10. M/G/1(∞)

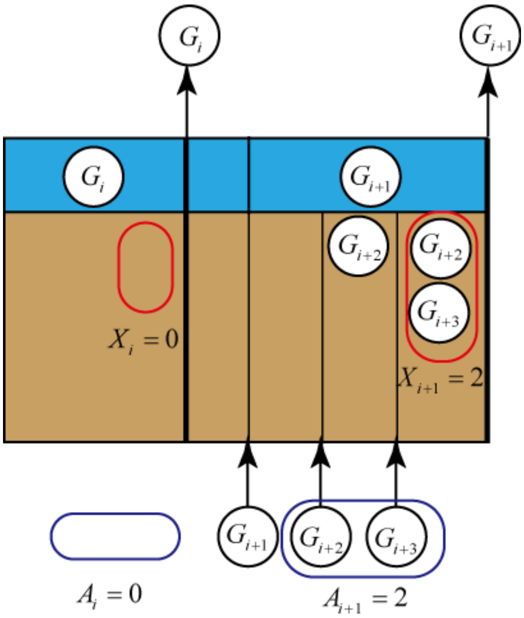
概要: サービス時間は指数分布に従うとこれまで仮定してきた。しかし、この分布からずれる場合がある。したがって、平均と標準偏差を利用できる一般的な分布を利用することが望まれる。ポラチェック、ヒンチンはこれに対応するモデルを導出した。それはケンドールの記号で M/G/1(∞)と表記される。サービスメンバーが複数の場合のモデルの経験式もここで示す。

キーワード: M/G/1(∞); ポアラチェック、ヒンチンの公式; z 変換; 一般サービス時間; 一定サービス時間.

10.1. 序

我々は顧客はランダムに系を訪問するとしてきた。この仮定は尤もらしい。サービス時間も同様な分布に従うと仮定するのが待ち行列での扱いの一般的なものである。しかし、このサービス時間に関しては、この分布に従わない場合が多い。我々は、分布に縛られず、その平均と標準偏差を利用して分析をしたい。そのモデルがポラチェックとヒンチン によって導出された。このモデルはケンドールの記号で M/G/1(∞)と表記される。この中では、訪問はランダム、サービスは一般、サービス対応人数は 1 人、系に入ることのできる人数は無限である。

ここでのモデル式は、サービスメンバーが一人である。複数のサービスメンバーの場合のモデル式の経験式を提案する。その精度は Monte Carlo の章で確かめられる。



(a)

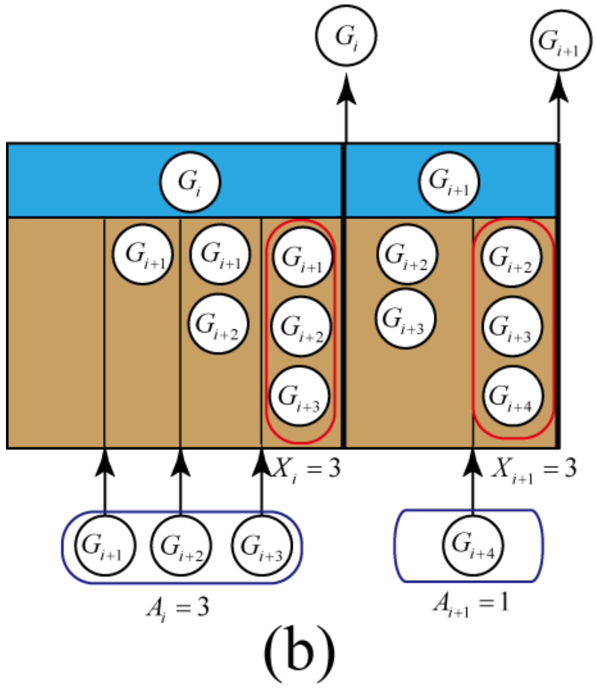


図 1　M/G/1(∞)の系。図の横方向は時間に相当する。図の下の欄外の領域が顧客の訪問、一番下の領域が待ち、上の領域がサービス、上の欄外の領域が顧客が去ることを表している。(a) i 番めの顧客 G_i がサービスを終了した時点で、系にだれも顧客いない場合。(b) i 番めの顧客 G_i がサービスを終了した時点で、3 人の顧客が系にいる場合

10.2. 一人のサービスメンバーにおける一般的な理論： M/G/1(∞)

図 1 に M/G/1(∞)の系の模式図を示す。横方向は時間を表す

縦方向は顧客の状態を表す。顧客の発生は図の下の欄外に表記される。顧客が発生した時間に○が描かれる。第 n 番目の系への訪問者を G_n と表記する。下の領域は顧客が系で待っている状態であることを表現する。上の領域は顧客がサービスを受けている状態を表す。上の欄外は、顧客がサービスを受けるのを終了して、系を去ることを表す。

ここでは、サービス時間を詳細に扱いたいため、以下のプロセスを考える。

ある顧客がサービスを開始し、終わるまでのプロセスを考える。その時間を一般に t とする。

そのサービスを受けている時間 t の間に系を訪問した顧客の数を考える。その間に来る顧客の数はポアソン分布に従うはずである。

ある顧客のサービスが終わり、その顧客が系を去った直後の人数を考える。その人数は系にいる人数となる。

この系の人数とある顧客がサービスを受けている間に系を訪問した顧客の人数の関係

を考える。

顧客 G_i がサービスを受け始めたところからプロセスを始める。

A_i は顧客 G_i がサービスを受けている間に系を訪問した顧客の人数である。

X_i G_i が系を出た直後の系内にいる人数である。

我々は、G_i が系を出た直後の状況として以下の二つを考える。

(a) G_i がサービスを終了した時点で系内に顧客がいない場合。

G_i がサービスを受けている間に顧客は訪問しない。したがって、X_i は 0 である。

その後 G_{i+1} が系を訪問する。

サービスの場所は空いている。したがって、G_{i+1} は即座にサービスを受ける。

G_{i+1} がサービスを受けている間、顧客 G_{i+2} と G_{i+3} が系を訪問する。

顧客 G_{i+1} がサービスを受けている間の訪問数は A_{i+1} で表記され、今の場合は2である。また、X_{i+1} も 2 である。

X_i, X_{i+1} および A_{i+1} は以下の関係で結び付けられる。

$$X_{i+1} = X_i + A_{i+1} \tag{1}$$

ここで、この場合は $X_i = 0$ である。

(b) G_i がサービスを終了した時点で、ある人数の顧客がいる場合

顧客 G_i がサービスを受けている間に G_{i+1}, G_{i+2} および G_{i+3} の 3 人が系を訪問したとする。したがって、X_i はこの場合は 3 である。

G_i のサービスが終わって系を出ると、G_{i+1} が待っており、すぐにサービスを受ける。

G_{i+1} がサービスを受けている間、G_{i+4} が系を訪問するとする。この場合は $A_{i+1} = 1$ および $X_{i+1} = 3$ となる。

X_i, X_{i+1}, および A_{i+1} の関係は以下となる。

$$X_{i+1} = X_i + A_{i+1} - 1 \tag{2}$$

場合 (a)と場合 (b)の違いに注目しよう。

場合 (a)では、ある顧客がサービスを終わって系を出た場合、残っている顧客が 0 であれば、次に来た顧客はサービスを受け、次にその顧客が去っていく。つまり、注目する期間に来た客が系を去って行く。サービスを受ける顧客 G_{i+1} は X_i に含まれていない。したがって、G_{i+1} が系を去った場合、X_i から 1 を引く必要がない。

場合 (b)では、ある顧客がサービスを終わって系を出た場合、残っている顧客の数が 0 でなければ次に来た顧客は待つことになり、次に系をでる顧客はその顧客ではなく、すでにい

る顧客である。つまり、注目する期間に来た客が系を出るのではなく、すでに存在していた客が系を出ていく。サービスを受ける顧客G_{i+1}はX_iに含まれている。したがって、G_{i+1}が系を去った場合、X_iから 1 を引く必要がある。

表式の違いは、この扱いの違いに起因する。

以上をまとめると、以下になる。

$$X_{i+1} = \begin{cases} X_i + A_{i+1} - 1 & for\ X_i \geq 1 \\ X_i + A_{i+1} & for\ X_i = 0 \end{cases} \tag{3}$$

この関係は関数Uを使って纏めると以下のようになる。

$$X_{i+1} = X_i + A_{i+1} - U\left(X_i\right) \tag{4}$$

ここで、関数Uは以下のように定義される。

$$U\left(X_i\right) = \begin{cases} 1 & for\ X_i \geq 1 \\ 0 & for\ X_i = 0 \end{cases} \tag{5}$$

まず、最初にA_iの平均と分散を調べる。

系を訪問する顧客の数はポアソン分布に従うと仮定している。したがって、時間tの間にn人の顧客が系を訪問する確率は以下となる。

$$P\left(A_i = n \middle| t\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{6}$$

ここで、tはG_iがサービスを受けている時間であるから、その値も確率変数になる。したがって、サービス時間がtになる確率を導入し、それを$f_{ts}(t)$とする。したがって、$A_i = n$となる確率は以下となる。

$$\begin{aligned} P\left(A_i = n\right) &= \int_0^\infty P\left(A_i = n \middle| t\right) f_{ts}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{ts}(t) dt \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、$P\left(A_i = n\right)$に対してz変換を施す。すると、以下になる。

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(A_i = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{ts}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{ts}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{ts}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} f_{ts}(t)\,dt
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここで、以下の関係を利用している。

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z t)^n}{n!} = e^{\lambda z t} \tag{9}
$$

$F(z)$ を z について微分して以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz} F(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} f_{ts}(t)\,dt \\
&= \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda(1-z)t} f_{ts}(t)\,dt
\end{aligned}
\tag{10}
$$

したがって、ここで、 $z=1$ とすると、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z=1} &= \int_0^{\infty} \lambda t f_{ts}(t)\,dt \\
&= \lambda \int_0^{\infty} t f_{ts}(t)\,dt \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \rho
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$F(z)$ の z に関する微分は、以下のようにも解釈できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(A_i = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} P(A_i = n)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

したがって、$F(z)$ の z に関して微分して、$z=1$ と置いたものは A_i の平均値とみなすことができる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P(A_i = n) \\
&= E[A_i] \\
&= \rho
\end{aligned}
\tag{13}
$$

つまり、A_i の平均値は ρ となる。

次に A_i の 2 次のモーメントを考える。

$F(z)$ を z に関して 2 階微分する。すると、以下を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d^2F(z)}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda(1-z)t} f_{ts}(t)\,dt \\ &= \lambda^2\int_0^\infty t^2 e^{-\lambda(1-z)t} f_{ts}(t)\,dt\end{aligned} \tag{14}$$

よって、ここで、$z=1$ とおくと

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2F(z)}{dz^2}\right|_{z=1} &= \lambda^2\int_0^\infty t^2 f_{ts}(t)\,dt \\ &= \lambda^2\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2F(z)}{dz^2}\right|_{z=1} &= \sum_{n=0}^\infty n(n-1)P(A_i=n) \\ &= \sum_{n=0}^\infty n^2P(A_i=n)-\sum_{n=0}^\infty nP(A_i=n) \\ &= E\left[A_i^2\right]-E\left[A_i\right] \\ &= E\left[A_i^2\right]-\rho\end{aligned} \tag{16}$$

よって、A_i の 2 次のモーメントは以下となる。

$$\begin{aligned}E\left[A_i^2\right] &= \lambda^2\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)+\rho \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(1+\mu^2\sigma^2\right)+\rho \\ &= \rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)+\rho\end{aligned} \tag{17}$$

となる。ただし、C_{ts}^2 は以下である。

$$C_{ts}^2=\mu^2\sigma_{ts}^2 \tag{18}$$

この系における顧客の平均数 L を評価する。L は X_i の平均値である。

定常状態においては、以下が成り立つ。

$$L=E\left[X_i\right]=E\left[X_{i+1}\right] \tag{19}$$

ここで、改めて X_i を表記すると以下になる。

$$X_{i+1}=X_i+A_{i+1}-U\left(X_i\right)$$

(20)

この式の期待値を取ると以下になる。

$$E\left[X_{i+1}\right]=E\left[X_i\right]+E\left[A_{i+1}\right]-E\left[U\left(X_i\right)\right] \tag{21}$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{aligned} E\left[U\left(X_i\right)\right]&=E\left[A_{i+1}\right] \\ &=\rho \end{aligned} \tag{22}$$

解析をさらにすすめるために、式の自乗をとる。すなわち、以下を得る。

$$\begin{aligned} X_{i+1}{}^2 &= X_i^2 + A_{i+1}{}^2 + U\left(X_i\right)^2 \\ &\quad +2X_iA_{i+1} - 2A_{i+1}U\left(X_i\right) - 2U\left(X_i\right)X_i \end{aligned} \tag{23}$$

ここで、以下の関係を利用する。

$$U\left(X_i\right)^2 = U\left(X_i\right) \tag{24}$$

$$U\left(X_i\right)X_i = X_i \tag{25}$$

すると、式は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} X_{i+1}{}^2 &= X_i^2 + A_{i+1}{}^2 + U\left(X_i\right) \\ &\quad +2X_iA_{i+1} - 2A_{i+1}U\left(X_i\right) - 2X_i \end{aligned} \tag{26}$$

この期待値は以下となる。

$$\begin{aligned} E\left[X_{i+1}{}^2\right] &= E\left[X_i^2\right] + E\left[A_{i+1}{}^2\right] + E\left[U\left(X_i\right)\right] \\ &\quad +2E\left[X_iA_{i+1}\right] - 2E\left[A_{i+1}U\left(X_i\right)\right] - 2E\left[X_i\right] \end{aligned} \tag{27}$$

定常状態では以下が成り立つ。

$$E\left[X_{i+1}{}^2\right] = E\left[X_i^2\right] \tag{28}$$

したがって、以下を得る。

$$0 = E\left[A_{i+1}{}^2\right] + E\left[U\left(X_i\right)\right] + 2E\left[X_iA_{i+1}\right] - 2E\left[A_{i+1}U\left(X_i\right)\right] - 2E\left[X_i\right] \tag{29}$$

$U(X_i)$, X_i,および A_i は独立を考えることができ､式はさらに以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[A_{i+1}{}^2\right] + E\left[U\left(X_i\right)\right] + 2E\left[X_iA_{i+1}\right] - 2E\left[A_{i+1}U\left(X_i\right)\right] - 2E\left[X_i\right] \\ &= E\left[A_{i+1}{}^2\right] + E\left[U\left(X_i\right)\right] + 2E\left[X_i\right]E\left[A_{i+1}\right] - 2E\left[A_{i+1}\right]E\left[U\left(X_i\right)\right] - 2E\left[X_i\right] \end{aligned} \tag{30}$$

また、定常状態では以下も成り立つ。

$$E\left[A_{i+1}^2\right]=E\left[A_i^2\right] \tag{31}$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{aligned}0&=E\left[{A_{i+1}}^2\right]+E\left[U\left(X_i\right)\right]+2E\left[X_i\right]E\left[A_{i+1}\right]-2E\left[A_{i+1}\right]E\left[U\left(X_i\right)\right]-2E\left[X_i\right]\\&=\rho+\rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)+\rho+2L\rho-2\rho^2-2L\\&=2\rho-\rho^2+\rho^2C_{ts}^2-2\left(1-\rho\right)L\end{aligned} \tag{32}$$

これを変形すると以下を得る。

$$\begin{aligned}L&=\frac{2\rho-\rho^2+\rho^2C_{ts}^2}{2\left(1-\rho\right)}\\&=\frac{2\rho-2\rho^2+\rho^2+\rho^2C_{ts}^2}{2\left(1-\rho\right)}\\&=\rho+\frac{\rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)}\end{aligned} \tag{33}$$

リトルの公式から待ち人数 L_q 、待ち時間 W_q 、系の滞在時間 W は以下となる。

$$\begin{aligned}L_q&=L-\rho\\&=\frac{\rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)}\end{aligned} \tag{34}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda} \tag{35}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu} \tag{36}$$

ここで、求めたモデルでは、サービス時間の分布に対して特に何も指定していない。したがって、このモデルは任意の分布に対して適用される。これまで、仮定してきた指数分布では、平均が決まると自動的に分散も決まっていた。このモデルにおいては、この平均と分散を独立したパラメータとして扱うことができる。

ここで、具体例にこれまでの解析を適用する。

サービス時間分布がランダムである場合、サービス時間の分散は $1/\mu$ であると考えられる。したがって、以下となる。

$$C_s^2=\left(\frac{\mu}{\mu}\right)^2=1 \tag{37}$$

よって、系にいる人数は以下となる。

$$L = \rho + \frac{\rho^2\left(1 + C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)} \\ = \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{38}$$

サービス時間が一定の場合は、

$$C_s^2 = 0 \tag{39}$$

となる。したがって、系にいる人数は以下となる。

$$L = \rho + \frac{\rho^2\left(1 + C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)} \\ = \rho + \frac{\rho^2}{2\left(1-\rho\right)} \tag{40}$$

10.3. 複数のサービスメンバーへの拡張

これまでは、一人のサービスメンバーを仮定していた。これを、複数のサービスメンバーのものに拡張するのは困難である。しかし、その経験則的なモデルを紹介する。

$M/M/1$モデルのL_qと$M/G/1$モデルのそれは以下のような関係にある。

$$L_q\left(M/G/1\right) = L_q\left(M/M/1\right)\frac{1+\left(\mu\sigma\right)^2}{2} \tag{41}$$

したがって、この形式を借りて、以下のような形式のモデル式を提案する。

$$L_q\left(M/G/s\right) = L_q\left(M/M/s\right)\frac{1+\left(\mu\sigma\right)^2}{2} \tag{42}$$

すると、他のモデル式はリトルの公式から以下となる。

$$L\left(M/G/s\right) = \rho + L_q\left(M/G/s\right) \tag{43}$$

$$W_q\left(M/G/s\right) = \frac{L_q\left(M/G/s\right)}{\lambda} \tag{44}$$

$$W\left(M/G/s\right) = \frac{1}{\mu} + W_q\left(M/G/s\right) \tag{45}$$

またP_sを以下のように仮定する。

$$P_s\left(M/G/s\right) = \frac{\left(1-\eta\right)^2}{\eta}L_q\left(M/G/s\right) \tag{46}$$

すると、待っている顧客の人数が L_{q0} 未満である確率は以下となる。

$$P\left(L_{q0}\right)=1-\frac{1}{1-\eta}\eta^{L_{q0}}P_s\left(M/G/s\right) \tag{47}$$

待って時間が t 未満である確率は以下となる。

$$P\left(t\right)=1-\frac{P_s\left(M/G/s\right)}{1-\eta}e^{-(1-\eta)s\mu t} \tag{48}$$

これらのモデルの有効性は Monte Carlo の章で検討される。

10.4. まとめ

この章のまとめを行う。

系内の人数の平均値は以下となる。

$$L=\rho+\frac{\rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)}$$

ただし、以下である。

$$C_{ts}^2=\mu^2\sigma_{ts}^2$$

待ち行列は以下となる。

$$L_q=\frac{\rho^2\left(1+C_{ts}^2\right)}{2\left(1-\rho\right)}$$

待ち時間、系での滞在時間は以下となる。

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}$$

複数のサービスメンバーに対する経験的なモデル式は以下となる。

$$L_q\left(M/G/s\right)=L_q\left(M/M/s\right)\frac{1+\left(\mu\sigma\right)^2}{2}$$

$$L\left(M/G/s\right)=\rho+L_q\left(M/G/s\right)$$

$$W_q\left(M/G/s\right)=\frac{L_q\left(M/G/s\right)}{\lambda}$$

$$W\left(M/G/s\right)=\frac{1}{\mu}+W_q\left(M/G/s\right)$$

また、P_s および、待ち行列が L_{q0} 未満である確率、待ち時間が t 未満であるある確率は以下となる。

$$P\left(L_{q0}\right)=1-\frac{1}{1-\eta}\eta^{L_{q0}}P_s\left(M/G/s\right)$$

$$P\left(t\right)=1-\frac{P_s\left(M/G/s\right)}{1-\eta}e^{-(1-\eta)s\mu t}$$

ただし、

$$P_s\left(M/G/s\right)=\frac{\left(1-\eta\right)^2}{\eta}L_q\left(M/G/s\right)$$

である。

これらのモデルの精度は、Mone Carlo の章で議論される。