3. ポアソン過程

概要: 我々は通常訪問はランダムに発生すると仮定する。ポアソン分布はこのランダム性と関連する。したがって、ポアソン分布は待ち行列理論において特に重要な確率分布である。もし、訪問顧客人数がポアソン分布に従うならば、訪問時間間隔は指数分布に従うことが示される。

キーワード:ランダム性;定常性;残留効果;同時発生;ポアソン分布;指数分布

3.1. 序

通常、訪問顧客はランダムに発生する仮定される。その仮定は一般性があるように思われ、この本全体で用いられる。このランダム性はポアソン分布で表現される。したがって、ポアソン分布は待ち行列理論において重要な位置を示す。ここでは、ランダム性とは何かを議論する。

3.2. 分布に要求されること

ここでは、訪問顧客頻度に関して仮定していることを議論する。

3.2.1. 定常性

訪問頻度に関しては定常性が要求される。

定常性とは、どの時間間隔に対しても訪問は等価であることを示す。これは定常性と呼ばれる。等価とは以下のことを意味する。

時間間隔を以下のように区分する。

$$I_1, I_2, \cdots, I_n \tag{1}$$

区分された時間間隔は以下のように与えられるとする。

$$\begin{aligned} &I_1 : \left[t_0, t_0 + t_1\right] \\ &I_2 : \left[t_0 + t_1, t_0 + t_1 + t_2\right] \\ &\cdots \\ &I_n : \left[t_0 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i, t_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i\right] \end{aligned} \tag{2}$$

区間 i の間に訪問した顧客の数を k_i とする。

定常性とは、k_i は t_i のみに依存し、t_0 には依存しないということを意味する。

したがって、我々は時間間隔にのみ注目し、それがいつ始まったかには注目する必要がない。

3.2.2. 残留効果

訪問頻度に関しては残留効果がないことが要求される。

残留効果はないとは、現象はその前に何が起こったかに依存しないことを意味する。すなわち、t_0以前の情報は、t_0以降の情報に影響を及ぼさない。

3.2.3. 同時発生

訪問頻度に関しては同時発生がないことが要求される。同時発生とは、二つの事象が同時に起こらないことを意味する。

もし微小な時間間隔を選択すると、二つの事象は同時に起こらないと仮定することができる。二つの事象が同時に起こる確率を$P(t_s \geq 2)$とすると、これは以下のように表現される。

$$\frac{P(t, \geq 2)}{t} \to 0 \quad for\ t \to 0 \tag{3}$$

3.3. 微小時間に顧客が系を訪れる確率

時間間隔を 1 とする。 この時間間隔の中で訪問顧客が 1 人も来ない確率をϕとし、以下で表現する。

$$\phi = P_0(1) \tag{4}$$

この時間間隔をn等分する。すると以下のようになる。

$$\phi = \left[P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \tag{5}$$

したがって、以下を得る。

$$P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \phi^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

これから時間間隔kの場合は以下になる。

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \phi^{\frac{k}{n}} \tag{7}$$

ここで、 $t = k/n$と置くと

$$P_0(t) = \phi^t \tag{8}$$

を得る。

ϕは 1 の時間間隔の中で一人も顧客が来ない確率であった。それは 1 より小さい正の値である。したがって、以下のように置くことができる。

$$\phi = e^{-\lambda} \tag{9}$$

ここで、 $\lambda > 0$である。したがって、我々は以下を得る。

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{10}$$

したがって、以下のように置ける。

$$P_0(t)+P_1(t)+P_k(t,k\geq 2)=1 \tag{11}$$

ここで、時間間隔 t を微小とすると、$P_k(t,k\geq 2)=0$ を置けるから

$$\begin{aligned}P_1(t)&=1-P_0(t)\\&=1-e^{-\lambda t}\\&\approx \lambda t\end{aligned} \tag{12}$$

となる。すなわち、時間間隔 t の間に顧客が 1 人訪問する確率は λt となる。

時間間隔 t が非常に小さい場合、我々はそれを Δt と表記する。したがって、微小時間間隔 Δt の間に顧客が系を 1 人訪問する確率は

$$P_1(\Delta t)=\lambda\Delta t \tag{13}$$

となる。

3.4. ポアソン分布の導出

前章では、ポアソン分布は二項分布の極限として導出された。ここでは、これまで述べて来た性質に基づいてポアソン分布を導出する。

時間間隔 t の間に、顧客が k 人系を訪問する確率を考える。

その導出のために、時間間隔 $t+h$ の間に、系を k 人の顧客が系を訪問するということを考える。これは、以下のように考える。

k 人の顧客が時間間隔 t の間に系を訪問し、0 人の顧客が時間間隔 h の間に系を訪問する。

$k-1$ 人の顧客が時間間隔 t の間に系を訪問し、1 人の顧客が時間間隔 h の間に系を訪問する。

$k-2$ 人の顧客が時間間隔 t の間に系を訪問し、2 人の顧客が時間間隔 h の間に系を訪問する。

…

0 人の顧客が時間間隔 t の間に系を訪問し、k 人の顧客が時間間隔 h の間に系を訪問する。

したがって、時間間隔 $t+h$ の間に k 人の顧客が系を訪問する確率は以下のようになる。

$$P_k(t+h)=\sum_{i=0}^{k}P_{k-i}(t)P_i(h) \tag{14}$$

これは、時間間隔の t と h を交換しても成り立ち

$$P_k(t+h)=\sum_{i=0}^{k}P_i(t)P_{k-i}(h) \tag{15}$$

となる。

$P_i(t)$ は 1 よりも小さいから、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-2} P_i(t) P_{k-i}(h) &\leq \sum_{i=0}^{k-2} P_{k-i}(h) \\
&= \sum_{i=2}^{k} P_i(h) \\
&\leq \sum_{i=2}^{\infty} P_i(h) \to 0 \quad for\ h \to 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

したがって、h が小さい場合は、我々は $i = 0,1$ のみを考えればいい。よって、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P_k(t+h) &= \sum_{i=0}^{k} P_{k-i}(t) P_i(h) \\
&\approx P_k(t) P_0(h) + P_{k-1}(t) P_1(h) \\
&\approx P_k(t) e^{-\lambda h} + P_{k-1}(t)\left(1 - e^{-\lambda h}\right) \\
&\approx (1 - \lambda h) P_k(t) + \lambda h P_{k-1}(t)
\end{aligned} \tag{17}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\frac{dP_k}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \tag{18}
$$

$k = 1$とすると、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} + \lambda P_1(t) &= \lambda P_0(t) \\
&= \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{19}
$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\
&= \lambda t e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{20}
$$

$k = 2$ と置いて、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_2}{dt} + \lambda P_2(t) &= \lambda P_1(t) \\
&= \lambda\left(\lambda t e^{-\lambda t}\right)
\end{aligned} \tag{21}
$$

したがって、以下になる。

$$
\begin{aligned}
P_2(t) &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda\left(\lambda t e^{-\lambda t}\right) e^{\lambda t} dt \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t t\,dt \\
&= \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{22}
$$

$k = 3$と置いて、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_3}{dt} + \lambda P_3(t) &= \lambda P_2(t) \\
&= \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

これから、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P_3(t) &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\
&= \frac{\lambda^3 e^{-\lambda t}}{2!} \int_0^t t^2 dt \\
&= \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

上の結果を観察すると、時間 t の間に k 人が系を訪問する確率は以下の形式ではないかと想像される。

$$
P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\tag{25}
$$

これを数学的帰納法で証明する。

この形式は k で成り立つとする。

すると、以下の微分方程式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_{k+1}}{dt} + \lambda P_{k+1}(t) &= \lambda P_k(t) \\
&= \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

これは以下のように解くことができる。

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(t) &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{k!} \int_0^t t^k dt \\
&= \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

したがって、この形式は $k+1$ でも成り立つ。よって、時間間隔 t の間に、n 人の顧客が系を訪問する確率は以下で与えられる。

$$
P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\tag{28}
$$

微小時間 t の間に系を 1 人の顧客が系を訪問する確率は $P_1(t)$ 以下となる。

$$P_1(t) = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} \approx \lambda t (1 - \lambda t) \approx \lambda t \tag{29}$$

時間間隔を微小と限定し、それを Δt と表すと、その間に 1 人の顧客が系を訪問する確率は

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t \tag{30}$$

となる。

一人の顧客も系を訪問しない確率は以下となる。

$$1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t \tag{31}$$

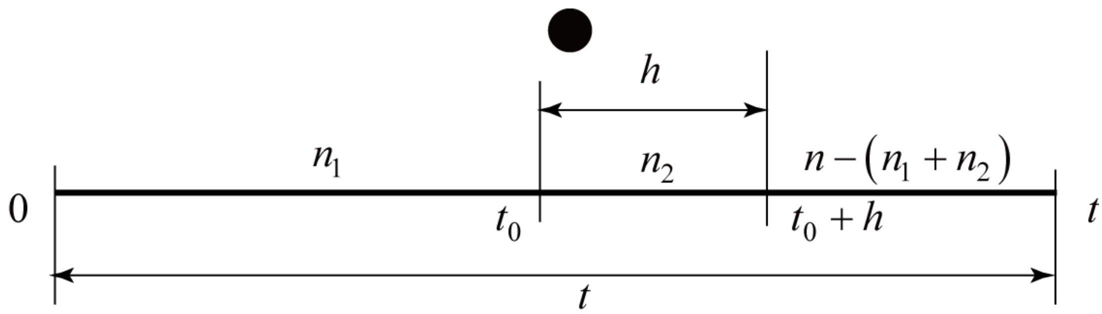

図 1 ポアソンプロセスにおいて特定の人が時間間隔 $[t_0, t_0+h]$ の間に系を訪問する場合の模式図

3.5. ポアソン分布のランダム性

ここでは、ポアソン分布のランダム性の解析をする。

図 1 に示すような時間間隔 t の中の時間間隔 $[t_0, t_0+h]$ を考える。

時間間隔 t の間に n 人の顧客が系を訪問する確率はポアソン分布で与えられ、以下となる。

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{32}$$

この n 人の顧客の中の一人の顧客に注目する。その注目した顧客が時間間隔 $[t_0, t_0+h]$ の間に系を訪問することを考える。

まず、トータルの時間 t を三つの時間間隔 $[0, t_0]$, $[t_0, t_0+h]$, $[t_0+h, t]$ に分けた場合を考える。それぞれの時間間隔で、我々は顧客数 $n_1, n_2, n-(n_1+n_2)$ を得たとする。こうなる確率は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\lambda t_0)^{n_1}}{n_1!}e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda h)^{n_2}}{n_2!}e^{-\lambda h}\frac{\left[\lambda(t-t_0-h)\right]^{n-(n_1+n_2)}}{\left[n-(n_1+n_2)\right]!}e^{-\lambda(t-t_0-h)} \\
&=\lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t_0^{n_1}}{n_1!}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{(t-t_0-h)^{n-(n_1+n_2)}}{\left[n-(n_1+n_2)\right]!}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ここまでは、我々は特定の顧客が時間間隔$[t_0, t_0+h]$の間に系を訪問したかを考慮していない。各時間間隔$[0, t_0]$, $[t_0, t_0+h]$, $[t_0+h, t]$でそれぞれ$n_1, n_2, n-(n_1+n_2)$ 人の顧客が訪問する場合の数は以下となる。

$$
{}_nC_{n_1}\times{}_{n-n_1}C_{n_2} \tag{34}
$$

この中で、ある特定の顧客が時間間隔$[t_0, t_0+h]$を訪問する場合を考える。

ある特定顧客が時間間隔$[t_0, t_0+h]$を訪問した状態を考える。この場合の残りの $n-1$ 人のことを考える。

$n-1$人の 顧客のうち、n_1 の顧客が時間間隔 of $[0, t_0]$ の間に系を訪問し、n_2-1 人の顧客が時間間隔$[t_0, t_0+h]$の間に系を訪問し、$n-(n_1+n_2)-1$ 人 の顧客が時間間隔$[t_0+h, t]$を訪問する。対応する場合の数は

$$
{}_{n-1}C_{n_1}\times{}_{n-n_1-1}C_{n_2-1} \tag{35}
$$

となる。

したがって、n 人の顧客が時間間隔 t の間に系を訪問したうち、ある特定の顧客が$[t_0, t_0+h]$の時間間隔に系を訪問する確率は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_{n-1}C_{n_1}\times{}_{n-n_1-1}C_{n_2-1}}{{}_nC_{n_1}\times{}_{n-n_1}C_{n_2}} \\
&=\frac{(n-1)!}{(n-n_1-1)!n_1!}\frac{(n-n_1-1)!}{(n-n_1-n_2)!(n_2-1)!}\frac{(n-n_1)!n_1!}{n!}\frac{(n-n_1-n_2)!n_2!}{(n-n_1)!} \\
&=\frac{(n-1)!}{n!}\frac{n_2!}{(n_2-1)!} \\
&=\frac{n_2}{n}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

したがって、n 人の顧客が時間間隔t の間に系を訪問し、かつある特定の顧客が$[t_0, t_0+h]$ の時間間隔に系を訪問する確率は以下となる。

$$
\frac{n_2}{n}\lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t_0^{n_1}}{n_1!}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{(t-t_0-h)^{n-(n_1+n_2)}}{\left[n-(n_1+n_2)\right]!} \tag{37}
$$

すべての場合をカバーするためには、n_1 は 0 から $n-1$までを変化させ、 n_2 を 1 から$n-n_1$までを変化させればいい。したがって、トータルの確率 P は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{n_1=0}^{n-1}\sum_{n_2=1}^{n-n_1}\frac{n_2}{n}\lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t_0^{\ n_1}}{n_1!}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(t-t_0-h\right)^{n-\left(n_1+n_2\right)}}{\left[n-\left(n_1+n_2\right)\right]!} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t}\sum_{n_1=0}^{n-1}\frac{t_0^{\ n_1}}{n_1!}\sum_{n_2=1}^{n-n_1}\frac{n_2}{n}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(t-t_0-h\right)^{n-\left(n_1+n_2\right)}}{\left[n-\left(n_1+n_2\right)\right]!}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Eq. (38) の中の最後の方のΣ項を考える。変数$s=n-n_1$を導入すると、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_2=1}^{n-n_1}\frac{n_2}{n}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(t-t_0-h\right)^{n-\left(n_1+n_2\right)}}{\left[n-\left(n_1+n_2\right)\right]!} &= \sum_{n_2=1}^{s}\frac{n_2}{n}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(t-t_0-h\right)^{s-n_2}}{\left(s-n_2\right)!} \\
&= \sum_{n_2=1}^{s}\frac{n_2}{ns!}\frac{s!}{\left(s-n_2\right)!n_2!}h^{n_2}\left(t-t_0-h\right)^{s-n_2} \\
&= \frac{1}{ns!}\sum_{n_2=1}^{s}n_2\,{}_sC_{n_2}h^{n_2}\left(t-t_0-h\right)^{s-n_2}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

以下の二項で入りを考える。

$$
\left(ax+b\right)^n=\sum_{m=0}^{n}{}_nC_m a^m b^{n-m}x^m \tag{40}
$$

これをxについて微分すると

$$
na\left(ax+b\right)^{n-1}=\sum_{m=0}^{n}m\,{}_nC_m a^m b^{n-m}x^{m-1} \tag{41}
$$

を得る。$x=1$として、以下を得る。

$$
\sum_{m=0}^{n}m\,{}_nC_m a^m b^{n-m}=\sum_{m=1}^{n}m\,{}_nC_m a^m b^{n-m}=na\left(a+b\right)^{n-1} \tag{42}
$$

したがって、Eq. (39) は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_2=1}^{n-n_1}\frac{n_2}{n}\frac{h^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(t-t_0-h\right)^{n-\left(n_1+n_2\right)}}{\left[n-\left(n_1+n_2\right)\right]!} &= \frac{1}{ns!}\sum_{n_2=1}^{s}n_2\,{}_sC_{n_2}h^{n_2}\left(t-t_0-h\right)^{s-n_2} \\
&= \frac{sh}{ns!}\left(h+t-t_0-h\right)^{s-1} \\
&= \frac{h}{n\left(s-1\right)!}\left(t-t_0\right)^{s-1}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

この Eq. (43) を Eq. (38)に代入して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P &= \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{t_0^{\,n_1}}{n_1\,!} \sum_{n_2=1}^{n-n_1} \frac{n_2}{n} \frac{h^{n_2}}{n_2\,!} \frac{\left(t-t_0-h\right)^{n-(n_1+n_2)}}{\left[n-\left(n_1+n_2\right)\right]!} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{t_0^{\,n_1}}{n_1\,!} \frac{h}{n\left(s-1\right)!} \left(t-t_0\right)^{s-1} \\
&= \frac{h}{n} \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{1}{n_1\,!\left(n-1-n_1\right)!} t_0^{\,n_1} \left(t-t_0\right)^{n-1-n_1} \\
&= \frac{h}{n} \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{\left(n-1\right)!}{n_1\,!\left(n-1-n_1\right)!} t_0^{\,n_1} \left(t-t_0\right)^{n-1-n_1} \\
&= \frac{h}{n\left(n-1\right)!} \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{\left(n-1\right)!}{n_1\,!\left(n-1-n_1\right)!} t_0^{\,n_1} \left(t-t_0\right)^{n-1-n_1} \\
&= \frac{h}{n!} \lambda^n e^{-\lambda t} \sum_{n_1=0}^{n-1} {}_{n-1}C_{n_1} t_0^{\,n_1} \left(t-t_0\right)^{n-1-n_1} \\
&= \frac{h}{n!} \lambda^n e^{-\lambda t} t^{n-1} \\
&= \frac{h}{t} \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

これは、時間間隔 t の間に n 人の顧客が訪問し、かつその中の特定の一人が時間間隔 h の間にいる確率である。これは、ポアソン分布に単純に h/t を掛けたものである。つまり、特定の人が訪問する確率は時間間隔の長さにのみ依存することを示している。これは、ランダム性を表現していることになる。

3.6. 訪問間の時間

ポアソン分布は時間間隔 t の間に何人系を訪問するかを扱っていた。我々はその訪問と訪問の間の時間間隔を知りたい。

時間間隔が t である確率密度分布を $f\left(t\right)$ とする。

次の積分を考える。

$$
\int_T^\infty f\left(t\right) dt \tag{45}
$$

これは時間間隔 t が T 以上である確率である。これは時間 T までは訪問客が一人もいない確率である。これは以下のように表現される。

$$
\int_T^\infty f\left(t\right) dt = P_0\left(T\right) = e^{-\lambda T} \tag{46}
$$

すべての確率密度を積分すると 1 になるから、以下の関係を得る。

$$
\int_0^T f\left(t\right) dt + \int_T^\infty f\left(t\right) dt = 1 \tag{47}
$$

したがって、以下を得る。

$$\int_0^T f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda T} \tag{48}$$

これをT について微分して、以下を得る。

$$f(T) = \lambda e^{-\lambda T} \tag{49}$$

したがって、訪問間の時間間隔は指数分布に従う。T はダミー変数であるから、それをtに変えて、以下を得る。

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{50}$$

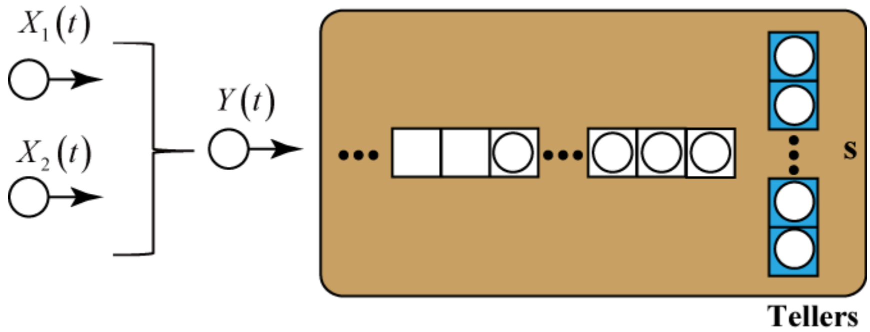

図 2　複数の入力

3.7. 複数の入力流速

二つの入力流束$X_1(t)$ および $X_2(t)$ を考える。これらはポアソン分布に従うとし平均訪問頻度はλ_1 および λ_2，とする。図 2 に対応する模式図を示す。

入力 1 を考える。時間間隔tの間に系を訪問する顧客の数をx_1 とする。つまり$S_1(t) = x_1$と表記する。すると関連する確率は以下となる。

$$P\left(S_1(t) = x_1\right) = \frac{(\lambda_1 t)^{x_1}}{x_1} e^{-\lambda_1 t} \tag{51}$$

同様に入力 2 を考える。時間間隔tの間に系を訪問する顧客の数をx_2とする。つまり$S_2(t) = x_2$と表記する。すると関連する確率は以下となる。

$$P\left(S_2(t) = x_2\right) = \frac{(\lambda_2 t)^{x_2}}{x_2} e^{-\lambda_2 t} \tag{52}$$

ここで、二つの入力を同時に考える。対応する確率変数は以下となる。

$$Y(t) = X_1(t) + X_2(t) \tag{53}$$

時間間隔tの間に系を訪問する顧客の数をyとする。つまり$S(t)=y$と表記する。すると関連する確率は以下となる。

$$\begin{aligned}P\left(S(t)=y\right)&=\sum_{x=0}^{y}P\left(S_1(t)=x\right)P\left(S_2(t)=y-x\right)\\&=\sum_{x=0}^{y}\frac{(\lambda_1 t)^x}{x!}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_2 t)^{y-x}}{(y-x)!}e^{-\lambda_2 t}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}\sum_{x=0}^{y}\frac{y!}{x!(y-x)!}(\lambda_1 t)^x(\lambda_2 t)^{y-x}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^y\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}\left[(\lambda_1+\lambda_2)t\right]^y\end{aligned}\tag{54}$$

したがって、二つの入力の和は、単純にそれらの平均を足し合わせたものになる。

この結果は単純にm個の入力に適用できる。すなわち、入力が複数

$$Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_m(t)\tag{55}$$

で表され、個々の入力が以下のポアソン分布に従う場合を考える。

$$P\left(S_i(t)=x_i\right)=\frac{(\lambda_i t)^{x_i}}{x_i}e^{-\lambda_i t}\tag{56}$$

時間間隔tの間に系を訪問する顧客の数をyとする。つまり$S(t)=y$と表記する。すると関連する確率は以下となる。

$$P\left(S(t)=y\right)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t}}{y!}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t\right]^y\tag{57}$$

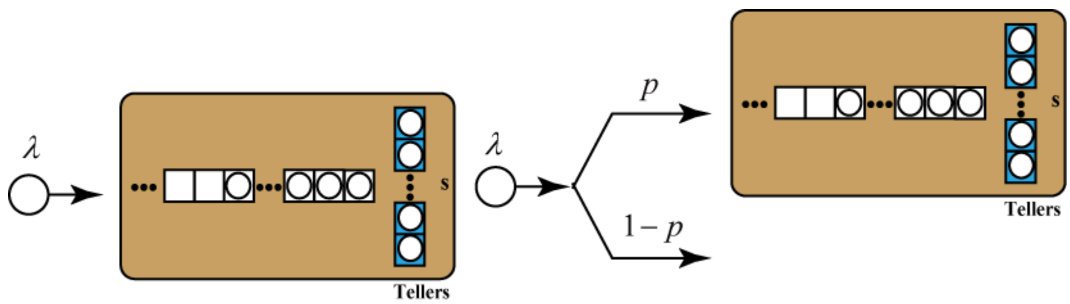

図 3　出力の分離

3.8. 出力の分離

出力の分離を考える。対応する模式図を図 3 に示す。

出力の流束が確率 p および $1-p$ で分離する場合を考える。

まず、単一な出力をつまり分離していない出力を考える。出力の流束の平均頻度は λ であるとする。時間間隔 t で出力の数が n である確率は以下で与えられる。

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{58}$$

次に、出力が確率 p で分離する場合を考える。トータルの出力人数が n の状態で分離した流束の人数が m である確率は以下で与えられる

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} {}_nC_m p^p (1-p)^{n-m} \tag{59}$$

n は m と同じかそれよりも大きい。したがって、我々が出力 m を得る確率は以下となる。

$$\begin{aligned}
P\left(S_1(t)=m\right) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} {}_nC_m p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{n!}{m!(n-m)!} {}_n p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{p^m e^{-\lambda t}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-m)!} (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{(\lambda t)^m p^m e^{-\lambda t}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left[(\lambda t)(1-p)\right]^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= \frac{(p\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} e^{-(\lambda t)(1-p)} \\
&= \frac{(p\lambda t)^m}{m!} e^{-p\lambda t}
\end{aligned} \tag{60}$$

これは、平均頻度 $p\lambda$ を持つポアソン分布である。

この結果は複数に分離された流束に適用できる。対応する模式図を図 4 に示す。l 個の流束に分離し、それぞれの流束に分離する確率が p_i であるとする。ある流速が m になる確率は以下となる。

$$P\left(S_i(t)=m\right) = \frac{(p_i\lambda t)^m}{m!} e^{-p_i\lambda t} \tag{61}$$

ここで、確率は

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_l = 1 \tag{62}$$

となる。

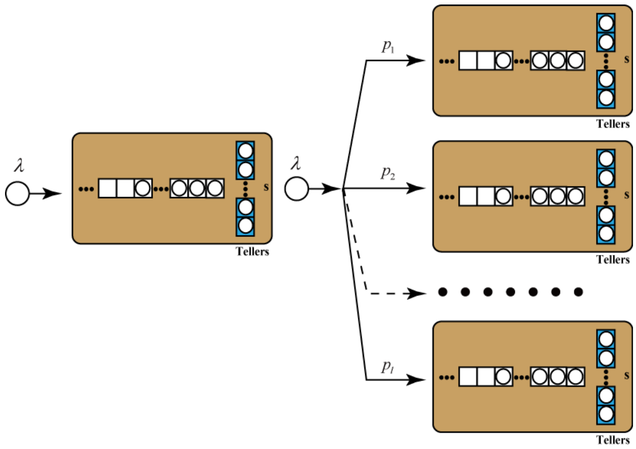

図 4　出力が複数に分離する場合

3.9.　まとめ

我々は、顧客の訪問に関して以下の要請をする。

- 定常性
- 残留効果無し
- 同時発生なし

時間 t の間隔の中で n　人の顧客が系を訪問する確率はポアソン分布で表現され

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

で与えられる。

時間間隔が短ければ、それを Δt と表現し 1 人が系を訪問する確率は

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$$

となる。系に一人も顧客が訪問しない確率は以下となる。

$$1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$$

系を訪問する顧客の数がポアソン分布に従うならば、訪問する時間間隔は以下の指数分布に従う。

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

系の入力が複数の場合、それぞれの入力の頻度の平均の和を適用すればいい。

系の出力が複数の場合、分離する確率に頻度をかければいい。