序

我々の日常生活の中で、サービスを待つということはしばしば起こる。銀行、コールセンター、レストラン、スーパーマケット等で我々はサービスを受けるために待つ。待つ時間は来客頻度とサービス時間のバランスで決定される。

ここで系というものを定義する。系とは、顧客が待ち、サービスを受ける場のことである。顧客が系に入り、サービスを待つ。その後、サービスを受け終了し、退出する。顧客が発生し、系に入る頻度を入力の流束と呼ぶ。顧客へのサービスを終え、顧客がこの系を去る頻度を出力の流束と呼ぶ。この系の状態は、入力の流束と出力の流束のバランスで決まる。もし、入力の流束が出力の流束より大きければ待ち時間は時間とともに増大し、その逆であれば待ち時間は減少し、ついにはその待ち時間は無くなる。このように出力の流束のほうが入力の流束よりも大きい場合は、我々は待ち時間はないと期待する。しかし、実際はこのような場合でも待ち時間は発生する。それは、来る人数、サービスする時間が一定でないためである。このような入力と出力のバラケ具合を考慮した解析が待ち行列理論である。待ち行列理論では、待ち人数、待ち時間を提供する。

理論においては、インプットデータを入れれば、アウトプットデータは得られる。しかし、理論の中身を理解していないと、その結果の解釈をすることは困難である。したがって、理論では何をやっているのかを理解することが重要である。

この本では、基礎的なレベルから応用的なレベルまでスキップすることなくモデルを説明していく。したがって、いかなるモデルにおいても、その仮定、意味するところ、議論できる内容を理解できる。

この本では以下のことを扱う。

【1 章: 待ち行列の理論とケンドールの記号】.

この章では、待ち行列の概念を扱う。

待ち行列は銀行、コールセンター、空港、レストランなどのあらゆるサービス業に適用される。この理論は来客頻度に対してサービスメンバーが足りている状況を扱う。人数的に足りているようであっても、訪問頻度やサービス時間にバラツキがあれば待ちが生じる。これを待ち行列理論は扱う。

状況に応じて待ち行列理論には様々な種類のものがある。ケンドールはこの種類を整理し、統一的な記述方法でこの理論を分類した。ここでは、そのケンドールの表記法にも簡単に触れる。

【 2 章: 確率分布および確率密度分布】

待ち行列理論は確率変数を使って表現される。したがって、この理論の中では変数に対する分布は重要な役割を演じる。ここでは、待ち行列理論に関連する確率の分布を扱う。ベルヌーイ分布は最初の分布として取り上げられる。それは、二項分布、ポアソン分布、アーラン分布に発展させられる。各分布の特徴はそのモーメントによって表現される。さらに、そのモーメントの求め方も扱う。

【 3 章: ポアソン過程】

通常、訪問顧客はランダムに発生する仮定される。その仮定は一般性があるように思われ、この本全体で用いられる。ここでは、ランダム性とは何かを議論する。このランダム性はポアソン分布で表現される。したがって、ポアソン分布は待ち行列理論において重要な位置を示す。

【 4 章: リトルの定理】

リトルの定理は待ち行列理論においてマクロな関係式を与える。これは、待ち時間、サービス時間、待ち行列の関係をそれらの詳細に立ち入ることなく導いてくれる。

【5 章: 流入と流出】

訪問顧客頻度がサービス頻度よりも大きい場合、我々は待ち行列を用いずにこの系を解析できる。マクロなパラメータはその平均値でよく近似でき、バラツキを考慮しなくてもいいためである。ここでは、その状況を仮定し、対応する解析を紹介する。

訪問顧客頻度がサービス頻度よりも小さい場合も本解析を適用できる。この場合は、待ち時間が発生しない。しかし、実際は待ち時間が発生する。これが、本解析の限界である。訪問顧客頻度がサービス頻度よりも小さい場合は、待ち行列理論で仕上げをしなくてはならない。

【6 章: M/M/s(∞)】

銀行やレストランで我々は待ち、サービスを受け、または食事をし、その系を去っていく。我々は、その際の待ち行列や待つ時間を知りたい。これは、ケンドールの表記法で M/M/s(∞) とされる。ここで、訪問、サービス時間はランダム、サービス人数は複数、系にいることのできる人数制限なしである。この系は待ち行列理論において最も一般的であり、したがって最も重要である。 ここでは、その解析を行う。

【7 章：M/M/s(N)】

顧客が系を訪問した際、待合室は一杯の場合がある。この場合は、顧客はサービスを受けずに系を去ることになる。このように系にいることのできる人数に制限がある場合はケ

ンドールの表記法で M/M/s(N) とされる。ここで、訪問、サービス時間はランダム、サービス人数は複数、系にいることのできる人数は N である。この場合、N がおおきくなると M/M/s(∞)に近づいていく。

【8 章：M/M/s(s)貸出備品数】

レンタル備品が全て貸し出されていなければ、我々はその備品を借りることができる。一方、その備品が全て貸し出されていれば、我々はその備品を借りることはできず、去っていく。この場合は待つということがない。この系はケンドールの記号では $M/M/s(s)$ と表現される。これは、前章で求めた $M/M/s(N)$ に対するモデルにおいて、$N=s$ とすればいい。

この系は図書館にも適用できる。しかし、この場合の難しさは、本を借りに来て、その本が貸し出されていることを発見した顧客は帰るが、それに対応するデータを得ることができない、ということにある。この場合、何人がこの本を借りにきたのかを予想することが必要になる。

【9 章: M/M/∞(∞)】

我々はスーパーマーケットに行き、何らかの商品を買う。または、博物館や美術館を訪問し、その展示物を鑑賞する。これらの場合、顧客は自身のサービスをする、と捉えることができる。商品や展示物は有限であるが、顧客にとっては充分多いため、これを無限として扱う。M/M/∞(∞)と表記される。これらの場合、系に入ることのできる人数も無限大としているが、有限な人数に制限することもできる。その場合は M/M/∞(N)となる。ここでは、この両理論を扱う。

【10 章:M/G/1(∞)】

サービス時間は指数分布に従うとこれまで仮定してきた。しかし、この分布からずれる場合がある。したがって、平均と標準偏差を利用できる一般的な分布を利用することが望まれる。ポラチェック、ヒンチンはこれに対応するモデルを導出した。それはケンドールの記号で M/G/1(∞)と表記される。サービスメンバーが複数の場合のモデルの経験式もここで示す。

【11 章: M(m)/M/s(∞):機械修理工問題】

ここでは機械修理工問題を考える。トータルの機械の数は有限である。したがって、故障する機械の数も有限である。この系においては、故障した機械は顧客、機械修理工はサービスメンバーとして扱う。つまり、顧客の供給源が有限である場合を扱う。対応するケンドールの表記は M(m)/M/s となる。表記の中の m は機械の総数に対応する。

【12 章: $M[b]/M/1(\infty)$ 集団待ち行列】

これまで、短い時間の間に一人の顧客だけが系を訪問すると仮定してきた。しかし、集団待ち行列という状況が発生する場合がある。それは、トラックや船での輸送の場合、ある量の塊のものが系に運ばれる場合である。ここでは、一つの塊が系を訪れるとする集団待ち行列をここでは扱う。一つの塊として系を訪問後は、要素はバラけて、あとは通常の待ち行列と同様になる。この系はケンドールの記号で $M[b]/M/1(\infty)$ と表現される。この中で、入力の中の b は塊(block)を表す。. これは、ランダムな入力、ランダムなサービス、サービスメンバー数 1, 系に居ることのできる総人数は無限大であることを表している。

【 13 章: トヨタ看板方式】

トヨタの看板方式は在庫を低減する方法である。トヨタの看板方式においては、我々はタグを用意し、そのタグの数以上は製品を生産しない。つまり、全ての製品にタグがつけられ、製品につけられていないタグがある場合のみ製品を生産する。このトヨタの看板方式は待ち行列理論の M/M/1(∞)を変形したものとして表現できる。

【14 章: マルコフプロセスと待ち行列理論】

マルコフプロセスにおいては、次の状態は現在の状態のみで決まり、それ以前の状態は無関係である。待ち行列理論は、その意味でマルコフプロセスに属する。マルコフプロセスにおいては、遷移行列が用いられる。任意の時間ステップ後の状態はこの行列の掛け算から求めることができる。 ここでは、これまで解析してきた待ち行列がマルコフプロセスの遷移行列によって表現されることを示す。

【15 章: マルコフプロセス一般論】

前章では、これまで扱ってきた待ち列理論がマルコフプロセスで説明できることを示した。待ち行列理論では、次の状態は今の状態の近くであるという制限があるが、マルコフプロセスではその制限はない。また、待ち行列理論では、すべて確率を扱っているが、マルコフプロセスでは扱う量は確率である必要はない。ここでは、マルコフプロセスの一般論を展開し、そのより幅広い適用を示していく。

【16 章: M/M/s(N)の過渡数値解析】

待ち行列理論においては、我々は通常は定常状態を仮定する。すなわち、時間が長時間経過した場合の平均値を評価している。しかしながら、通勤や、通学で我々はラッシュアワーを経験する。レストランでは昼時が混む。これらの場合では、やって来る顧客の数は時々刻々変わるか、ある時刻でピークを持つ。つまり、定常状態を仮定できない。オリジナルの待ち行列理論は定常状態を仮定していない。したがって、このような状況にも適用できる。

しかしながら、もはや解析解を得ることはできない。オリジナルの待ち行列理論を数値的に解く方法をここでは議論する。

【17 章:モンテカルロシミュレーション G/G/s(N)】

ここでは G/G/s(N) の系に対してのモンテカルロシミュレーションを紹介する。モンテカルロシミュレーションにおいては任意の分布に対する乱数を発生させ、それを入力やサービス時間に利用できる。ここでは、M/G/s(N)に対する厳密な解析モデルはないが、対応する経験則は提案されている。ここでは、その経験式の精度をモンテカルロで評価する。

【18 章:待ち行列ネットワーク】

健康診断では、身長・体重測定、レントゲン検査、血圧測定などいくつかの窓口を連続してまわり終了する。このような状況は、情報ネットワーク、生産システムなどにも見られる。このように一連のサービスを連続して受ける系を待ち行列ネットワークと呼ぶ。ここでは、待ち行列ネットワークを解析する。

【19 章: 乱数】

現実の世界に起こることを確率的に扱いたい場合がある。それを容易に実現するのがモンテカルロシミュレーションである。その解析の中で、確率的な扱いは乱数を発生することでなされる。ここでは、いかに乱数を発生させるかを議論する。

【20 章: 待ち行列と関連する問題】

厳密に同じではないが、待ち行列と関連する問題をここでは扱う。エレベータの待ち時間、電車の遅れ、信号機の切り替えの時間、高速道路の渋滞をここでは扱う。

この本では、すべてのモデルをはじめから導出することを試みている。利用する数学もこの本で閉じて理解できるようにしている。

この本の読者に対して、待ち行列理論のモデルの詳細をその導出も含めて理解することを期待する。それは、それほど簡単なことではないが、不可能なことでもない。それを実現するためにすすんでいくことを希望し、この本がその助けになればと思っている。

鈴木邦広