9. M/M/∞(∞) および M/M/∞(N)

概要: M/M/∞(∞) はスーパーマーケットに対応する。ここでは、顧客はスーパーマーケットを訪れ、商品を買う。この買う行為をサービスを受けているとみなす。この系においては、顧客はスーパーマーケッットに入った瞬間からサービスを受けているとみなすことができる。したがって、待ち時間はない。これは、スーパーマーケットに限らず、博物館や美術館の場合にもあてはまる。これらの場合、系に入ることのできる人数も無限大としているが、有限な人数に制限することもできる。その場合は M/M/∞(N)となる。ここでは、この両理論を扱う。

キーワード: M/M/∞(∞); M/M/∞(N); 状態確率;状態確率の遷移;滞在時間

9.1. 序

我々はスーパーマーケットに行って買い物をしたり、博物館や美術館で展示物を鑑賞する。これらは、M/M/∞(∞)として捉えることができる。スーパーマーケットや博物館、美術館等に入る人数に制限があれば、M/M/∞(N)となる。ここでは、それらに対応する理論を導出していく。 スーパーマーケットでは、本当は有限の商品であるが、各顧客にとっては、大変たくさんの商品が並んでいることになるため、これを無限として扱う。

スーパーマーケットの場合はこれで終わらずに、次にレジに向かう。すなわち、この場合は二つのプロセスからなる。この二つのプロセスに関しては、後に議論する。ここでは、一つのプロセスにのみ集中する。

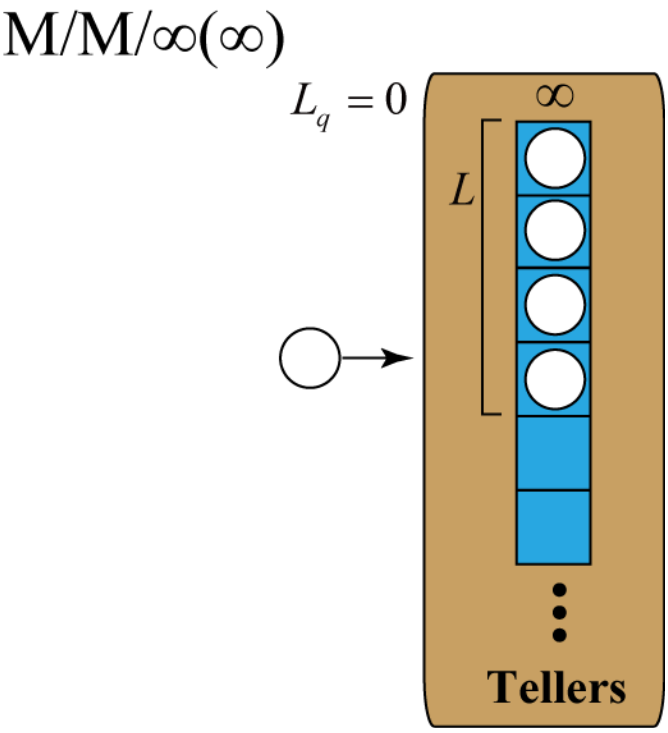

図 1　M/M/∞(∞)の系の模式図

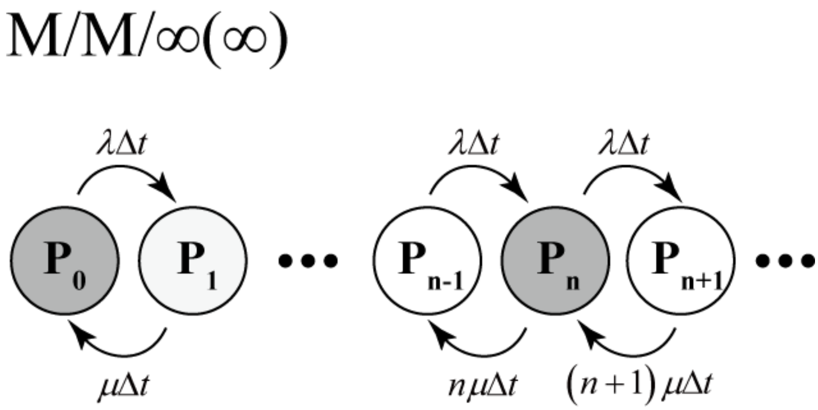

図 2　M/M/∞(∞)の状態確率の遷移図

9.2.　M/M/∞(∞)に対する理論

図 1 に$M/M/\infty(\infty)$ の系の模式図を示す。これはしばしば、最後の括弧を省略して$M/M/\infty$とも記述される。この系においては、顧客は自分でサービスを行う。サービスとは、スーパーマーケットでは買う商品を探す、博物館や美術館では展示物を鑑賞する、ということに相当する。

図 2 に状態確率の遷移を示す。状態確率は系に n 人いる確率であり P_n で表す。

時間間隔 Δt の間に、二つの事象がこの間に起こらないように微小量を仮定する。したがって、 P_n からの遷移は P_{n-1}, P_{n+1}, および P_n のみを考えればいい。

状態 $n-1$ から n への遷移を考える。これは、顧客の系への訪問に相当する。一人の顧客が Δt の間に系を訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、状態確率 P_n は $\lambda\Delta t P_{n-1}$ だけ増加する。

状態 $n+1$ から n への遷移を考える。これは、一人の顧客のサービスが終わったことに相当する。一人の顧客が Δt の間にサービスを終了する確率は $(n+1)\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は $(n+1)\mu\Delta t P_n$ だけ増加する。

最後に何も起こらない場合を考える。 Δt の間に何も起こらない確率は $(1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t$ である。したがって、状態確率 P_n は $(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)P_n$ となる。

上の結果をまとめると、以下のようになる。

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)+(n+1)\mu\Delta t P_{n+1}(t)+\lambda\Delta t P_{n-1}(t)-n\mu\Delta t P_n(t)-\lambda\Delta t P_n(t) \tag{1}$$

$\Delta t\to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下となる。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t}=(n+1)\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}-n\mu P_n-\lambda P_n=0 \tag{2}$$

したがって、以下を得る。

$$P_{n+1}=\frac{1}{\mu_{n+1}}\left[(\lambda+\mu_n)P_n-\lambda P_{n-1}\right] \tag{3}$$

ただし、

$$\mu_n=n\mu \tag{4}$$

としてある。

端点となる確率 P_0 を考える。対応する状態確率の遷移を**エラー! 参照元が見つかりません。**に示している。

状態1から0への遷移を考える。この遷移は一人の顧客のサービスが終了したことに相当する。一人の顧客が Δt の間にサービスを終了する確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、 P_0 は $\mu\Delta t P_1$ だけ増加する。

状態 0 において、何も起こらないことを考える。それは、 この系への顧客の訪問が無いことに相当する。 Δt の間に顧客が一人も来ない確率は $(1-\lambda\Delta t)$ である。したがって、P_0 は $(1-\lambda\Delta t)P_0$ となる。

上の議論を纏めると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= \mu \Delta t P_1(t) + (1-\lambda \Delta t) P_0(t) \\
&= P_0(t) + \mu \Delta t P_1(t) - \lambda \Delta t P_0(t)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、さらに定常状態を仮定すると以下になる。

$$
\frac{\partial P_0}{\partial t} = \mu P_1 - \lambda P_0 = 0 \tag{6}
$$

したがって、以下を得る。

$$
P_1 = \rho P_0 \tag{7}
$$

ただし、

$$
\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{8}
$$

である。したがって、P_2 を以下のように得る。

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{\mu_2}\left[(\lambda + \mu_1) P_1 - \lambda P_0\right] \\
&= \frac{\lambda P_1}{\mu_2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

次に P_3 を考える。

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \frac{1}{\mu_3}\left[(\lambda + \mu_2) P_2 - \lambda P_1\right] \\
&= \frac{\lambda P_2}{\mu_3}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

次に　P_4　を考える。

$$
\begin{aligned}
P_4 &= \frac{1}{\mu_4}\left[(\lambda + \mu_3) P_3 - \lambda P_2\right] \\
&= \frac{\lambda P_3}{\mu_4}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

上のプロセスを考えると、P_n　は以下で与えられると仮定することができるように思われる。

$$
P_n = \frac{\lambda P_{n-1}}{\mu_n} \tag{12}
$$

この系の形式を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda P_0}{\mu_1} \\
&= \frac{\lambda P_0}{\mu} \\
&= \rho P_0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

で明らかに成り立っている。

$n = k$ で成り立っていると仮定する。すなわち

$$P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{\mu_k} \tag{14}$$

である。Eq. (3)から、P_{k+1} は以下で与えられる。

$$P_{k+1} = \frac{1}{\mu_{k+1}}\left[\left(\lambda + \mu_k\right)P_k - \lambda P_{k-1}\right] \tag{15}$$

Eq. (14)を Eq. (15)に代入して、以下を得る。

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{1}{\mu_{k+1}}\left[\left(\lambda + \mu_k\right)P_k - \lambda P_{k-1}\right] \\ &= \frac{1}{\mu_{k+1}}\left[\left(\lambda + \mu_k\right)P_k - \lambda \frac{\mu_k}{\lambda} P_k\right] \\ &= \frac{\lambda P_k}{\mu_{k+1}} \end{aligned} \tag{16}$$

したがって、Eq. (12) は $n = k + 1$ でも成り立つ。したがって、Eq. (12) は全ての n で成り立つ。

したがて、状態確率は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\lambda P_{n-1}}{\mu_n} \\ &= \frac{\lambda}{\mu_n}\frac{\lambda P_{n-2}}{\mu_{n-1}} \\ &= \frac{\lambda}{\mu_n}\frac{\lambda}{\mu_{n-1}}\frac{\lambda}{\mu_{n-2}}\cdots\frac{\lambda}{\mu_1}P_0 \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \\ &= \frac{1}{n!}\rho^n P_0 \end{aligned} \tag{17}$$

全ての確率の和が 1 になることを要請し、以下のように P_0 を定めることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\rho^n P_0 \\ &= P_0 e^{\rho} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

したがって、P_0 は以下となる。

$$P_0 = e^{-\rho} \tag{19}$$

以上から P_n は以下となる。

$$P_n = \frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho} \tag{20}$$

図 3 に P_n の ρ 依存性を示す。ρ の増加とともに、P_0 は単調に減少していく。．その他の P_n はピークを持ち、釣り鐘型の形状になる。

P_n のピーク位置を解析する。P_n を ρ について微分し、それを 0 と置いて以下を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_n}{\partial \rho} &= \frac{\partial\left[\frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho}\right]}{\partial \rho}\\ &= \frac{1}{n!}\left[n\rho^{n-1}e^{-\rho} - \rho^n e^{-\rho}\right]\\ &= \frac{\rho^{n-1}e^{-\rho}}{n!}(n-\rho)\\ &= 0\end{aligned} \tag{21}$$

したがって、 P_n は以下でピークを持つ。

$$\rho = n \tag{22}$$

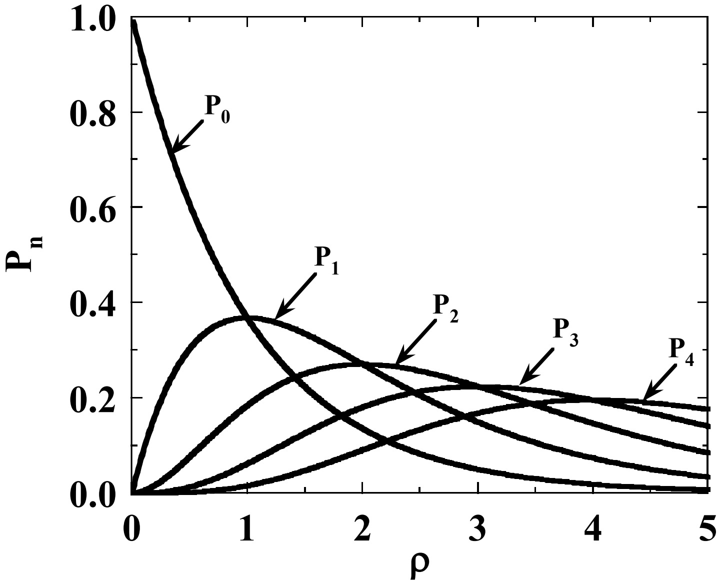

図 3 $M/M/\infty(\infty)$ における P_n の ρ 依存性

系の中にいる顧客の平均人数 L は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \rho^n e^{-\rho} \\
&= e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \rho^n \\
&= \rho e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \rho^{n-1} \\
&= \rho e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho^n \\
&= \rho e^{-\rho} e^{\rho} \\
&= \rho
\end{aligned} \tag{23}
$$

ここで、ρ は他の系のように 1 以下に制限されないことに注意しよう。

系の中の人数の分散 V_L は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
V_L &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-L)^2 P_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - 2Ln + L^2\right) P_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P_n + \sum_{n=1}^{\infty} n P_n - L^2 \\
&= V_{L1} + L - L^2
\end{aligned} \tag{24}
$$

ここで、V_{L1} は以下である。

$$
\begin{aligned}
V_{L1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \rho^n P_0 \\
&= \rho^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \rho^{n-2} P_0 \\
&= \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \rho^2
\end{aligned} \tag{25}
$$

したがって、分散 V_L は以下のようになる。

$$V_L = \rho^2 + L - L^2 \\ = \rho \tag{26}$$

標準偏差σ_Lは以下のようになる。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L} \\ = \sqrt{\rho} \tag{27}$$

図 4 に L と σ_Lの ρ依存性を示す。L は ρの増加につれ、単調に増加する。σ_L もρの増加とともに単調に増加していく。しかし、 大きなρの領域で、Lよりは増加の傾向は抑えられる。

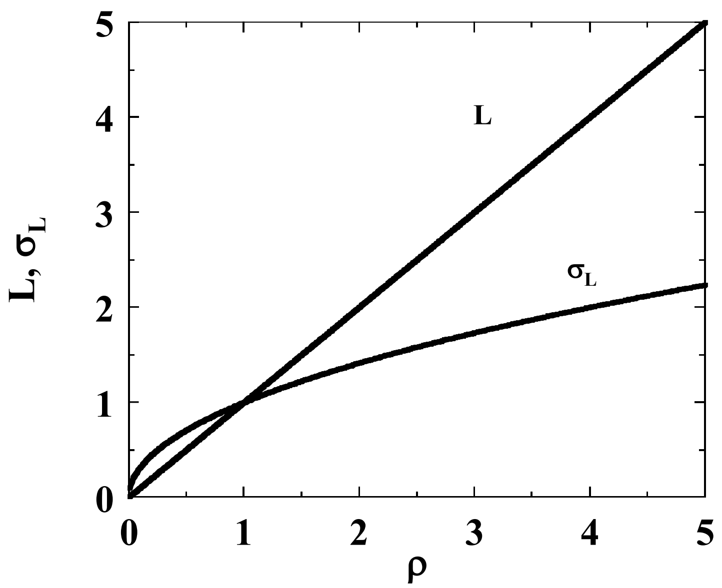

図 4　$M/M/\infty(\infty)$の系におけるL と σ_Lの ρ依存性

系での滞在時間Wはリトルの公式より、以下となる。

$$W = \frac{1}{\mu} \tag{28}$$

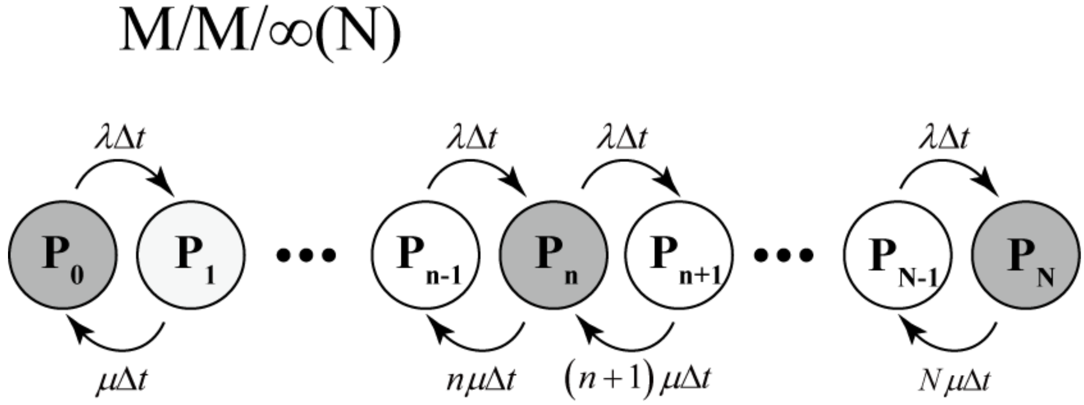

図 5　$M/M/\infty(N)$の系における状態確率の遷移

9.3.　M/M/∞(N)に対する理論

ここでは、系の面積が有限で、したがって、系に入れる顧客の人数が有限の場合を扱う。この有限の最大人数を N とする。この系は $M/M/\infty(N)$ と表現される。この場合、状態 N が端点になる。したがって、端点に対する確率 P_N を求める。関連する確率の遷移を図 5 に示す。ここで、$n > N$ に対する P_n は 0 である。

$n < N$ に対する状態確率は前の節と同様に求めることができて、以下となる。

$$P_n = \frac{1}{n!}\rho^n P_0 \ for\ n < N \tag{29}$$

P_N について考えよう。

状態 $N-1$ から N への遷移を考える。これは、顧客の系への訪問に相当する。一人の顧客が Δt の間に系を訪問する確率は $\lambda\Delta t$ である。したがって、状態確率 P_N は $\lambda\Delta t P_{N-1}$ だけ増加する。

最後に何も起こらない場合を考える。Δt の間に何も起こらない確率は $(1-N\mu\Delta t)$ である。したがって、状態確率 P_N は $(1-N\mu\Delta t)P_n$ となる。

以上のプロセスを纏めると以下になる。

$$\begin{aligned} P_N(t+\Delta t) &= \lambda\Delta t P_{N-1}(t) + (1-N\mu\Delta t)P_N(t) \\ &= P_N(t) + \lambda\Delta t P_{N-1}(t) - N\mu\Delta t P_N(t) \end{aligned} \tag{30}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} = \lambda P_{N-1} - N\mu P_N = 0 \tag{31}$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{N}\rho P_{N-1} \\
&= \frac{1}{N}\rho\frac{1}{(N-1)!}\rho^{N-1}P_0 \\
&= \frac{1}{N!}\rho^N P_0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

したがって、Eq. (29)は$n=N$でも有効である。

全ての確率の和が 1 になることを要請すると以下になる。

$$
\sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\rho^n P_0 = 1 \tag{33}
$$

これから、 P_0は以下となる。

$$
P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\rho^n} \tag{34}
$$

図 6 にP_n のρ依存性を示す。 P_0 は ρが増加するにつれ、単調に増加する。その他の状態確率P_nはピークを持ち、釣り鐘型の形状となる。

このピークを求めるために、P_n を ρについて微分し、0 と置く。すると以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial \rho} &= \frac{\partial\left[\dfrac{1}{n!}\rho^n \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}\rho^k}\right]}{\partial \rho} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{n\rho^{n-1}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}\rho^k - \rho^n \sum_{k=0}^{N} k\dfrac{1}{k!}\rho^{k-1}}{\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{n!}\rho^n\right)^2} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{n\rho^{n-1}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}\rho^k - \rho^n \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{(k-1)!}\rho^{k-1}}{\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{n!}\rho^n\right)^2} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{n\rho^{n-1}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}\rho^k - \rho^n \sum_{k=0}^{N-1} \dfrac{1}{k!}\rho^{k}}{\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{n!}\rho^n\right)^2} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{n\rho^{n-1}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}\rho^k - \rho^n \left(\sum_{k=0}^{N} \dfrac{1}{k!}\rho^{k} - \dfrac{1}{N!}\rho^N\right)}{\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{n!}\rho^n\right)^2} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{n\rho^{n-1} - \rho^n\left(1-P_N\right)}{P_0\left(\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{n!}\rho^n\right)^2} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{35}
$$

したがって、 P_n は以下の位置でピークを得る。

$$\rho = \frac{n}{1-P_N} \tag{36}$$

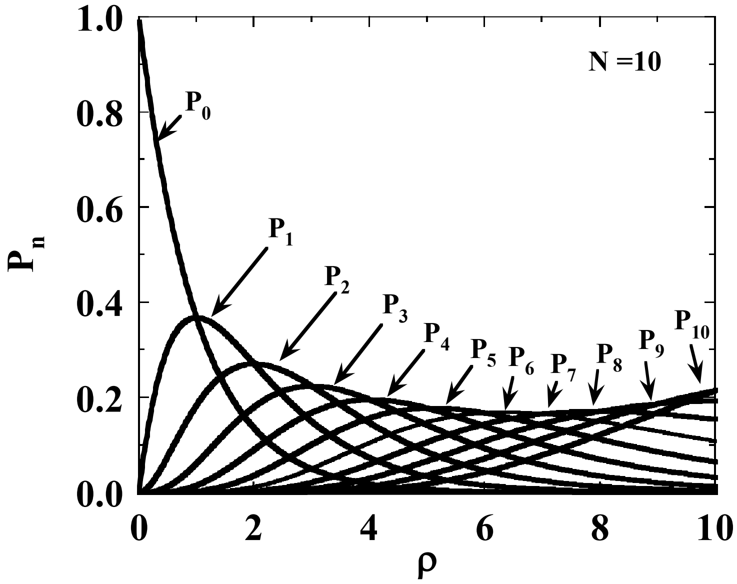

図 6　$M/M/\infty(N)$の系におけるP_nの　ρ依存性。$N=10$としている。

系にいる顧客の平均人数L　は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{N} nP_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} n\frac{1}{n!}\rho^n P_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}\rho^n P_0 \\
&= \rho\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}\rho^{n-1} P_0 \\
&= \rho\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!}\rho^n P_0 \\
&= \rho\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\rho^n P_0 - \frac{1}{N!}\rho^N P_0\right) \\
&= \rho\left(1-P_N\right)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

系にいる顧客の人数の分散は以下となる。

$$
\begin{aligned}
V_L &= \sum_{n=0}^{N} (n-L)^2 P_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left(n^2 - 2Ln + L^2\right) P_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} n^2 P_n - L^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} n(n-1) P_n + \sum_{n=1}^{\infty} n P_n - L^2 \\
&= V_{L1} + L - L^2
\end{aligned}
\tag{38}
$$

ここで、V_{L1} は以下のように定義され、展開される。

$$
\begin{aligned}
V_{L1} &= \sum_{n=1}^{N} n(n-1) P_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} n(n-1) \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \sum_{n=2}^{N} n(n-1) \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} \rho^n P_0 \\
&= \rho^2 \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} \rho^{n-2} P_0 \\
&= \rho^2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} \rho^n P_0 \\
&= \rho^2 \left(1 - P_N - P_{N-1}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

P_{N-1} は P_N に以下のように関連付けられる。

$$
\begin{aligned}
P_{N-1} &= \frac{1}{(N-1)!} \rho^{N-1} P_0 \\
&= \frac{N}{\rho} P_N
\end{aligned}
\tag{40}
$$

したがって、V_{L1} は以下のようになる。

$$
V_{L1} = \rho^2 \left[1 - P_N \left(1 + \frac{N}{\rho}\right)\right]
\tag{41}
$$

よって、分散は以下となる。

$$
\begin{aligned}
V_L &= V_{L1} + L - L^2 \\
&= \rho^2 \left[1 - P_N \left(1 + \frac{N}{\rho}\right)\right] + \rho\left(1 - P_N\right) - \left[\rho\left(1 - P_N\right)\right]^2 \\
&= \rho\left(1 - P_N\right) + \rho^2 P_N \left[\left(1 - \frac{N}{\rho}\right) - P_N\right]
\end{aligned}
\tag{42}
$$

標準偏差σ_Lは以下となる。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L} = \sqrt{\rho\left(1-P_N\right)+\rho^2 P_N\left[\left(1-\frac{N}{\rho}\right)-P_N\right]} \tag{43}$$

図 7 にLとσ_Lのρ依存性を示す。Lとσ_Lは小さなρでは単調に増加する。Lとσ_L は N に制限され大きなρにおいて、Nが無限大の場合よいも小さくなる。σ_Lは大きなρの領域ではむしろわずかに減少する。

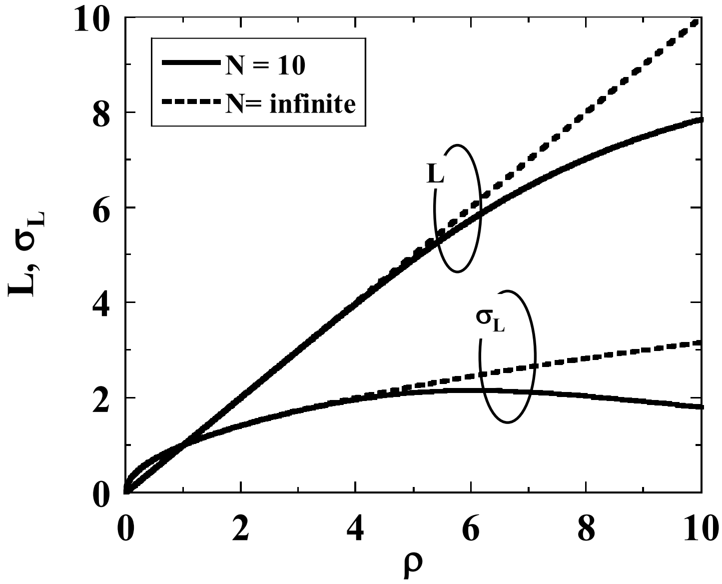

図 7 $M/M/\infty(N)$におけるL とσ_L のρ依存性。$M/M/\infty(\infty)$ の系のものも参考のために併記している

系での滞在時間の平均値 W はリトルの公式より以下となる。

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho\left(1-P_N\right)}{\lambda} = \frac{1-P_N}{\mu} \tag{44}$$

9.4. まとめ

この章のまとめを行う。

$M/M/\infty(\infty)$の系における状態確率は以下である。

$$P_n = \frac{1}{n!}\rho^n P_0$$

ただし、P_0は以下である。

$$P_0 = e^{-\rho}$$

系にいる平均人数、その標準偏差は以下である。

$$L = \rho$$

$$\sigma_L = \sqrt{\rho}$$

系での滞在時間Wはリトルの公式より、以下となる。

$$W = \frac{1}{\mu}$$

系にいることのできる人数がNに限定される場合、その系を$M/M/\infty(N)$と表記する。

対応する状態確率は以下である。

$$P_n = \frac{1}{n!}\rho^n P_0$$

ただし、P_0は以下である。

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\rho^n}$$

系にいる滞在する人数の平均値、標準偏差は以下である。

$$L = \rho\left(1 - P_N\right)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\rho\left(1 - P_N\right) + \rho^2 P_N\left[\left(1 - \frac{N}{\rho}\right) - P_N\right]}$$

系での滞在時間Wはリトルの公式より、以下となる。

$$W = \frac{1 - P_N}{\mu}$$