

16. 過渡待ち行列理論

概要: 待ち行列理論においては、我々は通常は定常状態を仮定する。すなわち、時間が長時間経過した場合の平均値を評価している。しかしながら、通勤や、通学で我々はラッシュアワーを経験する。レストランでは昼時が混む。これらの場合では、やって来る顧客の数は時々刻々変わるか、ある期間でピークを持つ。つまり、定常状態を仮定できない。オリジナルの待ち行列理論は定常状態を仮定していない。したがって、このような状況にも適用できる。しかしながら、もはや解析解を得ることはできない。オリジナルの待ち行列理論を数値的に解く方法をここでは議論する。

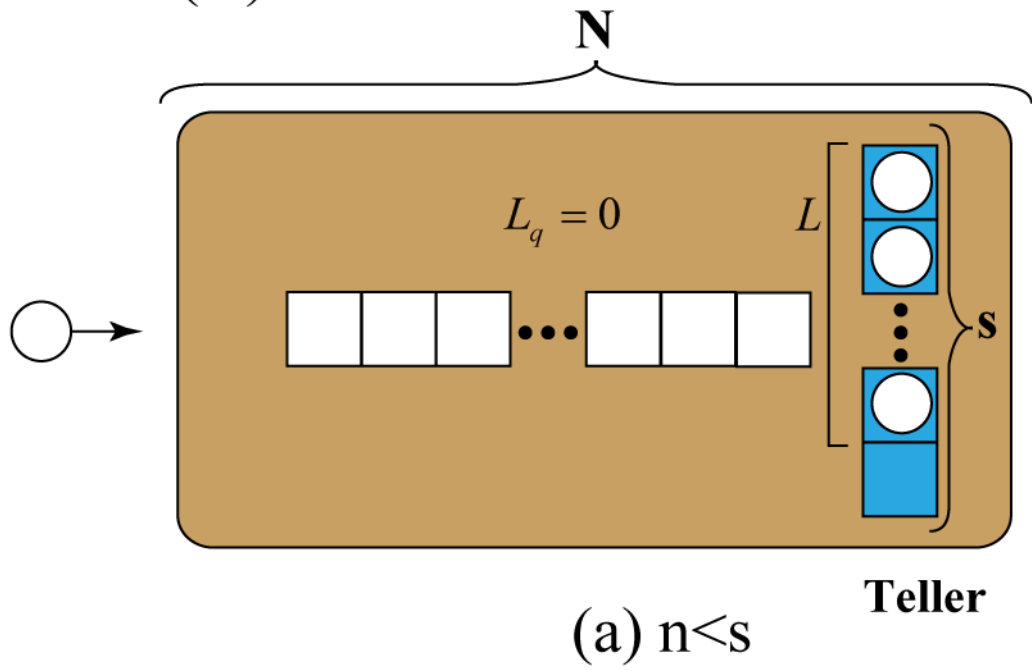
キーワード: 待ち行列理論; 数値解析; 過渡解

16.1. 序

朝や夕方、通勤や通学の電車にはラッシュアワーがある。また、レストランや銀行の窓口は昼に混む。また、病院の待合室では、開院前に患者が多数訪れている。このように、系を訪問する顧客の数は、時間的に一定でない場合が多い。ところが、これまで解析してきた待ち行列理論では、長時間の平均を取る定常状態を仮定している。このため、入力より出力が少ない場合は、時間とともに顧客の数が増えていき無限大になる。このため、定常状態はない。このため、このような状況は解析できなかった。しかし、入力より出力が少ない場合でも、その期間が短ければ、その増加量は有限になり、扱うことができる。オリジナルの待ち行列理論はこの定常状態を仮定していない。定常状態は解析解を得るために仮定している。したがって、この定常状態の仮定をはずせば、オリジナルな待ち行列理論で入力の顧客の訪問頻度が一定でない場合、その頻度が出力頻度よりも多い場合でも解析できる。しかし、この場合は解析解を得ることはできなく、数値的に解を求めることになる。ここでは、その数値解を得る方法を議論する。

待ち行列理論の基本は $M/M/s(\infty)$ であるが、数値解では無限の人数がいる状態を解析できない。したがって、その対象とする系は $M/M/s(N)$ である。 N を十分大きく取れば、それは $M/M/s(\infty)$ と等価になる。ここでは、 $M/M/s(N)$ のモデルを見直し、それを数値的に解いていく。

M/M/s(N)



M/M/s(N)

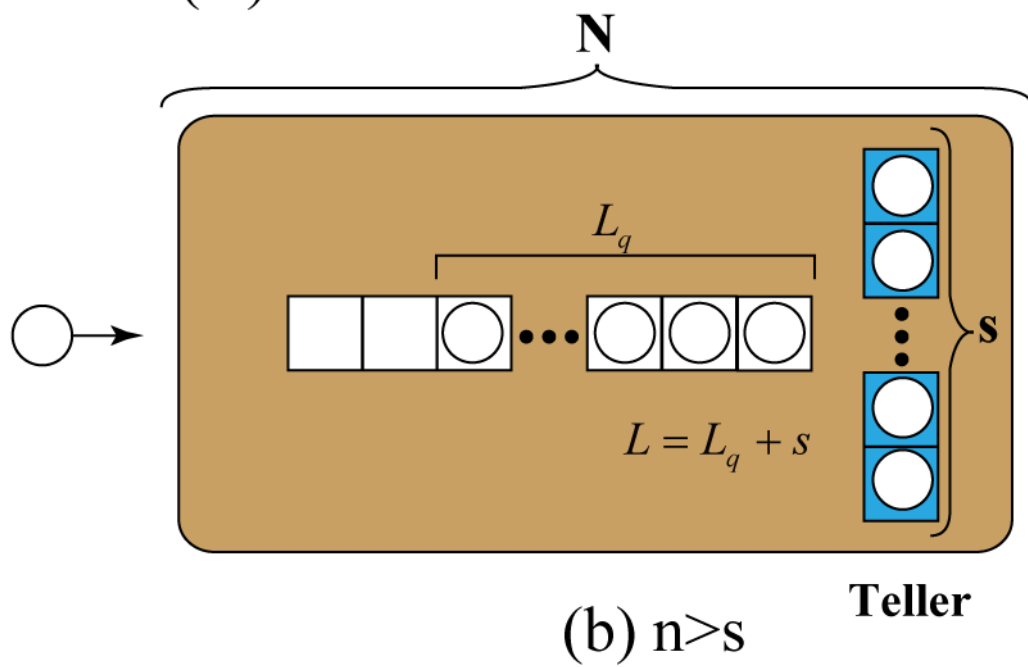
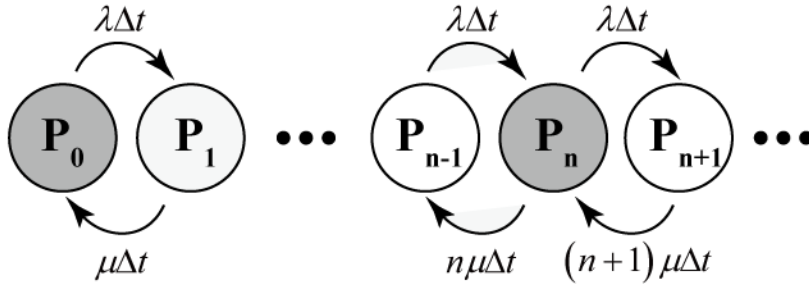


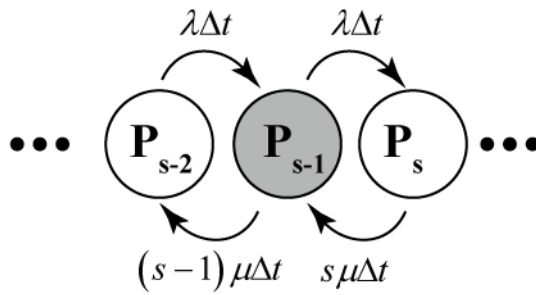
図 1 $M/M/s(N)$ の系。(a) $n < s$ (b) $n > s$

M/M/s(N)



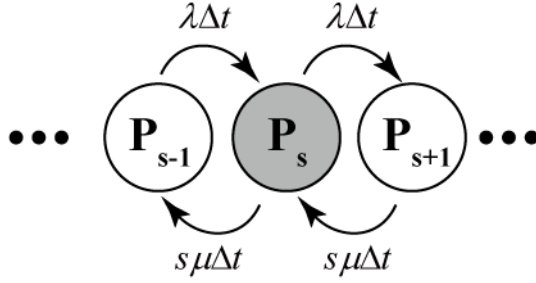
(a) $n < s$

M/M/s(N)



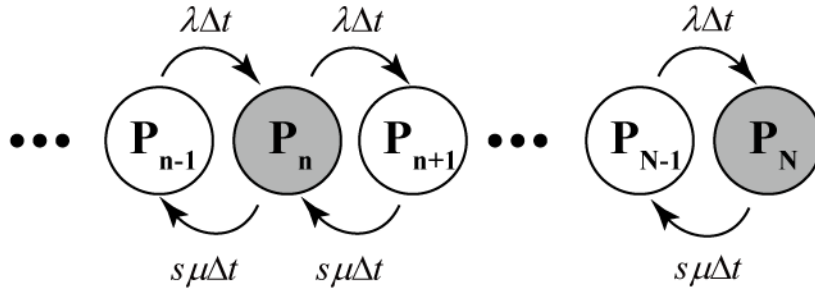
(b) $n = s-1$

M/M/s(N)



(c) $n = s$

M/M/s(N)



(d) $n \geq s$

図 2 M/M/s(N)における状態確率の遷移。(a) $n < s-1$, (b) $n = s-1$, (c) $n = s$, (d) $n \geq s$

16.2. 基礎方程式

ここで、M/M/s(N)に対する基礎方程式を再掲する。

図 1 に系の模式図を示す。

ここで以下の状態を確率を定義する。

$$P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t), \dots, P_N(t) \quad (1)$$

これは、系に顧客が $0, 1, 2, \dots, n, \dots, N$ 人いる状態に対する確率である。

図 2 に状態遷移図を示す。

系にいる人数が窓口サービスメンバー数 s より多いか少ないかで状況は変わるので、分けて考える。

時間が t から Δt 経過した場合の状態確率は以下のように与えられる。

(a) $n < s$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) + \mu \Delta t P_1(t) - \lambda \Delta t P_0(t) \quad (2)$$

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) + 2\mu \Delta t P_2(t) + \lambda \Delta t P_0(t) - (\mu + \lambda) \Delta t P_1(t) \quad (3)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + (n+1)\mu \Delta t P_{n+1}(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) - [n\mu + \lambda] \Delta t P_n(t) \quad (4)$$

...

$$P_{s-1}(t + \Delta t) = P_{s-1}(t) + s\mu \Delta t P_s(t) + \lambda \Delta t P_{s-2}(t) - [(s-1)\mu + \lambda] \Delta t P_{s-1}(t) \quad (5)$$

(b) $n \geq s$

$$P_s(t + \Delta t) = P_s(t) + s\mu \Delta t P_{s+1}(t) + \lambda \Delta t P_{s-1}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_s(t) \quad (6)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + s\mu \Delta t P_{n+1}(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_n(t) \quad (7)$$

...

$$P_{N-1}(t + \Delta t) = P_{N-1}(t) + s\mu \Delta t P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-2}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_{N-1}(t) \quad (8)$$

$$P_N(t + \Delta t) = P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-1}(t) - s\mu \Delta t P_N(t) \quad (9)$$

16.3. 初期条件

定常状態解析においては、長時間経過した後の時間に依存しない解を解析していたから、初期条件は不要であった。しかし、数値解では、定常状態を仮定しないため、初期条件を設定する必要がある。

初期条件は任意である。ここでは、三つの典型的な例を挙げて置く。

(a) $P_i(0) = 1, P_{n \neq i}(0) = 0$

これは、系に i 人の顧客がいるということを表している。

(b) $P_i(0) = r_i$

これは、系に i 人の顧客がいる確率が r_i ということを表している。これは、(a)をさらに一般化したものになっている。この場合は、

$$\sum_{i=0}^N r_i = 1 \quad (10)$$

である必要がある。

$$(c) \ P_i(0) = P_i^*$$

これは、ある仮定した入力と出力の定常状態の確率 P_i^* から始める、というものである。この場合は、あるある仮定した入力と出力の定常状態があるという仮定がはいる。

したがって、通常は初期条件としては(b)を用いる。

16.4. 修正オイラー法

数値解析においては、初期条件を与えれば、次のステップの状態確率は式によって次々に計算されていく。それで問題無いように思える。しかし、数値解析においては、ある有限の Δt を仮定しており、その計算結果中には誤差が含まれる。その誤差が蓄積されていくと、長いステップの後の結果の精度は計算が進むにつれ悪くなる可能性がある。

上の計算で大きな蓄積誤差を生む可能性のあるのは、以下である。

待ち行列理論では、次の状態は現在の状態のみに決まる、という仮定をしている。これは、それほど大きな問題ではない。問題となるのは、次の状態への変化は現在の状態から評価される変化率で決まる、として評価していることである。この時間間隔での変化は最初は精度が高いだろうが、計算の終点においては、別の状態になっているだろうから、違う変化率になっているはずである。こここのところに誤差が含まれる。この誤差の符号が正負になれば、ならされていくだろうが、一定方向の場合は、その誤差が蓄積されていく。この様相を図 3 に示す。

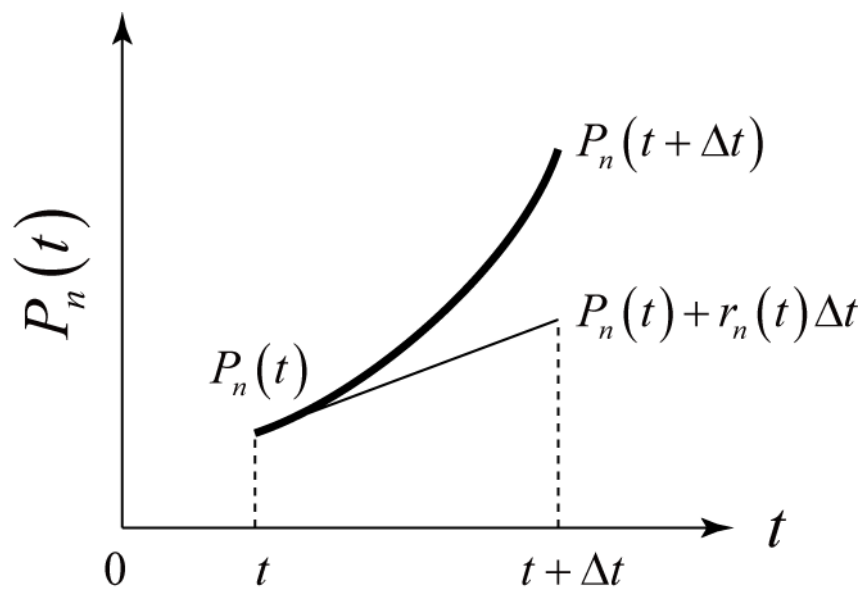


図 3 通常の数値解析の問題点

この問題を回避する方法として修正オイラー法が提案された。対応するプロセスを図 4 に示す。とりあえず、次の状態の計算をして、それを求める。しかし、それを最終的な答えとしない。

すると、現在の値から評価される変化率、次の状態から評価される変化率の二つが求まる。計算する時間間隔の中での変化率はその平均とする。その仮定を用いて、再度現在の値から新たに評価した変化率で次の状態を求める。これを最終の値とする。

ここでは、以上の修正オイラー法はどのようになるのかを具体的に示す。

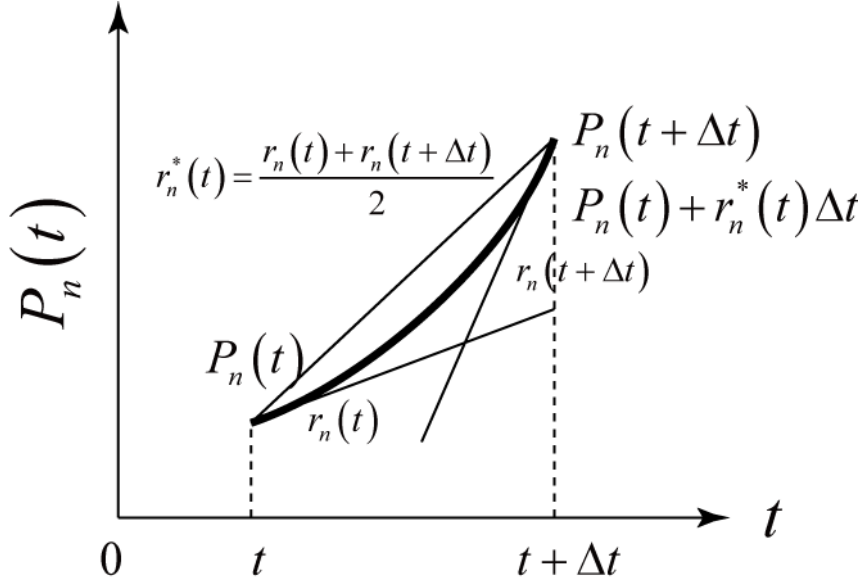


図 4 通常の数値解析の問題点を克服する修正オイラー法。図では、 $r_n(t + \Delta t)$ を計算する場合の $P_n(t + \Delta t)$ を正確なものとしているが、実際の計算ではこれと異なり tentative なものを利用している

まず、以下の式で次の状態を計算する。

(a) $n < s$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) + \mu \Delta t P_1(t) - \lambda \Delta t P_0(t) \quad (11)$$

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) + 2\mu \Delta t P_2(t) + \lambda \Delta t P_0(t) - (\mu + \lambda) \Delta t P_1(t) \quad (12)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + (n+1)\mu \Delta t P_{n+1}(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) - [n\mu + \lambda] \Delta t P_n(t) \quad (13)$$

...

$$P_{s-1}(t + \Delta t) = P_{s-1}(t) + s\mu \Delta t P_s(t) + \lambda \Delta t P_{s-2}(t) - [(s-1)\mu + \lambda] \Delta t P_{s-1}(t) \quad (14)$$

(b) $n \geq s$

$$P_s(t + \Delta t) = P_s(t) + s\mu \Delta t P_{s+1}(t) + \lambda \Delta t P_{s-1}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_s(t) \quad (15)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + s\mu \Delta t P_{n+1}(t) + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_n(t) \quad (16)$$

...

$$P_{N-1}(t + \Delta t) = P_{N-1}(t) + s\mu \Delta t P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-2}(t) - (s\mu + \lambda) \Delta t P_{N-1}(t) \quad (17)$$

$$P_N(t + \Delta t) = P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-1}(t) - s \mu \Delta t P_N(t) \quad (18)$$

現在の傾きは、先の状態の式を変形して以下で計算できる。

(a) $n < s$

$$r_0(t) = \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \quad (19)$$

$$r_1(t) = \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = 2\mu P_2(t) + \lambda P_0(t) - (\mu + \lambda)P_1(t) \quad (20)$$

...

$$r_n(t) = \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) - (n\mu + \lambda)P_n(t) \quad (21)$$

...

$$r_{s-1}(t) = \frac{P_{s-1}(t + \Delta t) - P_{s-1}(t)}{\Delta t} = s\mu P_s(t) + \lambda P_{s-2}(t) - [(s-1)\mu + \lambda]P_{s-1}(t) \quad (22)$$

(b) $n \geq s$

$$r_s(t) = \frac{P_s(t + \Delta t) - P_s(t)}{\Delta t} = s\mu P_{s+1}(t) + \lambda P_{s-1}(t) - (s\mu + \lambda)P_s(t) \quad (23)$$

...

$$r_n(t) = \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = s\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) - (s\mu + \lambda)P_n(t) \quad (24)$$

...

$$r_{N-1}(t) = \frac{P_{N-1}(t + \Delta t) - P_{N-1}(t)}{\Delta t} = s\mu P_N(t) + \lambda P_{N-2}(t) - (s\mu + \lambda)P_{N-1}(t) \quad (25)$$

$$r_N(t) = \frac{P_N(t + \Delta t) - P_N(t)}{\Delta t} = \lambda P_{N-1}(t) - s\mu P_N(t) \quad (26)$$

次の時間ステップにおける傾きは以下となる。

(a) $n < s$

$$r_0(t + \Delta t) = \mu P_1(t + \Delta t) - \lambda P_0(t + \Delta t) \quad (27)$$

$$r_1(t + \Delta t) = 2\mu P_2(t + \Delta t) + \lambda P_0(t + \Delta t) - (\mu + \lambda)(t + \Delta t) \quad (28)$$

...

$$r_n(t + \Delta t) = (n+1)\mu P_{n+1}(t + \Delta t) + \lambda P_{n-1}(t + \Delta t) - (n\mu + \lambda)P_n(t + \Delta t) \quad (29)$$

...

$$r_{s-1}(t+\Delta t) = s\mu P_s(t+\Delta t) + \lambda P_{s-2}(t+\Delta t) - [(s-1)\mu + \lambda]P_{s-1}(t+\Delta t) \quad (30)$$

(b) $n \geq s$

$$r_s(t+\Delta t) = s\mu P_{s+1}(t+\Delta t) + \lambda P_{s-1}(t+\Delta t) - (s\mu + \lambda)P_s(t+\Delta t) \quad (31)$$

...

$$r_n(t+\Delta t) = s\mu P_{n+1}(t+\Delta t) + \lambda P_{n-1}(t+\Delta t) - (s\mu + \lambda)P_n(t+\Delta t) \quad (32)$$

...

$$r_{N-1}(t+\Delta t) = s\mu P_N(t+\Delta t) + \lambda P_{N-2}(t+\Delta t) - (s\mu + \lambda)P_{N-1}(t+\Delta t) \quad (33)$$

$$r_N(t+\Delta t) = \lambda P_{N-1}(t+\Delta t) - s\mu P_N(t+\Delta t) \quad (34)$$

よって、 Δt の期間の平均の変化率を以下のように評価する。

(a) $n < s$

$$r_0^* = \frac{r_0(t) + r_0(t+\Delta t)}{2} \quad (35)$$

$$r_1^* = \frac{r_1(t) + r_1(t+\Delta t)}{2} \quad (36)$$

...

$$r_n^* = \frac{r_n(t) + r_n(t+\Delta t)}{2} \quad (37)$$

...

$$r_{s-1}^* = \frac{r_{s-1}(t) + r_{s-1}(t+\Delta t)}{2} \quad (38)$$

(b) $n \geq s$

$$r_s^* = \frac{r_s(t) + r_s(t+\Delta t)}{2} \quad (39)$$

...

$$r_n^* = \frac{r_n(t) + r_n(t+\Delta t)}{2} \quad (40)$$

...

$$r_{N-1}^* = \frac{r_{N-1}(t) + r_{N-1}(t+\Delta t)}{2} \quad (41)$$

$$r_N^* = \frac{r_N(t) + r_N(t+\Delta t)}{2} \quad (42)$$

これから、最終的な次のステップの状態確率を以下のように評価する。

(a) $n < s$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) + r_0^* \Delta t \quad (43)$$

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) + r_1^* \Delta t \quad (44)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + r_n^* \Delta t \quad (45)$$

...

$$P_{s-1}(t + \Delta t) = P_{s-1}(t) + r_{s-1}^* \Delta t \quad (46)$$

(b) $n \geq s$

$$P_s(t + \Delta t) = P_s(t) + r_s^* \Delta t \quad (47)$$

...

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + r_n^* \Delta t \quad (48)$$

...

$$P_{N-1}(t + \Delta t) = P_{N-1}(t) + r_{N-1}^* \Delta t \quad (49)$$

$$P_N(t + \Delta t) = P_N(t) + r_N^* \Delta t \quad (50)$$

以上のプロセスを繰り返していく。

16.5. 数値解析で留意すべき点

ここでは、数値解析で留意すべき点を述べていく。

16.5.1. 時間間隔

数値解積においては、我々は時間間隔を刻むことになる。この間隔の目安になるのは、その時間に起こることが一つだけである、という仮定である。一つの事象が起こる平均時間 t_c は、顧客訪問に関しては

$$t_c = \frac{1}{\lambda} \quad (51)$$

サービスに関しては

$$t_c = \frac{1}{s\mu} \quad (52)$$

である。ここで、我々が扱う λ は一定でない。 μ は通常は一定であろうが、一般には一定でない。したがって、扱う系の時間帯におけるそれらの最大値をとり、

$$t_c = \text{Min} \left[\frac{1}{\lambda_{\max}}, \frac{1}{s_{\max} \mu_{\max}} \right] \quad (53)$$

とする。

この t_c より、十分小さな値を取ればいい。すなわち、

$$\Delta t = \frac{t_c}{\kappa} \quad (54)$$

と設定する。ここでパラメータ κ は 1 より十分大きな値、たとえば 1000 を取る。

16.5.2. トータルの確率の保存

全て確率の和は 1 である。それは、理論上は保証されているが、陽に要請されているわけではないので、数値誤差で保たれていない場合がある。したがって、その修正を毎回のステップで行う。

すべての確率の和 B は以下で与えられる。

$$B = \sum_{n=0}^N P_n(t + \Delta t) \quad (55)$$

したがって、全ての確率の和を求めた後、得られた状態確率にさらに以下の処理を追加する。

$$P_n(t + \Delta t) \rightarrow \frac{1}{B} P_n(t + \Delta t) \quad (56)$$

16.5.3. λ , μ , および s の時間依存性

この数値解析においては、 λ , μ , and s は一定である必要はない。これらに任意の値を許容するデータ形式としてテーブルを利用する。テーブルの値と値の間の時間についてはその内挿値を用いる。

16.5.4. 終端の扱い

系の終了時刻が決まると、系への入力止まる、つまり 0 になる。しかし、その後もサービスを受ける顧客は存在する。つまり、入力が止まる時刻が確定しても、最後の入力者のサービスが終わるまで計算を終了することはできない。この場合、以下の問題が生じる。

入力頻度 λ が 0 の場合を考える。通常の扱いだと、この時間領域での待ち時間が以上に長くなる。いったい、何が起きているのだろうか？

この問題を簡単化するために、 λ は 0 とし、 μ は一定とする。

系にいる顧客の数を L_f とする。

$L_f \geq s$ の領域での変動は以下となる。

$$L(t + \Delta t) = L(t) - s\mu\Delta t \quad (57)$$

これを解くと以下となる。

$$L(t) = L_f \exp(-s\mu t) \quad (58)$$

$L(t) = s$ となる 時間を t_s と置く。すると、以下を得る。

$$t_s = \frac{1}{s\mu} \ln \left(\frac{L_f}{s} \right) \quad (59)$$

この後は以下となる。

$$L(t + \Delta t) = L(t) - L(t)\mu\Delta t \quad (60)$$

これは、以下のように解かれる。

$$L(t) = s \exp[-\mu(t - t_s)] \quad (61)$$

上の結果をまとめると、以下になる。

$$L(t) = \begin{cases} L_f \exp(-s\mu t) & \text{for } t \leq t_s \\ s \exp[-\mu(t - t_s)] & \text{for } t > t_s \end{cases} \quad (62)$$

$L_f < s$ の場合は L は以下のようになる。

$$L(t) = L_f \exp(-\mu t) \quad (63)$$

時間とともに $L(t)$ は 0 に近づいていくが、0 にはならない。一方 $A(t)$ は、一定値になる。したがって、待ち時間は $\lambda = 0$ となつてから、急激に大きくなる。これは、我々は、待ち人数を数値的には連続量と扱っていることに起因する。

この問題を回避するために、以下のように現象を単純化する。

$L_f \geq s$ の場合、以下になると変更する。

$$L(t) = L_f - s\mu t \quad (64)$$

これは $L(t) = s$ までの時間領域で有効である。 $L(t) = s$ になる時間を t_s とすると、

$L(t) = s$ 時間 t_s は以下のようになる。

$$t_s = \frac{L_f - s}{s\mu} \quad (65)$$

$t = t_s$ の状態で、系内の人はすべて窓口に入っている。したがって、時間 $\frac{1}{\mu}$ 経過後には系内の人数は 0 になる。つまり、この時間以降の L の時間変化は $t = t_s$ 以降の L の時間依存性は以下とする。

$$L(t) = s - s\mu(t - t_s) \quad (66)$$

したがって、系に誰もいなくなる時間 t_{end} 以下のように評価される。

$$t_{end} = t_s + \frac{1}{\mu} \quad (67)$$

以上は全時間領域で

$$L(t) = L_f - s\mu t \quad t \leq t_{end} \quad (68)$$

となる。ただし、時間の原点は受付窓口終了時刻にしている。

$L_f < s$ の場合も、受付窓口が終了以前に $L = s$ の状態からこの状態に経過したと考えれば同じ式で表現される。

窓口終了以前から $L_f < s$ の場合は

$$L(t) = L_f - L_f\mu t \quad (69)$$

としなければならないであろう。この場合は終了時にはほとんど定常状態に近いであろうから、この領域は実用的にはあまり重要ではない。したがって、簡単化のため常に式(68)を用いる。

16.6. マクロなパラメータ

数値解析において、マクロなパラメータを以下のように計算する。それは、時事刻々計算する。待ち行列は以下のように評価される。

$$L_q = \sum_{n=1}^{N_{mm}-s} n P_{s+n} \quad (70)$$

待ち人数の分散 V_{L_q} は以下のように評価される。

$$V_{L_q} = \sum_{n=1}^{N_{mm}-s} (n - L_q)^2 P_{s+n} \quad (71)$$

待ち人数の標準偏差 σ_{L_q} は以下のように評価される。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{L_q}} \quad (72)$$

系にいる顧客の人数 L は以下のように評価される。

$$L = \sum_{n=1}^{N_{nm}} nP_n \quad (73)$$

待つ確率 P_w は以下のように評価される。

$$P_w = \sum_{n=s}^{N_{nm}} P_n \quad (74)$$

アイドル率は以下のように評価される。

$$idol\ ratio = \frac{v}{s} \quad (75)$$

稼働していないサービスメンバーの数の平均 v は以下になる。

$$v = \sum_{n=1}^s nP_{s-n} \quad (76)$$

定常状態であれば、待ち時間、系の滞在時間は以下で与えられる。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (77)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (78)$$

しかしながら、ここでは定常状態は仮定できない。このため、次節のように評価する。

16.7. 待ち時間の評価

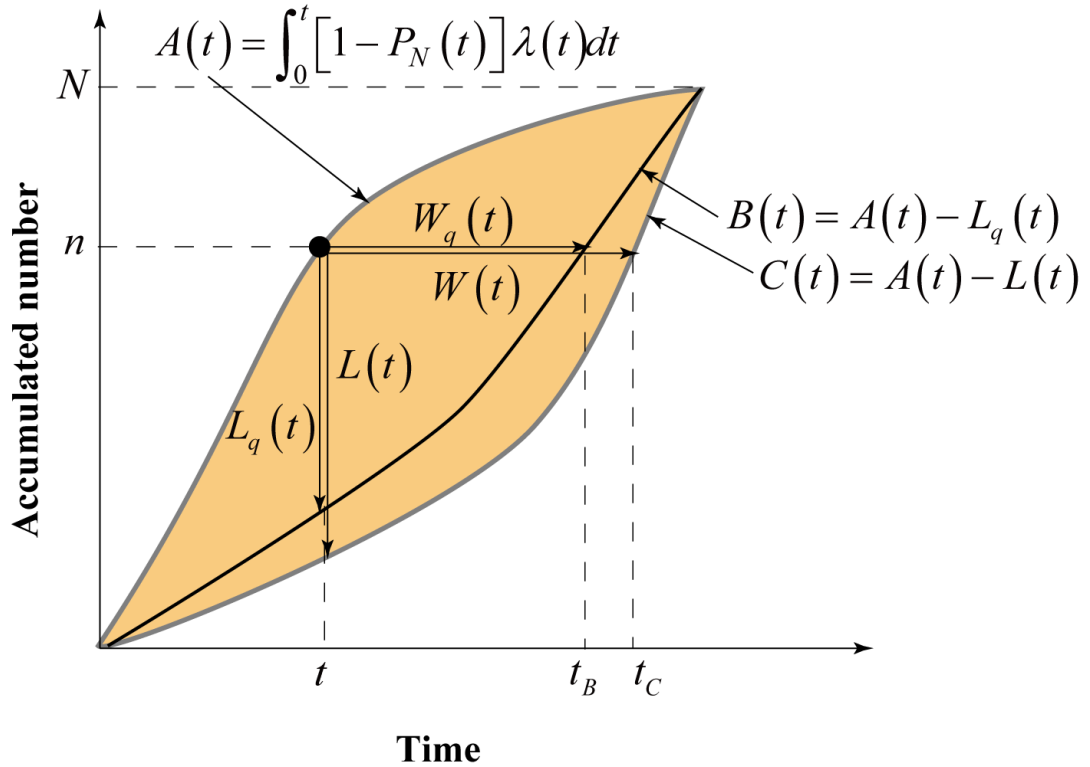


図 5 流入、流出の幾何学的解釈

定常状態が仮定できない場合、我々は図 5 に示すような図から待ち時間を評価する。

累積の訪問人数 $A(t)$ は以下のように評価できる。

$$A(t) = \int_0^t \lambda(t) dt \quad (79)$$

もし、呼損がある場合は、Eq. (79) は以下のように変形しなければならない。

$$A(t) = \int_0^t [1 - P_N(t)] \lambda(t) dt \quad (80)$$

累積の待っている顧客の人数 $B(t)$ は以下のように与えられる。

$$B(t) = A(t) - L_q(t) \quad (81)$$

累積のから出ていく顧客の人数 $C(t)$ は以下のように与えられる。

$$C(t) = A(t) - L(t) \quad (82)$$

累積の顧客の数 n を考える。同じ n は同じ顧客を意味する。すなわち、 n をキープすれば、それは同じ顧客が受けた状況の履歴となる。B および C が n になる時間をそれぞれ t_B, t_C とする。すなわち、

$$B(t_B) = C(t_C) = n \quad (83)$$

t_B および t_C はグラフから読み取ることができる。そして、時間 t に系に入った人の待つ時間、系に滞在する時間を以下のように評価できる。

$$W_q(t) = t_B - t \quad (84)$$

$$W(t) = t_C - t \quad (85)$$

全体の平均は以下ようになる。

$$\langle W_q \rangle = \frac{S_{AB}}{N} \quad (86)$$

$$\langle W \rangle = \frac{S_{AC}}{N} \quad (87)$$

S_{AB} は A と B で囲われた面積、and S_{AC} は A と C で囲われた面積、 N はトータルの系を訪問した顧客の数である。

待ち人数、系にいる人の人数の平均も以下のように評価できる。

$$\langle L_q \rangle = \frac{S_{AB}}{T} \quad (88)$$

$$\langle L \rangle = \frac{S_{AC}}{T} \quad (89)$$

ここで T は最初の顧客が系を訪問してから、最後の顧客のサービスが終わるまでのトータルの時間である。

16.8. レストランでの待ち時間

レストランは昼時に混む。つまり、レストランの場合は、顧客の入力頻度 λ は一定ではない。

λ の時間依存性を図 6 に示す。サービス時間の平均は 6 分とする。したがって、サービス率 $\mu = 10 / hr$ である。料理人の数は 1, 2, または 3 人と時間によって変えている。

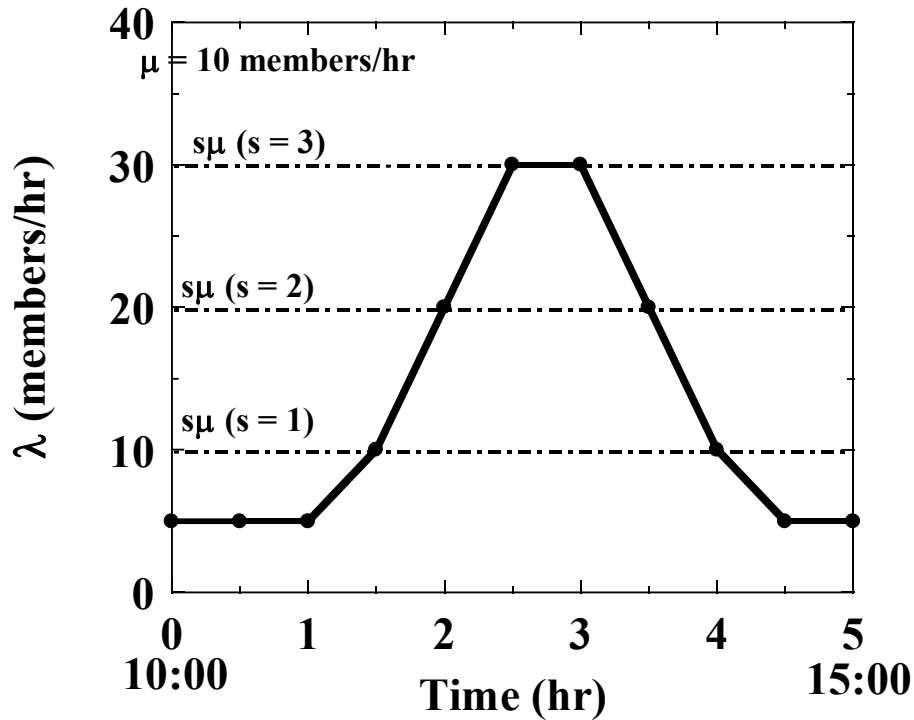


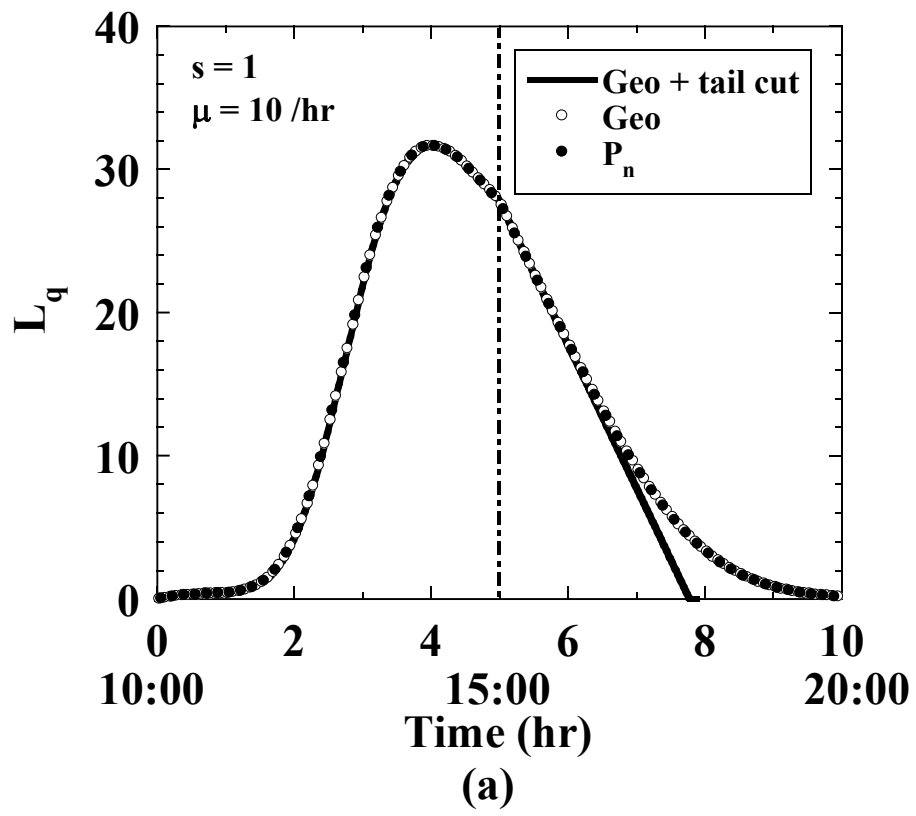
図 6 入力顧客頻度の時間依存性

図 7 に L_q の時間依存性を示す。 $s=1$ としている。

L_q として、三つのやり方で評価している。一つは P_n から評価している。二番めのやり方は幾何学的に求めている。三番目のやり方はテールをカットする終端処理を加えたものである。

ほとんど全ての領域で三つの評価方法は一致しているが、最後の領域ではテールカットの方法のみが異なる。テールカットを取り入れない場合は待ち人数は永遠に 0 にならない。0 にならないがこれは永遠に人がいなくなる、との判断になる。これは L_q にとっては小さな値なのであまり問題にならないが、次に評価する待ち時間に対しては大きな影響を持つ。したがって、トータルの評価で考えると、この場合もテールカットして評価しないと整合性がとれない。

W_q はやりかたによって大きく異なる。まず、 P_n による方法と幾何学的な方法も異なる。 P_n で評価する方法は、我々は λ として訪問時のものを採用している。しかし、それは時間とともに変動してしまう。したがって、それは不正確になる。また、幾何学的に求める場合、それはプロセスの終わりのあたりで以上に大きくなってしまう。したがって、テールカットを考慮した幾何学的に求める方法が望まれる。



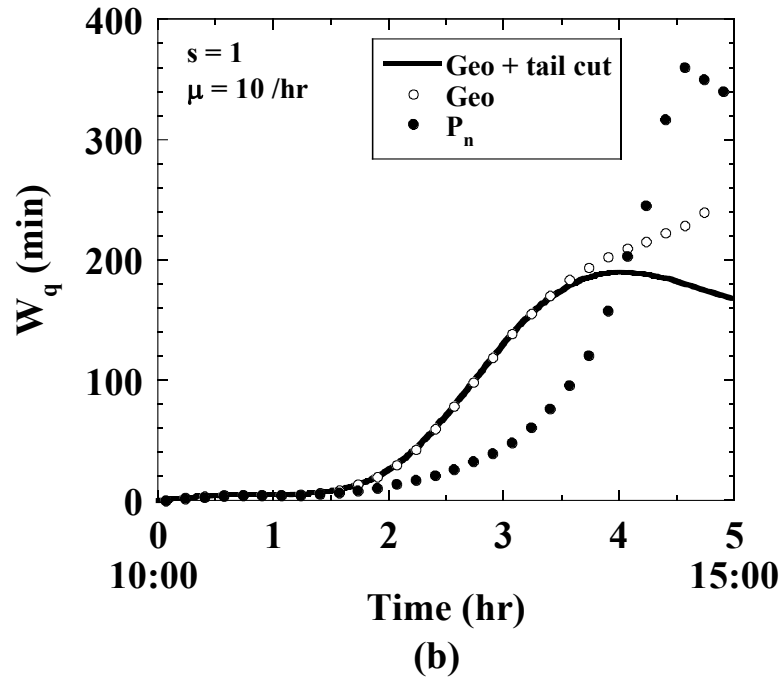
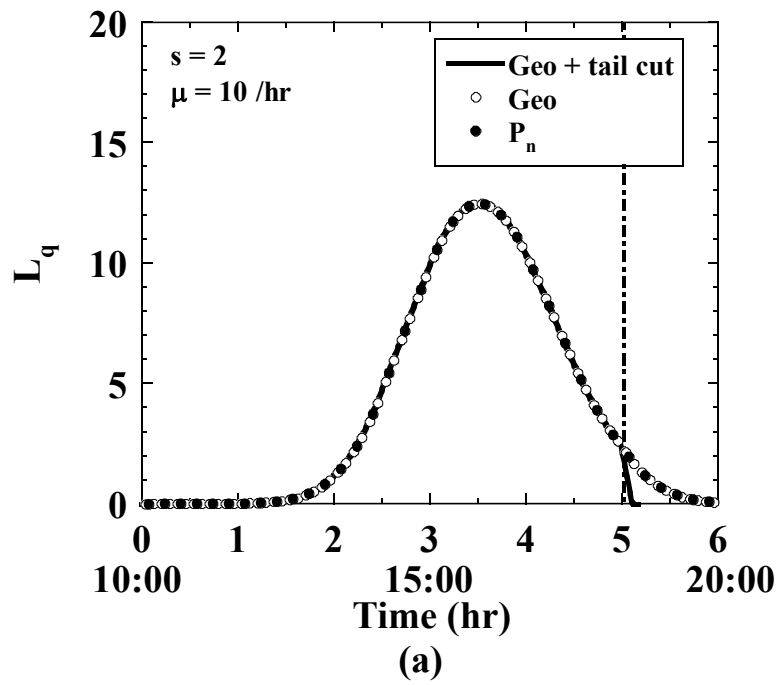


図 7 $s=1$ における各種パラメータの時間依存性の評価 (a) L_q , (b) W_q



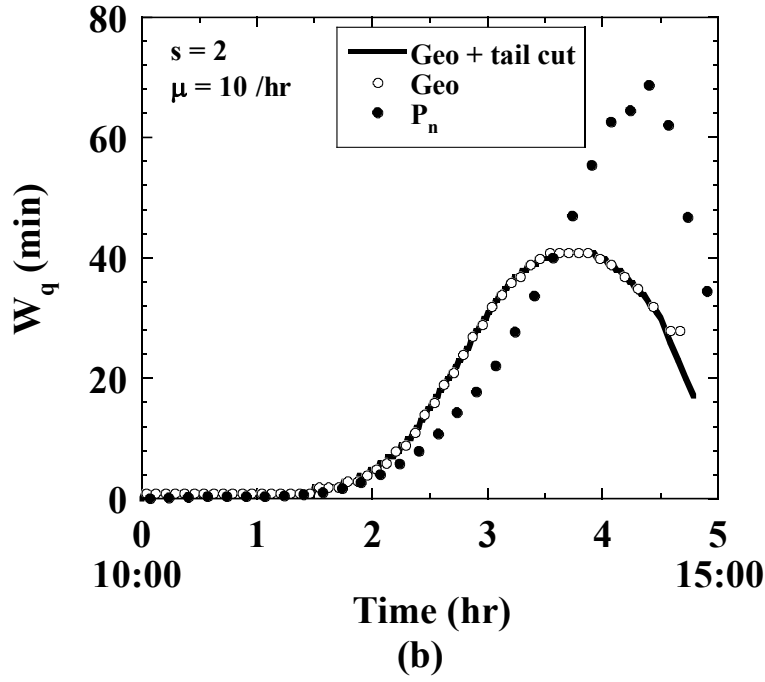


図 8 $s=2$ における各種パラメータの時間依存性の評価 (a) L_q , (b) W_q

図 8 に $s=2$ の場合の結果を示す。

L_q の結果は $s=1$ の場合をほぼ同じである。つまり、我々は正確な評価のためにはテールカットを付与した幾何学的解析が必要である。

W_q の結果も $s=1$ の場合をほぼ同じである。つまり、我々は正確な評価のためにはテールカットを付与した幾何学的解析が必要である。

図 9 に待ち人数、待ち時間で $s=1, 2$, および 3 とした場合のまとめを示している。 $s=1$ の場合をスケールしたものも参考に示している。評価方法は最も正確と思われるテールカットを施した幾何学的評価としている。

我々は s を増やすにつれ小さな L_q を実現できる。

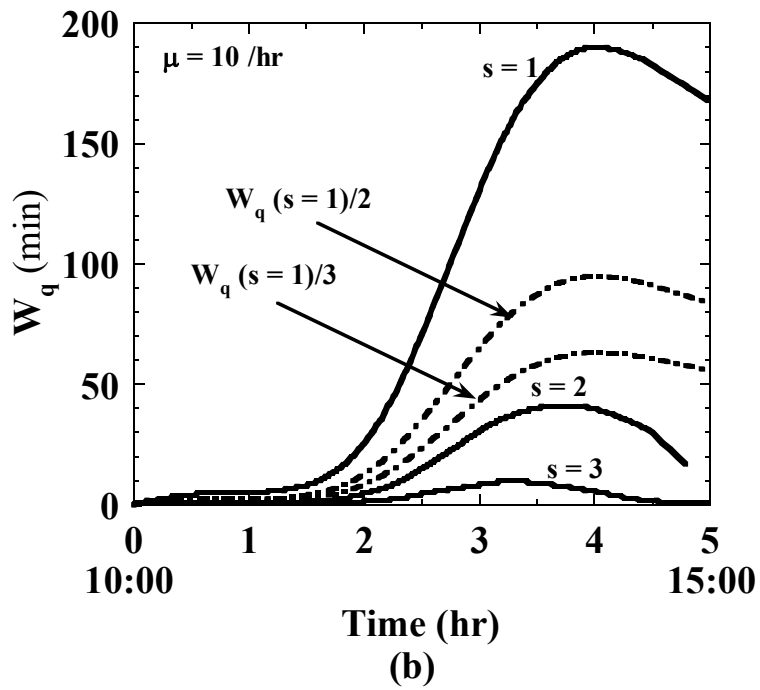
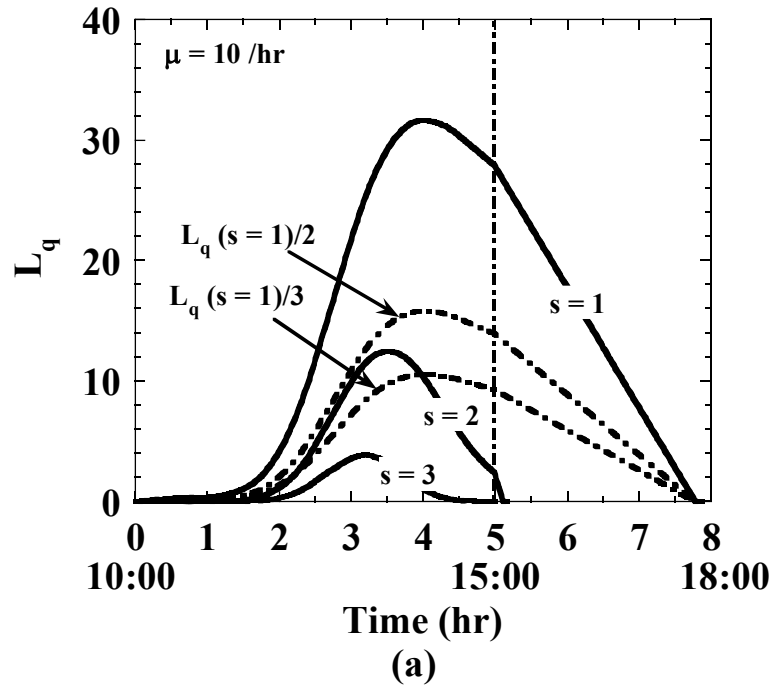
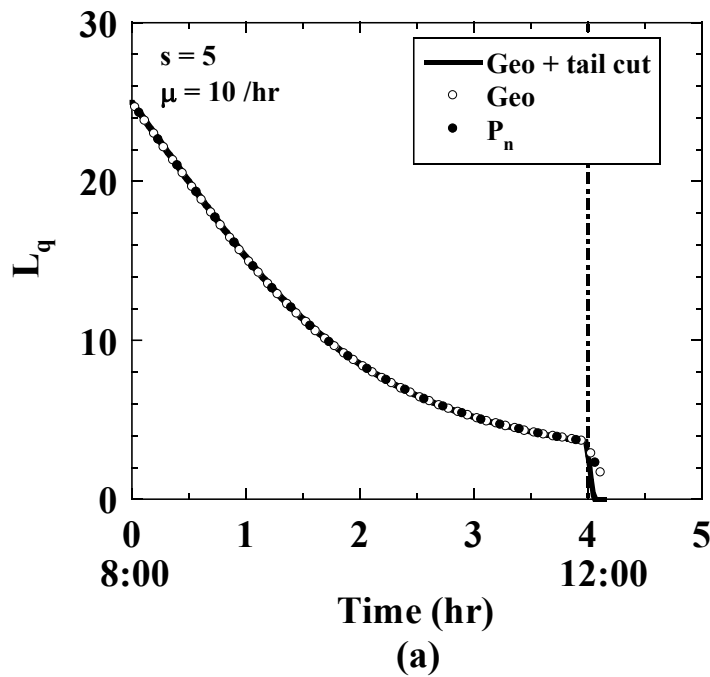


図 9 $s=1, 2, 3$ における各種パラメータの時間依存性。(a) L_q , (b) W_q

16.9. 病院の待合室

多くの患者は開院前に病院を訪れ待っている。したがって、初期条件としては、多くの顧客がいることになる。これは、定常状態とはかけ離れている。

ここでは、病院の血液検査を例にしよう。病院は 8:00 に開院し、12:00 に受付を終了するものとする。最初に 30 人の患者がおり、その後開院するとする。開院後は 1 時間あたり 40 人が病院を訪問するとする。血液検査をするメンバーは $s=5$ とする。1 回の血液検査は平均 6 分かかるとする。したがって、サービス率 μ は 10/hour である。



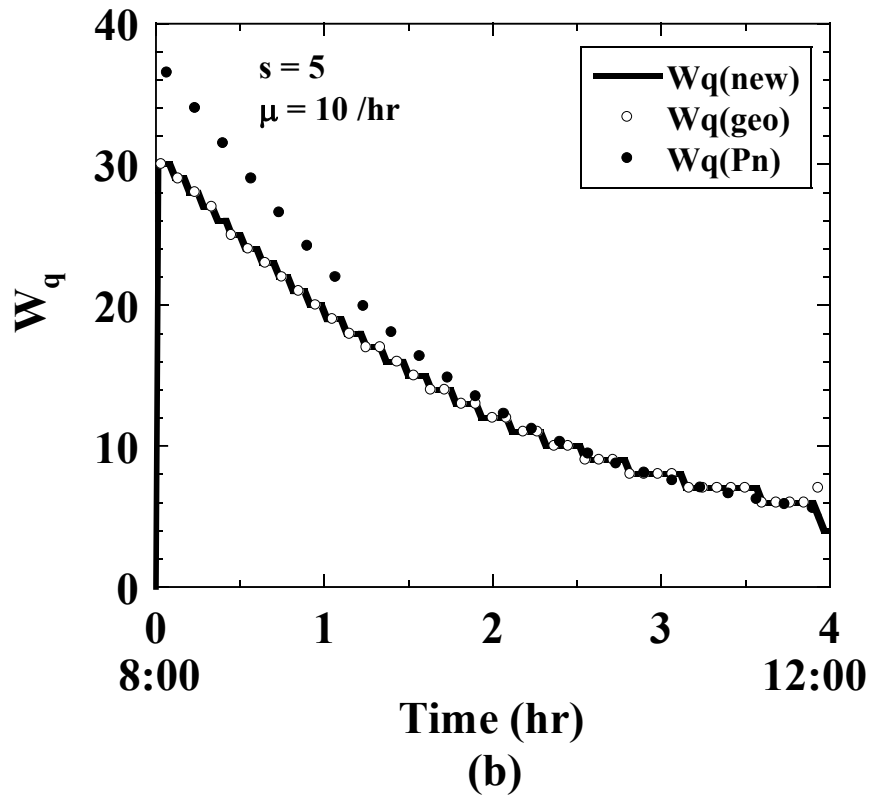


図 10 パラメータの時間依存性。(a) 待ち人数、(b) 待ち時間

図 10 に待ち人数、時間の時間依存性を示す。待ち人数 L_q はどの評価法でも同じである。

L_q は時間とともに減っていく。これは、初期値から単純に減っていくことを表している。

W_q も L_q と同様に単調に減っていく。この理由も L_q と同じである。 W_q の評価は P_n でやると不正確になる。これは、 P_n においては、一定の λ を仮定しているが、それは成り立たないためである。

16.10. 過渡待ち行列ネットワーク

我々はこの過渡解析を容易にネットワークに展開できる。

系の出力は以下のように評価できる。

$$L(t+\Delta t) - L(t) = [1 - P_N(t)]\lambda(t) - \lambda_2(t) \quad (90)$$

したがって、系 2 に対する入力以下となる。

$$\lambda_2(t) = [1 - P_N(t)]\lambda(t) - [L(t + \Delta t) - L(t)] \quad (91)$$

この関係を使い、我々はネットワークを構成することができる。

16.11. まとめ

この章のまとめを行う。

待ち行列理論では定常状態を仮定しているが、オリジナルな理論では定常状態は仮定していない。入力頻度が一定でない場合が多く存在し、その場合は定常状態近似は成り立たない。たとえば、レストランでは昼時に顧客が集中する。このような場合にもオリジナルな待ち行列理論は対応できる。しかし、数値的に解かなければならない。ここでは、数値的に解く時に用いる技法、すなわち修正オイラーを紹介した。さらに、数値計算上、トータルの確率保存、および終端処理における留意点を述べた。また、この解析は容易にネットワーク構成もできることを示した。