11. M(m)/M/s: 機械修理工問題

概要: ここでは機械修理工問題を考える。トータルの機械の数は有限である。したがって、故障する機械の数も有限である。この系においては、故障した機械は顧客、機械修理工はサービスメンバーとして扱う。つまり、顧客の供給源が有限である場合を扱う。

キーワード: 機械修理工; M(m)/M/1; M(m)/M/s; 機械停止率.

11.1. 序

これまで入力源は無限と暗に仮定してきた。しかし、その入力源が有限である場合がある。一つの典型例が機械修理である。機械修理工は窓口メンバーに対応する。故障した機械は顧客に相当する。機械の数は有限であるとする。その有限の機械のなかのある機械が故障するから、故障する機械の数も有限になる。したがって、入力の供給源が有限となる。この問題は新たに取り組むべきものである。

ここでは、まず一人の機械修理工からはじめ、複数の機械修理工のモデルまで拡張する。対応するケンドールの表記は M(m)/M/1 および M(m)/M/s となる。最初のものは機械修理工が一人、あとのものは複数で s 人の場合に相当する。表記の中の m は機械の総数に対応する。

11.2. M(m)/M/1

11.2.1. 状態確率

ここでは m 個の機械がある場合を考える。機械が故障した場合、それは工場で送られ一人の機械修理工が直し、それを返す。この系 M(m)/M/1 と表記する。

m 個の機械のうち, n 個が故障しているとする。したがって、$m-n$ 個の機械は動いている。故障に関しては、どの機械も等価であるとする。時間 Δt の間に 1 第の機械が故障する確率は $\left(m-n\right)\Delta t\lambda$ であるとする。対応する系を図 1 に示す。

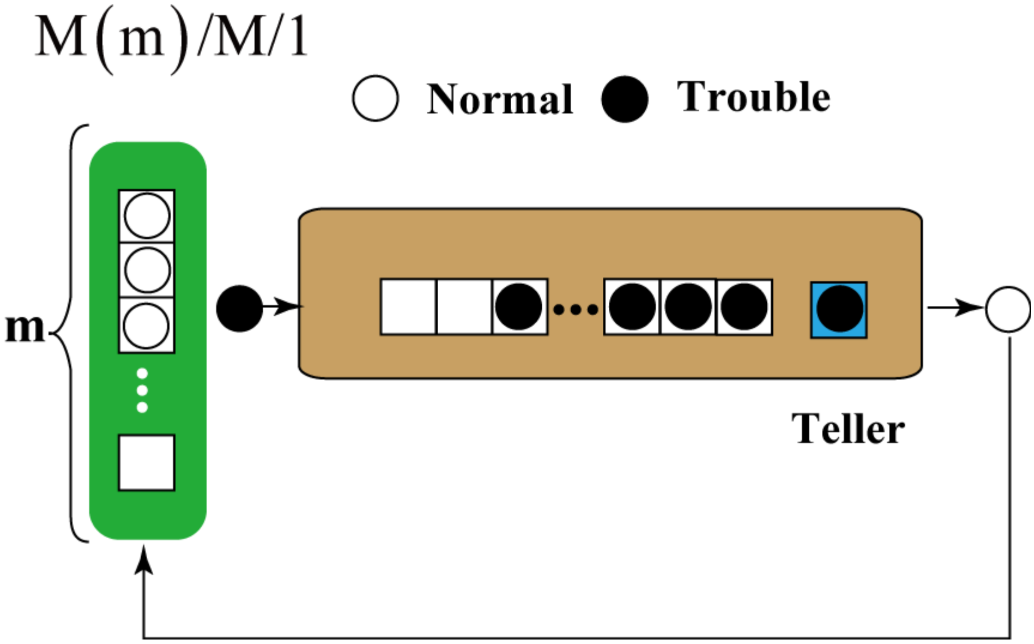

図 1　機械修理工問題の系。 $s=1$ の場合を考えている

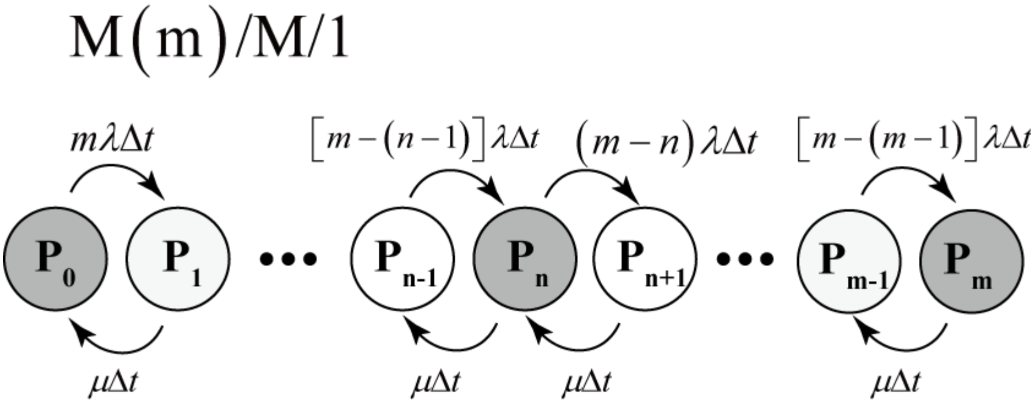

図 2　機械修理工における状態確率の遷移。 $s=1$ の場合を考えている

図 2 に対応する状態確率の遷移を示す。

状態が $n-1$ から n に遷移する場合を考える。この遷移は 1 第の機械が Δt の間に故障したことに相当する。その確率は $[m-(n-1)]\lambda\Delta t$ である。したがって、 P_n は Δt の間に $[m-(n-1)]\lambda\Delta t P_{n-1}$ だけ増加する。

次に状態 $n+1$ から n への遷移を考える。この遷移は Δt の間に 1 台の機械が修理されたことに相当する。対応する確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、 P_n は Δt の間に $\mu\Delta t P_{n+1}$ だけ

増える。

最後に何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $\left(1-(m-n)\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)\approx 1-(m-n)\lambda\Delta t-\mu\Delta t$ である。したがって、 P_n は Δt 経過後に $\left[1-(m-n)\lambda\Delta t-\mu\Delta t\right]P_n$ になる。

以上をまとめると以下となる。

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= \left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}+\mu\Delta t P_{n+1} \\
&\quad +\left[1-(m-n)\lambda\Delta t-\mu\Delta t\right]P_n \\
&= P_n(t)+\mu\Delta t P_{n+1}(t)+\left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}(t) \\
&\quad -\mu\Delta t P_n(t)-(m-n)\lambda\Delta t P_n(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta t\to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下になる。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t}=\mu P_{n+1}(t)+\left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1}(t)-\mu P_n(t)-(m-n)\lambda P_n(t)=0 \tag{2}$$

Eq.(2)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
\mu P_{n+1}-(m-n)\lambda P_n &= \mu P_n-\left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1} \\
&\cdots \\
&= \mu P_1(t)-m\lambda P_0(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

P_0 は端点になるので特別に考えなくてはならない。

まず、状態1 から 0 への遷移を考える。この遷移は Δt の間に 1 台の機械が修理されたことに相当する。対応する確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、 P_n は Δt の間に $\mu\Delta t P_n$ だけ増える。

次に、何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $1-m\lambda\Delta t$ である。したがって、 P_0 は Δt 経過後に $\left(1-m\lambda\Delta t\right)P_0$ になる。

以上を纏めると以下になる。

$$\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_1(t)+\left(1-m\lambda\Delta t\right)P_0(t) \\
&= P_n(t)+\mu\Delta t P_1(t)-m\lambda\Delta t P_0(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる。$\Delta t\to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下になる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} &= \mu P_1(t)-m\lambda P_0(t) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

これから、

$$\mu P_1=m\lambda P_0 \tag{6}$$

となる。したがって、

$$\mu P_{n+1} - (m-n)\lambda P_n = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t) \\ = 0 \tag{7}$$

となる。これから、

$$P_{n+1} = (m-n)\rho P_n \tag{8}$$

となる。したがって、P_n は以下となる。

$$\begin{aligned} P_n &= \left[m-(n-1)\right]\rho P_{n-1} \\ &= \left[m-(n-1)\right]\left[m-(n-2)\right]\rho^2 P_{n-2} \\ &\cdots \\ &= \left[m-(n-1)\right]\left[m-(n-2)\right]\cdots m\rho^n P_0 \\ &= \frac{m!\rho^n}{(m-n)!}P_0 \end{aligned} \tag{9}$$

これは $n<m$ で有効である。

P_m も端点になるからそれを考える。

状態が $m-1$ から m に遷移する場合を考える。この遷移は 1 台の機械が Δt の間に故障したことに相当する。その確率は $\left[m-(m-1)\right]\lambda\Delta t$ である。したがって、P_n は Δt の間に $\left[m-(m-1)\right]\lambda\Delta t P_{m-1}$ だけ増加する。

次に、何も起こらない場合を考える。何も起こらない確率は $1-\mu\Delta t$ である。したがって、P_m は Δt 経過後に $(1-\mu\Delta t)P_m$ になる。

以上をまとめると以下となる。

$$\begin{aligned} P_m(t+\Delta t) &= \left[m-(m-1)\right]\lambda\Delta t P_{m-1}(t) + (1-\mu\Delta t)P_m(t) \\ &= P_m(t) + \lambda\Delta t P_{m-1}(t) - \mu\Delta t P_m(t) \end{aligned} \tag{10}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下になる。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_m(t+\Delta t)-P_m(t)}{\Delta t} &= \frac{\partial P_m(t)}{\partial t} \\ &= \lambda P_{m-1}(t) - \mu P_m(t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

よって、以下となる。

$$\lambda P_{m-1} = \mu P_m \tag{12}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
P_m &= \rho P_{m-1} \\
&= \rho \frac{m!}{\left[m-(m-1)\right]} \rho^{m-1} P_0 \\
&= m! \rho^m P_0
\end{aligned} \tag{13}
$$

よって Eq. (9) は $n=m$ でも成り立つ。したがって、以下となる。

$$
P_n = \frac{m! \rho^n}{(m-n)!} P_0 \quad (n = 0,1,2,\cdots,m) \tag{14}
$$

P_0 はすべての確率の和が 1 になることから求めることができる。つまり、以下である。

$$
\sum_{n=0}^{m} \frac{m! \rho^n}{(m-n)!} P_0 = 1 \tag{15}
$$

これから P_0 は以下のように求めることができる。

$$
P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{m! \rho^n}{(m-n)!}} \tag{16}
$$

図 3 に状態確率の ρ 依存性を示す。 $m=10$ としている。ρ が増加すると、P_n の n が大きくなるにつれ状態確率は大きくなる。

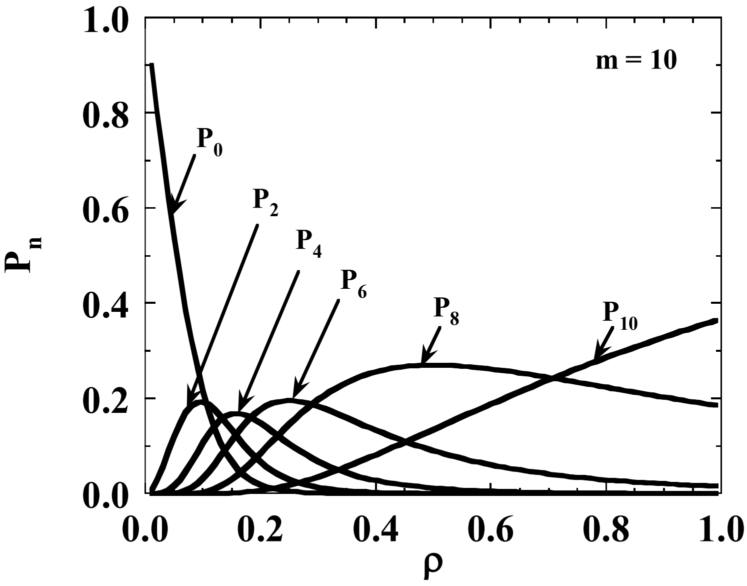

図 3　状態確率の ρ 依存性。$m=10$ としている

11.2.2. パラメータ

この場合の系の故障機械台数Lは以下のように評価される。

$$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \cdots + mP_m \tag{17}$$

Eq.(8)を考える。$n = 0,1,2,\cdots,m-1$を考えると以下になる。

$$\begin{aligned} P_1 &= (m-0)\rho P_0 \\ P_2 &= (m-1)\rho P_1 \\ P_3 &= (m-2)\rho P_2 \\ &\cdots \\ P_m &= (m-(m-1))\rho P_{m-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Eq. (18)の左辺を足すと以下になる。

$$\begin{aligned} Leftside &= P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_m \\ &= 1 - P_0 \end{aligned} \tag{19}$$

Eq. (18)の右辺を足すと以下になる。

$$\begin{aligned} Right\ side &= m\rho(P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{m-1}) \\ &\quad -\rho(0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \cdots + (m-1)P_{m-1}) \\ &= m\rho(1-P_m) - \rho(L - mP_m) \end{aligned} \tag{20}$$

したがって、 Lは以下となる。

$$L = m - \frac{1}{\rho}(1 - P_0) \tag{21}$$

稼働している機械の平均値 L_{ope}は以下となる。

$$\begin{aligned} L_{ope} &= \sum_{n=0}^{m}(m-n)P_n \\ &= m - L \end{aligned} \tag{22}$$

修理を待っている故障機械の待ち行列 L_q は以下のように評価される。

$$L_q = 0P_1 + 1P_2 + \cdots + (m-1)P_m \tag{23}$$

Eq. (18)は以下のようにも変形される。

$$\begin{aligned} P_1 &= ((m-1)+1)\rho P_0 \\ P_2 &= ((m-1)-0)\rho P_1 \\ P_3 &= ((m-1)-1)\rho P_2 \\ &\cdots \\ P_m &= ((m-1)-(m-2))\rho P_{m-1} \end{aligned} \tag{14}$$

この式の左辺の和は同じである。この式の右辺の和は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
Right\ side &= \rho P_0 \\
&+(m-1)\rho\left(P_0+P_1+P_2+\cdots+P_{m-1}\right) \\
&-\rho\left(1P_2+2P_3\cdots+(m-2)P_{m-1}\right) \\
&=\rho P_0+(m-1)\rho\left(1-P_m\right)-\rho\left(L_q-(m-1)P_m\right) \\
&=\rho P_0+(m-1)\rho-\rho L_q
\end{aligned}
\tag{24}
$$

したがって、 L_q は以下のようになる。

$$
L_q = m-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\left(1-P_0\right) \tag{25}
$$

対応する分散は以下のように評価される。

$$
V_L = \sum_{n=0}^{m}\left(n-L\right)^2 P_n \tag{26}
$$

$$
V_{L_q} = \left(0-L_q\right)^2 \sum_{n=0}^{1} P_n + \sum_{n=1}^{m-1}\left(n-L_q\right)^2 P_{1+n} \tag{27}
$$

対応する標準偏差は以下のようになる。

$$
\sigma_L = \sqrt{V_L} \tag{28}
$$

$$
\sigma_{Lq} = \sqrt{V_{L_q}} \tag{29}
$$

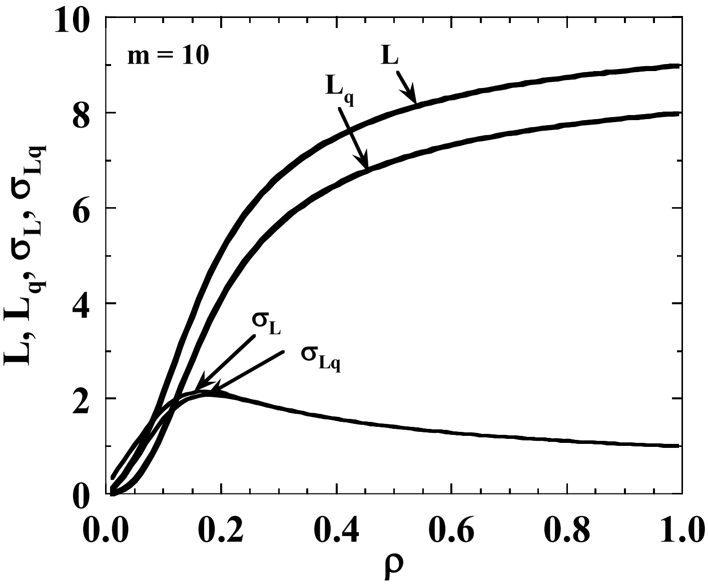

図 4　L，L_q，σ_L，およびσ_{Lq}のρ依存性。$s=1$としている

図 4 にL_q，L，σ_{L_q},および σ_Lの ρ依存性を示す。 L_q と Lは小さな ρの領域で、ρが増えるにしたがい単調に増える。その増加の割合は大きなρの領域で鈍ってくる。 これは、L_q や L の最大値が 9 および 10 に限定されるからである。σ_{L_q}とσ_Lも小さい ρ の領域では、ρ の増加とともに単調に増加する。その後両者とも増加の程度は鈍り、さらには減少していく。これも L_q やLの最大値が 9 および 10 に限定されるためである。

定常状態では、故障する機械の単位時間当たりの台数は $(m-L)\lambda$である。したがって、待つ時間、おおび系への滞在時間は以下となる。

$$W_q = \frac{L_q}{(m-L)\lambda} \tag{30}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{31}$$

一方で、Wは以下のようにも評価される。

$$W = \frac{L}{(m-L)\lambda} \tag{32}$$

これは、以下のように変形される。

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{L_q + \left(1 - P_0\right)}{\left(m - L\right)\lambda} \\
&= W_q + \frac{1 - P_0}{\left(m - \left(m - \frac{1}{\rho}\left(1 - P_0\right)\right)\right)\lambda} \\
&= W_q + \frac{1}{\frac{\lambda}{\rho}} \\
&= W_q + \frac{1}{\mu}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

これは期待通り Eq. (31) と同じになる。

図 5 に W_q と W の ρ 依存性を示す。W_q と W は、ρ が増加するにつれ、単調に増加し、その後その増加の傾向は弱まる

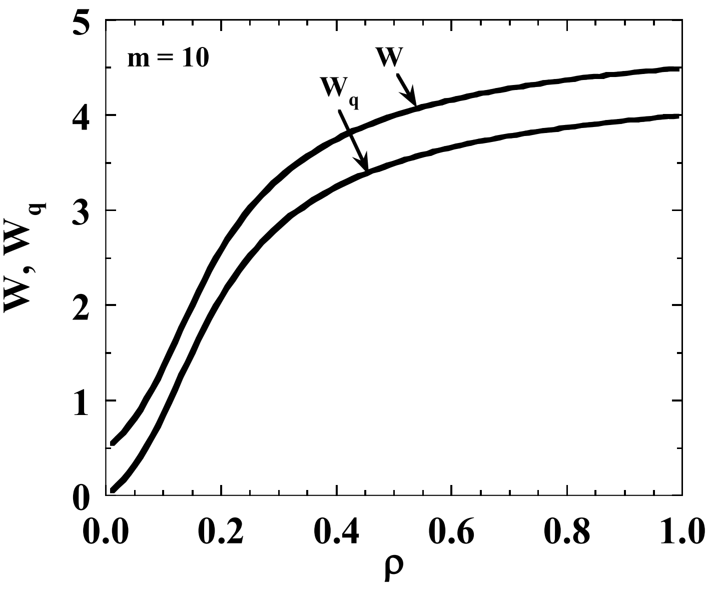

図 5　W_q および W の ρ 依存性。$s = 1$ としている

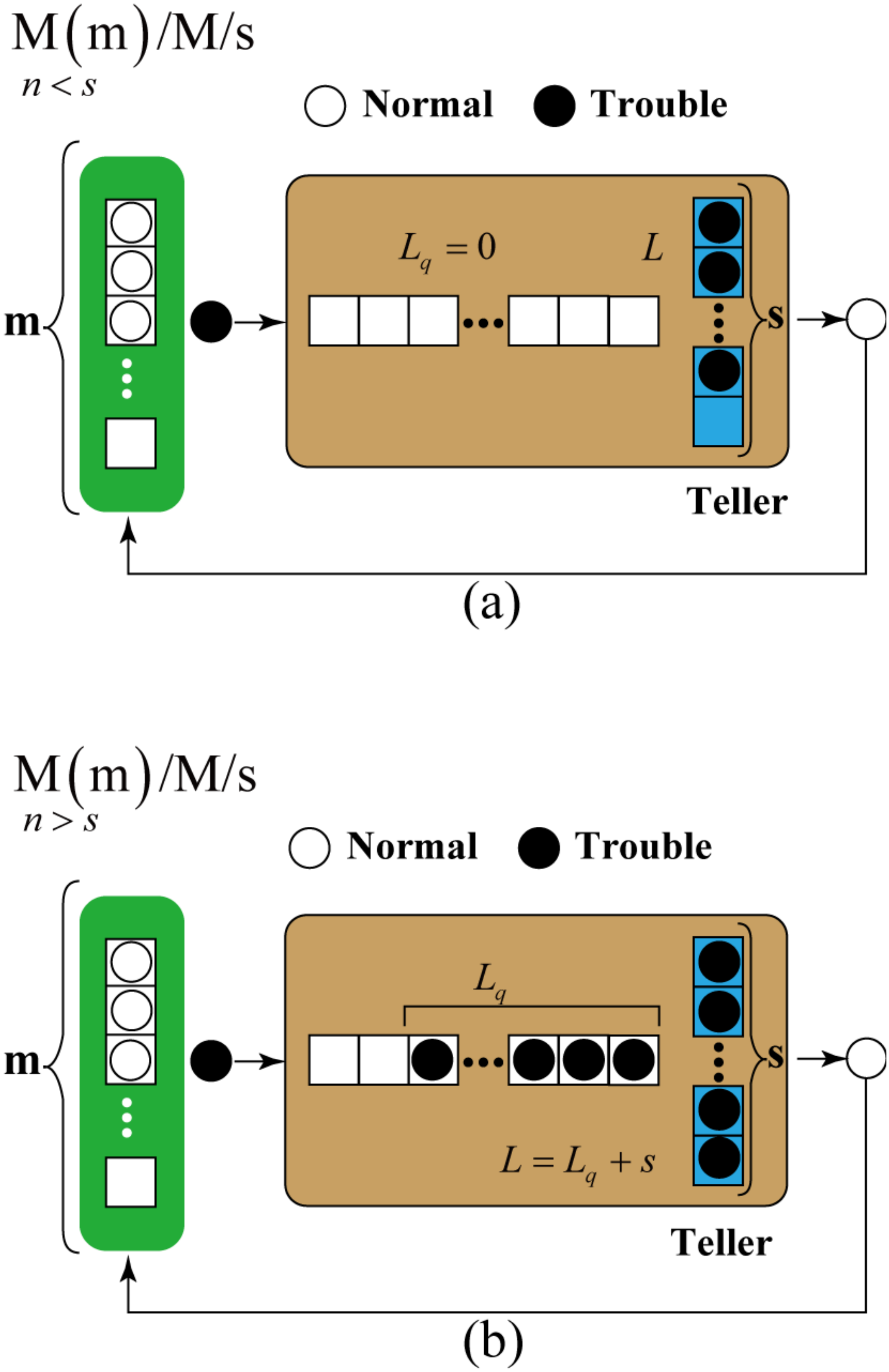

図 6　$M(m)/M/s$ の系の模式図。(a)　$n \le s$ の場合、 (b)　$n \ge s$ の場合

11.3. M(m)/M/s: 複数のサービスメンバー

11.3.1. 状態確率

次に、複数の機械修理工がいる場合のモデルを導出する。ここで、複数の機械修理工の数をsと表す。このシステムはケンドールの記号で M(m)/M/s と表される。この中では、故障した機械の数nが機械修理工の数sより大きいか、小さいかで扱いが異なる。その状況を図 6 に模式図的に示す。

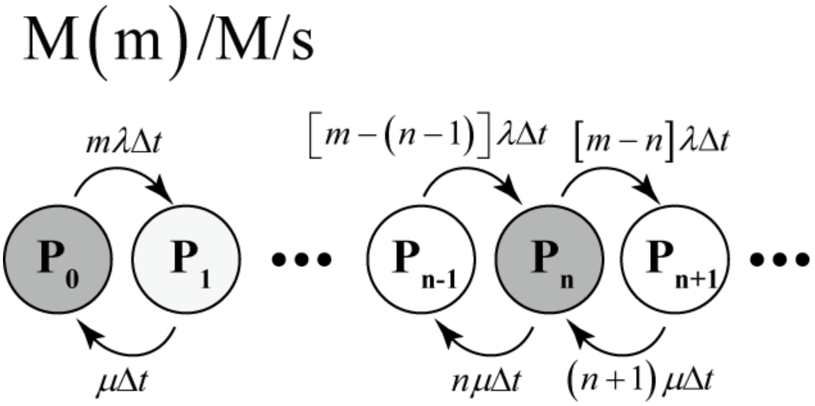

図 7　$n<s$ の場合の $M(m)/M/s$ の状態遷移図

(a) $n<s$の場合

$n<s$の場合の状態確率の遷移の様相を図 7 に示す。

状態が $n-1$ から nに遷移する場合を考えよう。これは、系に故障機械が 1 台来ることに相当する。Δt の間に 1 個の機械が故障する確率は$\left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t$である。したがって、$P_n$ は $\left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}$だけ増加する。

状態が $n+1$ からnに遷移する場合を考える。この遷移は、1 台の機械の修理が終わったことを意味する。Δt の間に 1 台の機械の修理が終わる確率は$(n+1)\mu\Delta t$ である。したがって、P_nは$(n+1)\mu\Delta t P_{n+1}$だけ増加する。

最後に、Δt の間に何も起こらない確率を考える。何も起こらない確率は$\left(1-(m-n)\lambda\Delta t\right)\left(1-n\mu\Delta t\right)\approx 1-(m-n)\lambda\Delta t-n\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は$\left[1-(m-n)\lambda\Delta t-n\mu\Delta t\right]P_n$になる。

上の議論を纏めると以下になる。

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= \left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}(t) \\
&\quad +(n+1)\mu\Delta t P_{n+1}(t) \\
&\quad +\left[1-(m-n)\lambda\Delta t - n\mu\Delta t\right]P_n(t) \\
&= P_n(t)+\left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}(t)+(n+1)\mu\Delta t P_{n+1}(t) \\
&\quad -(m-n)\lambda\Delta t P_n(t)-n\mu\Delta t P_n(t)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$\Delta t \to \infty$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial t} &= \left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1}+(n+1)\mu P_{n+1} \\
&\qquad -(m-n)\lambda P_n - n\mu P_n \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\mu P_{n+1}-(m-n)\lambda P_n \\
&= n\mu P_n - \left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1} \\
&\cdots \\
&= \mu P_1 - \left[m-0\right]\lambda P_0
\end{aligned}
\tag{36}
$$

P_0 は端点になるので、それに注目して状態確率の遷移を考える。

状態が 1 から 0 に遷移する場合を考える。この遷移は、1 台の機械の修理が終わったことを意味する。Δt の間に 1 台の機械の修理が終わる確率は $\mu\Delta t$ である。したがって、P_0 は $\mu\Delta t P_1$ だけ増加する。

Δt の間に何も起こらない確率を考える。何も起こらない確率は $1-m\lambda\Delta t$ である。したがって、P_0 は $(1-m\lambda\Delta t)P_0$ になる。

以上を纏めると

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_1(t)+(1-m\lambda\Delta t)P_0(t) \\
&= P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)-m\lambda\Delta t P_0(t)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

となる。$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$
\frac{\partial P_0}{\partial t} = \mu P_1 - m\lambda P_0 = 0 \tag{38}
$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
(n+1)\mu P_{n+1}-(m-n)\lambda P_n &= \mu P_1 - \left[m-0\right]\lambda P_0 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

これから、以下の関係を得る。

$$
n\mu P_n = \left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1} \tag{40}
$$

したがって、状態確率 P_n は以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{m-(n-1)}{n}\rho P_{n-1} \\
&= \frac{m-(n-1)}{n}\frac{m-(n-2)}{n-1}\rho^2 P_{n-2} \\
&= \frac{m-(n-1)}{n}\frac{m-(n-2)}{n-1}\cdots\frac{m-0}{1}\rho^n P_0 \\
&= \frac{m!}{n!(m-n)!}\rho^n P_0
\end{aligned}
\tag{41}
$$

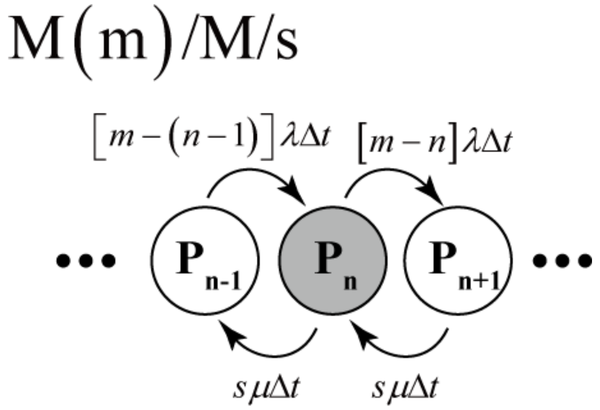

図 8 $M(m)/M/s$ の系における状態確率の遷移。$n \ge s$ の場合

(b) $n \ge s$

$n \ge s$ の場合を考える。

$n < s$ の場合の状態確率の遷移の様相を図 8 に示す。

状態が $n-1$ から n に遷移する場合を考えよう。これは、系に故障機械が 1 台来ることに相当する。Δt の間に 1 個の機械が故障する確率は $[m-(n-1)]\lambda\Delta t$ である。したがって、P_n は $[m-(n-1)]\lambda\Delta t P_{n-1}$ だけ増加する。

状態が $n+1$ から n に遷移する場合を考える。この遷移は、1 台の機械の修理が終わったことを意味する。Δt の間に 1 台の機械の修理が終わる確率は $s\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は $s\mu\Delta t P_{n+1}$ だけ増加する。

最後に、Δt の間に何も起こらない確率を考える。何も起こらない確率は $(1-(m-n)\lambda\Delta t)(1-s\mu\Delta t) \approx 1-(m-n)\lambda\Delta t - s\mu\Delta t$ である。したがって、P_n は

$\left[1-(m-n)\lambda\Delta t - s\mu\Delta t\right]P_n$になる。

上の議論を纏めると以下になる。

$$\begin{aligned}P_n(t+\Delta t) &= \left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}(t) + s\mu\Delta t P_{n+1}(t)\\ &\quad + \left[1-(m-n)\lambda\Delta t - s\mu\Delta t\right]P_n(t)\\ &= P_n(t) + \left[m-(n-1)\right]\lambda\Delta t P_{n-1}(t) + s\mu\Delta t P_{n+1}(t)\\ &\quad -(m-n)\lambda\Delta t P_n(t) - s\mu\Delta t P_n(t)\end{aligned} \tag{42}$$

$\Delta t \to 0$の極限を考え、定常状態を仮定すると以下になる。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1} - (m-n)\lambda P_n - s\mu P_n = 0 \tag{43}$$

これから、以下を得る。

$$\begin{aligned}s\mu P_{n+1} - (m-n)\lambda P_n &= s\mu P_n - \left[m-(n-1)\right]\lambda P_{n-1}\\ &\cdots\\ &= s\mu P_{s+1} - \left[m-s\right]\lambda P_s\end{aligned} \tag{44}$$

我々は P_s および P_{s+1} を現在のところ分かっていない。これらは、以下のように求めることができる。

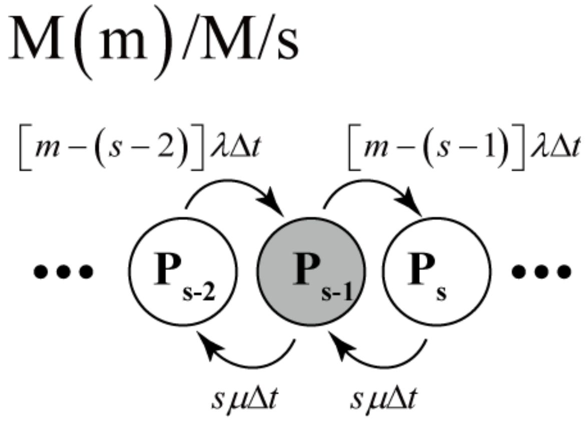

図 9　$M(m)/M/s$ の系において P_{s-1}に注目した状態確率の遷移

図 9 に示すように状態確率P_{s-1} について考える。この状態図から以下を得る。

$$\begin{aligned}P_{s-1}(t+\Delta t) &= P_{s-1}(t) + \left[m-(s-2)\right]\lambda\Delta t P_{s-2}(t) + s\mu\Delta t P_s(t)\\ &\quad - \left[m-(s-1)\right]\lambda\Delta t P_{s-1}(t) - (s-1)\mu\Delta t P_{s-1}(t)\end{aligned} \tag{45}$$

$\Delta t \to 0$の極限を考え、定常状態を仮定すると以下を得る。

$$\frac{\partial P_{s-1}}{\partial t}=\left[m-\left(s-2\right)\right]\lambda P_{s-2}+s\mu P_s-\left[m-\left(s-1\right)\right]\lambda P_{s-1}-\left(s-1\right)\mu P_{s-1}=0 \tag{46}$$

この関係から P_s を以下のように得る。

$$\begin{aligned}
P_s &= \left[\frac{m-\left(s-1\right)}{s}\rho+\frac{\left(s-1\right)}{s}\right]P_{s-1}-\left[\frac{m-\left(s-2\right)}{s}\right]\rho P_{s-2} \\
&= \left[\frac{m-s+1}{s}\rho+\frac{\left(s-1\right)}{s}\right]\frac{m!}{\left(s-1\right)!\left(m-s+1\right)!}\rho^{s-1}P_0 \\
&\quad -\left[\frac{m-\left(s-2\right)}{s}\right]\rho\frac{m!}{\left(s-2\right)!\left(m-s+2\right)!}\rho^{s-2}P_0 \\
&= \frac{m!}{s\left(s-2\right)!\left(m-s+1\right)!}\rho^{s-1}P_0 \\
&\quad +\frac{m!}{s\left(s-1\right)!\left(m-s\right)!}\rho^{s}P_0 \\
&\quad -\frac{m!}{s\left(s-2\right)!\left(m-s+1\right)!}\rho^{s-1}P_0 \\
&= \frac{m!}{s!\left(m-s\right)!}\rho^{s}P_0
\end{aligned} \tag{47}$$

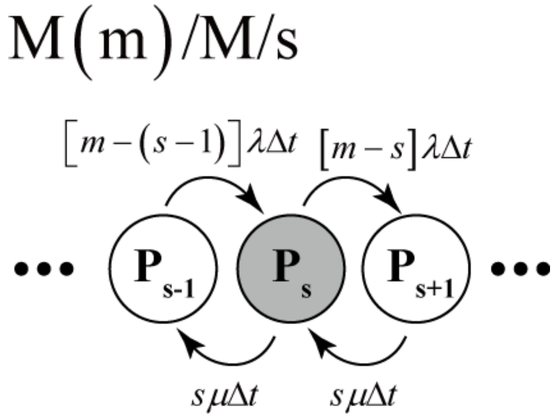

図 10　$M\left(m\right)/M/s$ の系において P_s に注目した状態確率の遷移

次に P_s に注目した状態遷移を図 10 に示す。これから以下を得る。

$$\begin{aligned}
P_s\left(t+\Delta t\right) &= P_s\left(t\right)+\left[m-\left(s-1\right)\right]\lambda\Delta t P_{s-1}\left(t\right)+s\mu\Delta t P_{s+1}\left(t\right) \\
&\quad -\left[m-s\right]\lambda\Delta t P_s\left(t\right)-s\mu\Delta t P_s\left(t\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

$\Delta t\to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下となる。

$$\frac{\partial P_s}{\partial t}=\left[m-\left(s-1\right)\right]\lambda P_{s-1}+s\mu P_{s+1}-\left[m-s\right]\lambda P_s-s\mu P_s=0 \tag{49}$$

これから、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P_{s+1} &= \left[\left(\frac{m-s}{s}\right)\rho+1\right]P_s-\left[\frac{m-s+1}{s}\right]\rho P_{s-1} \\
&= \left[\left(\frac{m-s}{s}\right)\rho+1\right]\frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^s P_0 \\
&\quad -\left[\frac{m-s+1}{s}\right]\rho\frac{m!}{(s-1)!(m-s+1)!}\rho^{s-1}P_0 \\
&= \frac{m!}{s\bullet s!(m-s-1)!}\rho^{s+1}P_0 \\
&\quad +\frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^s P_0 \\
&\quad -\frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^s P_0 \\
&= \frac{m!}{s\bullet s![m-(s+1)]!}\rho^{s+1}P_0
\end{aligned}
\tag{50}
$$

P_s と P_{s+1} を Eq.(44)に代入して以下を得る。

$$
\begin{aligned}
& s\mu P_{s+1}-(m-s)\lambda P_s \\
&= \mu\left[sP_{s+1}-(m-s)\rho P_s\right] \\
&= \mu\left[s\frac{m!}{s\bullet s![m-(s+1)]!}\rho^{s+1}P_0-(m-s)\rho\frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^s P_0\right] \\
&= \mu\left[\frac{m!}{s![m-(s+1)]!}\rho^{s+1}P_0-\frac{m!}{s![m-(s+1)]!}\rho^{s+1}P_0\right] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{51}
$$

したがって、以下となる。

$$
s\mu P_n=[m-(n-1)]\lambda P_{n-1} \tag{52}
$$

これから、状態確率 P_n が以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{m-(n-1)}{s}\rho P_{n-1} \\
&= \frac{m-(n-1)}{s}\frac{m-(n-2)}{s}\rho^2 P_{n-2} \\
&= \frac{m-(n-1)}{s}\frac{m-(n-2)}{s}\cdots\frac{m-s}{s}\rho^{n-s}P_s \\
&= \frac{(m-s)!}{s^{n-s}(m-n)!}\rho^{n-s}P_s
\end{aligned}
\tag{53}
$$

以上をまとめると、状態確率は以下となる。

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!(m-n)!}\rho^n P_0 & (n \le s) \\ \dfrac{(m-s)!}{(m-n)!}\eta^{n-s} P_s & (s \le n \le m) \end{cases} \tag{54}$$

ただし、 P_s は以下である。

$$P_s = \frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^s P_0 \tag{55}$$

Eq. (54) は P_s を使わないで以下のようにも表現できる。

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!(m-n)!}\rho^n P_0 & (n \le s) \\ \dfrac{s^s}{s!}\dfrac{m!}{(m-n)!}\eta^n P_0 & (s \le n \le m) \end{cases} \tag{56}$$

ここで、我々はまだ P_0 を得ていないことに留意する必要がる。 P_0 は全ての確率の和が 1 であることから求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} P_n &= \sum_{n=0}^{s} \frac{m!}{n!(m-n)!}\rho^n P_0 + \sum_{n=s+1}^{m} \frac{s^s}{s!}\frac{m!}{(m-n)!}\eta^n P_0 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{57}$$

これから P_0 は以下となる。

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{s} \frac{m!}{k!(m-k)!}\rho^k + \sum_{k=s+1}^{m} \frac{s^s}{s!}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{s}\right)^k} \tag{58}$$

図 11 に状態確率の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。ここでは $m = 10$ としている。大きな n の P_n の比率が η が大きくなるほど大きくなっている。また、機械修理工の数 s の変化は n の小さな P_n に影響を及ぼすことも見て取れる。

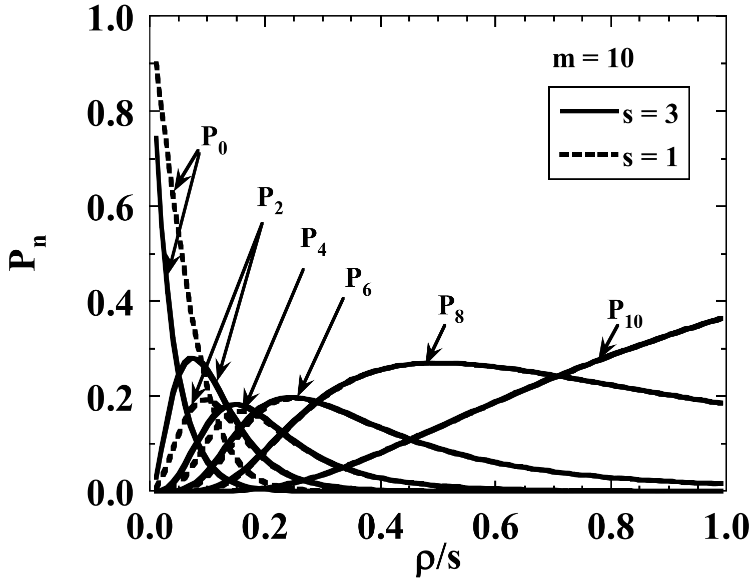

図 11　状態確率の $\eta = \rho/s$ 依存性。$s = 3$.としている。参考のため $s = 1$ の場合の状態確率も示している

11.3.2. パラメータ

関連する系の滞在人数、つまり故障している故障機械の台数 L と待ち人数、すなわち修理を待っている故障機械台数 L_q は以下で与えられる。

$$L = \sum_{n=1}^{m} n P_n \tag{59}$$

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{m} (n-s) P_n \tag{60}$$

対応する分散は以下である。

$$V_L = \sum_{n=0}^{m} (n-L)^2 P_n \tag{61}$$

$$V_{L_q} = (0 - L_q)^2 \sum_{n=0}^{s} P_n + \sum_{n=s+1}^{m} (n - s - L_q)^2 P_n \tag{62}$$

対応する標準偏差は以下である。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L} \tag{63}$$

$$\sigma_{Lq} = \sqrt{V_{L_q}} \tag{64}$$

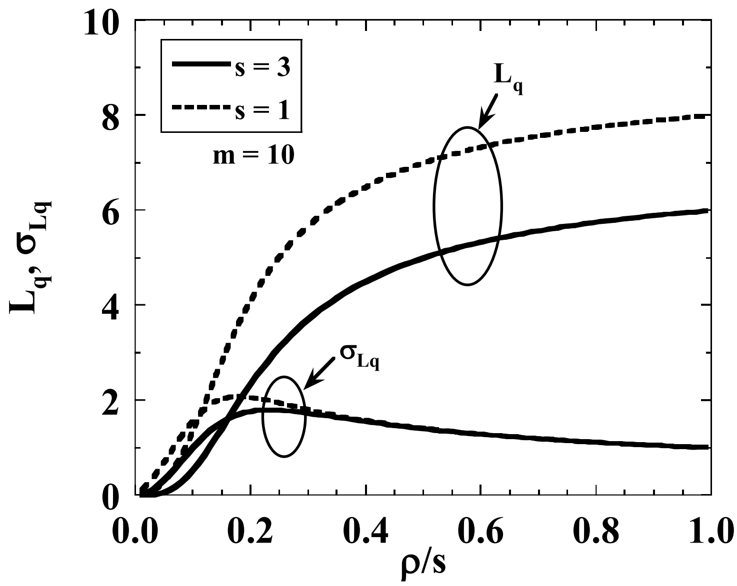

図 12　L_q および σ_{Lq} の　$\eta = \rho/s$ 依存性。 $m = 10, s = 3$ としている。参考のため、$s = 1$　のも

のも併記している

図 12 に L_q　と　σ_{L_q}　の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。ここでは、$s = 3$ としえいる。 L_q　は小さな　η　の領域では、η　が増えるに従い、単調に増えていく。その増加の割合はより η が大きくなると小さくなっていく。 これは　$s = 3$ では L_q　が　7　以下に限定されるためである。

σ_{L_q}　も　η　が増えると単調に増加するが、後に飽和し、さらには減少していく。それも

$s = 3$ では L_q　が　7　以下に限定されるためである。

また、機械数理工の人数を増やせば、単純に修理待ち機械代数は減少する。ただし、その標準偏差はあまり違わなくなってくる。

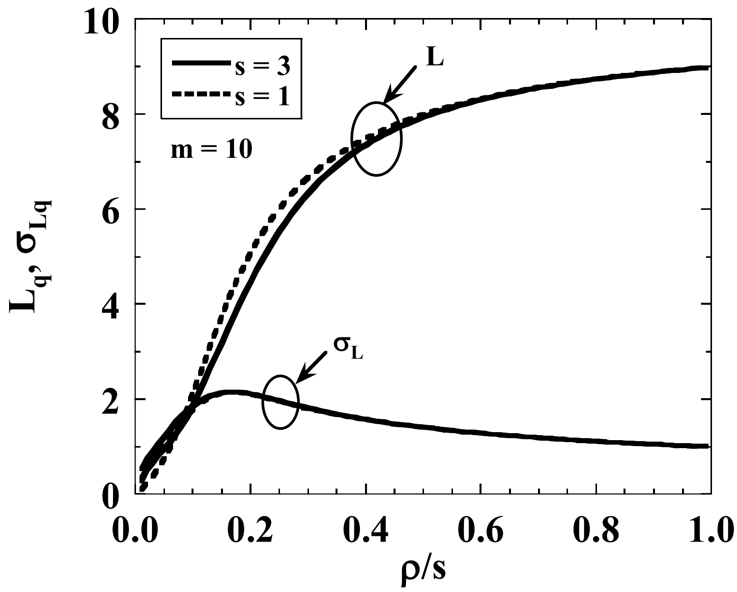

図 13　L と σ_L の $\eta = \rho/s$ 依存性。 $m=10, s=3$ としている。参考のため、$s=1$ のものも併記している

図 13 に L と σ_L の $\eta = \rho/s$ 依存性を示す。L は η が増えるにつれ単調に増加し、やがてその増加の傾向は鈍ってくる。これは、 L が 10 以下に限定されるためである。

σ_L も η が増えると単調に増加するが、後に飽和し、さらには減少していく。それも $s=3$ では L が 10 以下に限定されるためである。

待ち時間、系への滞在時間は以下のように与えられる。

$$W_q = \frac{L_q}{(m-L)\lambda} \tag{65}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{66}$$

図 14 に W_q および W の η 依存性を示す。 W_q および W は η が増えるにつれ単調に増えていくが、さらに η が増えていくとその増加の割合が鈍ってくる。また、修理工の人数 s を増やすと、単純に W_q および W は減少する。

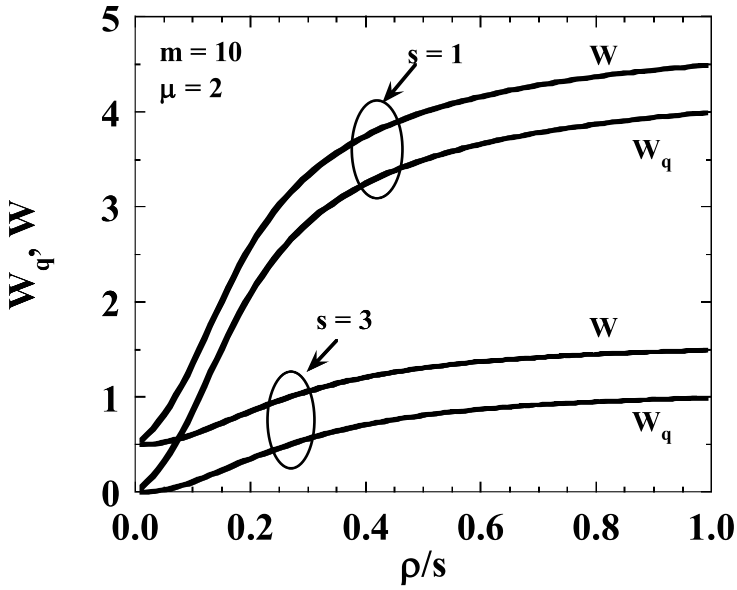

図 14 W_q と W の $\eta = \rho/s$ 依存性。$m = 10$ および $\mu = 2$ としている。また、機械修理工の人数は $s = 1,3$ としている

この系を評価する指標として以下がある。

$$\text{Machine stop rate} = \frac{L}{m} \tag{67}$$

$$\text{Repair person idle rate} = \frac{\nu}{s} \tag{68}$$

空いている機械修理工の人数 ν は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} \nu &= sP_0 + (s-1)P_1 + \cdots + 1P_{s-1} \\ &= \sum_{n=1}^{s} nP_{s-n} \end{aligned} \tag{69}$$

具体例を考える。

機械の台数 m ついて、100 を考える。月に 1 台の機械が故障するとし、修理に 1 日かかるとする。

時間の単位として日を使う。

すると各パラメータは以下となる。

$$\lambda = \frac{1}{30}(/day) \tag{70}$$

$$\mu = 1(/day) \tag{71}$$

図 15 と 図 16 に結果を示す。

機械修理工の数が 1 すなわち $s = 1$ の場合、故障している機械の総台数は約 70 であり、それぞれの機械は修理されるまで 70 日程度待たなくてはならない。

もし、s を 3 にすれば、待つ日数は 4, s を 4 にすれば、待つ日数は 1.5 になる。

s を増やせば、動いていない機械の比率は減るが、働いていない機械修理工の比率は増加する。働いていない機械修理工の比率は $s = 3$ で 3.5% 、$s = 4$ で 36.3% となる。したがって、この両者のトレードオフで機械修理工の人数を定める必要がある。

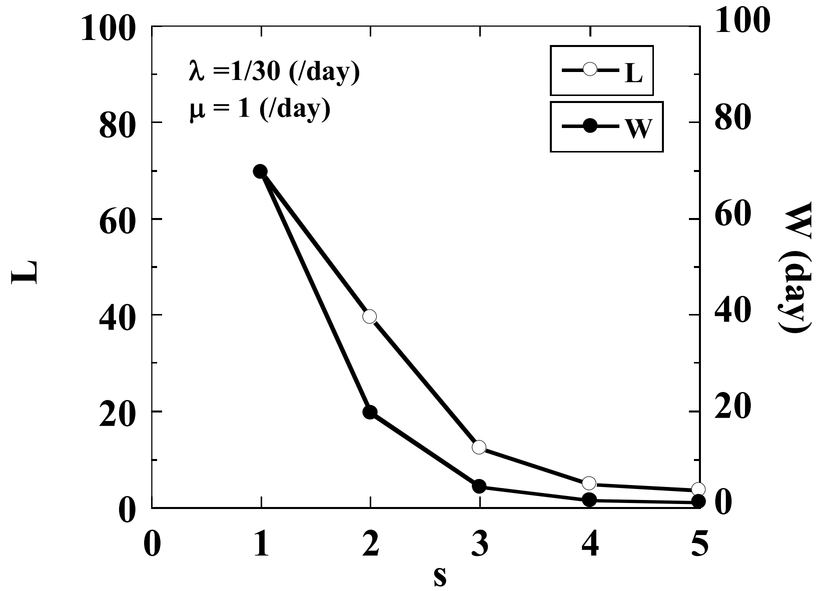

図 15　故障機械台数の機械修理工数依存性

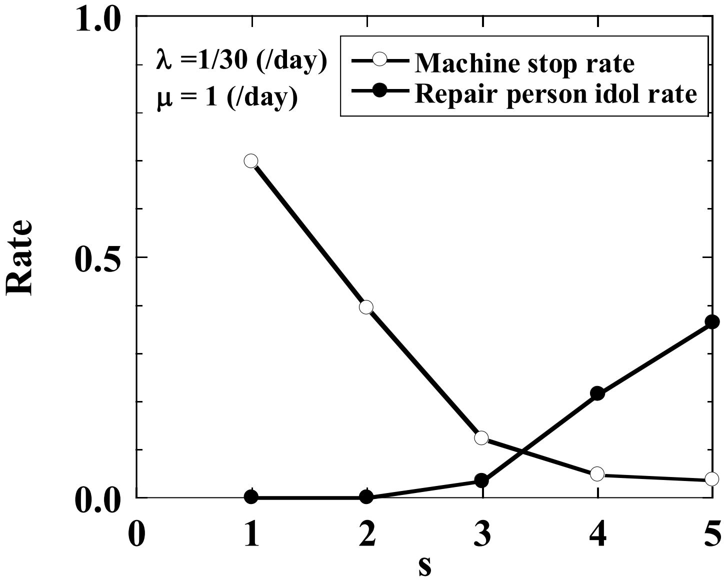

図 16　各種比率の機械修理工数依存性

11.4. 待ち人数、時間がある値未満になる確率

これまでの解析は平均値を扱ってきた。しかし、実際は待ち人数や待ち時間がある確率以下である、という指定がなされることが多い。ここでは、その確率を議論する。

11.4.1. 修理を待っている機械の台数がある値以下である確率

我々は、修理を待っている機械の台数がある値 L_{q0} 未満である確率を求めたい。まず、修理を待っている機械の台数が L_{q0} 以上になる確率 P^* を求める。その確率は以下のようになる。

$$P^* = P_{s+L_{q0}} + P_{s+L_{q0}+1} + P_{s+L_{q0}+2} + \cdots + P_{s+(m-s)} \tag{72}$$

したがって、修理を待っている機械の台数が L_{q0} 未満である確率は以下である。

$$P(L_{q0}) = 1 - P^* \tag{73}$$

図 17 に $P(L_0)$ の η 依存性を占める。ここでは、$m=10, s=3$ を仮定している。

$P(L_0)$ は小さな η では、ほぼ 1 であるが、η が増えると、ある値から急激に減少している。その確率は L_0 が大きくなるほど大きくなる。

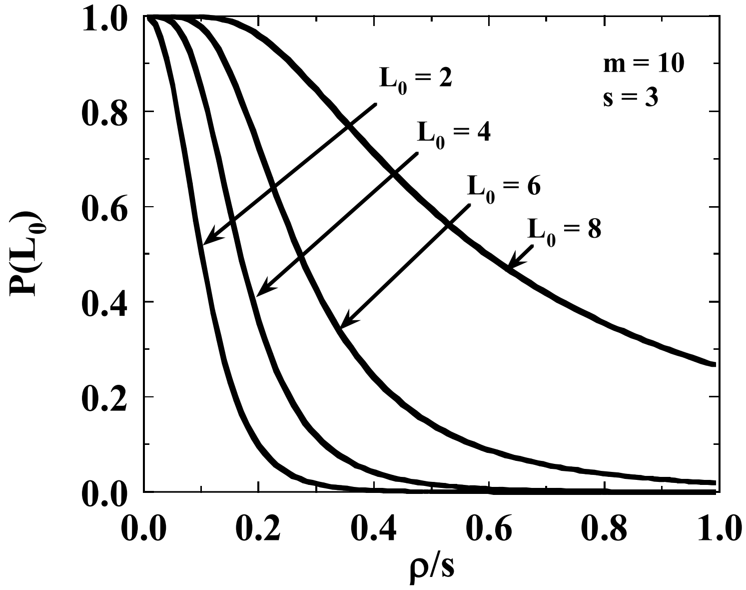

図 17　$P(L_0)$ の　ρ/s　依存性。$m=10, s=3$ としている

11.4.2. 修理を待っている時間がある値以下である確率

機械の修理を待っている時間がある値 t 以下である確率を求める。

待ち行列理論は基本的に件数をもとに構成されているため、時間 t 待つということを、件数で考えなければならない。

ここで、1 台の機械が故障した状況を考える。その状況で k 台の機械が系にいることを見たとする。

もし、k が s 未満であれば、その機械は即座に修理を受けることになる。しかし、k が s 以上であれば、その機械は修理を待つことになる。したがって、修理を待つことに対応する状態は $s, s+1, \cdots, N$ である。

もし、状態が k が s であれば、次の時間 t の間に一人の客もこなければ、さらに待つことになる。

もし、状態 k が s+1 であれば、次の時間 t の間に一人の客も来ないか一人だけ来るのであれば、さらに待つことになる。しかし、2 台以上の機械が修理されれば、待たなくていい。

上の状況をより一般的に表現する。

系の状態が k であるとする。そのメンバーの待ち時間が t_k であるとする。

もし、k が s 未満であれば、その機械は待つことなく即座に修理される。

もし、状態 k が s 以上であれば、修理を我々は待たなくてはならない。したがって、s 以上の k を解析する。

もし、時間 t の間に $k-s$ 台以下しか機械が修理されているのであれば、その機械はさらに待たなくてはならない。したがって、それに対応する確率は以下である。

$$P^* = \sum_{k=s}^{m} P_k P\left(t_k > t\right) \tag{74}$$

P_k は状態が k である確率は以下である。

$$P_k = \frac{\left(m-s\right)!}{\left(m-k\right)!}\eta^{k-s} P_s \tag{75}$$

$P\left(t_k > t\right)$ は待つ時間が t 以上である確率である。これは、t の間に、系を訪問する顧客、つまり修理した機械の台数が $k-s$ 以下である確率である。われわれは、修復する機械の台数はポアソン分布に従うとしているから、時間 t の間に $k-s$ までしか、機械が修復されない確率は以下である。

$$P\left(t_k > t\right) = \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \tag{76}$$

Eqs.(75) および (76) を Eq. (74)に代入して以下を得る。

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_{k=s}^{m} P_k P\left(t_k > t\right) \\ &= \sum_{k=s}^{m} \frac{\left(m-s\right)!}{\left(m-k\right)!}\eta^{k-s} P_s \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!} \end{aligned} \tag{77}$$

これは、以下のように展開される。

$$P^{*}=e^{-s\mu t}\left[\begin{array}{l} P_{s}\bullet\left(\frac{(s\mu t)^{0}}{0!}\right) \\ +P_{s+1}\left(\frac{(s\mu t)^{0}}{0!}+\frac{(s\mu t)^{1}}{1!}\right) \\ +P_{s+2}\left(\frac{(s\mu t)^{0}}{0!}+\frac{(s\mu t)^{1}}{1!}+\frac{(s\mu t)^{2}}{2!}\right) \\ \cdots \\ +P_{m}\left(\frac{(s\mu t)^{0}}{0!}+\frac{(s\mu t)^{1}}{1!}+\frac{(s\mu t)^{2}}{2!}+\cdots+\frac{(s\mu t)^{m}}{(k-s)!}\right) \end{array}\right] \tag{78}$$

したがって、修復を待つ時間が t 未満である確率 $P(t)$ は以下で与えられる。

$$P(t)=1-P^{*} \tag{79}$$

11.5. まとめ

この章のまとめを行う。

系に n 人いる状態確率は以下となる。

$$P_{n}=\begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!}\rho^{n}P_{0} & (n\leq s) \\ \frac{(m-s)!}{(m-n)!}\eta^{n-s}P_{s} & (s\leq n\leq m) \end{cases}$$

ここで、以下である。

$$P_{0}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{s}\frac{m!}{k!(m-k)!}\rho^{k}+\sum_{k=s+1}^{m}\frac{s^{s}}{s!}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{s}\right)^{k}}$$

$$P_{s}=\frac{m!}{s!(m-s)!}\rho^{s}P_{0}$$

待ち行列、およびその分散は以下である。

$$L_{q}=\sum_{n=s+1}^{m}(n-s)P_{n}$$

$$V_{L_{q}}=L_{q}^{\ 2}\left(\sum_{n=0}^{s}P_{n}\right)+\sum_{n=s+1}^{m}\left(n-L_{q}\right)P_{n}$$

その標準偏差は以下である。

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{V_{Lq}}$$

系に滞在している人数は以下である。

$$L = \sum_{n=1}^{m} nP_n$$

その分散は以下である。

$$V_L = \sum_{n=0}^{m} \left(n - L\right)^2 P_n$$

その標準偏差は以下である。

$$\sigma_L = \sqrt{V_L}$$

修理の待ち時間は以下である。

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

故障機械が系にいる時間は池である。

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

修理を待っている機械の台数がある値 L_{q0} 未満である確率は以下である。

$$P^* = P_{s+L_{q0}} + P_{s+L_{q0}+1} + P_{s+L_{q0}+2} + \cdots + P_{s+(m-s)}$$

したがって、修理を待っている機械の台数が L_{q0} 未満である確率は以下である。

$$P\left(L_{q0}\right) = 1 - P^*$$

ただし、

$$P^* = P_{s+L_{q0}} + P_{s+L_{q0}+1} + P_{s+L_{q0}+2} + \cdots + P_{s+(m-s)}$$

である。

故障している機械が修理を待つ時間が t 未満である確率は以下である。

$$P\left(t\right) = 1 - \sum_{k=s}^{m} \frac{\left(m-s\right)!}{\left(m-k\right)!} \eta^{k-s} P_s \sum_{r=0}^{k-s} e^{-s\mu t} \frac{\left(s\mu t\right)^r}{r!}$$