12. M[b]/M/1(∞):集団待ち行列

概要: 一つの塊が系を訪れるとする集団待ち行列をここでは扱う。系を訪問後は、一つの塊として要素はバラされて、あとは通常の待ち行列と同様になる。この系はケンドールの記号で$M[b]/M/1(\infty)$と表現される。この中で、入力の中のbは塊(block)を表す。これは、ランダムな入力、ランダムなサービス、サービスメンバー数 1, 系にいることのできる総人数は無限大であることを表している。この系における状態確率、および待ち行列、系にいるトータルな人数、待ち時間、系の滞在時間を求める。

キーワード: $M[b]/M/1(\infty)$; ケンドールの表記; 集団待ち行列 ; z 変換; ロピタルの法則; リトルの定理

12.1. 序

これまで、短い時間の間に一人の顧客だけが系を訪問すると仮定してきた。しかし、集団待ち行列という状況が発生する場合がある。それは、トラックや船での輸送の場合、ある量の塊のものが系に運ばれる場合である。そのような場合、ある塊が系に投入され、その投入された塊は各要素にバラされ、後は同じことが起こる。そのような系をケンドールの表記では$M[b]/M/1(\infty)$ とされる。ここで、bは塊(block)を表す。この章では、対応する理論を導出する。

12.2. 集団待ち行列の系

ここではトラックによる集団待ち行列を考える。トラックの訪問頻度はλとする。一つの塊は k 個の要素からなるとする。実際は、これらは人ではないが、これらを顧客と表現できる。サービスメンバー数は 1 で、サービス率はμとする。系に滞在できる人数は無限とする。対応する系の模式図を図 1 に示す。 ここでは、k は 3 としている。

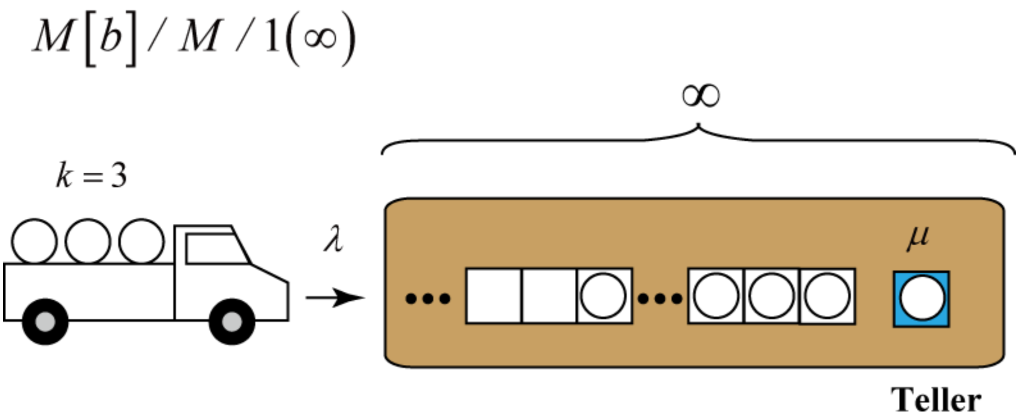

図 1　集団待ち行列 $M[b]/M/1(\infty)$ の系に対応する模式図。$k=3$ としている

12.3. 状態確率

12.3.1. 場合に分けられた状態確率

系にいる顧客の数が n である場合の状態確率を P_n とする。1 台のトラックが系を訪問した場合、n は k 以上となる。したがって、解析は $n<k$ の場合と $n \ge k$ の場合に分けて考える。

(a) $n<k$

もし、1 台のトラックが Δt の間に系を訪問したとすると、人の数は, k 以上になり、k 未満の状態はなくなる。したがって、この場合はトラックは系を訪問しない。

最初に $P_0(t)$ を考える。微小時間を Δt とし、$P_0(t+\Delta t)$ を考える。

一人の顧客のサービスが終了する確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、P_0 は $\mu\Delta t P_1(t)$ だけ増える。

何も起こらない場合を考える。何も起こらないとは、この時間の間に 1 台のトラックも来ないということである。したがって、何も起こらない確率は $(1-\lambda\Delta t)$ である。したがって、対応する確率は $(1-\lambda\Delta t)P_0$ である。

以上を纏めると

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_1(t) + (1-\lambda\Delta t)P_0(t) \\ &= P_0(t) + \mu\Delta t P_1(t) - \lambda\Delta t P_0(t) \end{aligned} \tag{1}$$

となる。これを整理すると

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \tag{2}$$

となる。

次に$P_1(t)$を考える。

状態が 2 から 1 に遷移する場合を考える。これは一つのサービスが終わることに相当する。一つのサービスが終わる確率は$\mu\Delta t$である。したがって P_1は$\mu\Delta t P_2(t)$増加する。

次に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$である。したがって、対応する確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)P_1$である。

以上を纏めると

$$\begin{aligned} P_1(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_2(t) + (1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)P_1(t) \\ &= P_1(t) + \mu\Delta t P_2(t) - \lambda\Delta t P_1(t) - \mu\Delta t P_1(t) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。

これを整理すると

$$\frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \mu P_2(t) - \lambda P_1(t) - \mu P_1(t) \tag{4}$$

となる。

状態が 2 から 1 に遷移を一般化して考えることができる。

状態状kから$k-1$への遷移を考える。これは、一人の顧客のサービスが終了することに相当する。一人の顧客のサービスが終了する確率は$\mu\Delta t$である。したがって P_{k-1}は$\mu\Delta t P_k(t)$増加する。

次に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$である。したがって、対応する確率は$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)P_{k-1}$である。

以上をまとめると以下になる。

$$\begin{aligned} P_{k-1}(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_k(t) + (1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)P_{k-1}(t) \\ &= P_{k-1}(t) + \mu\Delta t P_k(t) - \lambda\Delta t P_{k-1}(t) - \mu\Delta t P_{k-1}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

これを整理すると

$$\frac{P_{k-1}(t+\Delta t) - P_{k-1}(t)}{\Delta t} = \mu P_k(t) - \lambda P_{k-1}(t) - \mu P_{k-1}(t) \tag{6}$$

となる。

(b) $n \geq k$

この場合は、トラックは系を訪問できる。

微小時間 Δtが経過したのちの確率$P_k(t+\Delta t)$を考える。

状態がkになるのは、状態が 0 の状態に一台のトラックが系を訪問する場合である。一台のトラックが系を訪問する確率は$\lambda\Delta t$である。したがって、対応する確率は$\lambda\Delta t P_0(t)$となる。

状態が$k+1$からkになる遷移を考える。この遷移は、一人の顧客のサービスが終わるこ

とに相当する。一人の顧客のサービスが終わる確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、対応する確率は $\mu\Delta t P_{k+1}\left(t\right)$ となる。

何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)$ である。したがって、対応する確率は $\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)P_k$ となる。

以上を纏めると以下になる。

$$\begin{aligned} P_k\left(t+\Delta t\right) &= \lambda\Delta t P_0\left(t\right)+\mu\Delta t P_{k+1}\left(t\right)+\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)P_k\left(t\right) \\ &= P_k\left(t\right)+\lambda\Delta t P_0\left(t\right)+\mu\Delta t P_{k+1}\left(t\right)-\lambda\Delta t P_k\left(t\right)-\mu\Delta t P_k\left(t\right) \end{aligned} \tag{7}$$

これを整理すると

$$\frac{P_k\left(t+\Delta t\right)-P_k\left(t\right)}{\Delta t}=\lambda P_0\left(t\right)+\mu P_{k+1}\left(t\right)-\lambda P_k\left(t\right)-\mu P_k\left(t\right) \tag{8}$$

となる。

次に微小時間 Δt が経過したのちの確率 $P_{k+1}\left(t+\Delta t\right)$ を考える。

状態が $k+1$ になるのは、状態が 1 の状態に一台のトラックが系を訪問する場合である。一台のトラックが系を訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、対応する確率は $\lambda\Delta t P_1\left(t\right)$ となる。

状態が $k+2$ から $k+1$ になる遷移を考える。この遷移は、一人の顧客のサービスが終わることに相当する。一人の顧客のサービスが終わる確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、対応する確率は $\mu\Delta t P_{k+2}\left(t\right)$ となる。

何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)$ である。したがって、対応する確率は $\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)P_{k+1}$ となる。

以上を纏めると以下になる。

$$\begin{aligned} P_{k+1}\left(t+\Delta t\right) &= \lambda\Delta t P_1\left(t\right)+\mu\Delta t P_{k+2}\left(t\right)+\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)P_{k+1}\left(t\right) \\ &= P_{k+1}\left(t\right)+\lambda\Delta t P_1\left(t\right)+\mu\Delta t P_{k+2}\left(t\right)-\lambda\Delta t P_{k+1}\left(t\right)-\mu\Delta t P_{k+1}\left(t\right) \end{aligned} \tag{9}$$

となる。

これを整理すると

$$\frac{P_{k+1}\left(t+\Delta t\right)-P_{k+1}\left(t\right)}{\Delta t}=\lambda P_1\left(t\right)+\mu P_{k+2}\left(t\right)-\lambda P_{k+1}\left(t\right)-\mu P_{k+1}\left(t\right) \tag{10}$$

となる。

あとは、同じことの繰り返しになる。

12.3.2. 極限近似された状態確率

前節の結果で $\Delta t \to 0$ と近似し、定常状態を仮定すると、以下を得る。

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_1(t) + \mu P_2(t) = 0 \tag{12}$$

…

$$\frac{dP_{k-1}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_{k-1}(t) + \mu P_k(t) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_k(t) + \mu P_{k+1}(t) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - (\lambda + \mu) P_{k+1}(t) + \mu P_{k+2}(t) = 0 \tag{15}$$

…

12.4. z 変換

ここでは、z 変換によって、系のマクロパラメータを導出する。そのため、その z 変換の説明をここではする。

z 変換 $P(z)$ を以下のように定義する。

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \tag{16}$$

ここで、 $z = 1$ とおくと以下を得る。

$$P(z=1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{17}$$

つまり、全ての確率の和は 1 になるということが z 変換から単純に導くことができる。

$P(z)$ を z に関して微分すると以下を得る。

$$\frac{dP(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n z^{n-1} \tag{18}$$

したがって、 $z = 1$ とおくと、系の滞在人数 L を以下のように単純に得ることができる。

$$\begin{aligned} \left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\ &= L \end{aligned} \tag{19}$$

12.5. z 変換によるマクロパラメータの導出

$z^0, z^1, z^2, \cdots, z^{k-1}, z^k, \cdots$ を掛けると以下を得る。

$$-\lambda P_0 z^0 + \mu P_1 z^0 = 0 \tag{20}$$

$$-\lambda P_1 z^1 - \mu P_1 z^1 + \mu P_2 z^1 = 0 \tag{21}$$

$\cdots$

$$-\lambda P_{k-1} z^{k-1} - \mu P_{k-1}(t) z^{k-1} + \mu P_k z^{k-1} = 0 \tag{22}$$

$$\lambda P_0 z^k - \lambda P_k z^k - \mu P_k z^k + \mu P_{k+1} z^k = 0 \tag{23}$$

$$\lambda P_1 z^{k+1} - \lambda P_{k+1} z^{k+1} - \mu_{k+1} P_{k+1} z^{k+1} + \mu P_{k+2} z^{k+1} = 0 \tag{24}$$

$\cdots$

以上を足し合わせると

$$\lambda z^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^{n-1} = 0 \tag{25}$$

したがって、以下となる。

$$\begin{aligned}
&\lambda z^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^{n-1} \\
&= \lambda z^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n \\
&= \lambda z^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - P_0 \right) + \mu \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - P_0 \right) \\
&= \lambda z^k P(z) - \lambda P(z) - \mu \left[P(z) - P_0 \right] + \mu \frac{1}{z} \left(P(z) - P_0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

これから以下を得る。

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\mu \left(\frac{1}{z} - 1 \right) P_0}{\lambda z^k - (\lambda + \mu) + \frac{\mu}{z}} \\
&= \frac{\mu (1 - z) P_0}{\lambda z^{k+1} - (\lambda + \mu) z + \mu}
\end{aligned} \tag{27}$$

ロピタルの定理を利用すると以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P(z=1) &= \lim_{z\to 1} \frac{\dfrac{d\left[\mu P_0(1-z)\right]}{dz}}{\dfrac{d\left[\lambda z^{k+1}-(\lambda+\mu)z+\mu\right]}{dz}} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{-\mu P_0}{(k+1)\lambda z^k-(\lambda+\mu)z} \\
&= \frac{-\mu P_0}{(k+1)\lambda-(\lambda+\mu)} \\
&= \frac{-\mu P_0}{k\lambda-\mu} \\
&= \frac{P_0}{1-k\rho}=1
\end{aligned} \tag{28}
$$

したがって、以下を得る。

$$P_0 = 1-k\rho \tag{29}$$

ただし、ρは以下である。

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{30}$$

上で求めたP_0 と $P(z)$に代入して、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\mu(1-k\rho)(1-z)}{\lambda z^{k+1}-(\lambda+\mu)z+\mu} \\
&= \frac{(1-k\rho)(1-z)}{\rho z^{k+1}-(\rho+1)z+1} \\
&= \frac{(1-k\rho)(1-z)}{1-z-\rho z\left(1-z^k\right)} \\
&= \frac{1-k\rho}{1-\rho z\left(\dfrac{1-z^k}{1-z}\right)} \\
&= \frac{1-k\rho}{1-\rho z\left(1+z+z^2+\cdots+z^{k-1}\right)} \\
&= \frac{1-k\rho}{1-\rho z-\rho z^2-\cdots-\rho z^k}
\end{aligned} \tag{31}
$$

したがって、その微分 $\dfrac{dP(z)}{dz}$ は以下になる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dP(z)}{dz} &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1-k\rho}{1-\rho z-\rho z^2-\cdots-\rho z^k}\right] \\
&= \frac{(1-k\rho)\left(\rho+2\rho z+\cdots+k\rho z^{k-1}\right)}{\left(1-\rho z-\rho z^2-\cdots-\rho z^k\right)^2}
\end{aligned} \tag{32}
$$

これで $z=1$ とすると L を以下のように得ることができる。

$$
\begin{aligned}
L = \left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} &= \frac{(1-k\rho)(\rho+2\rho+\cdots+k\rho)}{(1-\rho-\rho-\cdots-\rho)^2} \\
&= \frac{k(k+1)(1-k\rho)\rho}{2(1-k\rho)^2} \\
&= \frac{k(k+1)\rho}{2(1-k\rho)}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ここで、L は正であるから、以下が成り立たなければならないことに注意しよう。つまり

$$
k\rho < 1 \tag{34}
$$

である。

図 2 に L の ρ 依存性を示す。この中では k として 1,5,10 を採用している。L は $k\rho$ が 1 に近づくと急激に増加する。

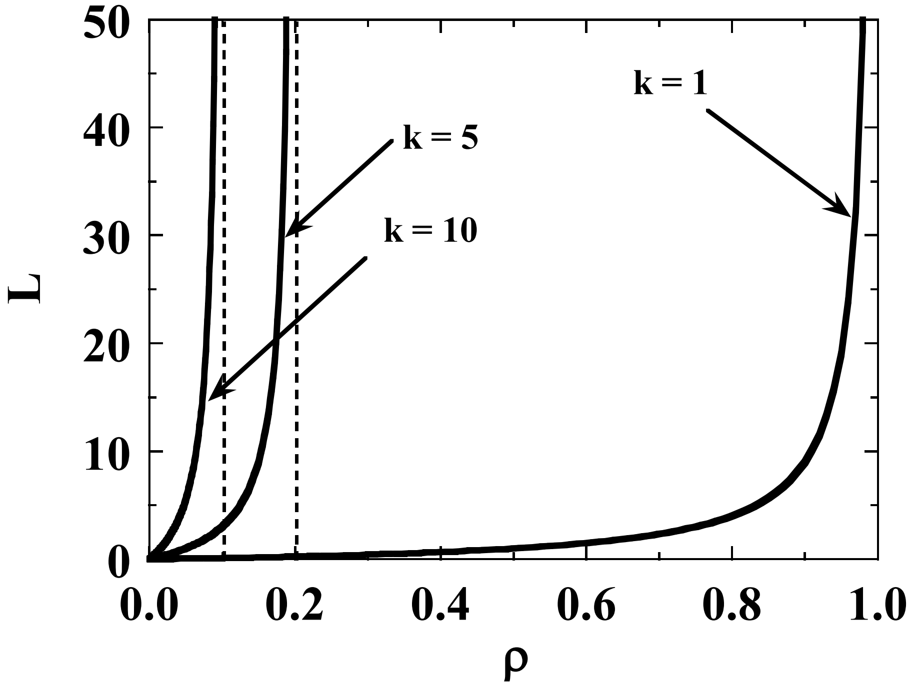

図 2　$M[b]/M/1(\infty)$ の系における L の ρ 依存性。様々に k の値を想定している

待ち行列 L_q は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\
&= L - (1 - P_0) \\
&= L - k\rho
\end{aligned} \tag{35}
$$

この場合の入力は分解した要素で考えると$k\lambda$となるから、L_qはリトルの定理からも求められる。リトルの定理から系での滞在時間W，待ち時間 W_q は以下のように評価される。

$$
W = \frac{L}{k\lambda} \tag{36}
$$

$$
W_q = W - \frac{1}{\mu} \tag{37}
$$

12.6. まとめ

この章のまとめを行う。

この系にいる人数L、待ち行列L_q、系の滞在時間W待ち時間W_qは以下である。

$$
L = \frac{k(k+1)\rho}{2(1-k\rho)}
$$

$$
L_q = L - k\rho
$$

$$
W = \frac{L}{k\lambda}
$$

$$
W_q = W - \frac{1}{\mu}
$$