18. 待ち行列ネットワーク

概要: いくつかのプロセスが直列に遂行される場合、それはネットワークとして表現されるもし、サービス率が最初の入力頻度よりも、常に大きければ、各プロセスの入力は最初のものと同じ、と仮定できる。つまり、 。ここでは、それぞれのプロセスは独立に解析できる。

キーワード: ネットワーク;入力の和;出力の分離;フィードバックシステム

18.1. 序

健康診断の際、我々は、身長・体重測定、X 線検査、血圧、血液検査、等を受ける。つまり、多くの検査を直列的に受信する。このように、おおくの直列下プロセスからなるものをネットワークと呼ぶ。このようなネットワークをこの章では解析する。このネットワークを解析するために、我々は入力の和、出力の分離について解析をする必要がある。

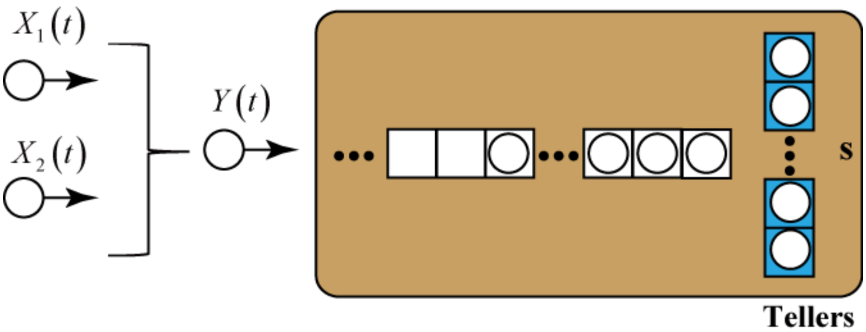

図 1　入力の流束の和

18.2. 入力の流束の和

ここでは、入力の和について考える。

我々は二つのポアソン分布に従う流束 $X_1(t)$ および $X_2(t)$ を考える。それぞれの平均入力頻度は λ_1 および λ_2,であるとする。図 1 に関連する模式図を示す。

時間 t の間に、x_1 の顧客が系を訪問したとする。それを $S_1(t)=x_1$ と表す。関連する確率は以下で与えられる。

$$P\left(S_1(t)=x_1\right)=\frac{(\lambda_1 t)^{x_1}}{x_1}e^{-\lambda_1 t} \tag{1}$$

同様に、時間t の間に、x_2の顧客が系を訪問したとする。それを$S_2(t)=x_2$と表す。関連する確率は以下で与えられる。

$$P\left(S_2(t)=x_2\right)=\frac{(\lambda_2 t)^{x_2}}{x_2}e^{-\lambda_2 t} \tag{2}$$

次に、二つの流束の和を考える。それは以下で与えられる。

$$Y(t)=X_1(t)+X_2(t) \tag{3}$$

時間tの間に系を訪問する顧客の数がy であるとする、つまり $S(t)=y$.とする。すると関連する確率は以下となる。

$$\begin{aligned}P\left(S(t)=y\right)&=\sum_{x=0}^{y}P\left(S_1(t)=x\right)P\left(S_2(t)=y-x\right)\\&=\sum_{x=0}^{y}\frac{(\lambda_1 t)^{x}}{x!}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_2 t)^{y-x}}{(y-x)!}e^{-\lambda_2 t}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}\sum_{x=0}^{y}\frac{y!}{x!(y-x)!}(\lambda_1 t)^{x}(\lambda_2 t)^{y-x}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^{y}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{y!}\left[(\lambda_1+\lambda_2)t\right]^{y}\end{aligned} \tag{4}$$

したがって、二つの流束の和は、単純に二つの流束の平均値を足したものとして捉えることができる。

この結果は容易にm 個の流束に拡張できる。入力の流束が以下で与えられるとする。

$$Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_m(t) \tag{5}$$

ここで、各入力は以下のポアソン分布に従う。

$$P\left(S_i(t)=x_i\right)=\frac{(\lambda_i t)^{x_i}}{x_i}e^{-\lambda_i t} \tag{6}$$

時間tの間に系を訪問する顧客の数がy であるとする、つまり $S(t)=y$とする。すると関連する確率は以下となる。

$$P\left(S(t)=y\right)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t}}{y!}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t\right]^{y} \tag{7}$$

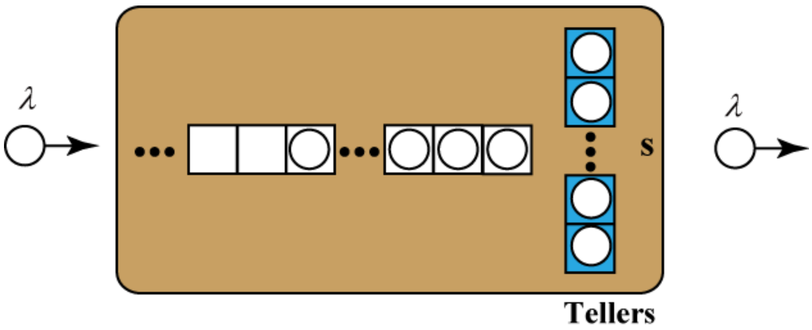

図 2　入力と出力の流束のバランス

18.3. 入力と出力の流束の関係

入力と出力の関係を議論する。対応する模式図を図 2 に示す。

ここでは$M/M/s(\infty)$の系を考える。入力頻度は λ とする。これに対する状態確率は.以下となる。

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \le s) \\ \eta^{n-s} P_s & (n \ge s) \end{cases} \tag{8}$$

ここで、 P_s, P_0 は以下である。

$$P_s = \frac{\rho^s}{s!} P_0 \tag{9}$$

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\eta}{1-\eta} \frac{\rho^s}{s!}} \tag{10}$$

$$\eta = \frac{\lambda}{s\mu} \tag{11}$$

一つのサービスが Δt の間に終わる確率は以下である。

$$P = \sum_{k=1}^{s} P_k k \mu \Delta t + \sum_{k=s+1}^{\infty} P_k s \mu \Delta t \tag{12}$$

Eq. (8)を Eq. (12)に代入して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{s} P_k k\mu\Delta t + \sum_{k=s+1}^{\infty} P_k s\mu\Delta t \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{\rho^k}{k!} P_0 k\mu\Delta t + \sum_{k=s+1}^{\infty} \eta^{k-s} P_s s\mu\Delta t \\
&= \mu P_0\Delta t\left[\sum_{k=1}^{s} \frac{\rho^k}{k!} k + \sum_{k=s+1}^{\infty} \eta^{k-s} P_s s\right] \\
&= \mu P_0\Delta t\left[\sum_{k=1}^{s} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\eta}{1-\eta} P_s \rho \frac{s}{\rho}\right] \\
&= \mu\rho P_0\Delta t\left[\sum_{k=1}^{s} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \eta^{k-s-1} P_s\right] \\
&= \lambda P_0\Delta t\left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!} + P_s + \left(\eta+\eta^2+\cdots\right) P_s\right] \\
&= \lambda P_0\Delta t\left[\sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\eta}{1-\eta} P_s\right] \\
&= \lambda P_0\Delta t \frac{1}{P_0} \\
&= \lambda\Delta t
\end{aligned}
\tag{13}
$$

したがって、入力の流束は出力の流束と同じになる。

ここで注目すべきは、サービス率μが出力のパラメータとして入ってこないことである。この解析は以下の仮定をしている。

$$s\mu > \lambda \tag{14}$$

つまり、以下である。

$$\eta < 1 \tag{15}$$

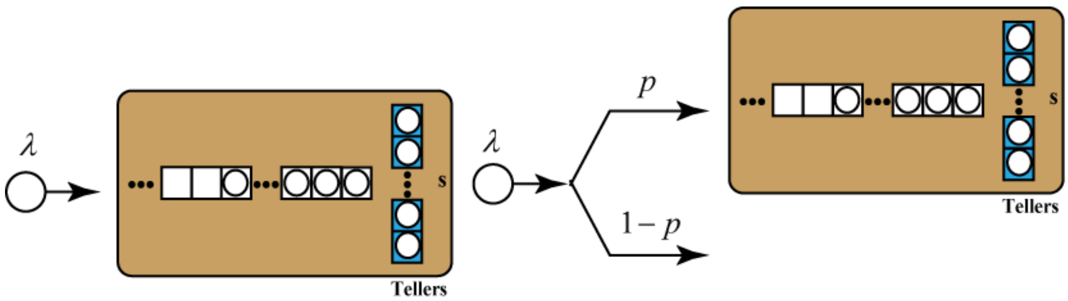

図 3　出力の流束の分離

18.4. 出力の流束の分離

図 3 に模式図的に示されている出力の分離を考える。

我々は、出力の流束は入力の流束と一致することを前の節でみてきた。今度は、出力が比率 p と $1-p$ に分離される場合を考える。ここでは、 p に分離される側を考える。

我々は、もともとの出力の流束の平均は λ であることを知っている。したがって、時間 t の間に n 人のサービスが終了する確率は以下である。

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \tag{16}$$

我々は、この出力が確率 p で分離されることを考える。我々が、n 人の総出力の中から、m 人を得る確率は以下となる。

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,{}_nC_m p^p (1-p)^{n-m} \tag{17}$$

n は m 以上である。したがって、我々が、出力として n 得る確率は以下である

$$\begin{aligned}
P(S_1(t)=m) &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,{}_nC_m p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\frac{n!}{m!(n-m)!}{}_n p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{p^m e^{-\lambda t}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{(n-m)!}(1-p)^{n-m} \\
&= \frac{(\lambda t)^m p^m e^{-\lambda t}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[(\lambda t)(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= \frac{(p\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}e^{-(\lambda t)(1-p)} \\
&= \frac{(p\lambda t)^m}{m!}e^{-p\lambda t}
\end{aligned} \tag{18}$$

これは、平均流束 $p\lambda$ のポアソン分布に従うことを表している。

この結果を多くの分離した流束の場合に拡張できる。一般形としては、l 個のシステムへの分離を考えることができ、各システムへ流れる確率は p_i とする。すると、各システムの出力は以下に従うと考えることができる。

$$P(S_i(t)=m) = \frac{(p_i\lambda t)^m}{m!}e^{-p_i\lambda t} \tag{19}$$

ここで、確率の和は以下となる。

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_l = 1 \tag{20}$$

この描像を図 4 に示す。

以上のように、出力の分離はそれに対する確率を単にかけたものが平均となるとして扱うことができる。

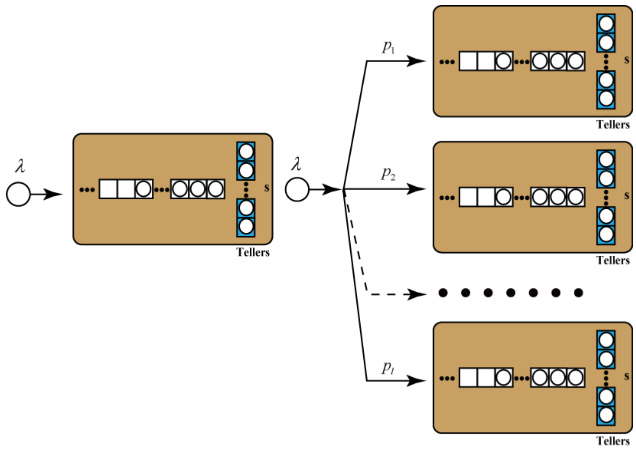

図 4　多くに分離された出力

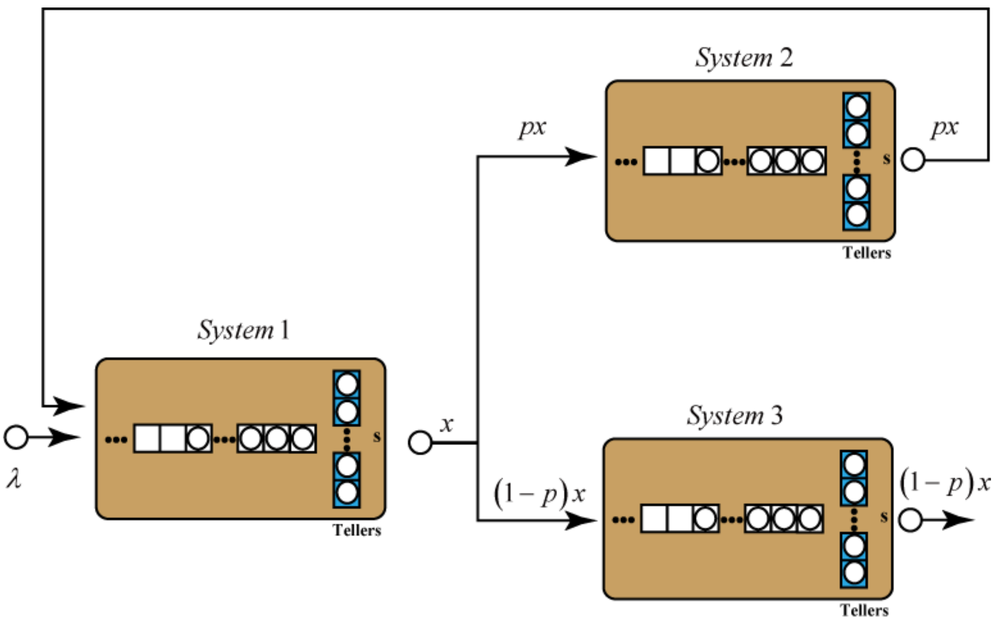

図 5　フィードバックシステム。系 1 の出力は系 2,3 に分かれ、系 2 の出力が系の入力になる

18.5. フィードバックシステム

これまで、我々は各システムを独立に扱ってきた。しかし、時には、出力が入力につながる、すなわちフィードバックがある場合もある。そのような場合をここでは扱う。

図 5 に示すようなフィードバックシステムを扱う。系 1 の出力は二つに分かれる。確率 p で分かれた流束は系を経てから、系 1 の入力になる。このような場合、全体で入力のフローがどうなるのかを求めていく必要がある。

系 1 の出力が x であるとする。すると、以下の関係になる。

$$\lambda + px = x \tag{21}$$

これを x について解くと以下を得る。

$$x = \frac{\lambda}{1-p} \tag{22}$$

したがって、系 1 への入力 f_{in_1} は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f_{in\_1} &= \lambda + px \\ &= \lambda + \frac{p\lambda}{1-p} \\ &= \frac{\lambda}{1-p} \end{aligned} \tag{23}$$

系 2 への入力 f_{in_2} は以下になる。

$$\begin{aligned} f_{in\_2} &= px \\ &= \frac{p}{1-p}\lambda \end{aligned} \tag{24}$$

系 3 への入力 f_{in_3} は以下になる。

$$\begin{aligned} f_{in\_3} &= (1-p)x \\ &= \lambda \end{aligned} \tag{25}$$

以上のように、流束のバランスからいかなる系の流束も評価できる。

18.6. まとめ

この章のまとめを行う。

入力の和と出力の分離はそれぞれの確率を掛けたものとして扱うことができる。

また、入力と出力のバランスは常にとれていて、入力に等しい。

フィードバックがあるような場合も、入力と出力のバランスの関係から各流束を求めることができる。