5. 流入と流出

概要: 訪問顧客頻度がサービス頻度よりも大きい場合、我々は待ち行列を用いずにこの系を解析できる。訪問顧客頻度がサービス頻度よりも小さいきい場合、この解析では、待ち行列時間が発生しない。しかし、実際には待ち時間は生じる。これが、この解析の限界である。この場合は、待ち行列を使わなくてはならない。ここでは、その状況を簡単化し、待ち行列を使わない解析を紹介する。 本解析は、訪問顧客頻度がサービス頻度よりも大きい場合、つまり待ち行列がドンドン大きくなってしまうどうしようのない状況に対して精度がいいので重要である。

キーワード: 流入;流出;訪問頻度;サービス率;累積数;平均サービス時間;調和平均.

5.1. 序

客は系を訪問し、待ち、サービスを受け、系を去っていく。我々は時々、顧客の長い列を見る。このような状況を解析するのは待ち行列理論と思っている人が多いと思うが、このような状況には待ち行列を利用する必要がない。バラツキを考慮しない平均値による解析で十分に精度が出るためである。

この解析においては、入力頻度が出力頻度よりも小さい場合も扱うことができる。この場合は理論では待ち時間はない。しかしながら、実際にはこのような場合でも待ち時間は発生する。これは入力や出力の頻度のバラツキからくるもので、この解析には待ち行列理論が必要である。

ここでは、入力頻度が出力頻度よりも大きい場合も、入力頻度が出力頻度よりも小さい場合を扱う。入力頻度が出力頻度よりも小さい場合、その精度は悪くなる。この領域に対しては、待ち行列理論で予測の精度を向上させる必要がある。

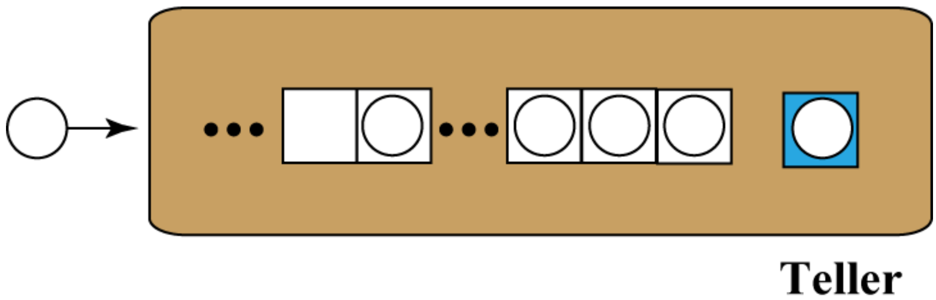

図 1 サービスメンバーが 1 人の場合の系

5.2. 一人のサービスメンバー

まず図 1 に示すようにサービスをメンバー(teller)が一人の場合を考える。

入力頻度をλとし、サービス時間をt_μとする。サービス時間の逆数は単位時間当たり一人の teller が対応できる顧客数になり、それをμ と表記すると、以下になる。

$$\mu = \frac{1}{t_\mu} \tag{1}$$

この λ と μ のバランスで現象がどうなるのかが決まる。

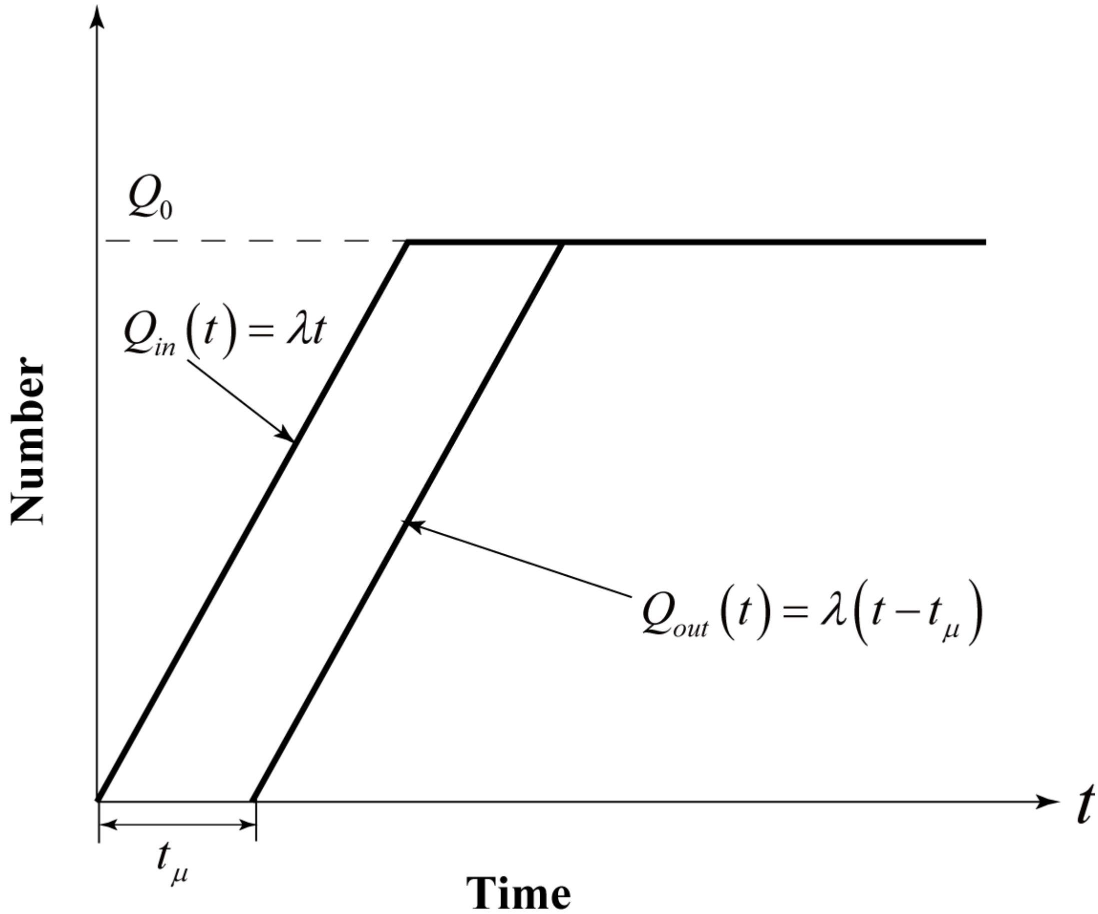

図 2　累積人数の時間依存性。$\lambda < \mu$ の場合

$\lambda < \mu$ の場合を考える。この場合の累積人数を図 2 に示す。

累積入力人数を$Q_{in}(t)$とすると、それは以下のようになる。

$$Q_{in}(t) = \lambda t \tag{2}$$

この入力顧客は時間t_μのサービスを受ける。このサービス率は入力頻度よりも大きい。したがって、出力は入力によって律速される。したがって、累積出力数$Q_{out}(t)$ は以下のように

なる。

$$Q_{out}(t) = \lambda(t - t_\mu) \tag{3}$$

トータルの顧客の数が Q_0 である場合、累積入力流束は以下で与えられる。

$$Q_{in}(t) = \begin{cases} \lambda t & for\ 0 \le t < t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_s \end{cases} \tag{4}$$

ここで t_s is は最後の顧客がサービスを受け始める時刻である。それは、以下で与えられる。

$$t_s = \frac{Q_0}{\lambda} \tag{5}$$

一方、サービスを受け終わって系を退出する人の累積人数 $Q_{out}(t)$ は以下で与えられる。

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} \lambda(t - t_\mu) & for\ t_\mu \le t < t_\mu + t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_\mu + t_s \end{cases} \tag{6}$$

この場合の待ち時間は無い。

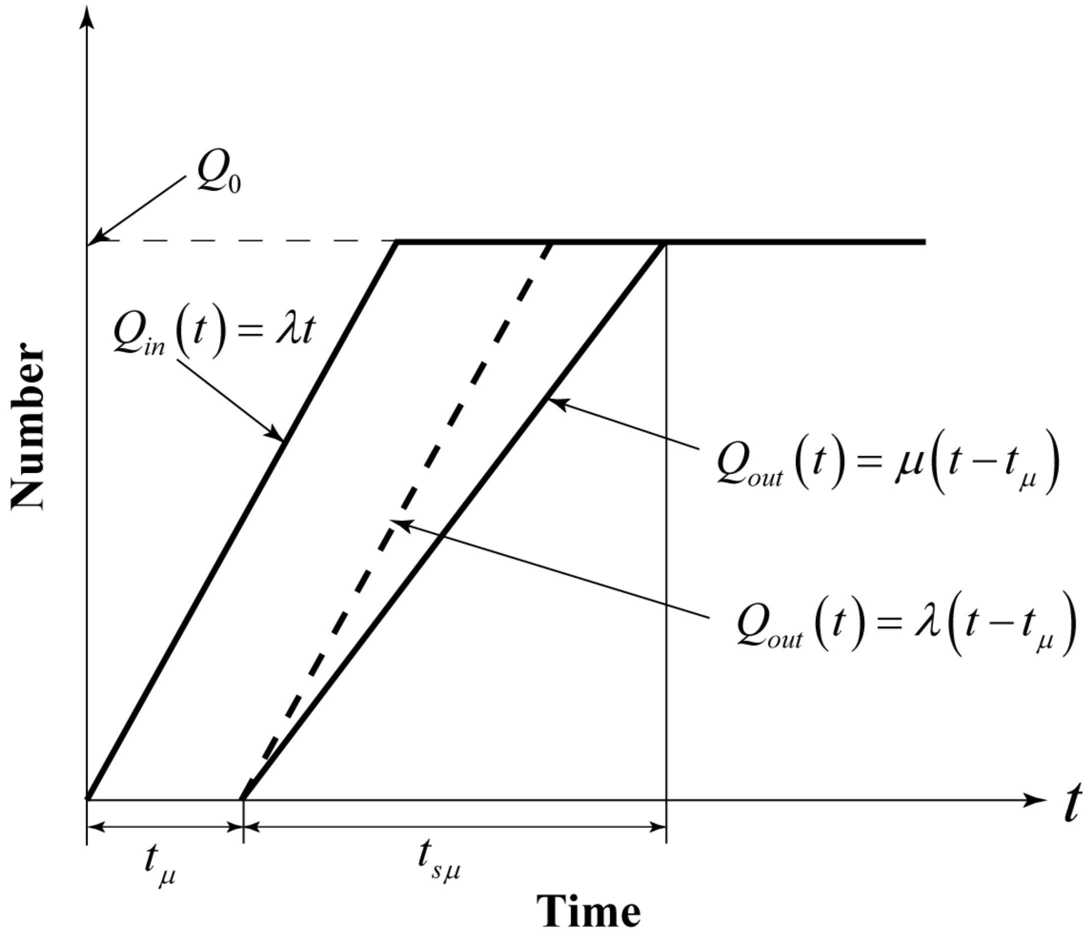

図 3　累積人数の時間依存性。$\lambda > \mu$ の場合

次に $\lambda \geq \mu$ の場合を考える。この場合の模式的な累積図を図 3 に示す。サービス率は訪問頻度より小さいため、出力の累積数は $Q_{out}(t)$ はサービス率に律速され、以下のようになる。

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} \mu(t - t_\mu) & for\ t_\mu \leq t < t_\mu + t_{s\mu} \\ Q_0 & for\ t \geq t_\mu + t_{s\mu} \end{cases} \tag{7}$$

ここで、

$$t_{s\mu} = \frac{Q_0}{\mu} \tag{8}$$

である。点線は累積出力数が入力律速の場合を示してる。

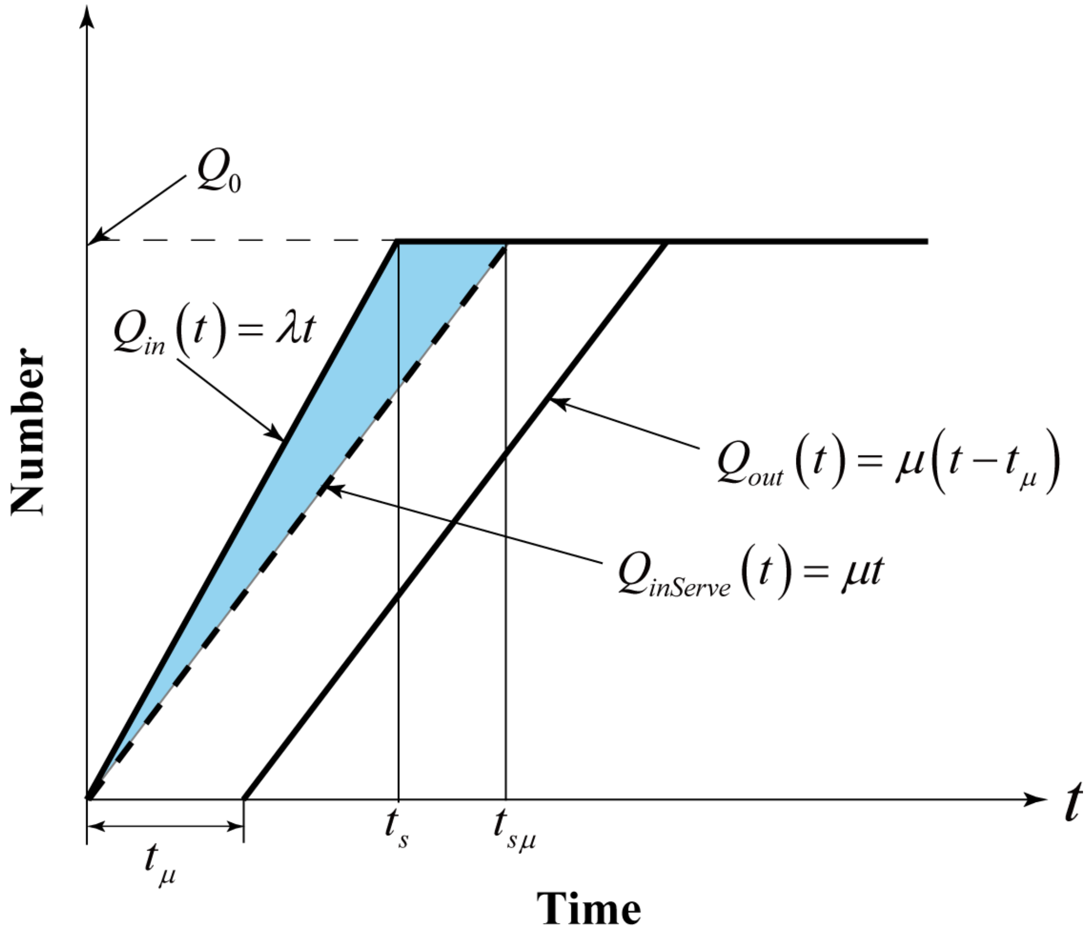

図 4　累積人数の時間依存性の別プロット。$\lambda > \mu$ の場合

我々は図 3 の点線を移動させ、図 4 のように描くこともできる。網掛けしている領域は待っている時間に相当する。それは時間とともに増加している。平均の待ち時間は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
t_w &= \frac{1}{2}\left(t_{s\mu} - t_s\right) \times Q_0 \div Q_0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{\mu} - \frac{Q_0}{\lambda}\right) \times Q_0 \div Q_0 \\
&= \frac{Q_0}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

5.3.　サービス時間の評価

サービス時間の評価には注意が必要である。

サービスをするメンバーA, B, および C を考える。サービスをするメンバーのスキルには差があるとし、それぞれ 10, 20, および 30 分かかるとする。

その平均対応時間は以下である。

$$\langle t_\mu \rangle = \frac{10+20+30}{3} = 20 \text{ min} \tag{10}$$

したがて、サービス率は以下になる。

$$\mu = \frac{1}{\langle t_\mu \rangle} = \frac{1}{20 \text{ min}} \times 60 = 3 \left[\frac{1}{hr} \right] \tag{11}$$

したがって、3 人のサービス率は以下のようになる。

$$s\mu = 3 \times 3 = 9 \ \left[\frac{1}{hr} \right] \tag{12}$$

一方で、1 時間の間にサービスを何人できるかを直接的に評価できる。

A は 6 人、 B は 3 人、 そして C は 2 人である。したがって、トータルで 11 人にサービスできる。これは先の結果と異なる。この違いはどこからきているのだろう？

サービス時間の短いメンバーは単位時間にサービスする人数が多くなる。したがって、単位時間にサービスをできる人数はサービス時間が短いほうが多くなる。先の平均はサービスをする人の人数が等しいと想定していた。ここが違う点である。人数が等しいのではなく、サービスをする時間が等しい状態で評価しなくてはならない。それにはどうすればいいのであろうか？それは、

メンバーA, B, および C のサービス時間を t_A, t_B, およびt_C と置く。対応するサービス率は以下となる。

$$\mu_A = \frac{1}{t_A}, \mu_B = \frac{1}{t_B}, \mu_C = \frac{1}{t_c} \tag{13}$$

ここで、平均サービス時間 $\langle t \rangle$ は以下となる。

$$\langle t \rangle = \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} t_A + \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} t_B + \frac{\mu_C}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} t_C \tag{14}$$

ここで、

$$\mu_A t_A = \mu_B t_B = \mu_C t_C = 1 \tag{15}$$

したがって、以下の平均値を得る。

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{3}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C}} \end{aligned} \tag{16}$$

これを変形した

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\langle t \rangle} &= \frac{3}{\mu_A + \mu_B + \mu_C} \\
&= \frac{\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C}}{3}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

を得る。したがって、我々はサービス時間に関しては調和平均を取る必要がある。

サービス率に注目すると以下になる。

$$
\mu = \frac{\mu_A + \mu_B + \mu_C}{3} \tag{18}
$$

つまり、サービス率に関していうと単純な平均となる。

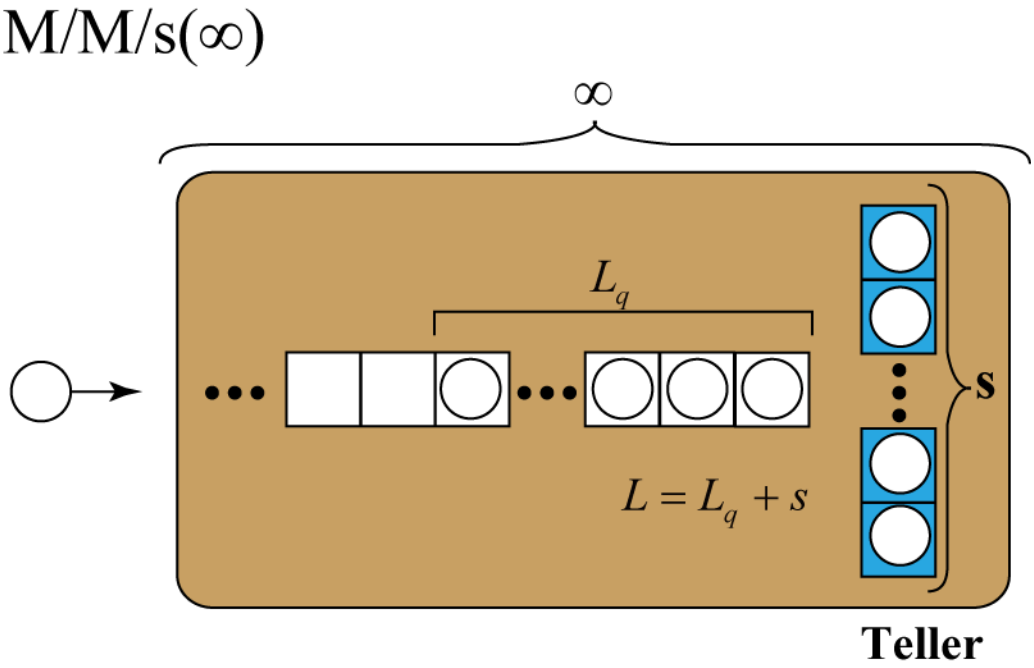

図 5　複数のサービスメンバーの場合の待ち行列の系

5.4. 複数のサービスメンバー

複数のサービスメンバーがいる場合を想定する。

ここでは s 人のサービスメンバーがいるとする。その様相を図 5 に示す。

まず、$\lambda < s\mu$ の場合を考える。

この場合累積入力人数 $Q_{in}(t)$ は以下で与えられる。

$$
Q_{in}(t) = \lambda t \tag{19}
$$

顧客は時間 t_μ のサービスを受け、系から去っていく。ここで、サービス率は入力頻度より

も大きいとしているから、入力律速になっている。したがって、累積出力人数$Q_{out}(t)$は以下で与えられる。

$$Q_{out}(t) = \lambda(t - t_\mu) \tag{20}$$

総顧客人数が Q_0 である場合、我々は以下を得る。

$$Q_{in}(t) = \begin{cases} \lambda t & for\ 0 \le t < t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_s \end{cases} \tag{21}$$

一方、累積出力人数$Q_{out}(t)$ は以下で与えられる。

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} \lambda(t - t_\mu) & for\ t_\mu \le t < t_\mu + t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_\mu + t_s \end{cases} \tag{22}$$

ここでは待ち時間は発生しない。

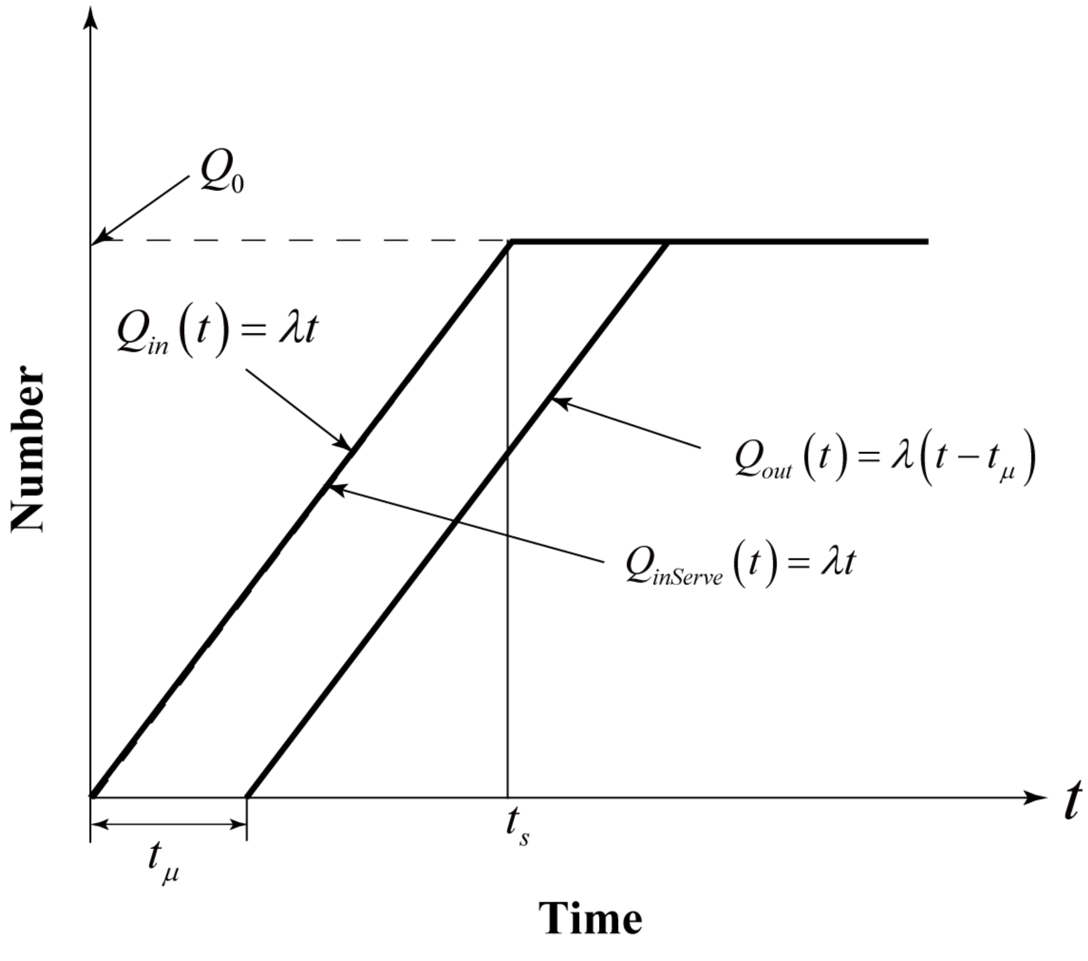

図 6 累積人数の時間依存性。 $\lambda < s\mu$ の場合

次に $\lambda \ge s\mu$ の場合を考える。この場合、入力頻度はサービル率より大きいから、サービ

ス率が律速し、累積出力人数は$Q_{out}(t)$以下のようになる。

$$Q_{out}(t)=\begin{cases} s\mu(t-t_\mu) & \text{for } t_\mu \le t < t_\mu+\frac{1}{s}t_{s\mu} \\ Q_0 & \text{for } t \ge t_\mu+\frac{1}{s}t_{s\mu} \end{cases} \tag{23}$$

平均の待ち時間は以下のようになる。

$$\begin{aligned} t_w &= \frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{s\mu}-\frac{Q_0}{\lambda}\right)\times Q_0 \div Q_0 \\ &= \frac{Q_0}{2}\left(\frac{1}{s\mu}-\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

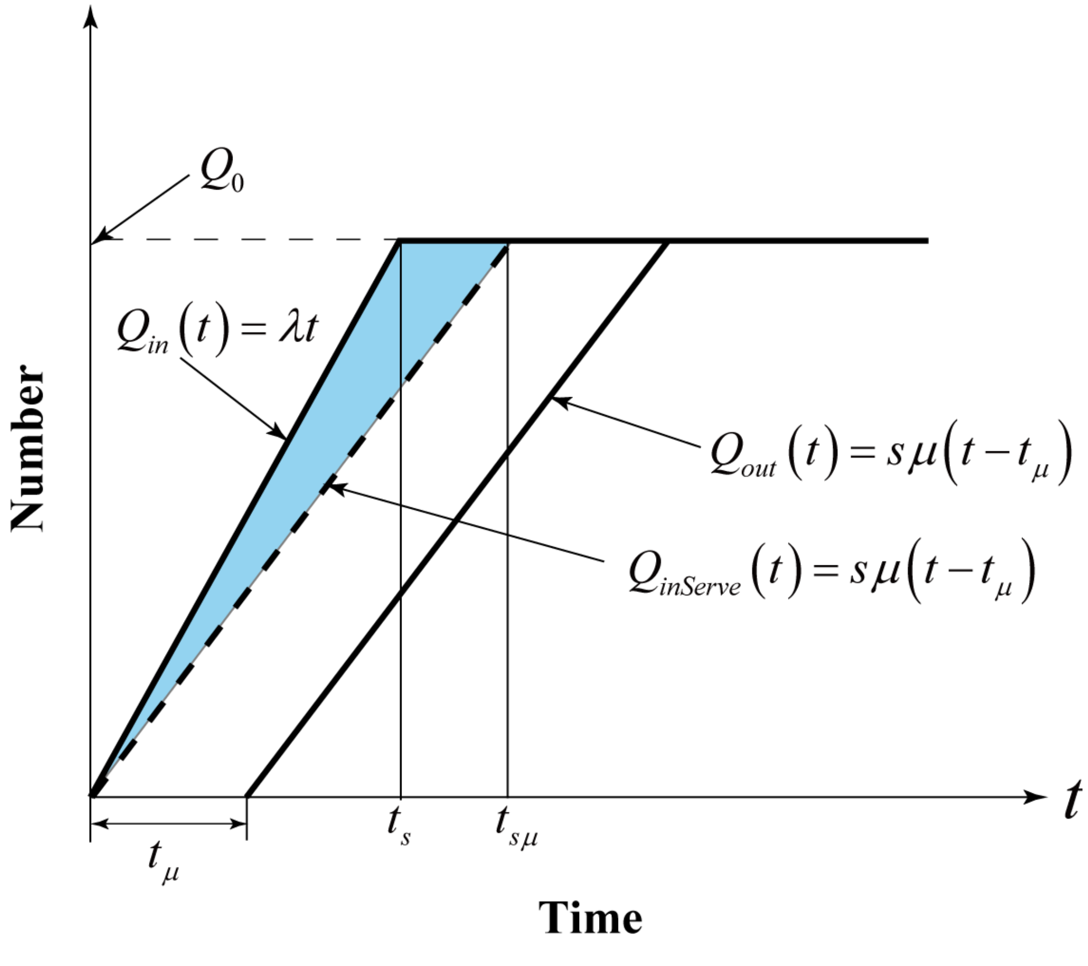

図 7　累積人数の時間依存性。$\lambda > s\mu$ の場合

5.5. 複数のサービスメンバーの場合の一般形

ここまで我々は入力頻度、サービス率は一定であると仮定してきた。しかし、これらは一般に変動する。この変動する一般の場合をことでは扱う。

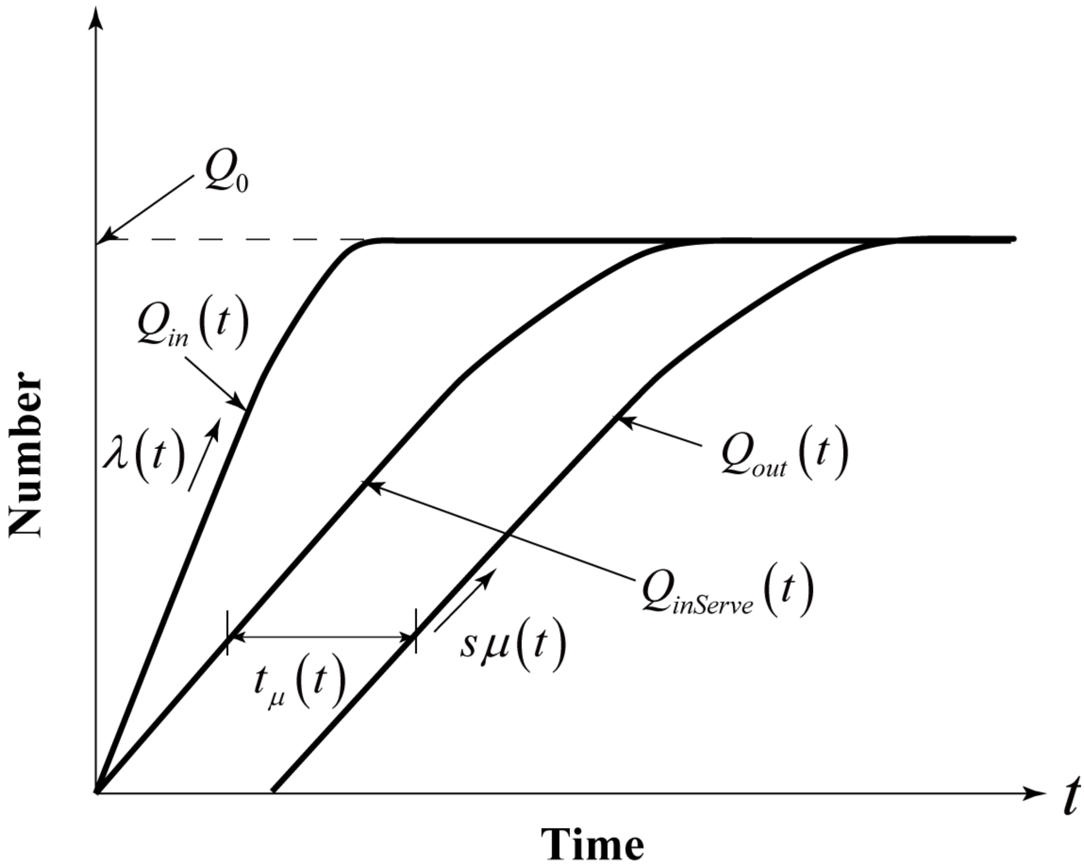

図 8　s 人の tellers の場合の累積流入と流出。$\lambda > \mu$ を仮定している

累積入力人数、サービス開始人数、出力人数を図 8 に示す。実際の状況からこのようなデータを得ることができる。このようなデータから何を引き出すことができるのかを検討する。

この図から訪問頻度の時間依存性を以下のように導出できる。

$$\lambda(t) = \frac{dQ_{in}(t)}{dt} \tag{25}$$

出力の曲線の傾き、つまり微分から、以下のようなパラメータを評価できる。

$$s\mu(t) = \frac{dQ_{out}(t)}{dt} \tag{26}$$

もしサービスメンバーの数 s を知っていればサービス率は以下のように評価できる。

$$\mu(t) = \frac{1}{s}\frac{dQ_{out}(t)}{dt} \tag{27}$$

次に図 9 に示すように図の横方向を考える。同じ累積数は同じメンバーであることを意味する。したがって、横方向はある人の履歴をトレースしていることになる。ある顧客は時刻 t で系に入り、t_w の時間サービスを待ち、t_μ 時間のサービスを受け、系を去って行く。し

たがって、横軸の各線分の長さは対応する時間になる。すなわち、以下となる。

$$t_\mu(y) = t(Q_{out}(y)) - t(Q_{inServ}(y)) \tag{28}$$

$$t_w(y) = t(Q_{inServ}(y)) - t(Q_{in}(y)) \tag{29}$$

サービス時間 t_μ は逆数をとればサービス率 μ になる。したがって、我々はデータから二つの方法でサービス率を評価できる

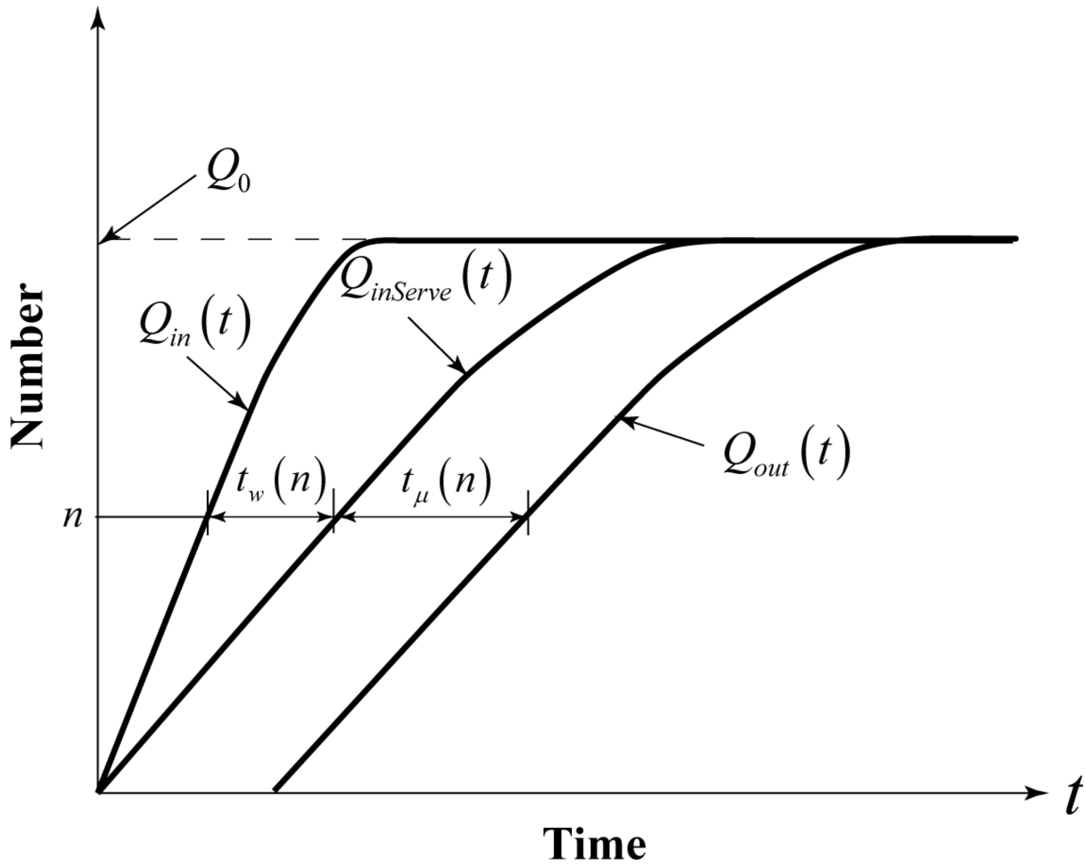

図 9　複数のサービスメンバーの場合の流入と流出の関係。横軸に注目している

次に図 10 に示すように累積グラフの縦方向を考える。入力累積人数と出力人数の差はその時刻における系の人数に相当する。入力とサービス開始人数の差は待っている顧客に人数に相当する。

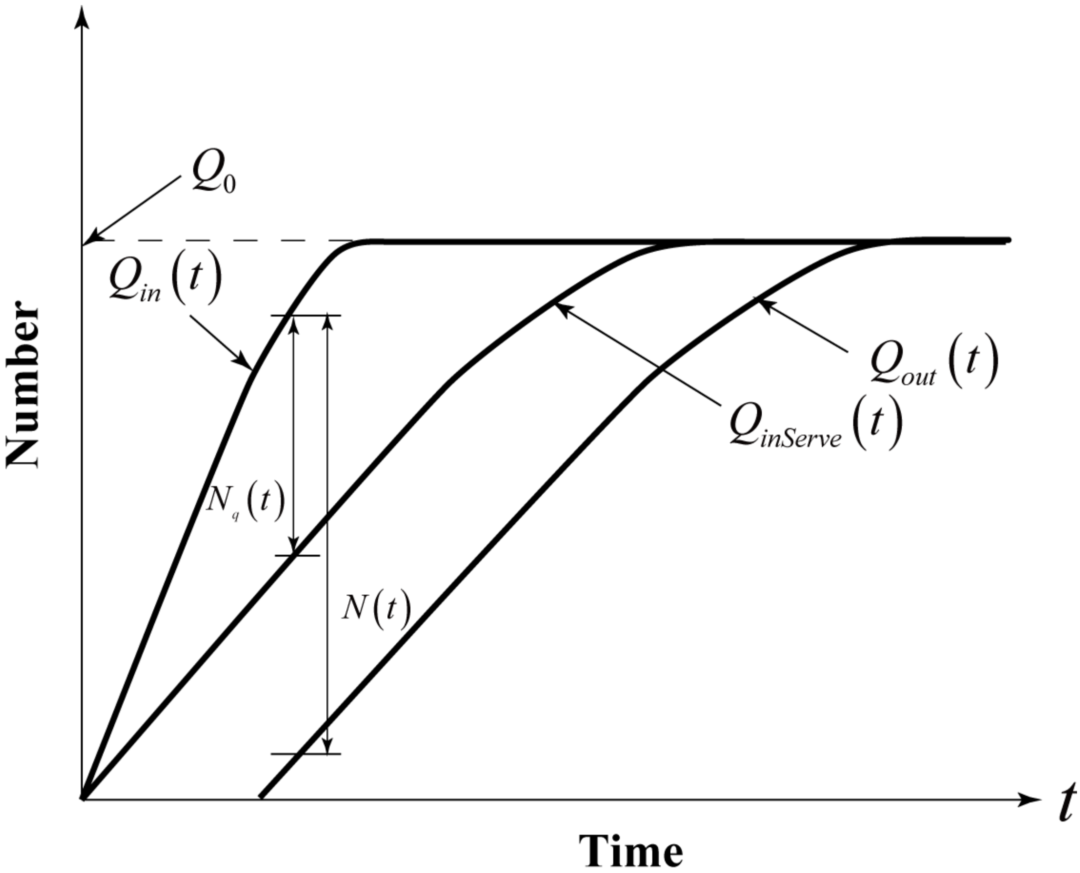

図 10　累積グラフからの様々な人数の抽出。$\lambda > s\mu$ の場合を想定している

最後に平均値の評価をする。図 11 には様々な領域の面積が示されている。

平均の系への滞在時間 W と待ち時間 W_q は以下のように与えられる。

$$W = \frac{S_w + S_\mu}{Q_0} \tag{30}$$

$$W_q = \frac{S_w}{Q_0} \tag{31}$$

時刻 t における顧客の系にいる人数 $N(t)$、待っている人数 $N_q(t)$ は以下のように与えられる。

$$N(t) = Q_{in}(t) - Q_{out}(t) \tag{32}$$

$$N_q(t) = Q_{in}(t) - Q_{inServe}(t) \tag{33}$$

したがって、系にいる平均人数L、系にいる平均待ち人数L_qは以下のように評価される。

$$L = \frac{S_w + S_\mu}{T_{tot}} \tag{34}$$

$$L_q = \frac{S_w}{T_{tot}} \tag{35}$$

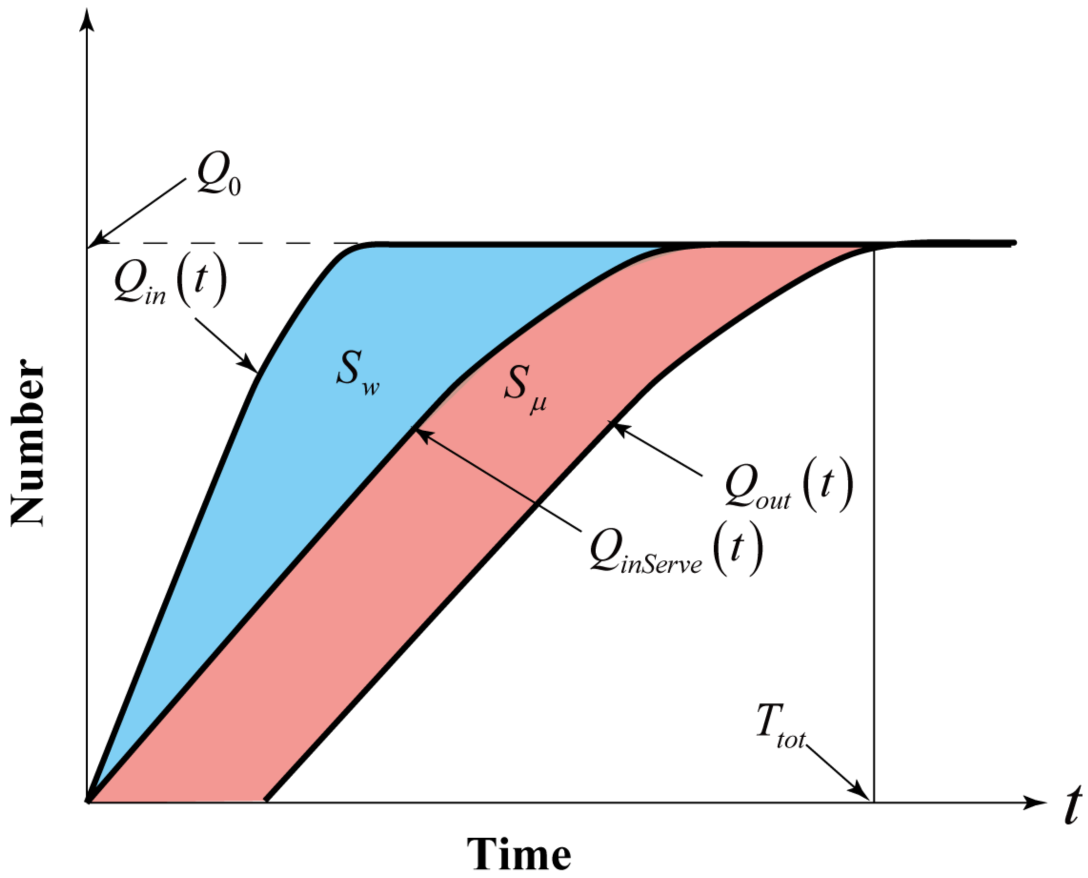

図 11　系におけるさまざまな領域の面積

5.6.　2 種類の業務

ここまでは 1 種類の業務を扱ってきた。しかし、全く別の種類の業務を扱う場合がある。このことを理論にどのように取り込むのかを考える。

二つの種類の入力を考える。それを A および B と置き、対応する入力頻度をλ_A および λ_Bとする。また、メンバー1 と 2 がおり、その対応するスキルが異なる、すなわち対応する時間も異なるとする。すなわち、そのサービス率を$\mu_{A1}, \mu_{A_2}, \mu_{B1}$, μ_{B2}とする。

トータルの入力頻度λは以下で与えられる。

$$\lambda = \lambda_A + \lambda_B \tag{36}$$

一方、トータルのサービス頻度は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} 2\mu &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\mu_{A1} + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\mu_{B1} \\ &\quad + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\mu_{A2} + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\mu_{B2} \end{aligned} \tag{37}$$

ここで、μは一人あたりのサービス率である。したがって、それは以下となる。

$$\mu = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\frac{\mu_{A1} + \mu_{A2}}{2} + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\frac{\mu_{B1} + \mu_{B2}}{2} \tag{38}$$

一人の顧客に対してはサービス時間は以下のように評価される。

$$\tau = \frac{1}{\mu} \tag{39}$$

5.7. 様々な業務さまざまなスキル

ここでは m 種類のサービスがで、 l 種類のスキルレベルの場合を考える。
トータルの方も雲頻度は以下である。

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \end{aligned} \tag{40}$$

トータルのサービスメンバーはs人おり、l種類のレベルに分かれるとする。すなわち

$$s = n_1 + n_2 + \cdots + n_l \tag{41}$$

である。

種類 i のスキルレベルj のサービス率を μ_{in_j} と置くと、トータルのサービス率は

$$
\begin{aligned}
s\mu = & n_1\left[\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{1n_1} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{2n_1} + \cdots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{mn_1}\right] \\
& +n_2\left[\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{1n_2} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{2n_2} + \cdots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{mn_2}\right] \\
& \cdots \\
& +n_l\left[\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{1n_l} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{2n_l} + \cdots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\mu_{mn_l}\right] \\
= & \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} n_j \lambda_i \mu_{in_j}}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

したがって、一人のメンバーのサービス率は以下になる。

$$
\mu = \frac{1}{s}\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} n_n \lambda_i \mu_{in_j}}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i} \tag{43}
$$

5.8. まとめ

この章のまとめをする。

累積入力人数$Q_{in}(t)$は以下のように与えられる。

$$
Q_{in}(t) = \lambda t
$$

トータル系への訪問人数をQ_0とすると、累積入力人数は以下となる。

$$
Q_{in}(t) = \begin{cases} \lambda t & for\ 0 \le t < t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_s \end{cases}
$$

最初に $\lambda < s\mu$ のが合いを考える。

この場合は、累積出力人数 $Q_{out}(t)$ は以下のように与えられる。

$$
Q_{out}(t) = \begin{cases} \lambda(t - t_\mu) & for\ t_\mu \le t < t_\mu + t_s \\ Q_0 & for\ t \ge t_\mu + t_s \end{cases}
$$

この場合は待ち時間はない。

次に$\lambda \ge s\mu$の場合を考える。

この場合の、累積出力人数 $Q_{out}(t)$ は以下で与えられる。

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} s\mu(t - t_\mu) & for\ t_\mu \le t < t_\mu + \frac{1}{s} t_{s\mu} \\ Q_0 & for\ t \ge t_\mu + \frac{1}{s} t_{s\mu} \end{cases}$$

平均の待ち時間は以下になる。

$$t_w = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{s\mu} - \frac{Q_0}{\lambda}\right) \times Q_0 \div Q_0$$

$$= \frac{Q_0}{2}\left(\frac{1}{s\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

入力頻度やサービス時間が変動する一般の場合でも累積人数の図を得ることができる。この場合、入力頻度は以下で与えられる。

$$\lambda(t) = \frac{dQ_{in}(t)}{dt}$$

累積出力人数のデータから、以下を得ることができる。

$$s\mu(t) = \frac{dQ_{out}(t)}{dt}$$

もしも、サービスメンバーの数sがわかって、いればサービス率が評価でき、以下になる。

$$\mu(t) = \frac{1}{s}\frac{dQ_{out}(t)}{dt}$$

系の中にいる人数$N(t)$、待っている人数$N_q(t)$はグラフから以下のように求めることができる。

$$N(t) = Q_{in}(t) - Q_{out}(t)$$

$$N_q(t) = Q_{in}(t) - Q_{inServe}(t)$$

また、サービスを受けている時間、いわゆるサービス時間は以下のように評価できる。

$$t_\mu(y) = t(Q_{out}(y)) - t(Q_{inServ}(y))$$

待っている時間は以下のように評価できる。

$$t_w(y) = t(Q_{inServ}(y)) - t(Q_{in}(y))$$