20. 待ち行列理論と関連する問題

概要: ここでは、待ち行列理論そのものでは扱わないが、それと関連する問題を扱う。エレベーターの待ち時間、電車の遅れ、信号の点灯時間、高速道路の渋滞をここでは扱う。

キーワード:エレベーターの待ち時間; 信号の点灯時間; 高速道路の渋滞

20.1. 序

これまでは、待ち行列理論を扱ってきた。ここでは、その理論的枠組みからはずれる問題を扱う。それは、エレベーターの待ち時間、電車の遅れ、信号の点灯時間、高速道路の渋滞である。

20.2. エレベーターの待ち時間

エレベーターを待っている場合、それが何階にいるのか表示されない場合に遭遇する。その階を表示しないのは以下の理由である

エレベーターの運行スピードはその出入りにかかる時間に比べれば、非常に速く、その時間は無視できるくらいである。もし、我々がエレベーターをコントロールせずに客がいる階に停止させるとすると、エレベーターは同じ階で停止する傾向になる。これは、エレベーターの台数を増やしても、その台数に比例して有効性が増していることにはならない。

エレベーターを分離して運用することが有効である。そのためには客がいてもその階を素通りさせることが必要となる。もし、客がエレベーターのいる階をモニターすることができるならば、自分のいる階を素通りしていることを見ることになる。その状況は客はその状況をあまり心地よく思わないであろう。したがって、その場合は、各エレベーターのいる階を表示せず、どのエレベーターがそのお客に対応するものであるのかを表示する。

エレベーターの中にいるお客に対しては、いまこのエレベーターが何階にしるのかを示しても問題ないし、中にいるお客の指示した階に止まらないこともない。

以上の理由で、待っている人に今いる階の表示をせずに、どのエレベーターがこの階に止まるかの表示のみをするのかを示している。ここでは、以上のことを定量的に扱う。

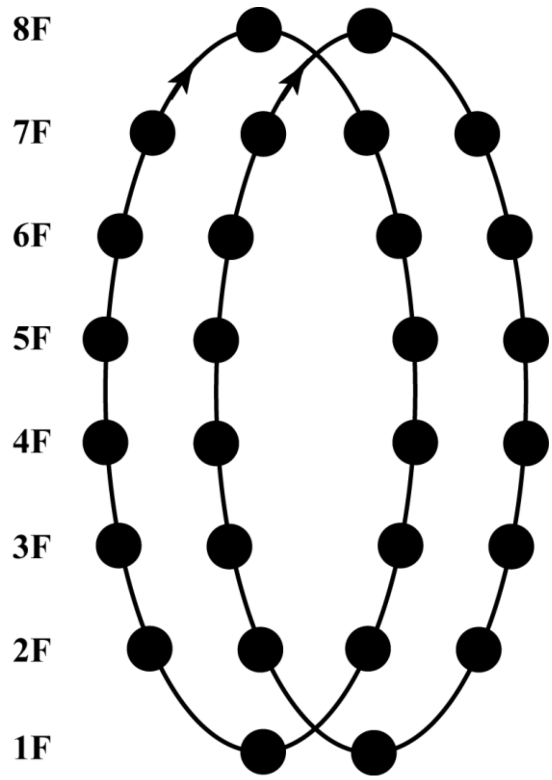


図 1　エレベーターの模式図。この図は二つのエレベーターが 8 階のビルに設置された二つのエレベーターの運行を示している

20.2.1. エレベーターの平均待ち時間と運行時間

エレベーターの動きはサークルで表現することができる。実際のエレベーターはサークル上を動かないが、その動きは同等に表現される。図 1 は 8 階のビルに設置された二つのエレベーターを表している。

エレベーターはすべてのパスを運行するのに要する時間を a と考える。この場合、顧客の待つ時間の平均は $a/2$ となる。

M 台のエレベーターがあるとする。もし、全てのエレベーターが同時に動くとすると、その待ち時間は同じく $a/2$ となる。もし、エレベーターをコントロールし、その動きを制御するとするとその平均待ち時間は $a/(2M)$ となる。

ここで、 K 階のビルを仮定する。その場合、一つのエレベーターが 1 階を通過する時間 b は以下で与えられる。

$$b = \frac{a}{2(K-1)} \tag{1}$$

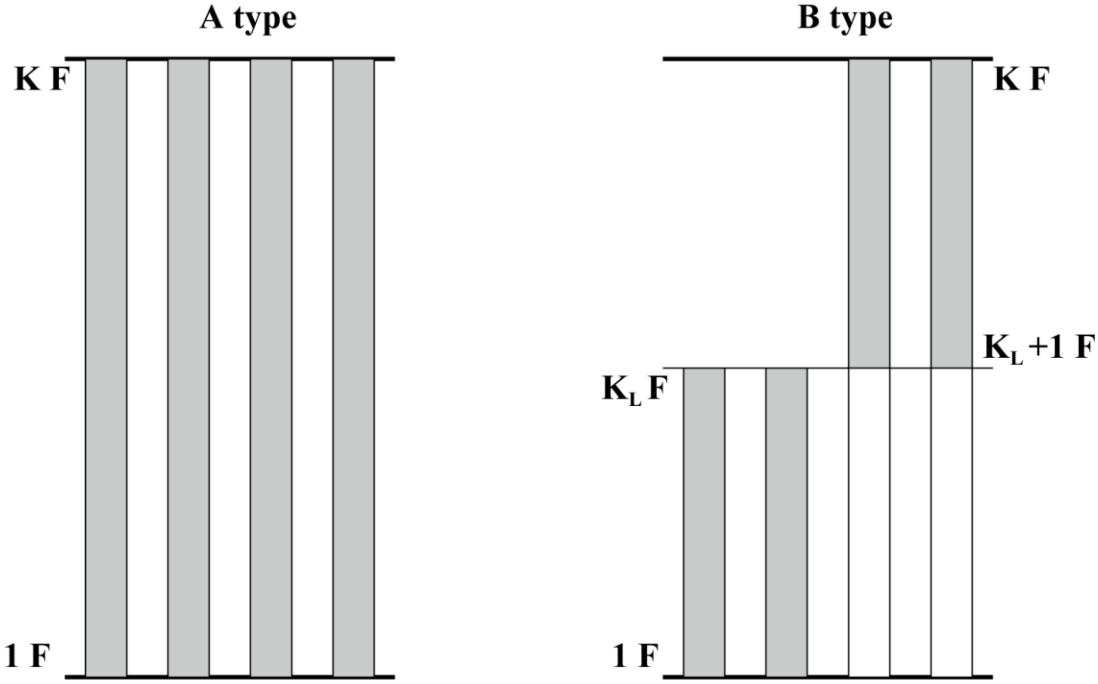


図 2　高層ビルの二つのタイプのエレベーター

20.2.2. 高層ビルにおけるエレベーター

高層ビルに設置された M 台のエレベーターを考える。その模式図を図 2 に示す。この中で、我々は二つのタイプを考えている。

タイプ A は全てのエレベーターは全ての階で止まるというものである。

タイプ B では M_L 個のエレベーターは低階層までした行かないものとする。残りのエレベーターは低階には止まらず、高階ではどこでも止まるというものである。そのエレベーターの台数を M_H とする。

トータルのエレベーターの台数は M とする。すなわち、以下が成り立つ。

$$M = M_L + M_H \tag{2}$$

低層階用のエレベーターは K_L 階まで運行し、高層階用のエレベーターは 2 階から K_L までは止まらす、$K_L + 1$ 階から最高階まで止まるとする。

タイプ A を考えよう。

この場合の平均待ち時間は $a/(2M)$ である。また、1 階を運行する時間は以下で与えられる。

$$b = \frac{a}{2(K-1)} \tag{3}$$

タイプ B と考える。

最初に低層階のエレベーターを考える。

全ての階へ行く平均時間 a_L は以下で与えられる。

$$a_L = 2(K_L - 1)b \tag{4}$$

この場合の、M_L 台の平均の待ち時間は

$$\frac{a_L}{2M_L} = (K_L - 1)b \tag{5}$$

である。

高層階用のエレベーターを考える。

1 階から $K_L + 1$ へ行くのにかかる時間を c とする。すべての階へ行く平均時間を a_H とするとそれは以下となる。

$$a_H = 2c + 2\left[(K - K_L) - 1\right]b \tag{6}$$

この場合の、M_H 台の平均時間は

$$\frac{1}{2}\left[2c + \frac{2}{M_H}\left[(K - K_L) - 1\right]b\right] = c + \frac{\left[(K - K_L) - 1\right]b}{M_H} \tag{7}$$

となる。

20.2.3. 早朝出勤の場合のエレベーターの待ち時間

早朝の出勤を考える。

ここでは、各階のメンバー数は一定とする。

すべてのメンバーは 1 階から自分の事務所のある j 階に行く。

自分のオフィスが K_L 階以下のメンバーは低層階用のエレベーターを利用する。

メンバーが j 階まで行く確率 $P(1, j)$ は以下である。

$$P(1, j) = \frac{1}{K - 1} \tag{8}$$

したがって、タイプ A での平均待ち時間 T_A は以下となる。

$$T_A = \sum_{j=2}^{K}\left[\frac{a}{2M} + (j - 1)b\right]\frac{1}{K - 1} \tag{9}$$

タイプ B の場合の平均待ち時間 T_B は以下となる。

$$T_B = \sum_{j=2}^{K_L} \left[\frac{a_L}{2M_L} + (j-1)b \right] \frac{1}{K-1} + \sum_{j=K_L+1}^{K} \left[\frac{a_L}{2M_L} + c + \left[j - (K_L+1) \right] b \right] \frac{1}{K-1} \tag{10}$$

低層階用のエレベーターはタイプ A のものより平均サイクル時間が短い。.

高層階用のエレベーターもタイプ A のものより、2 階から K_L 階まで素通りするからサイクル時間は短い。

以上を考慮するとタイプ B はタイプ A よりも短い待ち時間になるはずである。

具体的な数値を入れてみよう。

$$\begin{cases} K = 50 \\ K_L = 25 \\ M = 6 \\ M_L = 3 \\ b = 2 \text{ sec} \\ c = 10 \text{ sec} \end{cases} \tag{11}$$

この平均値は以下となる。

$$\begin{cases} a = 196 \text{ sec} \\ a_L = 96 \text{ sec} \\ a_H = 116 \text{ sec} \end{cases} \tag{12}$$

平均の待ち時間は以下である。

$$\begin{cases} T_A = 66.3\ sec \\ T_B = 42.2\ sec \end{cases} \tag{13}$$

したがって、タイプ B の待ち時間は タイプ A のものより短い。これが、我々はタイプ B を現実の世界でよくみかける理由となっている。 しかも、タイプ B では高層階は広くできる。

高層階用、低層階用のエレベーターの台数は各階のメンバー数を考慮して決める。

20.3. 電車の遅れ

ある電車が偶発的に混んだとする。するとその出入りに時間がかかるようになる。それが、ますます電車を混ませる原因になる。したがって、電車が何かのはずみで混んだとすると、その込み具合は増長される方向にいく。その解析をここでは、定量的に議論する

20.3.1. 問題の仮定

問題を簡単化するためにいくつかの仮定をする。

ターゲットとする電車を T_1 とする。このターゲットとする電車の前を走る電車を T_0 とする。この電車は時間通り走っているものとする。

駅と駅の間の距離はすべて同じであるとし、遅れのない場合にそれにかかる時間を s_0 とする。

電車 T_1 中のお客の数 A_1 は m_1 であるとする。電車 T_1 が駅 A_1 から駅 A_2 までかかる時間を s_0 とする。 つまり、初期条件としては、遅れがないとする。しかし、顧客の数はゆれがあるとする。したがって、次の駅では遅れが生じる可能性がある。

電車 T_1 が 駅 A_2 に着いたとき rm_1 の顧客が電車から降りるとする。顧客の発生率は λ で一定とする。したがって、駅 A_2 における待ち顧客の人数は is λs_0.である。駅 A_2 における入出力する顧客の総数は $rm_1 + \lambda s_0$ である。われわれは、一人の顧客が出入りする時間を β とする。したがって、駅 A_2 における顧客の乗り入れする時間は $\beta\left(rm_1 + \lambda s_0\right)$.で与えられる。我々は、乗り入れに設定する時間を c とする。したがって、電車 T_1 が駅 A_2 についてからスタートする時間は以下で与えられる。

$$Max\left[\beta\left(rm_1 + \lambda s_0\right), c\right] \tag{14}$$

したがって、電車 T_1 が駅 A_2 を出るとき、乗っている顧客の人数は以下で与えられる。

$$m_2 = \left(1 - r\right)m_1 + \lambda s_0 \tag{15}$$

電者 T_1 が駅 A_3 に着いた時刻は以下で与えられる。

$$s_2 = s_0 + Max\left[\beta\left(rm_1 + \lambda s_0\right), c\right] - c \tag{16}$$

次の駅でのパラメータは先の議論と同様に以下で与えられる。

$$m_3 = \left(1 - r\right)m_2 + \lambda s_2 \tag{17}$$

$$s_3 = s_2 + Max\left[\beta\left(rm_2 + \lambda s_2\right), c\right] - c \tag{18}$$

これらのプロセスを繰り返し、大きな n に対してのパラメータ m_n, s_n を得る。

20.3.2. 定常状態がある条件

ここで、定常状態がある条件を求めよう。

もし、顧客の出入り時間が c より小さい場合、時間間隔は変わらない。つまり、以下の場合である

$$\beta\left(rm_1 + \lambda s_0\right) < c \tag{19}$$

この場合は、以下となる。

$$s = s_0 \tag{20}$$

この条件を満足する場合を考える。

次に、顧客の数を考える。定常状態では、顧客の数は変わらないから、それを m^* とおく。すると以下になる。

$$m^* = \left(1-r\right)m^* + \lambda s_0 \tag{21}$$

これを m^* について解くと

$$m^* = \frac{\lambda s_0}{r} \tag{22}$$

となる。これから、以下出入りする顧客数の時間として以下を得る。

$$\begin{aligned} \beta\left(rm^* + \lambda s_0\right) &= \beta\left(r\frac{\lambda s_0}{r} + \lambda s_0\right) \\ &= 2\beta\lambda s_0 \\ &\le c \end{aligned} \tag{23}$$

これが c 以下にならなければならないから、以下である必要がある。

$$s_0 \le \frac{c}{2\beta\lambda} \tag{24}$$

20.3.3. $s_0 \le \frac{c}{2\beta\lambda}$ の場合

以下が成り立つ、つまり定常状態がある場合を考える。

$$s_0 \le \frac{c}{2\beta\lambda} \tag{25}$$

具体的な数をして、以下を考えよう。

$$\begin{cases} r = 0.2 \\ \lambda = 3 \\ \beta = 0.005 \\ c = 0.3 \end{cases} \tag{26}$$

T 界の s_0 は以下である。

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{c}{2\beta\lambda} \\ &= \frac{0.3}{2\times 0.005\times 3} \\ &= 10 \end{aligned} \tag{27}$$

ここで $s_0 = 10$ と仮定する。すると関連する m は以下で与えられる。

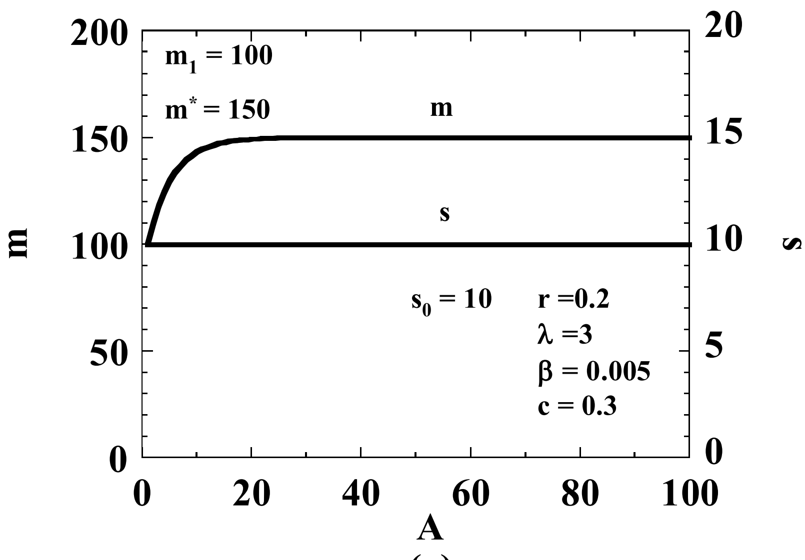
$$
\begin{aligned}
m^* &= \frac{\lambda s_0}{r} \\
&= \frac{3\times 10}{0.2} \qquad (28) \\
&= 150
\end{aligned}
$$

m_1 が m^* より小さい場合を考える。
m は m^* に近づき、m^* で飽和すると仮定する。
s は常に一定とする。

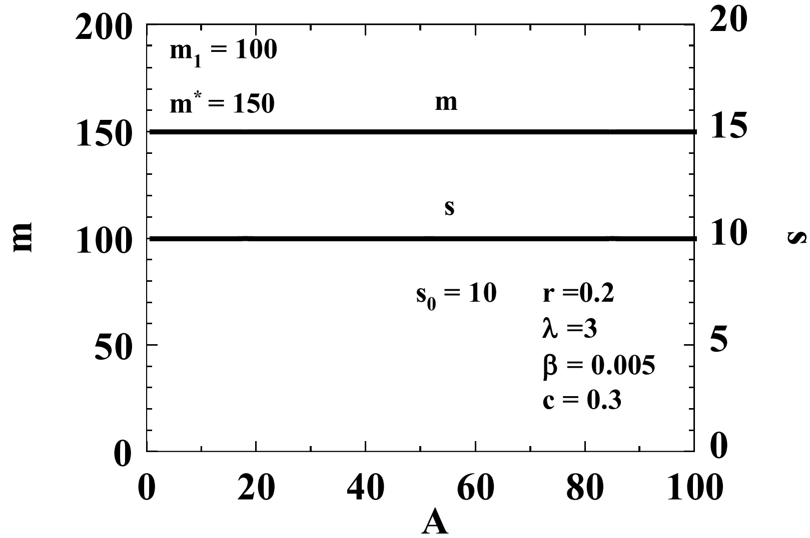
m_1 は m^* に等しいとする。
この場合，m と s は一定となる。

m_1 が m^* より大きい場合を考える。
s は単調に増加する。
m は最初現象し、その後単調に増えていく。

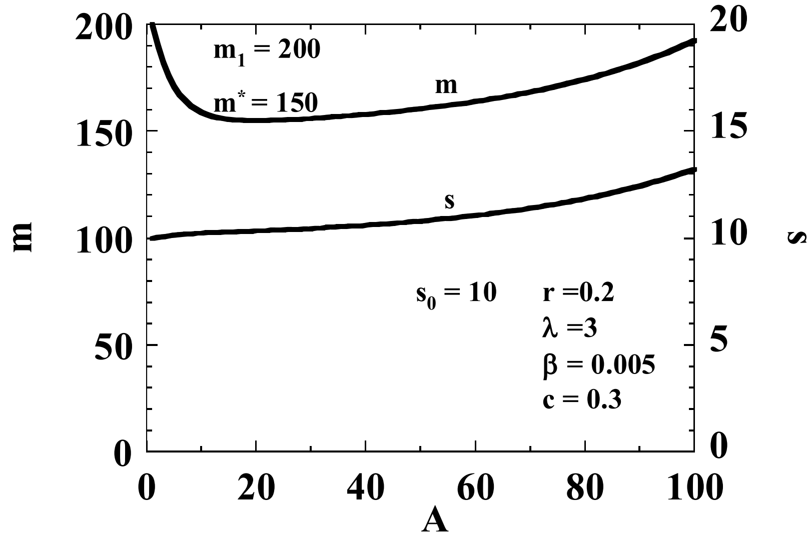
上のことをまとめると、定常状態は m_1 が m^*.より小さい場合に存在する。しかしながら、m_1 が m^* より大きい場合は長い時間では増加する。



(a)



(b)



(c)

図 3　臨界時間より小さい場合。(a) 顧客の人数が臨界数より小さい場合。(b) 同じ場合。(c) 大きい場合

20.3.4. $s_0 > \frac{c}{2\beta\lambda}$ の場合

具体的には以下のパラメータを設定する。

$$\begin{cases} r = 0.2 \\ \lambda = 3 \\ \beta = 0.005 \\ c = 0.3 \end{cases} \tag{29}$$

臨界時間 s_0 は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{c}{2\beta\lambda} &= \frac{0.3}{2 \times 0.005 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned} \tag{30}$$

$s_0 = 15$ とする。　この場合、図 4 に示すとおり定常状態はなく s と m は単調に増加する。

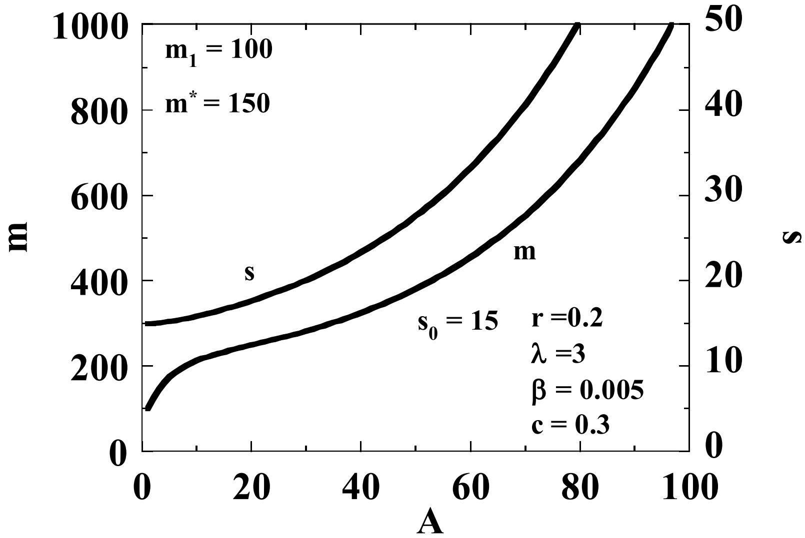


図 4　長い時間におけるパラメータ値

臨界時間として s_0 は以下で与えられる。

$$s_0 = \frac{c}{2\beta\lambda}$$

この臨界電車乗車顧客人数も以下で与えられる。

$$m^* = \frac{\lambda s_0}{r}$$

これらの臨界値よりも小さい場合は我々は定常値 s_0 と m^* を得る。

もし、どちらかが臨界値よりも大きな場合、どちらも増加してしまう。

20.4. 信号機の点灯時間の設計

ここでは、信号機の点灯時間の設計を扱く。その決定は多くの交差点を同時に扱わなければならないので複雑である。したがって、重要な道に沿った重要な交差点に限り解析を進める。

我々は違う方向の自動車も扱う。

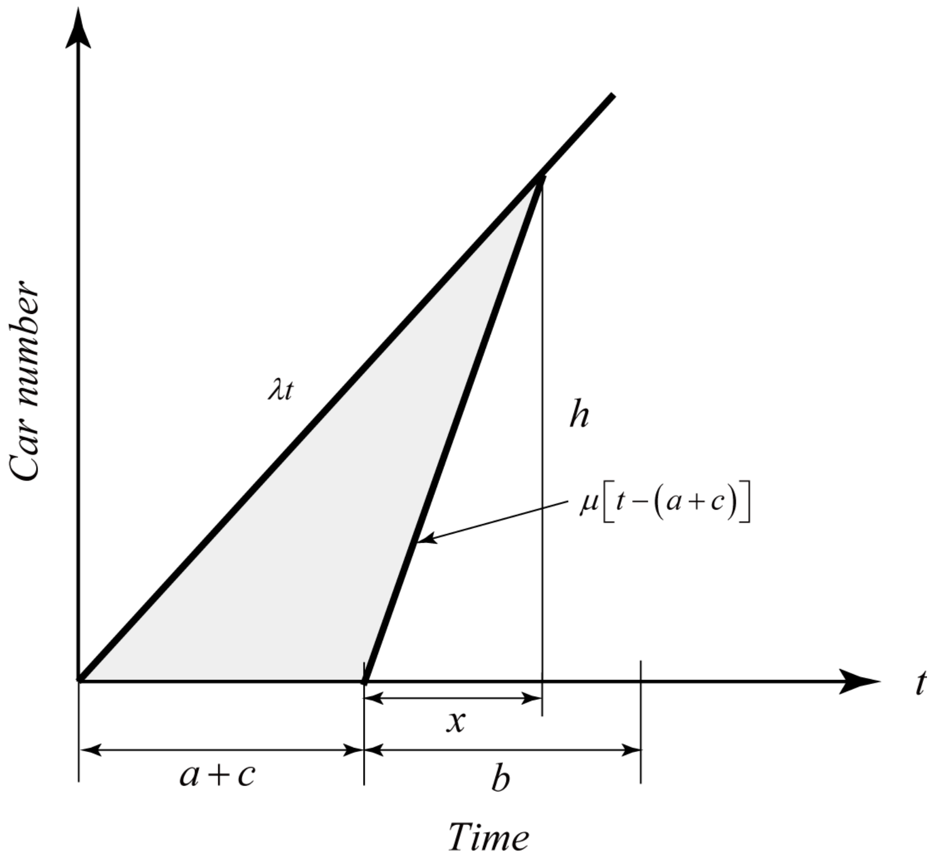


図 5　車の流入と流出

20.4.1. 一つの方向の信号機点灯時間

まず最初に一つの交差点は考えずに一つの方向のみを考える。

図 5 に流入と流出の関係を示す。

信号機待ちの車の数のレートをλとし、サービス時間比率を μ. をとする。サービス時間は止まっている車がその信号機を横切る時間である

点灯時間を赤、青、黄色の時間をそれぞれa，b，cとする。したがって、サイクル時間

は以下となる。

$$d = a + b + c \tag{31}$$

このサイクルの間、交差点に到達した車のすべてが青信号が点灯している間に通りを横切るとする。これを式であらわすと

$$\lambda d = \lambda\left(a + b + c\right) \le \mu b \tag{32}$$

となる。

この中でパラメータκを導入し、これから以下を定義する。

$$\lambda d = \lambda\left(a + b + c\right) = \kappa\mu b \tag{33}$$

ここで、 κは 1 より小さい数である。これより、以下を得る。

$$b = \frac{a + c}{\kappa\mu - \lambda} \tag{34}$$

黄色の点灯時間を一般的に決める。したがって赤の点灯時間aを決めて、その後に青の点灯時間bを決める。Eq. 40 で与えられる制約条件がある。したがって、任意の a を設定し、bを得る。

図 5 に基づいて、平均の待ち時間を考える。

我々は、止まっている車は青信号が点灯している間、すべて交差点を通り過ぎると仮定する。

赤が黄色が点灯している間に交差点に到着した自動車は待つことになる。信号が青になるとその止まっているすべての車は交差点を通りすぎる。

その車がすべて通りすぎる時間をxとする。また、通りすぎる自動車の数をhとする。この方程式は以下となる。

$$h = \mu x = \lambda\left(a + b + x\right) \tag{35}$$

これから以下を得る。

$$x = \frac{\lambda\left(a + b\right)}{\mu - \lambda} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} h &= \mu x \\ &= \mu \frac{\lambda\left(a + b\right)}{\mu - \lambda} \end{aligned} \tag{37}$$

したがって、トータルの待ち時間 Sは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(a+b)h}{2} \\ &= \frac{(a+b)}{2}\mu\frac{\lambda(a+b)}{(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{\mu\lambda(a+b)^2}{2(\mu-\lambda)} \end{aligned} \tag{38}$$

サイクル $d=a+b+c$ の間にくる自動車の数は $\lambda(a+b+c)$.でる。したがって、1 台あたりの平均の待ち時間は以下である。

$$\begin{aligned} W &= \frac{S}{\lambda(a+b+c)} \\ &= \frac{\mu(a+b)^2}{2d(\mu-\lambda)} \end{aligned} \tag{39}$$

20.4.2. 交差点での解析

次に、我々は双方向を考えた交差点を扱う。

我々は双方を扱うからそれぞれを 1 と 2 する。二つの方向のトータルのサイクルタイム d は一致していなくてはならないから以下となる。

$$a_1 + b_1 + c_1 = d \tag{40}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = d \tag{41}$$

方向 1 の赤が点灯している間は方向 2 の青と黄色が点灯しておい、方向 2 の赤が点灯している間は方向 1 の青と黄色が点灯していなければならない。すなわち、以下が成り立つ。

$$a_1 = b_2 + c_2 \tag{42}$$

$$a_2 = b_1 + c_1 \tag{43}$$

これは、二つの制約のように見えるが、片方はもう一方から以下のように導かれる。

赤信号が点灯している時間の和 $a_1 + a_2$ は、サイクル時間となる。つまり

$$a_1 + a_2 = d \tag{44}$$

である。これは、

$$\begin{aligned} a_2 &= d - a_1 \\ &= b_1 + c_1 \end{aligned} \tag{45}$$

つまり、a_1 が決まれば、a_1 は自動的に決まる。

すべての自動車は青色の信号が点灯している間に交差点を通りすぎなくてはならない。すなわち

$$\lambda_1 d = \kappa \mu_1 b_1 \tag{46}$$

$$\lambda_2 d = \kappa \mu_2 b_2 \tag{47}$$

となる。我々はサイクル時間から以下を得る。

$$\begin{aligned} d &= a_1 + a_2 \\ &= b_2 + c_2 + b_1 + c_1 \\ &= (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) \\ &= \frac{1}{\kappa}(\rho_1 + \rho_2) d + (c_1 + c_2) \end{aligned} \tag{48}$$

ここで

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \tag{49}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \tag{50}$$

である。ここで、サイクル時間について解くと以下になる。

$$d = \frac{c_1 + c_2}{1 - \frac{1}{\kappa}(\rho_1 + \rho_2)} \tag{51}$$

したがって、われわれは交差点におけるパラメータ b と a を得ることになる。

交差点での平均待ち時間は以下になる。

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\mu_1 (a_1 + b_1)^2}{2d(\mu_1 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\mu_2 (a_2 + b_2)^2}{2d(\mu_2 - \lambda_2)} \tag{52}$$

次の交差点を考えよう。次の交差点を B とする。

サイクル時間を同じとする。そして、黄色の点灯時間を同じとする。

青色の点灯時間は以下で与えられる。

$$b_{1B} = \frac{1}{\kappa} \frac{\lambda_{1B}}{\mu_{1B}} d \tag{53}$$

$$b_{2B} = \frac{1}{\kappa} \frac{\lambda_{2B}}{\mu_{2B}} d \tag{54}$$

赤の点灯時間は以下で与えられる。

$$a_{1B} = d - (b_{1B} + c_1) \tag{55}$$

$$a_{2B} = a_{1B} + c_1 \tag{56}$$

我々は次の交差点までの距離が L とし、自動車の平均速度が v とする。時間の遅れを Δt とすると、それは以下で与えられる。

$$\Delta t = \frac{L}{v} \tag{57}$$

n 台の車が待っている場合、それらが交差点を通りすぎるまでにかかる時間を知ることは興味深い。同時に動くことも可能である。しかし、前の車が動くのを待つ。動くスピードは約 20 km/h である。待つ長さとして 8 m を仮定する。もし、n の自動車が前にいたとすると、我々が動き出す時間は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} t &= \frac{8n}{20 \times 10^3} [hr] \\ &= \frac{8n \times 60^2}{20 \times 10^3} [\mathrm{sec}] \\ &= 1.44n [\mathrm{sec}] \end{aligned} \tag{58}$$

20.5. 高速道路における渋滞

図 6 に示すように高速道路における渋滞を扱う。ここで扱う渋滞は交通事故によるものではない。

高速道路の渋滞はのぼりかサグで起こる。サグとは最初に下りをみて、その次にのぼりがある地点を指す。サグにおいては、ドライバーはスピードを上げて、その後に減速する。これは、連続的なブレーキを生じさせ、したがって渋滞に起こる。

ここでは、簡単化したものを扱う。交通としては、二つの領域を扱う。一つは自由走行であり、もう一つは渋滞状態である。それを図 7 に示す。

図 6　高速道路における渋滞

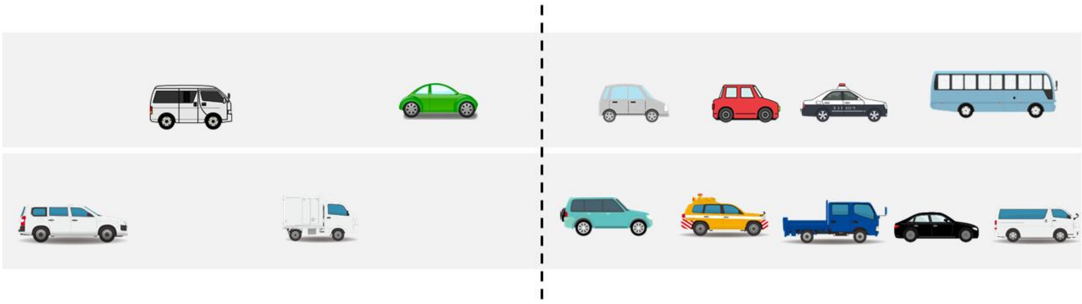


図 7　交通の模式図的な扱い

20.5.1. 高速道路における渋滞の基本的な特性

交通の渋滞には基本的に二つの状態がある。

一つは平均速度と自動車の密度の関係である。自動車の密度が増えると、ダライバーは自由な気持ちになれず、減速する。そして、ある密度に達すると速度が 0 になる。その描像を図 8 に示す。

もう一つの関係は自動車の密度と自動車の流束の関係である。自動車の流束は自動車の速度と密度の積である。流束はあるピークをもち、そこから下がり、ついには 0 になる。その描像を図 9 に示す。

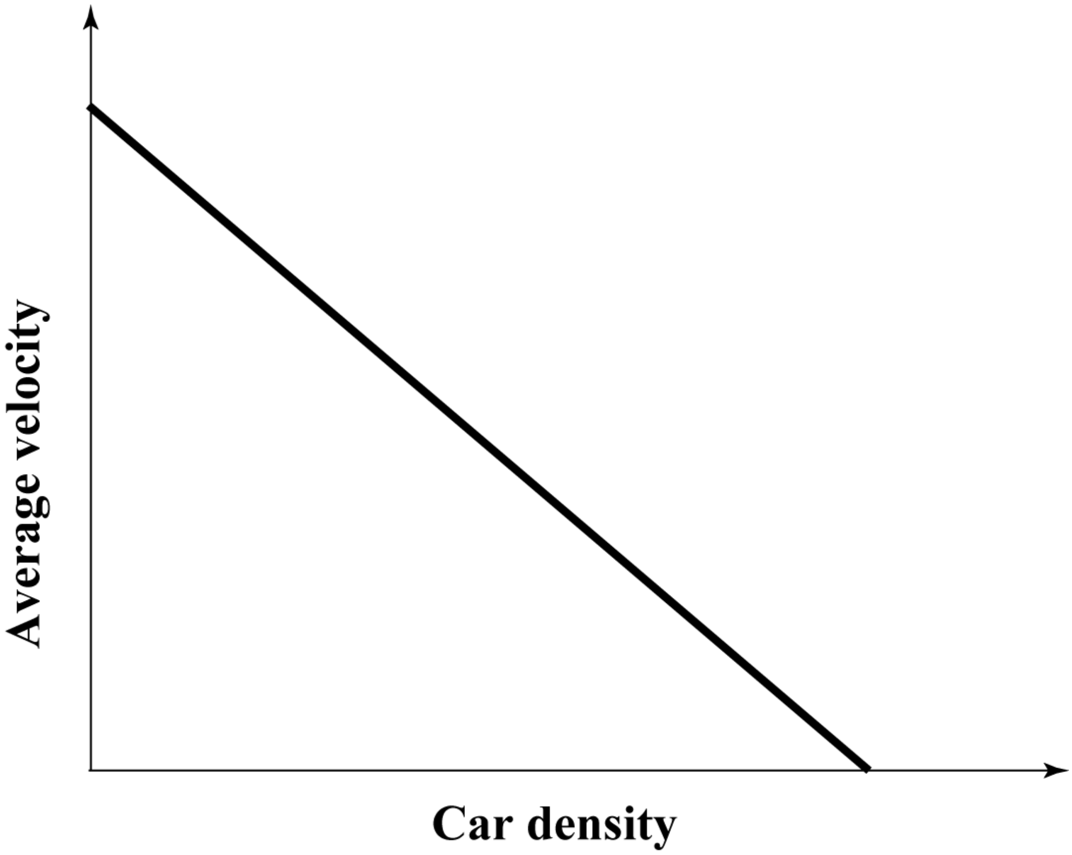


図 8　自動車の密度と平均速度の関係

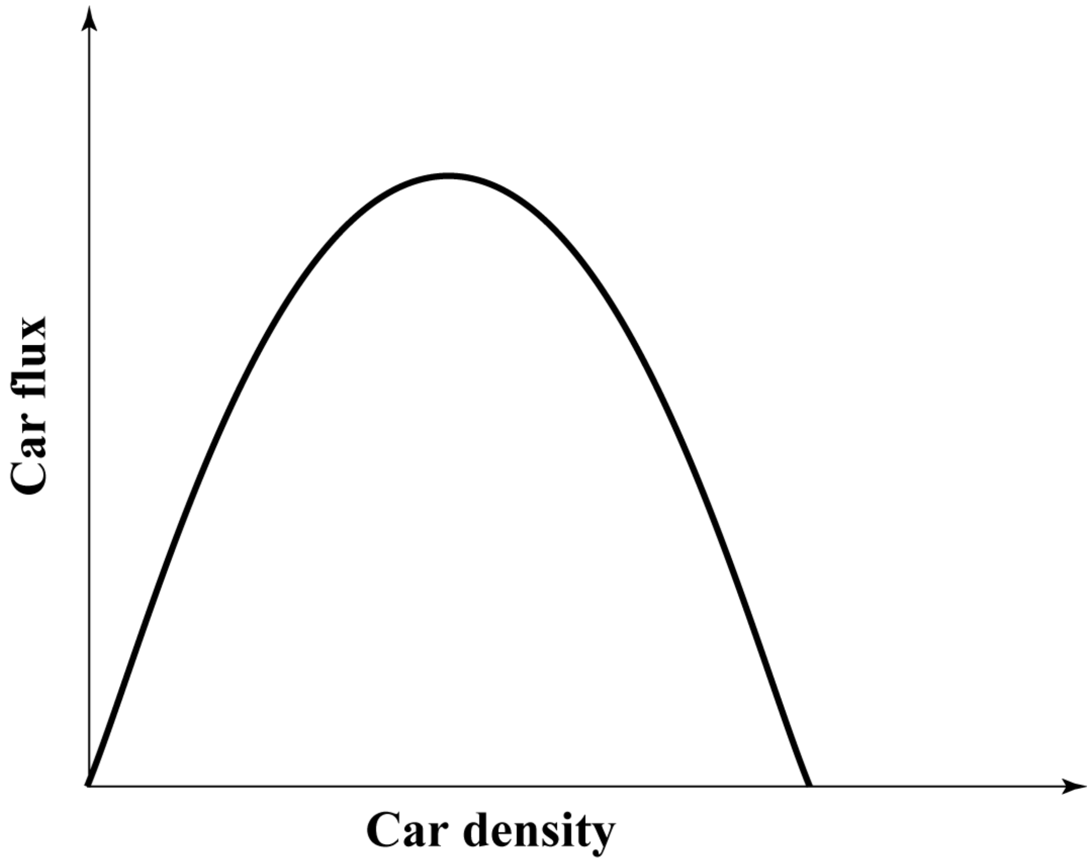


図 9　自動車の密度と流束の関係

20.5.2. 渋滞の簡単な解釈

ここでは、渋滞を簡単な式で表す。

自動車の平均速度 u と自動車の密度 ρ の関係を簡単に線形の関係で以下で表す。

$$u = u_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \tag{59}$$

ここで u_{max} は $\rho = 0$ における速度である。そして、 ρ_{max} は $u = 0$ になる自動車の密度である。

自動車の流束 Q は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} Q &= u\rho \\ &= u_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\rho \end{aligned} \tag{60}$$

流束が最大になる自動者密度は以下のようにして求まる。

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho} = u_{\max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) = 0 \tag{61}$$

これから、以下を得る。

$$\rho = \frac{\rho_{\max}}{2} \tag{62}$$

この ρ は道路のレーン数による。一つのレーンを仮定すると、このピーク値は約 25/km である。これは、自動車間が 40 m である。関連する平均速度は 60 km/hr である。したがって、実際的な値は以下となる。

$$\rho_{\max} = 2 \times 25 = 50\left[/km\right] \tag{63}$$

$$u_{\max} = \frac{60}{1 - \frac{1}{2}} = 120\left[\frac{km}{hr}\right] \tag{64}$$

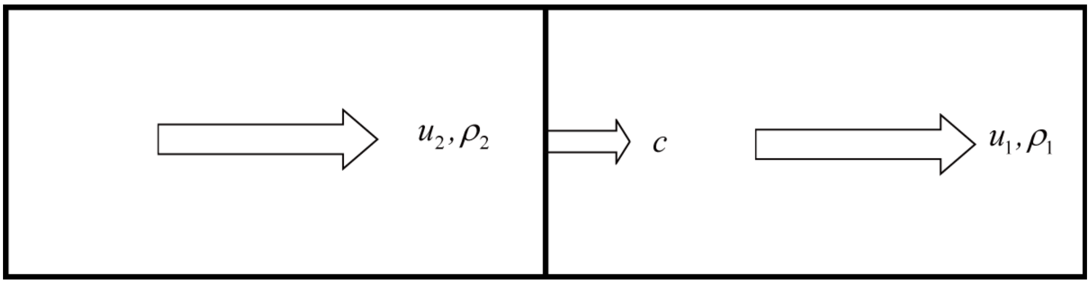


図 10　二つの交通の領域

交通渋滞を以下のように単純に扱う。

交通渋滞は図 10 の右側の状態である。平均自動車速度は u_1 で、自動車密度は ρ_1 とする。フリードライブ領域を同じ図の左側に記す。その中で、平均自動車速度は u_2 で、自動車密度は ρ_2 とする。領域の境界は右に動き、その速度は c とする。

我々は、その境界にいるとする。すなわち、自動車密度は右側では ρ_1 であり、左側では ρ_2.である。この条件を満足するためには、流速はバランスしていなくてはならない。

交通渋滞の領域は右側に動き、その速度は以下である。

$$u_1 - c \tag{65}$$

フリードライブの領域は右に動き、その速度は以下である。

$$u_2 - c \tag{66}$$

したがって、流速の連続性は以下となる。

$$\rho_1\left(u_1 - c\right) = \rho_2\left(u_2 - c\right) \tag{67}$$

これを c について解いて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 - \rho_2} \\
&= \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_1 - \rho_2}
\end{aligned}
\tag{68}
$$

この描像を図 11 に示す。

境界の速度は流速に依存する。

もし $Q_1 > Q_2$ であるならば、境界は右に動く。この場合、渋滞は解除する。

もし $Q_1 < Q_2$ であるならば、境界は左に動く。この場合、渋滞は増加する。

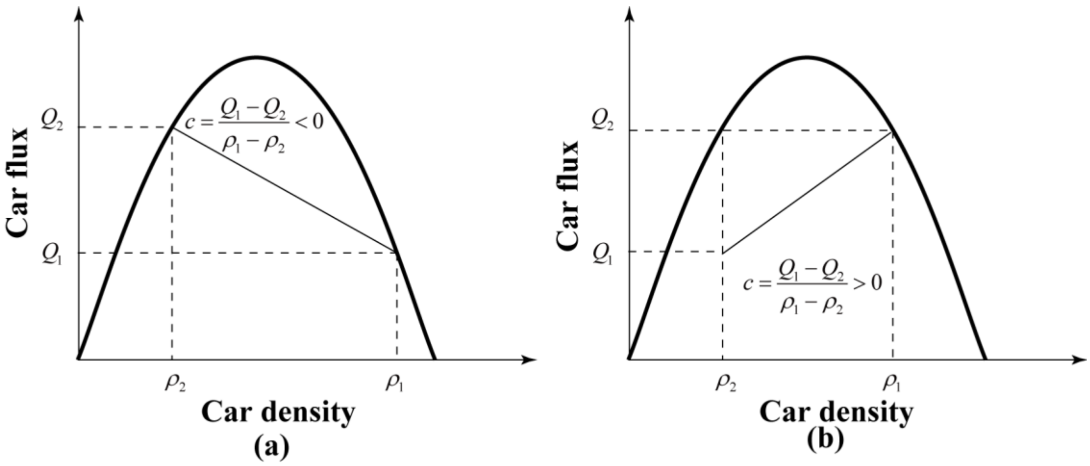


図 11　自動車の密度と流束の関係　(a) 境界が右に動く場合 (b) 境界が左に動く場合

20.5.3. 渋滞に対する連続方程式

渋滞をより動的にとらえる。

渋滞に対する連続方程式は以下で与えられる。

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{69}
$$

左辺第 2 項はドリフト成分である。そして、右辺は拡散項であり、D は拡散係数である。

この第項は以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[u_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\rho \right] \\
&= u_{\max}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2\rho}{\rho_{\max}} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\
&= u_{\max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

したがって、連続方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_{\max}\left(1-2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}=D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{71}$$

これに、境界条件と初期条件を付けくわえると、いろいろな解を得ることができる。

この解が以下であることが知られている。

$$\rho=C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}\tanh\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}+C_2 \tag{72}$$

これが、連続方程式の一つのかいであることをこれから証明していく。
Eq. 72 を t について、微分すると以下になる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}\tanh\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}+C_2\right]\\&=C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}\left[-C_1u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)\right]\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}\\&=-C_1^2\rho_{\max}D\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}\end{aligned} \tag{73}$$

Eq. 72 を x について、微分すると以下になる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}\tanh\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}+C_2\right]\\&=C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}C_1\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}\\&=C_1^2\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}}\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x-u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}\end{aligned} \tag{74}$$

これをさらに x について、微分すると以下を得る。

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = C_1{}^2 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}\right\}$$

$$= C_1{}^2 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} C_1 \frac{-2\cosh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}\sinh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}{\cosh^4\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}} \tag{75}$$

$$= -2C_1{}^3 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} \frac{\sinh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}{\cosh^3\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}$$

さいたがって、以下を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_{\max}\frac{\partial \rho}{\partial x} - 2\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\rho\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$= -C_1{}^2 \rho_{\max} D\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}$$

$$+ u_{\max} C_1{}^2 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} \frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}$$

$$-2\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\left\{C_1\frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}}\tanh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\} + C_2\right\}C_1{}^2\frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}}\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}} \tag{76}$$

$$= \left[\begin{array}{l} -C_1{}^2 \rho_{\max} D\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right) + C_1{}^2 \rho_{\max} D - 2C_1{}^2 C_2 D \\ -2C_1{}^3 \frac{\rho_{\max}}{u_{\max}} D \tanh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}\end{array}\right]\frac{1}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}$$

$$= D\frac{-2C_1{}^3 \frac{\rho_{\max}}{u_{\max}}\tanh\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}{\cosh^2\left\{C_1\left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t\right]\right\}}$$

$$= D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

したがって、方程式は解になる。

解をより詳細に検討する。

我々は $c_1>0$ を要請する。そして、以下を得る。

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\tanh\left(C_1x+b\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\tanh\left(C_1x+b\right)=-1\end{cases} \tag{77}$$

したがって、$x\to\pm\infty$ で以下となる。

$$\rho_1=C_2+C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}} \tag{78}$$

$$\rho_2=C_2-C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}} \tag{79}$$

ρ_1,ρ_2 は両者とも制であるから、以下が成り立つ。

$$C_2>C_1\frac{\rho_{\max}D}{u_{\max}} \tag{80}$$

さらに、以下が成り立つ。

$$\tanh\left(0\right)=0 \tag{81}$$

以下の位置を考えよう。

$$x=u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right)t \tag{82}$$

ここでは、車の渋滞密度は一定となり以下で与えられる。

$$\rho=C_2 \tag{83}$$

これは、渋滞のフリードライブ領域に相当し、境界に速度 v は以下で与えられる。

$$v=u_{\max}\left(1-\frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right) \tag{84}$$

パラメータ C_1，C_2,および D をどうやって定めるか考える。我々は u_1 と u_2，ρ_1 と ρ_2. を観測できる。これらのデータから ρ_{max} と u_{max} を評価できる。我々は、$\rho\left(x,t\right)$ を観測できる。

C_2 を以下のように定めることができる。

$$C_2=\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \tag{85}$$

$\left(x,t\right)$ の二つの点を選択し、

$$\frac{\rho(x_1,t_1)-\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}}{\rho(x_2,t_1)-\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}}=\frac{\tanh\left\{C_1\left[x_1-u_{\max}\left(1-\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_{\max}}\right)t_1\right]\right\}}{\tanh\left\{C_1\left[x_2-u_{\max}\left(1-\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_{\max}}\right)t_2\right]\right\}} \tag{86}$$

を評価する。C_1 をこの方程式が満足するように選ぶ。すると、D を以下のように決定できる。

$$D=\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\frac{\rho_1-C_2}{C_1} \tag{87}$$

20.5.4. 渋滞を緩和する方法

高速道路で渋滞を緩和する方法を考えよう。

遅延が起こる臨界の速度を時速 20km とした。この状態で渋滞が L だったとしよう。これは、これ以上の渋滞が起こらないとすれば

$$\begin{aligned}\frac{L}{20}[hr]&=\frac{L}{20}\times 60[\min]\\&=3L[\min]\end{aligned} \tag{88}$$

以内になくなる。もしも、L が 1km であったとすると、渋滞は 3 分以内になくなる。したがって、それ以上渋滞する車を加えないことが重要である。

臨界の車間距離は 40 m であった。したがって、40 m 以上の車間距離をとればいいことになる。

交通渋滞から抜け出すと、我々はアクセルを踏むことが重要である。渋滞に巻き込まれると、我々はアクセルを踏むことはできない。

20.5.5. 渋滞に関する連続方程式

渋滞に関する連続方程式とその解を示す。

連続方程式は以下のように示すことができる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_{\max}\left(1-2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}=D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} \tag{89}$$

この連続方程式を以下のように簡単化する。

【変数変換 1】

変数変換を以下のようにする。

$$\begin{cases} X = x - u_{\max} t \\ T = t \end{cases} \tag{90}$$

すると、以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T} \\ &= -u_{\max}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial T} \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned} \tag{92}$$

これらを連続方程式に代入すると以下を得る。S

$$\left(-u_{\max}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial T}\right)\rho + u_{\max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial X} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} \tag{93}$$

これを整理すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} - 2\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\rho\frac{\partial \rho}{\partial X} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} \tag{94}$$

となる。

【変数変換 2】

さらに以下の変数変換を行う。

$$\begin{cases} X = a\xi \\ T = b\eta \end{cases} \tag{95}$$

これから、以下を得る。

$$\begin{cases} \partial X = a\partial \xi \\ \partial T = b\partial \eta \end{cases} \tag{96}$$

これから、以下を得る。

$$\frac{\partial \rho}{b\partial \eta} - 2\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\rho\frac{\partial \rho}{a\partial \xi} = D\frac{\partial^2 \rho}{a^2\partial \xi^2} \tag{97}$$

この両辺に b を掛けると以下を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} - 2\frac{b}{a}\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}}\rho\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{b}{a^2}D\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} \tag{98}$$

ここで、 a と b は任意であるから、それらに以下の制約を与える。

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a}\dfrac{u_{\max}}{\rho_{\max}} = 1 \\ \dfrac{b}{a^2}D = 1 \end{cases} \tag{99}$$

したがって、以下を得る。

$$\frac{\dfrac{b}{a}\dfrac{u_{\max}}{\rho_{\max}}}{\dfrac{b}{a^2}D} = a\frac{1}{D}\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}} = 1 \tag{100}$$

最後に、係数として以下を与えると

$$a = \frac{\rho_{\max}}{u_{\max}}D \tag{101}$$

$$\begin{aligned} b &= a\frac{\rho_{\max}}{u_{\max}} \\ &= \left(\frac{\rho_{\max}}{u_{\max}}\right)^2 D \end{aligned} \tag{102}$$

となる。したがって、変数は以下となる。

$$\begin{cases} X = \dfrac{\rho_{\max}}{u_{\max}}D\xi \\ T = \left(\dfrac{\rho_{\max}}{u_{\max}}\right)^2 D\eta \end{cases} \tag{103}$$

したがって、連続方程式は以下となる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} \tag{104}$$

【変数変換 3】

変数 ρ を以下のように考える。

$$\rho = \frac{\partial \ln f}{\partial \xi} \tag{105}$$

これを連続法廷 s 機に代入して以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \eta \partial \xi} &= 2\frac{\partial \ln f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 \ln f}{\partial \xi^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial^3 \ln f}{\partial \xi^3} \end{aligned} \tag{106}$$

整理して以下をなる

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{\partial \ln f}{\partial \eta}-\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2}\right]\right\}=0 \tag{107}$$

したがって、以下を得る。

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2} \tag{108}$$

この右辺は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2}&=\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\\&=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{f^2}+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}f-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{f^2}\\&=\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\end{aligned} \tag{109}$$

この左辺は以下のように変形される。

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \eta}=\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{110}$$

したがって、微分方程式は以下となる。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{111}$$

これは、通常の拡散方程式である。

20.5.6. 渋滞のセルによる表現

渋滞はセルでも表現できる。

渋滞をセルで表現する場合、我々は箱を用意し、その箱は特有の数字 1 か 0 を持つものとする。1 はその箱に自動車がいるものとし、0 はないものとする。

我々は連続した箱を有するものとする。箱の位置は自動車の位置をする。

渋滞は 1 の連続した箱で表す。

ルールは以下のようにする。

自動車は前の箱が 0 であれば動けるとする。これは、前に動くことを意味する。

もしも前の箱が 1 であれば、動けず、そのままである。

最後の箱の扱いを明記しなければならない。最後の箱の前は最初の箱であるとする。

図 12 に二つのタイプのセルを示す。(a) は渋滞が消えていき、(b) は渋滞が消えないことを示す。っ渋滞を消すためには、その前に空白の領域を作らねばならないことがわかる。

t	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
t+1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
t+2	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
t+3	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0

(a)

t	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
t+1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
t+2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
t+3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

(b)

図 12　セルによる渋滞の表現。(a) 渋滞は時間とともに消えていく。(b) 渋滞はなくならない。

20.6. まとめ

この章のまとめを行う。

【エレベーターの待ち時間】

高層建築に M 個のエレベーターがあるとする。

エレベーターとして二つのタイプを仮定する。

タイプ A は、すべてのエレベーターはすべての階に止まるものとする。

タイプ B は低層専用のエレベーター M_L と高層専用のエレベーター M_H があるとする。

以下が成り立つ。

$$M = M_L + M_H$$

高層建築は K 階あるとする。したがって、タイプ B のエレベーターにとって K_L 階までのエレベーターと、$K_L + 1$ から K 階へのエレベーターがある。

タイプ A の 平均の待ち時間 T_A は以下で与えられる

$$T_A = \sum_{j=2}^{K} \left[\frac{a}{2M} + (j-1)b \right] \frac{1}{K-1}$$

タイプ B の 平均の待ち時間 T_B は以下で与えられる

$$T_B = \sum_{j=2}^{K_L} \left[\frac{a_L}{2M_L} + (j-1)b \right] \frac{1}{K-1} + \sum_{j=K_L+1}^{K} \left[\frac{a_L}{2M_L} + c + \left[j - (K_L+1) \right] b \right] \frac{1}{K-1}$$

タイプ B の方が平均の待ち時間が短くなる。したがって、おおくのエレベーターのシステムはタイプ B になっている。

【電車の遅れ】

ある電車は思いがけず多くの乗客を乗せてしまう。その場合、顧客の出入りに時間がかかる。すると、次の駅で待つ人数が増える。すると、顧客の流入、流出の時間はますます長くなる。そそて、遅れている電車はますます遅れることになる。

臨界時間は以下で与えられる。

$$s_0 = \frac{c}{2\beta\lambda}$$

臨界乗車数は以下で与えられる。

$$m^* = \frac{\lambda s_0}{r}$$

もしも、最初の乗客数がこの値よりも小さければ、ここには定常状態が存在し、時間間隔は初期値を保持し、乗客数はその臨界値に落ち着く。

もし、初期の顧客数が臨界値を超えていれば、定常状態は存在せず、時間間隔と乗車数は増えていく。

【信号機の点灯時間の設計】

信号機の点灯時間の設計方法を議論した。

赤、青、黄色の点灯時間をそれぞれ a，b，および c とする。我々は十字路を仮定し、その一方を 1、 他方を 2 と表示する。

サイクル時間は 1 と 2 で同じである。すなわち、以下で与えられる。

$$d = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$$

一般にこのサイクル時間は以下で与えられることを示した。

$$d = \frac{c_1 + c_2}{1 - \frac{1}{\kappa}(\rho_1 + \rho_2)}$$

ここで

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

である。青の点灯時間を以下で与えられることを示した。

$$b_1 = \frac{1}{\kappa}\rho_1 d$$

$$b_2 = \frac{1}{\kappa}\rho_2 d$$

赤の点灯時間は以下で与えられる。

$$a_1 = b_2 + c_2$$

$$a_2 = b_1 + c_1$$

平均待ち時間は以下で与えられる。

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{\mu_1\left(a_1 + b_1\right)^2}{2d\left(\mu_1 - \lambda_1\right)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{\mu_2\left(a_2 + b_2\right)^2}{2d\left(\mu_2 - \lambda_2\right)}$$

【高速道路における渋滞】

高速道路の渋滞はのぼりかサグで起こる。

渋滞は簡単には二つの領域に分けて解析できる。一つは渋滞が起こっている領域、一つはフリードライブする領域である。

渋滞が起こっている領域の平均速度をu_1, その自動車の密度をρ_1 とする。フリードライブ領域の平均速度をu_2その自動車の密度を ρ_2とする。その両領域の境界の速度をc とする。cは以下で与えられる。

$$c = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

したがって、境界の速度は流速に影響される。

もし $Q_1 > Q_2$であれば、境界は右に動き、渋滞は解消する。

もし$Q_1 < Q_2$, であれば、境界は左に動き、渋滞は増加する。

任意の場所での自動車の密度は以下で与えられる。

$$\rho = C_1 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} \tanh\left\{ C_1 \left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right) t \right] \right\} + C_2$$

C_2 は以下で定められる。

$$C_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

二つの地点のデータが取れれば、以下が成り立つ。

$$\frac{\rho(x_1, t_1) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}{\rho(x_2, t_1) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} = \frac{\tanh\left\{ C_1 \left[x_1 - u_{\max}\left(1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_{\max}}\right) t_1 \right] \right\}}{\tanh\left\{ C_1 \left[x_2 - u_{\max}\left(1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_{\max}}\right) t_2 \right] \right\}}$$

これから、e C_1 を決定できる。それから、拡散係数. D を以下のように定めることができる。

$$D = \frac{u_{\max}}{\rho_{\max}} \frac{\rho_1 - C_2}{C_1}$$

以上のパラメータがわかれば、連続方程式から任意の場所の自動車の密度を

$$\rho = C_1 \frac{\rho_{\max} D}{u_{\max}} \tanh\left\{ C_1 \left[x - u_{\max}\left(1 - \frac{2C_2}{\rho_{\max}}\right) t \right] \right\} + C_2$$

と知ることができる。

高速道路の渋滞はセルによっても簡単に表現できることを示した。