14. マルコフプロセス と待ち行列理論

概要: マルコフプロセスにおいては、次の状態は現在の状態からのみ決まり、それ以前の状態は無関係である。待ち行列理論は、その意味でマルコフプロセスに属する。マルコフプロセスにおいては、遷移行列が用いられる。任意の時間ステップ後の状態はこの行列の掛け算から求めることができる。 ここでは、これまで解析してきた待ち行列がマルコフプロセスの遷移行列によって表現されることを示す。

キーワード:マルコフプロセス;遷移行列;状態確率

14.1. 序

マルコフプロセスは、次の状態は現在の状態のみで決まり、過去の状態には依存しないというものである。その遷移は遷移行列で表現できる。これまで検討してきた待ち行列理論は遷移行列の形式に表現できる。遷移行列は、現状の状態が次の状態にいく確率を表すことを示す。初期状態を示すものとしてベルトルを定義する。すると、ある時間ステップ後の状態は遷移行列の積で表現されることを示す。ここでは、これまで展開してきた待ち行列理論がマルコフプロセスでも表現されることを示す。

14.2. 状態と初期条件

図 1　5 つの状態の模式図

マルコフプロセスにおいても系の状態を考える。ここでは、図 1 に示すように 5 つの状態を考える。状態は、この状態のいずれかを取るものとする。対応する状態を $ST1, ST2, ST3, ST4, ST5$ とする。待ち行列理論では STi はその状態に対する確率であった。したがって、対応する数値は確率であり、初期条件は正の 1 以下数値で、全ての要素の足し合わせた和が 1 である必要がある。たとえば、図 2 は状態 3 にあることを表している。

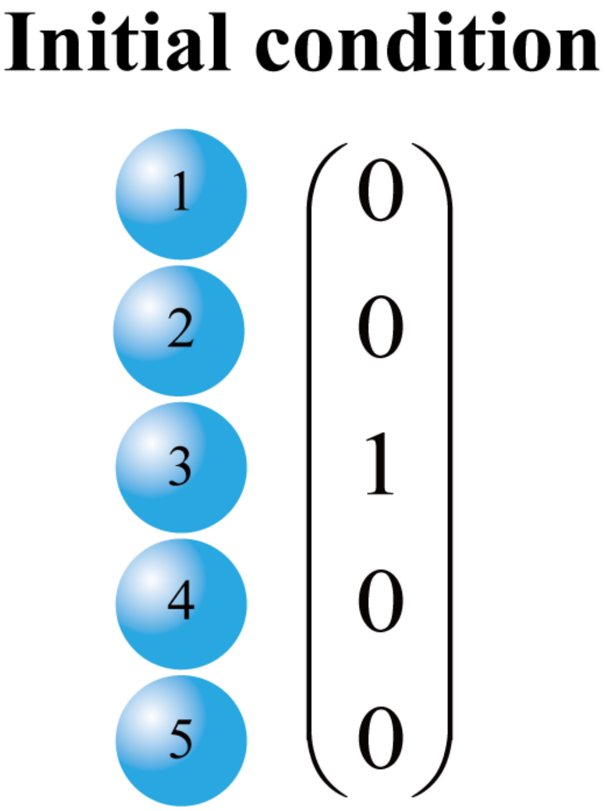

図 2　5 つの状態の対する初期条件。ここでは、初期状態は状態 3 にあることを表している。待ち行列理論では確率を表し、全ての数値の和が 1 である必要ある

14.3. 遷移行列

次に遷移行列を考える。5 つの状態に対応する遷移行列を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \tag{1}$$

STi の次の状態は、以下のように表現されるとする。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ST1 \\ ST2 \\ ST3 \\ ST4 \\ ST5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

この遷移行列、およびベクトルの意味するところを考えていく。

$ST2$ の次の状態は、上の式の演算をし、ベクトルを得、上から 2 番目の数値に注目すればばい

い。それは、

$$ST2 \rightarrow a_{21}ST1 + a_{22}ST2 + a_{23}ST3 + a_{24}ST4 + a_{25}ST5 \tag{3}$$

となる。これは、次のステップの $ST2$ は現在の $ST1$ に a_{21} をかけたもの、現在の $ST2$ に a_{22} を掛けたもの、・・・、現在の $ST5$ に a_{25} を掛けたものとして表現されている。以上を一般化すると、STi の次の状態は

$$STi \rightarrow a_{i1}ST1 + a_{i2}ST2 + a_{i3}ST3 + a_{i4}ST4 + a_{i5}ST5 \tag{4}$$

となる。対応する状態遷移図を図 3 に示す。つまり、次のステップの状態 i は現在の状態に対する数値に状態 i に対する遷移確率を掛けたものの和になる。

以上から、a_{ij} は状態 j から状態 i への 1 回のステップでの遷移確率であると解釈できる。

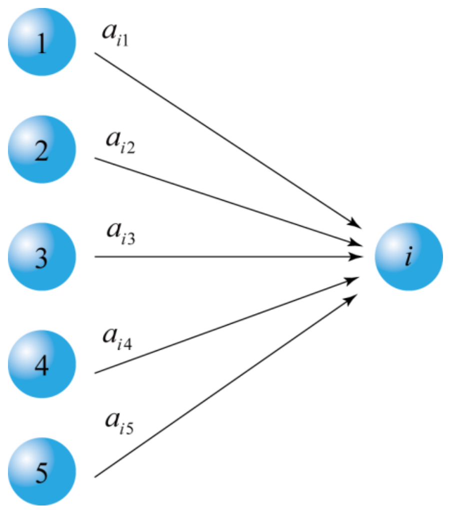

図 3　5 つの状態から状態 i への遷移

図 4 に示すように状態 j から遷移する i としては $1,2,3,4,5$ しかない。つまり、

$$\sum_{i=1}^{5} a_{ij} = 1 \tag{5}$$

となる。つまり、どの列の要素の和も 1 になる。

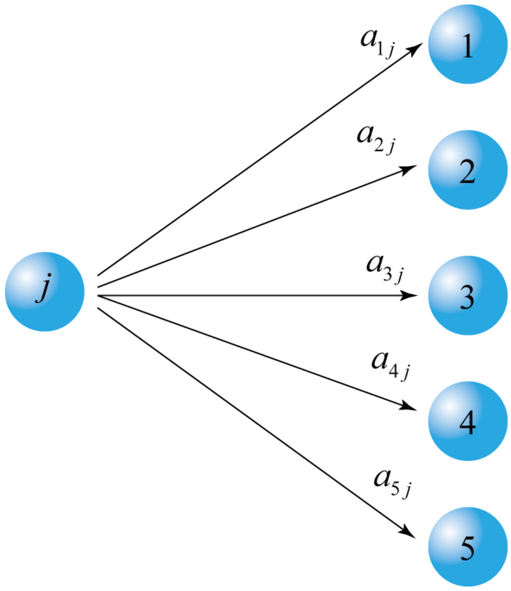

図 4　5 つの状態から状態 i への遷移

以上より、遷移行列の要素は遷移する確率を表し、列の和は 1 になることがわかる。

また、この状態を k 回繰り返す場合は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} ST1 \\ ST2 \\ ST3 \\ ST4 \\ ST5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

とすればいい。

14.4. 消失および消失モニター

消失プロセスが欲しい場合がある。そこでは、次のステップでは、現在あるものは 0 になり、新たに入ってくるものはそのままになる。

その状態を C_v をおくと、その C_v に対応する列の要素は以下になる。 ここでは、状態 2 をその消失を表すノード C_v としている。

$$\begin{pmatrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{42} = 0 \\ a_{52} = 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

これは、自分を 0 にし、他への遷移もなしにしている。この場合は、現在のある量を消失さ

せている。また、その他の要素を 0 にしていることで、そこから出ていく成分もないことを表している。つまり、現在ある量を単純に消し去っている。しかし、次のステップで、他の状態から入ってくるものに対しては何の操作もしていいない。したがって、次のステップにおいては、現在の量を消し去り、次のステップで入って来る量のみをモニターしている。この場合は、列の確率の和は 1 であるという制約は適用されない。

もし、消失の累積をとるのであれば、

$$\begin{pmatrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = 0 \\ a_{42} = 0 \\ a_{52} = 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とすればいい。これは、扱っている総量は不変であるから、列の枠率の和は 1 であるという制約は適用される。

14.5. 一人のサービスメンバーの場合の待ち行列

メンバー数 1 人の場合の銀行のサービスについて考えよう。

銀行に行った場合、サービス窓口が埋まっている場合は我々は待ち、空いていれば即座にサービスを受けることができる。これを遷移行列で表現する。

我々は一人のサービスメンバーを仮定し、最大 5 人まで待ち人数を許すとする。したがって、系にいることのできる最大人数は 6 である。このシステムは M/M/1(6)と表現される。対応する系を図 5 に示す。この場合、系を表現する状態は 0, 1, 2, 3, 4, 5, および 6 である。対応する確率を $P(0), P(1), \cdots, P(6)$ とする。

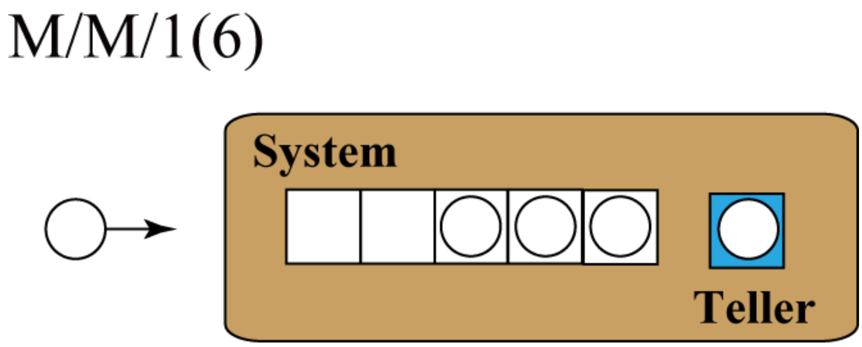

図 5　M/M/1(6) の系

ここで微小時間 Δt を考える。Δt の間に系に一人来る確率は $\lambda\Delta t$ である。系から一人出ていく確率は $\mu\Delta t$ である。ここで、入力頻度は以下である。

状態 0 を考える。

次の状態を考える。

もし、この状態に顧客が来なければ、そのままの状態になる。対応する確率は$1-\lambda\Delta t$ である。

もし、顧客が系を訪問すれば、状態は 1 になる。対応する確率は $\lambda\Delta t$ である。

次に状態 1 を考える。

この状態で何も起こらなければ状態 1 のままである。対応する確率は $(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$ である。

もし、顧客が系を訪問すれば状態は 2 になる。そうなる確率は $\lambda\Delta t$ である。

サービスが終われば、状態は 1 から 0 になる。対応する確率は $\mu\Delta t$ である。

状態 2, 3, 4, は 5 は状態 1 と同じである。

最後に状態 6 を考える。

状態が変わらないことを考える。それは、何も起こらないことに相当する。それは、サービスが終わらないことに相当する。対応する確率は$1-\mu\Delta t$ である。

もし、サービスが終われば状態は 5 になる。対応する確率は $\mu\Delta t$ である。

以上に対応する遷移行列は以下となる。

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\mu\Delta t \end{pmatrix} \tag{9}$$

この状態で時間ステップを踏んでいくことになる。ここで、初期条件として、$P(0)=1$とし、他の要素は 0 とする。すると、n ステップ後の状態は以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & \mu\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\mu\Delta t \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(10)

ここで、は n はサイクルである。

$P(0), P(1), \cdots, P(6)$を評価できれば、Lと L_q を以下のように評価できる。

$$L = 1 \times P(1) + 2 \times P(2) + 3 \times P(3) + 4 \times P(4) + 5 \times P(5) + 6 \times P(6) \tag{11}$$

$$L_q = 1 \times P(2) + 2 \times P(3) + 3 \times P(4) + 4 \times P(5) + 5 \times P(6) \tag{12}$$

関連する待ち行列理論を再掲する。

$$P_n = \rho^n P_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N) \tag{13}$$

ここで、 P_0 は以下である。

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \tag{14}$$

待ち行列と系にいる人数は以下である。

$$L_q = \frac{\rho P_1}{(1-\rho)^2} - \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{N-1}{1-\rho} \right] \rho P_N \tag{15}$$

$$L = \rho(1 - P_N) + L_q \tag{16}$$

$\lambda = 3, \mu = 4, \Delta t = 0.001$として、このマルコフ理論の結果と待ち行列理論の結果を示す。ステップ数 n は 10000 としている。この場合はマルコフ理論は定常状態に達しているとみなすことができるであろう。

両者の状態確率は表 1 に示す通りよく一致する。また、また表 2 に示すように両者の系の滞在人数、系での待ち行列数もよく一致する。

表 1　マルコフプロセスによる状態確率の評価と待ち行列理論の状態確率

	ステップ数	10000	
Probability	Initial	Final	Analytical
P0	1	0.29	0.29
P1	0	0.22	0.22
P2	0	0.16	0.16
P3	0	0.12	0.12
P4	0	0.09	0.09
P5	0	0.07	0.07
P6	0	0.05	0.05

表 2　マルコフプロセスによる系の滞在人数と待ち行列と待ち行列理論の系の滞在人数と待ち行列

	Mrkov	Analaytical
L	1.92	1.92
Lq	1.21	1.21

14.6. 多数のサービスメンバーの場合の待ち行列

ここで、3 人のサービスメンバーと、最大 3 人の待ち人数を仮定した系を扱う。対応する状態確率は 0,1,2,3,4,5,6 である。これらに対する確率は $P(0), P(1), \cdots, P(6)$ である。この系はケンドールの記号では M/M/3(6)と表記される。対応する模式図を図 6 に示す。

M/M/3(6)

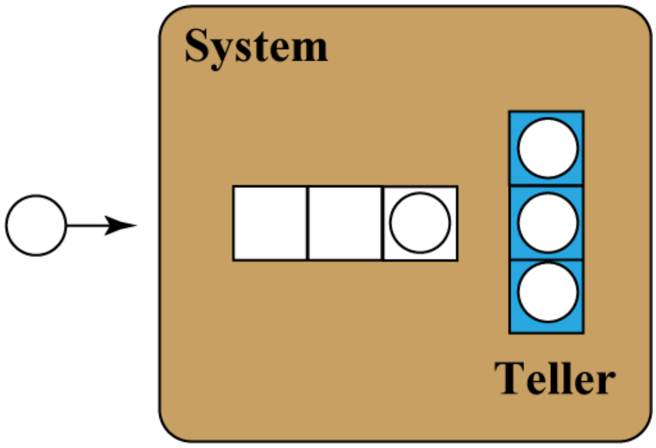

図 6　M/M/3(6) の系の模式図

この系において、系を訪問する顧客の頻度は単位時間当たりλ とする。すると微小時間Δtの間に一人の顧客が系を訪問する確率は$\lambda\Delta t$ となる。

一人のサービスメンバーのサービス率をμ とする。

系の状態が 0 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)$となる。

系の状態が 1 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。顧客が 1 人減る確率は$\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$となる。

系の状態が 2 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。顧客が 1 人減る確率は$2\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-2\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-2\mu\Delta t$となる。

系の状態が 3 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。顧客が 1 人減る確率は$3\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-3\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t$となる。

系の状態が 4 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。顧客が 1 人減る確率は$3\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-3\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t$となる。

系の状態が 5 の場合、一人増える確率は$\lambda\Delta t$ となる。顧客が 1 人減る確率は$5\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-3\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t$となる。

系の状態が 6 の場合、顧客が 1 人減る確率は$3\mu\Delta t$である。何も起こらない確率は$(1-3\mu\Delta t)$となる。

$$
\begin{pmatrix}
1-\lambda\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & 2\mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-2\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-3\mu\Delta t
\end{pmatrix}^n
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(17)

対応する待ち行列理論は以下となる。

$$
P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & (n \le s) \\ \eta^{n-s} P_s & (s \le n \le N) \end{cases} \tag{18}
$$

ただし

$$
\eta = \frac{\rho}{s} \tag{19}
$$

$$
P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta - \eta^{N-s+1}}{1-\eta}} \tag{20}
$$

待ち行列、系の滞在人数は以下である。

$$
L_q = \frac{\eta P_s}{(1-\eta)^2} - \left[\frac{1}{(1-\eta)^2} + \frac{N-s}{1-\eta} \right] \eta P_N \tag{21}
$$

$$
L = \rho(1-P_N) + L_q \tag{22}
$$

ここで、$\lambda = 2, \mu = 1, \Delta t = 0.01$を仮定し、初期条件として$P(0) = 1$、その他は 0 とする。ステップ数 n は 10000 としている。この場合はマルコフ理論は定常状態に達しているとみなすことができるであろう。

両者の状態確率は表 3 に示す通りよく一致する。また、両者の系の滞在人数、系での待ち行列数も表 4 に示す通りよく一致する。

表 3　マルコフプロセスによる状態確率の評価と待ち行列理論の状態確率

	ステップ数	10000	
Probability	Step0	Step1	Analytical
P0	1	0.12	0.12
P1	0	0.24	0.24
P2	0	0.24	0.24
P3	0	0.16	0.16
P4	0	0.11	0.11
P5	0	0.07	0.07
P6	0	0.05	0.05

表 4　マルコフプロセスによる滞在人数、待ち行列数の評価

	Markov
L	2.30
Lq	1.42

14.7. まとめ

この章のまとめをする。

状態　j から状態　i　への遷移確率は以下で表現される。

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

序気条件はベクトルで表現される。したがって、ある時間経過した後の状態は以下で記述される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

k　ステップ後の状態は以下で記述される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

k ステップ後のサービスメンバーが 3 人の場合の遷移行列は以下になる。

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t & 2\mu\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-2\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t-3\mu\Delta t & 3\mu\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & 1-3\mu\Delta t \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$