6.　実験計画法

概要: ここでは直交表を用いて複数の因子の効果を評価する方法を示す。この方法においては各因子のレベルは 2 に限定される。

キーワード: 実験計画法;直交表。

6.1.　序

前章では 2 つまでの因子の効果を議論した。ここでは 3 つの因子を評価する方法を示す。この方法を拡張すると、我々は 3 よりも大きな数の因子を扱うことができる。ここで示す $L_8\left(2^7\right)$ を編集すると、繰り返しのない場合は、最大 6 因子、繰り返しのある場合は、最大 7 因子まで扱うことができる。この方法のことを、実験計画法と呼ぶ。つまりこの章では実験計画法について解説する。

6.2.　2 因子の分析

まず、前章でも扱った 2 因子について検討する。ここでは、この問題を実験計画法ではどう扱うかを検討する。

二つの因子を A および B とおき、それぞれのレベルを A_1, A_2 および B_1, B_2 とする。対応するデータを表 1 に示す。データは y_{ij} とし、添え字は $i, j = 1, 2$ となる。

この表 1 は変換して表 2 のようにできる。

各因子の水準を分けて表記し、表 2 は表 3 のように表記できる。

最後に、1 を -1 に、2 を 1 に変換し、表 4 を得る。

この**エラー! 参照元が見つかりません。**の列をベクトルと考える。すると二つのベクトルの内積は以下となる。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \tag{1}$$

つまり、二つのベクトルは直交する。これは直交表と呼ばれる。

表 1　因子の場合のデータ

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	y_{11}	y_{12}
	A_2	y_{21}	y_{22}

表 2　2 因子の場合のデータの変形

Combination	Data
A_1B_1	y_{11}
A_1B_2	y_{12}
A_2B_1	y_{21}
A_2B_2	y_{22}

表 3　2 因子の場合の水準表の変形

A	B	Data
1	1	y_{11}
1	2	y_{12}
2	1	y_{21}
2	2	y_{22}

表 4　2 因子の場合の水準値の変更

A	B	Data
-1	-1	y_{11}
-1	1	y_{12}
1	-1	y_{21}
1	1	y_{22}

ここで、水準データ y_{ij} は多くの要素によって決定されると考える。因子 A_i からの寄与を α_i , 因子 B_j からの寄与を β_j , 二つの因子の相互作用からの寄与を $(\alpha\beta)_{ij}$, そして、因子に依らない成分を μ とする。その他に考えていない成分があるとし、その成分を誤差 e_{ij} とする。すると y_{ij} は以下で表現されると考える。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ij} \tag{2}$$

データ y_{ij} の数を n とする。今回の場合は 2 因子で 2 レベルを考えているから、

$$n = 2^2 = 4 \tag{3}$$

となる。

我々は、変数に対して以下の制約を設ける。

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{4}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \tag{5}$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{12} = 0 \tag{6}$$

$$(\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \tag{7}$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} = 0 \tag{8}$$

$$(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \tag{9}$$

以上の制約は一般性を失わせない。この制約によって変数の数は以下のように減らすことができる。

$$-\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha \tag{10}$$

$$-\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta \tag{11}$$

$$(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{21} = -(\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta) \tag{12}$$

したがって、データは以下のように表現される。

$$y_{11} = \mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) + e_{11} \tag{13}$$

$$y_{12} = \mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) + e_{12} \tag{14}$$

$$y_{21} = \mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) + e_{21} \tag{15}$$

$$y_{22} = \mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) + e_{21} \tag{16}$$

データ y_{ij} から.予測するパラメータ μ, α, β, and $(\alpha\beta)$ の誤差を最小にするようにパラメータを定める。その誤差の和 Q_e^2 は以下のように表記できる。

$$\begin{aligned} Q_e^2 &= e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 \\ &= \left\{ y_{11} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) \right] \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ y_{12} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) \right] \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ y_{21} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) \right] \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ y_{22} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) \right] \right\}^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Eq. (17) を μ について微分し、それを 0 と置くと以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial \mu} &= -2\left\{y_{11} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{12} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{21} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{22} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&= -2\left[\left(y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}\right) - 4\hat{\mu}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

これを整理すると以下となる。

$$
\hat{\mu} = \frac{1}{n}\left(y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}\right) \tag{19}
$$

ここで、記号ˆ を予測値である、ということを表すために利用している。これから、他の例でもそのように記号ˆ を利用する。

Eq. (17) を α について微分し、それを 0 と置くと、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial \alpha} &= 2\left\{y_{11} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{12} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{21} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{22} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&= 2\left[\left(y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22}\right) + 4\hat{\alpha}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

したがって、

$$
\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\left(-y_{11} - y_{12} + y_{21} + y_{22}\right) \tag{21}
$$

となる。

Eq. (17) を β に関して微分し 0 と置くと、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial \beta} &= 2\left\{y_{11} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{12} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{21} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{22} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&= 2\left[\left(y_{11} - y_{12} + y_{21} - y_{22}\right) + 4\hat{\beta}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

これから以下を得る。

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(-y_{11} + y_{12} - y_{21} + y_{22}\right) \tag{23}$$

Eq. (17) を $(\alpha\beta)$ に関して微分し 0 と置くと以下を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial(\alpha\beta)} &= -2\left\{y_{11} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{12} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{21} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{22} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta)\right]\right\} \\
&= -2\left[\left(y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}\right) - 4(\alpha\beta)\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{24}$$

これから以下を得る。

$$(\alpha\beta) = \frac{1}{n}\left(y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}\right) \tag{25}$$

ここで、以下を定義する。

$$Q_{A+} = y_{11} + y_{12} \tag{26}$$

$$Q_{A-} = y_{21} + y_{22} \tag{27}$$

$$Q_{B+} = y_{12} + y_{22} \tag{28}$$

$$Q_{B-} = y_{11} + y_{21} \tag{29}$$

$$Q_{\alpha\beta+} = y_{11} + y_{22} \tag{30}$$

$$Q_{\alpha\beta-} = y_{12} + y_{21} \tag{31}$$

μ は以下で表現される。

$$\mu = \hat{\mu} = \frac{1}{n}\left(y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}\right) \tag{32}$$

これは以下で表現される。

$$\mu = \frac{1}{n}\left(Q_{\xi+} + Q_{\xi-}\right) \tag{33}$$

ここで、 ξ はダミー変数で $\xi = \alpha, \beta, \alpha\beta$ である。

兵 s 金はそれぞれの因子のレベルで以下のように表現される。

$$\mu_{\xi-} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} Q_{\xi-} \tag{34}$$

$$\mu_{\xi+} = \frac{1}{\binom{n}{2}} Q_{\xi+} \tag{35}$$

因子 A に関する分散を S_A^2 とすると、それは以下となる。

$$S_A^2 = \frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A+} - \mu\right)^2 + \left(\mu_{A+} - \mu\right)^2\right]}{n} \tag{36}$$

これは以下のように簡単化される。

$$\begin{aligned}
S_A^2 &= \frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A-} - \mu\right)^2 + \left(\mu_{A+} - \mu\right)^2\right]}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{Q_{A-}}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\left(Q_{A-} + Q_{A+}\right)\right]^2 + \left[\frac{Q_{A+}}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\left(Q_{A-} + Q_{A+}\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{n}\left(Q_{A-} - Q_{A+}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{n}\left(Q_{A+} - Q_{A-}\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(Q_{A+} - Q_{A-}\right)^2
\end{aligned} \tag{37}$$

他の分散も以下のように表現される。

$$S_B^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+} - Q_{B-}\right)^2 \tag{38}$$

$$S_C^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+} - Q_{B-}\right)^2 \tag{39}$$

$$S_{AB}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{AB+} - Q_{AB-}\right)^2 \tag{40}$$

以上から、我々は得られた表を解析に合わせるように以下のように変形できる。
最初に表 5 に示すように AB に関する列を追加する。最終的には表 6 を得る。

表 5　2 因子の場合の相互作用列の追加

A	B	AB	Data
-1	-1	1	y_{11}
-1	1	-1	y_{12}
1	-1	-1	y_{21}
1	1	1	y_{22}

表 6　2因子の場合のレベルによる分離

Factor	A		B		(AB)	
Level	A-	A+	B-	B+	(AB)-	(AB)+
Data	y_{11}	y_{21}	y_{11}	y_{12}	y_{12}	y_{11}
	y_{12}	y_{22}	y_{21}	y_{22}	y_{21}	y_{22}
Sum	Q_{A-}	Q_{A+}	Q_{B-}	Q_{B+}	$Q_{(AB)-}$	$Q_{(AB)+}$
Variance	$S^{(2)}{}_{A}$		$S^{(2)}{}_{B}$		$S^{(2)}{}_{(AB)}$	

これらの自由度はすべて 1 である。すなわち

$$\phi_A = \phi_B = \phi_{AB} = 1 \tag{41}$$

である。したがって、不偏分散を小文字の s で表すと以下となる。

$$s_A^2 = \frac{n}{\phi_A} S_A^2, s_B^2 = \frac{n}{\phi_B} S_B^2, s_{AB}^2 = \frac{n}{\phi_{AB}} S_{AB}^2 \tag{42}$$

ここでは、誤差を表現できない。しかし、相互作用は無いと見做すとそれに対応する分散が誤差に対応する分散になる。すなわち、

$$s_e^2 \leftarrow s_{AB}^2 \tag{43}$$

と見做すことができる。

したがって、各因子の効果を F 分布を使って以下のように評価できる。

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_e^2} \tag{44}$$

$$F_B = \frac{s_B^2}{s_e^2} \tag{45}$$

F 分布の臨界値 F_{crit} は以下のようになる。

$$F_{crit} = F(1,1,0.95) \tag{46}$$

各因子の F 値が臨界値 F_{crit} より大きければ、その因子の効果がある、と判断できる。

6.3.　繰返しのない 3 因子の解析

前の節の解析を 3 因子に拡張する。すなわち、因子としては A, B, および C を考える。

データの y_{ijk} は因子レベル A_i の寄与 α_i, 因子レベル B_j の寄与 β_j, 因子レベル C_k の寄与 γ_k からなるとする。相互作用は $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$, $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ のように表現する。因子と無関係な要素を μ, 誤差を e_{ijk} とする。

データ y_{ijk} の数を n とすると、それは

$$n = 2^3 = 8 \tag{47}$$

となる。

各データは以下のように表現される。a

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijk} \tag{48}$$

各パラメータには以下のように制限を与える。

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{49}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \tag{50}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \tag{51}$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{12} = 0 \tag{52}$$

$$(\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \tag{53}$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} = 0 \tag{54}$$

$$(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \tag{55}$$

$$(\alpha\gamma)_{11} + (\alpha\gamma)_{12} = 0 \tag{56}$$

$$(\alpha\gamma)_{21} + (\alpha\gamma)_{22} = 0 \tag{57}$$

$$(\alpha\gamma)_{11} + (\alpha\gamma)_{21} = 0 \tag{58}$$

$$(\alpha\gamma)_{12} + (\alpha\gamma)_{22} = 0 \tag{59}$$

$$(\beta\gamma)_{11} + (\beta\gamma)_{12} = 0 \tag{60}$$

$$(\beta\gamma)_{21} + (\beta\gamma)_{22} = 0 \tag{61}$$

$$(\beta\gamma)_{11} + (\beta\gamma)_{21} = 0 \tag{62}$$

$$(\beta\gamma)_{12} + (\beta\gamma)_{22} = 0 \tag{63}$$

これらの制約は一般性を失わせない。

さらに三つの成分の相互作用を考える。
この場合、以下を定義する。

$$\begin{aligned} &s_1 : i + j(even) \\ &s_2 : i + j(odd) \end{aligned} \tag{64}$$

これから以下を定義する。

$$(\alpha\beta\gamma)_{s_1 1} + (\alpha\beta\gamma)_{s_1 2} = 0 \tag{65}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{s_2 1} + (\alpha\beta\gamma)_{s_2 2} = 0 \tag{66}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{s_1 1} + (\alpha\beta\gamma)_{s_2 1} = 0 \tag{67}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{s_1 2} + (\alpha\beta\gamma)_{s_2 2} = 0 \tag{68}$$

Eqs. (65)-(68) は以下のように纏められる。

$$(\alpha\beta\gamma)_{u_1} + (\alpha\beta\gamma)_{u_2} = 0 \tag{69}$$

ただし、

$$\begin{aligned} &u_1 : i + j + k(even) \\ &u_2 : i + j + k(odd) \end{aligned} \tag{70}$$

である。
したがって、変数の数を以下のように減少させることができる。

$$-\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha \tag{71}$$

$$-\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta \tag{72}$$

$$-\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma \tag{73}$$

$$(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{21} = -(\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta) \tag{74}$$

$$(\alpha\gamma)_{11} = -(\alpha\gamma)_{21} = -(\alpha\gamma)_{21} = (\alpha\gamma)_{22} = (\alpha\gamma) \tag{75}$$

$$(\beta\gamma)_{11} = -(\beta\gamma)_{21} = -(\beta\gamma)_{21} = (\beta\gamma)_{22} = (\beta\gamma) \tag{76}$$

$$\left(\alpha\beta\gamma\right)_{u_1} = -\left(\alpha\beta\gamma\right)_{u_2} = \left(\alpha\beta\gamma\right) \tag{77}$$

それぞれのデータ y_{ijk} は以下のように表現される。

$$y_{111} = \mu - \alpha - \beta + \left(\alpha\beta\right) - \gamma + \left(\alpha\gamma\right) + \left(\beta\gamma\right) - \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{111} \tag{78}$$

$$y_{112} = \mu - \alpha - \beta + \left(\alpha\beta\right) + \gamma - \left(\alpha\gamma\right) - \left(\beta\gamma\right) + \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{112} \tag{79}$$

$$y_{121} = \mu - \alpha + \beta - \left(\alpha\beta\right) - \gamma + \left(\alpha\gamma\right) - \left(\beta\gamma\right) + \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{121} \tag{80}$$

$$y_{122} = \mu - \alpha + \beta - \left(\alpha\beta\right) + \gamma - \left(\alpha\gamma\right) + \left(\beta\gamma\right) - \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{122} \tag{81}$$

$$y_{211} = \mu + \alpha - \beta - \left(\alpha\beta\right) - \gamma - \left(\alpha\gamma\right) + \left(\beta\gamma\right) + \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{211} \tag{82}$$

$$y_{212} = \mu + \alpha - \beta - \left(\alpha\beta\right) + \gamma + \left(\alpha\gamma\right) - \left(\beta\gamma\right) - \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{212} \tag{83}$$

$$y_{221} = \mu + \alpha + \beta + \left(\alpha\beta\right) - \gamma - \left(\alpha\gamma\right) - \left(\beta\gamma\right) - \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{221} \tag{84}$$

$$y_{222} = \mu + \alpha + \beta + \left(\alpha\beta\right) + \gamma + \left(\alpha\gamma\right) + \left(\beta\gamma\right) + \left(\alpha\beta\gamma\right) + e_{222} \tag{85}$$

上の解析に基づいて、我々は対応する表を構成できる。それは $L_8\left(2^7\right)$ と呼ばれる。これは、因子 6 まで対応できる。 $L_8\left(2^7\right)$ の 8 は 2^3 からきており、 2^3 の指数 3 は三つの因子 A, B, C からきている。$L_8\left(2^7\right)$ のなかの 2 はレベルの数を表す。$L_8\left(2^7\right)$ の中の 7 は列の数を表す。

列の番号は以下のようになる。

$A \to 2^0 = 1$: first column
$B \to 2^1 = 2$: second column
$C \to 2^2 = 4$: fourth column

これらは直接に寄与に相当する。

その他の列は AB, AC, BC, ABC に対応する。

$AB \to 1 + 2 = 3$
$AC \to 1 + 4 = 5$
$BC \to 2 + 4 = 6$
$ABC \to 1 + 2 + 4 = 7$

データ y_{ijk} はテーブルのようにする。列 1(A), 2(B), および 4(C)は直接 y_{ijk} に連動させる。ここで、水準が 1 の場合は-1 に、水準が 2 の場合は 1 にする。これは、水準が奇数の場合は-1 二、偶数の場合は 1 にする、と一般化できる。

列 3 (AB) は $i+j$ が奇数か偶数かで判断できる。他の列もそれで評価できる。

以上の描像を表 7 に示す。

表 7　3 因子の場合の基本的な直交表 $L_8\left(2^7\right)$

Column No.		1	2	3	4	5	6	7	Data	Value
Combination No	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	y_{111}	2.3
	2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	y_{112}	3.4
	3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	y_{121}	4.5
	4	-1	1	-1	1	-1	1	-1	y_{122}	5.6
	5	1	-1	-1	-1	-1	1	1	y_{211}	7.5
	6	1	-1	-1	1	1	-1	-1	y_{212}	8.9
	7	1	1	1	-1	-1	-1	-1	y_{221}	9.7
	8	1	1	1	1	1	1	1	y_{222}	8.9
Factor		A	B	AB	C	AC	BC	ABC		

各列の内積を考える。例えば、列 1 と 2.をベクトルとみなし、その内積をとる。それは、以下となる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1+1-1-1-1-1+1+1 \qquad (86)$$

$$= 0$$

この内積が 0 になるのは、他の列の組み合わせでも確かめられる。したがって、これが表が直交表と呼ばれる理由になっている。

我々は、パラメータ μ, α, β, γ, and $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\beta\gamma)$, および $(\alpha\beta\gamma)$ を得られたデータ y_{ijk} から予想する。 予想値は誤差が最小になるように選択する。その誤差 Q_e は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
Q_e^2 &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_{ijk}^2 \\
&= \left\{ y_{111} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{112} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{121} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{122} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{211} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{212} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{221} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2 \\
&\quad + \left\{ y_{222} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\}^2
\end{aligned}
\tag{87}
$$

Eq. (87)を μ について微分し、それを 0 と置くと以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial \mu} &= -2\left\{ y_{111} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{112} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{121} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{122} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{211} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{212} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{221} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&\quad -2\left\{ y_{222} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) \right] \right\} \\
&= -2\left\{ \left(y_{111} + y_{112} + y_{121} + y_{122} + y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{222} \right) - 8\mu \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{88}
$$

これを整理して、以下となる。

$$
\hat{\mu} = \frac{1}{n}\left(y_{111} + y_{112} + y_{121} + y_{122} + y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{222} \right) \tag{89}
$$

Eq. (87) をαについて微分し、0 とおいて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_e^2}{\partial \alpha} &= 2\left\{y_{111} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{112} - \left[\mu - \alpha - \beta + (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{121} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) - \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad +2\left\{y_{122} - \left[\mu - \alpha + \beta - (\alpha\beta) + \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{211} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{212} - \left[\mu + \alpha - \beta - (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{221} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) - \gamma - (\alpha\gamma) - (\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&\quad -2\left\{y_{222} - \left[\mu + \alpha + \beta + (\alpha\beta) + \gamma + (\alpha\gamma) + (\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma)\right]\right\} \\
&= -2\left\{\left(y_{111} + y_{112} + y_{121} + y_{122} - y_{211} - y_{212} - y_{221} - y_{222}\right) + 8\alpha\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{90}
$$

これを整理して

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\left(-y_{111} - y_{112} - y_{121} - y_{122} + y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{222}\right) \tag{91}$$

同様に以下を得る。

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(-y_{111} - y_{112} + y_{121} + y_{122} - y_{211} - y_{212} + y_{221} + y_{222}\right) \tag{92}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\left(-y_{111} + y_{112} - y_{121} + y_{122} - y_{211} + y_{212} - y_{221} + y_{222}\right) \tag{93}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{n}\left(y_{111} + y_{112} - y_{121} - y_{122} - y_{211} - y_{212} + y_{221} + y_{222}\right) \tag{94}$$

$$\alpha\gamma = \frac{1}{n}\left(y_{111} - y_{112} + y_{121} - y_{122} - y_{211} + y_{212} - y_{221} + y_{222}\right) \tag{95}$$

$$\beta\gamma = \frac{1}{n}\left(y_{111} - y_{112} - y_{121} + y_{122} + y_{211} - y_{212} - y_{221} + y_{222}\right) \tag{96}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{n}\left(-y_{111} + y_{112} + y_{121} - y_{122} + y_{211} - y_{212} - y_{221} + y_{222}\right) \tag{97}$$

以下の変数を得意義する。

$$Q_{A+} = y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{222} \tag{98}$$

$$Q_{A-} = y_{111} + y_{112} + y_{121} + y_{122} \tag{99}$$

$$Q_{B+} = y_{121} + y_{122} + y_{221} + y_{222} \tag{100}$$

$$Q_{B-} = y_{111} + y_{112} + y_{211} + y_{212} \tag{101}$$

$$Q_{C+} = y_{112} + y_{122} + y_{212} + y_{222} \tag{102}$$

$$Q_{C-} = y_{111} + y_{121} + y_{211} + y_{221} \tag{103}$$

$$Q_{\alpha\beta+} = y_{111} + y_{112} + y_{221} + y_{222} \tag{104}$$

$$Q_{\alpha\beta-} = y_{121} + y_{122} + y_{211} + y_{212} \tag{105}$$

$$Q_{\alpha\gamma+} = y_{111} + y_{121} + y_{212} + y_{222} \tag{106}$$

$$Q_{\alpha\gamma-} = y_{112} + y_{122} + y_{211} + y_{221} \tag{107}$$

$$Q_{\beta\gamma+} = y_{111} + y_{122} + y_{211} + y_{222} \tag{108}$$

$$Q_{\beta\gamma-} = y_{112} + y_{121} + y_{212} + y_{221} \tag{109}$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma+} = y_{112} + y_{121} + y_{211} + y_{222} \tag{110}$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma-} = y_{111} + y_{122} + y_{212} + y_{221} \tag{111}$$

総平均 μ は以下になる。

$$\mu = \frac{1}{n}\left(y_{111} + y_{112} + y_{121} + y_{122} + y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{222}\right) \tag{112}$$

これは、以下のようにも表現される。

$$\mu = \frac{1}{n}\left(Q_{\xi+} + Q_{\xi-}\right) \tag{113}$$

ここで、ξ はダミー変数であり、$\xi = \alpha, \beta, \cdots, \alpha\beta\gamma$ である。

それぞれのレベルの平均は以下のようになる。

$$\mu_{\xi-} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} Q_{\xi-} \tag{114}$$

$$\mu_{\xi+} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} Q_{\xi+} \tag{115}$$

因子 A に関連する分散 S_A^2 は以下となる。

$$S_A^2 = \frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A+} - \mu\right)^2 + \left(\mu_{A+} - \mu\right)^2\right]}{n} \tag{116}$$

これは、さらに以下となる。

$$
\begin{aligned}
S_A^2 &= \frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A-}-\mu\right)^2+\left(\mu_{A+}-\mu\right)^2\right]}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{Q_{A-}}{\left(\frac{n}{2}\right)}-\frac{1}{n}\left(Q_{A-}+Q_{A+}\right)\right]^2+\left[\frac{Q_{A+}}{\left(\frac{n}{2}\right)}-\frac{1}{n}\left(Q_{A-}+Q_{A+}\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{n}\left(Q_{A-}-Q_{A+}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{n}\left(Q_{A+}-Q_{A-}\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(Q_{A+}-Q_{A-}\right)^2
\end{aligned}
\tag{117}
$$

他の分散も同じように以下のように評価される。

$$S_B^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+}-Q_{B-}\right)^2 \tag{118}$$

$$S_C^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+}-Q_{B-}\right)^2 \tag{119}$$

$$S_{AB}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{AB+}-Q_{AB-}\right)^2 \tag{120}$$

$$S_{AC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{AC+}-Q_{AC-}\right)^2 \tag{121}$$

$$S_{BC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{BC+}-Q_{BC-}\right)^2 \tag{122}$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{ABC+}-Q_{ABC-}\right)^2 \tag{123}$$

これらの自由度はすべて 1 であるから、対応する不偏分散は以下となる。

$$s_A^2 = \frac{n}{\phi_A}S_A^2, s_B^2 = \frac{n}{\phi_B}S_B^2, s_c^2 = \frac{n}{\phi_C}S_C^2 \tag{124}$$

$$s_{AB}^2 = \frac{n}{\phi_{AB}}S_{AB}^2, s_{AC}^2 = \frac{n}{\phi_{AC}}S_{AC}^2, s_{BC}^2 = \frac{n}{\phi_{BC}}S_{BC}^2 \tag{125}$$

$$s_{ABC}^2 = \frac{n}{\phi_{ABC}}S_{ABC}^2 \tag{126}$$

上の解析をもとに、我々は表 8 を構成できる。 それに具体的な数値を入れたものが表 9 である。

表 8　　3 因子の場合のレベルを考慮して直交表 $L_8\left(2^7\right)$

Column No.	1		2		3		4		5		6		7	
Factor	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
Level	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
Data	y_{111}	y_{211}	y_{111}	y_{121}	y_{121}	y_{111}	y_{111}	y_{112}	y_{112}	y_{111}	y_{112}	y_{111}	y_{111}	y_{112}
	y_{112}	y_{212}	y_{112}	y_{122}	y_{122}	y_{112}	y_{121}	y_{122}	y_{122}	y_{121}	y_{121}	y_{122}	y_{122}	y_{121}
	y_{121}	y_{221}	y_{211}	y_{221}	y_{211}	y_{221}	y_{211}	y_{212}	y_{211}	y_{212}	y_{212}	y_{211}	y_{212}	y_{211}
	y_{122}	y_{222}	y_{212}	y_{222}	y_{212}	y_{222}	y_{221}	y_{222}	y_{221}	y_{222}	y_{221}	y_{222}	y_{221}	y_{222}
Sum	Q_{A-}	Q_{A+}	Q_{B-}	Q_{B+}	$Q_{(AB)-}$	$Q_{(AB)+}$	Q_{C-}	Q_{C+}	$Q_{(AC)-}$	$Q_{(AC)+}$	$Q_{(BC)-}$	$Q_{(BC)+}$	$Q_{(ABC)-}$	$Q_{(ABC)+}$
Variance	$S^{(2)}{}_{A}$		$S^{(2)}{}_{B}$		$S^{(2)}{}_{AB}$		$S^{(2)}{}_{C}$		$S^{(2)}{}_{AC}$		$S^{(2)}{}_{BC}$		$S^{(2)}{}_{ABC}$	

表 9　3 因子の場合の直交表 $L_8\left(2^7\right)$ における具体的な値

Column No.	1		2		3		4		5		6		7	
Factor	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
Level	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
Data	2.3	7.5	2.3	4.5	4.5	2.3	2.3	3.4	3.4	2.3	3.4	2.3	2.3	3.4
	3.4	8.9	3.4	5.6	5.6	3.4	4.5	5.6	5.6	4.5	4.5	5.6	5.6	4.5
	4.5	9.7	7.5	9.7	7.5	9.7	7.5	8.9	7.5	8.9	8.9	7.5	8.9	7.5
	5.6	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	9.7	8.9	9.7	8.9	9.7	8.9	9.7	8.9
Sum	15.8	35	22.1	28.7	26.5	24.3	24	26.8	26.2	24.6	26.5	24.3	26.5	24.3
Variance	5.76		0.68		0.08		0.12		0.04		0.08		0.08	
Unbiased variance	46.08		5.445		0.605		0.98		0.32		0.605		0.605	

我々は、このテーブルに最初の持つ意味以上のものを与えることができる。

このテーブルは 3 つの因子で全ての因子に相互作用があるとしている。したがって、誤差に関する列が存在しない。

実用的には、我々は全ての相互作用を考慮しない。

【相互作用なし】

もし、我々が相互作用を考慮しなければ、直接的な寄与は列 1, 2 および 4 である。

その他の列は誤差とみなす。したがって、対応する分散 S_e^2 は以下となる。

$$S_e^2 = S_{AB}^2 + S_{AC}^2 + S_{BC}^2 + S_{ABC}^2 = 0.27 \tag{127}$$

これに対応する自由度は s $\phi_e = 4$ となり、不偏分散は以下となる。

$$s_e^2 = \frac{n}{\phi_e} S_e^2 = 0.58 \tag{128}$$

それぞれの因子の寄与は以下となる。s

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_e^2} = \frac{46.08}{0.53} = 86.33 \tag{129}$$

$$F_B = \frac{s_B^2}{s_e^2} = \frac{5.45}{0.53} = 10.20 \tag{130}$$

$$F_C = \frac{s_C^2}{s_e^2} = \frac{0.98}{0.53} = 1.84 \tag{131}$$

対応する F 値の臨界値 F_{crit} は以下となる。

$$F_{crit} = F(1,4,0.95) = 7.71 \tag{132}$$

それぞれの因子の F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。したがって、上の具体的な結果では因子 A および B は効果があり、因子は効果がないと判断される。

【他の因子】

表は 3 因子を仮定している。しかし、相互作用を無視すれば、これをもっとたくさんの因子と捉えることができる。

ここで、相互作用はないと仮定する。

我々は 4 因子を考えたい。つまり、因子として A, B, C, および D を考える。我々は因子列 D に対応する列として、 3, 5, 6, および 7 のいずれを選んでもいい。

列 5 (AC)を因子 D に相当するものと見なす。そして、**エラー！ 参照元が見つかりません。**をみて D に関する実験条件も設定する。

我々は、不偏分散は以下であるとする。

$$s_D^2 = s_{AC}^2 \tag{133}$$

この場合の誤差に関する分散は以下となる。

$$S_e^2 = S_{AB}^2 + S_{BC}^2 + S_{ABC}^2 = 0.23 \tag{134}$$

対応する自由度は $\phi_e = 3$ となる。

$$s_e^2 = \frac{n}{\phi_e} S_e^2 = 0.61 \tag{135}$$

それぞれの因子の効果を表す F 値は以下となる。

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_e^2} = \frac{46.08}{0.61} = 76.2 \tag{136}$$

$$F_B = \frac{s_B^2}{s_e^2} = \frac{5.45}{0.61} = 9.00 \tag{137}$$

$$F_C = \frac{s_C^2}{s_e^2} = \frac{0.98}{0.61} = 1.62 \tag{138}$$

$$F_D = \frac{s_C^2}{s_e^2} = \frac{0.32}{0.61} = 0.53 \tag{139}$$

F 値の臨界値 F_{crit} は以下となる。

$$F_{crit} = F(1,3,0.95) = 10.13 \tag{140}$$

それぞれの因子の F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。したがって、この例の場合では、因子 A は効果があり、因子, B, C, および D は効果がない、と判断される。

我々は 1 つの列は誤差として用いたい。したがって、この場合はあと 3 つ、つまり最大 6 つの因子の効果を解析できる。

【一部の相互作用】

我々はこの表では最大 3 つまでの相互作用を考慮できる。 もしも、相互作用を考慮するのであれば、対応するものを利用しなければならない。もし、因子 A と C の相互作用を考慮するのであれば、列 5 を利用する。もし、その際にもう一つの因子 D も考慮したいのであれば、因子 D に対応する列は残りのものから選択しなくてはならない。たとえば、ここでは、列 3 を因子 D に対応させる。その他の列 6 および 7 となり、これらが誤差に関するものとなる。つまり、

$$S_e^2 = S_{BC}^2 + S_{ABC}^2 = 0.15 \tag{141}$$

となる。対応する自由度は $\phi_e = 2$ であり、不偏分散は

$$s_e^2 = \frac{n}{\phi_e} S_e^2 = 0.61 \tag{142}$$

となる。

したがって、F 値は

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_e^2} = \frac{46.08}{0.61} = 76.2 \tag{143}$$

$$F_B = \frac{s_B^2}{s_e^2} = \frac{5.45}{0.61} = 9.00 \tag{144}$$

$$F_C = \frac{s_C^2}{s_e^2} = \frac{0.98}{0.61} = 1.62 \tag{145}$$

$$F_{AC} = \frac{s_{AC}^2}{s_e^2} = \frac{0.32}{0.61} = 0.07 \tag{146}$$

$$F_D = \frac{s_C^2}{s_e^2} = \frac{0.32}{0.61} = 0.53 \tag{147}$$

となる。対応する F 値の臨界値 F_{crit} は以下で与えられる。

$$F_{crit} = F(1,2,0.95) = 18.51 \tag{148}$$

それぞれの因子の F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。しがって、この例の場合は、因子 A のみが有効である。

6.4. 繰返しのある因子の解析

前節の結果を繰り返しのあるデータに拡張する。すなわち、一つの水準に対して r 個のデータがあるとする。

データは y_{ijk_r} と表記される。データの数 n は前節と同様に基本的には 3 因子を考えているから以下となる。

$$n = 2^3 \times r \tag{149}$$

ここでは $r = 3$ とし、すなわち $n = 24$ となる。しかし、ここでの解析は任意の r について有効である。

直交表を表 10 に示す。一つの水準について三つのデータがある。

一つの水準には複数のデータがあるから、ある水準の平均値を以下のように評価する。

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{r}\sum_{p=1}^{r} y_{ijk\_p} \tag{150}$$

この場合は 8 つの 水準があるから、その平均を表 11 に示す。

それぞれの平均からのずれに関する分散 S_{ein}^2 は以下のように評価される。

$$S_{ein}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{3}\left(y_{ijk\_r} - \mu_{ijk}\right)^2 \tag{151}$$

関連する自由度 ϕ_{ein} は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\phi_{ein} &= 2\times 2\times 2\times (r-1)\\ &= 2\times 2\times 2\times (3-1)\\ &= 16\end{aligned} \tag{152}$$

したがって、不偏分散は以下となる。

$$s_{ein}^2 = \frac{n}{\phi_{ein}} S_{ein}^2 \tag{153}$$

表 10　3 因子における繰り返しのある場合の直交表 $L_8\left(2^7\right)$

Column No.		1	2	3	4	5	6	7	Data1	Data2	Data3
Combination No	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	y_{111_1}	y_{111_2}	y_{111_3}
	2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	y_{112_1}	y_{112_2}	y_{112_3}
	3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	y_{121_1}	y_{121_2}	y_{121_3}
	4	-1	1	-1	1	-1	1	-1	y_{122_1}	y_{122_2}	y_{122_3}
	5	1	-1	-1	-1	-1	1	1	y_{211_1}	y_{211_2}	y_{211_3}
	6	1	-1	-1	1	1	-1	-1	y_{212_1}	y_{212_2}	y_{212_3}
	7	1	1	1	-1	-1	-1	-1	y_{221_1}	y_{221_2}	y_{221_3}
	8	1	1	1	1	1	1	1	y_{222_1}	y_{222_2}	y_{222_3}
Factor		A	B	AB	C	AC	BC	ABC			

表 11　三つのデータの平均値

Data1	Data2	Data3	Mean
y_{111_1}	y_{111_2}	y_{111_3}	$(y_{111\_1}+y_{111\_2}+y_{111\_3})/3$
y_{112_1}	y_{112_2}	y_{112_3}	$(y_{112\_1}+y_{112\_2}+y_{112\_3})/3$
y_{121_1}	y_{121_2}	y_{121_3}	$(y_{121\_1}+y_{121\_2}+y_{121\_3})/3$
y_{122_1}	y_{122_2}	y_{122_3}	$(y_{122\_1}+y_{122\_2}+y_{122\_3})/3$
y_{211_1}	y_{211_2}	y_{211_3}	$(y_{211\_1}+y_{211\_2}+y_{211\_3})/3$
y_{212_1}	y_{212_2}	y_{212_3}	$(y_{212\_1}+y_{212\_2}+y_{212\_3})/3$
y_{221_1}	y_{221_2}	y_{221_3}	$(y_{221\_1}+y_{221\_2}+y_{221\_3})/3$
y_{222_1}	y_{222_2}	y_{222_3}	$(y_{222\_1}+y_{222\_2}+y_{222\_3})/3$

表 12　繰返しのある 3 因子の場合の直交表 $L_8\left(2^7\right)$

Column No.	1		2		3		4		5		6		7	
Factor	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
Level	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
Data1	y_{111_1}	y_{211_1}	y_{111_1}	y_{121_1}	y_{121_1}	y_{111_1}	y_{111_1}	y_{112_1}	y_{112_1}	y_{111_1}	y_{112_1}	y_{111_1}	y_{111_1}	y_{112_1}
	y_{112_1}	y_{212_1}	y_{112_1}	y_{122_1}	y_{122_1}	y_{112_1}	y_{121_1}	y_{122_1}	y_{122_1}	y_{121_1}	y_{121_1}	y_{122_1}	y_{122_1}	y_{121_1}
	y_{121_1}	y_{221_1}	y_{211_1}	y_{221_1}	y_{211_1}	y_{221_1}	y_{211_1}	y_{212_1}	y_{211_1}	y_{212_1}	y_{212_1}	y_{211_1}	y_{212_1}	y_{211_1}
	y_{122_1}	y_{222_1}	y_{212_1}	y_{222_1}	y_{212_1}	y_{222_1}	y_{221_1}	y_{222_1}	y_{221_1}	y_{222_1}	y_{221_1}	y_{222_1}	y_{221_1}	y_{222_1}
Data2	y_{111_2}	y_{211_2}	y_{111_2}	y_{121_2}	y_{121_2}	y_{111_2}	y_{111_2}	y_{112_2}	y_{112_2}	y_{111_2}	y_{112_2}	y_{111_2}	y_{111_2}	y_{112_2}
	y_{112_2}	y_{212_2}	y_{112_2}	y_{122_2}	y_{122_2}	y_{112_2}	y_{121_2}	y_{122_2}	y_{122_2}	y_{121_2}	y_{121_2}	y_{122_2}	y_{122_2}	y_{121_2}
	y_{121_2}	y_{221_2}	y_{211_2}	y_{221_2}	y_{211_2}	y_{221_2}	y_{211_2}	y_{212_2}	y_{211_2}	y_{212_2}	y_{212_2}	y_{211_2}	y_{212_2}	y_{211_2}
	y_{122_2}	y_{222_2}	y_{212_2}	y_{222_2}	y_{212_2}	y_{222_2}	y_{221_2}	y_{222_2}	y_{221_2}	y_{222_2}	y_{221_2}	y_{222_2}	y_{221_2}	y_{222_2}
Data3	y_{111_3}	y_{211_3}	y_{111_3}	y_{121_3}	y_{121_3}	y_{111_3}	y_{111_3}	y_{112_3}	y_{112_3}	y_{111_3}	y_{112_3}	y_{111_3}	y_{111_3}	y_{112_3}
	y_{112_3}	y_{212_3}	y_{112_3}	y_{122_3}	y_{122_3}	y_{112_3}	y_{121_3}	y_{122_3}	y_{122_3}	y_{121_3}	y_{121_3}	y_{122_3}	y_{122_3}	y_{121_3}
	y_{121_3}	y_{221_3}	y_{211_3}	y_{221_3}	y_{211_3}	y_{221_3}	y_{211_3}	y_{212_3}	y_{211_3}	y_{212_3}	y_{212_3}	y_{211_3}	y_{212_3}	y_{211_3}
	y_{122_3}	y_{222_3}	y_{212_3}	y_{222_3}	y_{212_3}	y_{222_3}	y_{221_3}	y_{222_3}	y_{221_3}	y_{222_3}	y_{221_3}	y_{222_3}	y_{221_3}	y_{222_3}
Sum	Q_{A-}	Q_{A+}	Q_{B-}	Q_{B+}	$Q_{(AB)-}$	$Q_{(AB)+}$	Q_{C-}	Q_{C+}	$Q_{(AC)-}$	$Q_{(AC)+}$	$Q_{(BC)-}$	$Q_{(BC)+}$	$Q_{(ABC)-}$	$Q_{(ABC)+}$
Variance	$S^{(2)}{}_{A}$		$S^{(2)}{}_{B}$		$S^{(2)}{}_{AB}$		$S^{(2)}{}_{C}$		$S^{(2)}{}_{AC}$		$S^{(2)}{}_{BC}$		$S^{(2)}{}_{ABC}$	
Freedom	1		1		1		1		1		1		1	

表 10 のようなデータを取得後、表 12 を構成する。データが 3 つあるから、対応してそれを追加する。

以下の変数を定義する

$$Q_{A+} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{211\_r} + y_{212\_r} + y_{221\_r} + y_{222\_r}\right) \tag{154}$$

$$Q_{A-} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r} + y_{112\_r} + y_{121\_r} + y_{122\_r}\right) \tag{155}$$

$$Q_{B+} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{121\_r} + y_{122\_r} + y_{221\_r} + y_{222\_r}\right) \tag{156}$$

$$Q_{B-} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r} + y_{112\_r} + y_{211\_r} + y_{212\_r}\right) \tag{157}$$

$$Q_{C+} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{112\_r} + y_{122\_r} + y_{212\_r} + y_{222\_r}\right) \tag{158}$$

$$Q_{C-} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r} + y_{121\_r} + y_{211\_r} + y_{221\_r}\right) \tag{159}$$

$$Q_{\alpha\beta+} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r} + y_{112\_r} + y_{221\_r} + y_{222\_r}\right) \tag{160}$$

$$Q_{\alpha\beta-} = \sum_{r=1}^{3}\left(y_{121\_r} + y_{122\_r} + y_{211\_r} + y_{212\_r}\right) \tag{161}$$

$$Q_{\alpha\gamma+}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r}+y_{121\_r}+y_{212\_r}+y_{222\_r}\right) \tag{162}$$

$$Q_{\alpha\gamma-}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{112\_r}+y_{122\_r}+y_{211\_r}+y_{221\_r}\right) \tag{163}$$

$$Q_{\beta\gamma+}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r}+y_{122\_r}+y_{211\_r}+y_{222\_r}\right) \tag{164}$$

$$Q_{\beta\gamma-}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{112\_r}+y_{121\_r}+y_{212\_r}+y_{221\_r}\right) \tag{165}$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma+}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{112\_r}+y_{121\_r}+y_{211\_r}+y_{222\_r}\right) \tag{166}$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma-}=\sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r}+y_{122\_r}+y_{212\_r}+y_{221\_r}\right) \tag{167}$$

全体の平均値 μ は以下のようになる。

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{3}\left(y_{111\_r}+y_{112\_r}+y_{121\_r}+y_{122\_r}+y_{211\_r}+y_{212\_r}+y_{221\_r}+y_{222\_r}\right) \tag{168}$$

これはまた以下のように表現される。

$$\mu=\frac{1}{n}\left(Q_{\xi+}+Q_{\xi-}\right) \tag{169}$$

ここで、ξ はダミー変数であり、$\xi=\alpha,\beta,\cdots,\alpha\beta\gamma$ である。

それぞれの因子の平均は以下のように表現される。

$$\mu_{\xi-}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)}Q_{\xi-} \tag{170}$$

$$\mu_{\xi+}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)}Q_{\xi+} \tag{171}$$

因子 A に関連する分散は S_A^2 と表現し、それは以下で与えられる。

$$S_A^2=\frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A+}-\mu\right)^2+\left(\mu_{A+}-\mu\right)^2\right]}{n} \tag{172}$$

これはさらに以下のように変形される。

$$S_A^2 = \frac{\frac{n}{2}\left[\left(\mu_{A-}-\mu\right)^2+\left(\mu_{A+}-\mu\right)^2\right]}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{Q_{A-}}{\left(\frac{n}{2}\right)}-\frac{1}{n}\left(Q_{A-}+Q_{A+}\right)\right]^2+\left[\frac{Q_{A+}}{\left(\frac{n}{2}\right)}-\frac{1}{n}\left(Q_{A-}+Q_{A+}\right)\right]^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{n}\left(Q_{A-}-Q_{A+}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{n}\left(Q_{A+}-Q_{A-}\right)\right]^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(Q_{A+}-Q_{A-}\right)^2 \tag{173}$$

他の分散も以下のように定義される。

$$S_B^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+}-Q_{B-}\right)^2 \tag{174}$$

$$S_C^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{B+}-Q_{B-}\right)^2 \tag{175}$$

$$S_{AB}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{AB+}-Q_{AB-}\right)^2 \tag{176}$$

$$S_{AC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{AC+}-Q_{AC-}\right)^2 \tag{177}$$

$$S_{BC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{BC+}-Q_{BC-}\right)^2 \tag{178}$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{ABC+}-Q_{ABC-}\right)^2 \tag{179}$$

対応する自由度はすべて 1 であるから、不偏分散は以下となる。

$$s_A^2 = \frac{n}{\phi_A}S_A^2, s_B^2 = \frac{n}{\phi_B}S_B^2, s_c^2 = \frac{n}{\phi_C}S_C^2 \tag{180}$$

$$s_{AB}^2 = \frac{n}{\phi_{AB}}S_{AB}^2, s_{AC}^2 = \frac{n}{\phi_{AC}}S_{AC}^2, s_{BC}^2 = \frac{n}{\phi_{BC}}S_{BC}^2 \tag{181}$$

$$s_{ABC}^{(2)} = \frac{n}{\phi_{ABC}}S_{ABC}^{(2)} \tag{182}$$

いくつかの相互作用を無視すると、それが誤差に相当する。いま、BC と ABC の相互作用を無視すると、対応する分散 $S_{e'}^2$ が誤差項になり、その分散は以下で与えられる。

$$S_{e'}^2 = S_{BC}^2 + S_{ABC}^2 \tag{183}$$

対応する自由度 $\phi_{e'}$ は以下で与えられる。

$\phi_{e'} = \phi_{BC} + \phi_{ABC}$

(184)

総合の誤差は以下のようになる。

$$S_e^2 = S_{ein}^2 + S_{e'}^2 \tag{185}$$

対応する自由度 ϕ_e は以下になる。

$$\phi_e = \phi_{ein} + \phi_{e'} \tag{186}$$

対応する不偏分散は以下となる。

$$s_e^2 = \frac{n}{\phi_e} S_e^2 \tag{187}$$

各因子に対応する F 値は以下となる。

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_e^2} \tag{188}$$

$$F_B = \frac{s_B^2}{s_e^2} \tag{189}$$

$$F_C = \frac{s_C^2}{s_e^2} \tag{190}$$

$$F_{AB} = \frac{s_{AB}^2}{s_e^2} \tag{191}$$

$$F_{AC} = \frac{s_{AC}^2}{s_e^2} \tag{192}$$

対応する臨界の F 値を F_{crit} とすると以下になる。

$$F_{crit} = F\left(1, \phi_e, 0.95\right) \tag{193}$$

それぞれの因子の F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。

6.5. まとめ

この章のまとめおこなう。.

直交表 $L_8\left(2^7\right)$ においては、我々は 7 列 8 行のデータを得る。基本的にはこの表は, 3 因子 A, B, C で繰り返しのないデータに対するものである。

列の番号は以下に相当する。

$A \to 2^0 = 1$: first column
$B \to 2^1 = 2$: second column
$C \to 2^2 = 4$: fourth column

これは、直接の寄与に相当する。

相互作用をあらわすものは AB, AC, BC, ABC であり、以下の列に対応する。

$$
\begin{aligned}
&AB \to 1+2=3 \\
&AC \to 1+4=5 \\
&BC \to 2+4=6 \\
&ABC \to 1+2+4=7
\end{aligned}
$$

我々は 8 つのデータを持つ。それを y_{ijk} とする。ここで、i は因子 A, j は因子 B, そして k は因子 C に相当する。したがって、我々はデータ $y_{111}, y_{112}, y_{121}, \cdots, y_{222}$ を得る。

ここで、相互作用の項に注目する。例えば、AB ,に対応する列に注目する。ここで、 $i+j$ を構成し、$i+j$ が奇数、偶数に応じて -1 か 1 を当てはめる。つまり、以下とする。

$$
\begin{aligned}
&y_{111} \to 1+1=2 \to -1 \\
&y_{112} \to 1+1=2 \to -1 \\
&y_{121} \to 1+2=3 \to 1 \\
&\cdots \\
&y_{222} \to 2+2=4 \to -1
\end{aligned}
$$

それぞれの列を ξ とし、-1 か 1 を当てはめる。

その和を Q_{ξ_-} または Q_{ξ_-} とする。 対応する ξ に対する分散を

$$
S_{\xi}^{(2)} = \frac{1}{n^2}\left(Q_{\xi_+} - Q_{\xi_-}\right)^2
$$

とし、対応する分散の自由度 ϕ_{ξ} はすべて 1 である。したがって、対応する不偏分散は以下である。

$$
s_{\xi}^2 = \frac{nS_{\xi}^2}{\phi_{\xi}} = nS_{\xi}^2
$$

誤差に対応する分散は注目していない項の和である。それを ζ とする。したがって、誤差に対応する分散は以下となる。

$$
S_e^2 = \sum_{\zeta} S_{\zeta}^2
$$

対応する不偏分散は以下となる。

$$
s_e^2 = \frac{nS_e^2}{n_{\zeta}}
$$

ここで、 n_{ζ} は注目していない列数である。

ここで、対応する各因子の F 値は以下であり、

$$F_\xi = \frac{s_\xi^2}{s_e^2}$$

対応する臨界の F 値は $F\left(1, n_\zeta, P\right)$ である。それぞれの因子の F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。

次に繰り返しのあるデータを扱う。繰り返しの数を r とする。データ総 n は $n = 2^3 \times r$ となる。

各因子に関連する因子は以下となる。

$$S_\xi^2 = \frac{1}{n^2}\left(Q_{\xi_+} - Q_{\xi_-}\right)^2$$

不偏分散は以下となる。

$$s_\xi^2 = \frac{nS_\xi^2}{\phi_\xi} = nS_\xi^2$$

この場合、我々は水準 i, j, k に対して r 個のデータを持っている。つまり、データは y_{ijk_r} と表現する。この場合、各水準でのデータの平均は以下となる。

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{r}\sum_{p=1}^{r} y_{ijk\_p}$$

したがって、以下の誤差を評価できる。

$$S_{ein}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=1}^{r}\left(y_{ijk\_p} - \mu_{ijk}\right)^2$$

この自由度 ϕ_{ein} は以下で与えられる。

$$\phi_{ein} = 2^3\left(r-1\right)$$

トータルの誤差は以下で与えられる。

$$S_e^2 = S_{ein}^2 + \sum_\zeta S_\zeta^2$$

対応する自由度は以下で与えられる。

$$\phi_e = \phi_{ein} + n_\zeta$$

対応する不偏分散は以下である。

$$s_e^2 = \frac{nS_e^2}{\phi_e}$$

っここで、以下を評価する。

$$F_\xi = \frac{s_\xi^2}{s_e^2}$$

これと、その臨界値 $F_{crit} = F\left(1, \phi_e, P\right)$ と比較して因子の効果を判定する。 それぞれの因子の

F がその臨界値 F_{crit} よりも大きければその因子は効果があると判断され、小さければ効果無しと判断される。