12. 因子分析

概要: 我々は様々な種類のデータを取得する。このデータはいくつかの因子からなると仮定する。我々が実際に得るデータはこの因子の様々な組み合わせである、と考える。因子分析は、実際に得られる値と、それらのもとになっていると想定する因子の間をつなぐ解析である。

キーワード: 因子分析;因子負荷量;因子得点;独立負荷量;; Valimax 法; 回転行列。

12.1. 序

因子分析は心理学の分野で発展してきた。我々が認知できる行動として現れるのは、生まれながらのもの、あとで身につけたもの、家庭の環境、友人関係などに起因する、と考える。これらの実際に認知できる行動と想像した因子を関連づける必要がある。それが因子分析である。

解析手法が似ていることから、この因子分析と前の章で扱った主成分分析と混同されることがある。どちらも、多くの因子からスタートし、それを少ない因子で説明する、ということは一緒である。しかし、二つの方法は、解析方法も目的も大きく違う。

主成分分析においては、我々は m 個の因子があれば、これを合成して m 個の因子を得る。しかし、最終的に扱う因子の数は、その中の少数のもののみが効いていて、その数は m より小さいとする。つまり効く因子と効かない因子に合成しなおす。最終的に扱う因子の数は少なくなるが、その少ない数の各因子の中には最初の m 個の因子が含まれている。

因子分析においては、我々はある因子を仮定し、それが最終的な我々の目にするものを決定すると考える。したがって、ある成分を抜き出すというような近似操作は入らない。

上の状況を示すのが図 1 である。図 1(a)の主成分分析においては、m 個の因子は、別の組合わせの m 個の因子に変換される。その中で、主要な因子は数個であるとして、解析を進めていく。図 1(b)に示す因子分析においては、我々が得る結果は最初から少数の因子からなる、と仮定して解析をすすめていく。

ここで、混乱するのは、因子分析においては、その解析プロセスの中で主成分分析を流用することにある。しかし、これはあくまで流用であって、その解析そのものではない。

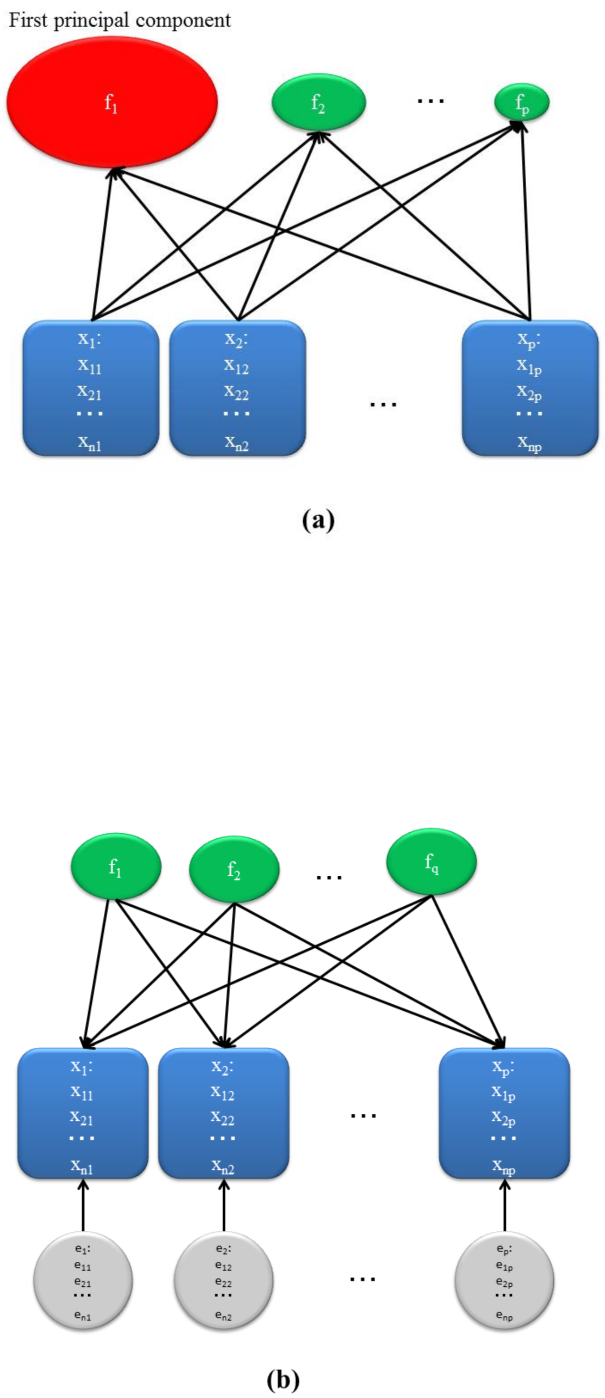

図 1　解析の模式図。 (a) 主成分分析, (b) 因子分析

ここでは、まず一つの因子の解析から始め、次に二つの因子、最後に任意の数の因子を扱う。我々は、ほぼ同じ解析を繰り返す。この解析を通じて、因子の数が増えることによっ

てしなければならないことが明らかになっていくであろう。

12.2. 一因子分析

ここでは、まず一因子分析を行う。つまり、一つの因子がすべての結果に起因しているとする。

12.2.1. 一因子分析の基本方程式

ここでは、一因子で三つの教科の成績がある場合を扱う。三つの教科の成績は規格化されているものとする。

ここでは、一因子を考える。すなわち、データに影響を及ぼす因子は一つであるとする。その因子をどれくらい持っているかで、目に見える教科 x, y, z の成績が得られるとする。たとえば、三つの教科の成績を支配するのは計算力であるとする。それは、それぞれの教科に影響力を独立に持つと考える。その因子そのものを因子負荷量とする。因子負荷量はもとのデータの原因となるものである。それは、要素として出力の成分を持っていると考える。出力として得られる成績として x, y, z を考えているから、想定する因子負荷量はそれらすべてに影響を及ぼしていると考える。その各教科 x, y, z に対して、独立に影響力があるとする。つまり、今は一つの因子を考えているが、その因子負荷量は三つの教科に独立に影響を及ぼす、三つの成分を持つとする。すなわち、因子負荷量はベクトルで表現され

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

となると仮定する。

それぞれのメンバーを i とする。各メンバーはその因子をいくらかもっていると仮定する。その因子負荷量 $\boldsymbol{a}$ を持っている量を f_i とする。この f_i のことを因子得点と呼ぶ。メンバー i の教科 x データは x_i で表され、以下のようになる。

$$x_i = f_i a_x + e_{ix} \tag{2}$$

成績は考えている因子負荷量のみで表されるわけではなく、ここで考えていないものによっても影響を受ける。それは誤差となる。その誤差を表すものを独立負荷量とし、それを e_{ix} と表す。

他の成績も同様に以下のように表現される。

$$y_i = f_i a_y + e_{iy} \tag{3}$$

$$z_i = f_i a_z + e_{iz} \tag{4}$$

以下のベクトル、行列を定義する。

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{2x} \\ \vdots \\ e_{nx} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} e_{1y} \\ e_{2y} \\ \vdots \\ e_{ny} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} e_{1z} \\ e_{2z} \\ \vdots \\ e_{nz} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで、AやFは改めて定義する必要はないが、次節以降で二因子を扱うため、ここで定義しなおしておく。

上の結果を全てのメンバーについて記述すると以下のように表現される。

$$X = AF + \Gamma \tag{13}$$

これは、成分で書くと

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \tag{14}$$

となっている。この中で、1 列目の成分をとると

$$
\begin{cases}
x_1 = a_x f_1 + e_{1x} \\
y_1 = a_y f_1 + e_{1y} \\
z_1 = a_z f_1 + e_{1z}
\end{cases}
\tag{15}
$$

と確かにメンバー1の成分表示となっている。この他のメンバーに対しても同様に確かめることができる。

式の左辺に左から X^T を掛けて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
XX^T &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} nS_{xx} & nS_{xy} & nS_{xz} \\ nS_{xy} & nS_{yy} & nS_{yz} \\ nS_{xz} & nS_{yz} & nS_{zz} \end{pmatrix} \\
&= n \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ここで X^T は行列 X の転置行列である。

同様に右辺にその転置行列をかけて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
&\left(AF + \Gamma\right)\left(AF + \Gamma\right)^T \\
&= \left(AF + \Gamma\right)\left(F^T A^T + \Gamma^T\right) \\
&= AFF^T A^T + AF\Gamma^T + \Gamma F^T A^T + \Gamma\Gamma^T \\
&= A\left(FF^T\right)A^T + A\left(F\Gamma^T\right) + \left(F\Gamma^T\right)^T A^T + \Gamma\Gamma^T
\end{aligned}
\tag{17}
$$

更に以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
FF^T &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \\
&= n
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
F\Gamma^T &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} f_i e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} f_i e_{iz} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\frac{1}{n} XX^T = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} = AA^T + \frac{1}{n}\Gamma\Gamma^T \tag{20}
$$

さらに、 AA^T および $(1/n)\Gamma\Gamma^T$ は以下のように展開できる。

$$
AA^T = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Gamma\Gamma^T &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} e_{ix}{}^2 & \sum_{i=1}^{n} e_{ix} e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} e_{ix} e_{iz} \\ \sum_{i=1}^{n} e_{iy} e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} e_{iy}{}^2 & \sum_{i=1}^{n} e_{iy} e_{iz} \\ \sum_{i=1}^{n} e_{iz} e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} e_{iz} e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} e_{iz}{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{ix}{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{iy}{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{iz}{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{22}
$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{23}$$

これが一因子の場合の基本方程式である。この左辺はデータから計算できるが、右辺の量は想定しているだけであるから、その値を決めることができない。それを次の節に示すように、決定していく。

12.2.2. 因子負荷量の評価

ここでは、因子負荷量の評価をする。

相関行列は主成分分析の章で示されたように以下のように展開される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_3^T \\ &= \left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)\left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{v}_3\right)\left(\sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{v}_3\right)^T \end{aligned} \tag{24}$$

このなかで、最初の項 $\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T$ を近似的に因子負荷量とみなす。つまり、近似式

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} \approx \left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T + \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{25}$$

を採用する。したがって、因子負荷量は以下となる。

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1} \tag{26}$$

これは、第一ステップの近似であり、これを最終的な因子負荷量とはしない。最初の近似的な独立負荷量は以下となる。

$$\begin{pmatrix} S_{e_x\_1}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_1}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T \tag{27}$$

この式の右辺の非対角項は一般に 0 にならない。したがって、この式は一般には成り立たない。しかしながら、我々は非対角項は無視し、対角項は両者で等しいとする。つまり、右辺の対角項のみをとり、それを左辺のものとする。これから、近似的に誤差の分散である独立負荷量の分散

$$\begin{pmatrix} S_{e_x\_1}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_1}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{28}$$

を得ることができる。

次に以下の行列を定義する。

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 1-S_{e_x\_1}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1-S_{e_y\_1}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1-S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{29}$$

これを基本方程式に代入すると

$$R_1 = \left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T \tag{30}$$

となる。しかし、これは近似であるから、一般には成り立たない。この R_1 の固有値と固有ベクトルを評価し、第一主成分のみを考えていい近似であるとする。その評価し直した第一主成分は上のものとは異なる。それは、

$$R_1 \approx \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T \tag{31}$$

となる。これは、式の形式を戻すと以下になる。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} S_{e_x\_2}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_2}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T \end{aligned} \tag{32}$$

ここで、以下の変動量を評価する。

$$\Delta = \begin{pmatrix} S_{e_x\_2}^{(2)} - S_{e_x\_1}^{(2)} \\ S_{e_y\_2}^{(2)} - S_{e_y\_1}^{(2)} \\ S_{e_z\_2}^{(2)} - S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{33}$$

この差分の二乗和

$$\delta = \frac{1}{3}\left\{\left[S_{e_x\_2}^{(2)} - S_{e_x\_1}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_y\_2}^{(2)} - S_{e_y\_1}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_z\_2}^{(2)} - S_{e_z\_1}^{(2)}\right]^2\right\} \tag{34}$$

がある一定の値以下か判断する。もし、その二乗和が設定したものよりも小さければ、最終的な因子負荷量は以下になると考えている。

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\lambda_{1\_2}} \boldsymbol{v}_{1\_2} \tag{35}$$

もし、誤差の二乗和がある値以下になっていなければ、以下の行列を考える。

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 - S_{e_x\_2}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 - S_{e_y\_2}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 - S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{36}$$

そして、これから固有値と固有ベクトル $\lambda_{1\_3}, \boldsymbol{v}_{1\_3}$ を考える。それから、以下の対角項を取り出して、左辺を評価する。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} S_{e_x\_3}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_3}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_3}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left(\sqrt{\lambda_{1\_3}} \boldsymbol{v}_{1\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}} \boldsymbol{v}_{1\_3}\right)^T \end{aligned} \tag{37}$$

その差を表すベクトルは以下となる。

$$\Delta = \begin{pmatrix} S_{e_x\_3}^{(2)} - S_{e_x\_2}^{(2)} \\ S_{e_y\_3}^{(2)} - S_{e_y\_2}^{(2)} \\ S_{e_z\_3}^{(2)} - S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{38}$$

以下の誤差の二乗和を評価する。

$$\delta^2 = \frac{1}{3}\left\{\left[S_{e_x\_3}^{(2)} - S_{e_x\_2}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_y\_3}^{(2)} - S_{e_y\_2}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_z\_3}^{(2)} - S_{e_z\_2}^{(2)}\right]^2\right\} \tag{39}$$

これを繰り返す。もし、m 回繰り返して、所望のものを得たとする。その場合のものを因子負荷量とする。

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\lambda_{1\_m}} \boldsymbol{v}_{1\_m} \tag{40}$$

12.2.3. 因子得点と独立負荷量

これまでのプロセスを概観しよう。

因子分析においては以下が基本方程式であった。

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = f_i \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{iz} \end{pmatrix} \tag{41}$$

我々はこの中で、因子負荷量$\left(a_x \quad a_y \quad a_z\right)$を決定した。このさき、因子得点$f_i$ および因子負荷量 e_x, e_y, e_z を決定しなければならない。

教科の成績x, y, zは、因子得点fを使って表現される。これは、因子得点fの推定値は$\hat{f}_i$と表記され、それは各人の成績x, y, zを使って表現されるであろう。

$$\hat{f}_i = h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \tag{42}$$

真のf_iとの違いは以下で表現される。

$$\begin{aligned} Q_f &= \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - \hat{f}_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[f_i - \left(h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \right) \right]^2 \end{aligned} \tag{43}$$

ここで、 h_{fx}, h_{fy}, h_{fz} をQ_f が最小になるように決定する。

Eq. (43) をh_{fx},について偏微分し、0 と置き、以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_f}{\partial h_{fx}} &= \frac{\partial}{\partial h_{fx}} \sum_{i=1}^{n} \left[f_i - \left(h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \right) \right]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left[f_i - \left(h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \right) \right] x_i = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

これから以下を得る。

$$\sum_{i=1}^{n} \left(h_{fx} x_i x_i + h_{fy} y_i x_i + h_{fz} z_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{45}$$

この式の左辺はさらに以下となる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left(h_{fx} x_i x_i + h_{fy} y_i x_i + h_{fz} z_i x_i \right) &= h_{fx} \sum_{i=1}^{n} x_i x_i + h_{fy} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i + h_{fz} \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \\ &= n \left(h_{fx} r_{xx} + h_{fy} r_{xy} + h_{fz} r_{xz} \right) \end{aligned} \tag{46}$$

式の右辺は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i &= \sum_{i=1}^{n} f_i \left(a_x f_i + e_{xi} \right) \\ &= n a_x \end{aligned} \tag{47}$$

したがって、以下を得る。

$$h_{fx} r_{xx} + h_{fy} r_{xy} + h_{fz} r_{xz} = a_x \tag{48}$$

同じような解析を h_{fy} についても行い、以下を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_f}{\partial h_{fy}} &= \frac{\partial}{\partial h_{fx}}\sum_{i=1}^{n}\left[f_i - \left(h_{fx}x_i + h_{fy}y_i + h_{fz}z_i \right) \right]^2 \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}\left[f_i - \left(h_{fx}x_i + h_{fy}y_i + h_{fz}z_i \right) \right] y_i = 0\end{aligned} \tag{49}$$

これから以下を得る。

$$h_{fx}r_{xy} + h_{fy}r_{yy} + h_{fz}r_{yz} = a_y \tag{50}$$

同じような解析をし、h_{fz} に関して以下を得る。

$$h_{fx}r_{zx} + h_{fy}r_{yz} + h_{fz}r_{zz} = a_z \tag{51}$$

以上を纏めると、以下を得る。

$$\begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{fx} \\ h_{fy} \\ h_{fz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{52}$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{pmatrix} h_{fx} \\ h_{fy} \\ h_{fz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{53}$$

この h_{fx}, h_{fy}, h_{fz} を利用し、因子得点は以下となる。

$$\hat{f}_i = h_{fx}x_i + h_{fy}y_i + h_{fz}z_i \tag{54}$$

独立因子は以下となる。

$$\begin{pmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - f_i\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{55}$$

12.2.4. 一因子分析の結果の解釈

一因子分析では、メンバー i の実際のデータは以下のようにあらわされると仮定する。

はこの結果を導く理由となる因子である。

我々はそれぞれのデータ（人）を i で表す。すると、それらは以下で表現される。

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = f_i\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{iz} \end{pmatrix} \tag{56}$$

これまでの解析で、これらの全ては求めることができた。

因子負荷量

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{57}$$

は、この結果(x, y, z)を得たになる理由となる。したがって、これの要素をみて、それが何であるのか考える。普通はこれに名前をつける。

因子得点はそのメンバーが原因となるものをどの程度もっているのかを表す。したがって、これが大きい方がこの因子と深く関連しているとみなされる。

12.3. 二因子分析

ここでは、因子の数を二つにした場合の解析を示す。

12.3.1. 二因子分析の基本方程式

ここでは、二因子で三つの教科の成績がある場合を扱う。三つの教科の成績は規格化されているものとする。二因子に関する因子得点はfとgとする。fと関連する因子負荷量は(a_x, a_y, a_z)とし、gと関連する因子負荷量は(b_x, b_y, b_z)とする。独立負荷量は(e_x, e_y, e_z)とする。

各メンバーiの成績は以下のように表現されるとする。

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = f_i \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + g_i \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{iz} \end{pmatrix} \tag{58}$$

因子負荷量(a_x, a_y, a_z) および(b_x, b_y, b_z) は教科のみに関連し、メンバーには無関係である。因子負荷量は教科に関連し、その関連する量は教科毎に独立とする。因子得点fおよびgはメンバーに依存するとする。独立負荷量e_x, e_y, e_z は教科x, y, z にもメンバーにも依存するとする。

Eq. (58) の右辺はすべて未知の量である。それらに対して以下の制約を与える。

因子得点fとgは以下のように規格化されているとする。

$$E[f] = 0 \tag{59}$$

$$V[f] = 1 \tag{60}$$

$$E[g] = 0 \tag{61}$$

$$V[g] = 1 \tag{62}$$

独立負荷量の平均は 0 とする。

$$E[e_\alpha]=0 \tag{63}$$

ここで、 $\alpha=x,y,z$ である。

f,g,e_α 間の共分散は 0 とする。つまり、以下となる。

$$Cov[f,g]=0 \tag{64}$$

$$Cov[f,e_\alpha]=0 \tag{65}$$

$$Cov[g,e_\alpha]=0 \tag{66}$$

$$Cov[e_\alpha,e_\beta]=0 \quad for\ \alpha\neq\beta \tag{67}$$

以下のベクトル、行列を定義する。

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{68}$$

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$\boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{2x} \\ \vdots \\ e_{nx} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix} e_{1y} \\ e_{2y} \\ \vdots \\ e_{ny} \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\boldsymbol{e}_z=\begin{pmatrix} e_{1z} \\ e_{2z} \\ \vdots \\ e_{nz} \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \tag{76}$$

Eq. 70 は以下のように表現される。

$$X = AF + \Gamma \tag{77}$$

この表式は 1 因子の場合と同様である。

式の左辺に左から X^T を掛けて以下を得る。

$$\begin{aligned} XX^T &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} nS_{xx} & nS_{xy} & nS_{xz} \\ nS_{xy} & nS_{yy} & nS_{yz} \\ nS_{xz} & nS_{yz} & nS_{zz} \end{pmatrix} \\ &= n \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{78}$$

ここで X^T は行列 X の転置行列である。

同様に Eq. **エラー! 参照元が見つかりません。** の右辺にその転置行列をかけて以下を得る。

$$\begin{aligned} &(AF + \Gamma)(AF + \Gamma)^T \\ &= (AF + \Gamma)(F^T A^T + \Gamma^T) \\ &= AFF^T A^T + AF\Gamma^T + \Gamma F^T A^T + \Gamma\Gamma^T \\ &= A(FF^T)A^T + A(F\Gamma^T) + (F\Gamma^T)^T A^T + \Gamma\Gamma^T \end{aligned} \tag{79}$$

これは更に以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
FF^T &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n & g_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i^2 & \sum_{i=1}^{n} f_i g_i \\ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i & \sum_{i=1}^{n} g_i^{\ 2} \end{pmatrix} \\
&= n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{80}
$$

$$
\begin{aligned}
F\Gamma^T &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} f_i e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} f_i e_{iz} \\ \sum_{i=1}^{n} g_i e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} g_i e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} g_i e_{iz} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{81}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\frac{1}{n} XX^T = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} = AA^T + \frac{1}{n}\Gamma\Gamma^T \tag{82}
$$

さらに、 AA^T および $(1/n)\Gamma\Gamma^T$ は以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_x a_x + b_x b_x & a_x a_y + b_x b_y & a_x a_z + b_x b_z \\ a_y a_x + b_y b_x & a_y a_y + b_y b_y & a_y a_z + b_y b_z \\ a_z a_x + b_z b_x & a_z a_y + b_z b_y & a_z a_z + b_z b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y a_y & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & a_z a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x b_x & b_x b_y & b_x b_z \\ b_y b_x & b_y b_y & b_y b_z \\ b_z b_x & b_z b_y & b_z b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Gamma\Gamma^T &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} e_{ix}{}^2 & \sum_{i=1}^{n} e_{ix} e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} e_{ix} e_{iz} \\ \sum_{i=1}^{n} e_{iy} e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} e_{iy}{}^2 & \sum_{i=1}^{n} e_{iy} e_{iz} \\ \sum_{i=1}^{n} e_{iz} e_{ix} & \sum_{i=1}^{n} e_{iz} e_{iy} & \sum_{i=1}^{n} e_{iz}{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{ix}{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{iy}{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{iz}{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix}
\tag{85}
$$

これが二因子の場合の基本方程式である。この左辺はデータから計算できるが、右辺の量は

想定しているだけであるから、その値を決めることができない。

我々は最終的にはX, A, F, Γ を得る。それらは、以下を満足する。

$$X = AF + \Gamma \tag{86}$$

しかしながら、この式は以下と同値である。

$$X = ATT^{-1}F + \Gamma \tag{87}$$

このT は回転行列であり、以下のように変形できる。

$$X = AT(\theta)T(-\theta)F + \Gamma \tag{88}$$

ここで

$$\begin{cases} A' = AT(\theta) \\ F' = T(-\theta)F \end{cases} \tag{89}$$

である。したがって、A とF はこの式の今である。またA', F' も混んである。これらのことをさらに議論していく。

12.3.2. 二因子の場合の因子負荷量の決定

主成分分析では相関行列は以下のように展開した。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_3^T \\ &= \left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)\left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{v}_3\right)\left(\sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{v}_3\right)^T \end{aligned} \tag{90}$$

これは、厳密に成り立つ式であり、我々は右辺もすべて決定できる。しかしながら、これは因子分析の求めたい式とは異なる。

この式の最初の $\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)\left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)^T$ を因子負荷量とみなす。すなわち、この方程式を

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} \approx \left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)^T + \begin{pmatrix} S_{e_x}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{91}$$

であるとみなす。したがって、因子負荷量の近似値を

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1} \tag{92}$$

とする。これを最終的な因子負荷量とはせず、とりあえずのものとする。最初の独立負荷量の分散は以下となる。

$$\begin{pmatrix} S_{e_x\_1}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_1}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)^T \right] \tag{93}$$

この式の右辺の非対角項は一般には 0 にならない。したがって、この式は厳密には成り立たない。しかし、この非対角項は無視し、さらにこの式の両辺の対角項は等しいとする。すると、この近似により左辺の行列の要素 $S_{e_x\_1}^{(2)}, S_{e_y\_1}^{(2)}, S_{e_z\_1}^{(2)}$ を全てを設定することができる。.

すると以下の行列を評価することができる。

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 - S_{e_x\_1}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 - S_{e_y\_1}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 - S_{e_z\_1}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{94}$$

この行列の固有値、固有ベクトルを以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{3\_2}}\boldsymbol{v}_{3\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{3\_2}}\boldsymbol{v}_{3\_2}\right)^T \right] \\ &\approx \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T \right] \\ &= R_2 \end{aligned} \tag{95}$$

ここで、

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 - S_{e_x\_2}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 - S_{e_y\_2}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 - S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{96}$$

とする。つまり、

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 - S_{e_x\_2}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 - S_{e_y\_2}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 - S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T \right] \tag{97}$$

とする。これをもとに戻すと

$$
\begin{pmatrix} S^{(2)}_{e_x\_2} & 0 & 0 \\ 0 & S^{(2)}_{e_y\_2} & 0 \\ 0 & 0 & S^{(2)}_{e_z\_2} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T \right] \tag{98}
$$

となる。この右辺の非対角項は一般には 0 にならない。しかし、それを 0 と近似し、さらに両者の対角項は等しいと近似する。この場合の右辺から左辺の要素をすべて近似的に求めることができる。

そして、以下の量を評価できる。

$$
\Delta = \begin{pmatrix} S^{(2)}_{e_x\_2} - S^{(2)}_{e_x\_1} \\ S^{(2)}_{e_y\_2} - S^{(2)}_{e_y\_1} \\ S^{(2)}_{e_z\_2} - S^{(2)}_{e_z\_1} \end{pmatrix} \tag{99}
$$

以下に示すこの要素の二乗和の量がある一定の基準値以下であれば、解析を終了する。

$$
\delta^2 = \frac{1}{3}\left\{ \left[S^{(2)}_{e_x\_2} - S^{(2)}_{e_x\_1} \right]^2 + \left[S^{(2)}_{e_y\_2} - S^{(2)}_{e_y\_1} \right]^2 + \left[S^{(2)}_{e_z\_2} - S^{(2)}_{e_z\_1} \right]^2 \right\} \tag{100}
$$

この場合の因子負荷量は以下である。

$$
\boldsymbol{a} = \sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}, \boldsymbol{b} = \sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2} \tag{101}
$$

もしも δ^2 がある一定以上の量であったとしたら、さらに解析を続ける。

以下を評価していく。

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{3\_3}}\boldsymbol{v}_{3\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{3\_3}}\boldsymbol{v}_{3\_3}\right)^T \right] \\
&\approx \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)^T \right] \\
&= R_3
\end{aligned} \tag{102}
$$

ここで、

$$
R_3 = \begin{pmatrix} 1 - S^{(2)}_{e_x\_3} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 - S^{(2)}_{e_y\_3} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 - S^{(2)}_{e_z\_3} \end{pmatrix} \tag{103}
$$

とする。つまり、

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} 1-S_{e_x\_3}^{(2)} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1-S_{e_y\_3}^{(2)} & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1-S_{e_z\_3}^{(2)} \end{pmatrix} = \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)^T \right] \tag{104}$$

とする。これをもとに戻すと

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} S_{e_x\_3}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{e_y\_3}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{e_z\_3}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 \end{pmatrix} - \left[\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_3}}\boldsymbol{v}_{1\_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_3}}\boldsymbol{v}_{2\_3}\right)^T \right] \end{aligned} \tag{105}$$

となる。この右辺の非対角項は一般には 0 にならない。しかし、それを 0 と近似し、さらに両者の対角項は等しいと近似する。この場合の右辺から左辺の要素をすべて近似的に求めることができる。

これから以下の量を評価できる。

$$\Delta = \begin{pmatrix} S_{e_x\_3}^{(2)} - S_{e_x\_2}^{(2)} \\ S_{e_y\_3}^{(2)} - S_{e_y\_2}^{(2)} \\ S_{e_z\_3}^{(2)} - S_{e_z\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{106}$$

以下に示すこの要素の二乗和の量がある一定の基準値以下であれば、解析を終了する。

$$\delta^2 = \frac{1}{3}\left\{ \left[S_{e_x\_3}^{(2)} - S_{e_x\_2}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_y\_3}^{(2)} - S_{e_y\_2}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_z\_3}^{(2)} - S_{e_z\_2}^{(2)}\right]^2 \right\} \tag{107}$$

もし、これがある値以上であれば、このプロセスを繰り返し、この値がある一定の値以下になるまで繰り返す。もし、この値が一定以下になれば、我々は因子負荷量を以下のように決定できる。

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\lambda_{1\_m}}\boldsymbol{v}_{1\_m}, \boldsymbol{b} = \sqrt{\lambda_{2\_m}}\boldsymbol{v}_{2\_m} \tag{108}$$

R の対角要素は共通因子と呼ばれ以下となる。

$$d_x^2 = 1 - S_{e_x\_m}^{(2)}, d_y^2 = 1 - S_{e_y\_m}^{(2)}, d_z^2 = 1 - S_{e_z\_m}^{(2)} \tag{109}$$

12.3.3. 二因子の場合の因子得点と独立負荷量

前節の解析で我々は以下の基本方程式

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = f_i \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + g_i \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{pmatrix} \tag{110}$$

の中で、二つの因子負荷量、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{111}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{112}$$

を同定した。残りのパラメータである因子得点 f_i, g_i と独立負荷量 e_x, e_y, e_z を定めることを考える。

各人の成績 x, y, z は因子得点 f および g を使って表現されるとする。我々はその真の値は知ることができず、その推定値 $\hat{f}_i$ および $\hat{g}_i$ を使って表す。これらは、以下のようになるであろう。

$$\hat{f}_i = h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \tag{113}$$

$$\hat{g}_i = h_{gx} x_i + h_{gy} y_i + h_{gz} z_i \tag{114}$$

f_i に最初に注目すると、これは最初に議論した 1 因子の場合と同じで、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} h_{fx} \\ h_{fy} \\ h_{fz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{115}$$

この h_{fx}, h_{fy}, h_{fz} を使い、f_i の推定値は以下のようになる。

$$\hat{f}_i = h_{fx} x_i + h_{fy} y_i + h_{fz} z_i \tag{116}$$

もう一つの因子得点 g についても同じように解析を施し、以下を得る。

$$\begin{pmatrix} h_{gx} \\ h_{gy} \\ h_{gz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{117}$$

この h_{gx}, h_{gy}, h_{gz} を使って、関連する因子得点の推定値は以下となる。

$$\hat{g}_i = h_{gx} x_i + h_{gy} y_i + h_{gz} z_i \tag{118}$$

独立負荷量は以下となる

$$\begin{pmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \left[\hat{f}_i \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \hat{g}_i \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \tag{119}$$

以上を纏めると以下になる。

$$\begin{pmatrix} e_{x1} & e_{x2} & \cdots & e_{xn} \\ e_{y1} & e_{y2} & \cdots & e_{yn} \\ e_{z1} & e_{z2} & \cdots & e_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \tag{120}$$

これらは全て決定されている。

12.3.4. 素 Valimax 法による因子負荷量と因子得点の不確かさの解消

これまでの解析で我々は因子負荷量と因子係数、独立負荷量を求めた。それらを利用すると各データは以下のように表現される。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & \cdots & e_{nx} \\ e_{1y} & e_{2y} & \cdots & e_{ny} \\ e_{1z} & e_{2z} & \cdots & e_{nz} \end{pmatrix} \tag{121}$$

これは X, A, F, Γ を用いて以下のように表現できる。

$$X = AF + \Gamma \tag{122}$$

しかしながら、上の式 は以下と等価である。

$$X = ATT^{-1}F + \Gamma \tag{123}$$

ここで、T は回転行列であり、X は以下のようにも表現される。

$$X = AT(\theta)T(-\theta)F + \Gamma \tag{124}$$

以下のように因子負荷量と因子得点を定義しなおす。以下のようにも変形できる。

$$\begin{cases} \tilde{A} = AT(\theta) \\ \tilde{F} = T(-\theta)F \end{cases} \tag{125}$$

もし、A と F が Eq. (86)の解であれば、$\tilde{A}, \tilde{F}$ もその解となる。

つまり、因子負荷量と関連する行列は以下のように回転に関して任意である。

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_x\cos\theta+b_x\sin\theta & -a_x\sin\theta+b_x\cos\theta \\ a_y\cos\theta+b_y\sin\theta & -a_y\sin\theta+b_y\cos\theta \\ a_z\cos\theta+b_z\sin\theta & -a_z\sin\theta+b_z\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{a}_y & \tilde{b}_y \\ \tilde{a}_z & \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

ここで、以下である。

$$\begin{cases} \tilde{a}_x=a_x\cos\theta+b_x\sin\theta \\ \tilde{a}_y=a_y\cos\theta+b_y\sin\theta \\ \tilde{a}_z=a_z\cos\theta+b_z\sin\theta \end{cases} \tag{126}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_x=-a_x\sin\theta+b_x\cos\theta \\ \tilde{b}_y=-a_y\sin\theta+b_y\cos\theta \\ \tilde{b}_z=-a_z\sin\theta+b_z\cos\theta \end{cases} \tag{127}$$

このように回転量は任意である。ここで、その回転量を決めることができるであろうか？

ここで、Valimax 法を導入する。これは、$\tilde{\boldsymbol{A}}$ の要素が最大値と最小値を持つようにする方法である。

$$V=\frac{1}{3}\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2-\frac{1}{3^2}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2+\frac{1}{3}\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2-\frac{1}{3^2}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 \tag{128}$$

この場合、V を最大にしたい。これを素 Valimax 法と呼ぶ。

V を数値的に最大化することができる。しかし、それを以下のように解析的に扱うことができる。

V の第 1 項と第 3 項の和は以下のようになる。.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2+\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&=\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(a_\alpha\cos\theta+b_\alpha\sin\theta\right)^2\right]^2+\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(-a_\alpha\sin\theta+b_\alpha\cos\theta\right)^2\right]^2 \\
&=\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4\cos^4\theta+4a_\alpha{}^3b_\alpha\cos^3\theta\sin\theta+6a_\alpha{}^2b_\alpha{}^2\cos^2\theta\sin^2\theta+4a_\alpha b_\alpha{}^3\cos\theta\sin^3\theta+b_\alpha{}^4\sin^4\theta\right) \\
&+\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4\sin^4\theta-4a_\alpha{}^3b_\alpha\sin^3\theta\cos\theta+6a_\alpha{}^2b_\alpha{}^2\sin^2\theta\cos^2\theta-4a_\alpha b_\alpha{}^3\sin\theta\cos^3\theta+b_\alpha{}^4\cos^4\theta\right) \\
&=\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4+b_\alpha{}^4\right)\cos^4\theta \\
&+4\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^3b_\alpha-a_\alpha b_\alpha{}^3\right)\cos^3\theta\sin\theta \\
&+12\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2b_\alpha{}^2\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&-4\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^3b_\alpha-a_\alpha b_\alpha{}^3\right)\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4+b_\alpha{}^4\right)\sin^4\theta
\end{aligned}
\tag{129}
$$

V の右辺第 2 項は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&=\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha\cos\theta+b_\alpha\sin\theta\right)^2\right]^2 \\
&=\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2\cos^2\theta+2a_\alpha b_\alpha\cos\theta\sin\theta+b_\alpha{}^2\sin^2\theta\right)\right]^2 \\
&=\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2\cos^2\theta+2a_\alpha b_\alpha\cos\theta\sin\theta+b_\alpha{}^2\sin^2\theta\right) \\
&\times\sum_{\beta=x,y,z}\left(a_\beta{}^2\cos^2\theta+2a_\beta b_\beta\cos\theta\sin\theta+b_\beta{}^2\sin^2\theta\right) \\
&=\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\cos^4\theta \\
&+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\cos^3\theta\sin\theta \\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\cos^3\theta\sin\theta \\
&+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\sin^4\theta
\end{aligned}
\tag{130}
$$

これをθに関して整理して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&=\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\right)^2\cos^4\theta \\
&+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)\cos^3\theta\sin\theta \\
&+\left[2\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right)+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)^2\right]\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right)^2\sin^4\theta
\end{aligned}
\tag{131}
$$

V の右辺第 4 項を考え、以下の展開をする。

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2\\
&=\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(-a_\alpha\sin\theta+b_\alpha\cos\theta\right)^2\right]^2\\
&=\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2\sin^2\theta-2a_\alpha b_\alpha\sin\theta\cos\theta+b_\alpha{}^2\cos^2\theta\right)\right]^2\\
&=\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2\sin^2\theta-2a_\alpha b_\alpha\sin\theta\cos\theta+b_\alpha{}^2\cos^2\theta\right)\\
&\times\sum_{\beta=x,y,z}\left(a_\beta{}^2\sin^2\theta-2a_\beta b_\beta\sin\theta\cos\theta+b_\beta{}^2\cos^2\theta\right)\\
&=\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\sin^4\theta\\
&-2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\sin^3\theta\cos\theta\\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta{}^2\right)\sin^2\theta\cos^2\theta\\
&-2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\sin^3\theta\cos\theta\\
&+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\sin^2\theta\cos^2\theta\\
&-2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\sin\theta\cos^3\theta\\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\sin^2\theta\cos^2\theta\\
&-2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\sin\theta\cos^3\theta\\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\beta=x,y,z}b_\beta{}^2\right)\cos^4\theta
\end{aligned}
\tag{132}
$$

θ に関して整理すると,

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&=\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\right)^2\sin^4\theta \\
&-4\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\right)\sin^3\theta\cos\theta \\
&+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)+4\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\sum_{\beta=x,y,z}a_\beta b_\beta\right)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&-4\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\right)\sin\theta\cos^3\theta \\
&+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)^2\cos^4\theta
\end{aligned}
\tag{133}
$$

V の右辺の第 2,4 項をまとめると、以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2+\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&=\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\right)^2+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)^2\right]\cos^4\theta \\
&+4\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2-\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\right)\right]\cos^3\theta\sin\theta \\
&+4\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)+2\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\right)^2\right]\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&-4\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2-\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha b_\alpha\right]\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}a_\alpha{}^2\right)^2+\left(\sum_{\alpha=x,y,z}b_\alpha{}^2\right)^2\right]\sin^4\theta
\end{aligned}
\tag{134}
$$

したがって、全てをまとめると以下となる。

$$
\begin{aligned}
&3V \\
&= \sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{a}_\alpha\right)^2\right]^2 + \sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\tilde{b}_\alpha\right)^2\right]^2 \\
&= \left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4 + b_\alpha{}^4\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right)^2\right]\right\}\cos^4\theta \\
&+4\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^3 b_\alpha - a_\alpha b_\alpha{}^3\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2 - b_\alpha{}^2\right)\right)\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)\right]\right\}\cos^3\theta\sin\theta \\
&+4\left\{3\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2 b_\alpha{}^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2 \sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right) + 2\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)^2\right]\right\}\cos^2\theta\sin^2\theta \\
&-4\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^3 b_\alpha - a_\alpha b_\alpha{}^3\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2 - b_\alpha{}^2\right)\right)\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right]\right\}\cos\theta\sin^3\theta \\
&+\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4 + b_\alpha{}^4\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right)^2\right]\right\}\sin^4\theta \\
&= K_1\cos^4\theta + K_2\cos^3\theta\sin\theta + K_3\cos^2\theta\sin^2\theta - K_2\cos\theta\sin^3\theta + K_1\sin^4\theta
\end{aligned}
\tag{135}
$$

ここで、以下の変数を定義する。

$$
K_1 = \sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^4 + b_\alpha{}^4\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right)^2\right] \tag{136}
$$

$$
K_2 = 4\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^3 b_\alpha - a_\alpha b_\alpha{}^3\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z}\left(a_\alpha{}^2 - b_\alpha{}^2\right)\right)\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)\right]\right\} \tag{137}
$$

$$
K_3 = 4\left\{3\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2 b_\alpha{}^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha{}^2 \sum_{\alpha=x,y,z} b_\alpha{}^2\right) + 2\left(\sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha b_\alpha\right)^2\right]\right\} \tag{138}
$$

V は局所的極大値を以下のように持つ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(3V)}{\partial\theta}\\
&=-4K_1\cos^3\theta\sin\theta\\
&+K_2\left(-3\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta\right)\\
&+K_3\left(-2\cos\theta\sin^3\theta+2\cos^3\theta\sin\theta\right)\\
&-K_2\left(-\sin^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\\
&+4K_1\sin^3\theta\cos\theta\\
&=K_2\cos^4\theta+\left(-4K_1+2K_3\right)\cos^3\theta\sin\theta\\
&-6K_2\cos^2\theta\sin^2\theta+\left(4K_1-2K_3\right)\cos\theta\sin^3\theta+K_2\sin^4\theta\\
&=K_2\cos^4\theta-4K_4\cos^3\theta\sin\theta-6K_2\cos^2\theta\sin^2\theta+4K_4\cos\theta\sin^3\theta+K_2\sin^4\theta\\
&=0
\end{aligned}
\tag{139}
$$

ここで、

$$K_4=K_1-\frac{1}{2}K_3 \tag{140}$$

を定義する。Eq. (139) を $\cos^4\theta$ で割って、以下を得る。

$$1-4\frac{K_4}{K_2}\tan\theta-6\tan^2\theta+4\frac{K_4}{K_2}\tan^3\theta+\tan^4\theta=0 \tag{141}$$

整理し直すと、以下となる。

$$\frac{K_2}{K_4}=\frac{4\left(\tan\theta-\tan^3\theta\right)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}=\tan\left(4\theta\right) \tag{142}$$

ここで、以下の定理を利用している。

$$\tan\left(4\theta\right)=\frac{4\left(\tan\theta-\tan^3\theta\right)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta} \tag{143}$$

これから以下となる。

$$4\theta=\tan^{-1}\left(\frac{K_2}{K_4}\right) \tag{144}$$

つまり、この角度が V を最大にする。

変化させる角度の制約条件を以下とする。

$$-\frac{\pi}{2}<4\theta<\frac{\pi}{2} \tag{145}$$

θ_0 を一つの解とする。もう一つの解は**エラー! 参照元が見つかりません。**に示す通りも

う一つの解は$\theta_0 - \pi$ である。

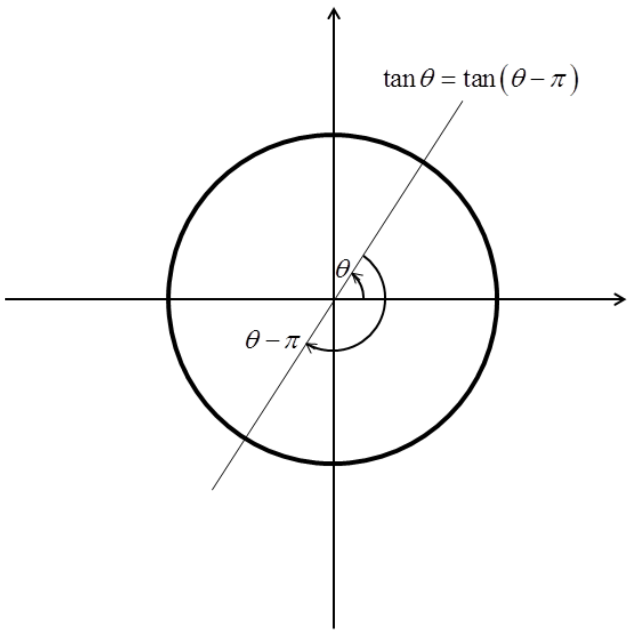

図 2　二つの角度は同じ値を与える

したがって、我々は二つの根を持つ。それらは、極小値と極大値である。その中の極大値の方を選べばいい。

極大値の条件をさらに求める。

Eq. (139) をθについてさらに微分すると以下を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(3V)}{\partial\theta^2} \\
&= K_2\left(-4\cos^3\theta\sin\theta\right) \\
&-4K_4\left(-3\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta\right) \\
&-6K_2\left(-2\cos\theta\sin^3\theta+2\cos^3\theta\sin\theta\right) \\
&+4K_4\left(-\sin^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta\right) \\
&+K_2\left(4\cos\theta\sin^3\theta\right) \\
&= K_2\left(-4\cos^3\theta\sin\theta+12\cos\theta\sin^3\theta-12\cos^3\theta\sin\theta+4\cos\theta\sin^3\theta\right) \\
&-4K_4\left(-3\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta-3\cos^2\theta\sin^2\theta\right) \\
&=16K_2\left(\cos\theta\sin^3\theta-\cos^3\theta\sin\theta\right) \\
&-4K_4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta\right) \\
&=16K_2\cos\theta\sin\theta\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right) \\
&-4K_4\left[\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^2-\left(2\cos\theta\sin\theta\right)^2\right] \\
&=-4\left(K_4\cos4\theta+K_2\sin4\theta\right)<0
\end{aligned}
\tag{146}
$$

したがって、極大値の条件は以下となる。

$$K_4\cos4\theta+K_2\sin4\theta>0 \tag{147}$$

我々はまず以下の関係式を得る。

$$\frac{K_2}{K_4}=\tan\left(4\theta\right)=\frac{\sin4\theta}{\cos4\theta} \tag{148}$$

これから、

$$\cos4\theta=\frac{K_4}{K_2}\sin4\theta \tag{149}$$

Eq. (149)を Eq. (147)に代入して以下を得る。

$$\frac{K_2{}^2+K_4{}^2}{K_2}\sin4\theta>0 \tag{150}$$

$K_2{}^2/\left(K_2{}^2+K_4{}^2\right)>0$ を Eq. (150)にかけてさらに以下を得る。

$$K_2\sin4\theta>0 \tag{151}$$

これが、極大の条件となる。

もしも評価した4θ が Eq. (151)を満足しない場合、我々は角度を以下のように変更する。

$$4\theta \to 4\theta \pm \pi \tag{152}$$

符号± 以下を満足するように選択する。

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \tag{153}$$

ここで、様々な状況を考える。

もし、 $K_2 \sin 4\theta > 0$ が成り立つ場合、これは以下を保証する。

$$-\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{8} \tag{154}$$

そして、我々はこの角度を採用する。

もし、$K_2 \sin 4\theta > 0$ が成り立たない場合、次の状況を考える。

さらに、$\sin 4\theta > 0$ の場合を考える。これは、4θ が第 1 象限にあることを意味する。この場合、どちらの符号を採用すればいいか検討する。

負の符号を採用すると、4θ は第 3 象限に入るから、

$$-\pi < 4\theta < -\frac{\pi}{2} \tag{155}$$

となる。したがって、

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{8} \tag{156}$$

となる。これは、望む範囲である。

正の符号を採用しても4θ は第 3 象限に入るから

$$\pi < 4\theta < \frac{3\pi}{2} \tag{157}$$

となる。したがって、

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{8} \tag{158}$$

となる。これは、望む範囲から外れる。したがって、負の符号を採用する。

次に$\sin 4\theta < 0$の場合を考える。これは、4θ が第 4 象限にあることを意味する。 この場合、どちらの符号を採用すればいいのか検討する。

負の符号を採用すると、4θ が第 2 象限に入るから以下となる。

$$-\frac{3\pi}{2} < 4\theta < -\pi \tag{159}$$

したがって、以下を得る。

$$-\frac{3\pi}{8}<\theta<-\frac{\pi}{4} \tag{160}$$

これは望む範囲の外にある。したがって、この符号を採用することはできない。

正の符号を利用すると、4θ が第 2 象限に入るから以下となる。

$$\frac{\pi}{2}<4\theta<\pi \tag{161}$$

したがって、以下を得る。

$$\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{4} \tag{162}$$

これは望む範囲内にある。したがって、この場合は正の符号を採用する。

表 1 に上のプロセスを示す。

表 1 角度を決める条件

Condition 1	Condition 2	4θ conversion	Range of θ
$K_2\sin 4\theta \ge 0$	None	None	$-\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{8}$
$K_2\sin 4\theta < 0$	$\sin 4\theta \ge 0$	$4\theta \to 4\theta-\pi$	$-\frac{\pi}{4}<\theta<-\frac{\pi}{8}$
	$\sin 4\theta < 0$	$4\theta \to 4\theta+\pi$	$\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{4}$

12.3.5. 規格化 Valimax 法による因子負荷量と因子得点の不確かさの解消

前節で説明した素 Valimax 法は、$d_\alpha^2=1-S_{e_\alpha}^{(2)}$ が大きいときはあまり精度が良くない。d_α^2 が大きい場合、因子負荷量は大きくなる傾向にある。結果的に、回転角はデータ全体というより、その因子負荷量が大きい小数のデータで決定されてしまう。したがって、因子負荷量を $\left(a_\alpha/d_\alpha\right)^2$, $\left(b_\alpha/d_\alpha\right)^2$ のように変形して使うことが推奨された

したがって、以下を評価する。

$$S=\frac{1}{3}\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{\tilde{a}_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2-\frac{1}{3^2}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{\tilde{a}_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2$$
$$+\frac{1}{3}\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{\tilde{b}_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2-\frac{1}{3^2}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{\tilde{b}_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 \tag{163}$$

これから、S を最大にする角度 θ を決定するこれは規格化 Valimax 法と呼ばれる。対応する係数は以下となる。

$$\tan(4\theta)=\frac{G_2}{G_4} \tag{164}$$

ここで以下である。

$$G_1=\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^4+\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^4\right]-\frac{1}{3}\left\{\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2+\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]^2\right\} \tag{165}$$

$$G_2=4\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^3\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)-\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^3\right]-\frac{1}{3}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^2-\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\right]\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)\right]\right\} \tag{166}$$

$$G_3=4\left\{3\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^2-\frac{1}{3}\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)^2\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)^2+2\left[\sum_{\alpha=x,y,z}\left(\frac{a_\alpha}{d_\alpha}\right)\left(\frac{b_\alpha}{d_\alpha}\right)\right]^2\right]\right\} \tag{167}$$

$$G_4=G_1-\frac{1}{2}G_3 \tag{168}$$

$$G_2\sin 4\theta>0 \tag{169}$$

この場合は以下となる。

$$4\theta=\tan^{-1}\left(\frac{G_2}{G_4}\right) \tag{170}$$

つまり、この角度が S を最大にする。ただし、角度については以下の変換が必要である。

表 2　角度を決める条件

Condition 1	Condition 2	4θ conversion	Range of θ
$G_2 \sin 4\theta \ge 0$	None	None	$-\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{8}$
$G_2 \sin 4\theta < 0$	$\sin 4\theta \ge 0$	$4\theta \to 4\theta - \pi$	$-\frac{\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{8}$
	$\sin 4\theta < 0$	$4\theta \to 4\theta + \pi$	$\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$

12.4. 一般の数の因子分析

ここでは、任意の数の因子を扱うことを考える。我々は p 種類の変数, q 種類の因子、n 個のデータセットを考える。これらの数の制約条件は以下である。

$$q \le p \tag{171}$$

ここでの解析は基本的に二因子の場合と同じである。

ここでの解析は一般的であり、最終的に使われれるものであるから、表記を含めて統一化していく。

12.4.1. 変数の表記

ここでは、変数の表記をどうするかを示す。

$$X_1, X_2, \cdots, X_p \tag{172}$$

を扱う。これらを以下のように一般的に表す。

$$X_\alpha \ for\ \alpha = 1, 2, \cdots, p \tag{173}$$

それぞれの変数は実際には n 個あるとする。すなわち、我々は p 種類のデータを n セット持っている、ということになる。したがって、それぞれの確率変数は以下のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{i1}, \cdots, x_{n1} \\ X_2 &= x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{i2}, \cdots, x_{n2} \\ &\cdots \\ X_p &= x_{1p}, x_{2p}, \cdots, x_{ip}, \cdots, x_{np} \end{aligned} \tag{174}$$

これを一般的には以下のように表現する。

$$X_{i\alpha} \tag{175}$$

我々はこの p 種類のデータから 2 種類のみを取り出して解析する場合がある。その二種

類を以下のようにしばしば取り扱う。

$$X_\alpha, X_\beta \tag{176}$$

ここでは、因子としてq 種類扱う。したがって、因子得点もq種類ある。それらを以下のように表記する。

$$f_1, f_2, \cdots, f_q \tag{177}$$

これは一般的に以下のように表記する。

$$f_k \ for\ k = 1, 2, \cdots, q \tag{178}$$

因子得点は各メンバーについて定義されるから、一般には以下のようになる。

$$\begin{aligned} &f_1 : f_{11}, f_{21}, \cdots, f_{n1} \\ &f_2 : f_{12}, f_{22}, \cdots, f_{n2} \\ &\cdots \\ &f_q : f_{1q}, f_{2q}, \cdots, f_{nq} \end{aligned} \tag{179}$$

これらの因子得点を象徴的に以下のようにあらわす。

$$f_{ik} \tag{180}$$

我々は、q 種類の因子をここでは扱う。したがって、因子負荷量もq個あり、それらを以下で表す。

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_q \tag{181}$$

それぞれの因子負荷量はp個の要素を持つから、以下で表現される。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \\ &\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} \\ &\cdots \\ &\boldsymbol{a}_q = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{182}$$

独立負荷量はp変数から、それに対応して

$$e_1, e_2, \cdots, e_p \tag{183}$$

と表現される。これを象徴的に表現すると以下となる。

$$e_\alpha \;\; for\; \alpha = 1, 2, \cdots, p \tag{184}$$

独立負荷量はそれぞれの n 人のメンバーに対しても定義されるから、それはさらに添え字を持ち、以下のように表現される。

$$\begin{aligned} &e_1 : e_{11}, e_{21}, \cdots, e_{n1} \\ &e_2 : e_{12}, e_{22}, \cdots, e_{n2} \\ &\cdots \\ &e_p : e_{1p}, e_{2p}, \cdots, e_{np} \end{aligned} \tag{185}$$

したがって、独立負荷量は象徴的には以下のように表現される。

$$e_{i\alpha} \tag{186}$$

二つの種類の独立因子を扱う場合は、以下のように表現する場合がある。

$$e_\alpha, e_\beta \tag{187}$$

この解析に主成分分析のものを適用する場合を考える。主成分分析においては p 種類の変数を扱うから、 p 種類の固有値を得る。それを以下のように表現する。

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \tag{188}$$

ここで、

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \tag{189}$$

とする。

因子分析においては、その中の q 因子を扱うから、利用する固有値は以下となる。

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q \tag{190}$$

12.4.2. 基本方程式

前節で述べたように、我々は p 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 、および q 個の因子を扱う。したがって、因子負荷量は q 種類あり、それぞれの因子負荷量は p 個の要素を持つ。つまり、

$$\boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix} \tag{191}$$

である。

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix} = f_{i1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + f_{i2} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \cdots + f_{iq} \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{ip} \end{pmatrix} \quad for\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{192}$$

ここで、i は各メンバーを表す。因子負荷量 $a_{\alpha k}$ はメンバーに依存せずデータの種類に依存し、因子得点はメンバーに依存し、独立負荷量 $e_{i\alpha}$ は変数にもメンバーにも依存することに留意しよう。また、この左辺は分かっている量であるが、右辺は何も分かっていない量であることにも注目しよう。

Eq. (192)を解くために、以下の正弦を与える。

因子得点 f_k は規格化されているものとする。すなわち、以下を仮定する。

$$E[f_k] = 0 \tag{193}$$

$$V[f_k] = 1 \tag{194}$$

独立因子の平均は 0 とする。すなわち、

$$E\left[e_{x_\alpha}\right] = 0 \tag{195}$$

である。ここで、p 個の変数を扱っているから $\alpha = 1, 2, \cdots, p$ である。

f_k と e_α 間の共分散は 0 とする。すなわち、

$$Cov[f_k, f_l] = \delta_{kl} \tag{196}$$

$$Cov[f_k, e_\alpha] = 0 \tag{197}$$

$$Cov\left[e_\alpha, e_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta} \tag{198}$$

である。

以下のベクトル、行列を定義する。

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix} \tag{199}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix} \tag{200}$$

. . .

$$\boldsymbol{f}_q = \begin{pmatrix} f_{1q} \\ f_{2q} \\ \vdots \\ f_{nq} \end{pmatrix} \tag{201}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{pmatrix} \tag{202}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{n2} \end{pmatrix} \tag{203}$$

. . .

$$\boldsymbol{e}_p = \begin{pmatrix} e_{1p} \\ e_{2p} \\ \vdots \\ e_{np} \end{pmatrix} \tag{204}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \tag{205}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \tag{206}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1q} & f_{2q} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix} \tag{207}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1p} & e_{2p} & \cdots & e_{np} \end{pmatrix} \tag{208}$$

これにより、データは以下のように行列表現できる。

$$X = AF + \Gamma \tag{209}$$

X^T を右側からかけて以下を得る。

$$\begin{aligned}
XX^T &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} nS_{11}^{(2)} & nS_{12}^{(2)} & \cdots & nS_{1p}^{(2)} \\ nS_{21}^{(2)} & nS_{22}^{(2)} & \cdots & nS_{2p}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nS_{p1}^{(2)} & nS_{p2}^{(2)} & \cdots & nS_{pp}^{(2)} \end{pmatrix} \\
&= n\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{210}$$

ここで X^T は X の転置行列である。変数は規格化されているので、共分散は相関係数になる。したがって、以下となる。

$$r_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(2)} \tag{211}$$

$$r_{\alpha\alpha} = 1 \quad for\ \alpha = 1, 2, \cdots, p \tag{212}$$

同じように、転置行列を右側からかけると以下を得る。

$$\begin{aligned}
&(AF + \Gamma)(AF + \Gamma)^T \\
&= (AF + \Gamma)\left(F^T A^T + \Gamma^T\right) \\
&= AFF^T A^T + AF\Gamma^T + \Gamma F^T A^T + \Gamma\Gamma^T \\
&= A\left(FF^T\right)A^T + A\left(F\Gamma^T\right) + \left(F\Gamma^T\right)^T A^T + \Gamma\Gamma^T
\end{aligned} \tag{213}$$

更に、以下のように変形できる。

$$FF^T = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1q} & f_{2q} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1q} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{i1}^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} f_{i1} f_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{i1} f_{iq} \\ \sum_{i=1}^{n} f_{i2} f_{i1} & \sum_{i=1}^{n} f_{i2}^{\ 2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{i2} f_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{iq} f_{i1} & \sum_{i=1}^{n} f_{iq} f_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{iq}^{\ 2} \end{pmatrix} \tag{214}$$

$$= n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$F\Gamma^T = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1q} & f_{2q} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1q} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nq} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{i1} e_{i1} & \sum_{i=1}^{n} f_{i1} e_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{i1} e_{iq} \\ \sum_{i=1}^{n} f_{i2} e_{i1} & \sum_{i=1}^{n} f_{i2} e_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{i2} e_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{iq} e_{i1} & \sum_{i=1}^{n} f_{iq} e_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{iq} e_{iq} \end{pmatrix} \tag{215}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、以下を得る。

$$\frac{1}{n} XX^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = AA^T + \frac{1}{n} \Gamma\Gamma^T \tag{216}$$

AA^T と $(1/n)\Gamma\Gamma^T$ は更に以下のように展開できる。

$$
AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + \cdots + a_{1q}{}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \cdots + a_{1q}a_{2q} & \cdots & a_{11}a_{p1} + a_{12}a_{p2} + \cdots + a_{1q}a_{pq} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + \cdots + a_{2q}a_{1q} & a_{21}{}^2 + a_{22}{}^2 + \cdots + a_{2q}{}^2 & \cdots & a_{21}a_{p1} + a_{22}a_{p2} + \cdots + a_{2q}a_{pq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}a_{11} + a_{p2}a_{12} + \cdots + a_{pq}a_{1q} & a_{p1}a_{21} + a_{p2}a_{22} + \cdots + a_{pq}a_{2q} & \cdots & a_{p1}{}^2 + a_{p2}{}^2 + \cdots + a_{pq}{}^2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}{}^2 & a_{11}a_{21} & \cdots & a_{11}a_{p1} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}{}^2 & \cdots & a_{21}a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}a_{11} & a_{p1}a_{21} & \cdots & a_{p1}{}^2 \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} a_{12}{}^2 & a_{12}a_{22} & \cdots & a_{12}a_{p2} \\ a_{22}a_{12} & a_{22}{}^2 & \cdots & a_{22}a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p2}a_{12} & a_{p2}a_{22} & \cdots & a_{p2}{}^2 \end{pmatrix}
$$

$$
+ \cdots
$$

$$
+ \begin{pmatrix} a_{1q}{}^2 & a_{1q}a_{2q} & \cdots & a_{1q}a_{pq} \\ a_{2q}a_{1q} & aa_{2q}{}^2 & \cdots & a_{2q}a_{pq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{pq}a_{1q} & a_{pq}a_{2q} & \cdots & a_{pq}{}^2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix}
$$

$$
+ \cdots
$$

$$
+ \begin{pmatrix} a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{q} \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{pk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix}
$$

(217)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Gamma\Gamma^T &= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1p} & e_{2p} & \cdots & e_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i1}{}^2 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i1}e_{i2} & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i1}e_{ip} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i2}e_{i1} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i2}{}^2 & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{i2}e_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{ip}e_{i1} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{ip}e_{i2} & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{ip}{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ix_1} & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{218}
$$

最終的には以下を得る。

$$
\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{q}\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{pk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ix_1} & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{219}
$$

これが、基本方程式となる。

12.4.3. 因子負荷量

p 個の変数に対応する相関行列は以下のように p 個の固有値と p 個の固有ベクトルで展開できる。

$$
\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1{}^T + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2{}^T + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{v}_p \boldsymbol{v}_p{}^T \tag{220}
$$

最初の q 個の項 $\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)\left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_q}\boldsymbol{v}_q\right)\left(\sqrt{\lambda_q}\boldsymbol{v}_q\right)^T$ を因子負荷量の初期値とみなす。すなわち、

$$
\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)\left(\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_q}\boldsymbol{v}_q\right)\left(\sqrt{\lambda_q}\boldsymbol{v}_q\right)^T
$$

$$
+ \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (221)
$$

と近似する。つまり、因子負荷量の初期値は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1 \\
&\boldsymbol{a}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2 \\
&\cdots \\
&\boldsymbol{a}_q = \sqrt{\lambda_q}\boldsymbol{v}_q
\end{aligned} \qquad (222)
$$

これは、最終的な値ではなく、1 回目の初期値であるから、以下のように表記する。

$$
\lambda_{1\_1}, \boldsymbol{v}_{1\_1}, \lambda_{2\_1}, \boldsymbol{v}_{2\_1}, \cdots, \lambda_{q\_1}, \boldsymbol{v}_{q\_1} \qquad (223)
$$

式を以下のように変形する。

この場合、独立因子は以下のように近似していることになる。

$$
\begin{pmatrix} S_{e_1\_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2\_1}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p\_1}^{(2)} \end{pmatrix}
$$

$$
= \left(\sqrt{\lambda_{q+1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q+1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{q+2\_1}}\boldsymbol{v}_{q+2\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q+2\_1}}\boldsymbol{v}_{q+2\_1}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{p\_1}}\boldsymbol{v}_{p\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{p\_1}}\boldsymbol{v}_{p\_1}\right)^T
$$

(224)

また、一方では、この行列は以下のようにも近似していることになる。

$$
\begin{pmatrix} S^{(2)}_{e_1\_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S^{(2)}_{e_2\_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S^{(2)}_{e_p\_1} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}
- \left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_1}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_1}}\boldsymbol{v}_{2\_1}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q\_1}}\boldsymbol{v}_{q\_1}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q\_1}}\boldsymbol{v}_{q\_1}\right)^T \tag{225}
$$

この両者の中で、後者の近似を採用する。前者でにおいては、右辺の項が常に小さいことが予想されるからである。

この近似の中で、左辺の非対角項は 0 であるが、右辺の非対角項は一般に 0 にならない。しかし、右辺の対角項を左辺のものに等しいとし、非対角項は 0 と近似する。つまり、左辺の各要素の値を右辺の対角項であると近似する。これにより、$S^{(2)}_{ei\_1}$ の値は全て決まる。

その後に以下の行列を考える。

$$
R_1 = \begin{pmatrix} 1-S^{(2)}_{e_1\_1} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1-S^{(2)}_{e_2\_1} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1-S^{(2)}_{e_p\_1} \end{pmatrix} \tag{226}
$$

この行列の固有値を考えると、

$$
R_1 = \begin{pmatrix} 1-S^{(2)}_{e_1\_1} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1-S^{(2)}_{e_2\_1} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1-S^{(2)}_{e_p\_1} \end{pmatrix}
= \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)^T
+ \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{p\_2}}\boldsymbol{v}_{p\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{p\_2}}\boldsymbol{v}_{p\_2}\right)^T \tag{227}
$$

となる。これを戻すと

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)^T \\
&+ \begin{pmatrix} S_{e_1\_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2\_1}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p\_1}^{(2)} \end{pmatrix} + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{p\_2}}\boldsymbol{v}_{p\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{p\_2}}\boldsymbol{v}_{p\_2}\right)^T \\
&\approx \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_1}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)^T \\
&+ \begin{pmatrix} S_{e_1\_2}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2\_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p\_2}^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{228}
$$

　これから、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} S_{e_1\_2}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2\_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&- \left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1\_2}}\boldsymbol{v}_{1\_2}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2\_2}}\boldsymbol{v}_{2\_2}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q\_2}}\boldsymbol{v}_{q\_2}\right)^T
\end{aligned}
\tag{229}
$$

この中で、左辺の非対角項は 0 でああるが、右辺の非対角項は一般に 0 にならない。しかし、右辺の対角項を左辺のものに等しいとし、非対角項は 0 と近似する。つまり、左辺の各要素の値を右辺の対角項であると近似する。これにより、$S_{ei\_2}^{(2)}$ の値は全て決まる。

　ここで、以下の δ^2 を評価する。

$$
\delta^2 = \frac{1}{q}\left\{\left[S_{e_1\_2}^{(2)} - S_{e_1\_1}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_2\_2}^{(2)} - S_{e_2\_1}^{(2)}\right]^2 + \cdots + \left[S_{e_q\_2}^{(2)} - S_{e_q\_1}^{(2)}\right]^2\right\} \tag{230}
$$

もし、この値が δ_c^2 よりも小さければ、この時点の因子負荷量を最終的なものとみなす。つ

まり、因子負荷量は以下となる。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = \sqrt{\lambda_{1_2}}\boldsymbol{v}_{1_2} \\
&\boldsymbol{a}_2 = \sqrt{\lambda_{2_2}}\boldsymbol{v}_{2_2} \\
&\cdots \\
&\boldsymbol{a}_q = \sqrt{\lambda_{q_2}}\boldsymbol{v}_{q_2}
\end{aligned} \tag{231}$$

もし、 $\delta^2 > \delta_c^2$ であれば、以下の行列を考える。by

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1-S_{e_1\_2}^{(2)} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1-S_{e_2\_2}^{(2)} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1-S_{e_p\_2}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{232}$$

そして、これまでと同様に以下の固有値を求める。

$$\lambda_{1\_3}, \boldsymbol{v}_{1\_3}, \lambda_{2\_3}, \boldsymbol{v}_{2\_3}, \cdots, \lambda_{q\_3}, \boldsymbol{v}_{q\_3} \tag{233}$$

これから、以下の基本方程式の左辺の対角要素を右辺の対角要素と近似的に等しいとおいて定める。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} S_{e_1_3}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2_3}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p_3}^{(2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&-\left(\sqrt{\lambda_{1_3}}\boldsymbol{v}_{1_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{1_3}}\boldsymbol{v}_{1_3}\right)^T + \left(\sqrt{\lambda_{2_3}}\boldsymbol{v}_{2_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{2_3}}\boldsymbol{v}_{2_3}\right)^T + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_{q_3}}\boldsymbol{v}_{q_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_{q_3}}\boldsymbol{v}_{q_3}\right)^T
\end{aligned} \tag{234}$$

そして、以下の δ^2 を評価する。

$$\delta = \frac{1}{q}\left\{\left[S_{e_1\_3}^{(2)} - S_{e_1\_2}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_2\_3}^{(2)} - S_{e_2\_2}^{(2)}\right]^2 + \cdots + \left[S_{e_q\_3}^{(2)} - S_{e_q\_2}^{(2)}\right]^2\right\} \tag{235}$$

もし、δ^2 が δ_c^2 より小さければ、因子負荷量を以下のように設定する。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = \sqrt{\lambda_{1_3}}\boldsymbol{v}_{1_3} \\
&\boldsymbol{a}_2 = \sqrt{\lambda_{2_3}}\boldsymbol{v}_{2_3} \\
&\cdots \\
&\boldsymbol{a}_q = \sqrt{\lambda_{q_3}}\boldsymbol{v}_{q_3}
\end{aligned} \tag{236}$$

もし、 δ^2 が δ_c^2 より大きければ、

$$\delta^2 = \frac{1}{q}\left\{\left[S_{e_1\_m}^{(2)} - S_{e_1\_m-1}^{(2)}\right]^2 + \left[S_{e_2\_m}^{(2)} - S_{e_2\_m-1}^{(2)}\right]^2 + \cdots + \left[S_{e_q\_m}^{(2)} - S_{e_q\_m-1}^{(2)}\right]^2\right\} \tag{237}$$

において、$\delta^2 \le \delta_c^2$ となるまでこのプロセスを繰り返す。そして、最終的には以下の因子負荷量を得る。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \sqrt{\lambda_{1_m}}\boldsymbol{v}_{1_m} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{a}_2 &= \sqrt{\lambda_{2_m}}\boldsymbol{v}_{2_m} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} \\
&\cdots \\
\boldsymbol{a}_q &= \sqrt{\lambda_{q_m}}\boldsymbol{v}_{q_m} = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{238}$$

一方で、以下のようの行列 R の対角要素を評価しておく。

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= 1 - S_{e_1_m}^{(2)} \\
d_2^2 &= 1 - S_{e_2_m}^{(2)} \\
&\cdots \\
d_q^2 &= 1 - S_{e_q_m}^{(2)}
\end{aligned} \tag{239}$$

12.4.4. 因子負荷量の不定性と Valimax 法

前節で X, A, F, Γ を得ることができた。しかし、数学的観点からは、以下の変形が成り立つ。

$$\begin{aligned}
X &= AF + \Gamma \\
&= ATT^{-1}F + \Gamma
\end{aligned} \tag{240}$$

ここで、T を回転行列とする。すると、式は以下のように変形される。

$$X = AT(\theta)T(-\theta)F + \Gamma \tag{241}$$

ここで、

$$\begin{cases} \tilde{A} = AT(\theta) \\ \tilde{F} = T(-\theta)F \end{cases} \tag{242}$$

と置く。すなわち、A と F が解であるとすると、$\tilde{A}$ と $\tilde{F}$ も解になる。つまり、A と F

は一意に定まらない。

二因子の場合は、我々は一組の因子の回転のみを考えればよかった。しかし、q因子の場合、我々は${}_qC_2$ の組み合わせを考えなければならない。

この中の二つの因子を考える。対応する因子負荷量を以下のように評価する。

$$\boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_l = \begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{pl} \end{pmatrix} \quad for\ k \neq l \tag{243}$$

以下の変換を考える。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2k} & a_{2l} \\ \vdots & \vdots \\ a_{pk} & a_{pl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1k}\cos\theta + a_{1l}\sin\theta & -a_{1k}\sin\theta + a_{1l}\cos\theta \\ a_{2k}\cos\theta + a_{2l}\sin\theta & -a_{2k}\sin\theta + a_{2l}\cos\theta \\ \vdots & \vdots \\ a_{pk}\cos\theta + a_{pl}\sin\theta & -a_{k}\sin\theta + a_{l}\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{244}$$

したがって、変換された因子負荷量は以下となる。

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_k = \begin{pmatrix} a_{1k}\cos\theta + a_{1l}\sin\theta \\ a_{2k}\cos\theta + a_{2l}\sin\theta \\ \vdots \\ a_{pk}\cos\theta + a_{pl}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1k} \\ \tilde{a}_{2k} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{pk} \end{pmatrix} \tag{245}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_l = \begin{pmatrix} -a_{1k}\sin\theta + a_{1l}\cos\theta \\ -a_{2k}\sin\theta + a_{2l}\cos\theta \\ \vdots \\ -a_{k}\sin\theta + a_{l}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1l} \\ \tilde{a}_{2l} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{pl} \end{pmatrix} \tag{246}$$

我々はこの回転角度θ を、以下のSが最大になるように決定する。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{p^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 \\ &+ \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{p^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 \end{aligned} \tag{247}$$

この回転角度θ は以下のように解くことが出来る。

$$\tan(4\theta)=\frac{G_2}{G_4} \tag{248}$$

さらに、以下の条件が要請される。

$$G_2\sin 4\theta>0 \tag{249}$$

ここで、それぞれのパラメータは以下のように計算される。

$$G_1=\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^4+\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^4\right]-\frac{1}{p}\left\{\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2+\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2\right\} \tag{250}$$

$$G_2=4\left\{\sum_{\alpha=x,y,z}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^3\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)-\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^3\right]-\frac{1}{p}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2-\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)\right]\right\}$$

(251)

$$G_3=4\left\{3\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2-\frac{1}{p}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2+2\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)\right]^2\right]\right\} \tag{252}$$

$$G_4=G_1-\frac{1}{2}G_3 \tag{253}$$

因子 k,l 間の回転角度を決定した後、以下の行列を考える。

$$T(\theta)=\begin{pmatrix}1 & & & & & \cdots & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \overset{(k,k)}{\cos\theta} & & & \overset{(k,l)}{-\sin\theta} & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots\\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & \overset{(l,k)}{\sin\theta} & & & \overset{(l,l)}{\cos\theta} & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \cdots & & & & 1\end{pmatrix} \tag{254}$$

そそて、以下の計算をする。

$$AT(\theta) \tag{255}$$

このことを ${}_pC_2$ 通りの因子の組み合わせ全てについて行う。

この回転を全ての組について行うと、最初の回転後のものと異なるのが一般的である。

我々はその変化が小さくなるまでこの操作を繰り返す。

12.4.5. 因子得点と独立負荷量

前節で因子負荷量を決定した。残りの因子得点と独立負荷量をここでは求める。基本方程式は以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix} = f_{i1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + f_{i2} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \cdots + f_{iq} \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{ip} \end{pmatrix} \quad for\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{256}$$

我々はこの中で、左辺および右辺の因子負荷量を決定した。これから、因子得点 f_{ki} と独立負荷量 $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{ip}$ を決定していく。

我々はデータ $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip}$ が $f_{i1}, f_{i2}, \cdots, f_{iq}$ を使って表されると仮定する。これは、$\hat{f}_{ik}$ は $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip}$ の線形結合で表されることを意味する。それは以下ように与えられるであろう。

$$\hat{f}_{ik} = h_{1k} x_{i1} + h_{2k} x_{i2} + \cdots + h_{pk} x_{ip} \tag{257}$$

f_{ik} を真の因子得点とする。その予測値とのずれの二乗和は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^{n} \left(f_{ik} - \hat{f}_{ik} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[f_{ik} - \left(h_{1k} x_{i1} + h_{2k} x_{i2} + \cdots + h_{pk} x_{ip} \right) \right]^2 \end{aligned} \tag{258}$$

我々は $h_{1k}, h_{2k}, \cdots, h_{pk}$ を Eq. (258)が最小になるように決定する。

Eq. (258) を h_{1k} で偏微分して 0 と置き、以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k}{\partial h_{1k}} &= \frac{\partial}{\partial h_{1k}} \sum_{i=1}^{n} \left[f_{ik} - \left(h_{1k} x_{i1} + h_{k2} x_{i2} + \cdots + h_{pk} x_{ip} \right) \right]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left[f_{ik} - \left(h_{1k} x_{i1} + h_{k2} x_{i2} + \cdots + h_{pk} x_{ip} \right) \right] x_{i1} = 0 \end{aligned} \tag{259}$$

これは以下となる。

$$\sum_{i=1}^{n} \left(h_{1k} x_{i1} x_{i1} + h_{k2} x_{i2} x_{i1} + \cdots + h_{pk} x_{ip} x_{i1} \right) = \sum_{i=1}^{n} f_{ik} x_{i1} \tag{260}$$

この式の左辺は以下となる。

$$\sum_{i=1}^{n}\left(h_{1k}x_{i1}x_{i1}+h_{k2}x_{i2}x_{i1}+\cdots+h_{pk}x_{ip}x_{i1}\right)=h_{1k}\sum_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i1}+h_{2k}\sum_{i=1}^{n}x_{i2}x_{i1}+\cdots+h_{pk}\sum_{i=1}^{n}x_{ip}x_{i1} \\ =n\left(h_{1k}r_{11}+h_{2k}r_{21}+\cdots+h_{pk}r_{p1}\right) \tag{261}$$

この式の右辺は以下となる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}f_{ik}x_{i1} \\
&=\sum_{i=1}^{n}f_{ik}\left(a_{11}f_{i1}+a_{12}f_{i2}+\cdots+a_{1q}f_{iq}\right) \\
&=a_{11}\sum_{i=1}^{n}f_{ik}f_{i1}+a_{12}\sum_{i=1}^{n}f_{ik}f_{i2}+\cdots+a_{1q}\sum_{i=1}^{n}f_{ik}f_{iq} \\
&=a_{1k}\sum_{i=1}^{n}f_{ik}f_{ik} \\
&=na_{1k}
\end{aligned} \tag{262}$$

したがって、以下となる。

$$h_{1k}r_{11}+h_{2k}r_{21}+\cdots+h_{pk}r_{p1}=a_{1k} \tag{263}$$

$h_{\alpha k}$ について同様な解析をすると以下を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_f}{\partial h_{\alpha k}}&=\frac{\partial}{\partial h_{\alpha k}}\sum_{i=1}^{n}\left[f_{ik}-\left(h_{1k}x_{i1}+h_{2k}x_{i2}+\cdots+h_{pk}x_{ip}\right)\right]^2 \\
&=-2\sum_{i=1}^{n}\left[f_{ik}-\left(h_{1k}x_{i1}+h_{2k}x_{i2}+\cdots+h_{pk}x_{ip}\right)\right]x_{i\alpha}=0
\end{aligned} \tag{264}$$

これから以下を得る。

$$\sum_{i=1}^{n}\left(h_{1k}x_{i1}x_{i\alpha}+h_{2k}x_{i2}x_{i\alpha}+\cdots+h_{pk}x_{ip}x_{i\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{n}f_{ik}x_{i\alpha} \tag{265}$$

この式の左辺は以下となる。s

$$\sum_{i=1}^{n}\left(h_{1k}x_{i1}x_{i\alpha}+h_{2k}x_{i2}x_{i\alpha}+\cdots+h_{pk}x_{ip}x_{i\alpha}\right)=h_{1k}\sum_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i\alpha}+h_{2k}\sum_{i=1}^{n}x_{i2}x_{i\alpha}+\cdots+h_{pk}\sum_{i=1}^{n}x_{ip}x_{i\alpha} \\ =n\left(h_{1k}r_{1\alpha}+h_{2k}r_{2\alpha}+\cdots+h_{pk}r_{p\alpha}\right) \tag{266}$$

右辺は以下となる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f_{ik} x_{i\alpha} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{ik} \left(a_{\alpha 1} f_{i\alpha} + a_{\alpha 2} f_{i2} + \cdots + a_{\alpha q} f_{iq} \right) \\
&= a_{11} \sum_{i=1}^{n} f_{ik} f_{i1} + a_{12} \sum_{i=1}^{n} f_{ik} f_{i2} + \cdots + a_{1q} \sum_{i=1}^{n} f_{ik} f_{iq} \\
&= a_{1k} \sum_{i=1}^{n} f_{ik} f_{ik} \\
&= n a_{1k}
\end{aligned}
\tag{267}
$$

したがって、以下となる。

$$
h_{1k} r_{1\alpha} + h_{2k} r_{2\alpha} + \cdots + h_{pk} r_{p\alpha} = a_{\alpha k} \tag{268}
$$

上を纏めると以下を得る。

$$
\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ \vdots \\ h_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{2k} \end{pmatrix} \tag{269}
$$

これから因子得点の係数として以下を得る。

$$
\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ \vdots \\ h_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{2k} \end{pmatrix} \tag{270}
$$

これから因子得点は以下となる。

$$
\hat{f}_{ik} = h_{1k} x_{i1} + h_{2k} x_{i2} + \cdots + h_{pk} x_{ip} \tag{271}
$$

独立負荷量は以下となる。

$$
\begin{pmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix} - \left[f_{i1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + f_{i2} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \cdots + f_{iq} \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix} \right] \qquad for\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{272}
$$

上の結果を纏めると以下となる。

$$
\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1q} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \tag{273}
$$

12.5. 変数の選択

Factor analysis は相互作用のおおきな変数が存在する場合、特異な結果を導いてしまう。その変数を同定する方法を示す。

偏相関係数を評価し、その値の大きなものをモニターする。

主成分分析をして、特異値の最小のものの中で係数の絶対値の最も大きな変数をあやしい、とみる。

上記の二つで判断する。

12.6. 最尤法による因子の同定

ここでは因子分析に主因子法を紹介したが、現代では最尤法が用いられる。これは因子得点が平均 0、分散 1 の正規分布に従うとして定める。

この場合にいいことは、この手法の制度を尤度比適合検定できることである。

今、二つの因子 f と g を考える。メンバー数 n とする。オリジナルな規格化された変数は $X_1, X_2, \cdots, X_p$ の p 個あるとする。オリジナルなデータ X_i のメンバー k のデータは x_{ki} と表記する。因子分析の基本方程式は

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{274}
$$

で与えられる。ただし、

$$
a_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ki} f_k \tag{275}
$$

$$
b_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ki} g_k \tag{276}
$$

である。

ここで、標準正規分布型の乱数を f と g ように 2 セット発生させ n セットの $\left(f_k, g_k\right)$ を得る。それで a_i, b_i を評価する。

以下の量を定義する

$$L = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^{p} \left[r_{ij} - \left(a_i a_j + b_i b_j \right) \right]^2 \tag{277}$$

もしも L がもとのものより小さかったら f と g を置き換える。そうでなければそのまま利用する。この操作を所望の回数おこなう。最終的に残った f と g が因子得点であり、それと連動した a_i, b_i が因子負荷量である。

最尤法の利点は西遊因子モデルの尤度比適合検定ができる点にある。この場合は

$$D_1 = n \ln \left[\det \left[\boldsymbol{aa}^T + \boldsymbol{bb}^T + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix} \right] \right] + \sum_{k=1}^{n} X_k{}^T \left[\boldsymbol{aa}^T + \boldsymbol{bb}^T + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix} \right]^{-1} X_k$$

(278)

ここで X_k はメンバー k のオリジナルな得点ベクトルであり、

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} \tag{279}$$

である。

これと因子モデルを仮定しないもの

$$D_2 = n \det R + \sum_{k=1}^{n} X_k{}^T R^{-1} X_k \tag{280}$$

を比較する。

12.7. 結果の解釈

因子分析においては因子負荷量、因子得点、独立因子負荷量を定めることができる。これらを得た場合、結果をどのように解釈するのであろうか？

まず、因子負荷量を考える。因子負荷量は変数の数だけの要素がある。この要素をみて、この因子は何に関連するのかを議論する。

次に、因子得点を考える。この因子得点のおおきいものが、その因子を多く持つと解釈できる。これが小さいとその因子がかけている、と解釈できる。

12.8. まとめ

この章のまとめを行う。

この章では因子分析を扱った。

12.8.1. 変数の表示

p 種類のデータを扱い、それぞれのデータは n 個あるものとする。また、ここでは因子数を q とする。

したがって、各データは以下のようであるとする。

$$
\begin{aligned}
&x_1 : x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1} \\
&x_2 : x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{n2} \\
&\cdots \\
&x_p : x_{1p}, x_{2p}, \cdots, x_{np}
\end{aligned}
$$

これらを規格化したものを以下とする。したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
&u_1 : u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n1} \\
&u_2 : u_{12}, u_{22}, \cdots, u_{n2} \\
&\cdots \\
&u_p : u_{1p}, u_{2p}, \cdots, u_{np}
\end{aligned}
$$

q 種類の因子を考えるから、同じく q 種類の因子得点

$$f_1, f_2, \cdots, f_q$$

を定義する。これらは、各データにも依存するから、結局以下のように表現される。

$$
\begin{aligned}
&f_1 : f_{11}, f_{21}, \cdots, f_{n1} \\
&f_2 : f_{12}, f_{22}, \cdots, f_{n2} \\
&\cdots \\
&f_q : f_{1q}, f_{2q}, \cdots, f_{nq}
\end{aligned}
$$

q 種類の因子を考えるから、同じく q 種類の因子負荷量

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_q$$

が定義される。それぞれの因子負荷量は p 個の要素を持つとする。すなわち、以下のよう表現される。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix}$$

$\cdots$

$$\boldsymbol{a}_q = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}$$

独立負荷量はp種類の変数で、かつメンバーにも依存するから、以下のように表記される。

$$e_1 : e_{11}, e_{21}, \cdots, e_{n1}$$
$$e_2 : e_{12}, e_{22}, \cdots, e_{n2}$$
$$\cdots$$
$$e_p : e_{1p}, e_{2p}, \cdots, e_{np}$$

解析の中で主成分分析を利用する。p種類の変数を扱うから、主成分分析からは同じくp種類の固有値

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$$

を得ることができる。ただし、$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$である。ここでは、$q$個の因子を考えているから、この中の

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$$

までを利用する。

12.8.2. 基本方程式

対応する基本方程式は以下である。

$$\begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{ip} \end{pmatrix} = f_{i1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + f_{i2} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \cdots + f_{iq} \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{ip} \end{pmatrix} \quad for\ i = 1, 2, \cdots, n$$

これは、以下のように変形される。

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{q} \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{pk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{e_1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{e_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ix_1} & 0 & \cdots & S_{e_p}^{(2)} \end{pmatrix}$$

12.8.3. 変数の規格化

データが与えられた場合、その平均 μ_α と標準偏差 σ_α は以下のように評価される。

$$\mu_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i\alpha}$$

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i\alpha} - \mu_\alpha \right)^2}$$

データが母集団のものであると見做すことができるならば、標準偏差は以下となる。

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i\alpha} - \mu_\alpha \right)^2}$$

規格化変数は以下となる。

$$u_{i\alpha} = \frac{x_{i\alpha} - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}$$

12.8.4. 相関行列

二つの変数α, β間の相関係数は以下で与えられる。

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} u_{i\alpha} u_{i\beta}$$

もし、データが母集団からのものである場合は、相関係数は以下となる。

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_{i\alpha} u_{i\beta}$$

相関行列Rは以下となる。

$$R=\begin{pmatrix}1 & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

12.8.5. 因子負荷量

我々は q 種類の因子を考える。この場合には、q 種類の因子負荷量が生じる。その因子負荷量は以下のように決定される。

相関行列が決定されると、それは固有値と固有ベクトルを用いて以下のように展開される。

$$\begin{pmatrix}1 & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1\end{pmatrix}=\lambda_{1\_1}\boldsymbol{v}_{1\_1}\boldsymbol{v}_{1\_1}{}^{T}+\lambda_{2\_1}\boldsymbol{v}_{2\_1}\boldsymbol{v}_{2\_1}{}^{T}+\cdots+\lambda_{p\_1}\boldsymbol{v}_{p\_1}\boldsymbol{v}_{p\_1}{}^{T}$$

これを以下のように近似する。

$$\begin{pmatrix}S^{(2)}_{e_1\_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & S^{(2)}_{e_2\_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0_{ix_1} & 0 & \cdots & S^{(2)}_{e_p\_1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1\end{pmatrix}-\left(\lambda_{1\_1}\boldsymbol{v}_{1\_1}\boldsymbol{v}_{1\_1}{}^{T}+\lambda_{2\_1}\boldsymbol{v}_{2\_1}\boldsymbol{v}_{2\_1}{}^{T}+\cdots+\lambda_{q\_1}\boldsymbol{v}_{q\_1}\boldsymbol{v}_{q\_1}{}^{T}\right)$$

この中で、独立因子負荷量の行列の対角項 $S^{(2)}_{e_\alpha}$ を右辺の行列の対角項と近似する。右辺の非対角項は一般に 0 にならないが、それは無視する。

これから、以下のマトリックスを構成できる。それを固有値展開し、その第 q 項までをとる。すると、以下を得る。

$$\begin{pmatrix}1-S^{(2)}_{e_1\_1} & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & 1-S^{(2)}_{e_2\_1} & \cdots & r_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1-S^{(2)}_{e_p\_1}\end{pmatrix}=\lambda_{1\_2}\boldsymbol{v}_{1\_2}\boldsymbol{v}_{1\_2}{}^{T}+\lambda_{2\_2}\boldsymbol{v}_{2\_2}\boldsymbol{v}_{2\_2}{}^{T}+\cdots+\lambda_{p\_2}\boldsymbol{v}_{p\_2}\boldsymbol{v}_{p\_2}{}^{T}$$

これから、2 次の独立因子負荷量の行列の対角項 $S^{(2)}_{e_\alpha}$ を右辺の行列の対角項と近似する。

$$
\begin{pmatrix}
S_{e_1\_2}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & S_{e_2\_2}^{(2)} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0_{ix_1} & 0 & \cdots & S_{e_p\_2}^{(2)}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\
r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
-\left(\lambda_{1\_2} \boldsymbol{v}_{1\_2} \boldsymbol{v}_{1\_2}{}^T + \lambda_{2\_2} \boldsymbol{v}_{2\_2} \boldsymbol{v}_{2\_2}{}^T + \cdots + \lambda_{q\_2} \boldsymbol{v}_{q\_2} \boldsymbol{v}_{q\_2}{}^T \right)
$$

独立因子負荷量の差分 $DS_e{}^{(2)}$ を以下のように評価する。

$$
DS_e{}^{(2)} = \begin{pmatrix}
S_{e_1\_2}^{(2)} - S_{e_1\_1}^{(2)} \\
S_{e_2\_2}^{(2)} - S_{e_2\_1}^{(2)} \\
\vdots \\
S_{e_p\_2}^{(2)} - S_{e_p\_1}^{(2)}
\end{pmatrix}
$$

その差分の二乗和

$$
\delta^2 = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(S_{e_\alpha\_2}^{(2)} - S_{e_\alpha\_1}^{(2)} \right)^2
$$

を評価し、設定した臨界値 δ_c^2 より小さいか評価する。もし、小さければ、その因子負荷量を狙っているものとし、大きければこのプロセスを繰り返す。そして、

$$
\delta^2 < \delta_c^2
$$

を実現する。これが m 回のプロセスで実現できたとすると、因子負荷量は以下となる。

$$\boldsymbol{a}_1 = \sqrt{\lambda_{1\_m}}\boldsymbol{v}_{1\_m} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \sqrt{\lambda_{2\_m}}\boldsymbol{v}_{2\_m} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix}$$

…

$$\boldsymbol{a}_q = \sqrt{\lambda_{q\_m}}\boldsymbol{v}_{q\_m} = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}$$

12.8.6. Valimax 法

上のプロセスで決定した因子負荷量には回転に関して不定性がある。つまり、求めた因子負荷量はどのように回転してもいい、という不定性がある。その回転量を以下のように決定する。

回転した場合の要素の変動は以下となる。

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_k = \begin{pmatrix} a_{1k}\cos\theta + a_{1l}\sin\theta \\ a_{2k}\cos\theta + a_{2l}\sin\theta \\ \vdots \\ a_{pk}\cos\theta + a_{pl}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1k} \\ \tilde{a}_{2k} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{pk} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_l = \begin{pmatrix} -a_{1k}\sin\theta + a_{1l}\cos\theta \\ -a_{2k}\sin\theta + a_{2l}\cos\theta \\ \vdots \\ -a_{k}\sin\theta + a_{l}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1l} \\ \tilde{a}_{2l} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{pl} \end{pmatrix}$$

ここで、回転量は以下を最大にするように選択する。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{p^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{p^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\tilde{a}_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2 \end{aligned}$$

ここで回転角 θ は以下のように設定される。

$$\tan(4\theta)=\frac{G_2}{G_4}$$

$$G_2 \sin 4\theta > 0$$

ここで、以下である。

$$G_1=\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^4+\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^4\right]-\frac{1}{p}\left\{\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2+\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]^2\right\}$$

$$G_2=4\left\{\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^3\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)-\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^3\right]-\frac{1}{p}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2-\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2\right]\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)\right]\right\}$$

$$G_3=4\left\{3\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2-\frac{1}{p}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)^2+2\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{a_{\alpha k}}{d_\alpha}\right)\left(\frac{a_{\alpha l}}{d_\alpha}\right)\right]^2\right]\right\}$$

$$G_4=G_1-\frac{1}{2}G_3$$

ここで、上のプロセスをあらゆる k,l の組み合わせでおこなう。そして、最終的な因子負荷量を決定する。

Condition 1	Condition 2	4θ conversion	θ range
$G_2 \sin 4\theta \geq 0$	none	none	$-\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{8}$
$G_2 \sin 4\theta < 0$	$\sin 4\theta \geq 0$	$4\theta \to 4\theta-\pi$	$-\frac{\pi}{4}<\theta<-\frac{\pi}{8}$
	$\sin 4\theta < 0$	$4\theta \to 4\theta+\pi$	$\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{4}$

12.8.7. 因子得点

因子得点は以下のように決定される。

まず、k 番目の因子に関する係数は以下で決定される。

$$\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ \vdots \\ h_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{2k} \end{pmatrix}$$

したがって、k 番目の因子でメンバーi の因子係数は以下になる。

$$\hat{f}_{ik} = h_{1k}x_{i1} + h_{2k}x_{i2} + \cdots + h_{pk}x_{ip}$$

12.8.8. 独立負荷量

独立負荷量は以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1q} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$