2.　確率分布と確率密度分布

概要: ここでは、待ち行列理論に関連する確率の分布を扱う。ベルヌーイ分布は最初の分布として取り上げられる。それは、二項分布、ポアソン分布、アーラン分布に発展させられる。各分布の特徴はそのモーメントによって表現される。ここでは、そのモーメントの求め方も扱う。

キーワード: 待ち行列;モーメント;中心モーメント;モーメントパラメータ;平均;分散;標準偏差;ベルヌーイ分布;二項分布;ポアソン分布;指数分布;アーラン分布;正規分布.

2.1.　序

待ち行列理論は確率変数を使って表現される。したがって、この理論の中では変数に対する分布は重要な役割を演じる。分布には様々なものがあり、我々は状況によってそれぞれを使い分ける。ここでは待ち行列理論に利用される主要な確率に対する分布を紹介する。

2.2.　確率分布と確率密度分布

確率変数には離散値と連続値がある。

離散値の例はコイントスである。この場合、各試行では表と裏しか出ない。表を 1、裏を 0 とする。このような場合、得られるデータは表と裏、つまり値は 1 と 0 しかない。同じような場合として、サイコロの目がある。サイコロを振って出た目を考える。この場合は、1,2,3,4,5,6 の場合しかない。このように扱う場合の数が決まったものを離散値と呼ぶ。

一方、連続値とは、体重や身長のような場合である。たとえば身長の場合、その値はあらかじめ決められた値から選ぶわけではない。165.3cm でも 175.6 cm でもその人の場合に対応して任意の値を取る。このような確率変数のことを連続値と呼ぶ。

離散値の場合は、先に述べたように扱う値は決まっている。したがって、コイントスの場合は 1 が何回出て 0 が何回でたかを単純に集計することができる。これはサイコロの目に対しても同じで、3 の目が何回出たかを単純に集計することができる。このように n 回試行して、ある数が何回出たかを紛れもなく集計することができる。このある値になる確率が確率分布となる。

連続値の場合はどうであろうか。連続値は任意の値を取ることができる。たとえば身長を考える。ある人の身長は 163.2cmであったとする。離散値と同様に 163.2cm の人の人数を集計しても一般的にはそれは 1 である。これはどの人の値に対しても同じである。したがって、離散値におけるような分布は単純には得られない。このため、連続値では階級を設定する。つまり、ある値の範囲を定めて、その範囲にいくつデータが入るのかを数える。これで離散値の場合と同じデータ構造になる。離散値の場合は取る値は決まっていた。連続値の場合は設定する階級の幅は任意で、その設定する幅に応じてそこに入るデータの個数は異なってしまう。したがって、対応する分布は階級の幅

に依存してしまう。つまり、離散値の場合は階級の幅は任意に設定できないが、連続値の場合は任意に設定でき、それに応じて確率分布が異なってしまう。したがって、連続値の場合の確率分布はそのデータ固有の分布として利用することができない。連続値の場合も、固有の分布を得たいという要望がある。

連続値の場合に対応する固有の分布は以下のように求める。

連続値の場合は、階級を設定し、その階級に入るデータの個数をカウントし、確率分布を得る。さらにその確率を階級の幅で割ることにする。すると、ある程度の階級の幅に設定できていれば、この階級幅で割った分布はほぼ同じになる。したがって、連続値の場合は、それを特徴づける分布は確率分布ではなく、それを階級幅で割った確率密度分布が固有の分布になる。

我々が確率変数に対する分布を考える場合、それが離散値に対するものであれば確率分布であり、連続値に対するものであれば確率密度分布になる。つまり、この両者では軸の次元が違う。このことを今後の解析で留意しておこう。

2.3. 平均の表記に対する注意

ここで表記についての問題を指摘する。通常、平均に対してはμが用いられるのが一般的である。しかしながら、待ち行列においては、μは別な物理量、つまり対応頻度に用いられる。 待ち行列理論の表記法を尊重し、ここでは、μを平均に利用しない。しかし、1 次のモーメントとしては、μ_1 を用いる。これは平均と等価である。結局、平均はμ_1として記述される。

2.4. 確率分布および確率密度分布のモーメント

ここでは確率変数は確率分布、または確率密度分布に従うとする。その両者の場合を区別なく$f(x)$と表記する。確率分布および確率密度分布はそのモーメントを関連付けられる。ここでは、そのモーメントの説明をしていく。

ν次のモーメントを考える。

もしもそれが離散値に対するものであれば以下のようになる。

$$\left\langle X^{\nu} \right\rangle = \sum_{x=0}^{n} x^{\nu} f(x) \tag{1}$$

ここで、我々はn回の試行を考えている。この場合は $n+1$種類のことが起こる。つまり、x は$0,1,2,\cdots,n$の$n+1$個の値を取る。

もし、それが連続値の場合はν次のモーメントは以下のように表現される。

$$\left\langle X^{\nu} \right\rangle = \int x^{\nu} f(x) dx \tag{2}$$

1 次のモーメントは以下のように定義される。

$$\left\langle X \right\rangle = \int x f(x) dx \tag{3}$$

これは平均値になる。

ここで、さらに中心モーメントを定義する。まず、平均は通常のモーメントを一致し、以下のように定義される。

$$\mu_1 = \langle X \rangle \tag{4}$$

2 次のモーメントはその平均値 μ_1 を基準値として以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \sigma^2 \\ &= \left\langle \left(X - \mu_1 \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2 \right\rangle \\ &= \left\langle X^2 \right\rangle - 2\mu_1 \langle X \rangle + \mu_1^2 \\ &= \left\langle X^2 \right\rangle - \mu_1^2 \\ &= \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2\end{aligned} \tag{5}$$

この表式は離散値に対しても連続値に対しても有効である。

1 次のモーメント μ_1 は $\langle X \rangle$ と等価であり、平均である。2 次の中心モーメント μ_2 は分散と呼ばれる。それは、σ^2 とも表記される。標準偏差 σ は σ^2 の正のルートであり、以下のように定義される。

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{6}$$

2.5. ベルヌーイ分布:確率分布

ベルヌーイ分布は最も基本的な分布である。対応する例はコイントスである。その場合、我々は表か裏の結果を得る。A を表が出る場合とし、B を裏が出る場合とする。このことは、以下のように表演される。

$$A = \{\mathrm{Head}\} \tag{7}$$

$$B = \{\mathrm{Tail}\} \tag{8}$$

この表と裏に数を割り当てる。その数のことを確率変数 X と呼ぶ。ベルヌーイ分布の場合はその X の値は 1 (表) か 0 (裏).である。つまり、我々がベルヌーイ試行をした場合、得られる値は 1 か 0 である。これは、以下のように表現される。

$$X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \tag{9}$$

毎回のベルヌーイ試行で我々は何が出るのか正確に言い当てることはできない。しかし、我々はその出る確率を言い当てることはできる。表の出る確率、つまり $X = 1$ となる確率を p とする。

確率分布 $f(x)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{cases} f(1) = p \\ f(0) = q = 1 - p \end{cases} \tag{10}$$

この場合は得られる値は 1 か 0 かで決まっているから、この分布は確率分布である。

コイントスの場合、もしもそのコインが正確につくられているならば　$p = 1/2$　となる。しかしながら、正確に作られていることは必須のことではない。

全ての場合の確率の和は 1 になり、それは以下のように評価される。

$$\sum_{x=0}^{1} f(x) = f(0) + f(1) = p + q = 1 \tag{11}$$

ベルヌーイ分布の 1 次のモーメント、1 次の中心モーメントは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \langle X \rangle \\ &= \sum_{x=0}^{1} x f(x) \\ &= 0 \times q + 1 \times p \\ &= p \end{aligned} \tag{12}$$

この分布の 2 次の中心モーメント、分散は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sum_{x=0}^{1} (x - p)^2 f(x) \\ &= (0 - p)^2 \times q + (1 - p)^2 \times p \\ &= p^2 q + q^2 p \\ &= pq(p + q) \\ &= pq \end{aligned} \tag{13}$$

2.6.　二項分布:確率分布

ベルヌーイ試行を n 回する場合を考える。つまり、n　回コイントスをする場合を考える。この場合、表が何回出るであろうか。n　回の試行で r 回表が出る場合の数は ${}_nP_r$　と表記され、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned} \tag{14}$$

これは、n 個のコイン $A_1, A_2, \cdots, A_n$ から表の出るコインを r 個選ぶ場合の数に相当する。すなわち、1 個目のコインの選び方は n 個、2 個目のコインの選び方は $n-1$ 個、・・・、r 個目のコインの選び方は $n-r+1$ であるため、このような表式になる。この選び方では、選ぶ順番を気にしている。しかしながら、多くの場合は選ぶ順番は気にせず、どれが選ばれたかのみを考える場合が多い。このように選ぶ順番を気にせずに選ぶ種類の数を評価したい。

これは以下のように評価できる。

まず、順番を気にしてr個選択する。その選択したr個の順番を気にした場合の数は$r!$となる。したがって、順番を気にしない場合の数は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

このように選ぶ順番を気にせずn個の中からr個選ぶ場合の数を${}_nC_r$を記述する。

5 回のコイントスを考える。ベルヌーイ試行を 5 回行い、2 回表がでる順番を気にしない場合の数は

$$
{}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \tag{16}
$$

となる。

ここで、表が出る確率を$1/3$、裏が出る確率を$2/3$とする。つまりいびつなコインをここでは考える。

ベルヌーイ試行を 5 回行い、2 回表が出る確率は以下である。

$$
\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \tag{17}
$$

したがって、$X=2$となる確率を$f(2)$と表記すると、それは以下で与えられる。

$$
f(2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \tag{18}
$$

同様に他の数の表が出る回数に対応する確率は以下で与えられる。

$$
f(0) = {}_5C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \tag{19}
$$

$$
f(1) = {}_5C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \tag{20}
$$

$$
f(3) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \tag{21}
$$

$$
f(4) = {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \tag{22}
$$

$$
f(5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \tag{23}
$$

この確率分布$f(x)$は二項分布と呼ばれ、一般形は以下である。

$$
f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \tag{24}
$$

この中で変数xは任意の値を取ることはできず、$x=0,1,2,\cdots,n$であるから、二項分布は確率分布である。

図 1 に二項分布のp. 依存性を示す。p が 0.5 に近づくほど、分布の対称性はよくることがわかる。

図 2 に二項分布の試行回数つまりn依存性を示す。対称性はn が大きくなるほどよくなることがわかる。

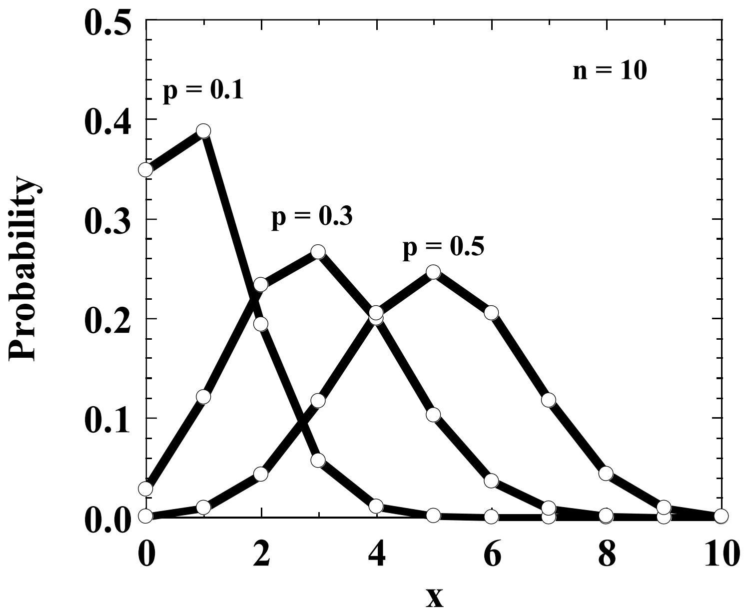


図 1　二項分布の p 依存性

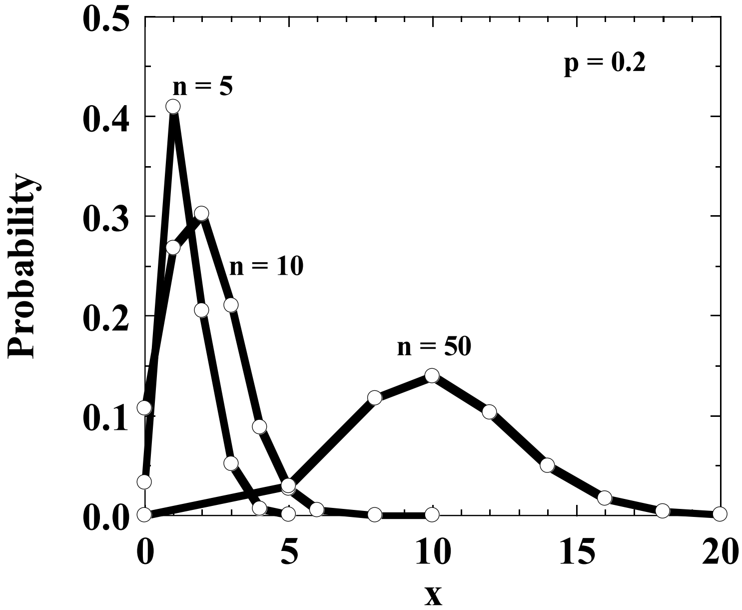


図 2　二項分布の n 依存性

2.7.　二項定理

ここでは二項定理を学ぶ。

以下の項を考える。

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n\text{個}} \tag{25}$$

これは、$(a+b)$の項を n 個掛け合わせたものである。各項において a か b を選択する。するとこのようにして掛け合わせた項の一つは必ず

$$a^x b^{n-x} \tag{26}$$

の形式になる。これは n 個の項の中で x 個では a を選択し、残りの $n-x$ 個では b を選択したことに相当する。このような項は ${}_nC_x$ 個存在する。x としては 0 から n まで取れるから

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n\text{個}} \\ &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x a^x b^{n-x}\end{aligned} \tag{27}$$

となる。これは、任意の a 、b で成り立つ。これを二項定理と呼ぶ。

二項分布に二項定理を適用するには、

$$\begin{cases} a = p \\ b = q \end{cases} \tag{28}$$

とすればいい。二項定理においては a 、 b は任意であったが、二項分布においては p,q は確率であるから

$$p + q = 1 \tag{29}$$

である。したがって、全ての場合の確率の和は

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1 \tag{30}$$

となる。これは期待される結果である。

2.8. 二項分布のモーメント

ここでは二項分布のモーメントを求める。二項分布のモーメントは二項定理を利用して求めることができる。

1 次のモーメントは以下のように定義される。

$$\langle X \rangle = \sum_{x=0}^{n} x\, {}_nC_x p^x q^{1-x} \tag{31}$$

この計算をさらに進めていくために、二項定理を利用する。二項分布に対する二項定理は以下のように与えられる。

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{1-x} \tag{32}$$

Eq. (32) を p について微分して以下を得る。

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n} x\, {}_nC_x p^{x-1} q^{1-x} \tag{33}$$

Eq. (33)の両辺に p をかけて

$$n(p+q)^{n-1} p = \sum_{x=0}^{n} x\, {}_nC_x p^x q^{1-x} \tag{34}$$

となる。この Eq. (34)の右辺は $\langle X \rangle$ である。 $p+q=1$ を利用すると、1 次のモーメントは

$$\langle X \rangle = np \tag{35}$$

と求まる。

Eq. (33) をさらに p について微分して以下を得る。

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, {}_nC_x p^{x-2} q^{1-x} \tag{36}$$

Eq.(36)の両辺に p^2 をかけて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
n(n-1)(p+q)^{n-2}p^2 &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\,{}_nC_x p^x q^{1-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x^2\,{}_nC_x p^x q^{1-x} - \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x q^{1-x} \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - \left\langle X \right\rangle
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$p+q=1$を利用すると、2 次のモーメント$\left\langle X^2 \right\rangle$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^2 \right\rangle &= n(n-1)p^2 + \left\langle X \right\rangle \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
\tag{38}
$$

以上から、中心モーメントは以下のようになる。

$$
\mu_1 = \left\langle X \right\rangle = np \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \sigma^2 \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - \left\langle X \right\rangle^2 \\
&= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\
&= np - np^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq
\end{aligned}
\tag{40}
$$

2.9. ポアソン分布:確率分布

ポアソン分布は、非常に小さい確率で、なおかつ十分な数の試行回数の場合の二項分布の極限として扱われる。

ここで、表が出る確率が非常に小さい1/50 のいびつなコインを考える。このコインを 100 回トスしたとする。これは二項分布に従い、表が出る回数の確率は以下のようになる。

$$
f(0) = {}_{100}C_0 \left(\frac{1}{50}\right)^0 \left(\frac{49}{50}\right)^{100} = 0.133 \tag{41}
$$

$$
f(1) = {}_{100}C_1 \left(\frac{1}{50}\right)^1 \left(\frac{49}{50}\right)^{99} = 0.271 \tag{42}
$$

$$
f(2) = {}_{100}C_2 \left(\frac{1}{50}\right)^2 \left(\frac{49}{50}\right)^{98} = 0.273 \tag{43}
$$

$$
f(3) = {}_{100}C_3 \left(\frac{1}{50}\right)^3 \left(\frac{49}{50}\right)^{97} = 0.182 \tag{44}
$$

$$
f(4) = {}_{100}C_4 \left(\frac{1}{50}\right)^4 \left(\frac{49}{50}\right)^{96} = 0.092 \tag{45}
$$

$$f(5) = {}_{100}C_5 \left(\frac{1}{50}\right)^5 \left(\frac{49}{50}\right)^{95} = 0.035 \tag{46}$$

$$f(6) = {}_{100}C_6 \left(\frac{1}{50}\right)^6 \left(\frac{49}{50}\right)^{94} = 0.014 \tag{47}$$

二項分布ではこれは $f(100)$ まで定義される。しかし、確率 p が小さいため、おおきな回数が出る確率は非常に小さい。上の場合 $f(6)$ はすでに非常に小さい確率になっている。このような特殊な場合、この二項分布は以下のように別な分布に近似できる。

この場合の表の出る回数の平均は $\mu_1 = np$ である。ここで、我々は二項分布の中に含まれる p をこの平均値で置き換える。すると、二項分布は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(x-1)]}{x!}\left(\frac{\mu_1}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{\mu_1^{\,x}}{x!} 1 \bullet \left(1-\frac{1}{n}\right) \bullet \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \bullet \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \left[\left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{-n/\mu_1}\right]^{-\mu} \left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{-x} \end{aligned} \tag{48}$$

ここで、試行回数が多いという極限を利用すると以下の近似が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu_1}} = e \tag{49}$$

これから、二項分布は以下のように近似される。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\mu_1^{\,x}}{x!} e^{-\mu_1} \tag{50}$$

この分布のことをポアソン分布と呼ぶ。二項分布の場合は、パラメータとして、試行回数 n と表が出る確率 p の二つがあったが、ポアソン分布では平均値 μ_1 だけの情報があればいい。ただし、暗に 確率 p は小さく、試行回数 n は多いという仮定がなされている。

また、この分布の中の x は任意の値をとることはできず $x = 0,1,2,3,\cdots$ であるから、これは確率分布である。

ポアソン分布の分散は二項分布のそれの n を無限大にした極限として考えればよく、以下のようになる。

$$\sigma^2 = np(1-p) = \mu_1\left(1-\frac{\mu_1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_1 \tag{51}$$

ポアソン分布の例を考える。

機械の故障率が 0.02 であるとする。我々は 500 個の機械を考える。単位期間の間に故障する機械の数の平均は以下となる。

$$\mu_1 = 0.02 \times 500 = 10 \tag{52}$$

したがって、単位期間に x 個の機械が故障する確率は以下のように与えられる。

$$f\left(x\right)=\frac{10^{x}}{x!}e^{-10} \tag{53}$$

この分布の様相を図 3 に示す。

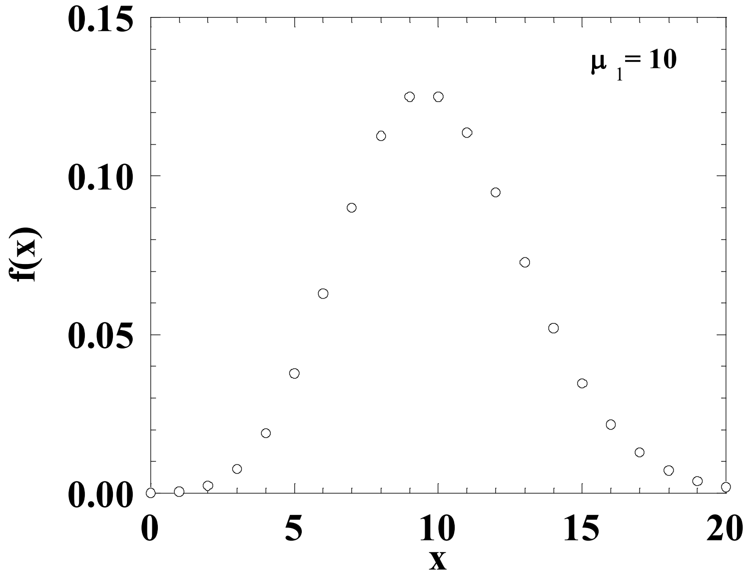


図 3　故障する機械の数に対する確率

もう一つの例を考えよう。

ある機械は 5 に 1 回故障する。我々は 10000 個の機械を持っている。1 日に故障する機械の数はいくらであろうか？

まず、考える期間は 1 日であるから、故障率はその単位にしなければならない。1 日あたりの故障率 r 以下である。

$$r=\frac{1}{5\times 365} \tag{54}$$

したがって、1 日あたり故障する機械の数の平均は以下のようになる。

$$\mu=\frac{1}{5\times 365}\times 10000=5.48 \tag{55}$$

ここで、故障する確率は十分小さく、機械の数も十分大きいため、我々は故障する機械の数 x はポアソン分布に従うと考えることができる。したがって、それは以下のようになる。

$$f\left(x\right)=\frac{5.48^{x}}{x!}e^{-5.48} \tag{56}$$

これまで、我々はポアソン分布のモーメントを二項分布の極限から求めてきた。ここでは、ポアソン分布からスタートしてそのモーメントを求める。

1 次のモーメントは以下のように求めることができる。

$$
\begin{aligned}
\left\langle X \right\rangle &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu_1{}^{x-1}}{\left(x-1\right)!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1
\end{aligned}
\tag{57}
$$

ここで、全ての場合の確率の和は 1 になることを利用している。すなわち、

$$
\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} = 1
\tag{58}
$$

を利用している。これは、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(p+q\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x \left(1-p\right)^{n-x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{n} \left[\frac{\mu_1{}^x}{x!} 1 \bullet \left(1-\frac{1}{n}\right) \bullet \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \bullet \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \left[\left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{-n/\mu_1} \right]^{-\mu} \left(1-\frac{\mu_1}{n}\right)^{-x} \right] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{x!} e^{-\mu_1}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

となり、

$$
\lim_{n\to\infty} \left(p+q\right)^n = 1
\tag{60}
$$

であるから、成り立っている。

二次のモーメントは以下のように変形して求めることができる。

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^2 \right\rangle &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \left[x(x-1) + x \right] \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} + \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} + \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{(x-2)!} \mathrm{e}^{-\mu_1} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{(x-1)!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1{}^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu_1{}^{x-2}}{(x-2)!} \mathrm{e}^{-\mu_1} + \mu_1 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu_1{}^{x-1}}{(x-1)!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1{}^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu} + \mu_1 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_1{}^x}{x!} \mathrm{e}^{-\mu_1} \\
&= \mu_1{}^2 + \mu_1
\end{aligned} \tag{61}
$$

したがって、中心モーメントは以下のようになる。

$$
\mu_1 = \langle X \rangle \tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \sigma^2 \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \\
&= \mu_1{}^2 + \mu_1 - \mu_1{}^2 \\
&= \mu_1
\end{aligned} \tag{63}
$$

2.10. 正規分布:確率密度分布

正規分布は統計で最も頻繁に用いられる確率密度分布である。変数が値xを取る正規分布は

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} \right] \tag{64}
$$

で与えられる。この分布は平均μ_1、分散σ^2、分散と同じことであるが標準偏差σに従う分布である。この分布に従う確率変数は連続値であり、$N\left[\mu_1, \sigma^2\right]$に従うと表現される。

正規分布のパラメータは平均μと標準偏差σである。これら二つのパラメータは独立であり、いかなる組み合わせの値も可能である。このパラメータに対する関数の動きをみてみよう。

図 4 に示すように平均μ_1を変えるとそれに応じて関数は平行にシフトしていく。μ_1は単純にそ

の分布のピーク位置に対応している。

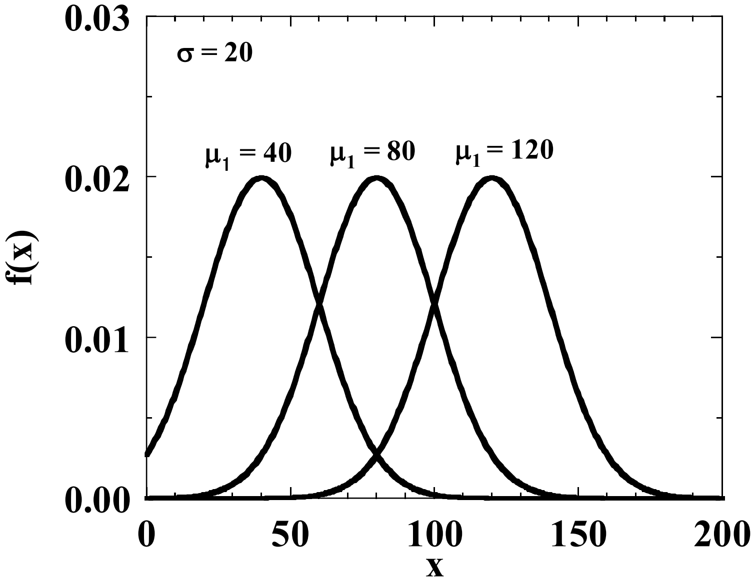


図 4　正規分布の平均 μ 依存性

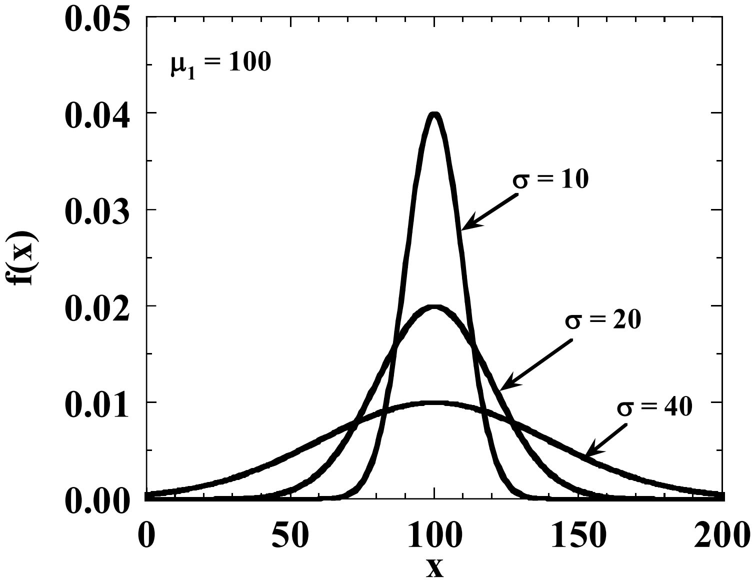


図 5　正規分布の標準偏差 σ 依存性

図 5 に示すように σ を増加すると分布広がりは大きくなり、ピーク濃度は低下していく。σ は分布の広がりをよく表現している。

正規分布は $x = \mu_1$ に関して対称な釣鐘状の分布である。

以上から、釣り鐘状の分布であれば、ほとんどこの分布で表現できることがわかる。

μ_1 がこの分布の平均であり、σ^2 がこの分布の分散であることは、この章のモーメントの節で定量的に示す。

この分布のピーク濃度は $x = \mu_1$ の位置のものであるから $x = \mu_1$ と置けば求まる。すなわちピーク濃度は

$$\begin{aligned} f(\mu_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\mu_1 - \mu_1)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \end{aligned} \tag{65}$$

である。

平均値から距離 σ の位置での確率密度は、$x = \mu_1 + \sigma$ と置けばいい。すなわち

$$f\left(\mu_1+\sigma\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\mu_1+\sigma-\mu_1\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}\right] \tag{66}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{e}}$$

である。

よって、$x=\mu_1+\sigma$ の位置での確率密度と $x=\mu_1$ でのピーク濃度の比は

$$\frac{f\left(\mu+\sigma\right)}{f\left(\mu\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}=0.601 \tag{67}$$

である。

同様に平均から 2σ および 3σ 離れた位置における確率密度比は

$$\frac{f\left(\mu_1+2\sigma\right)}{f\left(\mu_1\right)}=\frac{1}{e^2}=0.135 \tag{68}$$

$$\frac{f\left(\mu_1+3\sigma\right)}{f\left(\mu_1\right)}=\frac{1}{e^{\frac{9}{2}}}=0.011 \tag{69}$$

となる。これで、正規分布を図 6 のように描くことができる。

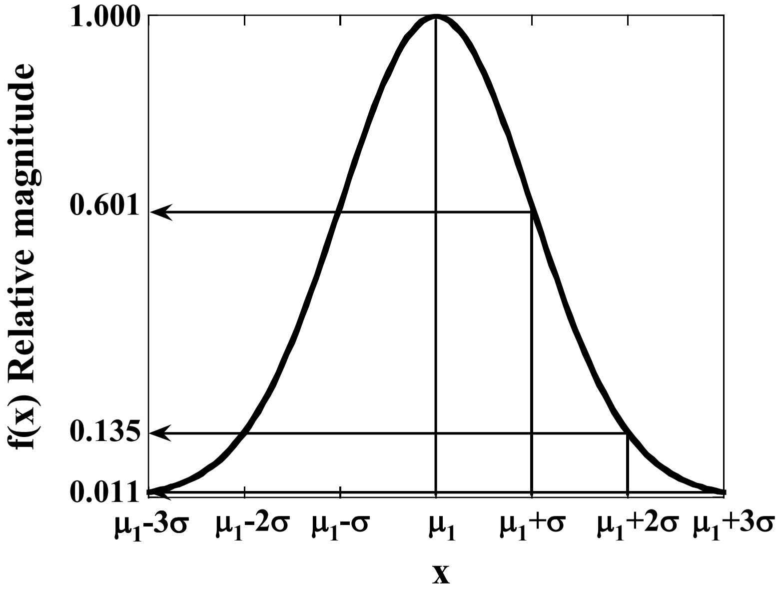


図 6　各位置でのピーク濃度に対する比率

2.11. 標準正規分布への変換

先に示したように、正規分布のパラメータは平均 μ_1 と分散 σ^2 であり、それらの値によって、種々の分布になる。そのため、扱わなければならない分布は正規分布に限定した場合でも無数にある。ここでは、確率変数を標準化する。それにより、無数にあった正規分布は一つの分布、つまり標準正規分布に集約される。

以下の変数変換を考える。

$$z = \frac{x - \mu_1}{\sigma} \tag{70}$$

と置く。これを x について解くと

$$x = \mu_1 + \sigma z \tag{71}$$

となる。

これから、変数変換による領域の変化は

$$dx = \sigma dz \tag{72}$$

である。

この標準化変数 z で表した正規分布は、変換の前後で確率は保存しなければならないから

$$f(x)dx = g(z)dz \tag{73}$$

となる。つまり、変換の前後で保存されるは、確率密度ではなく、変換された領域の幅をかけた確率である。これを模式図的に図 7 に示す。

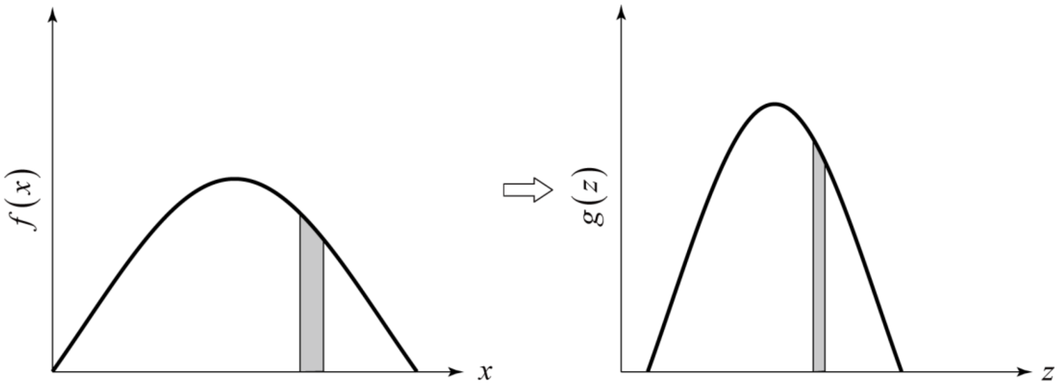


図 7　変数変換の模式図

これに式を代入すると、

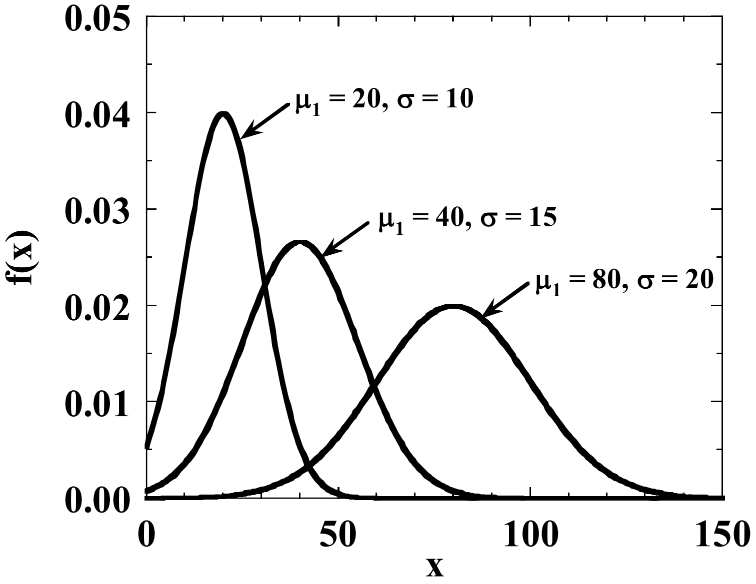
$$\begin{aligned} f(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\sigma dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= g(z)dz \end{aligned} \tag{74}$$

となる。よって、規格化された確率変数が従う確率密度分布は

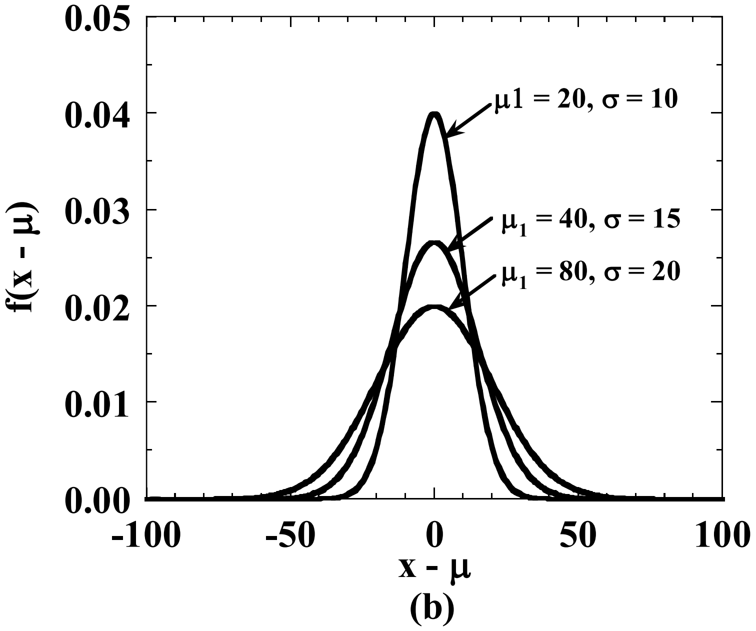
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{75}$$

となる。これを標準正規分布と呼ぶ。

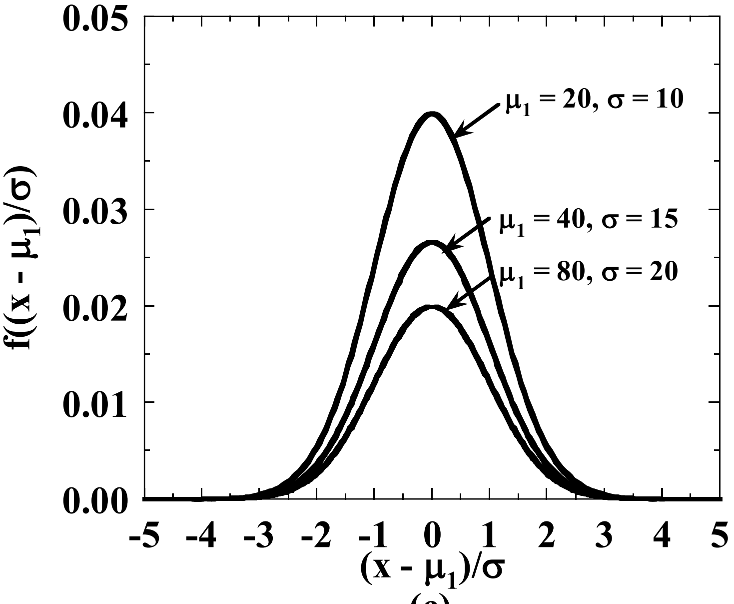
以上の操作を視覚的に見るために様々な μ_1, σ を持つ正規分布の標準化のステップを見ていく(図 8)。


0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
f(x)
μ1 = 20, σ = 10
μ1 = 40, σ = 15
μ1 = 80, σ = 20
0
50
100
150
x

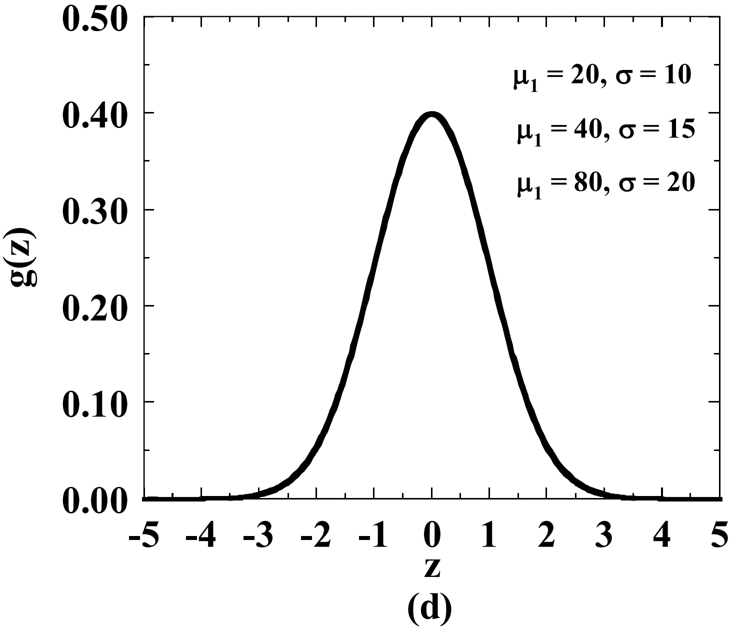
(a)


0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
f(x - μ)
μ1 = 20, σ = 10
μ1 = 40, σ = 15
μ1 = 80, σ = 20
-100
-50
0
50
100
x - μ

(b)



(c)



(d)

図 8　正規分布から標準正規分布への変換 (a) 元の分布(b) 原点の移動 (c)標準偏差による横軸規格化 (d) 確率を 1 にするための縦軸補正

平均 20, 標準偏差 10、平均 40, 標準偏差 150、平均 80, 標準偏差 20 の 3 種類の分布を考

える(図 8(a))。

まず、この原点をピーク位置、すなわちそれぞれの分布の平均値 μ に移す。これにより、原点を中心とした分布になる(図 8 (b))。

次に、横軸を各分布の標準偏差の物差しで測るためにそれで割る(図 8 (c))。これで横軸は z になる。しかし、各分布は一致していない。

図 8 (c)では、横軸をその標準偏差で割ったため、各分布の面積が 1 からずれている。これは軸が何に変換されようとも全確率は1でなければならない。もともと 1 であった面積の分布の横軸だけを各標準偏差で割ったのであるから、面積を保つには同じ値を縦軸にかければいい。(図 8(d))。これにより、各分布は一致し、標準化は完成した。

実際のデータは様々な分布を持ち、それに対応する正規分布は様々な μ_1 、σ を持つ。我々が扱うべき関数はその都度異なることになる。しかし、上の標準化を行えば、我々はただ一つの関数、すなわち標準正規分布のみを扱えばいいことになる。

2.12. ガウス積分

次の節で正規分布のモーメントを求めてく。その導出の過程で Gauss 積分を利用する。そのため、ここでは Gauss 積分を学ぶ。

2.12.1. ガウス積分の基本形

ガウス積分 $I_G(a)$ は以下のように定義される。

$$I_G(a) = \int_0^\infty \exp\left(-ax^2\right)dx \tag{76}$$

積分領域を $[0,\infty]$ から $[-\infty,\infty]$ に拡張する。その積分を $I'_G(a)$とすると

$$I'_G(a) = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-ax^2\right)dx \tag{77}$$

となる。$\exp\left(-ax^2\right)$は偶関数であるから、

$$I'_G(a) = 2I_G(a) \tag{78}$$

となる。ここで、x はダミー変数であるから、それに何を使ってもよい。そのダミー変数を x から y にすると、その積分は以下のようになる。

$$I'_G(a) = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-ay^2\right)dy \tag{79}$$

両方の積分を掛け合わせると

$$\left[I_G'(a)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ay^2\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy \tag{80}$$

となる。通常の $x-y$ 座標をカーテシアン座標と呼ぶ。

平面上の点の位置を二つの実数によって表すことをデカルトは考案した。英語では「デカルトの」という形容詞は Cartesian と綴る。人名のデカルトの綴りは Descartes だが、Des の部分はフランス語の冠詞に当たるので省かれている。

座標をカーテシアン座標から極座標に変換する。これは (x,y) から (r,θ) への変換であり、以下のように変換される。

$$x = r\cos\theta \tag{81}$$

$$y = r\sin\theta \tag{82}$$

確率密度における 2 変数の変換は

$$f(x,y)dxdy = f\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right)\left|\det J\right| d\theta dr \tag{83}$$

と表現される。ここで、J はヤコビアン行列であり、

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{84}$$

である。ここで、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \tag{85}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \tag{86}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \tag{87}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \tag{88}$$

よって、

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \tag{89}$$

$r \geq 0$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\left|\det J\right| &= |r| \\
&= r
\end{aligned}
\tag{90}
$$

である。

また、(x,y)座標系で全平面領域は、(r,θ)座標系で$r:0\to\infty$、$\theta:0\to 2\pi$となる。よって、積分は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left[I_G'(a)\right]^2 &= \int_0^\infty\left[\int_0^{2\pi}\exp\left(-ar^2\right)rd\theta\right]dr \\
&= \int_0^\infty 2\pi r\exp\left(-ar^2\right)dr
\end{aligned}
\tag{91}
$$

ここでは、二変数から二変数への変換であったが、最終的には変数の一つであるθが積分の中に入っていない。これは、変数変換前の被積分関数の中のx^2+y^2はrのみの関数であるためである。この様相を図 9 に示す。

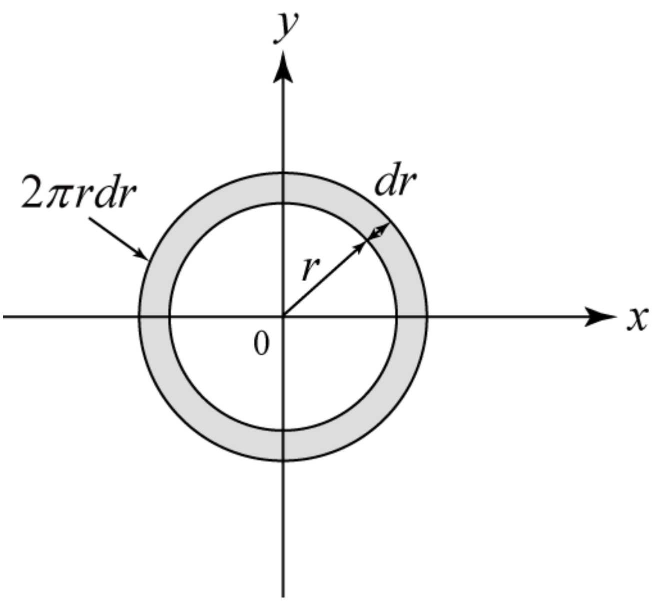


図 9 極座標変換被積分関数がrのみに依存する場合

以下の変数変換を行う。

$$
u = r^2 \tag{92}
$$

すると以下を得る。

$$
du = 2rdr \tag{93}
$$

積分に以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left[I'_G(a)\right]^2 &= \int_0^\infty 2\pi r \exp\left(-ar^2\right) dr \\
&= \int_0^\infty 2\pi r \exp(-au) \frac{1}{2r} du \\
&= \pi \int_0^\infty \exp(-au) du \\
&= \frac{\pi}{a}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

$I'_G(a) > 0$ であるから、

$$
I_G'(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{95}
$$

となる。

したがって、ガウス積分 $I_G(a)$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
I_G(a) &= \frac{1}{2} I_G'(a) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}
\tag{96}
$$

2.12.2. ガウス積分の変形

ガウス積分と関連する積分として、ガウス関数に x^{2n} を掛けたものがある。これは、正規分布のモーメントを評価する際に必要になる。その一般形は以下である。

$$
I_{G\_2n}(a) = \int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-ax^2\right) dx \tag{97}
$$

これはガウス積分を変形して求めることができる。

ガウス積分を $I_{G\_0}(a)$ とする。つまり、

$$
\begin{aligned}
I_{G\_0}(a) &= \int_0^\infty \exp\left(-ax^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}
\tag{98}
$$

である。 これを a の関数とみなす。 これを a について微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{dI_{G\_0}(a)}{da} &= \frac{d\int_0^\infty \exp\left(-ax^2\right) dx}{da} \\
&= \int_0^\infty -x^2 \exp\left(-ax^2\right) dx \\
&= -I_{G\_2}
\end{aligned}
\tag{99}
$$

となる。

一方、別の形式のものを微分して

$$\begin{aligned}\frac{dI_{G\_0}(a)}{da} &= \frac{d\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)}{da} \\ &= -\frac{1}{2^2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{100}$$

したがって、

$$I_{G\_2}(a) = \frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{101}$$

となる。

$I_{G_2}(a)$をaについて微分して

$$\frac{dI_{G\_2}(a)}{da} = \int_0^\infty -x^4 \exp\left(-ax^2\right)dx = -\frac{3}{2^3}\sqrt{\pi}a^{-\frac{5}{2}} \tag{102}$$

を得る。したがって、$I_{G\_4}(a)$ は以下のようになる。

$$I_{G\_4}(a) = \int_0^\infty x^4 \exp\left(-ax^2\right)dx = \frac{3}{2^3}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \tag{103}$$

上のプロセスを繰り返すと、一般形として

$$\begin{aligned}I_{G\_2n}(a) &= \int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-ax^2\right)dx \\ &= \frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} \\ &= \frac{\bullet(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}\end{aligned} \tag{104}$$

を得る。ただし、

$$(2n-1)!! = 1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1) \tag{105}$$

となる。つまり、!!の記号は 1 個飛ばしの積を意味する。この、積を 1 個飛ばしにする場合は、最終項が 2 の場合と 1 の場合があり、以下のように一般的に定義する。

$$\begin{aligned}(2n)!! &= (2n)(2n-2)\cdots(2) \\ &= (2n)(2n-2)\cdots\left[2n-2(n-1)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[2n-2(i-1)\right]\end{aligned} \tag{106}$$

$$
\begin{aligned}
(2n+1)!! &= (2n+1)(2n-1)\cdots(1) \\
&= (2n+1)(2n-1)\cdots[2n+1-2n] \\
&= \prod_{i=1}^{n+1}\left[2n+1-2(i-1)\right]
\end{aligned} \tag{107}
$$

先の求めたものは指数部に x の偶数冪を掛けたものであった。さらに一般化するために、指数部に x の奇数冪を掛けたものを求める。

つまり、ガウス積分と関連する他の形の積分は x^{2n+1} を掛けた

$$
I_{G\_2n+1}(a) = \int_0^{\infty} x^{2n+1}\exp\left(-ax^2\right)dx \tag{108}
$$

である。

まず $n=0$ から始める。

$$
I_{G\_1}(a) = \int_0^{\infty} x\exp\left(-ax^2\right)dx \tag{109}
$$

以下のように変数変換をすると

$$
u = x^2 \tag{110}
$$

以下を得る。

$$
du = 2xdx \tag{111}
$$

したがって、I_{G_1} は以下のように求まる。

$$
\begin{aligned}
I_{G\_1}(a) &= \int_0^{\infty} x\exp\left(-ax^2\right)dx \\
&= \int_0^{\infty} x\exp(-au)\frac{1}{2x}du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp(-au)du \\
&= \frac{1}{2a}
\end{aligned} \tag{112}
$$

これを a の関数とみなす。これを a に関して微分して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{dI_{G\_1}(a)}{da} &= \frac{d\int_0^{\infty} x\exp\left(-ax^2\right)dx}{da} \\
&= -\int_0^{\infty} x^3\exp\left(-ax^2\right)dx \\
&= -I_{G\_3}(a)
\end{aligned} \tag{113}
$$

一方では、この微分は以下となる。

$$\frac{dI_{G\_1}(a)}{da} = \frac{d\left(\frac{1}{2a}\right)}{da} = -\frac{1}{2a^2} \tag{114}$$

したがって、$I_{G\_3}(a)$ は以下となる。

$$I_{G\_3}(a) = \frac{1}{2a^2} \tag{115}$$

さらに a に関して微分して以下を得る。

$$\frac{dI_{G\_3}(a)}{da} = -\int_0^\infty x^5 \exp\left(-ax^2\right) dx = -\frac{2}{2a^3} \tag{116}$$

したがって、以下のようになる。

$$I_{G\_5}(a) = \int_0^\infty x^5 \exp\left(-ax^2\right) dx = \frac{2}{2a^3} \tag{117}$$

上のプロセスを繰り返すと、以下の一般形を得る。

$$\begin{aligned} I_{G\_2n+1}(a) &= \int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-ax^2\right) dx \\ &= \frac{2 \times 3 \times \cdots \times n}{2a^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{2a^{n+1}} \end{aligned} \tag{118}$$

以上を纏めると以下のようになる。

$$\begin{cases} I_{G\_0}(a) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \\ I_{G\_2n+1}(a) = \dfrac{n!}{2a^{n+1}} \\ I_{G\_2n}(a) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{a^{2n+1}}} \end{cases} \tag{119}$$

奇数次数の場合はここでは結果のみを示している。それは、正規分布の場合は不要であるためである。

2.13. 正規分布のモーメント

正規分布は先に示したように

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{120}$$

で与えられる。

まず 0 次のモーメントを確かめる。

$$\begin{aligned}\left\langle X^0 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx\end{aligned} \tag{121}$$

以下の変数を導入する。

$$s = \frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{122}$$

すると以下を得る。

$$x = \sqrt{2}\sigma s + \mu_1 \tag{123}$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma ds \tag{124}$$

積分は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}\left\langle X^0 \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2\right) \sqrt{2}\sigma ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times 2 I_{G\_0}(a) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\ &= 1\end{aligned} \tag{125}$$

と、確かに 1 になる。

平均、すなわち 1 次のモーメントは以下である。

$$\begin{aligned}\left\langle X \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1+\mu_1) \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1) \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx + \mu_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \mu_1\end{aligned} \tag{126}$$

2 次以上のモーメントパラメータは平均に依存しない。そこで、以後は平均を 0 と仮定して議論をすすめる。したがって、

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] \tag{127}$$

を用いる。

Y の ν 次のモーメントは以下で与えられる。

$$\left\langle Y^\nu \right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} y^\nu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy \tag{128}$$

以下の変数を導入する。

$$s=\frac{y}{\sqrt{2}\sigma} \tag{129}$$

すると以下を得る。

$$y=\sqrt{2}\sigma s \tag{130}$$

$$dy=\sqrt{2}\sigma ds \tag{131}$$

$\left\langle Y^\nu \right\rangle$ は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}\left\langle Y^\nu \right\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sigma s\right)^\nu \exp\left(-s^2\right)\sqrt{2\pi}\sigma ds\\&=\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^\nu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^\nu \exp\left(-s^2\right)ds\end{aligned} \tag{132}$$

2 次のモーメントは以下のようになる。

$$\begin{aligned}\left\langle Y^2 \right\rangle&=\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \exp\left(-s^2\right)ds\\&=\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^2}{\sqrt{\pi}}\times 2I_{G\_2}(1)\\&=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\times 2\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\\&=\sigma^2\end{aligned} \tag{133}$$

3 次のモーメントは分布の対称性から明らかに 0 である。

4 次のモーメントは以下である。

$$
\begin{aligned}
\left\langle Y^4 \right\rangle &= \frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s^4 \exp\left(-s^2\right) ds \\
&= \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \times 2 I_{G\_4}\left(1\right) \\
& \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
&= 3\sigma^4
\end{aligned}
\tag{134}
$$

したがって、正規分布のモーメントパラメータは以下のようになる。

$$
\mu_1 = \left\langle X \right\rangle \tag{135}
$$

$$
\sigma^2 = \left\langle Y^2 \right\rangle = \sigma^2 \tag{136}
$$

$$
\gamma = 0 \tag{137}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{\left\langle Y^4 \right\rangle}{\left\langle Y^2 \right\rangle^2} \\
&= \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} \\
&= 3
\end{aligned}
\tag{138}
$$

つまり、正規分布はモーメントパラメータ

$$
\begin{cases}
\mu_1 \\
\sigma^2 \\
\gamma = 0 \\
\beta = 3
\end{cases}
\tag{139}
$$

の分布である。これは、最初の二つのモーメントパラメータのみを用いて $N\left[\mu_1, \sigma^2\right]$ と記述される。

標準正規分布は正規分布の特殊な場合で、

$$
\begin{cases}
\mu_1 = 0 \\
\sigma^2 = 1^2 \\
\gamma = 0 \\
\beta = 3
\end{cases}
\tag{140}
$$

であり、$N\left[\mu_1, 1^2\right]$ と記述される。

2.14. 誤差関数

次の節で P 点を求める際に、誤差関数を利用する。ここでは、誤差関数 $Erf\left(x\right)$ について解説する。

誤差関数 $Erf(x)$ はガウス関数の積分として以下のように定義される。

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-y^2\right) dy \tag{141}$$

この関数の極限値は以下のようになる。

$$Erf(0) = 0 \tag{142}$$

$$Erf(\infty) = 1 \tag{143}$$

以下のような標準正規分布の積分を考えよう。

$$I = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \tag{144}$$

変数変換

$$t = \frac{z}{\sqrt{2}} \tag{145}$$

をすると、積分は以下になる。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-t^2\right) \sqrt{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t^2\right) dt \\ &= \frac{1}{2} Erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{146}$$

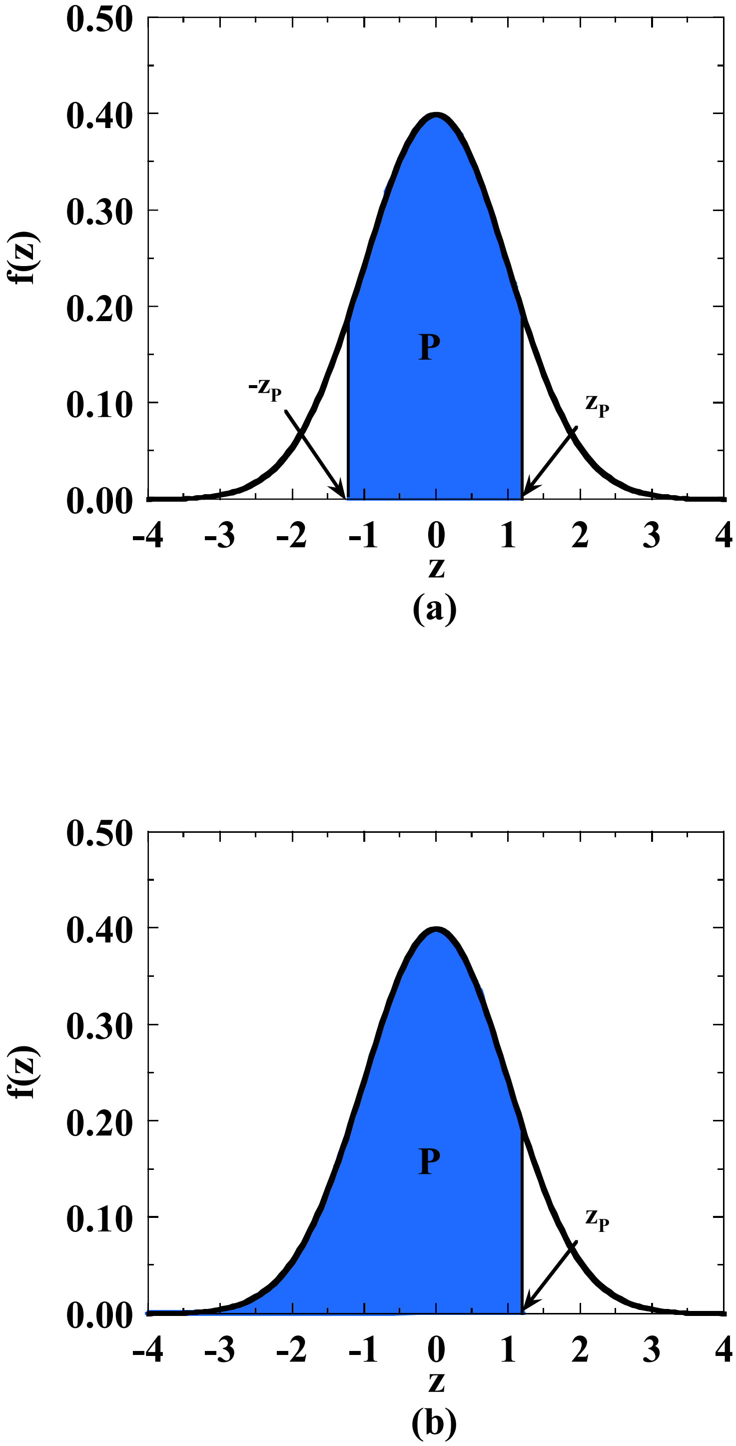


図 10　確率と z 値の関係　(a)両側確率(b)片側確率

2.15. 標準正規分布の P 点

ここでは、標準正規分布と確率の関係を議論する。

標準正規分布においては、規格化値が決まれば、それに対応する確率は 1 対 1 で決まる。さらに、図 10 に示すように確率には片側確率と両側確率がある。

両側確率においては、我々は値の精度を問題にする。つまり、ある値に近いかどうかを問題にする。それが大きくても、小さくてもダメである場合に利用される。

片側確率の場合は、我々はある値が、臨界値よりも大きいか、または小さいかのみを問題にする。つまり、片側だけの確率を問題にする。在庫問題を考えよう。この場合は、臨界の値を超えていれば問題にするが、それ以外は問題にならない。つまり、小さい場合は対応できているから問題にならない。したがって、この場合は、ある値より大きいか、小さいかのみが問題になり、片側確率が利用される。以上のように、両側、片側のどちらの確率を利用するかは、その問題が何を扱うのかに依存する。

両側確率の場合、確率 P は対応する P 値 z_p と

$$\begin{aligned} P &= \int_{-z_P}^{z_P} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= Erf\left(\frac{z_P}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{147}$$

と関連付けられる。ただし、Erf は誤差関数であり、以下のように定義される。

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-y^2\right) dy \tag{148}$$

したがって、

$$z_P = \sqrt{2} Erf^{-1} P \tag{149}$$

となる。この z_p は P 値と呼ばれる。

片側確率の場合は、確率 P は対応する P 値 z_p と

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{z_P} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + Erf\left(\frac{z_P}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{150}$$

と関連付けられる。したがって、P 値は以下で与えられる。

$$z_P = \sqrt{2} Erf^{-1}\left(2P - 1\right) \tag{151}$$

2.16. 標準正規分布と確率

標準正規分布から我々がとるべき情報は、あるzの領域に対応する確率と、その逆のある確率になるzの領域である。確率を考える場合は、図 10 に示すように、zの領域を考える場合の両側確率と、ある値以上であるかどうかを問題にする片側確率がある。両者で確率が決まれば、それに対応するzの値z_Pが決まる。

自分の点数から集団のμ, σを使ってzを評価すると、自分が上位何%にいるかがわかる。

また、その集団からあるサンプルを取り出したとき、その取りうる値は推定確率をPとすると

$$-z_P \le z \le z_P \tag{152}$$

が要請される。これは

$$-z_P \le \frac{x-\mu_1}{\sigma} \le z_P \tag{153}$$

である。

左側の不等式を展開して

$$-z_P \le \frac{x-\mu_1}{\sigma} \tag{154}$$

$$x \ge \mu_1 - z_P\sigma \tag{155}$$

を得る。右側の不等式を展開して

$$\frac{x-\mu_1}{\sigma} \le z_P \tag{156}$$

$$x \le \mu_1 + z_P\sigma \tag{157}$$

を得る。これらを纏めて

$$\mu_1 - z_P\sigma \le x \le \mu_1 + z_P\sigma \tag{158}$$

となる。つまり、集合から取ったサンプルの値の範囲を予想できるようになる。これが推定と呼ばれるものである。

またあるサンプルの値xが集合Aに属するとみなせるかは集合Aの平均値μ_Aと標準偏差σ_Aを使って標準化変数

$$z = \frac{x-\mu_A}{\sigma_A} \tag{159}$$

を評価し、それが指定した確率Pのもとでそれに対応するz_Pとの関係で

$$-z_P \le z \le z_P \tag{160}$$

を満足すれば、そのサンプルは A と同じグループのものとみなすことができ、満足しなければ同じグループとみなされない。これが検定と呼ばれるものである。

よく利用される点での具体的な値を見ていこう。

まず z の領域に対する確率をみていく。z の値としては区切りのいい 1, 2, 3 を考える。

両側確率の場合、

$$\begin{cases} -1 \le z \le 1 : 68.8\% \\ -2 \le z \le 2 : 95.5\% \\ -3 \le z \le 3 : 99.7\% \end{cases} \tag{161}$$

である(図 11)。これは実際の値 x に換算すると

$$\begin{cases} \mu_1 - \sigma \le x \le \mu_1 + \sigma : 68.8\% \\ \mu_1 - 2\sigma \le x \le \mu_1 + 2\sigma : 95.5\% \\ \mu_1 - 3\sigma \le x \le \mu_1 + 3\sigma : 99.7\% \end{cases} \tag{162}$$

となる。

また、$x = \mu_1 \pm 2\sigma$ の範囲にはデータの 95.5%が入っていることがわかる。このことから、この範囲にほとんど全てのデータが入っていることになるから、これから標準偏差 σ のおおよその値を予測することができる。

例えば、成人男性の平均身長は 170cmとする。ほとんどの成人男性は身長 160～180cm の間に入っているだろう。すると

$$4\sigma = 180 - 160 \tag{163}$$

から、

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{180-160}{4} \\ &= 5 \end{aligned} \tag{164}$$

と標準偏差の値に対して当たりをつけることができる。

片側確率の場合、

$$\begin{cases} z \le 1 : 84.1\% \\ z \le 2 : 97.7\% \\ z \le 3 : 99.9\% \end{cases} \tag{165}$$

である(図 12)。これは実際の値 x に換算すると

$$\begin{cases} x \le \mu_1 + \sigma : 84.1\% \\ x \le \mu_1 + 2\sigma : 97.7\% \\ x \le \mu_1 + 3\sigma : 99.9\% \end{cases} \tag{166}$$

となる。

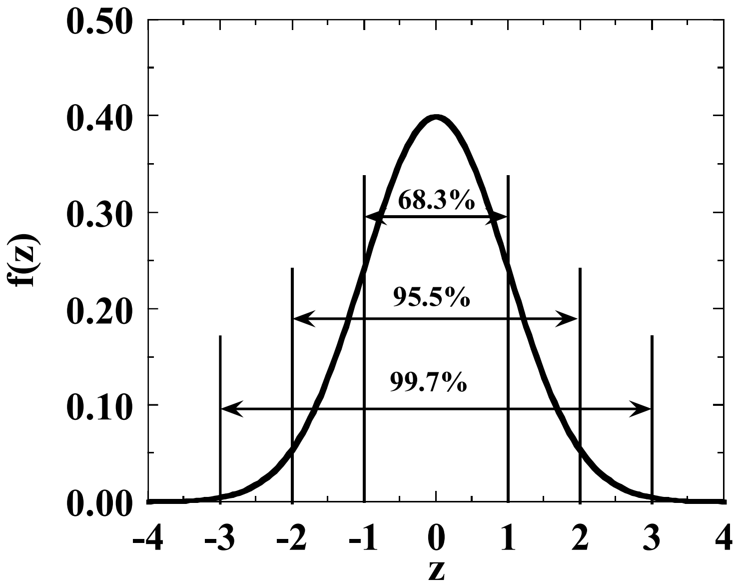


図 11　z =1、2、3 と関連する両側確率の関係

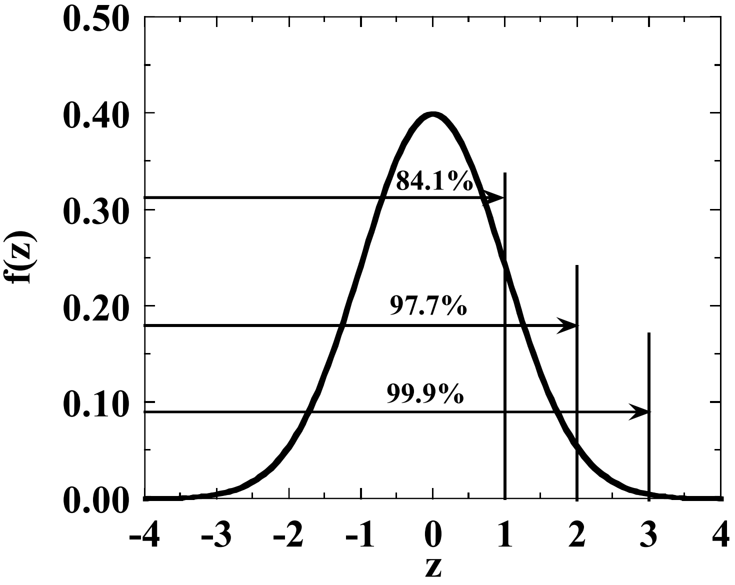


図 12　z =1、2、3 と関連する片側確率の関係

以上をおおまかにまとめると、以下の図 13 のようになる。これは、2,14,34 の法則と呼ばれる。この数値を覚えておけば、おおよその確率の感覚を得ることができる。

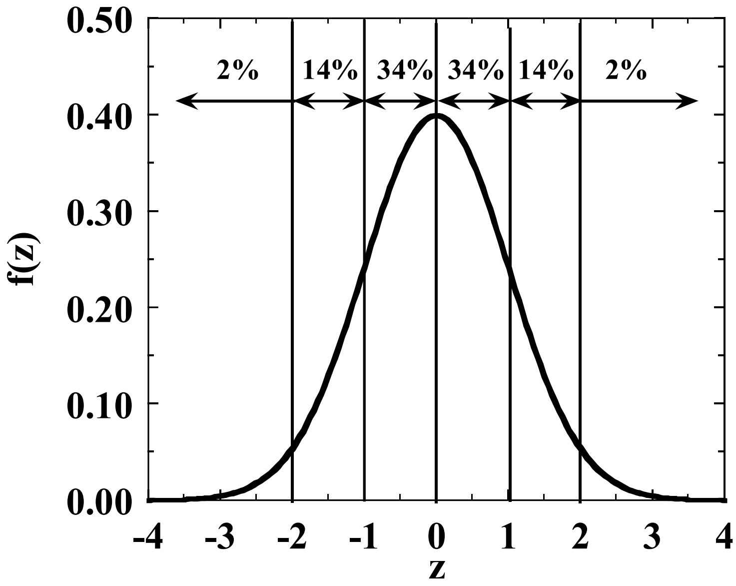


図 13　z 値の各領域と確率の関係

一方、ある確率 P に対応する z の値 z_P を求めることも重要である。確率としては 90, 95, 99%がよく用いられる。

両側確率の場合、

$$\begin{cases} 90\% : -1.64 \le z \le 1.64 \to z_{P=0.9} = 1.64 \\ 95\% : -1.96 \le z \le 1.96 \to z_{P=0.95} = 1.96 \\ 99\% : -2.58 \le z \le 2.58 \to z_{P=0.99} = 2.58 \end{cases} \tag{167}$$

となる(図 14)。

片側確率の場合

$$\begin{cases} 90\% : z \le 1.28 \to z_{P=0.9} = 1.28 \\ 95\% : z \le 1.64 \to z_{P=0.95} = 1.64 \\ 99\% : z \le 2.33 \to z_{P=0.99} = 2.33 \end{cases} \tag{168}$$

となる(図 15)。

確率 100%にすると $z_P = \infty$ になり、予測する範囲は無限大になる。つまり値を予測していることにならない。しかし、100%よりわずかに小さな 99%にすると、途端に 3 よりも小さな値になる。これは正規分布が急激に 0 に近づく強い関数であることに起因する。

zと推定確率Pの一般的な関係を図 16 に示す。

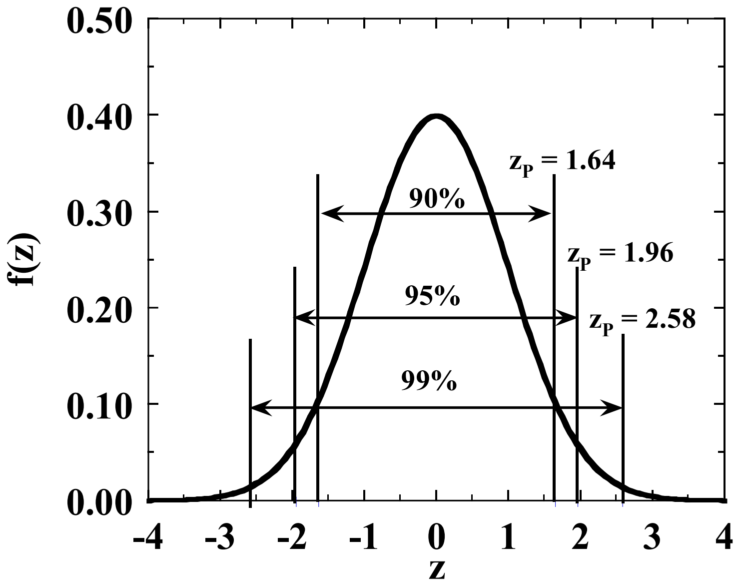


図 14　両側確率$P = 90, 95, 99\%$の場合のz_P

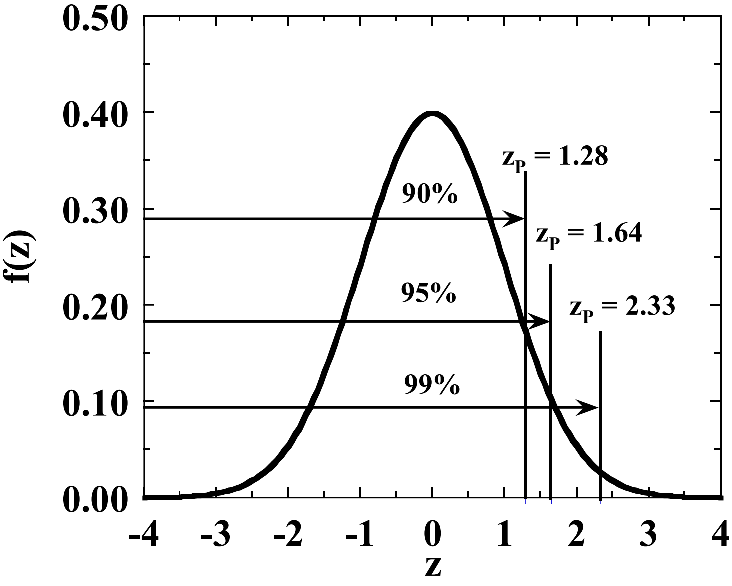
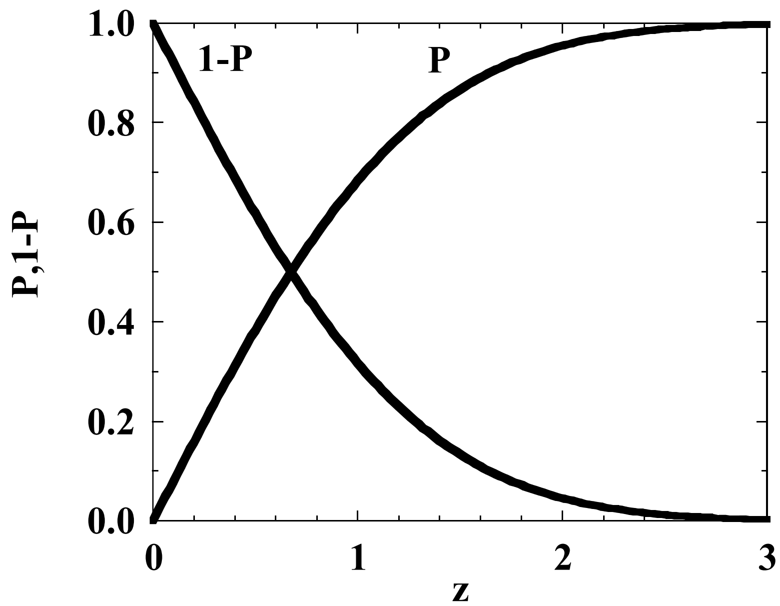
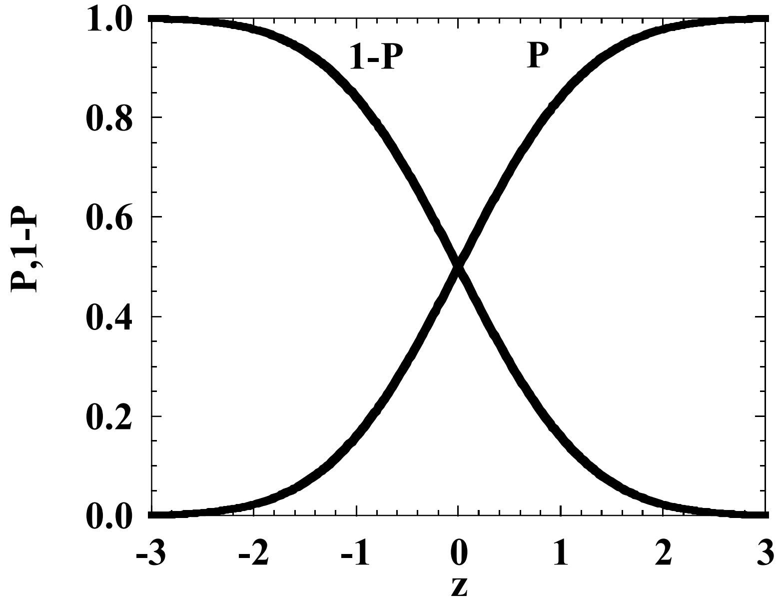


図 15　片側確率 P = 90, 95, 99%関連する z_P の関係



(a)



(b)

図 16　確率と z の関係. (a) 両側確率, (b)片側確率

2.17. 二項分布の正規分布近似

二項分布はその扱いやすさのためにしばしば正規分布近似される。しかし、二項分布は確率分布であり、正規分布は確率密度分布であり、両者は扱っている単位が異なる。したがって、違うものであるから、近似は単純にはできないはずである。

確率密度分布は確率分布の階級幅で割ったものであった。二項分布の場合は階級幅は 1 である。したがって、二項分布の場合は確率分布であるが、それを確率密度分布に変換しても不変である。したがって、実際にやっていることは、二項分布を対応する二項確率分布に変換し、それを正規分布近似していることになる。

我々はまず二項分布から始め、それが正規分布に近づいていくことを示す。

まず、二項分布の対数をとる。それは以下のようになる。

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \ln\left[{}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}\right] \\ &= \ln\left[\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}\right] \\ &= \ln n! - \ln(n-x)! - \ln x! + x\ln p + (n-x)\ln(1-p)\end{aligned} \tag{169}$$

これを x について微分し、以下を得る。

$$\frac{d\ln f(x)}{dx} = -\frac{d\ln(n-x)!}{dx} - \frac{d\ln x!}{dx} + \ln p - \ln(1-p) \tag{170}$$

ここで、試行回数nは十分大きく、さらに$x \gg 1$を仮定する。すると

$$\begin{aligned}\frac{d\ln x!}{dx} &= \frac{\ln(x+\Delta x)! - \ln x!}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\ln(x+1)! - \ln x!}{1} \\ &= \ln(x+1)\end{aligned} \tag{171}$$

と近似できる。ここで、$x \gg 1$を仮定しているから、xの微小変化量Δxを 1 と近似している。同様に以下の近似が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{d\ln(n-x)!}{dx} &= \frac{\ln(n-(x+\Delta x))! - \ln(n-x)!}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\ln(n-(x+1))! - \ln(n-x)!}{1} \\ &= -\ln(n-x)\end{aligned} \tag{172}$$

したがって、微分は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned}\frac{d\ln f(x)}{dx} &= \ln(n-x) - \ln x + \ln p - \ln(1-p) \\ &= \ln\left(\frac{n-x}{x}\frac{p}{1-p}\right)\end{aligned} \tag{173}$$

aを ${}^{d\ln f}\!/_{dx} = 0$ となるxであるとする。すると

$$\frac{n-a}{a}\frac{p}{1-p} = 1 \tag{174}$$

これをaについて解くと以下のようになる。

$$a = np \tag{175}$$

Eq. (173) をさらにxで微分すると、以下を得る。

$$\frac{d^2\ln f(x)}{dx^2} = -\left(\frac{1}{n-x} + \frac{1}{x}\right) \tag{176}$$

$x = a$ における二次の微分は以下になる。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2 \ln f(x)}{dx^2}\right|_{x=a} &= -\left(\frac{1}{n-a}+\frac{1}{a}\right) \\
&= -\frac{n}{(n-a)a} \\
&= -\frac{n}{(n-np)np} \\
&= -\frac{1}{np(1-p)} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}
\end{aligned}
\tag{177}
$$

ここで、

$$
\sigma^2 = np(1-p) \tag{178}
$$

である。したがって、$\ln f(x)$は $x=a$ についてテイラー展開すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln f(\mu) + (x-a)\left.\frac{d \ln f(x)}{dx}\right|_{x=a} + \frac{1}{2}(x-a)^2 \left.\frac{d^2 \ln f(x)}{dx^2}\right|_{x=a} + \cdots \\
&= \ln f(a) - \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{179}
$$

したがって、以下のように近似される。

$$
f(x) = f(a)\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{180}
$$

$f(a)$ は全ての確率の和が 1 であることから決定される。つまり

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx = 1 \tag{181}
$$

これから、

$$
f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{182}
$$

を得る。したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(npq)}\exp\left[-\frac{(x-np)^2}{2(npq)^2}\right]
\end{aligned}
\tag{183}
$$

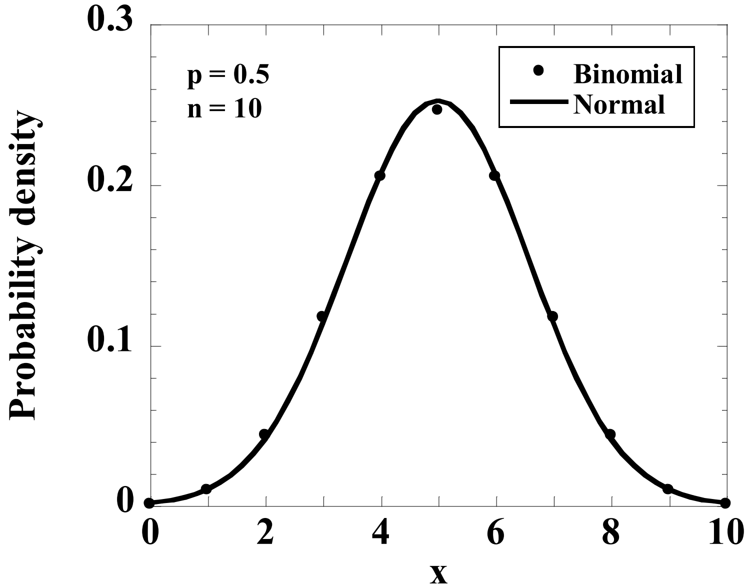
ただし、

$$q = 1 - p \tag{184}$$

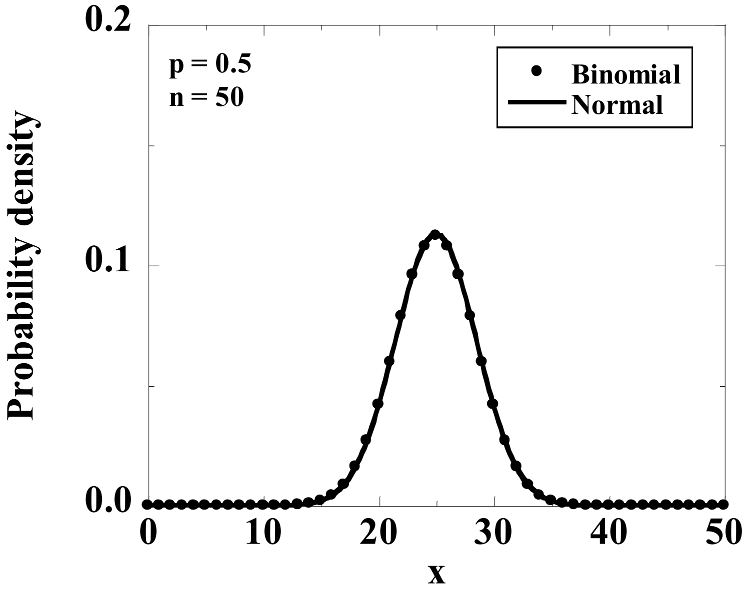
である。

二項分布の近似としてみた場合の正規分布の精度をここでは議論する。

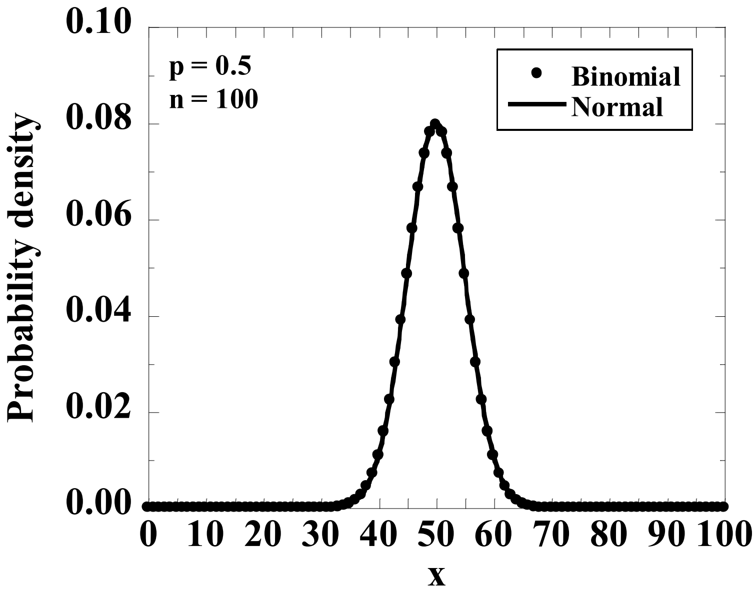
図 17 に示すように、$p = 0.5$ の場合はサンプル数が 10 の場合でも正規分布は二項分布をよく近似している。



(a)



(b)

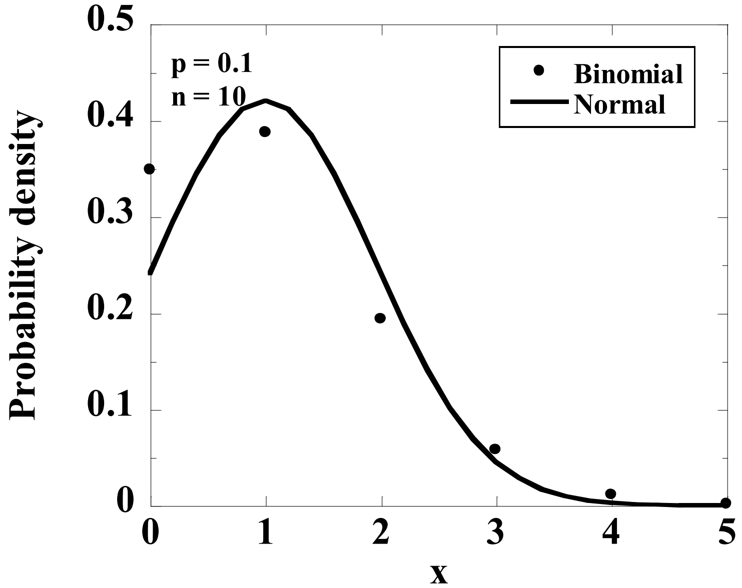


(c)

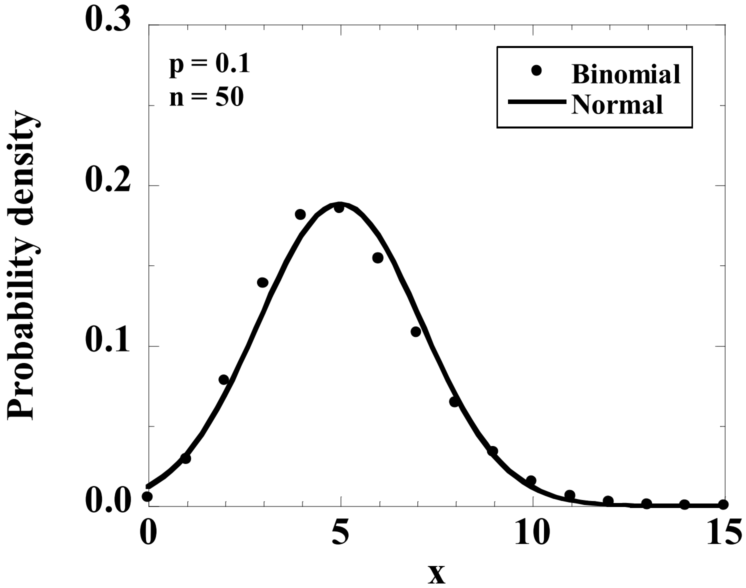
図 17　正規分布と二項分布の比較。p が 0.5 の場合。 (a) n = 10, (b) n = 50, (c) n=100.

図 18 に示すように、$p = 0.1$ の場合は、$n = 10$ では、正規分布近似の精度はあまりよくない。し

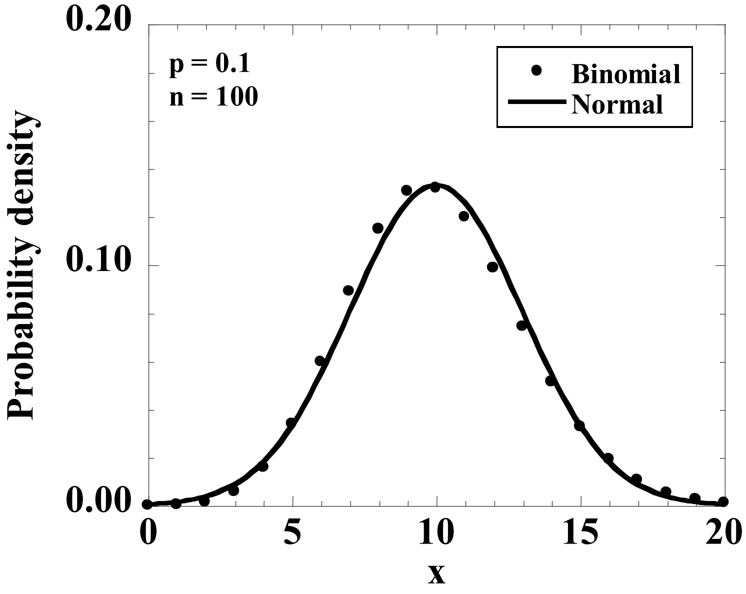
かし、 n が 50 では精度がいい。



(a)



(b)



(c)

図 18　正規分布と二項分布の比較。p が 0.1 の場合。 (a) $n=10$, (b) $n=50$, (c) $n=100$

近似の過程で、我々は$x \gg 1$を利用している。したがって、近似の有効性は

$$np \gg 1 \tag{185}$$

で表現される。$p=0.5$では、$n=10$では、$np=5$ であり、1 よりは十分大きい。$p=0.1$, では$n=10$で$np=1$ であり、近似の精度が悪いことがわかる。$n=50$とすると、$np=5$となり、近似が成り立つ。

2.18. 指数分布:確率密度分布

起こる確率が小さい場合を考える。

ある事象が時間間隔$\left[t, t+\Delta t\right]$ の間に起こる確率は

$$P = f\left(t\right)\Delta t \tag{186}$$

と表現される。この確率は以下のようにも解釈される。

事象は時間tまでの間は起こらず、次のΔtの時間の中で起こる。これは、パラメータa を使っ

て、以下のようにも表現される。

$$P=\left[1-\int_0^t f(t)\,dt\right]\frac{\Delta t}{a} \tag{187}$$

両確率を等しいと置いて

$$f(t)=\left[1-\int_0^t f(t)\,dt\right]\frac{1}{a} \tag{188}$$

を得る。これをtに関して微分して以下を得る。

$$\frac{df(t)}{dt}=-\frac{f(t)}{a} \tag{189}$$

これは以下のように解くことができる。

$$\ln f(t)=-\frac{t}{a}+C \tag{190}$$

これは変形して

$$f(t)=A\exp\left(-\frac{t}{a}\right) \tag{191}$$

となる。

全ての場合の確率の和が 1 になることから、以下を要請する。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\,dt &= A\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{a}\right)dt\\ &= Aa\\ &= 1\end{aligned} \tag{192}$$

したがって、確率密度分布として以下を得る。

$$f(x)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\quad (for\ 0<x<\infty) \tag{193}$$

ここで、確率変数をt から x に変えている。

様々なaにおける指数分布を図 19 に示す。どの場合もxが増加するにしたがって減少していく。 aが大きいほど減少の傾きは小さくなっていく。

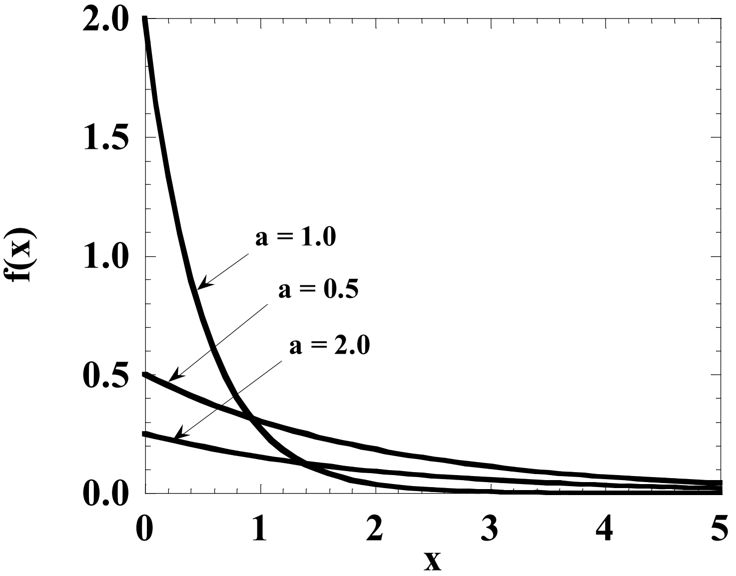


図 19　様々な a における指数分布

領域 $\left[0,x\right]$ まで事象が起こらない累積確率は以下となる。

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 1-\int_0^x f(x)dx \\
&= 1-\int_0^x \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx \\
&= 1+\left[\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\right]_0^x \\
&= \exp\left(-\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}
\tag{194}
$$

この分布のモーメントを求める。

1 次のモーメントは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \int_0^\infty x\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx \\
&= \left[x\frac{1}{a}(-a)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\right]_0^\infty + a\int_0^\infty \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx \\
&= a
\end{aligned}
\tag{195}
$$

したがって、この分布の平均は a である。すなわち

$$\mu_1 = \langle X \rangle = a \tag{196}$$

2 次のモーメントは以下になる。

$$\begin{aligned}\langle X^2 \rangle &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx \\ &= \left[x^2 \frac{1}{a}(-a)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\right]_0^\infty + 2\mu \int_0^\infty x \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx \\ &= 2a^2\end{aligned} \tag{197}$$

したがって、2 次の中心モーメントは以下になる。

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \sigma^2 \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \\ &= 2a^2 - a^2 \\ &= a^2\end{aligned} \tag{198}$$

2.19. アーラン分布

アーラン分布は待ち行列理論を提案したアーランによって提案された分布である。これは、1 つの仕事が複数の要素からなくとしてモデル化されたものである。

ここで、一つのサービスが等価が k 個のフェーズからなるとする。個々のフェーズの平均サービス時間は $1/(k\mu)$ であるとする。

これは指数分布に従うとする。すなわち

$$f(x) = k\mu e^{-k\mu x} \tag{199}$$

ここで $x \geq 0$ である。したがって、$x < 0$ では $f(x) = 0$ である。この分布を以下のように書き換える。

$$f(x) = k\mu e^{-k\mu x} u(x) \; for -\infty \leq x \leq \infty \tag{200}$$

ここで、$u(x)$ は以下のように定義される。

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{201}$$

これにより、この分布の定義域は無限平面に変更された。

確率変数の和を考える。

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{202}$$

各確率変数 X_i は指数分布に従うとする。すなわち、

$$f(x_i) = k\mu e^{-k\mu x_i} u(x_i) \tag{203}$$

である。この確率は待ち行列理論ではサービス時間に対して適用される。

確率変数 Y_k に対する確率密度を f_k とすると、その f_1, f_2 は以下で与えられる。

$$f_1(y) = k\mu e^{-k\mu y} u(y) \tag{204}$$

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} k\mu e^{-k\mu(y-s)} u(y-s) k\mu e^{-k\mu y} u(s) ds u(y) \\ &= \int_0^y k\mu e^{-k\mu(y-s)} k\mu e^{-k\mu y} ds u(y) \\ &= (k\mu)^2 e^{-k\mu y} \int_0^y ds u(y) \\ &= (k\mu)^2 y e^{-k\mu y} u(y) \end{aligned} \tag{205}$$

さらに次を考える。

$$Y_3 = Y_2 + X_3 \tag{206}$$

これは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} f_3(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (k\mu) e^{-k\mu(y-s)} u(y-s) (k\mu)^2 s e^{-k\mu s} u(s) ds u(y) \\ &= \int_0^y (k\mu)^3 e^{-k\mu(y-s)} s e^{-k\mu s} ds u(y) \\ &= \frac{(k\mu)^3 y^2}{2!} e^{-k\mu y} u(y) \end{aligned} \tag{207}$$

上の結果を観察すると、$f_k(y)$ は以下で表現されると考えられる。

$$f_k(y) = \frac{(k\mu)^k y^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu y} u(y) \tag{208}$$

これを数学的帰納法で証明する。
この形式が成り立つとする。この場合、$k+1$ では以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} k\mu e^{-k\mu(y-s)} u(y-s) \frac{(k\mu)^k s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu s} u(s)\, dsu(y) \\
&= \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} e^{-k\mu y} \int_0^y s^{k-1} dsu(y) \\
&= \frac{(k\mu)^k s^k}{(k-1)!k} e^{-k\mu y} u(y) \\
&= \frac{s^{(k+1)-1}}{\left[(k+1)-1\right]!\mu^{k+1}} e^{-\frac{y}{\mu}} u(y)
\end{aligned}
\tag{209}
$$

したがって、これは$k+1$でも成り立つ。したがって、表式は全てのkについて成り立つ。したがって、アーラン分布は以下のようになる。

$$
f_k(y) = \frac{(k\mu)^k y^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu y} \quad for\ y \ge 0 \tag{210}
$$

yはダミー変数であるから、何に変えてもいい。ここではxに変えて

$$
f_k(x) = \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x} \qquad for\ x \ge 0 \tag{211}
$$

となる。

アーラン分布のモーメントを求める。

1 次のモーメントは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\langle X \rangle &= \int_0^{\infty} x \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x} dx \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x=0}^{\infty} (k\mu x)^k e^{-k\mu x} dx \\
&= \frac{1}{k\mu} \frac{1}{(k-1)!} \int_{s=0}^{\infty} s^k e^{-s} ds \\
&= \frac{1}{k\mu} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{k\mu} k \\
&= \frac{1}{\mu}
\end{aligned}
\tag{212}
$$

2 次のモーメントは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^2 \right\rangle &= \int_0^\infty x^2 \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x} dx \\
&= \frac{1}{k\mu(k-1)!} \int_0^\infty (k\mu x)^{k+1} e^{-k\mu x} dx \\
&= \frac{1}{(k\mu)^2 (k-1)!} \int_0^\infty s^{k+1} e^{-s} ds \\
&= \frac{1}{(k\mu)^2 (k-1)!} \Gamma(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)}{(k\mu)^2}
\end{aligned} \tag{213}
$$

したがって、中心モーメントは以下のようになる。

$$
\mu_1 = \langle X \rangle = \frac{1}{\mu} \tag{214}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \sigma^2 \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \\
&= \frac{k(k+1)}{(k\mu)^2} - \frac{1}{\mu^2} \\
&= \left(\frac{k+1}{k} - 1 \right) \frac{1}{\mu^2} \\
&= \frac{1}{k\mu^2}
\end{aligned} \tag{215}
$$

図 20 に様々な k におけるアーラン分布を示す。ここで、 $1/\mu = 3$ としている。分布は The $k=1$,で指数分布であり、k が増すにつれステップ関数に近づいていく。したがって、アーラン分布は指数分布からステップ関数までを同じ平均値で連続的に表現する。この関数の待ち行列への適用は章#で詳しく議論する。

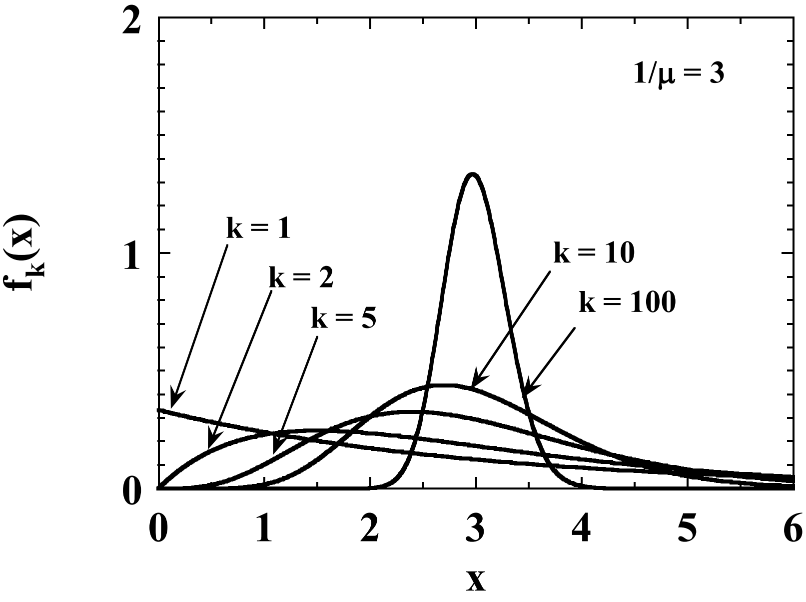


図 20　さまざまな k におけるアーラン分布。 $1/\mu = 3$ としている

2.20. まとめ

この章のまとめを以下に示す。

ここでは、種々の確率分布および確率密度分布を扱った。

離散値には確率分布、連続値には確率密度分布が対応する。

ベルヌーイ分布の場合はデータは 0 か 1 であり、確率分布は以下である。

$$\begin{cases} f(1) = p \\ f(0) = q = 1 - p \end{cases}$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = p$$

$$\mu_2 = pq$$

二項分布は確率分布であり、以下で与えられる。

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = np$$

$$\mu_2 = npq$$

ポアソン分布は確率分布であり、以下で与えられる。

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = \mu$$

$$\mu_2 = \mu$$

正規分布は確率密度分布であり、以下で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = \mu_1$$

$$\mu_2 = \sigma^2$$

標準正規分布は確率密度分布であり、以下で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 1$$

指数分布は確率密度分布であり、以下で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = a$$

$$\mu_2 = a^2$$

アーラン分布は確率密度分布であり、フェーズ k のものは以下で与えられる。

$$f_k(x) = \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}$$

この 1 次、2 次の中心モーメントは以下で与えられる。

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{k\mu^2}$$