15. マルコフプロセス一般論

概要: 前章では、これまで扱ってきた待ち列理論がマルコフプロセスで説明できることを示した。待ち行列理論では、次の状態は今の状態の近くであるという制限があるが、マルコフプロセスではその制限はない。また、待ち行列理論では、すべて確率を扱っているが、マルコフプロセスでは扱う量は確率である必要はない。ここでは、マルコフプロセスの一般論を展開し、そのより幅広い適用を示していく。

キーワード: マルコフプロセス；遷移行列；ソース；一定流束；条件付き確率；ネットワークループ

15.1. 序

マルコフプロセスにおいては、次の状態は現在の状態によって決まり、それ以前の状態は無関係である。今の状態から次の状態への遷移は遷移行列によって表現される。したがって、様々な現象を遷移行列によって表現できれば、マルコフプロセスを利用できる。ここでは、その応用を示していく。遷移行列までは、前章をほぼ同じ展開であるが、自己完結性保つために、再掲する。

15.2. 初期条件

図 1　5 つの状態の模式図

マルコフプロセスにおいても系の状態を考える。ここでは、5 つの状態を考えるが、一般の状態への拡張は容易である。状態は、この状態のいずれかを取るものとする。対応する状態を $ST1, ST2, ST3, ST4, ST5$ とする。待ち行列理論では STi はその状態に対する確率であった。したがって、対応する数値は確率であり、初期条件は正の 1 以下数値で、全ての要素足し合わせた和が 1 である必要があった。マルコフプロセスにあっては、その制限はない。つまり、確率である必要はなく、任意の数値を用いることができる。たとえば、状態に対応する人数であってもいい。

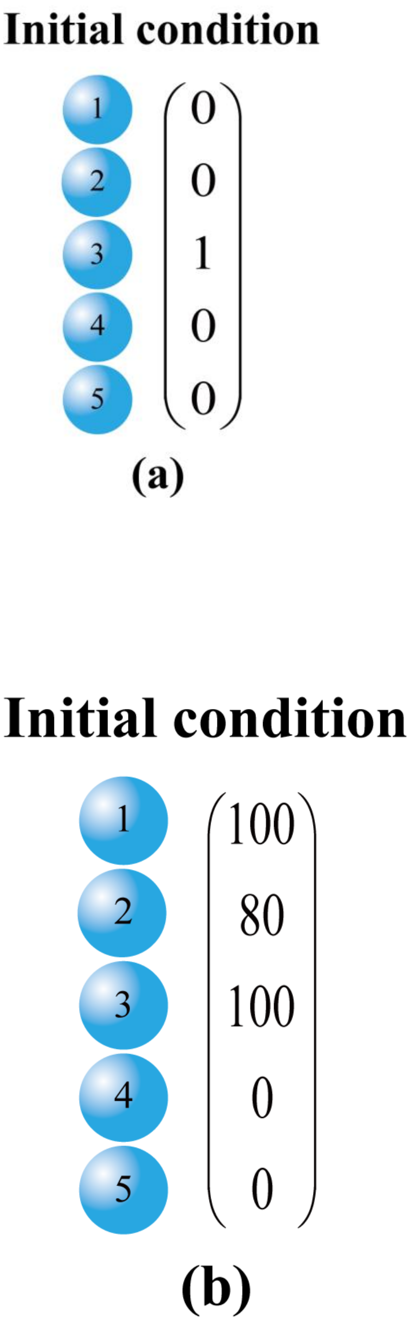

図 2　5 つの状態に対する初期条件。待ち行列李理論では確率を表し、全ての数値の和が 1 である必要あるが、マルコフプロセスでは任意である。(a)待ち行列理論、(b)マルコフプロセス

15.3. 遷移行列

次に遷移行列を考える。5 つの状態に対応する遷移行列を以下のように定義する。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

STi の次の状態は、以下のように表現されるとする。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
ST1 \\ ST2 \\ ST3 \\ ST4 \\ ST5
\end{pmatrix} \tag{2}
$$

この遷移行列、およびベクトルの意味するところを考えていく。

$ST2$ の次の状態は、上の式の演算をし、ベクトルを得、上から 2 番目の数値に注目すればいい。それは、

$$
ST2 \rightarrow a_{21}ST1 + a_{22}ST2 + a_{23}ST3 + a_{24}ST4 + a_{25}ST5 \tag{3}
$$

となる。これは、次のステップの $ST2$ は現在の $ST1$ に a_{21} をかけたもの、現在の $ST2$ に a_{22} を掛けたもの、・・・、現在の $ST5$ に a_{25} を掛けたものとして表現されている。以上を一般化すると、STi の次の状態は

$$
STi \rightarrow a_{i1}ST1 + a_{i2}ST2 + a_{i3}ST3 + a_{i4}ST4 + a_{i5}ST5 \tag{4}
$$

となる。対応する状態遷移図を下図に示す。つまり、次のステップの状態 i は現在の状態に対する数値に状態 i に対する遷移確率を掛けたものの和になる。

以上から、a_{ij} は状態 j から状態 i への 1 回のステップでの遷移確率であると解釈できる。

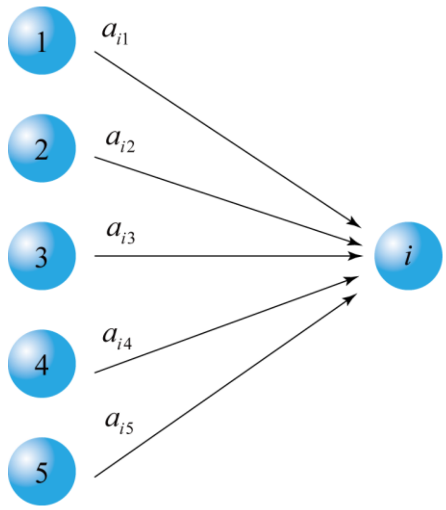

図 3　5 つの状態から状態 i への遷移

状態 j から遷移する i としては $1,2,3,4,5$ しかない。つまり、

$$\sum_{i=1}^{5} a_{ij} = 1 \tag{5}$$

となる。つまり、どの列の要素の和も 1 になる。

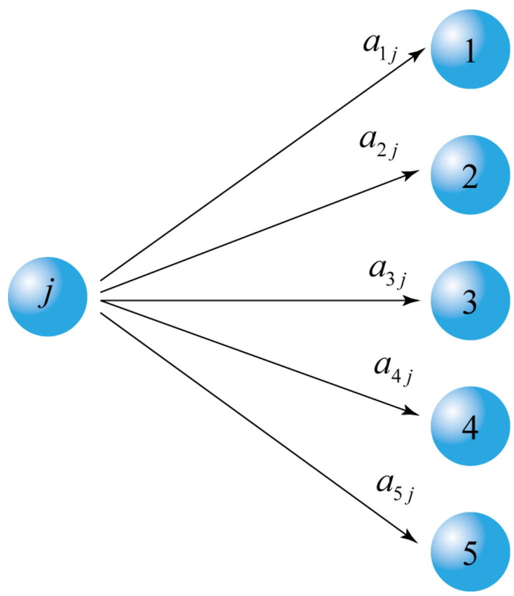

図 4　状態 j から 5 つの状態への遷移

以上より、遷移行列の要素は遷移する確率を表し、列の和は 1 になることがわかる。
また、この状態を k 回繰り返す場合は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} ST1 \\ ST2 \\ ST3 \\ ST4 \\ ST5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

とすればいい。

15.4. 消失および消失モニター

消失プロセスが欲しい場合がある。そこでは、次のステップでは、現在あるものは 0 になり、新に入ってくるものはそのままになる。

その状態を C_v をおくと、その C_v に対応する列の要素は以下になる。 ここでは、状態 2 をその消失を表すノード C_v としている。

$$\begin{pmatrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{42} = 0 \\ a_{52} = 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

これは、自分を 0 にし、他への遷移もなしにしている。この場合は、現在のある量を消失させている。また、その他の要素を 0 にしていることで、そこから出ていく成分もないことを表している。つまり、現在ある量を単純に消し去っている。しかし、次のステップで、他の状態からはいってくるものに対しては何の操作もしていいない。したがって、次のステップにおいては、現在の量を消し去り、次のステップで入って来る量のみをモニターしている。この場合は、列の確率の和は 1 であるという制約は適用されない。

もし、消失の累積をとるのであれば、

$$\begin{pmatrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = 0 \\ a_{42} = 0 \\ a_{52} = 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とすればいい。これは、扱っている総量は不変であるから、列の枠率の和は 1 であるという制約は適用される。

15.5. ソース源を考慮した遷移行列

供給源がある場合がある。あるノードに一定の量を常に供給したい。この供給源はどのように遷移行列に表現すればいいのであろうか。

図 5 に示すように状態 i に h_i の供給を常にしたいと考える。これは、たとえば、毎年 1 万人が入

学する、というような場合に相当する。つまり、以下の式を満足すればいい。

$$h_i = ap_i \tag{9}$$

それは、遷移行列としては、以下のようにすればいい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ p_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ p_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

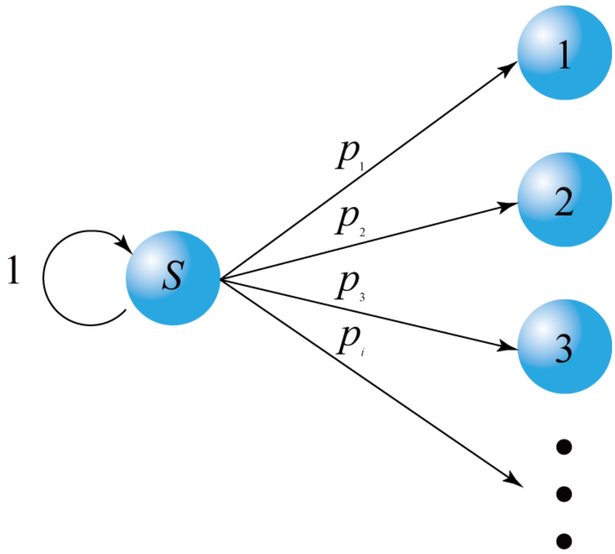

図 5　ソース源がある場合の遷移図

15.6. 一定流束

先に述べたように遷移行列においては、遷移は確率で表現される。したがって、一つの状態から別の状態への遷移は遷移元の値に比例することになる。

しかしながら、ある一定の流束 a を状態 j から状態 i に流したい場合がある。

このような場合に一定の流束ソース Sc を図 6 のようにかませることを提案する。

実際に流すのは、j であるが、流す役割を担うのはソースであり、状態 j もそのソースによって値を変動させられるものととらえる。したがって、状態 j から状態 i に流すのであるが、ソースによって i_1 と i_2 の値を変動させられる、と解釈し直す。i_1 が j に相当し、i_2 が i に相当する。

ここで、ソースに自己再生機能を持たせる。これにより、ソースは常に一定の値を持つ。

ソースから状態 $i_1(j)$ への遷移確率は -1 とする。また、状態 $i_1(j)$ には自己再生機能を持た

せる。これにより、状態$i_1(j)$は現在の値から、ソースによって引かれた値になる。

ソースから状態$i_2(i)$への遷移確率は 1 とする。これにより、一定の値が状態$i_2(i)$に足される。

S_cの状態ベクトルをaにしておけば、状態$i_1(j)$から状態 $i_2(i)$に一定流束aが流れることになる。

以上のことは、一定流束aが現在の状態$i_1(j)$の値b_{i_1}より小さいと仮定している。しかし、aがb_{i_1}がより小さい場合は、流束aを流すことをできず、その値を流すことしかできない。したがって、S_cに対する状態ベクトルは図 6 に示すように以下となる。

$$b_{Sc} = \mathrm{Min}\left[a, b_{i_1}\right] \tag{11}$$

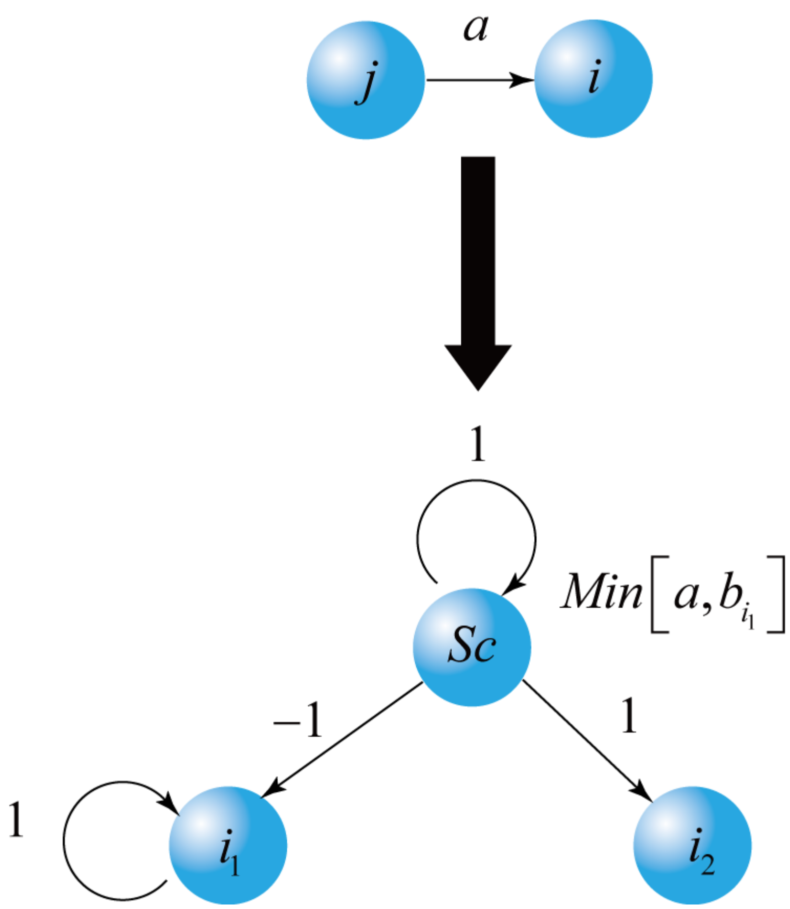

図 6 状態jから状態iへの一定流束。これは、疑似的に状態$i_1(j)$から$i_2(i)$に流れていることにソースが値を変動させる

15.7. 具体例

これまで述べてきたマルコフプロセスを具体的な例に適用する。

15.7.1. 人口問題

マルコフプロセスは次のステップが現状の値だけで決まればいいので、次の状態が今の状態に近いかどうかは問題にしない。したがって、待ち行列理論よりもそのへんは融通が利く。

そのいい例題として人口問題がある。この中で、我々は人口の世代の人口比を議論する。我々はこの中で年代を 10 年ごとに区切る。

この中で解析を明白にするために簡単な仮定をいくつか施す。

50 代までは 95%の人が生き残るとする。その比率は 60 代で 80%、80 代で 40%, 90 代で 0%とする。

20 代と 30 代の人たちは、比率 r_B で子供を産むとする。

この解析の中では男女の違いは無視する。

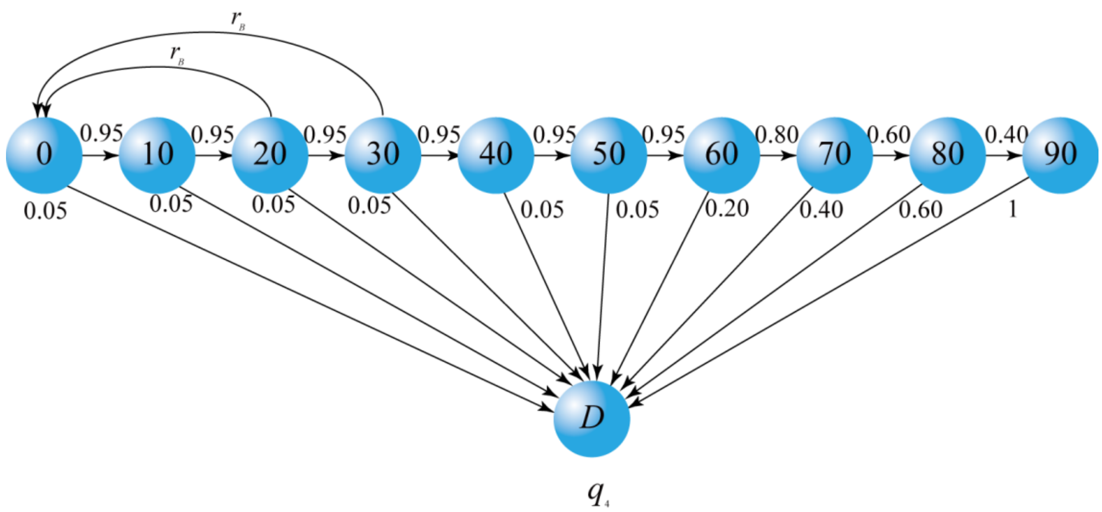

図 7 人口問題の遷移図

対応する遷移行列を図 7 に示す。初期条件はすべての世代の人は 100 万人、100 代の人は 0 人とする。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_B & r_B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.20 & 0.40 & 0.60 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

上の遷移行列の行と列はそれぞれ s 0,10,20,⋯,90 台に相当する。最後の行と列は状態 D、つまり亡くなっている状態である。

ここで 5 ステップの解析をする。1 ステップ 10 年であるから、10 年ごと、トータルで 50 年の解析をしていることになる。結果を表 1 に示す。

r_B が 0.5 ではトータルの人口が減少している。r_B が 0.7 では最終的には増加している。この場合は最初は減少している。これは初期条件による。

表 1　さまざまに r_B における時間経過後の世代人口

r_B=0.5

Age	Step0	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5
0	100	100	95	90	88	86
10	100	95	95	90	86	84
20	100	95	90	90	86	81
30	100	95	90	86	86	81
40	100	95	90	86	81	81
50	100	95	90	86	81	77
60	100	95	90	86	81	77
70	100	80	76	72	69	65
80	100	60	48	46	43	41
90	100	40	24	19	18	17
D	0	250	156	129	119	113
Sum		850	789	751	720	692

r_B=0.7

Age	Step0	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5
0	100	140	133	126	148	168
10	100	95	133	126	120	141
20	100	95	90	126	120	114
30	100	95	90	86	120	114
40	100	95	90	86	81	114
50	100	95	90	86	81	77
60	100	95	90	86	81	77
70	100	80	76	72	69	65
80	100	60	48	46	43	41
90	100	40	24	19	18	17
D	0	250	158	133	124	122
Sum		890	865	859	883	930

総人口が増えていくのか減っていくのかは重要な指標となる。人口を増やすソース源は 20 代、30 代の人口である。したがって、総人口に対するこの世代の寄与は重要である。したがって、このことに関して解析を加えていく。

各世代の人口は定常状態になっているとする。20 代の人口を n_{20}, 30 代の人口を n_{30} とする。これらは以下で結びつけられる。

$$n_{30} = 0.95 n_{20} \tag{13}$$

0 代の人口を n_0 とするとそれは以下になる。

$$\begin{aligned} n_0 &= r_B \left(n_{20} + n_{30} \right) \\ &= 1.95 r_B n_{20} \end{aligned} \tag{14}$$

10 代の人口を n_{10} とするとそれは以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
n_{10} &= 0.95 n_0 \\
&= 0.95 \times 1.95 r_B n_{20}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

したがって、20 代の人口は以下となる。

$$
\begin{aligned}
n_{20} &= 0.95 n_{10} \\
&= 0.95^2 \times 1.95 r_B n_{20}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

これまでの解析ではトータルの人口は一定としていた。その場合の r_B は以下となる。

$$
r_B = \frac{1}{0.95^2 \times 1.95} = 0.568 \tag{17}
$$

つまり、これ以上の値では、人口は増えていき、これ以下の値では人口は減っていく、ということになる。

表 1 は さまざまな r_B で計算されている。理論で予想どおり、r_B が 0.5 では総人口は減少し、r_B が 0.7 以上では総人口は増加している。

表 2 に定常状態を与える上の値の r_B におけるス人口の推移を示している。予想通り、ほぼ一定の人口になっている。

表 2　臨界の r_B における各世代の人口

r_B=0.57

Age	Step0	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8	Step9	Step10
0	100	114	108	103	107	111	105	105	109	108	105
10	100	95	108	103	97	102	105	100	100	103	102
20	100	95	90	103	97	93	97	100	95	95	98
30	100	95	90	86	97	93	88	92	95	90	90
40	100	95	90	86	81	93	88	84	87	90	86
50	100	95	90	86	81	77	88	84	79	83	86
60	100	95	90	86	81	77	74	84	79	75	79
70	100	80	76	72	69	65	62	59	67	63	60
80	100	60	48	46	43	41	39	37	35	40	38
90	100	40	24	19	18	17	16	16	15	14	16
D	0	250	156	130	121	116	112	108	106	107	107
Sum	1000	864	815	788	774	768	762	759	761	762	760

15.7.2. 大学の学年構成

大学の各年次の生徒の構成数を議論する。

大学は 4 年制であるとする。

2 年次と 4 年次に次のステージにすすめるのかチェックが入るとする。各生徒は 2 回までそのチャレンジをすることができる。2 回失敗すると大学を去ることになる。その他に、ある比率の生徒は自然に大学をさるとする。

対応する状態を次のように設定する。

- ◆ G1:第 1 学年の生徒

- G2:第 2 学年の生徒
- G22:第 2 学年の生徒の中で、1 回試験に落ちた生徒
- G3:第 3 学年の生徒
- G4:第 4 学年の生徒
- G44: 第4学年の生徒の中で、1 回試験に落ちた生徒
- F:卒業生
- D:退学した生徒

毎年 1000 人の学生が入学するとする。
5% の学生が自然と退学するとする。
60%の学生が試験を通るとする。
G22 の 80%の生徒が試験を通り、20%の学生は落ちるとする。
70% の学生が大学を卒業する。
of G44 の 70%が試験を通り、その他 の 30%は落ちるとする。

対応する遷移行列を図 8 に示す。

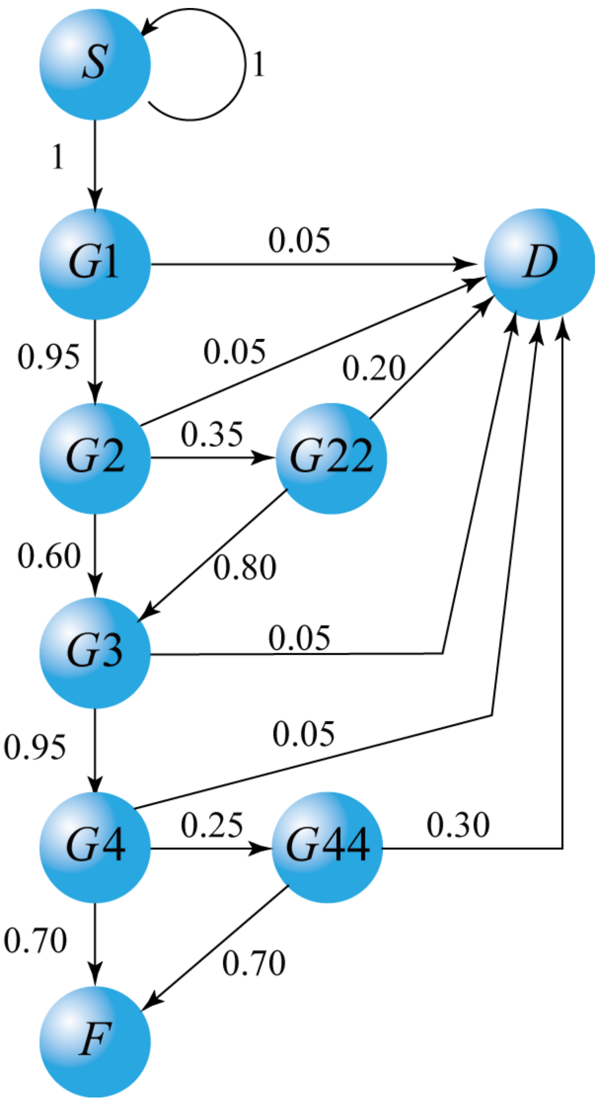

図 8　大学における学年構成の遷移図

ここでは、卒業生、退学者の累積は取らない。

生徒のソース S は毎年 1000 人の生徒を大学に入学させるようにしている。

対応する遷移行列と初期条件行列を図 9 に示す。

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c|c}
 & S & G1 & G2 & G22 & G3 & G4 & G44 & F & D & & \\
\hline
S & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & S \\
G1 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G1 \\
G2 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G2 \\
G22 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G22 \\
G3 & 0 & 0 & 0.60 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G3 \\
G4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G4 \\
G44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & G44 \\
F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70 & 0.70 & 0 & 0 & 0 & F \\
D & 0 & 0.05 & 0.05 & 0.20 & 0.05 & 0.05 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & D
\end{array}
$$

図 9　大学の構成図に対応する遷移行列と初期ベクトル

これから、k 年後の生徒の構成は以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix}
1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.60 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70 & 0.70 & 0 & 0 \\
0 & 0.05 & 0.05 & 0.20 & 0.05 & 0.05 & 0.30 & 0 & 0
\end{pmatrix}^{k}
\begin{pmatrix}
1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{18}
$$

表 3 に結果を示す。表 4 は 8 年後の結果をまとめたものである。表 3 から 7 年経過後に定常状態になることがわかる。

第 1 学年は入学者 1000 人である。

第 2 学年は 1282.5 人で入学者 1000 人よりも多い。これは、第 2 学年で試験に落ちる人がいるためである。

第 3 学年は 836 人であり、入学者数より減る。これは、自然退学者がいることと、試験で落ちる生徒がいるためである。

第 4 学年は 993 名である。これは、第 3 学年よりは多い。これは、卒業できない生徒がいるため

である。

卒業生は毎年 695 名で、卒業しない生徒は 305 名である。つまり、約 7 割が卒業する、ということになる。

表 3　大学の各学年の構成人数の計算結果

Status	Step0	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
S	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
G1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
G2	0	0	950	950	950	950	950	950	950
G22	0	0	0	332.5	332.5	332.5	332.5	332.5	332.5
G3	0	0	0	570	836	836	836	836	836
G4	0	0	0	0	541.5	794.2	794.2	794.2	794.2
G44	0	0	0	0	0	135.4	198.6	198.6	198.6
F	0	0	0	0	0	379.1	650.7	694.9	694.9
D	0	0	50	97.5	192.5	232.9	286.1	305.1	305.1

表 4　定常状態のまとめ.

G1	1000
G2	1282.5
G3	836
G4	992.8
F	694.9

15.7.3. 製品のシェア

製品のシェア率をマルコフプロセスで評価する。

我々は、会社 A, B,および C が同じ製品をつくっており、互いに競合しているものとする。

表 5 のようなデータを得たとする。つまり、100 人の顧客が 1 回目と 2 回目にどの会社の製品を選択したかを示したものである。

表 5　製品の生産推移

		1st time			
		A	B	C	
2nd time	A	10	5	10	
	B	25	8	12	
	C	15	7	8	Total sum
	Sum	50	20	30	100

対応する遷移行列を表 6 に遷移図を図 10 に示す。

計算結果を表 7 会社のシェア率の推移に示す。会社 A は最初は高いシェア率を示しているが、やがて減少する。一方、会社 B はだんだんシェア率を上げていく。

表 6 遷移行列

		1st time		
		A	B	C
2nd time	A	0.20	0.25	0.33
	B	0.50	0.40	0.40
	C	0.30	0.35	0.27

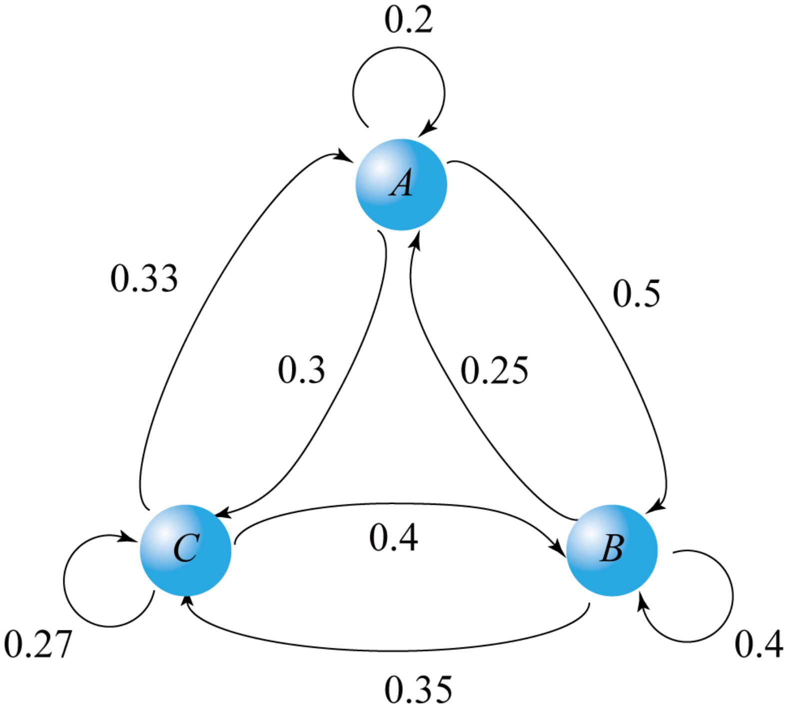

図 10 製品のシェアに対する遷移図

表 7 会社のシェア率の推移

	Step0	Step1	Step2	Step3
A	0.5	0.25	0.26	0.26
B	0.2	0.45	0.43	0.43
C	0.3	0.3	0.31	0.31

15.7.4. 血液型の遷移

血液型の遷移を考える。日本人の血液型の比率大体以下であると言われている。AB 型：10%,

A 型: 35%, B 型:25%,そして -型:30%。この比率を解析しよう。

これを解析するためにいくつかの簡単化を行う。トータルの人口は不変であるとする。つまり死人と生まれる人の数は等しいとする。世代の変化は同次に起こるとする。他の地域からの流入はないとする。男女比は一定とする。以上から、血液型の比率は定常値があり、一定とする。

次の世代の血液型は現在の血液型から決まる。したがって、それはマルコフプロセスと考えることができる。

しかしながら、我われは対応する遷移行列を作成することはできない。

我々は、4 つの血液型 AB, A, B, および O を持つ。しかしながら、詳しくは 6 つの血液型 AB, AA, AO, BB, BO, および OO を持っていることになる。ここでの解析では、この 6 つの種類の血液型を扱う。しかし、この 6 つの血液型に対する詳細なデータは持ち合わせていない。この 6 つの血液型を X1、X2、X3、X4、X5、and X6 と表す。

6 つのタイプの血液がたを掛け合わせる次の世代の血液がたは以下になる。表の各セルの中には表 8 に示すように 4 種類のものができるが、いくつかは同じである。

表 8　血液型の掛け合わせ

		X1	X2	X3	X4	X5	X6
		AB	AA	AO	BB	BO	OO
X1	AB	AA AB AB BB	AA AA AB AB	AA AO AB BO	AB AB BB BB	AB AO BB BO	AO AO BO BO
X2	AA	AA AA AB AB	AA AA AA AA	AA AO AA AO	AB AB AB AB	AB AO AB AO	AO AO AO AO
X3	AO	AA AO AB BO	AA AO AA AO	AA AO AO OO	AB AB BO BO	AB AO BO OO	AO AO OO OO
X4	BB	AB AB BB BB	AB AB AB AB	AB AB BO BO	BB BB BB BB	BB BO BB BO	BO BO BO BO
X5	BO	AB AO BB BO	AB AO AB AO	AB AO BO OO	BB BO BB BO	BB BO BO OO	BO BO OO OO
X6	OO	AO AO BO BO	AO AO AO AO	AO AO OO OO	BO BO BO BO	BO BO OO OO	OO OO OO OO

現在の比率を $X_i^{(n)}$，次の世代の比率を $X_i^{(n+1)}$ とする。すると、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
X_1^{(n+1)} &= \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_1^{(n)} + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_2^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_4^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{4}{4}X_2^{(n)}X_4^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_2^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_3^{(n)}X_4^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_5^{(n)} \times 2
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2^{(n+1)} &= \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_1^{(n)} + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_2^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{4}{4}X_2^{(n)}X_2^{(n)} + \frac{2}{4}X_2^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_3^{(n)}
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3^{(n+1)} &= \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_2^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_2^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{4}{4}X_2^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_3^{(n)}X_3^{(n)} + \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_3^{(n)}X_6^{(n)} \times 2
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
X_4^{(n+1)} &= \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_1^{(n)} + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_4^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{4}{4}X_4^{(n)}X_4^{(n)} + \frac{2}{4}X_4^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{1}{4}X_5^{(n)}X_5^{(n)}
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
X_5^{(n+1)} &= \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_3^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_1^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_1^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_3^{(n)}X_4^{(n)} \times 2 + \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_4^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{4}{4}X_4^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{2}{4}X_5^{(n)}X_5^{(n)} + \frac{2}{4}X_5^{(n)}X_6^{(n)} \times 2
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
X_6^{(n+1)} &= \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_3^{(n)} + \frac{1}{4}X_3^{(n)}X_5^{(n)} \times 2 + \frac{2}{4}X_3^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{1}{4}X_5^{(n)}X_5^{(n)} + \frac{2}{4}X_5^{(n)}X_6^{(n)} \times 2 \\
&+ \frac{4}{4}X_6^{(n)}X_6^{(n)}
\end{aligned} \tag{24}
$$

数回のサイクルで定常状態を得ることができる。その定常状態は初期条件に大きく依存する。

我われは、血液型の詳細を知らないから、フィッティングパラメータαを導入し、不明の血液型の比率を以下のようにする。

$$
\begin{cases}
r_{AA} = 0.35 \times \alpha \\
r_{A0} = 0.35 \times (1-\alpha) \\
r_{BB} = 0.25 \times \alpha \\
r_{B0} = 0.25 \times (1-\alpha)
\end{cases}
\tag{25}
$$

こらからすると $\alpha = 0.2$ で表 9 のようにいい一致をみた。したがって、詳細な血液型の比率は表に示されているようなのかもしれない。

表 9 血液型の時間推移

Type	Step0	Step1	Step2	Ratio	Blood type
X1	0.10	0.10	0.10	0.10	AB
X2	0.07	0.07	0.07	0.35	A
X3	0.28	0.28	0.28		
X4	0.05	0.04	0.04	0.26	B
X5	0.20	0.22	0.22		
X6	0.30	0.29	0.29	0.29	O

15.8. 長時間経過後の状態

ある状況では定常状態が存在する。これは、多くのステップを経ていくとある一定の行列要素値に落ち着くことを意味する。ここでは、どのような場合に定常状態が存在するのかを議論する。

15.8.1. k ステップ後の状態

マルコフプロセスにおいて k ステップ後の状態 D は以下のように記述される。

$$
D = A^k B \tag{26}
$$

ここで A は遷移行列、B は初期状態を表すベクトルで以下のように表現される。

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{27}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{28}
$$

遷移行列 A の固有ベクトル、固有値をそれぞれ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ および $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。そして、以下の行列 P を構成する。

$$
P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \tag{29}
$$

ここで、$\mathbf{x}_i$ は遷移行列 A の固有ベクトルであるから、以下が成り立つ。

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
AP &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{31}$$

P の逆行列も評価し、それを P^{-1} とする。すると以下を得る。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{32}$$

したがって、以下となる。

$$\left(P^{-1}AP\right)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \tag{33}$$

一方、我々は, Eq. (33)は以下のように展開される。

$$\begin{aligned}
\left(P^{-1}AP\right)^k &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) \\
&= P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A\cdots\left(PP^{-1}\right)P \\
&= P^{-1}A^k P
\end{aligned} \tag{34}$$

したがって、以下のようになる。

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \tag{35}$$

最終的にはkステップ後の状態は、以下のようになる。

$$D = P\begin{pmatrix} \lambda_1{}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^k \end{pmatrix} P^{-1}B \tag{36}$$

したがって、遷移行列Aの固有ベクトルを求めることができれば、kステップ後の状態をその固有ベクトルと固有値で表現できる。

15.8.2. 定常状態

もしも定常状態が存在すれば、以下が成り立つ。

$$Ax = x \tag{37}$$

これは以下のように変形される。

$$\left(A - E\right)x = 0 \tag{38}$$

したがって、定常状態があるとすれば以下が成り立つ。

$$\det\left|A - E\right| = 0 \tag{39}$$

15.9. まとめ

この章のまとめを行う。

kステップ後の状態は以下で表現される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

これに、ソースをつけると以下になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ p_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ p_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

さらに一定流束を表現する方法を提案した。

この方法は、人口問題、大学の学年構成、製品のシェアにどう適用されるのかを示した。

さらに遷移行列の形式では表現できないが、マルコフプロセスの 1 種として血液型の構成を評

価できることを示した。

　ここでは、さらに遷移行列の性質として、長いステップ後の状態、定常状態について議論した。