 15 に $s=3$ の場合の状態確率を示す。ここでは、 $s=1$ の場合の状態確率もリファレンスのために載せている。$s=3$ の場合の P_0 は $s=1$ の場合のそれよりも小さく、s = 3 の場合の P_1 および P_2 は s = 1 の場合のそれらよりも大きい。

ここで、$s=3$ の場合の状態確率を詳しくみていく。 n が 1 より大きい場合は、P_n は n が大きくなるにつれ、小さくなっていく。P_0 はこの場合でも有意な大きさを持つ。しかし、それは常に他の状態確率よりも大きいわけではない。P_0 と $P_n\left(n\neq 0\right)$ の交わるポイントは以下となる。

$$\frac{\rho}{s}=\begin{cases}\dfrac{1}{s}\left(n!\right)^{\frac{1}{n}} & for\ n\le s\\ \dfrac{1}{s}\left(s^{n-s}n!\right)^{\frac{1}{n}} & for\ n>s\end{cases} \tag{74}$$

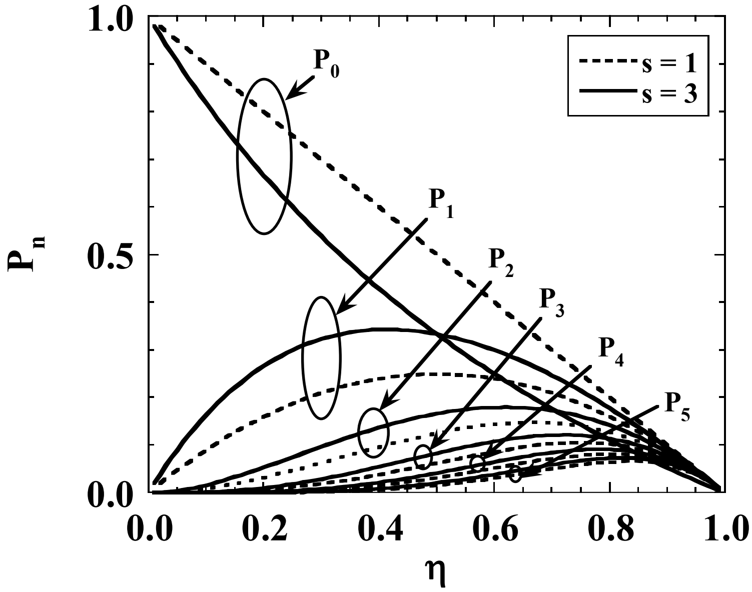


図 15　$s=3$ の場合の状態確率の η 依存性。 $s=1$ の場合の状態確率もリファレンスのため表記している。

待つ確率 P_w は以下となる。

$$\begin{aligned} P_w &= \sum_{n=s}^{\infty} P_n \\ &= P_s \sum_{n=s}^{\infty} \eta^{n-s} \\ &= P_s \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{n} \\ &= P_s \frac{1}{1-\eta} \end{aligned} \tag{75}$$

これはアーランの C 方程式と呼ばれ、しばしば P_c と記述される。

$s=1$ の場合、 Eq. (75) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_w &= \frac{\rho P_0}{1-\rho} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{1+\rho+\dfrac{\rho^2}{1-\rho}} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\dfrac{1}{1-\rho}} \\ &= \rho \end{aligned} \tag{76}$$

図 16 に待つ確率 P_w の η 依存性を様々なサービス提供者人数について示している。待つ確率は η が増えれば大きくなり、サービス提供者人数が増えれば小さくなる。

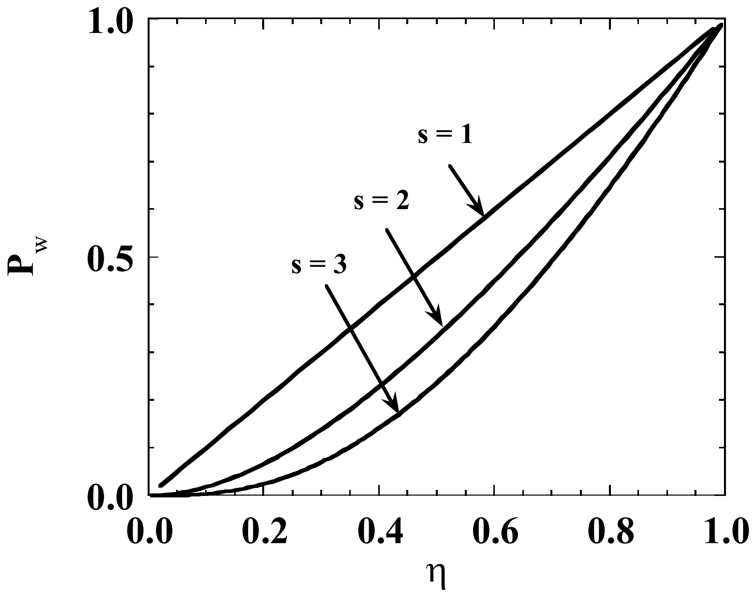


図 16　待つ確率の η 依存性。様々なサービス提供者人数を採用している

6.4.2.　複数のサービス提供者の場合の平均待ち人数 L_q およびその分散 V_{Lq}

ここでは平均の待ち人数 L_q とその分散 V_{Lq} を評価する

$n = s$ までは待ち人数は 0 である。平均の待ち人数 L_q は以下のように評価される。

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{s+n} \\ &= 1P_{s+1} + 2P_{s+2} + 3P_{s+3} + \cdots \\ &= \left(\eta + 2\eta^2 + 3\eta^3 + \cdots\right) P_s \end{aligned} \tag{77}$$

Eq. (77)の両辺に η を掛けて以下を得る。

$$\eta L_q = \left(\eta^2 + 2\eta^3 + \cdots\right) P_s \tag{78}$$

Eq. (77) から Eq. (78)を引いて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
(1-\eta)L_q &= \left(\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots\right)P_s \\
&= \frac{\eta}{1-\eta}P_s
\end{aligned}
\tag{79}
$$

したがって、 L_q は以下となる。

$$
L_q = \frac{\eta}{(1-\eta)^2}P_s \tag{80}
$$

分散 V_{L_q} は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
V_{L_q} &= \left(0-L_q\right)^2\sum_{n=0}^{s}P_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-L_q\right)^2 P_{s+n} \\
&= L_q{}^2\sum_{n=0}^{s}P_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-2L_q n+L_q{}^2\right)P_{s+n} \\
&= L_q{}^2\sum_{n=0}^{s}P_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n(n-1)+n-2L_q n+L_q{}^2\right)P_{s+n} \\
&= L_q{}^2\sum_{n=0}^{s}P_n+\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)P_{s+n}+L_q-2L_q{}^2+L_q{}^2\sum_{n=1}^{\infty}P_{s+n} \\
&= L_q{}^2\sum_{n=0}^{s}P_n+\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)P_{s+n}+L_q-2L_q{}^2+L_q{}^2\left(1-\sum_{n=0}^{s}P_n\right) \\
&= V_{Lq1}+L_q-L_q{}^2
\end{aligned}
\tag{81}
$$

ここで、以下の関係を利用している。

$$
\sum_{n=1}^{\infty}nP_{s+n} = L_q \tag{82}
$$

また、$V_{L_q 1}$ は以下である。

$$
V_{L_q 1} = \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\eta^n P_s \tag{83}
$$

$V_{L_q 1}$ はさらに次のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
V_{L_q 1} &= \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\eta^n P_s \\
&= \left(1\bullet 0\eta+2\bullet 1\eta^2+3\bullet 2\eta^3+\cdots\right)P_s
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Eq. (84)の両辺に η を掛けて以下を得る。

$$
\eta V_{L_q 1} = \left(1\bullet 0\eta^2+2\bullet 1\eta^3+3\bullet 2\eta^4+\cdots\right)P_s \tag{85}
$$

Eq. (84)から Eq. (85)を引いて、以下を得る。

$$(1-\eta)V_{L_q1} = 2\left(\eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^4 + \cdots\right)P_s$$
$$= \frac{2\eta^2}{1-\eta}P_s \tag{86}$$

したがって、V_{L_q1} は以下のようになる。

$$V_{L_q1} = \frac{2\eta^2}{(1-\eta)^3}P_s \tag{87}$$

これより、分散 V_{L_q} となる。

$$V_{L_q} = V_{L_q1} + L_{L_q} - L_q{}^2$$
$$= \frac{2\eta^2}{(1-\eta)^3}P_s + L_{L_q2} - L_q{}^2 \tag{88}$$

これは更に以下のように変形される。

$$V_{L_q} = \frac{2\eta^2}{(1-\eta)^3}P_s + L_q - L_q{}^2$$
$$= \frac{2\eta}{1-\eta}L_q + L_q - L_q{}^2 \tag{89}$$
$$= \frac{1+\eta}{1-\eta}L_q - L_q{}^2$$

標準偏差 σ_{L_q} は分散 V_{L_q} のルートとして、以下で与えられる。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{Lq}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}L_q - L_q{}^2} \tag{90}$$

図 17 に L_q と σ_{L_q} の η 依存し絵を示す。L_q と σ_{L_q} はサービス提供さや数 s を増加すると小さくなる。また、標準偏差は平均値よりも常に大きい。

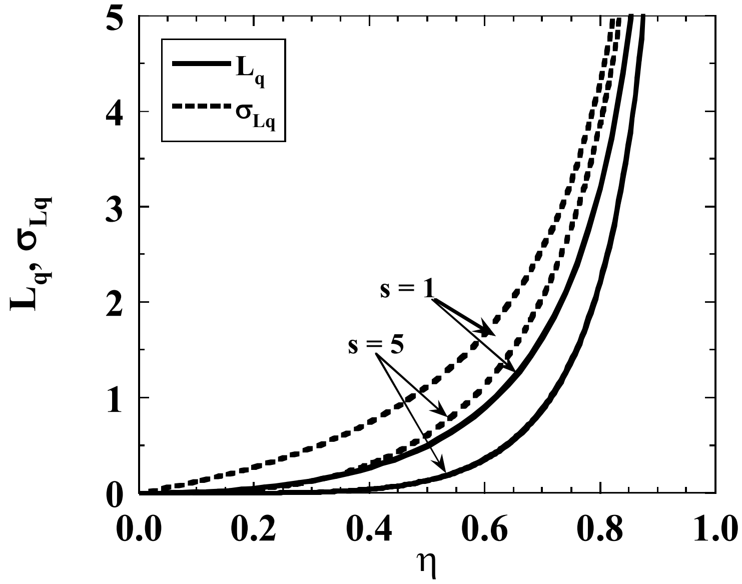


図 17　平均待ち人数およびその標準偏差の $\eta = \rho/s$ 依存性

6.4.3.　複数のサービス提供者の場合の平均滞在人数 L とその分散 V_L

平均の系の滞在人数 L とその分散 V_L をここでは解析する。

L は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \\
&= \sum_{n=1}^{s} n\frac{\rho^n}{n!}P_0 + \sum_{n=s+1}^{\infty} n\eta^{n-s}P_s \\
&= \rho\sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+s)\eta^n P_s \\
&= \rho\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!}P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s\eta^n P_s + \sum_{n=1}^{\infty} n\eta^n P_s \\
&= \rho\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!}P_0 + \rho\sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1} P_s + \sum_{n=1}^{\infty} n\eta^n P_s \\
&= \rho\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!}P_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_s\right] + \sum_{n=1}^{\infty} n\eta^n P_s \\
&= \rho + \sum_{n=1}^{\infty} n\eta^n P_s \\
&= \rho + \frac{\eta}{(1-\eta)^2}P_s \\
&= \rho + L_q
\end{aligned}
\tag{91}
$$

分散 V_L は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
V_L &= (0-L)^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-L)^2 P_n \\
&= L^2P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 - 2Ln + L^2\right)P_n \\
&= L^2P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2P_n - 2L\sum_{n=1}^{\infty} nP_n + L^2\sum_{n=1}^{\infty} P_n \\
&= L^2P_0 + \sum_{n=1}^{s} n^2P_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} n^2P_n - 2L^2 + L^2(1-P_0) \\
&= \sum_{n=s+1}^{\infty} n^2P_n + \sum_{n=1}^{s} n^2P_n - L^2
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Eq. (92) の最初の項は以下のように変形される。

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=s+1}^{\infty} n^2P_n &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+s)^2 P_{s+n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n+s)^2 P_{s+n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 + 2sn + s^2\right)P_{s+n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n-1) + (2s+1)n + s^2\right]P_{s+n} \\
&= V_{L1} + (2s+1)L_q + s^2\frac{\eta}{1-\eta}P_s
\end{aligned}
\tag{93}
$$

ここで、

$$V_{L1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P_{s+n} \tag{94}$$

である。これは Eq. (83) で示される V_{Lq1} と同じであり、以下で与えられる。

$$V_{L1} = \frac{2\eta^2}{(1-\eta)^3} P_s \tag{95}$$

最終的に以下となる。

$$V_L = \frac{2\eta^2}{(1-\eta)^3} P_s + (2s+1) L_q + s^2 \frac{\eta}{1-\eta} P_s + \sum_{n=1}^{s} n^2 P_n - L^2 \tag{96}$$

図 18 に L $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。L は L_q と同様に ρ/s が増加すれば増加する。

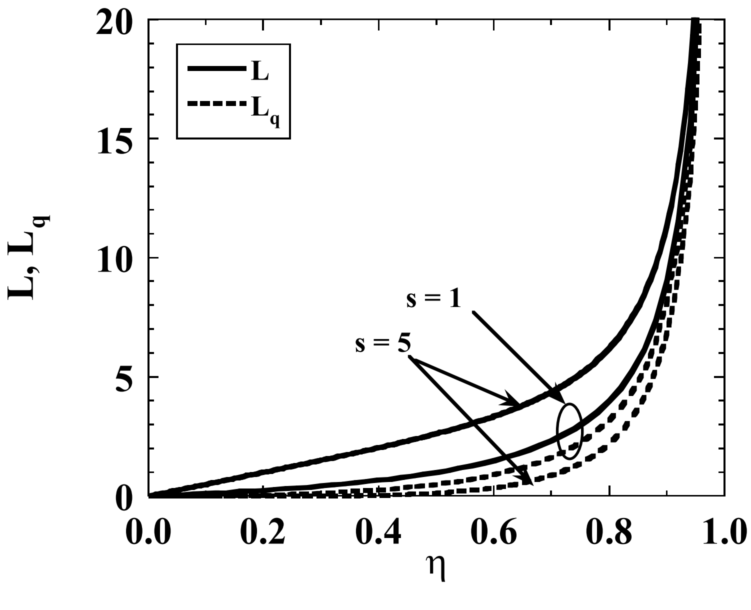


図 18 L と L_q の η 依存性

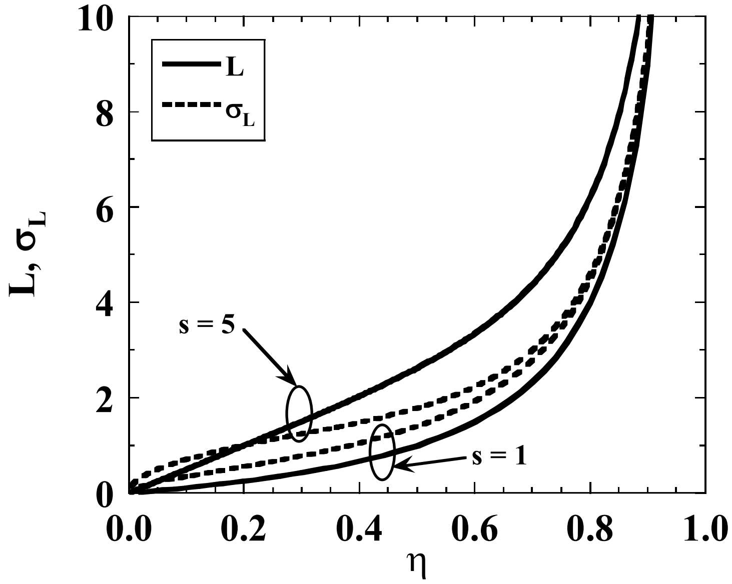


図 19　L と σ_L の η 依存性

図 19 に L と σ_L の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。

L は η が増加するにつれ増加し、その増加は s.が大きくなるほど大きくなる。 σ_L も η が増加するほど増加し、また s が増加するほど増加の程度も大きくなる。

6.4.4.　複数のサービス提供者の場合の滞在時間および待ち時間

待ち時間 W_q および系での滞在時間 W はリトルの定理から以下となる。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{97}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{98}$$

図 20 に W_q と W の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。 W_q と W は η が増加するにつれ、増加する。s が増加するほど W_q と W は小さくなり、また 1 に近づくと急激に増大する。 s が小さいほうが 1 に向かっての増大は緩やかとなる。

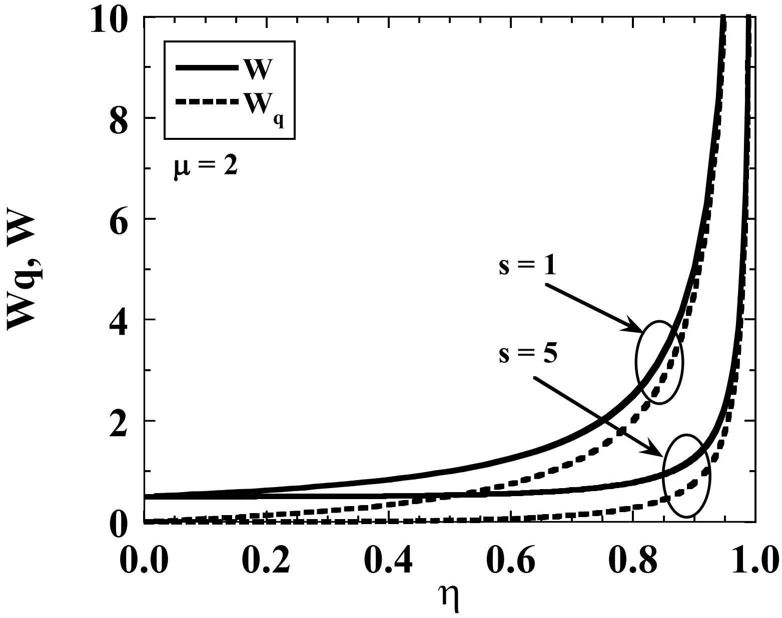


図 20　W, W_q の η 依存性

6.4.5.　稼働率

サービスをしていない比率 r_I は一つの重要な指標である。それは、以下で与えられる。

$$r_I = \frac{\nu}{s} \tag{99}$$

ここで ν は平均の空いているサービス提供者であり、以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
\nu &= sP_0 + (s-1)P_1 + \cdots + 1P_{s-1} \\
&= \sum_{n=1}^{s} nP_{s-n} \\
&= \sum_{n=1}^{s} n\frac{\rho^{s-n}}{(s-n)!}P_0 \\
&= \left[1\frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2\frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3\frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} \cdots + (s-1)\frac{\rho}{1!} + s \right] P_0
\end{aligned} \tag{100}$$

一方、稼働率 r_{ope} はサービス提供者の効率に相当する。その比率は以下で与えられる。

$$r_{ope} = 1 - r_I \tag{101}$$

Eq. (100)のνはさらに変形できる。P_0 は νと関連付けて以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho}{s}\frac{1}{1-\frac{\rho}{s}}\frac{\rho^s}{s!}} \\
&= \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!}+\frac{\rho^s}{s!}+\frac{\rho^{s+1}}{s-\rho}\frac{1}{s!}} \\
&= \frac{s!}{s!+s!\rho+\frac{s!}{2!}\rho^2+\cdots+\frac{s!}{(s-1)!}\rho^{s-1}+\frac{s!}{s!}\rho^s+\frac{\rho^{s+1}}{s-\rho}} \\
&= \frac{s!(s-\rho)}{s\bullet s!+(ss!-s!)\rho+\left(s\bullet\frac{s!}{2!}-s!\right)\rho^2+\cdots+\left(s\bullet\frac{s!}{(s-1)!}-\frac{s!}{(s-2)!}\right)\rho^{s-1}+\left(s\bullet\frac{s!}{s!}-\frac{s!}{(s-1)!}\right)\rho^s} \\
&= \frac{s-\rho}{s+(s-1)\rho+\left(s\bullet\frac{1}{2!}-\frac{1}{1!}\right)\rho^2+\cdots+\left(s\bullet\frac{1}{(s-1)!}-\frac{1}{(s-2)!}\right)\rho^{s-1}+\left(s\bullet\frac{1}{s!}-\frac{1}{(s-1)!}\right)\rho^s} \\
&= \frac{s-\rho}{s+(s-1)\rho+\frac{s-2}{2!}\rho^2+\cdots+\frac{s-(s-1)}{(s-1)!}\rho^{s-1}}
\end{aligned}
\tag{102}
$$

したがって、P_0は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{s-\rho}{s+(s-1)\rho+\frac{s-2}{2!}\rho^2+\cdots+\frac{s-(s-1)}{(s-1)!}\rho^{s-1}} \\
&= \frac{s-\rho}{1\frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!}+2\frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!}+3\frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!}\cdots+(s-1)\frac{\rho}{1!}+s}
\end{aligned}
\tag{103}
$$

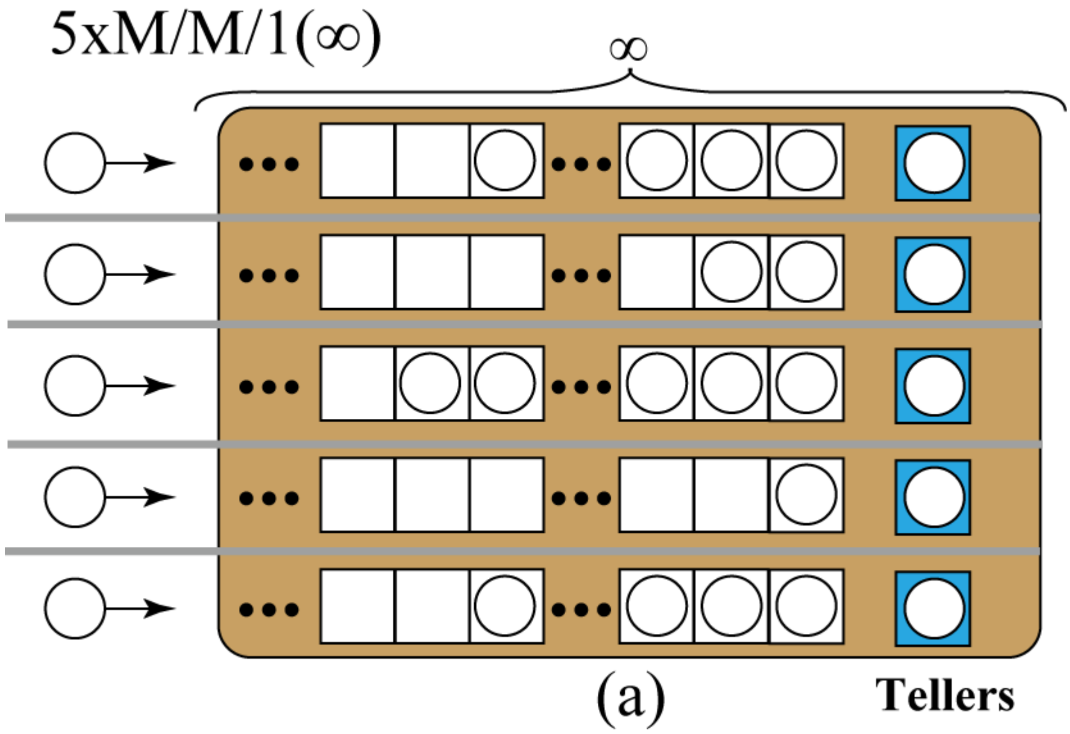
したがって、ν は以下のようになる。

$$
\nu = s-\rho \tag{104}
$$

よって稼働率 r_{ope} は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
r_{ope} &= 1-\frac{\nu}{s} \\
&= 1-\frac{s-\rho}{s} \\
&= \frac{\rho}{s} \\
&= \eta
\end{aligned}
\tag{105}
$$

これは単純な表式である。すなわち、η は稼働率に相当する。


5xM/M/1(∞)
∞
(a)
Tellers

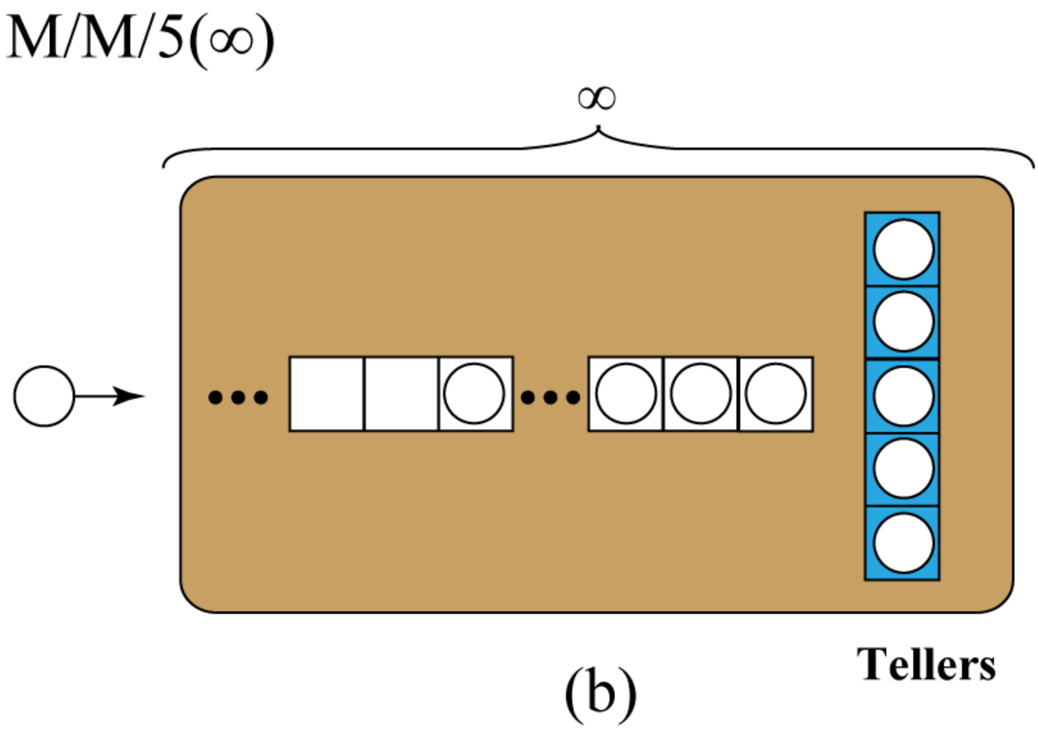


図 21　二つのタイプのシステム。(a) 独立タイプ (b) 一つの列タイプ

6.4.6.　独立の場合と単一ラインの比較

図 21 に示すように独立の並立複数ラインの場合を単一ライン、複数サービス提供者の場合を検討する。

まずサービス提供者が二人の場合を考える。

まず、顧客が独立の場合、各システムに頻度 λ の顧客が来るとする。するとトータルとして、系には2λの顧客が来る。

つまり、系が独立の 2 本のラインの場合は各ラインに $\lambda_1 = \lambda$ の顧客がきて、ラインが一つの場合には$\lambda_2 = 2\lambda$の顧客が来ると考えることができる。

独立の 2 本の系の場合を考える。このばあいは、各ラインの待ち人数の平均は以下となる。

$$L_q = \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} \rho P_0 = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}(1-\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda_1}{\mu}} \tag{106}$$

一つのラインの場合は以下となる。

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho}{2}\frac{1}{1-\frac{\rho}{2}}\frac{\rho^2}{2}}$$

$$= \frac{1-\frac{\rho}{2}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{4}+\frac{\rho^3}{4}}$$

$$= \frac{1-\frac{\rho}{2}}{1+\frac{\rho}{2}} \tag{107}$$

$$L_q = \frac{\rho}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{2}\right)^2}\frac{\rho^2}{2}P_0$$

$$= \frac{\frac{\rho^3}{4}}{\left(1-\frac{\rho}{2}\right)^2}\frac{1-\frac{\rho}{2}}{1+\frac{\rho}{2}}$$

$$= \frac{\rho^3}{4}\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^3}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2} \tag{108}$$

以上の解析では以下の関係がある。

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_2 \tag{109}$$

したがって、以下の関係になる。

$$r_{L_q} \equiv \frac{L_{q2}}{L_{q1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^3}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2} \frac{1}{\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda_1}{\mu}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^3}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2} \frac{1}{\frac{\left(\frac{\lambda_2}{2\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda_2}{2\mu}}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_2}{\mu}}{1+\frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\mu}} \tag{110}$$

分子は常に 1 よりも小さく分母は 1 よりも大きい。したがって、この比率はつねに 1 よりも小さい。独立の場合はこの列 g 2 本あることになる。つまり、独立の場合は、単一の場合より長い列が 2 本あることになる。

待ち時間の比率は以下となる。

$$r_{W_q} \equiv \frac{W_{q2}}{W_{q1}} = \frac{L_{q2}/\lambda_2}{L_{q1}/\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{L_{q2}}{L_{q1}} = \frac{1}{2}\frac{L_{q2}}{L_{q1}} = \frac{\frac{\lambda_2}{2\mu}}{1+\frac{\lambda_2}{2\mu}} \tag{111}$$

これも常に 1 よりも小さい。これは、サービス提供メンバー数が 2 よりも大きい場合も一般に成り立つ。

6.5. 待ち人数や待ち時間時間がある値未満である確率

ここまではマクロなパラメータとして平均値を扱ってきた。目標値として平均値をかかげる場合はこれで対応できる。しかしながら、確率と連動させた目標値を設定するほうが一般的である。ここでは、人数、時間に関して確率的な扱いをする。

コールセンターにおいては、ある値以内のお客の待ち時間での応答を 80%前後の値にするという目標を設定する。そのような要望に応えるために、我々は平均ではなく、確率そのものを扱わなくてはならない。

6.5.1. 待っている顧客の人数

我々は待ち人数が L_{q0} 未満になる確率を求めたい。まず、待ち人数が L_{q0} 以上になる確率 P^* を求める。その確率は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P^* &= P_{s+L_{q0}} + P_{s+L_{q0}+1} + P_{s+L_{q0}+2} + \cdots \\ &= \left[\eta^{L_{q0}} + \eta^{L_{q0}+1} + \eta^{L_{q0}+2} + \cdots\right] P_s \\ &= \left[1 + \eta + \mu^2 + \cdots\right] \eta^{L_{q0}} P_s \\ &= \frac{1}{1-\eta} \eta^{L_{q0}} P_s \end{aligned} \tag{112}$$

したがって、待っている人数が L_{q0} 未満である確率 $P\left(L_{q0}\right)$ は以下で与えられる。

$$P\left(L_{q0}\right) = 1 - P^* = 1 - \frac{1}{1-\eta} \eta^{L_{q0}} P_s \tag{113}$$

図 22 は $s=3$ の場合の $P\left(L_{q0}\right)$ の η 依存性である。その確率は小さな η においてはほぼ 1 であるが、η が増えるとともに次第に減少していく。

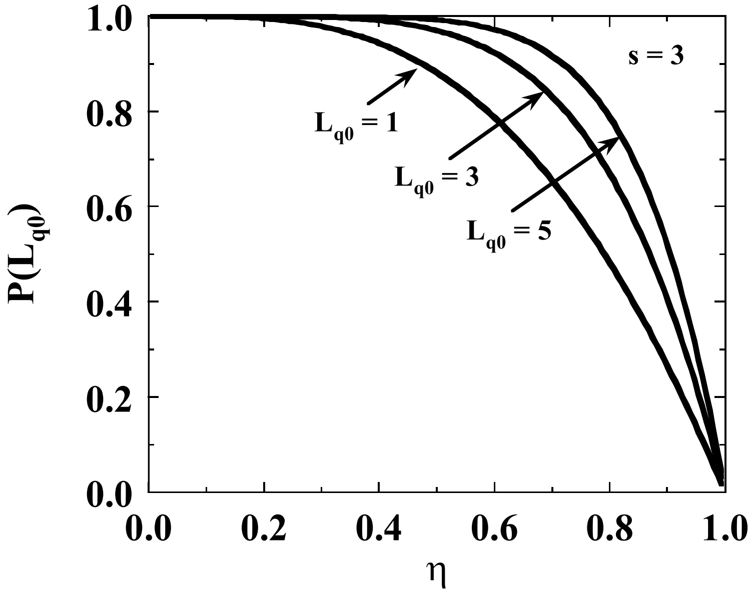


図 22 $s=3$ の場合の $P\left(L_{q0}\right)$ の η 依存性

6.5.2. 待ち時間

待ち時間がt未満である確率を求める。待ち行列理論では、基本的に人数に関して注目している理論のため、時間 t に相当する人数の状況を考える。

まずは、時間t以上待つ確率P^*を求める。

客が系を訪れ、その系の状態がk、つまり系内にk人の顧客がいたとする。もし、kがs未満であれば、顧客はサービスを即座に受けることができ、その待ち時間は 0 である。

もし、k がs 以上であれば、我々は待たなくてはならない。したがって、我々は状態$s, s+1, \cdots$のことを考えなければならない。

各状態の場合について考える。

もしk がsであれば、次の時間 t の間に一人の顧客もサービスを終了しなければ顧客は待たなくてはならず、もし 1 人以上サービスを終了すれば待たなくてもいい。

もしkが $s+1$である場合、1 人以下のサービス終了者であれば顧客は待たなくてはならないし、二人以上のサービス終了者であれば客は待たなくていい。

このようなプロセスを以下のように一般的に考えることができる。

現在の系の人数をkとする。その系に入った顧客の待ち時間を t_kとする。もし、時間間隔 t の間に $k-s$未満だけの顧客のサービスが終了すれば顧客は時間tよりも待たなくてはならない。したがって、対応する確率P^* は以下となる。

$$P^* = \sum_{k=s}^{\infty} P_k P\left(t_k > t\right) \tag{114}$$

P_kは系の人数が k である確率で以下である。

$$P_k = \eta^{k-s} P_s \tag{115}$$

$P\left(t_k > t\right)$は待つ時間がt以上である確率である。それは時間 tの間にサービスを終了する人数が $k-s$以下である確率である。サービスを受ける人数はポアソン分布に従うと仮定しているから、それは以下で与えられる。

$$P\left(t_k > t\right) = \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \tag{116}$$

Eq. (115) と Eq. (116)を Eq. (114)に代入して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P^* &= \sum_{k=s}^{\infty} P_k P\left(t_k > t\right) \\
&= \sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} P_s \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \\
&= P_s e^{-s\mu t} \sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!}
\end{aligned}
\tag{117}
$$

最後の二つの項はさらに以下のように変形される。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^{0} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{1} \eta \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{2} \eta^2 \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{3} \eta^3 \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} + \cdots\cdots \\
&= 1 + \eta\left[1 + \frac{\left(s\mu t\right)}{1!}\right] + \eta^2\left[1 + \frac{\left(s\mu t\right)}{1!} + \frac{\left(s\mu t\right)^2}{2!}\right] + \eta^3\left[1 + \frac{\left(s\mu t\right)}{1!} + \frac{\left(s\mu t\right)^2}{2!} + \frac{\left(s\mu t\right)^3}{3!}\right] + \cdots \\
&= 1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots \\
&+ \eta\left[1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots\right] \frac{\left(s\mu t\right)}{1!} \\
&+ \eta^2\left[1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots\right] \frac{\left(s\mu t\right)^2}{2!} \\
&+ \eta^3\left[1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots\right] \frac{\left(s\mu t\right)^3}{3!} \\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{118}
$$

ここで、

$$
1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\eta} \tag{119}
$$

であるから、Eq. (118)は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \\
&= \frac{1}{1-\eta}\left[1 + \eta \frac{\left(s\mu t\right)}{1!} + \eta^2 \frac{\left(s\mu t\right)^2}{2!} + \eta^3 \frac{\left(s\mu t\right)^3}{3!} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{1-\mu}\left[1 + \frac{\left(\lambda t\right)}{1!} + \frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!} + \frac{\left(\lambda t\right)^3}{3!} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{1-\eta} e^{\lambda t}
\end{aligned}
\tag{120}
$$

したがって、対応する確率は以下である。

$$
\begin{aligned}
P^* &= P_s e^{-s\mu t} \sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\
&= P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} e^{\lambda t} \\
&= \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(s\mu-\lambda)t} \\
&= \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(1-\eta)s\mu t}
\end{aligned}
\tag{121}
$$

したがって、待ち時間時間が t 未満である確率 $P(t)$ は以下である。

$$
P(t) = 1 - P^* = 1 - \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(1-\eta)s\mu t} \tag{122}
$$

コールセンターの例を考える。

メンバー数は 20 であるする。平均のサービス時間は 12 分であるとする。この場合、We 10 秒以内に電話をとる確率は 80%以上であると目標を設定する。この場合、どの程度のコール頻度まで対応できるか評価する。

単位は時間にする。するとパラメータは以下となる。

$$
s = 20 \tag{123}
$$

$$
\mu = \frac{1}{\frac{12}{60}} = 5\ (/hour) \tag{124}
$$

$$
t = \frac{10}{60 \times 60} = \frac{1}{360}\ (hour) \tag{125}
$$

図 23 に $P(t)$ の η 依存性を示す。参考のためにサービス提供者の人数が 5 人の場合ものせてある。メンバー数が 20 である場合、$\eta \le 0.78$ で 80% の対応可能である。すなわち、以下のように $78 / hr$ の入力頻度まで対応可能である。

$$
\begin{aligned}
\lambda &\le 0.78 s\mu \\
&= 0.78 \times 20 \times 5 \\
&= 78 / hr
\end{aligned}
\tag{126}
$$

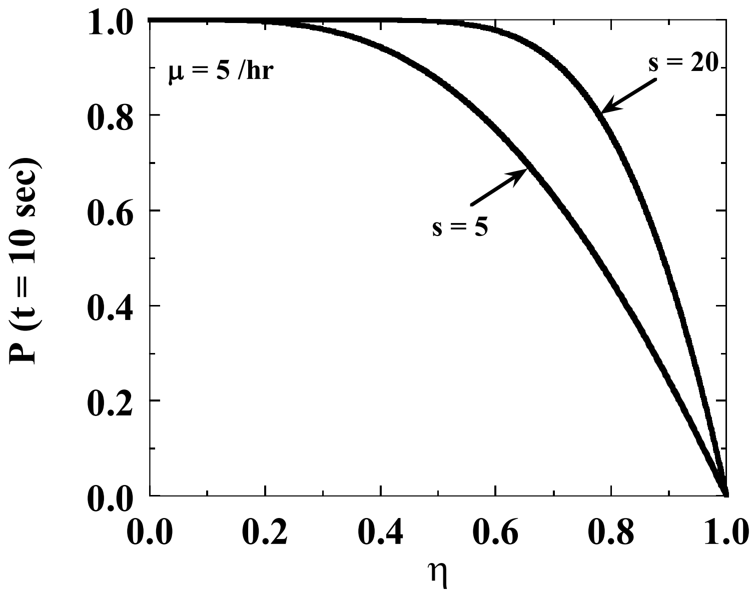


図 23　待つ時間 t が 10 秒以下である確率の η 依存性。ここで、 $\mu = 5/hr$ 、 $s = 5,20$ を仮定している

別の例を考える。

呼の入力頻度は 100 /hr とする。平均サービス時間は 5 分とする。ここで、10 秒以内の対応時間を 80 % 以上にしたい。メンバー数はいくらにすればいいか？

関連するパラメータは以下で与えられる。

$$\lambda = 100\left(/hour\right) \tag{127}$$

$$\mu = \frac{1}{\frac{5}{60}} = 12\left(/hour\right) \tag{128}$$

$$t = \frac{10}{60 \times 60} = \frac{1}{360}\left(hour\right) \tag{129}$$

まず以下の条件を満足しなければならない。

$$s\mu > \lambda \tag{130}$$

したがって、メンバーの人数は以下の範囲でなくてはならない。

$$s > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{12} = 8.3 \tag{131}$$

$P(t)$ を $s \geq 9$ の範囲で探す。

図 24 に $P(t)$ の s 依存性を示す。

これから、

$$s \geq 12 \tag{132}$$

となる。

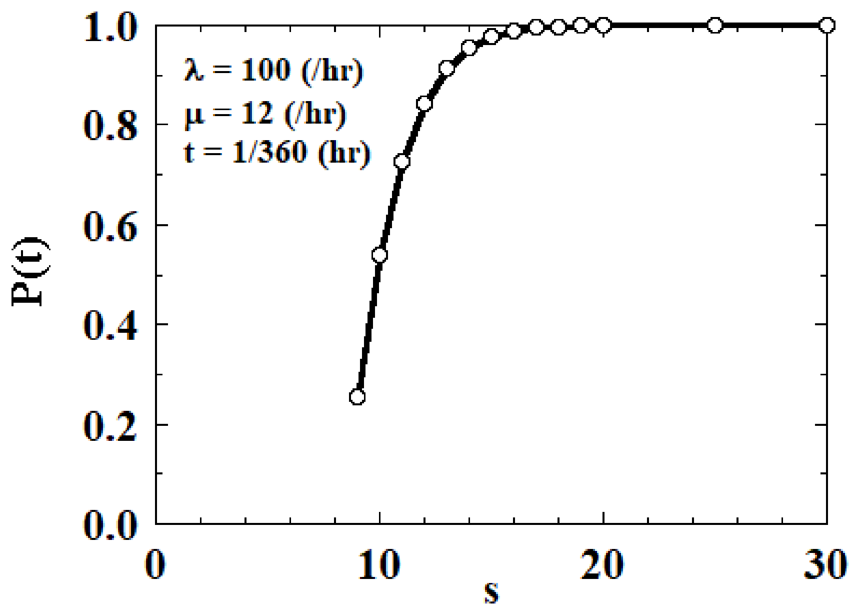


図 24　$P(t)$ の s 依存性

6.6.　まとめ

この章のまとめを行う。

n 人の顧客が系にいる状態確率は以下である。

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \leq s) \\ \eta^{n-s} P_s & (n \geq s) \end{cases}$$

ここで、以下である。

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\eta}{1-\eta} \frac{\rho^s}{s!}}$$

$$P_s = \frac{\rho^s}{s!} P_0$$

待つ確率　P_w　は以下で与えられる。

$$P_w = \frac{P_s}{1-\eta}$$

待ち行列は以下である。

$$L_q = \frac{\eta}{(1-\eta)^2} P_s$$

待ち行列の分散は以下である。

$$V_{L_q} = \frac{1+\eta}{1-\eta} L_q - {L_q}^2$$

その標準偏差は以下である。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{Lq}}$$

系に滞在しているメンバー数は以下である。

$$L = \rho + L_q$$

その分散は以下である。

$$V_L = \sum_{n=1}^{s} n^2 P_n + \frac{s^2 (1-\eta)^2 + (2s+1)(1-\eta) + 2\eta}{1-\eta} L_q - L^2$$

その標準偏差は以下である。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L}$$

待ち時間は以下である。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

系の滞在時間は以下である。

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

稼働率は以下で与えられる。

$$r_{ope} = \frac{\lambda}{s\mu} = \eta$$

L_{q0} 人未満の待ち人数である確率は以下である。

$$P(L_{q0}) = 1 - \frac{1}{1-\eta} \eta^{L_{q0}} P_s$$

待ち時間が t 未満である確率は以下である。

$$P(t) = 1 - \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(1-\eta)s\mu t}$$