

7. M/M/s(N)

概要: 我々はこれまで、系の中には無限の人数が入ることができると仮定してきた。しかし、一般にサービスを受ける待合室の面積は有限である。したがって、系に入ることのできる人数は有限である。ここでは、系に存在する人数が満杯である場合には客は系に入らずに去っていくと仮定する。対応するシステムは $M/M/s(N)$ と記述される。ここで、 N は系に存在できる最大人数である。この場合は、満杯であれば、顧客はサービスを受けずに系を去っていく、いわゆる呼損と呼ばれるものも解析する。

キーワード: $M/M/1(N)$; $M/M/s(N)$; 状態遷移確率; 待つ確率; 待ち人数; 系の滞在時間; アーランの C 式; サービス時間; 作業率; 呼損

7.1. 序

駐車場では、車が満杯であれば、そこに入ることはできず、別の駐車場を探さなくてはならない。一般にサービスを受ける場合、その待合室の面積は有限である。顧客が系を訪問し、系を見たとき、それが満杯であれば、サービスを諦めて帰ってしまう。このような系を $M/M/s(N)$ と表記する。ここでは、訪問はランダム、サービス時間はランダム、サービスメンバー数は複数であり、ここではサービスメンバーの数を s と表記する。そして、系に入れる最大人数は N としている。ここでは、まず $s=1$ の場合を解析し、その後一般の s の場合を扱う。

M/M/1(N)

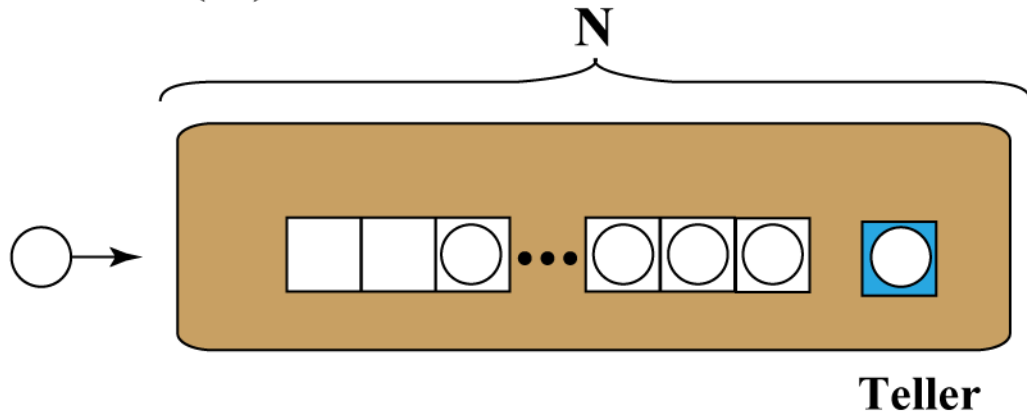


図 1 M/M/1(N)の系

M/M/1(N)

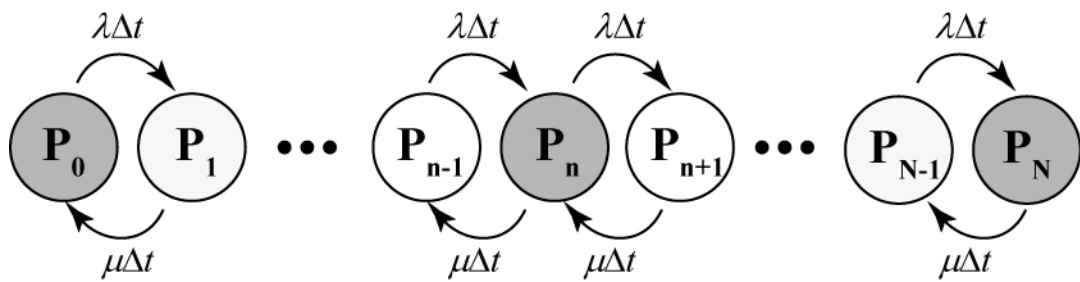


図 2 M/M/1(N)の系の状態確率の遷移

7.2. M/M/1(N)

7.2.1. 状態確率

図 1 に $M/M/1(N)$ の系を示す。系にいることのできる顧客の最大人数は N である。

P_n は系にいる顧客人数が n である状態確率である。対応する状態確率の遷移を図 2 に示す。

この P_n の導出は $M/M/1(\infty)$ と $n < N$ までは同じである。よって、同様の解析で対応する状態確率は

$$P_n = \rho^n P_0 \text{ for } n < N \quad (1)$$

となる。 $M/M/1(\infty)$ の場合は、 P_n の n が無限大まで存在していた。 $M/M/1(N)$ の系特有

の扱いは n が N よりも大きい場合に生じる。それはその場合の状態確率 P_n が 0 になるということである。

P_N を求めるために、それに注目して解析する。この場合も図 2 に示している。

状態が $N-1$ から N になる場合を考える。この遷移は顧客の系への訪問と関連する。顧客一人が Δt の間に系を訪問する確率は $\lambda \Delta t$ である。したがって、状態確率 P_N は $\lambda \Delta t P_{N-1}$ だけ増加する。

この場合は、状態が $N+1$ になれない。したがって、状態が $N+1$ から N になる場合を考える必要はない。

Δt の間に何も起こらない場合を考える。この場合は、何かが起こるとは、顧客が系を訪問することではなく、顧客の一人がサービスを終了することが起こる。したがって、 Δt の間に系に何も起こらない確率とは、その時間間隔に顧客のサービスが終わらないということである。その確率は $(1 - \mu \Delta t)$ である。したがって、 P_N は Δt 時間後には $(1 - \mu \Delta t) P_N$ となる。

以上のプロセスを纏めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} P_N(t + \Delta t) &= \lambda \Delta t P_{N-1}(t) + (1 - \mu \Delta t) P_N(t) \\ &= P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-1}(t) - \mu \Delta t P_N(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考え、さらに定常状態を仮定すると以下を得る。

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} = \lambda P_{N-1} - \mu P_N = 0 \quad (3)$$

これから以下を得る。

$$\mu P_N = \lambda P_{N-1} \quad (4)$$

したがって、最終的に P_N は以下となる。

$$\begin{aligned} P_N &= \rho P_{N-1} \\ &= \rho \rho^{N-1} P_0 \\ &= \rho^N P_0 \end{aligned} \quad (5)$$

したがって、Eq. (1) は $n = N$ でも有効であり、以下ようになる。

$$P_n = \rho^n P_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

つまり、表式はすべて $M / M / 1(\infty)$ のものと同じである。しかし、表式の中の P_0 は異なる。すべての確率の和は 1 となることから、 P_0 は以下のように定まる。

$$(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^N) P_0 = \frac{1 - \rho^{N+1}}{1 - \rho} P_0 = 1 \quad (7)$$

したがって、 P_0 は以下となる。

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \quad (8)$$

$M / M / 1(\infty)$ の系での P_0 は

$$P_0 = 1 - \rho \quad (9)$$

であった。 N が大きい極限では、

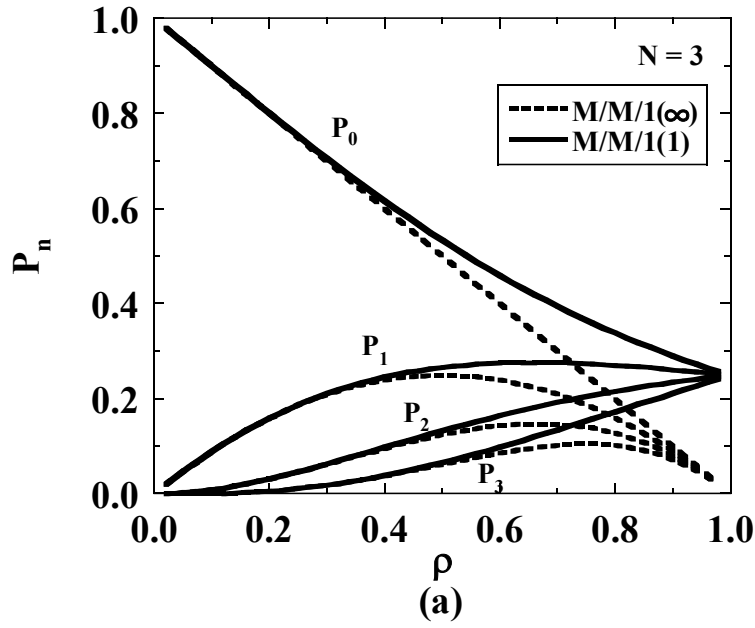
$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \\ &= 1 - \rho \end{aligned} \quad (10)$$

と期待通りの結果となる。

以上を纏めると、 $M/M/1(N)$ の状態確率は

$$\begin{aligned} P_n &= \rho^n P_0 \\ &= \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。



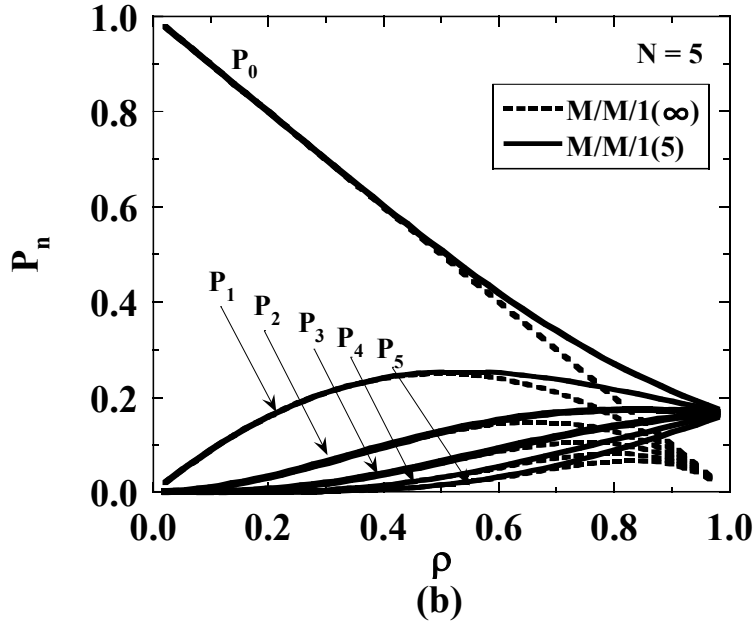


図 3 M/M/1(N)における P_n の ρ 依存性。(a) $N=3$. (b) $N=5$.

図 3 に P_n の ρ 依存性を示す。(a) は $N=3$ であり、(b) は $N=5$ である。参考のため、 $M/M/1(\infty)$ の状態確率も示している。 P_0 は ρ が増加するにつれ単調に減少する。その他の P_n は ρ が 1 に近づくにつれ同じ値に近づいていく。

$\rho=1$ の極限の場合の状態確率は以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow 1} P_n &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \rho^n P_0 \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}} \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{d(1-\rho)\rho^n}{d(1-\rho^{N+1})} \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{d\rho}{d\rho} \frac{n\rho^{n-1} - (n+1)\rho^n}{-(N+1)\rho^N} \\
 &= \frac{1}{N+1}
 \end{aligned} \tag{12}$$

つまり、状態確率は n に依存せず、 N に依存する。 N が小さいほどその確率は大きくなる。

また、 $M/M/1(\infty)$ では、 $n \neq 0$ での P_n は最大値を持っていたが、この場合は常にそうではない。これを示すために P_n を ρ で微分すると

$$\begin{aligned}
P_n &= \rho^n P_0 \\
&= \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}
\end{aligned} \tag{13}$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^n - \rho^{n+1}}{1 - \rho^{N+1}} \right) \\
&= \frac{[n\rho^{n-1} - (n+1)\rho^n](1 - \rho^{N+1}) + (\rho^n - \rho^{n+1})(N+1)\rho^N}{(1 - \rho^{N+1})^2} \\
&= \frac{\rho^{n-1}}{(1 - \rho^{N+1})^2} \{ [n - (n+1)\rho](1 - \rho^{N+1}) + (\rho - \rho^2)(N+1)\rho^N \} \\
&= \frac{\rho^{n-1}}{(1 - \rho^{N+1})^2} \left\{ n - n\rho^{N+1} - (n+1)\rho + (n+1)\rho^{N+2} \right\} \\
&= \frac{\rho^{n-1}}{(1 - \rho^{N+1})^2} \{ n - (n+1)\rho + (N - n + 1)\rho^{N+1} - (N - n)\rho^{N+2} \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

これから、

$$\rho = \frac{n + (N - n + 1)\rho^{N+1} - (N - n)\rho^{N+2}}{n + 1} \tag{15}$$

となる。

N が大きい場合は

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{n + (N - n + 1)\rho^{N+1} - (N - n)\rho^{N+2}}{n + 1} \\
&\approx \frac{n}{n + 1}
\end{aligned} \tag{16}$$

と $M/M/1(\infty)$ に一致する。

残念ながら、ピーク位置における ρ を解析的に求めることはできない。左辺と右辺で交わる点として数値的に評価する。その数値的な評価を図に示す。 ρ との交点がピークを与える ρ となる。 N が有限で小さくなると交わる点が 1 にどんどん近づいていくことが分かる。

Eq. (15) の右辺において、 $\rho \rightarrow 1$ の極限をとると

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{n + (N - n + 1)\rho^{N+1} - (N - n)\rho^{N+2}}{n + 1} = \frac{n + 1}{n + 1} = 1 \tag{17}$$

となり、左辺と一致する。したがって、それ以前に左辺、右辺に交わるポイントがあるが、その値が 1 に非常に近くなる。

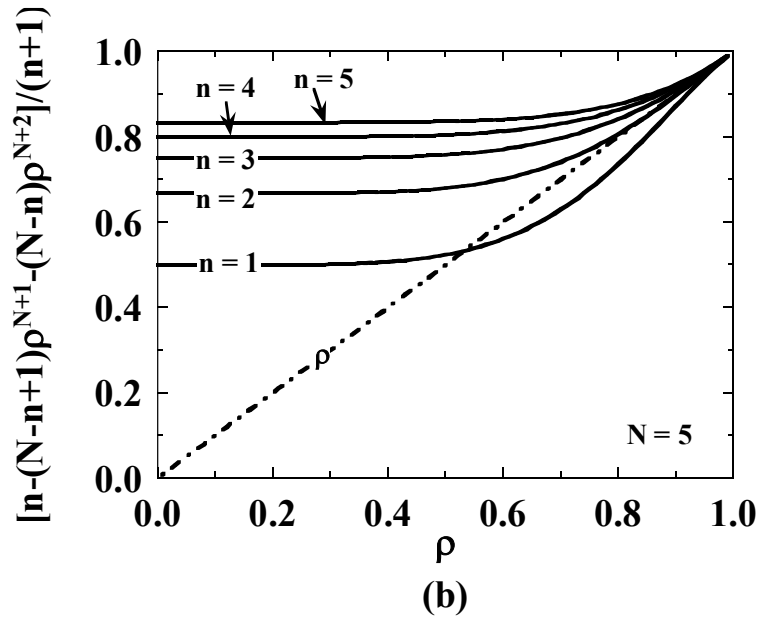
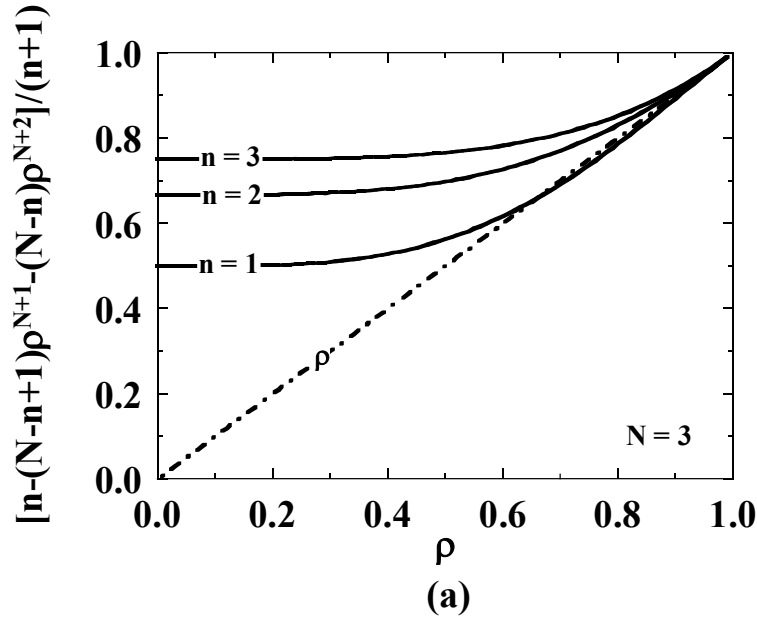


図 4 ピーク位置の数値的評価。(a) $N=3$ 、(b) $N=5$ 。 ρ との交点がピーク位置

待つ確率を評価する。顧客が系に 0 人の場合のみ待たなくてもいいから、待つ確率 P_w はそれ以外の確率の和として以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
P_w &= P_1 + P_2 + \cdots + P_N \\
&= \rho P_0 + \rho^2 P_0 + \cdots + \rho^N P_0 \\
&= \frac{\rho - \rho^{N+1}}{1 - \rho} P_0
\end{aligned} \tag{18}$$

もし、 N 人の顧客が系にいるならば、待合室は一杯で新たな顧客は系に入ることができない。そのため、その顧客は系に入らずに帰ってしまう。これを呼損と呼ぶ。この確率 P_{cl} は以下のように与えられる。

$$P_{cl} = P_N = \rho^N P_0 \tag{19}$$

図 5 に P_w と P_{cl} の ρ 依存性を示す。 $N=5$ としている。 P_w は ρ が増加するに従い増加する。しかし、 ρ が 1 近傍で飽和する。これは、訪問顧客の最大値が 5 で制限を受けるためである。その飽和が始まる点と、呼損が大きくなる点はよく一致している。つまり、この場合は、呼損を見れば何が起きているのか知ることができる。

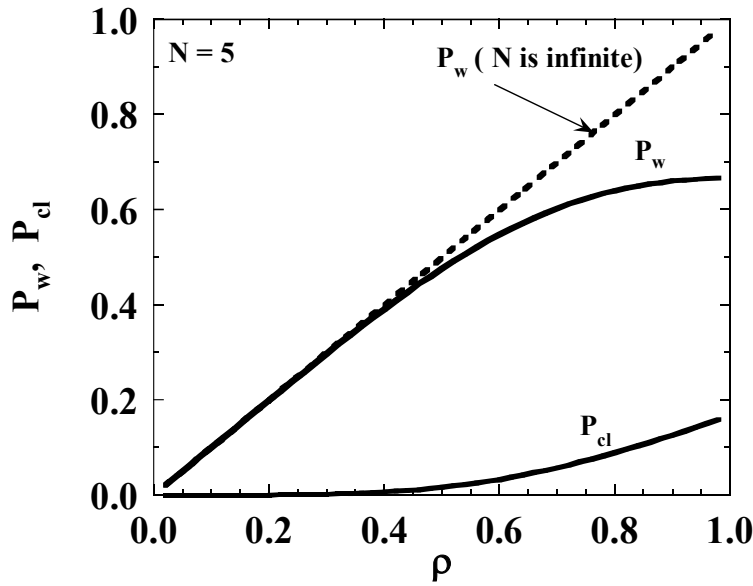


図 5 M/M/1(N) における P_w と P_{cl} の ρ 依存性。 $N=5$ としている

7.2.2. L_q と V_{Lq}

一人のサービスメンバーにおける平均待ち人数 L_q その分散 V_{Lq} を評価する。

平均待ち人数 L_q は以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{N-1} nP_n \\
&= 1P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \cdots + (N-1)P_N \\
&= [\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots + (N-1)\rho^N]P_0
\end{aligned} \tag{20}$$

Eq. (20)の両辺に ρ を掛けて以下を得る。

$$\rho L_q = [\rho^3 + 2\rho^4 + 3\rho^5 + \cdots + (N-2)\rho^N + (N-1)\rho^{N+1}]P_0 \tag{21}$$

Eqs. (20) から Eq. (21)を引いて

$$\begin{aligned}
(1-\rho)L_q &= [\rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^N - (N-1)\rho^{N+1}]P_0 \\
&= \left[\frac{\rho^2 - \rho^{N+1}}{1-\rho} - (N-1)\rho^{N+1} \right] P_0
\end{aligned} \tag{22}$$

となる。したがって、 L_q は以下となる。

$$L_q = \left[\frac{\rho^2 - \rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} - \frac{(N-1)\rho^{N+1}}{1-\rho} \right] P_0 \tag{23}$$

これは、以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
L_q &= \left[\frac{\rho^2 - \rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} - \frac{(N-1)\rho^{N+1}}{1-\rho} \right] P_0 \\
&= \frac{\rho P_1 - \rho P_N}{(1-\rho)^2} - \frac{(N-1)\rho P_N}{1-\rho} \\
&= \frac{\rho^2 P_0}{(1-\rho)^2} - \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{N-1}{1-\rho} \right] \rho P_N
\end{aligned} \tag{24}$$

これは、 $M/M/1(\infty)$ の L_q を使うと

$$\begin{aligned}
L_q &= \frac{\rho^2 P_0}{(1-\rho)^2} - \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{N-1}{1-\rho} \right] \rho P_N \\
&= L_q(M/M/1(\infty)) - \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{N-1}{1-\rho} \right] \rho P_N
\end{aligned} \tag{25}$$

となる。

待ち人数の分散 V_{L_q} は以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
V_{L_q} &= (0 - L_q)^2 (P_0 + P_1) + \sum_{n=1}^{N-1} (n - L_q)^2 P_{1+n} \\
&= L_q^2 (P_0 + P_1) + \sum_{n=1}^{N-1} (n^2 - 2L_q n + L_q^2) P_{1+n} \\
&= L_q^2 (P_0 + P_1) + \sum_{n=1}^{N-1} n^2 P_{1+n} - 2L_q \sum_{n=1}^{N-1} n P_{1+n} + L_q^2 \sum_{n=1}^{N-1} P_{1+n} \\
&= L_q^2 (P_0 + P_1) + \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) P_{1+n} + \sum_{n=1}^{N-1} n P_{1+n} - 2L_q^2 + L_q^2 \left(1 - \sum_{n=0}^1 P_n\right) \\
&= V_{L_{q1}} + L_q - L_q^2
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで、 $V_{L_{q1}}$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
V_{L_{q1}} &= \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) P_{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) \rho^n P_1
\end{aligned} \tag{27}$$

$V_{L_{q1}}$ は以下のように展開される。

$$\begin{aligned}
V_{L_{q1}} &= \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) \rho^n P_1 \\
&= [1 \cdot 0 \rho + 2 \cdot 1 \rho^2 + 3 \cdot 2 \rho^3 + \cdots + (N-2)(N-3) \rho^{N-2} + (N-1)(N-2) \rho^{N-1}] P_1
\end{aligned} \tag{28}$$

Eq. (28)の両辺に ρ を掛けて以下を得る。

$$\rho V_{L_{q1}} = [1 \cdot 0 \rho^2 + 2 \cdot 1 \rho^3 + 3 \cdot 2 \rho^4 + \cdots + (N-2)(N-3) \rho^{N-1} + (N-1)(N-2) \rho^N] P_1 \tag{29}$$

Eqs. (28)から Eq. (29)を引いて以下を得る。

$$\begin{aligned}
(1 - \rho) V_{L_{q1}} &= [1 \cdot 2 \rho^2 + 2 \cdot 2 \rho^3 + 3 \cdot 2 \rho^4 + \cdots + (N-2) \cdot 2 \rho^{N-1} - (N-1)(N-2) \rho^N] P_1 \\
&= 2 [\rho^2 + 2 \rho^3 + 3 \rho^4 + \cdots + (N-2) \rho^{N-1}] P_1 - (N-1)(N-2) \rho^N P_1
\end{aligned} \tag{30}$$

Eq.(30)の両辺に ρ を掛けて以下を得る。

$$\rho(1 - \rho) V_{L_{q1}} = 2 [\rho^3 + 2 \rho^4 + \cdots + (N-3) \rho^{N-1} + (N-2) \rho^N] P_1 - (N-1)(N-2) \rho^{N+1} P_1 \tag{31}$$

Eqs. (30) から (31)を引いて以下を得る。

$$\begin{aligned}
(1-\rho)^2 V_{L_q1} &= 2 \left[\rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \dots + \rho^{N-1} - (N-2)\rho^N \right] P_1 - (1-\rho)(N-1)(N-2)\rho^N P_1 \\
&= 2 \left[\frac{\rho^2 - \rho^{N-1+1}}{1-\rho} - (N-2)\rho^{N-1+1} \right] P_1 - (1-\rho)(N-1)(N-2)\rho^{N-1+1} P_1 \\
&= 2 \left[\frac{\rho^2 P_1 - \rho P_N}{1-\rho} - (N-2)\rho P_N \right] - (1-\rho)(N-1)(N-2)\rho P_N \\
&= 2 \frac{\rho^2 P_1 - \rho P_N}{1-\rho} - 2 \frac{\rho P_N}{1-\rho} - 2(N-2)\rho P_N - (1-\rho)(N-1)(N-2)\rho P_N
\end{aligned} \tag{32}$$

したがって、 V_{L_q1} は以下となる。

$$V_{L_q1} = 2 \frac{\rho^2 P_1}{(1-\rho)^3} - \left[\frac{2}{(1-\rho)^3} + \frac{2(N-2)}{(1-\rho)^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{1-\rho} \right] \rho P_N \tag{33}$$

したがって、待ち人数の分散は以下となる。

$$V_{L_q} = \frac{2\rho^2 P_1}{(1-\rho)^3} - \left[\frac{2}{(1-\rho)^3} + \frac{2(N-2)}{(1-\rho)^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{1-\rho} \right] \rho P_N + L_q - L_q^2 \tag{34}$$

標準偏差 σ_{L_q} は以下のように評価される。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{L_q}} \tag{35}$$

図 6 に L_q と σ_{L_q} の ρ 依存性を示す。ここでは、 $N=10$ としている。 $N=\infty$ の場合も参考のために示している。 L_q は 小さな ρ においては、 $N=\infty$ のものとほとんど変わらない。しかし、ある ρ から急激に $N=\infty$ の場合の L_q および σ_{L_q} より小さくなる。これは、系に入ることのできる顧客の数が N に限定されるためである。

この L_q が $M/M/1(\infty)$ のそれよりも小さくなり始めるポイントを解析する。Eq.(25)より

$$\begin{aligned}
\frac{L_q(M/M/1(\infty)) - L_q}{L_q(M/M/1(\infty))} &= \frac{\left[\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{N-1}{1-\rho} \right] \rho P_N}{\frac{\rho^2 P_0}{(1-\rho)^2}} \\
&= \frac{\left[1 + (N-1)(1-\rho) \right] \frac{P_N}{P_0}}{\rho} \\
&= \frac{\left[1 + (N-1) - (N-1)\rho \right]}{\rho} \rho^N \\
&= \left[N(1-\rho) + \rho \right] \rho^{N-1} \\
&= \kappa
\end{aligned} \tag{36}$$

となる。対応する図を図 7 に示す。今ここで、 $\kappa=0.1$ と置くと、対応する ρ は $N=5$ で 0.42、 $N=10$ で 0.67、 $N=50$ で 0.92 である。これは、図 6 の $N=10$ の場合の結果とよく対応が取れている。

次に、 σ_{L_q} と L_q を見ていく。

$N=\infty$ では、 σ_{L_q} は常に L_q よりも大きい。しかし、 N が有限で、 ρ が大きい場合は

σ_{L_q} は L_q より小さくなる場合がある。

L_q と σ_{L_q} の値が $\rho=1$ に近づいていく極限值は以下ようになる

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} L_q &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} [1P_2 + 2P_3 + \cdots + (N-1)P_N] \\
&= [1 + 2 + \cdots + (N-1)] \frac{1}{N+1} \\
&= \frac{1}{2} (N-1) N \frac{1}{N+1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{N-1}{N+1} N
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{L_q} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[(0-L_q)^2 (P_0 + P_1) + (1-L_q)^2 P_2 + (2-L_q)^2 P_3 + \cdots + ((N-1)-L_q)^2 P_N \right] \\
&= \left[2L_q^2 + (1-L_q)^2 + (2-L_q)^2 + \cdots + ((N-1)-L_q)^2 \right] \frac{1}{N+1} \\
&= \left[2L_q^2 + 1^2 - 2 \cdot 1L_q + L_q^2 + 2^2 - 2 \cdot 2L_q + L_q^2 + \cdots + (N-1)^2 - 2 \cdot (N-1)L_q + L_q^2 \right] \frac{1}{N+1} \\
&= \left[2L_q^2 + \frac{1}{6} (N-1) N [2(N-1)+1] - L_q^2 \right] \frac{1}{N+1} \\
&= \left[L_q^2 + \frac{2N^2 + N - 1}{3} L_q \right] \frac{1}{N+1}
\end{aligned} \tag{38}$$

ここで、標準偏差は以下のように評価される。

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma_{L_q} = \sqrt{\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_q} \quad (39)$$

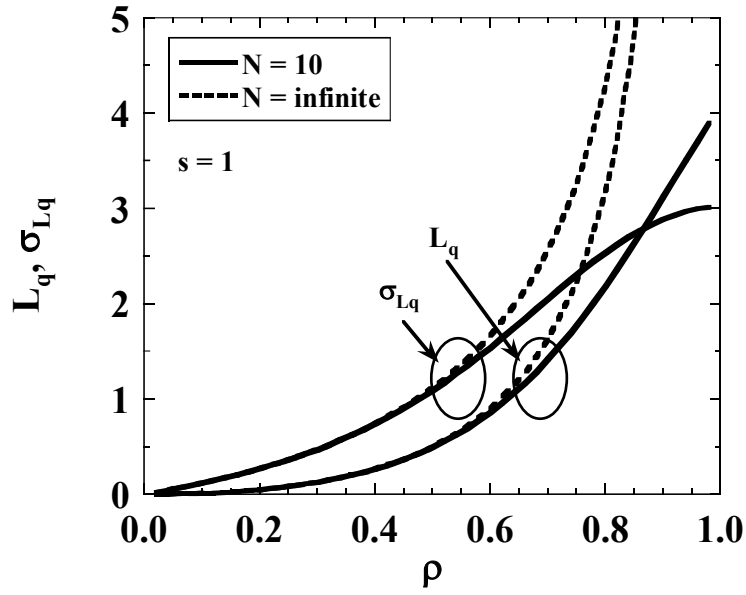


図 6 M/M/1(N) における L_q と σ_{L_q} の ρ 依存性。 $N=10$ としている。参考のため、 $N=\infty$ のものも点線で併記している

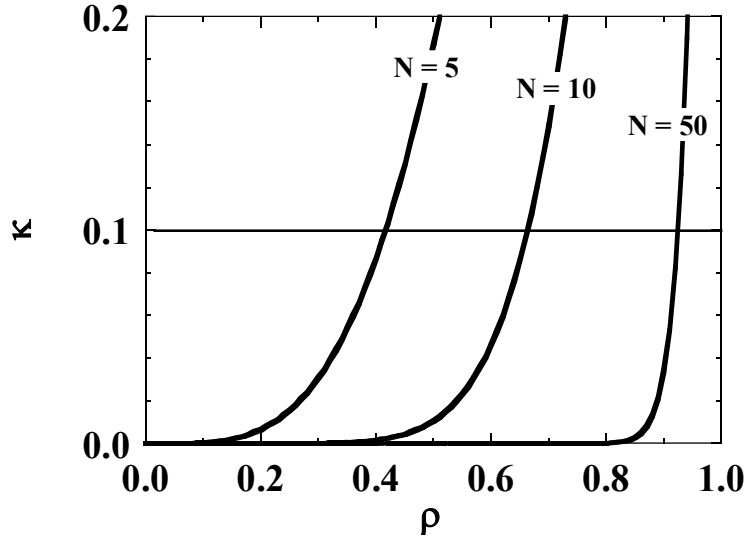


図 7 M/M/1(N) における L_q と M/M/1(∞) における L_q の比

7.2.3. L と V_L

系にいる全人数平均 L は以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{n=1}^N nP_n \\
 &= \sum_{n=1}^1 n\rho^n P_0 + \sum_{n=2}^N nP_n \\
 &= \rho P_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (n+1)P_{n+1} \\
 &= \rho P_0 + \sum_{n=1}^{N-1} nP_{n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} P_{n+1} \\
 &= \rho P_0 + P_2 + P_3 + \cdots + P_N + L_q \\
 &= \rho P_0 + \rho(P_1 + P_2 + \cdots + P_{N-1}) + L_q \\
 &= \rho(1 - P_N) + L_q
 \end{aligned} \tag{40}$$

系にいる人数の分散は以下のように評価される。

$$\begin{aligned}
V_L &= (0-L)^2 P_0 + \sum_{n=1}^N (n-L)^2 P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^N (n^2 - 2Ln + L^2) P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^N n^2 P_n - 2 \sum_{n=1}^N n P_n + (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots + P_N) L^2 \\
&= L^2 P_0 + P_1 + \sum_{n=2}^N n^2 P_n - 2L^2 + (1 - P_0) L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} (n+1)^2 P_{n+1} + P_1 - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} [n^2 + 2n + 1] P_{n+1} + P_1 - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} n^2 P_n + 2L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^1 P_n\right) - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) P_n + \sum_{n=1}^{N-1} n P_n + 2L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^1 P_n\right) - L^2 \\
&= V_{L1} + 3L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^1 P_n\right) - L^2
\end{aligned} \tag{41}$$

ここで、 V_{L1} を以下のように定義し、さらに展開する。

$$\begin{aligned}
V_{L1} &= \sum_{n=1}^{N-1} n(n-1) P_{n+1} \\
&= \frac{2\rho^2 P_1}{(1-\rho)^3} - \left[\frac{2}{(1-\rho)^3} + \frac{2(N-2)}{(1-\rho)^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{1-\rho} \right] \rho P_N
\end{aligned} \tag{42}$$

したがって、分散 V_L は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
V_L &= \frac{2\rho^2 P_1}{(1-\rho)^3} - \left[\frac{2}{(1-\rho)^3} + \frac{2(N-2)}{(1-\rho)^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{1-\rho} \right] \rho P_N \\
&\quad + 3L_q + \left(1 - \sum_{n=0}^1 P_n\right) - L^2
\end{aligned} \tag{43}$$

図 8 に L と L_q の ρ 依存性を占める。ただし、 $N=5$ としている。 L と L_q とともに ρ の増加とともに増加する。両者の解離は ρ が大きくなるにつれ大きくなる。 $\rho \rightarrow 1$ の極限では、両者の差は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 1} (L - L_q) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \rho(1 - P_N) \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} \\
&= \frac{N}{N+1}
\end{aligned} \tag{44}$$

今の場合、 $N=5$ であるので、以下ようになる。

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (L - L_q) = \frac{N}{N+1} = \frac{5}{6} = 0.83 \quad (45)$$

図 9 に σ_L と L の ρ 依存性を示す。ただし、 $N=10$ としている。参考のため、 N が無限大の場合も併記している。小さな ρ の領域で σ_L は L よりちいさい。しかし、より大きな ρ の領域では飽和し、さらには L よりも小さくなる。 σ_L と L は N によって限定され、大きな ρ の領域では N が無限大の場合よりも著しく小さくなる。

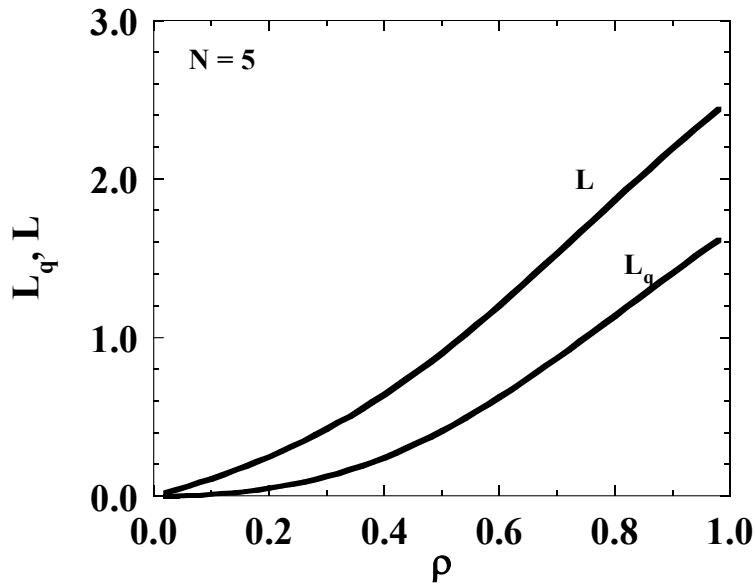


図 8 系 M/M/1(N) における L および L_q の ρ 依存性。ただし、 $N=5$ としている

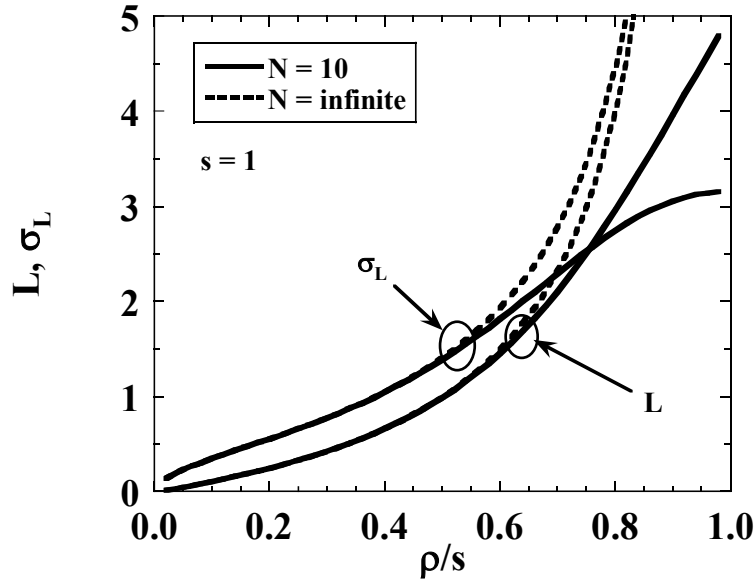


図 9 系 M/M/1(N)における σ_L および ρ 依存性。ただし $N=10$.としている。 N が無限大の場合も参考のため併記している

7.2.4. 待ち時間と滞在時間

リトルの公式から待ち時間 W_q は以下のように与えられる。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (46)$$

系の滞在時間もリトルの公式から以下のように与えられる。

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (47)$$

図 10 に W と W_q の ρ 依存性を示す。 N が無限大の場合は W と W_q は ρ が 1 に近づくにつれ急激に増える。しかし、 N が有限な場合は両者ともその増加は著しく低減する。

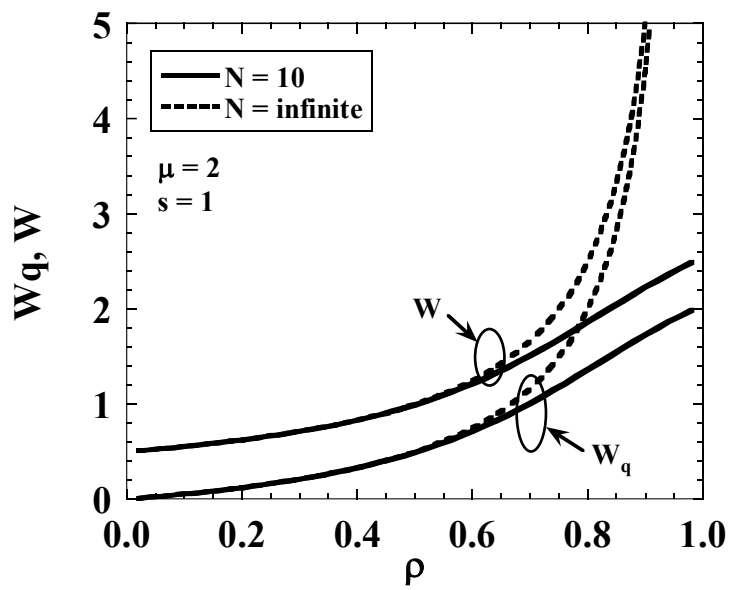


図 10 $M/M/1(N)$ における W および W_q の ρ 依存性

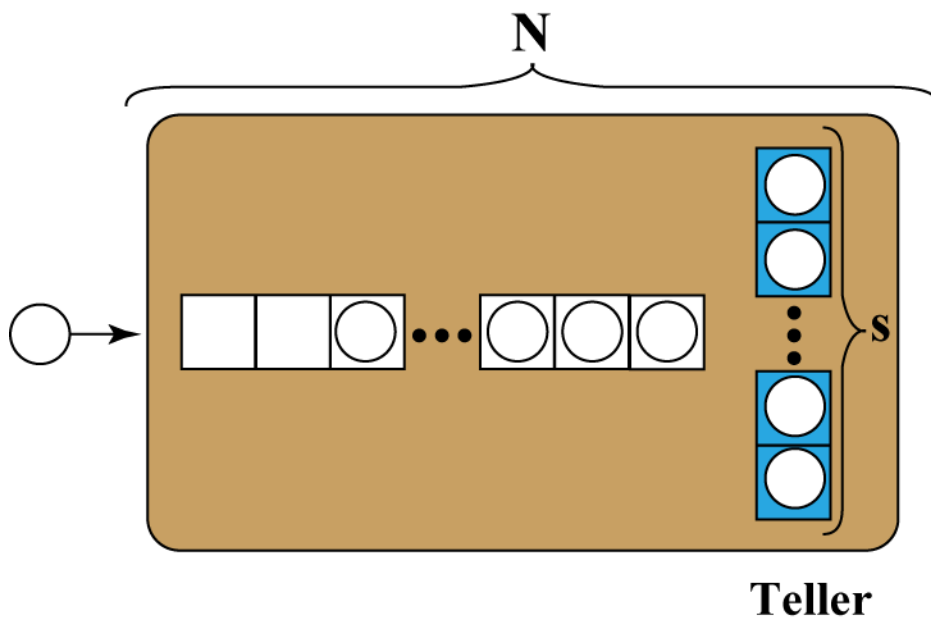


図 11 $M/M/s(N)$ の系の模式図

M/M/s(N) n = N

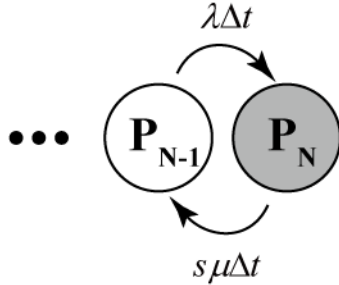


図 12 $n = N$ に注目した $M / M / s(N)$ の状態確率の遷移

7.3. M/M/s(N)

7.3.1. 状態確率

ここでは、前章で扱った一人のサービスメンバーから、複数のサービスメンバーに理論を拡張する。

図 11 に $M / M / s(N)$ の系に対する模式図を示す。これは、ランダムな訪問、ランダムなサービス時間、複数のサービスメンバー、ここではサービスメンバー数を s としている。さらに、系に存在できる最大顧客数を N としている。

モデル式の導出の過程は $M / M / s(\infty)$ の系におけるものと、 $n < N$ までは全く同じである。したがって、 $n < N$ に対するモデル式は以下で与えられる。

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \leq s) \\ \eta^{n-s} P_s & (s \leq n < N) \end{cases} \quad (48)$$

ここで、

$$\eta = \frac{\rho}{s} \quad (49)$$

である。我々はこの場合、新たにしなければならないことは P_N を求めることである。

P_N に注目した状態確率の遷移を図 12 に示す。

状態の $N-1$ から N への遷移を考える。この遷移は顧客一人の系への訪問と関連する。一人の顧客が時間 Δt の間に系を訪問する確率は $\lambda \Delta t$ である。したがって、これと関連する P_N の増加は $\lambda \Delta t P_{N-1}$ となる。

状態の $N+1$ から N への遷移を考える必要はこの場合はない。 P_{N+1} は無いからである。

次に時間 Δt の間に何も起こらないことを考える。 Δt の間に起こる可能性のあるのは、

サービスが終了することである。この系に顧客が入ってくることはない。したがって、何も起こらないとは Δt の間に顧客のサービスが終わらないということである。その確率は $(1-s\mu\Delta t)$ である。したがって、これと関連する P_N の変動量は $(1-s\mu\Delta t)P_N$ となる。

上の議論を纏めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_N(t + \Delta t) &= \lambda\Delta t P_{N-1}(t) + (1-s\mu\Delta t)P_N(t) \\ &= P_N(t)\lambda\Delta t P_{N-1}(t) - s\mu\Delta t P_N(t) \end{aligned} \quad (50)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下のようになる。

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} = \lambda\Delta t P_{N-1} - s\mu P_N = 0 \quad (51)$$

したがって、以下を得る。

$$s\mu P_N = \lambda P_{N-1} \quad (52)$$

これから P_N は以下のようになる。

$$P_N = \eta P_{N-1} \quad (53)$$

したがって、Eq. (48) は $n=N$ でも有効である。これから、状態確率は

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \leq s) \\ \eta^{n-s} P_s & (s \leq n \leq N) \end{cases} \quad (54)$$

と求まる。この表式は $M/M/s(\infty)$ のものと同じである。しかし、 P_0 が異なる。

全ての確率の和が 1 であることを要請し、 P_0 を以下のように求める。

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s+1}^N \eta^{n-s} \frac{\rho^s}{s!} \right] P_0 \\ &= \left[\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta} \right] P_0 = 1 \end{aligned} \quad (55)$$

したがって、 P_0 は以下のようになる。

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta}} \quad (56)$$

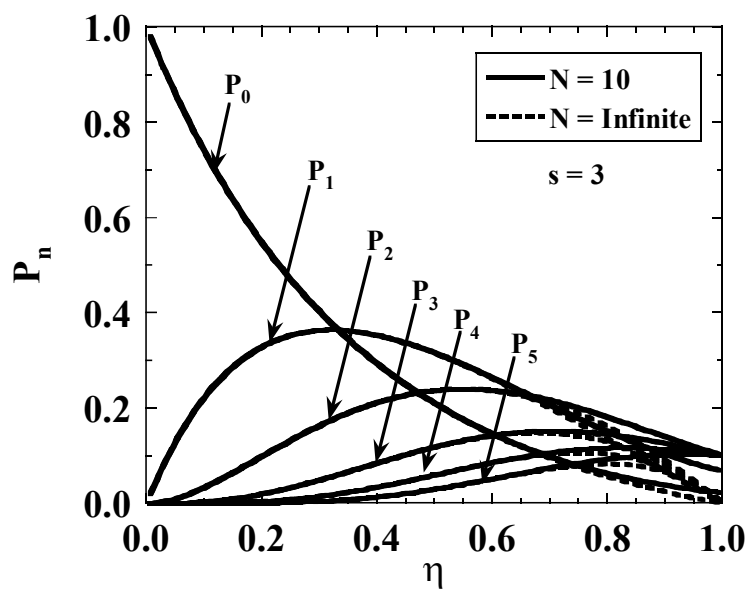
$N \rightarrow \infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta}} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta}{1 - \eta}} \end{aligned} \quad (57)$$

となり、期待通り $M/M/s(\infty)$ のものになる。

図 13 に P_n の η 依存性を示す。この中では、 $s=3$ および $N=10$ を仮定している。

$\eta = \rho/s$ の小さい領域では、状態確率は N が無限大の場合とほとんど変わらない。 N が無限大の場合は η が増えていくと状態確率は 0 に近づいていくが、 N が有限だと 0 でない正のある値になっていく。



(a)

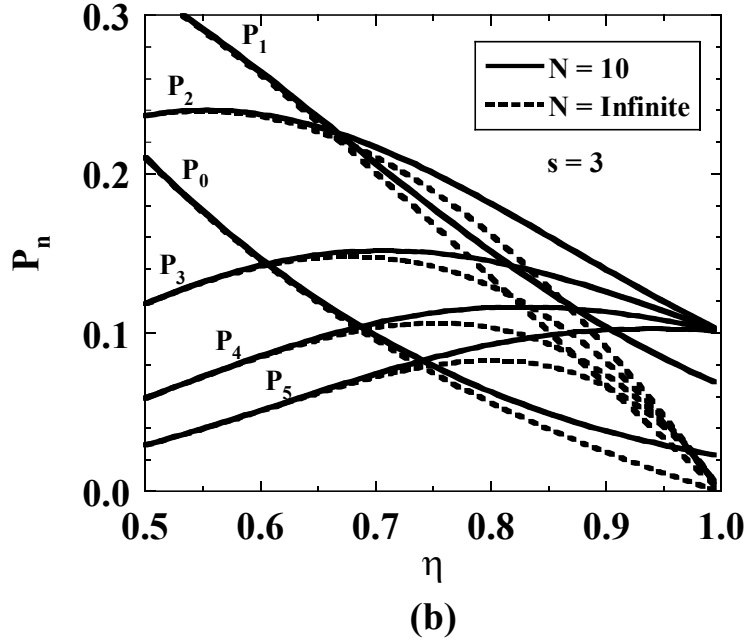


図 13 $M/M/s(N)$ における P_n の η 依存性。ここで、 $s=3$ $N=10$ を仮定している。(a) トータル領域。(b) $\eta=1$ 近傍の領域

$\eta=1$ の極限值を評価する。

状態確率 P_0 をまず初めに解析する。それは以下になる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_0 &= \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \eta \frac{1 - \eta^{N-s}}{1 - \eta}} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \eta \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{d(1 - \eta^{N-s})}{d(1 - \eta)}} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \eta \lim_{\eta \rightarrow 1} (N - s) \eta^{N-s-1}} \\
&= \frac{1}{\sum_{k=0}^s \frac{s^k}{k!} + \frac{s^s}{s!} (N - s)}
\end{aligned} \tag{58}$$

ここでは、具体的に $s=3$ および $N=10$ を仮定しているから、以下の値となる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^s \frac{s^k}{k!} + \frac{s^s}{s!} (N-s)} \\
&= \frac{1}{\sum_{k=0}^3 \frac{3^k}{k!} + \frac{3^3}{3!} (10-3)} \\
&= 0.02
\end{aligned} \tag{59}$$

次に s より小さい n を考える。この場合は

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_n (n < s) &= \lim_{\rho \rightarrow s} \frac{\rho^n}{n!} P_0 \\
&= \frac{s^n}{n!} \lim_{\eta \rightarrow 1} P_0
\end{aligned} \tag{60}$$

となる。

ここでは、具体的に $s=3$ および $N=10$ を仮定しているから、以下の値となる。

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{3^1}{1!} \times 0.02 \\
&= 0.06
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{3^2}{2!} \times 0.02 \\
&= 0.10
\end{aligned} \tag{62}$$

最後に s より大きい n を考える。この場合は

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_n (n \geq s) &= \lim_{\eta \rightarrow 1} \eta^{n-s} P_s \\
&= \frac{s^s}{s!} \lim_{\eta \rightarrow 1} P_0
\end{aligned} \tag{63}$$

となる。

ここでは、具体的に $s=3$ および $N=10$ を仮定しているから、以下の値となる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_n (n \geq s) &= \lim_{\eta \rightarrow 1} P_s \\
&= \frac{3^3}{3!} \times 0.02 \\
&= 0.11
\end{aligned} \tag{64}$$

サービスメンバーは n が s 以上の場合はフル稼働している。したがって、待つ確率 P_w は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
P_w &= \sum_{n=s}^N P_n \\
&= P_s \sum_{n=s}^N \eta^{n-s} \\
&= P_s \sum_{n=0}^{N-s} \eta^n \\
&= P_s \frac{1 - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta}
\end{aligned} \tag{65}$$

図 14 に P_w の η 依存性を示す。 P_w は η が増えるにしたがい、単調に増加する。それは、 s を増すと急激に減少する。

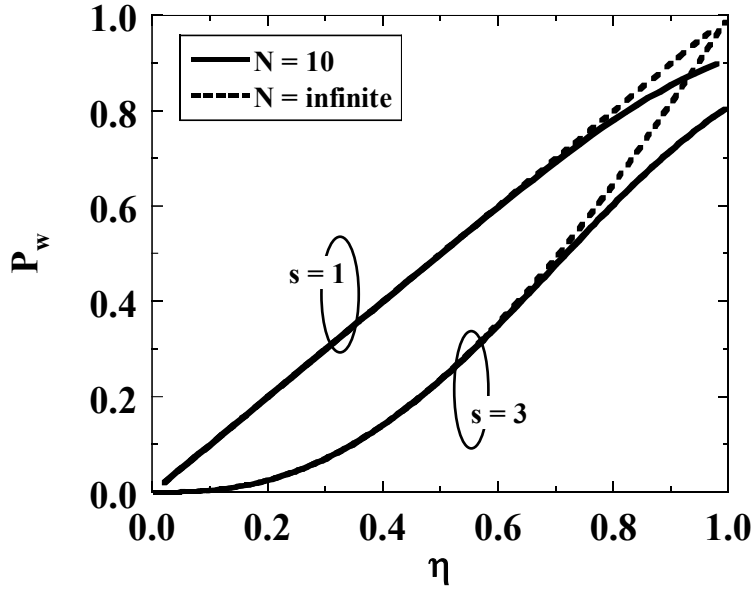


図 14 M/M/s(N) の系における P_w の η 依存性。ここで、 $N=10$ とし、さらに s として 1 と 3 を仮定している。 N が無限大の場合も参考のために記述している

呼損確率 P_{cl} は以下のように与えられ得る。

$$P_{cl} = P_N = \eta^{N-s} P_s \tag{66}$$

図 15 に P_{cl} の η 依存性を示す。 N が与えられると、 P_{cl} は η が増加するに従い増大する。

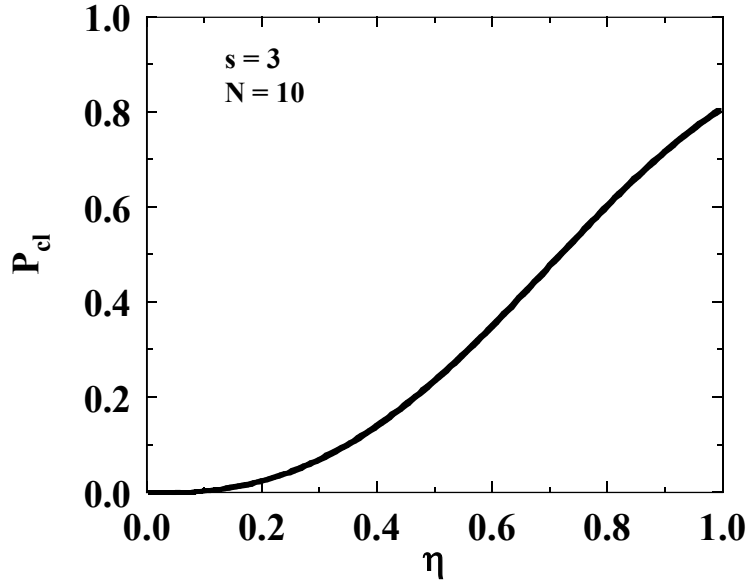


図 15 $M/M/s(N)$ における P_{cl} の依存性。ここで、 $s=3, N=10$ を仮定している

7.3.2. L_q と V_{L_q}

ここで、待っている人の人数の平均 L_q とその分散 V_{L_q} を評価する。

L_q は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=1}^{N-s} n P_{s+n} \\
 &= 1P_{s+1} + 2P_{s+2} + 3P_{s+3} + \cdots + (N-s)P_N \\
 &= [1\eta + 2\eta^2 + 3\eta^3 + \cdots + (N-s)\eta^{N-s}] P_s
 \end{aligned} \tag{67}$$

Eq. (67)の両辺に η を掛けると、以下を得る。

$$\eta L_q = [1\eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^4 + \cdots + (N-s)\eta^{N-s+1}] P_s \tag{68}$$

Eq. (67)から Eq. (68)を引いて

$$\begin{aligned}
(1-\eta)L_q &= \left[\eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 + \cdots + \eta^{N-s} - (N-s)\eta^{N-s+1} \right] P_s \\
&= \left[\frac{\eta - \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s+1}}{1-\eta} - (N-s)\eta^{N-s+1} \right] P_s
\end{aligned} \tag{69}$$

となる。したがって、 L_q は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
L_q &= \left[\frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{(1-\eta)^2} - \frac{(N-s)\eta^{N-s+1}}{1-\eta} \right] P_s \\
&= \frac{\eta P_s}{(1-\eta)^2} - \left[\frac{1}{(1-\eta)^2} + \frac{N-s}{1-\eta} \right] \eta P_N
\end{aligned} \tag{70}$$

次に V_{L_q} を以下のように評価する。

$$\begin{aligned}
V_{L_q} &= (0 - L_q)^2 \sum_{n=0}^s P_n + \sum_{n=1}^{N-s} (n - L_q)^2 P_{s+n} \\
&= L_q^2 \sum_{n=0}^s P_n + \sum_{n=1}^{N-s} (n^2 - 2L_q n + L_q^2) P_{s+n} \\
&= L_q^2 \sum_{n=0}^s P_n + \sum_{n=1}^{N-s} n^2 P_{s+n} - 2L_q^2 + \left(1 - \sum_{n=0}^s P_n\right) L_q^2 \\
&= L_q^2 \sum_{n=0}^s P_n + \sum_{n=1}^{N-s} n(n-1) P_{s+n} + \sum_{n=1}^{N-s} n P_{s+n} - \left(1 + \sum_{n=0}^s P_n\right) L_q^2 \\
&= V_{Lq1} + L_q - L_q^2
\end{aligned} \tag{71}$$

ここで、 V_{Lq1} は以下のように定義され、さらに展開される。

$$\begin{aligned}
V_{Lq1} &= \sum_{n=1}^{N-s} n(n-1) P_{s+n} \\
&= \sum_{n=1}^{N-s} n(n-1) \eta^n P_s \\
&= \left[1 \cdot 0 \eta + 2 \cdot 1 \eta^2 + 3 \cdot 2 \eta^3 + \cdots + (N-s)(N-s-1) \eta^{N-s} \right] P_s
\end{aligned} \tag{72}$$

Eq3 の両辺に η を掛けて以下を得る。

$$\eta V_{Lq1} = \left[1 \cdot 0 \eta^2 + 2 \cdot 1 \eta^3 + 3 \cdot 2 \eta^4 + \cdots + (N-s-1)(N-s-2) \eta^{N-s} + (N-s)(N-s-1) \eta^{N-s+1} \right] P_s \tag{73}$$

Eq. (72) から Eq. (73) を引いて

$$\begin{aligned}
(1-\eta)V_{Lq1} &= \left[1 \cdot 2 \eta^2 + 2 \cdot 2 \eta^3 + 3 \cdot 2 \eta^4 + \cdots + (N-s-1) \cdot 2 \eta^{N-s} - (N-s)(N-s-1) \eta^{N-s+1} \right] P_s \\
&= 2 \left[\eta^2 + 2 \eta^3 + 3 \eta^4 + \cdots + (N-s-1) \eta^{N-s} \right] P_s - (N-s)(N-s-1) \eta^{N-s+1} P_s
\end{aligned} \tag{74}$$

を得る。Eq. (74)両辺に η をかけて

$$\eta(1-\eta)V_{L_q1} = 2[1\eta^3 + 2\eta^4 + 3\eta^5 + \dots + (N-s-2)\eta^{N-s} + (N-s-1)\eta^{N-s+1}]P_s - (N-s)(N-s-1)\eta^{N-s+2}P_s \quad (75)$$

Eq. (74) から Eq. (75)を引いて

$$\begin{aligned} (1-\eta)^2 V_{L_q1} &= 2[\eta^2 + \eta^3 + \eta^4 + \eta^5 + \dots + \eta^{N-s} - (N-s-1)\eta^{N-s+1}]P_s \\ &\quad - (N-s)(N-s-1)\eta^{N-s+1}P_s + (N-s)(N-s-1)\eta^{N-s+2}P_s \\ &= 2\left[\frac{\eta^2 - \eta^{N-s+1}}{1-\eta} - (N-s-1)\eta^{N-s+1}\right]P_s \\ &\quad - (1-\eta)(N-s)(N-s-1)\eta^{N-s+1}P_s \end{aligned} \quad (76)$$

したがって、 V_{L_q1} は以下となる。

$$\begin{aligned} V_{L_q1} &= \left[2\frac{\eta^2 - \eta^{N-s+1}}{(1-\eta)^3} - 2\frac{(N-s-1)\eta^{N-s+1}}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)\eta^{N-s+1}}{1-\eta}\right]P_s \\ &= 2\frac{\eta^2 P_s}{(1-\eta)^3} - \left[\frac{2}{(1-\eta)^3} + \frac{2(N-s-1)}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)}{1-\eta}\right]\eta P_N \end{aligned} \quad (77)$$

最終的に分散は以下となる。

$$V_{L_q} = 2\frac{\eta^2 P_s}{(1-\eta)^3} - \left[\frac{2}{(1-\eta)^3} + \frac{2(N-s-1)}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)}{1-\eta}\right]\eta P_N + L_q - L_q^2 \quad (78)$$

標準偏差 σ_{L_q} は以下となる。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{L_q}} \quad (79)$$

図 16 に L_q と σ_{L_q} の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。両者とも、 η が大きくなると単調に大きくなる。また、 $N=10$ に制限を受けて N が無限大の場合よりも η の大きい領域で大分小さくなっている。

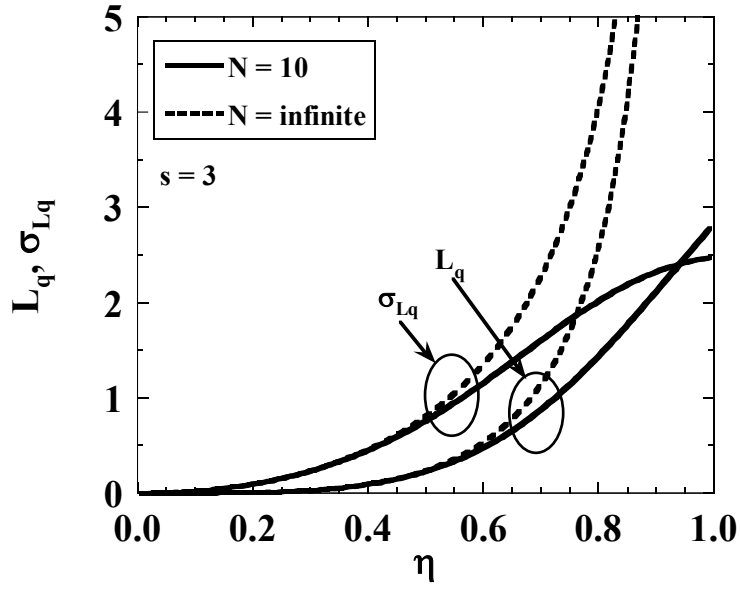


図 16 $M/M/s(N)$ における L_q と σ_{Lq} の η 依存性。ここで、 $s=3$ および $N=10$ としている

7.3.3. L と V_L

平均の系の滞在人数 L とその分散 V_L を評価する。

系に滞在する平均人数 L は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=1}^N n P_n \\
&= \sum_{n=1}^s n \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \sum_{n=s+1}^N n \eta^{n-s} P_s \\
&= \rho \sum_{n=1}^s \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} P_0 + \sum_{n=1}^{N-s} (n+s) \eta^n P_s \\
&= \rho \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \sum_{n=1}^{N-s} s \eta^n P_s + \sum_{n=1}^{N-s} n \eta^n P_s \\
&= \rho \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \rho \sum_{n=1}^{N-s} \eta^{n-1} P_s + \sum_{n=1}^{N-s} n \eta^n P_s \\
&= \rho \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \rho \sum_{n=0}^{N-s-1} \eta^n P_s + \sum_{n=1}^{N-s} n \eta^n P_s \\
&= \rho \sum_{n=0}^{s-1} P_n + \rho [P_s + \eta P_s + \eta^2 P_s + \cdots + \eta^{N-s-1} P_s] + \sum_{n=1}^{N-s} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^n P_s \\
&= \rho \sum_{n=0}^{s-1} P_n + \rho [P_s + \eta P_s + \eta^2 P_s + \cdots + \eta^{N-s-1} P_s + \eta^{N-s} P_s] - \rho P_N + \sum_{n=1}^{N-s} n \eta^n P_s \\
&= (1 - P_N) \rho + \sum_{n=0}^{N-s} n \eta^n P_s \\
&= (1 - P_N) \rho + L_q
\end{aligned} \tag{80}$$

系の滞在人数の分散 V_L は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
V_L &= (0 - L)^2 P_0 + \sum_{n=1}^N (n - L)^2 P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^N (n^2 - 2Ln + L^2) P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^s n^2 P_n + \sum_{n=s+1}^N n^2 P_n - 2L^2 + (1 - P_0) L^2 \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{N-s} (n+s)^2 P_{n+s} + \sum_{n=1}^s n^2 P_n - (1 + P_0) L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-s} (n^2 + 2sn + s^2) P_{n+s} + \sum_{n=1}^s n^2 P_n - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-s} [n(n-1) + (2s+1)n + s^2] P_{n+s} + \sum_{n=1}^s n^2 P_n - L^2 \\
&= 2 \frac{\eta^2 P_s}{(1-\eta)^3} - \left[\frac{2}{(1-\eta)^3} + \frac{2(N-s-1)}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)}{1-\eta} \right] \eta P_N \\
&\quad + (2s+1)L_q + s^2 \left(1 - \sum_{n=1}^s P_n \right) + \sum_{n=1}^s n^2 P_n - L^2
\end{aligned} \tag{81}$$

図 17 に L と L_q の η 依存性を示す。 N が無限大のものに比べ、両者とも $N=10$ に制限を受け小さくなっている。

図 18 に L と σ_L の η 依存性を示す。 L と σ_L は η が増加するに従い増加する。 N が無限大のものに比べ、両者とも $N=10$ に制限を受け小さくなっている。

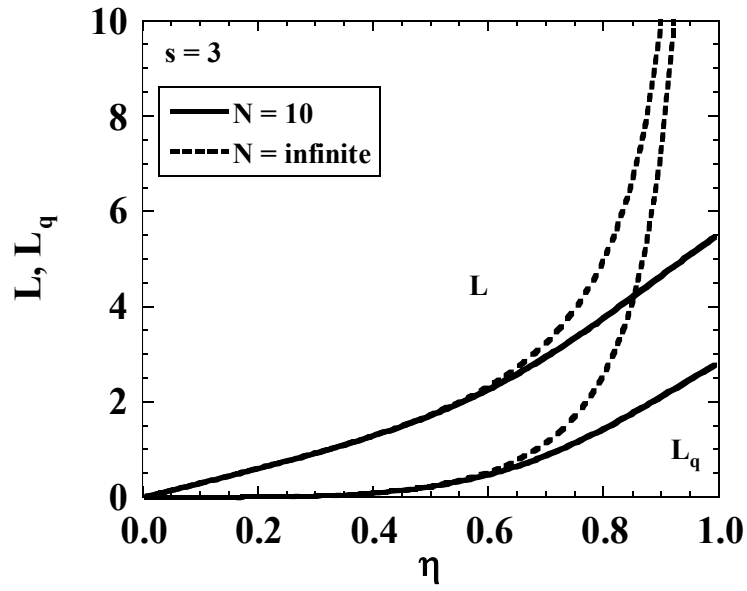


図 17 $M/M/s(N)$ における L と L_q の η 依存性。ここで $s=3$ および $N=10$ としている

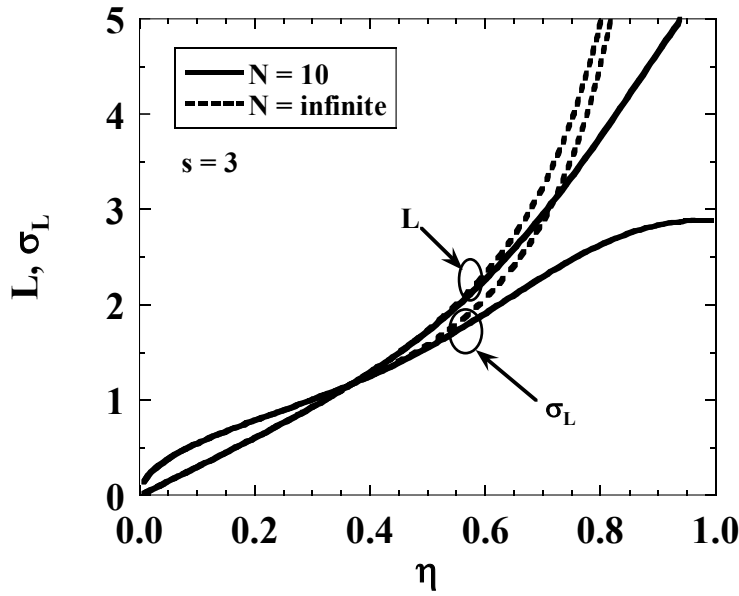


図 18 $M/M/s(N)$ における L と σ_L の η 依存性。ここで、 $s=3$ および $N=10$ としている

7.3.4. 待ち時間

待ち時間 W_q および系の知財時間 W はリトルの公式より

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (82)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (83)$$

で与えられる。

図 19 に W_q と W の η 依存性を示す。 W_q と W は η が増加するにしたがい増加する。

s が大きくなると両者は著しく小さくすることができる。

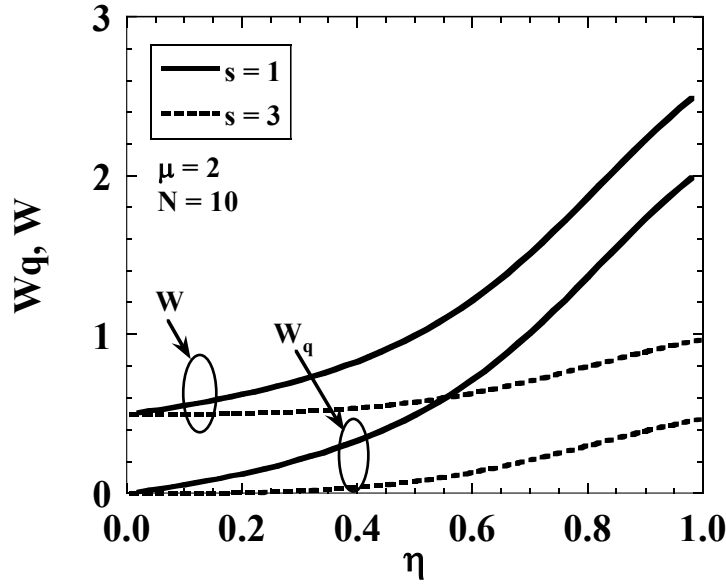


図 19 W と W_q の η 依存性

7.3.5. 稼働率

非稼働率 r_l は一つの重要なパラメータである。それは以下のように定義される。

$$r_l = \frac{\nu}{s} \quad (84)$$

ここで、 ν は平均のサービスをしていないメンバー数であり、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \nu &= sP_0 + (s-1)P_1 + \cdots + 1P_{s-1} \\ &= \sum_{n=1}^s nP_{s-n} \\ &= 1P_{s-1} + 2P_{s-2} + \cdots + sP_0 \\ &= \left[1 \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2 \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3 \frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} + \cdots + (s-1) \frac{\rho}{1!} + s \right] P_0 \end{aligned} \quad (85)$$

この表記は $M/M/s(\infty)$ のものと同じであるが、 P_0 が異なる。 $M/M/s(N)$ の P_0 は常に $M/M/s(\infty)$ のものより大きいから、稼働していないサービスメンバー数は常に大きい。これは、 η の大きい領域で顕著になる。これは図 20(a)で見取れる。

稼働率 r_{ope} は以下のように定義される。

$$r_{ope} = 1 - r_l \quad (86)$$

Eq.(85)の ν をさらに展開する。 ν の中の P_0 は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{s} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}{1 - \frac{\rho}{s}} \frac{\rho^s}{s!}} \\
&= \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{\rho^s}{s!} + \frac{\rho^{s+1} - \rho^{s+1} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}{s - \rho} \frac{1}{s!}} \\
&= \frac{s!}{s! + s! \rho + \frac{s!}{2!} \rho^2 + \cdots + \frac{s!}{(s-1)!} \rho^{s-1} + \frac{s!}{s!} \rho^s + \frac{\rho^{s+1} - \rho^{s+1} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}{s - \rho}} \\
&= \frac{s!(s - \rho)}{s \bullet s! + (s s! - s!) \rho + \left(s \bullet \frac{s!}{2!} - s!\right) \rho^2 + \cdots + \left(s \bullet \frac{s!}{(s-1)!} - \frac{s!}{(s-2)!}\right) \rho^{s-1} + \left(s \bullet \frac{s!}{s!} - \frac{s!}{(s-1)!}\right) \rho^s - \rho^{s+1} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}} \\
&= \frac{s - \rho}{s + (s-1) \rho + \left(s \bullet \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}\right) \rho^2 + \cdots + \left(s \bullet \frac{1}{(s-1)!} - \frac{1}{(s-2)!}\right) \rho^{s-1} + \left(s \bullet \frac{1}{s!} - \frac{1}{(s-1)!}\right) \rho^s - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}} \\
&= \frac{s - \rho}{s + (s-1) \rho + \frac{s-2}{2!} \rho^2 + \cdots + \frac{s-(s-1)}{(s-1)!} \rho^{s-1} - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}
\end{aligned} \quad (87)$$

この分母の項の順番を入れ替えて、以下を得る。

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{s - \rho}{s + (s-1) \rho + \frac{s-2}{2!} \rho^2 + \cdots + \frac{s-(s-1)}{(s-1)!} \rho^{s-1} - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}} \\
&= \frac{s - \rho}{1 \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2 \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3 \frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} \cdots + (s-1) \frac{\rho}{1!} + s - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}
\end{aligned} \quad (88)$$

したがって、 ν は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
v &= \left[1 \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2 \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3 \frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} \cdots + (s-1) \frac{\rho}{1!} + s \right] P_0 \\
&= \frac{1 \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2 \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3 \frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} \cdots + (s-1) \frac{\rho}{1!} + s}{1 \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + 2 \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} + 3 \frac{\rho^{s-3}}{(s-3)!} \cdots + (s-1) \frac{\rho}{1!} + s - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{N-s}} (s-\rho) \\
&= \frac{\sum_{n=1}^s n \frac{\rho^{s-n}}{(s-n)!}}{\sum_{n=1}^s n \frac{\rho^{s-n}}{(s-n)!} - \frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{N-s}} (s-\rho) \\
&= \frac{1}{1-\xi} (s-\rho)
\end{aligned} \tag{89}$$

ここで、

$$\xi = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{N-s}}{\sum_{n=1}^s n \frac{\rho^{s-n}}{(s-n)!}} \tag{90}$$

したがって、稼働率 r_{ope} は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
r_{ope} &= 1 - \frac{v}{s} \\
&= 1 - \frac{s-\rho}{s} \frac{1}{1-\xi} \\
&= 1 - \frac{1-\eta}{1} \frac{1}{1-\xi} \\
&= \frac{1-\xi-1+\eta}{1-\xi} \\
&= \frac{\eta-\xi}{1-\xi} \\
&= \frac{1-\xi}{1-\xi} \eta \\
&= \eta
\end{aligned} \tag{91}$$

η は 1 以下であるから、M/M/s(N) の稼働率 r_{ope} は M/M/s(∞) のものより常に小さい。

その描像は図 20 に示されている。

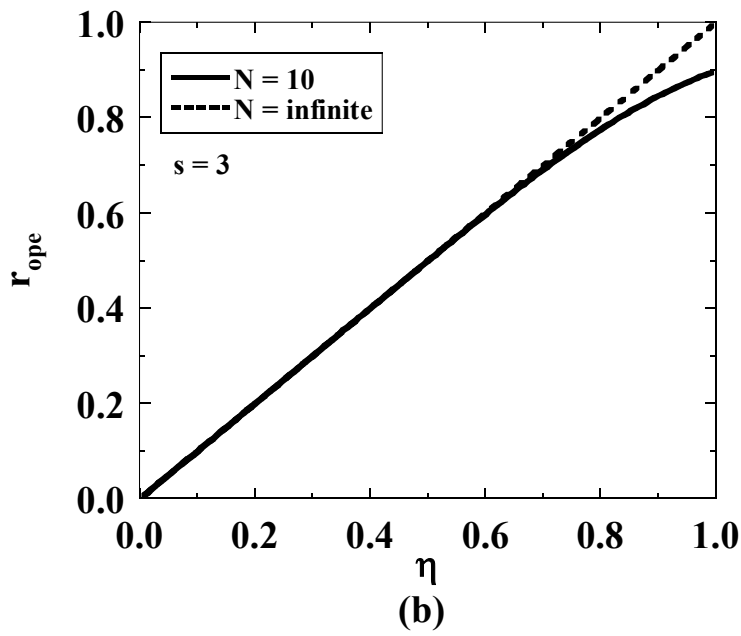
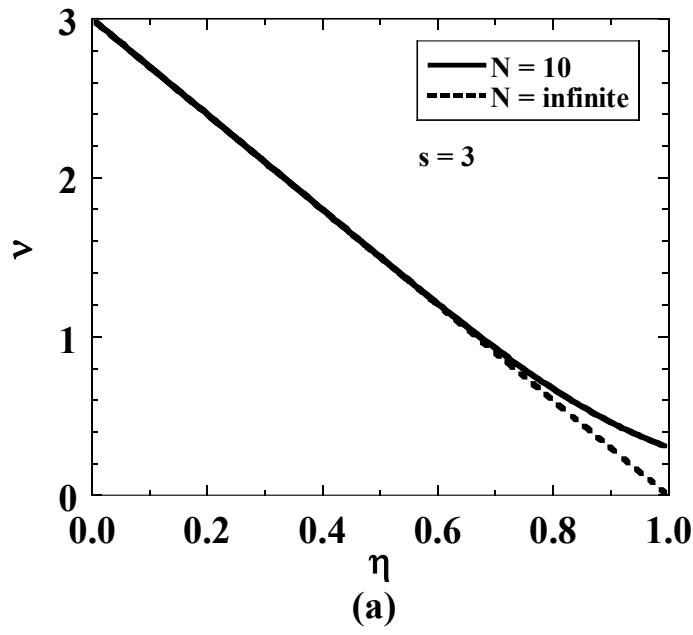


図 20 $M/M/s(N)$ の系における稼働率の η 依存性。ここで、 $s=3$ および $N=10$ を仮定している。(a)非稼働率。(b) 稼働率。 N が無限大の場合のものも参考に記してある

7.4. 待ち人数や待ち時間がある値未満である確率

ここまではマクロなパラメータとして平均値を扱ってきた。目標値として平均値をかかげる場合はこれで対応できる。しかしながら、前章で示したように確率と連動させた目標値を設定するほうが一般的である。

コールセンターにおいては、ある値以内のお客の待ち時間での応答を 80%前後の値にするという目標を設定する。そのような要望に応えるために、我々は平均ではなく、確率そのものを扱わなくてはならない。

前章でも以上の問題を扱った。ここでは、呼損がる状態で同じことを行う。

7.4.1. 待ち人数

我々は待ち人数が L_{q0} 未満になる確率を求めたい。まず、待ち人数が L_{q0} 以上になる確率 P^* を求める。その確率は以下ようになる。

$$\begin{aligned} P^* &= P_{s+L_{q0}} + P_{s+L_{q0}+1} + P_{s+L_{q0}+2} + \cdots + P_N \\ &= \left[\eta^{L_{q0}} + \eta^{L_{q0}+1} + \eta^{L_{q0}+2} + \cdots + \eta^{N-s} \right] P_s \\ &= \left[1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{N-s-L_{q0}} \right] \eta^{L_{q0}} P_s \\ &= \frac{\eta^{L_{q0}}}{1-\eta} \left[1 - \eta^{N-s-L_{q0}+1} \right] P_s \end{aligned} \tag{92}$$

したがって、待ち人数が L_{q0} 未満である確率 $P(L_{q0})$ は以下で与えられる。

$$P(L_{q0}) = 1 - P^* = 1 - \frac{\eta^{L_{q0}}}{1-\eta} \left[1 - \eta^{N-s-L_{q0}+1} \right] P_s \tag{93}$$

図 21 に $P(L_{q0})$ の η 依存性を示す。ここで、 $s=3$ としている。その確率は小さな η ではほぼ 1 であるが、ある値の η から急激に減少する。その確率は当然のことながら L_{q0} が大きければ大きくなる。 $P(L_{q0})$ は N が無限大の場合よりもおおきい。これは、入ってくる顧客の数が N で制限を受けるためである。

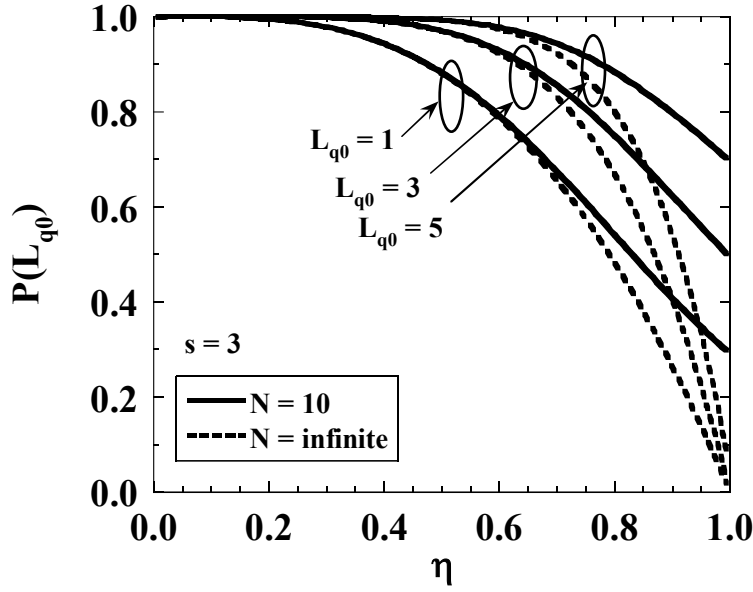


図 21 $s=3$ における $P(L_{q0})$ の ρ/s 依存性

$M/M/s(\infty)$ の場合とより詳細に比較しよう。

式は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
 P(L_{q0}) &= 1 - \frac{\eta^{L_{q0}}}{1-\eta} \left[1 - \eta^{N-s-L_{q0}+1} \right] P_s \\
 &\geq P(L_{q0})_{M/M/s(\infty)} + \frac{\eta^{L_{q0}}}{1-\eta} \eta^{N-s-L_{q0}+1} P_s \\
 &= P(L_{q0})_{M/M/s(\infty)} + \frac{\eta^{N-s+1}}{1-\eta} P_s
 \end{aligned} \tag{94}$$

両モデルにおいて P_s は異なり、有限の N の P_s の方が大きい。したがって、この式は近似的なものである。この $P(L_{q0})$ は $M/M/s(\infty)$ のものより、この式の形式からも明らかのように大きくなる。

$\eta \rightarrow 1$ の極限を考えよう。この場合は

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 1} P_s &= \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{\rho^s}{s!} P_0 \\
&= \frac{s^s}{s!} \lim_{\eta \rightarrow 1} P_0 \\
&= \frac{s^s}{s!} \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1-\eta}} \\
&= \frac{s^s}{s!} \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \eta \frac{1 - \eta^{N-s}}{1-\eta}} \\
&= \frac{s^s}{s!} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} + \frac{s^s}{s!} (N-s)}
\end{aligned} \tag{95}$$

ここで、

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1 - \eta^{N-s-L_{q0}+1}}{1-\eta} = N-s-L_{q0}+1 \tag{96}$$

を利用している。したがって、

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} P(L_{q0}) = \frac{s^s}{s!} \frac{N-s-L_{q0}+1}{\sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} + \frac{s^s}{s!} (N-s)} \tag{97}$$

となる。

7.4.2. 待ち時間

待ち時間が t 未満である確率を求める。待ち行列理論では、基本的に人数に関して注目している理論のため、時間 t に相当する人数の状況を考える。

まずは、時間 t 以上待つ確率 P^* を求める。

ここで、一人の顧客が系を訪れ時、系に k 人いたとする。もし、 k が s 未満であれば、顧客はサービスを即座に受けることができ、その待ち時間は 0 である。もし、 k が s 以上であれば、その訪問した顧客は待たなければならない。つまり、一人の顧客が訪問したとき、待つことに対する状態は $s, s+1, \dots, N$ である。その待つ場合、時間 t 以上待つことを考える。

各状態の場合について考える。

もし、 k が s であり、一人の顧客も時間 t の間サービスを終了しなければ、その顧客は待たなければならない。

もし、 k が $s+1$ であったとしよう。次の時間 t の間に二人以上の顧客のサービスが終了しなければ、その客は待つことになる。

上の状況を一般的にいかのように表現できる。

もし、一人の顧客が系を訪問した際、そこに s 以上の k 人の顧客がいたとする。その際、次の時間 t の間にサービスを終了する人数が $k-s$ 人以下であれば、訪問した顧客はサービスを待たなければならない。したがて、対応する確率 P^* は以下と表現される。

$$P^* = \sum_{k=s}^{\infty} P_k P(t_k > t) \quad (98)$$

P_k は系に k 人いる状態の確率で以下である。

$$P_k = \eta^{k-s} P_s \quad (99)$$

$P(t_k > t)$ は訪問した顧客が訪問時から時間 t 経過してもサービスを受けられない確率である。それは、時間 t の間にサービスを終了した人数が $k-s$ 以下の場合である。時間 t の間に終了する顧客の人数はポアソン分布に従うとしているから、 $P(t_k > t)$ は以下で与えられる。

$$P(t_k > t) = \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \quad (100)$$

Eqs. (99)、(100) を Eq. (98)に代入して、以下を得る。

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_{k=s}^N P_k P(t_k > t) \\ &= \sum_{k=s}^N \eta^{k-s} P_s \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\ &= P_s e^{-s\mu t} \sum_{k=s}^N \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \end{aligned} \quad (101)$$

最後の二つの項はさらに展開できて、以下になる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=s}^N \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^0 \frac{(s\mu t)^r}{r!} + \sum_{r=0}^1 \eta \frac{(s\mu t)^r}{r!} + \sum_{r=0}^2 \eta^2 \frac{(s\mu t)^r}{r!} + \sum_{r=0}^3 \eta^3 \frac{(s\mu t)^r}{r!} + \dots + \sum_{r=0}^{N-s} \eta^{N-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\
&= \left[1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta^{N-s} \right] \frac{(s\mu t)^0}{0!} \\
&+ \left[\eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta^{N-s} \right] \frac{(s\mu t)^1}{1!} \\
&+ \left[\eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta^{N-s} \right] \frac{(s\mu t)^2}{2!} \\
&+ \left[\eta^3 + \dots + \eta^{N-s} \right] \frac{(s\mu t)^3}{3!} \\
&+ \dots \\
&+ \eta^{N-s} \frac{(s\mu t)^{N-s}}{(N-s)!}
\end{aligned} \tag{102}$$

Eq. (102) はさらに以下のように簡単化される。

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=s}^N \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\
&= \frac{1 - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta} \frac{(s\mu t)^0}{0!} \\
&+ \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta} \frac{(s\mu t)^1}{1!} \\
&+ \frac{\eta^2 - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta} \frac{(s\mu t)^2}{2!} \\
&\dots \\
&+ \frac{\eta^{N-s} - \eta^{N-s+1}}{1 - \eta} \frac{(s\mu t)^{N-s}}{(N-s)!} \\
&= \frac{1}{1 - \eta} \left[\left(1 + \eta \frac{(s\mu t)^1}{1!} + \eta^2 \frac{(s\mu t)^2}{2!} + \dots + \eta^{N-s} \frac{(s\mu t)^{N-s}}{(N-s)!} \right) \right. \\
&\quad \left. - \eta^{N-s+1} \left(1 + \frac{(s\mu t)^1}{1!} + \frac{(s\mu t)^2}{2!} + \dots + \frac{(s\mu t)^{N-s}}{(N-s)!} \right) \right] \\
&= \frac{1}{1 - \eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{103}$$

したがって、我々是对応する確率 P^* を以下のように得る。

$$\begin{aligned}
P^* &= P_s e^{-s\mu t} \sum_{k=s}^{\infty} \eta^{k-s} \sum_{r=0}^{k-s} \frac{(s\mu t)^r}{r!} \\
&= P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{104}$$

時間 t 未満で応答される確率 $P(t)$ は以下となる。

$$\begin{aligned}
P(t) &= 1 - P^* \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{105}$$

これは、さらに以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
P(t) &= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!} \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(s\mu \eta t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!} \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\eta^n - \eta^{N-s+1}) (s\mu t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{106}$$

図 22 に $P(T_0)$ の η 依存性を示す。 s として、5 と 20 を設定している。また、 $T_0 = 10\text{sec}$ としている。これは、電話でいうと 3 コールに相当する。

η が小さい場合、 $P(T_0)$ はほぼ 1 であり、ある η の値から減少してく。その確率は N が無限大の場合よりは常に大きい。 s を大きくしてやれば、 $P(T_0)$ の減少するポイントは遅れる。つまり、 s を大きくすることは有効である。

例えば、 $P(T_0)$ を 0.8 以上にするというような設定を考える。このときは、 N がある程度大きい場合には、確率の N 依存性はあまり考える必要はない。ある程度大きい N を考えればいい。このとき、求める条件は、 $s=5$ では、 η は 0.58 以下、 $s=20$ では η は 0.78 以下である。

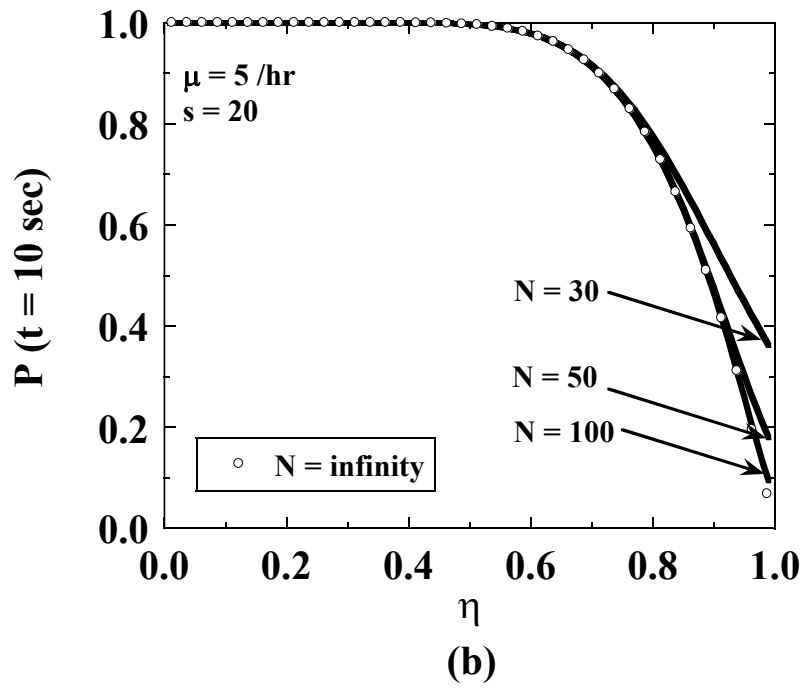
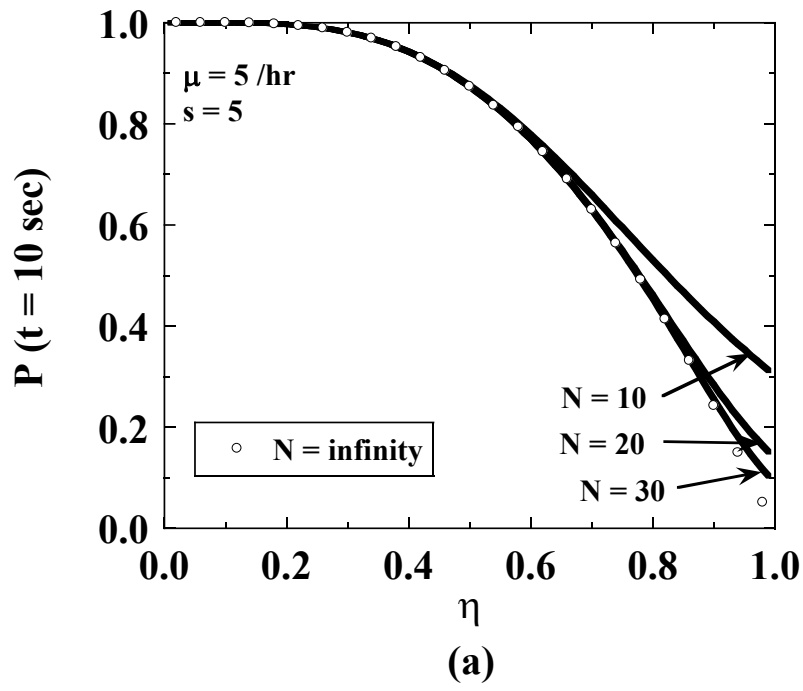


図 22 $P(T_0)$ の η 依存性。 (a) $s=5$. (b) $s=20$.

$M/M/s(\infty)$ のモデルとの比較をさらに詳細にする。

モデル式は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
P(t) &= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\eta^n - \eta^{N-s+1})(s\mu t)^n}{n!} \\
&\approx 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{\eta^n (s\mu t)^n}{n!} \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n=N-s}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right] \\
&= 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \left[e^{\lambda t} - \sum_{n=N-s}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right] \\
&= 1 - \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(1-\eta)s\mu t} + \frac{P_s}{1-\eta} e^{-s\mu t} \sum_{n=N-s}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= P(t)_{M/M/s(\infty)} + \frac{P_s}{1-\eta} e^{-s\mu t} \sum_{n=N-s}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{107}$$

この表式は正確には正しくない。

$$P(t)_{M/M/s(\infty)} = 1 - \frac{P_s}{1-\eta} e^{-(1-\eta)s\mu t} \tag{108}$$

としている。これは表式としては正しいが、両方で P_s が異なり、 $M/M/s(N)$ のものの方が大きい。したがって、式は過少評価していることになる。つまり、式は現実よりも厳しい評価をしていることになる。

この近似式から $P(t)$ は $M/M/s(\infty)$ のものより、常に大きいということが分かる。第二項が大きくなる場合にその差は顕著になり、それは η が 1 に近づいた領域で顕著になる。

$\eta \rightarrow 1$ の極限状態を感がえる。

この場合は以下となる。

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} P_s = \frac{s^s}{s!} \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} + \frac{s^s}{s!} (N-s)} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\eta \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\eta^n - \eta^{N-s+1})(s\mu t)^n}{(1-\eta)n!} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 1} \left[\frac{(1-\eta^{N-s+1})}{(1-\eta)} + \frac{(\eta^1 - \eta^{N-s+1})(s\mu t)^1}{(1-\eta)1!} + \frac{(\eta^2 - \eta^{N-s+1})(s\mu t)^2}{(1-\eta)2!} + \dots + \frac{(\eta^{N-s} - \eta^{N-s+1})(s\mu t)^{N-s}}{(1-\eta)(N-s)!} \right] \\
&= N-s+1
\end{aligned} \tag{110}$$

したがって、以下を得る。

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} P(t) = 1 - \frac{\frac{s^s}{s!}(N-s+1)}{\sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} + \frac{s^s}{s!}(N-s)} e^{-s\mu t} \quad (111)$$

これは、 t を増加させていった場合、増加していくことを表現できている。

7.5. まとめ

この章のまとめを行う。

n 人の顧客が系にいる状態確率は以下で与えられる。

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \leq s) \\ \eta^{n-s} P_s & (s \leq n \leq N) \end{cases}$$

ここで、 P_0 は以下である。

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1-\eta}}$$

待ち人数の平均値 L_q 、その分散 V_{L_q} は以下である。

$$L_q = \frac{\eta P_s}{(1-\eta)^2} - \left[\frac{1}{(1-\eta)^2} + \frac{N-s}{1-\eta} \right] \eta P_N$$

$$V_{L_q} = 2 \frac{\eta^2 P_s}{(1-\eta)^3} - \left[\frac{2}{(1-\eta)^3} + \frac{2(N-s-1)}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)}{1-\eta} \right] \eta P_N + L_q - L_q^2$$

標準偏差 σ_{L_q} は以下である。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{L_q}}$$

系にいる顧客の平均人数 L 、分散 V_L は以下である。

$$L = (1 - P_N) \rho + L_q$$

$$V_L = 2 \frac{\eta^2 P_s}{(1-\eta)^3} - \left[\frac{2}{(1-\eta)^3} + \frac{2(N-s-1)}{(1-\eta)^2} + \frac{(N-s)(N-s-1)}{1-\eta} \right] \eta P_N \\ + (2s+1)L_q + s^2 \left(1 - \sum_{n=1}^s P_n \right) + \sum_{n=1}^s n^2 P_n - L^2$$

標準偏差 σ_L は以下である。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L}$$

平均待ち時間 W_q 、系に滞在する平均時間 W は以下である。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

稼働率 r_{ope} は以下である。

$$r_{ope} = \frac{1 - \xi}{1 - \xi} \eta$$

ここで、 ξ は以下である。

$$\xi = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{s!} \left(\frac{\rho}{s} \right)^{N-s}}{\sum_{n=1}^s n \frac{\rho^{s-n}}{(s-n)!}}$$

待っている人の人数が L_{q0} 未満である確率は以下である。

$$P(L_{q0}) = 1 - P^* = 1 - \frac{\eta^{L_{q0}}}{1-\eta} \left[1 - \eta^{N-s-L_{q0}+1} \right] P_s$$

待っている時間が t 未満である確率は以下である。

$$P(t) = 1 - P_s e^{-s\mu t} \frac{1}{1-\eta} \sum_{n=0}^{N-s} \frac{(\lambda t)^n - \eta^{N-s+1} (s\mu t)^n}{n!}$$