8. M/M/s(s):貸出備品数

概要: レンタル備品が全て貸し出されていなければ、我々はその備品を借りることができる。一方、その備品が全て貸し出されていれば、我々はその備品を借りることはできず、去っていく。顧客の満足をかなえるためには備品の数を多くすればいいが、そのためにはコストがかかる。したがって、顧客の満足をある程度かなえたうえで、備品の数は最小にする必要がある。ここでは、この備品の数の解析をまず流体的に扱い、次に待ち行列的に扱う。

キーワード: 備品; 貸出依頼;貸出期間;推定確率;平均;分散;待ち行列; $M/M/s(s)$;呼損;図書館

8.1. 序

カメラを用意し、それらに対して貸し出し依頼がある業務を考える。その場合、用意しているカメラの数が少なければ、依頼に答えることができない場合が多くなる。一方、潤沢にカメラを揃えておけば、依頼に答えることは可能になるが、そのため多くのカメラを購入しなければならず、さらにそのカメラを管理する必要がある。これにはコストがかかる。したがって、要求に答えられる状態で、できるだけ少ない数のカメラを揃えておきたい。このように、カメラのような貸出備品をいくつ揃えておけばいいのかをここでは検討する。

ここでは、この問題を流体的に扱い、次に待ち行列的に扱う。

待ち行列的に扱うと問題は以下のようになる。ケンドールの記号では $M/M/s(s)$ と表現される。これは、前章で求めた $M/M/s(N)$ に対するモデルにおいて、$N=s$ とすればいい。

この系は図書館にも適用できる。しかし、この場合の難しさは、本を借りに来て、その本が貸し出されていることを発見した顧客は帰るが、それに対応するデータを得ることができない、ということにある。この場合、何人がこの本を借りにきたのかを予想することが必要になる。

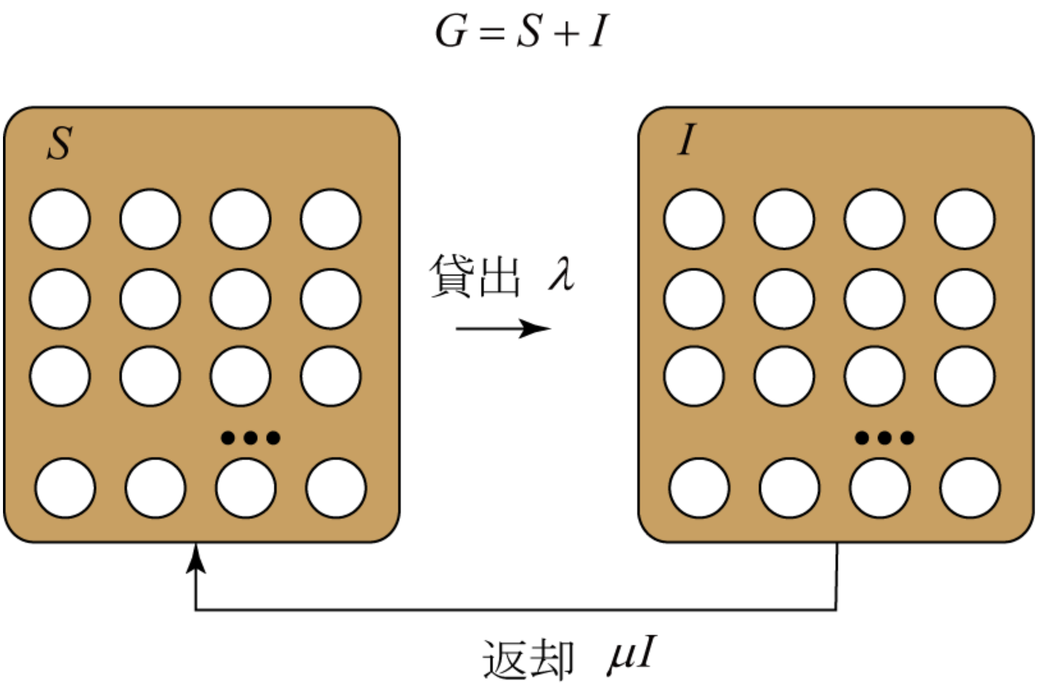


図 1　備品配備の系

8.2.　貸出依頼頻度、貸出期間が一定の場合

図 1 **エラー！ 参照元が見つかりません。**に備品配備の系を示す。

ここではまず、貸出依頼頻度、貸出期間が一定の場合を扱う。

備品の総数をGとし、貸し出されていない備品の数をS、貸し出されている備品の数をIとする。また時間をtとする。すると

$$G = S(t) + I(t) \tag{1}$$

となる。つまり、備品は貸し出されているか、いないかのどちらかの状態である。当然のことであるが、Gは時間に依存しない。

ここで、貸出依頼頻度は単位時間あたりλであり、貸出期間はdであるとする。

ここで、微小時間Δtを考える。$[t, t+\Delta t]$の時間間隔の中での貸し出し依頼数は

$$\lambda \Delta t \tag{2}$$

となる。$[t, t+\Delta t]$の時間間隔の中で戻ってくる備品の数は

$$\frac{1}{d} I(t) \Delta t = \mu I(t) \Delta t \tag{3}$$

となる。ただし、μは

$$\mu = \frac{1}{d} \tag{4}$$

と定義する。

すると、以下を得る。

$$S(t+\Delta t)=S(t)-\lambda\Delta t+\mu I(t)\Delta t \tag{5}$$

$$I(t+\Delta t)=I(t)+\lambda\Delta t-\mu I(t)\Delta t \tag{6}$$

ここで、

$$G=S(t+\Delta t)+I(t+\Delta t)=S(t)+I(t) \tag{7}$$

となり、確かに時間に依存しない。

これから、

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=-\lambda+\mu I(t) \tag{8}$$

$$\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=\lambda-\mu I(t) \tag{9}$$

を得る。$\Delta t\to 0$の極限を取り、定常状態を仮定すると

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\frac{dS}{dt}=-\lambda+\mu I(t)=0 \tag{10}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=\frac{dI}{dt}=\lambda-\mu I(t)=0 \tag{11}$$

となる。これから、

$$I(t)=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda d \tag{12}$$

となる。ここで、Sに対する式は無いから、それは任意でいい。つまり、最低の備品の数は$S=0$とした

$$G=\lambda d \tag{13}$$

とすればいい。つまり、依頼と返却がつりあって、貸し出されていない備品がない状態になる。

8.3. 貸出依頼頻度、貸出期間が不定の場合

前の章では、貸出依頼頻度、貸出期間が一定の場合を扱っていた。しかし、それらは実際は変動する。それは、この変動を以下のように扱うことができる。

データを取得し、ここで、貸出依頼頻度λ、貸出期間はdに対する平均、標準偏差が分かっているとする。すると、それらのパラメータは

$$\lambda=\mu_\lambda+z_P\sigma_\lambda \tag{14}$$

$$d=\mu_d+z_P\sigma_d \tag{15}$$

となる。ここで、$\mu_\lambda,\sigma_\lambda$ は λ の平均、標準偏差、μ_d,σ_d は d の平均、標準偏差である。z_P は P 点と呼ばれるもので、推定確率 P と連動する。この場合は片側推定確率となり、それは

$$z_P = \sqrt{2}Erf^{-1}\left(2P-1\right) \tag{16}$$

で与えられる。それらは具体的には以下のようになる。

$$z_P = \begin{cases} 0.84 & for\ P = 0.8 \\ 1.28 & for\ P = 0.9 \\ 1.64 & for\ P = 0.95 \end{cases} \tag{17}$$

したがって、先の式にこれらを代入すればいい。実際にはさらに余裕をもってパラメータ κ を導入し

$$\begin{aligned} G &= \left(1+\kappa\right)\lambda d \\ &= \left(1+\kappa\right)\left(\mu_\lambda + z_P\sigma_\lambda\right)\left(\mu_d + z_P\sigma_d\right) \end{aligned} \tag{18}$$

とすればいい。κ は 0 から 1 の間をとり、0 に近い値で現実に問題ない値を設定すればいい。ここで問題となるのは、z_P は個々の項の推定確率を設定しているが、それは G そのものの推定確率ではないということである。つまり、G は推定確率いくつで導出したものであるのか語ることができない。λ, d に設定した P よりも厳しい見積もりになっていることは言える。この確率の問題を解決してくれるのが次章で検討する待ち行列理論である。
貸出期間の最大値が設定されている場合は、全備品数量をその値 $d = d_{\max}$ にした、

$$G\left(P\right) = \left(1+\kappa\right)\left(\mu_\lambda + z_P\sigma_\lambda\right)d_{\max} \tag{19}$$

となる。この場合は、確率的に変動するのは貸出依頼件数だけであるから、推定確率はいくらか、ということが明確にわかる。したがて、G を $G\left(P\right)$ と表記することができる。

8.4. 待ち行列的な取り扱い

これまでの解析では、現象を流体的に扱ってきたが、この現象を確率過程として扱う。つまり待ち行列的に扱う。待ち行列理論では、自動的に確率的な扱いをする。したがって、マクロなパラメータを確率と連動させることは容易である。

備品を何個揃えておけばいいのか、という問題は、ケンドールの記号では $M/M/s\left(s\right)$ と表現される。これは、通常の待ち行列理論で扱う理論 $M/M/s\left(N\right)$ に対するモデルにおいて $N = s$ とすればいい。s は備品の数に相当する。つまり、稼働しているサービスメンバーは借りられている備品に相当する。また、備品がすべて借りられている場合には、借りたいと思う人は備品を借りられないから、そのまま立ち去ることになる。それを評価するために $N = s$ としている。備品の数が適切かどうかは、呼損で評価する。

8.4.1. レンタルサービスに対する状態確率

ここでは、レンタル備品に対する状態確率を評価する。レンタル備品数はサービスメンバー数 s

である。

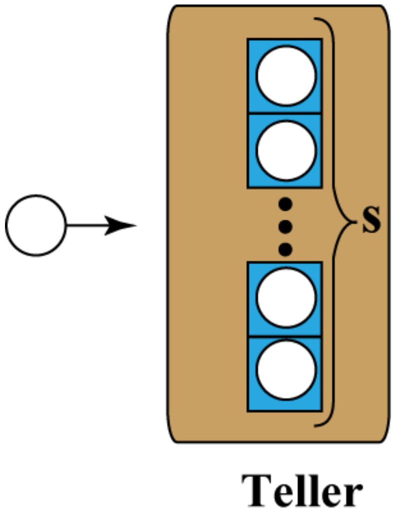


図 2　$M/M/s(s)$ の系の模式図

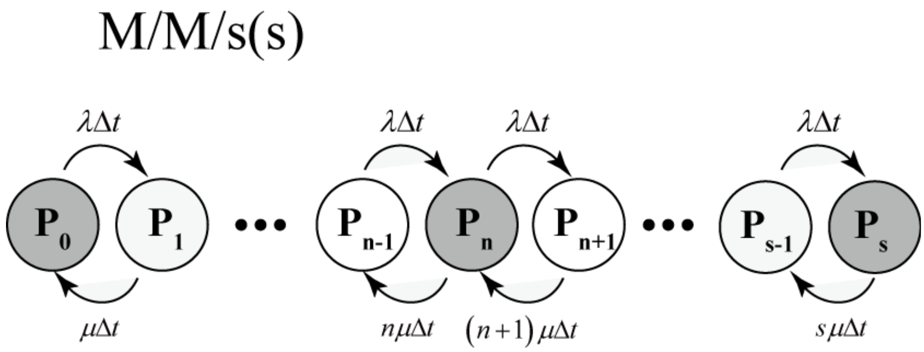


図 3　M/M/s(s)の系の状態確率の遷移

関連する系の模式図を図 2 に、関連する状態確率の遷移を図 3 に示す。

年間にある備品を貸出依頼する顧客の人数の平均値をλとする。貸出期間の平均値をdとする。すると、対応頻度μは以下のようになる。

$$\mu = \frac{1}{d} \tag{20}$$

また、

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{21}$$

である。

先に述べたように$M/M/s(s)$において、s は備品の数である。

まず、一般に系にいることのできる人数がNの場合を考える。貸し出されている備品の数がn

である状態の確率は以下であった。

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \le s) \\ \eta^{n-s} P_s & (s \le n \le N) \end{cases} \tag{22}$$

ここで、 P_0 は以下である。

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1-\eta}} \tag{23}$$

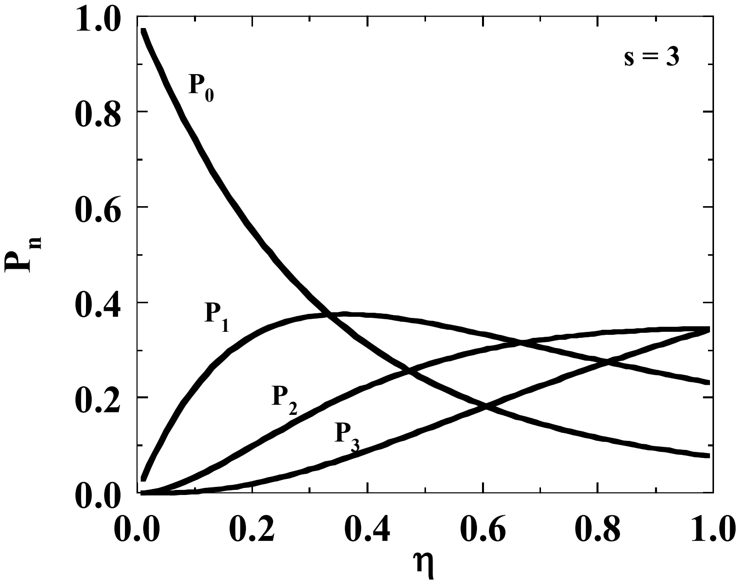
である。

ここで、 $N = s$ と置くと、 $M/M/s(s)$ に対する理論になり、以下を得る。

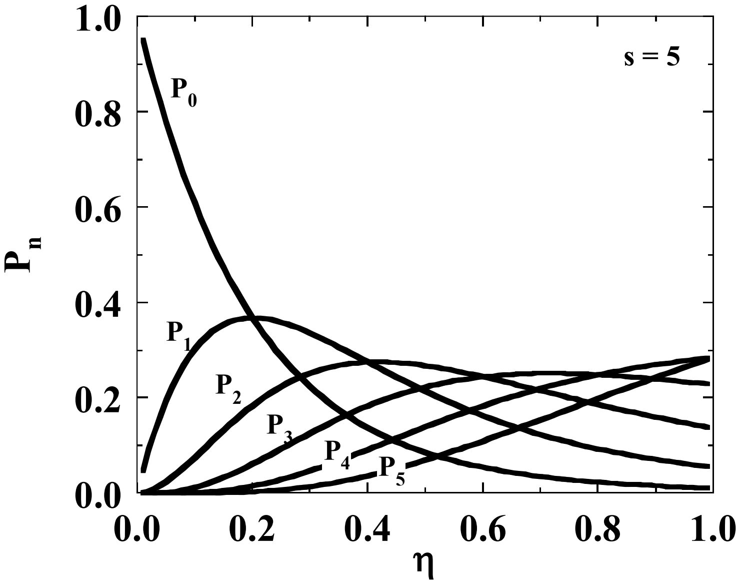
$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \tag{24}$$

ここで、 P_0 は以下である。

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\dfrac{\rho}{s} - \left(\dfrac{\rho}{s}\right)^{N-s+1}}{1-\dfrac{\rho}{s}}} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\dfrac{\rho}{s} - \dfrac{\rho}{s}}{1-\dfrac{\rho}{s}}} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}} \end{aligned} \tag{25}$$



(a)



(b)

図 4　$M/M/s(s)$ における P_n の η 依存性。 (a) $s=3$、(b) $s=5$

図 4に P_n の η 依存性を示す。P_0 は η が増加するに従い、単純に減少する。その他の P_n は 0 から増加しはじめ、ある η でピークを持ち、そこから減少していく。P_s は η の増加とともに単調

に増加していく。そして、η が 1 に近づいていくと、P_{s-1} の値に近づいていく。

この状態確率のピーク位置を解析する。

P_n を ρ について微分し、0 と置く。すると以下を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=1}^{s}\frac{\rho^k}{k!}}\right) \\
&= \frac{n\frac{\rho^{n-1}}{n!}\sum_{k=1}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{s}k\frac{\rho^{k-1}}{k!}}{\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\rho^k}{k!}\right)^2} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

これから、以下を得る。

$$\begin{aligned}
n\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \sum_{k=0}^{s}k\frac{\rho^k}{k!} &= n\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \sum_{k=1}^{s}k\frac{\rho^k}{k!} \\
&= n\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \rho\sum_{k=1}^{s}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= n\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \rho\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!} \\
&= n\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \rho\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{\rho^k}{k!} - \frac{\rho^s}{s!}\right) \\
&= (n-\rho)\frac{1}{P_0} + \rho\frac{\rho^s}{s!} \\
&= \frac{n-\rho+\rho P_s}{P_0} \\
&= \frac{n-(1-P_s)\rho}{P_0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{27}$$

したがって、ピーク位置では以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\rho}{s} \\
&= \frac{n}{s}\frac{1}{1-P_s}
\end{aligned} \tag{28}$$

もし η が 0 から 1 の範囲であれば、我々はピークを持つことになる。ここで、P_s も η を含んでいるから、この式からは η が 0 から 1 の間に解を持つのか判断できない。しかし、この式から、小さな n ではピークを持つ可能性が高く、P_s は η ピークを持たないことは分かる。

次に η が 1 の極限の場合の P_n の値を求める。

$$\lim_{\eta\to 1} P_n = \lim_{\rho\to s} \frac{\rho^n}{n!} P_0$$
$$= \frac{s^n}{n!} P_0 \tag{29}$$

ここで、P_0は以下である。

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} \frac{s^k}{k!}} \tag{30}$$

P_sと P_{s-1} のη が 1 の極限の場合の値は以下のように一致することが示される。

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{s^s}{s!} P_0 \\ &= \frac{s}{s} \frac{s^{s-1}}{(s-1)!} P_0 \\ &= P_{s-1} \end{aligned} \tag{31}$$

8.4.2. マクロなパラメータ

この場合の待ち行列は 0 であることが以下のように示される。

$$\begin{aligned} L_q &= \left[\frac{\rho}{s} \frac{1-\left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}{\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2} - \frac{(N-s)\left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s+1}}{1-\frac{\rho}{s}} \right] P_s \\ &= \frac{\rho}{s} \frac{1-1}{\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2} P \\ &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

系に滞在している全人数Lは貸し出されている備品の数となり、以下となる。

$$\begin{aligned} L &= (1-P_N)\rho + \left[\frac{\rho}{s} \frac{1-\left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s}}{\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2} - \frac{(N-s)\left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-s+1}}{\left(1-\frac{\rho}{s}\right)} \right] P_s \\ &= (1-P_s)\rho \end{aligned} \tag{33}$$

これは、借りられている備品の平均数に相当する。$P_s \approx 0$、つまり備品の数が十分多ければ

$$
\begin{aligned}
L &= \left(1 - P_S\right)\rho \\
&\approx \rho \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \lambda d
\end{aligned}
\tag{34}
$$

となる。これは、流体モデルの結果と一致する。

この分散は以下となる。

$$
\begin{aligned}
V_L &= \left(0 - L\right)^2 P_0 + \sum_{n=1}^{s} \left(n - L\right)^2 P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{s} \left(n^2 - 2Ln + L^2\right) P_n \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{s} n^2 P_n - 2L^2 + \left(1 - P_0\right) L^2 \\
&= L^2 P_0 + \sum_{n=1}^{s} n^2 P_n - \left(1 + P_0\right) L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{s} n^2 P_n - L^2
\end{aligned}
\tag{35}
$$

図 5に L と σ_L の η 依存性を示す。η が増加するにつれ L は単調に増加していく。同様に s が増加するにつれ、L は単調に増加する。

η が増加するのにつれ σ_L は最初は単調に増加するが、後に飽和し、場合によってはわずかに減少する。小さな η では L より大きいが、η のある値以上の領域では、σ_L の方が L より小さくなる。これは、最大の貸出し件数が s に限定されているため、η が増えていくと、そのバラツキも小さくなっていくためである。

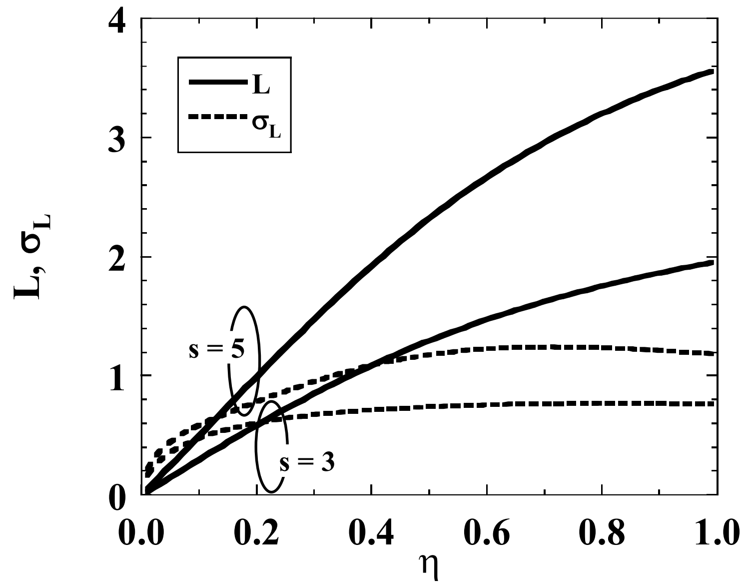


図 5　$M/M/s(s)$ の系のおける L と σ_L の η 依存性

8.4.3. 呼損

顧客が備品を借りに来て、その備品が全て貸し出されている場合、顧客は借りずに去っていく。それを呼損と呼ぶ。呼損確率 P_{cl} は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
P_{cl} &= P_s \\
&= \frac{\rho^s}{s!} P_0 \\
&= \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

図 6 に P_{cl} の η 依存性を示す。η が増えるにつれ、呼損確率 P_{cl} は増加し、s が増えるにつれ、減少する。

実際に s を決定するのは数値的に評価する。そのプロセスを示す。

許容される P_{cl} の値を ς と設定する。

ρ はあらかじめ決まっている。

スタートとする小さな s を決める。

その s における、P_{cl} を評価する。

もしも P_{cl} が κ より大きかったら s を 1 増やして同様のプロセスを繰り返す。

もしも P_{cl} が κ よりも小さかったらその s が求めるものであり、プロセスを終了する。

以上のプロセスで求めたsをs_0とする。最終的には安全を見込んで、パラメータκを導入し、在庫数Gを

$$G = (1+\kappa)s_0 \tag{37}$$

とする。

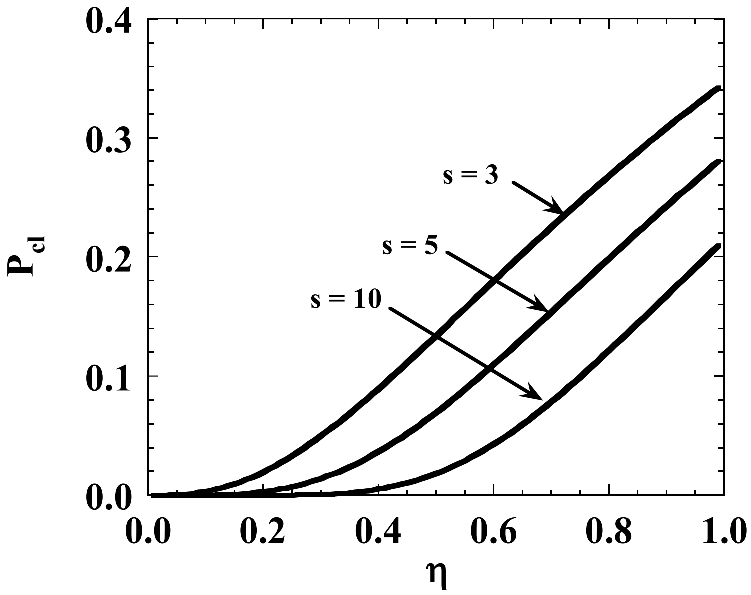


図 6　$M/M/s(s)$におけるP_{cl} の η 依存性。sとしては 3,5,10 を仮定している

8.4.4. 図書館の本の冊数

一人の顧客は図書館を訪れ、借りたいと思う本があるかどうか確認する。その本がある場合は、貸出処理を行う。そしてその本が全て貸し出されている場合は去っていく。

図書館の場合に難しいのは、その本が全て貸し出されている場合は去っていくが、その記録がないことである。

我々が、ここでしたいことは、本の揃えるべき冊数とレンタル期間の設定である

図書館の場合は、我々はいったいどれくらいの人が本を借りようと思って系を訪問しているのかは知らない。つまり、λが不明である。しかし、この場合、年間の累計貸出数Rは知ることができる。このRから λを予測できるかが問題となる。

顧客が図書館を訪問し、本を発見する確率は$1-P_s$である。したがって、Rは以下である。

$$
\begin{aligned}
R &= \lambda\left(1-P_s\right) \\
&= \lambda\left(1-\frac{\rho}{s!}P_0\right) \\
&= \lambda\left(1-\frac{\rho}{s!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}}\right)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

残念ながら、ρ は λ の関数であるから、これはさらに以下となる。

$$
\begin{aligned}
R &= \lambda\left(1-\frac{\rho}{s!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}}\right) \\
&= \lambda\left(1-\frac{1}{s!}\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

我々は R と μ を知っている。したがって、λ がどの程度か知ることができる。残念ながら λ を解析的に求めることはできないが、数値的に求めることはできる。

図書館の本の冊数はそれほど多くない。$s=1$ である場合が多い。したがって、少ない s で評価してみる。

$s=1$ の場合を考える。この場合、我々は以下を得る。

$$
\begin{aligned}
R &= \lambda\left(1-\frac{\rho}{1!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{1}\frac{\rho^n}{n!}}\right) \\
&= \lambda\left(1-\rho\frac{1}{1+\rho}\right) \\
&= \frac{\lambda}{1+\rho} \\
&= \frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{\mu}}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

これを λ について解くと

$$\lambda = \frac{R}{1 - \frac{R}{\mu}} \tag{41}$$

となる。

$s = 1$で dが二週間であったとしてみる。 対応するサービス率 μは以下である。

$$\mu = \frac{365}{14} = 26 \tag{42}$$

R の λ 依存性を図 7 に示す。ここでは、dとして 7 日と 14 日を仮定している。

$1 - P_s$は貸し出せる確率である。これを貸出確率と呼ぶ。図 8 にその確率のλ.依存性を示す。λが小さい場合、その確率はほぼ 1 であるが、λが増えるにしたがい、単調に減少していく。λが 20 を超えると、貸出確率は 50%程度になり、R は増加する。

Rの極限値は以下となる。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\lambda}{1 + \rho} \\ &= \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \\ &\approx \begin{cases} \lambda & for\ \lambda \ll \mu \\ \mu & for\ \lambda \gg \mu \end{cases} \end{aligned} \tag{43}$$

つまり、λ がμより非常に小さい場合はλ と同じになり、λ がμより非常に大きい場合はμ となる。

したがって、貸出期間を変えてデータを取ってみることが必要である。そのようなデータが取得できたとする。

上でみたように、λ がμより非常に小さい場合は、いろいろdを変えても、Rは変化しない。つまり、dを変えてもRの変化が無ければ、$\lambda = R$としていい。

上でみたように、λ がμより非常に大きい場合は、Rはλに依存しない。つまり、λをデータから抽出できない。dをいろいろ変えて、$R \neq \mu$となる条件dを見つける。するとλを評価できる。

$R \neq \mu$であれば、我々は理論を使ってこの本に対するλを予想することができる。例として、$d = 14$ および $R = 15$とする。これに対応するμは

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{d} \\ &= \frac{1}{\frac{14}{365}} \\ &= 26 \end{aligned} \tag{44}$$

であり、$R \neq \mu$である。したがって、この場合のλは

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{R}{1-\dfrac{R}{\mu}} \\
&= \frac{15}{1-\dfrac{15}{\left(\dfrac{365}{14}\right)}} \\
&= 35
\end{aligned}
\tag{45}
$$

と求まる。

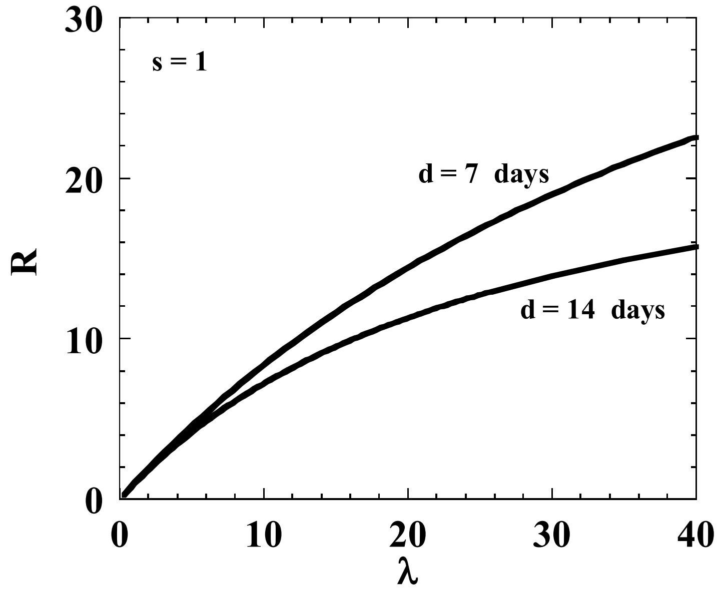


図 7　R の λ 依存性。ここでは $s=1$ としている

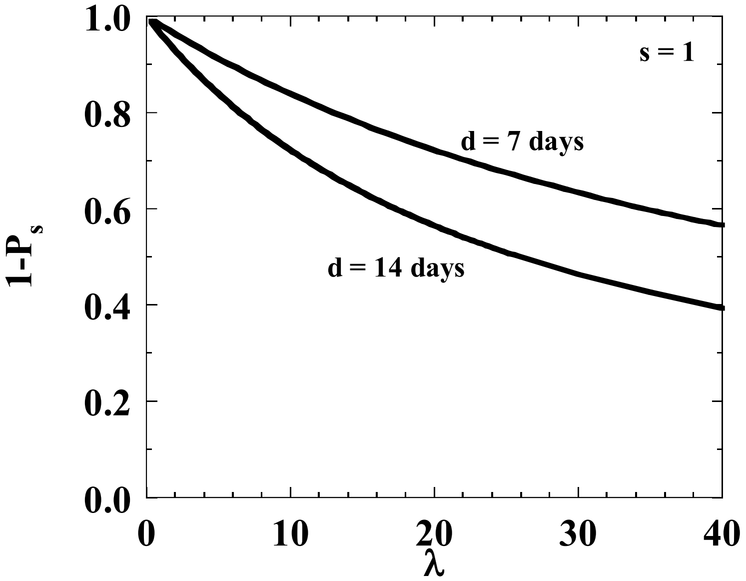


図 8　貸出確率の λ 依存性。ここでは $s=1$ としている

次に $s=2$ の場合を考える。これは同じ本を 2 冊揃えていることに相当する。図書館ではあまりないことであるが、まれにには複数冊揃えている場合がある。ここでは、解析を一般化しておく。理論は任意の s に対して有効である。

この場合も λ が増加すれば R は増加する。また d を短くすれば、R は増加する。しかし、s を増加するほうが有効に見える。この点をさらに解析する。

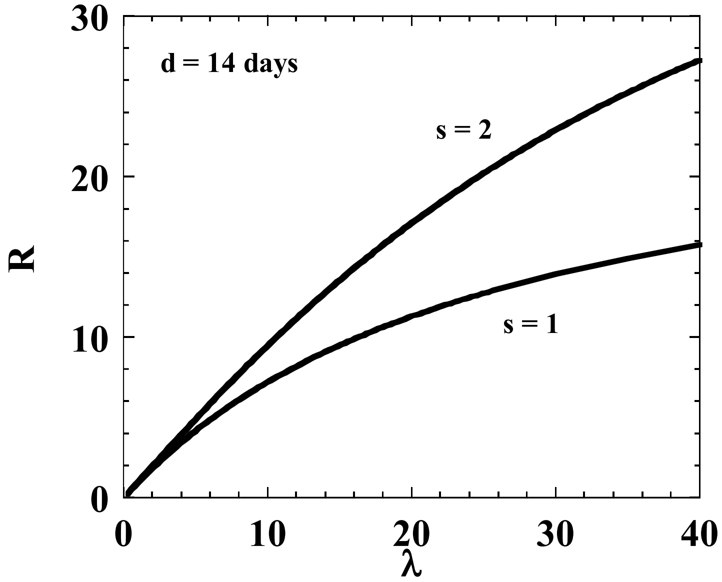


図 9　R の λ 依存性。ここで $s=1,2$ としている

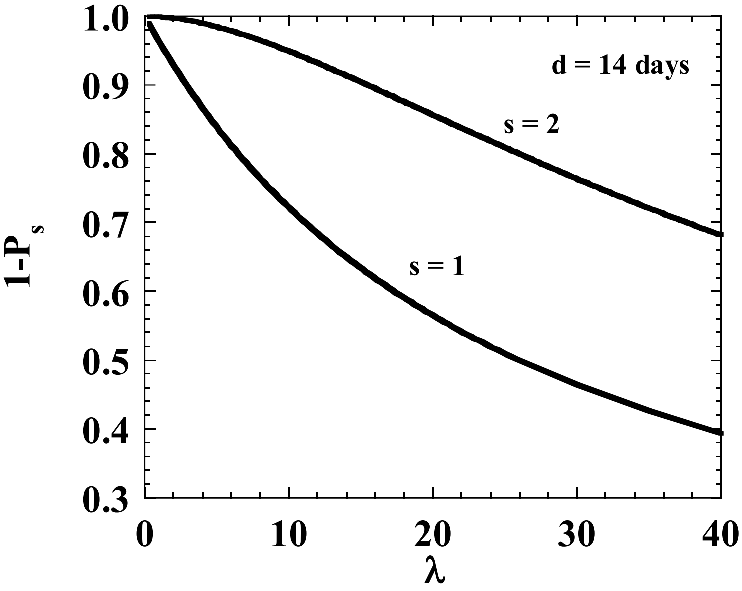


図 10　貸出確率の　λ 依存性。ここで、$s=1,2$ としている

$s=1$の場合の累積貸出数をRとする。

$s=2$　の累積貸出数をR_sとすると、それは以下で与えられる。

$$R_s = \lambda\left(1-\frac{\rho}{2!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{2}\frac{\rho^n}{n!}}\right) = \lambda\left(1-\frac{\rho}{2}\frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}\right) = \lambda\frac{1+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{2}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}} \tag{46}$$

$s=1$の状態で、貸出期間を 1/2 にすると、μ は 2 倍になる。これは、ρ が半分になることを意味する。 この累積貸出冊数を　R_μ　とすると、それは以下となる。

$$R_\mu = \lambda\left(1 - \frac{\rho}{1!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{1}\frac{\rho^n}{n!}}\right)$$
$$= \lambda\left(1 - \rho\frac{1}{1+\rho}\right)$$
$$= \frac{\lambda}{1+\frac{\rho}{2}} \tag{47}$$

したがって、その比は以下となる。

$$\frac{R_s}{R_\mu} = \lambda\frac{1+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{2}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}\frac{1+\frac{\rho}{2}}{\lambda}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\left(1+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{2}\right)}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$$
$$= \frac{1+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho^3}{4}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$$
$$= 1+\frac{\rho^2}{4}\frac{1+\rho}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}} > 1 \tag{48}$$

したがって、貸しだし期間を 1/2 にするよりも本の冊数を 2 にするほうが有効であることがこのことから分かる。図 11 にこの比の ρ 依存性を示す。ρ が大きいほどこの効果は大きくなる。経済的には貸出期間を調整するほうが容易であるが、冊数を変える方が効果が大きい。

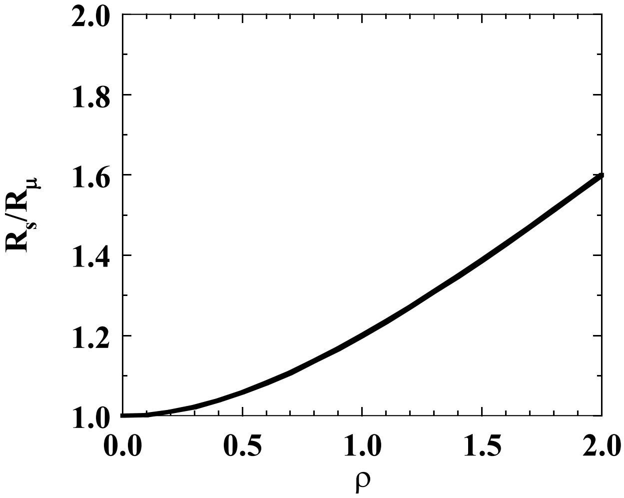


図 11　比 R_s/R_μ の ρ 依存性

我々は、適切な用意すべき本の冊数を決定しなければならない。一つの方策は呼損から決定することである。ここでは、それを 0.1 に設定することを考える。

呼損確率は以下で与えられる。

$$P_{cl} = \frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}} \tag{49}$$

これは、レンタル備品の場合と同様なプロセスによって決定される。この場合は、λ が不明のため、先に示した方法でそれを予想する。そのうえで、レンタル備品数を決定したプロセスと同様になる。図 12 に様々な s に対する呼損確率を示す。これから、呼損確率が 0.1 になる ρ を評価する。この図から ρ に応じた本の冊数を図 13 のように評価できる。

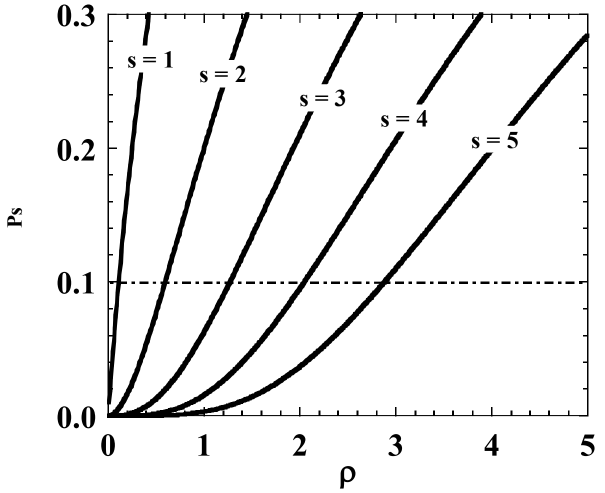


図 12　呼損の ρ 依存性

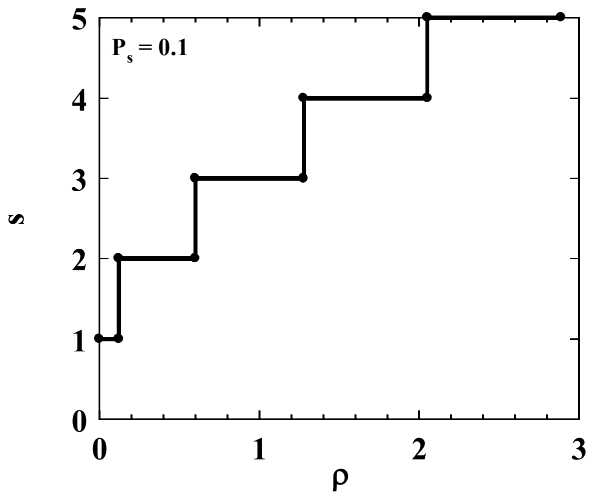


図 13　s と ρ の関係。臨界の呼損確率を 0.1 としている

8.5. まとめ

ここでの解析結果をまとめる。

備品の総数 G は

$$
\begin{aligned}
G &= (1+\kappa)\lambda d \\
&= (1+\kappa)(\mu_\lambda + z_P\sigma_\lambda)(\mu_d + z_P\sigma_d)
\end{aligned}
$$

とすればいい。$\mu_\lambda, \sigma_\lambda$ は λ の平均、標準偏差、μ_d, σ_d は d の平均、標準偏差である。z_P は P 点と呼ばれるもので、以下のように推定確率 P と連動する。

$$z_P = \sqrt{2}Erf^{-1}(2P-1)$$

である。また、κ はパラメータであり、0 から 1 の間をとる。0 に近い値で現実に問題ない値を設定すればいい。

もし、貸出期間の最大値が $d = d_{\max}$ と設定されていれば、備品の数は

$$G(P) = (1+\kappa)(\mu_\lambda + z_P\sigma_\lambda)d_{\max}$$

となり、この場合は推定確率 P で在庫切れを起こさない。

さらにこの現象を待ち行列理論的に扱った。この場合は、呼損と関連させて備品の数を決定する。呼損の確率は

$$P_{cl} = \frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}}$$

で与えられる。この呼損にある臨界値 ς を設定し

$$\frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}} < \varsigma$$

を満足する最小の s を求める。この s を s_0 とする。これに、先の統計的に定めた最終的な在庫数と同様、パラメータ κ を導入し、在庫数 G は

$$G = (1+\kappa)s_0$$

となる。

図書館において年間の累積貸出冊数 R は以下のようになる。

$$R = \lambda\left(1 - \frac{\rho}{s!}\frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}}\right)$$

図書館においては、入力頻度 λ は道であるが、貸出期間 d を変えてデータを取得するとそれを予想することができる。