4. リトルの定理

概要: リトルの定理は流入、流出のバランスについて一般的な関係を与える。さらに時間に対する関係式も与える。この定理により、系の滞在人数、待ち人数、系の滞在時間、待ち時間が関連付けられる。つまり、この4つのパラメータのうち、一つが分かれば残りの三つのパラメータを評価できる。

キーワード:リトルの定理;待ち時間;サービス時間;コールロス

4.1. 序

リトルの定理は待ち行列理論においてマクロな関係式を与える。これは、待ち時間、サービス時間、待ち行列の関係をそれらの詳細に立ち入ることなく導いてくれる。

4.2. リトルの定理

入力は人であったり、ものであったりする。この入力の頻度をλと表記する。系にいる顧客の平均数をL、待ち人数をL_qと表記する。系にいる平均総滞在時間をWとする。また、平均待ち時間をW_qとする。

我々は以下の方程式から始める。

$$T = T_q + T_s \tag{1}$$

ここで Tは総滞在時間であり、T_q はサービスを待っている時間、T_sはサービス時間である。W, W_q, および $1/\mu$ は期待値、すなわち平均値であり、T, T_qや T_sと以下のように結び付けられる。

$$W = E[T] \tag{2}$$

$$W_q = E[T_q] \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mu} = E[T_s] \tag{4}$$

ここで、 $E[\#]$ は、 $\#$ の時間平均値を意味する。例として、W の詳細は以下のように表現される。

$$W = E[T] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t T(t)\,dt}{t} \tag{5}$$

これは、以下のように分解して表現される。

$$\begin{aligned} W &= E[T] \\ &= E[T_q + T_s] \\ &= E[T_q] + E[T_s] \\ &= W_q + \frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{6}$$

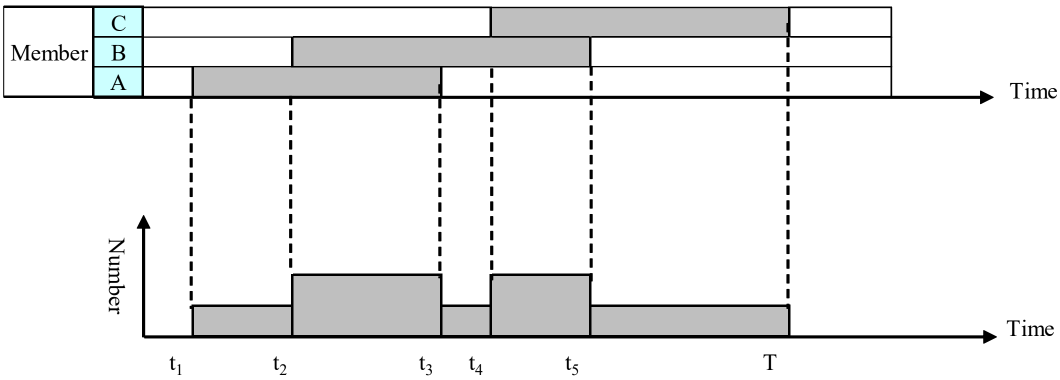

図 1　系の中の人数の時間依存性

次に、L と W の関係を検討する。

図 1 は待ち行列の状況を模式図的に示したものである。

顧客 A, B, および C が系に入り、サービスを受け、系を去っていく。

図の上の部分は顧客 A, B, および C が時間 T の間に系に滞在していた時間帯を示している。

顧客 A は時刻 t_1 に系に入り、時刻 t_3 に系を出ていっている。

顧客 B は時刻 t_2 に系に入り、時刻 t_5 に系を出ていっている。

顧客 C は時刻 t_4 に系に入り、時刻 T に系を出ていっている。

図の下の部分は各時刻に系に何人いたのかを示している。

系に滞在している平均人数 L は以下のように評価される。

$$L = \frac{S}{T} \tag{7}$$

ここで S は下の図の灰色にハッチングされている領域の面積である。

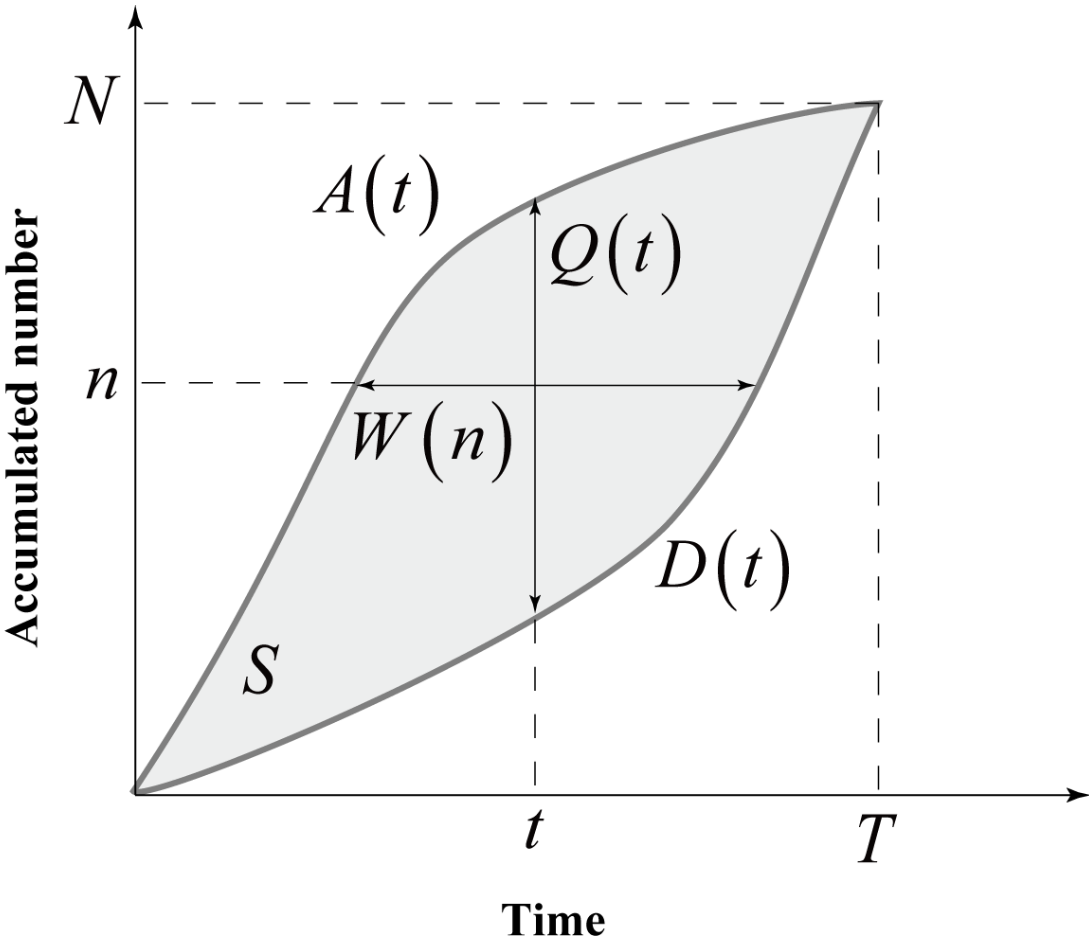

図 2　累積入力と出力の時間依存性

一方、平均の滞在時間は以下で与えられる。

$$W = \frac{S}{N} \tag{8}$$

ここで N は顧客の全人数であり、ここでは顧客 A, B, および C であり、N は 3 である。 したがって、以下の関係を得る。

$$S = LT = NW \tag{9}$$

これを変形して

$$L = \frac{N}{T}W$$
$$= \lambda W \tag{10}$$

となる。同じようにL_qに関して以下の形式を得る。

$$L_q = \lambda W_q \tag{11}$$

したがって、以下の関係が成り立つ。

$$L - L_q = \lambda\left(W - W_q\right)$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}$$
$$= \rho \tag{12}$$

ここで、

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{13}$$

である。

以上の結果をまとめると、以下を得る。

$$L_q = \lambda W_q \tag{14}$$

$$L = \lambda W \tag{15}$$

$$L = L_q + \rho \tag{16}$$

我々はプロセスの詳細に踏み込んで議論していない。この関係は一般的に成り立つ。リトルの定理は 4 つのマクロなパラメータ L, L_q, W, W_q のうち、一つでも分かれば、他のパラメータは決定されることを示している。

4.3. コールロスがある場合のリトルの公式

前節では、すべての顧客が系を訪問することができると仮定していた。

しかし、待合室は一般に有限の広さを持つ。したがって、実際は系に入ることができる人の人数は限られている。系を訪問したが、それがいっぱいであることが分かり、系に入るのを諦めることを呼損と呼ぶ。

リトルの公式を呼損がある場合に拡張する。

W と W_q の関係は顧客の数に無関係である。したがって、その関係は呼損がある場合

でも適用できる。すなわち

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{17}$$

である。

系にいる滞在人数も変わらない。すなわち

$$L = \frac{S}{T} \tag{18}$$

で与えられる。ここで、S は累積入力人数と累積流出人数の差の領域の面積である。

系に入ることのできる最大の人数を N_s とする。確率 P_{Ns+1} および添え字が N_s+1 以上の確率は 0 である。系にいる人数が N_s である場合に、呼損は起こる。

全部で N 人がいる場合、各メンバーが系に入る確率は $1-P_{N_s}$ である。したがって、系内にいる人数 N_s は以下で与えられる。

$$N_s = \left(1-P_{N_s}\right)N \tag{19}$$

平均の滞在時間は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} W &= \frac{S}{N_s} \\ &= \frac{S}{\left(1-P_{N_s}\right)N} \end{aligned} \tag{20}$$

したがって、面積 S は以下となる。

$$S = LT = \left(1-P_{N_s}\right)NW \tag{21}$$

よって、以下となる。

$$\begin{aligned} L &= \frac{\left(1-P_{N_s}\right)N}{T}W \\ &= \left(1-P_{N_s}\right)\lambda W \end{aligned} \tag{22}$$

ここで、

$$\lambda = \frac{N}{T} \tag{22}$$

としている。

L_q に関する関係式も同様に導くことができる。

$$L_q = \left(1-P_{N_s}\right)\lambda W_q \tag{23}$$

これから、以下を得る。

$$\begin{aligned} L - L_q &= \left(1 - P_{N_s}\right)\lambda\left(W - W_q\right) \\ &= \left(1 - P_{N_s}\right)\frac{\lambda}{\mu} \\ &= \left(1 - P_{N_s}\right)\rho \end{aligned} \tag{24}$$

以上を纏めると、以下の結果を得る。

$$L_q = \left(1 - P_{N_s}\right)\lambda W_q \tag{25}$$

$$L = \left(1 - P_{N_s}\right)\lambda W \tag{26}$$

$$L = L_q + \left(1 - P_{N_s}\right)\rho \tag{27}$$

ここですべてのパラメータを評価するためにはP_{N_s} を知る必要がある。これは、後の章で議論する。

4.4. まとめ

この章のまとめをする。

リトルの定理は待ち行列理論のマクロなパラメータL, L_q, W, W_qの間の関係を与える。つまり、これらの一つがわかれば、あとの 3 つのパラメータはリトルの定理から導出される。

呼損がない場合のリトルの定理は以下である。

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L = \lambda W$$

$$L = L_q + \rho$$

呼損がある場合のリトルの定理は以下である。ただし、系内にはN_s しか入れないとする。

$$L_q = \left(1 - P_{N_s}\right)\lambda W_q$$

$$L = \left(1 - P_{N_s}\right)\lambda W$$

$$L = L_q + \left(1 - P_{N_s}\right)\rho$$