13. トヨタ看板方式

概要: トヨタの看板方式は在庫を低減する方法である。トヨタの看板方式においては、我々はタグを用意し、そのタグの数以上は製品を生産しない。つまり、全ての製品にタグがつけられ、製品につけられていないタグがある場合のみ製品を生産する。このトヨタの看板方式は待ち行列理論の M/M/1(∞)を変形したものとして表現できる。

キーワード: トヨタの看板方式;タグ;在庫.

13.1. 序

トヨタの看板方式は在庫を減らす方法として提案された。この方法を直接待ち行列理論で扱うことはできない。しかし、変数を導入することで M/M/1(∞)理論で扱うことができる。これによって、間接的にトヨタの看板方式を解析できる。

13.2. トヨタの看板方式の概念

ここではトヨタの看板方式を説明する。

対応する模式図を図 1 に示す。

我々は m 個のタグを用意する。このタグのことをタグと呼ぶ。我々は製品をこのタグの枚数以上は正さんしない。すべての在庫製品にはタグがつけられている。

顧客が製品を要求したばあい、タグのついている製品があれば即座に対応し製品を届けることができる。一方、タグのついている製品がなければ、顧客は製品が生産されるまで待つことになる。

我々は製品につけられていないタグがある場合のみ、製品を生産する。

顧客の訪問頻度をλ, 製品の生産頻度を μ とする。

待っている顧客の人数をBとし、タグのつけられている製品の数をIとする。また、製品につけられていないタグの数をCとする。

我々は、以下の変数Lを導入する。

$$L = B + C \tag{1}$$

これは、待っている顧客の数と製品につけられていないタグの数の和である。

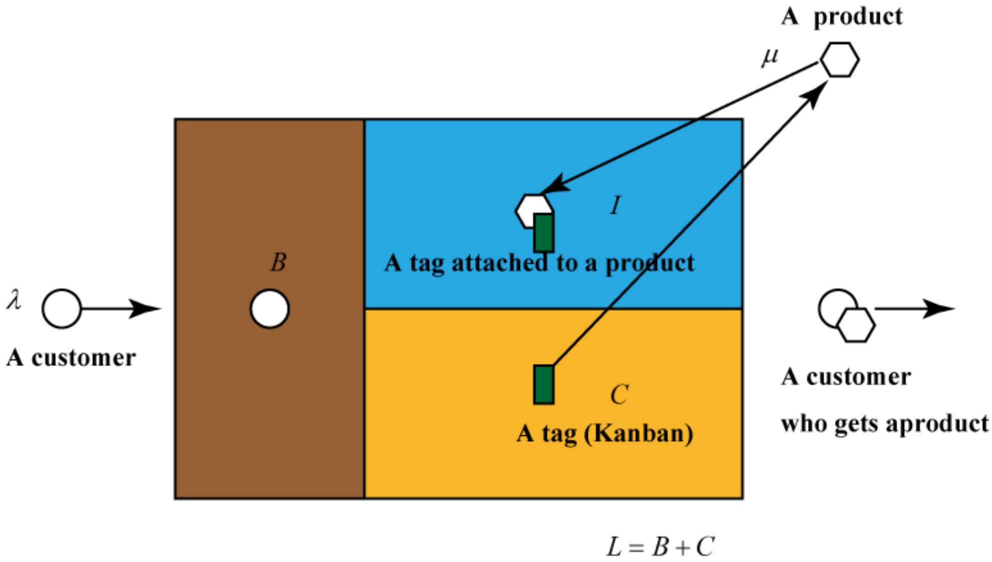


図 1　トヨタの看板方式の模式図

13.3. 状態の遷移

図 2 に示す状態の遷移について考える。

ここでは例としてタグの数が 5 である場合を考える。

在庫がある場合と無い場合で状況は大きくことなる。もし、在庫があるならば、顧客をすぐに製品を得ることができ、待つ必要がない。一方、在庫が無い場合は、製品が生産されるまで待つことになる。

まず、初期条件を考える。

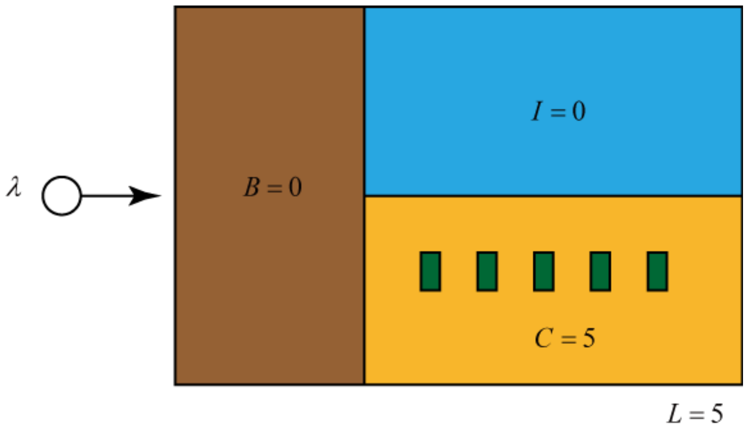
最初に在庫がない場合を考える。つまり、$I = 0$ である。**エラー! 参照元が見つかりません。**に示すように、ここに顧客が来た場合を考える。

ここで、さらに待っている顧客が 0 である場合を想定する。つまり $B = 0$ とする。このじしたがって、初期条件は以下となる。

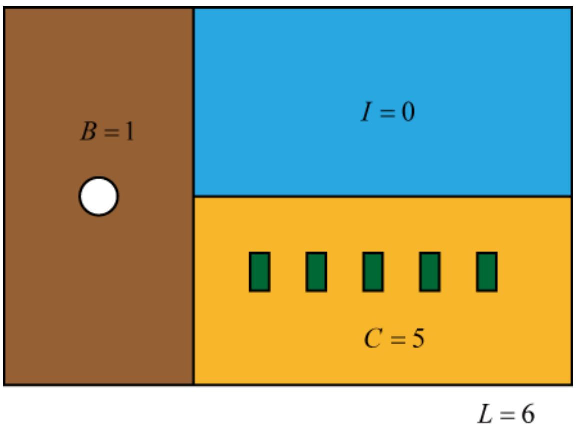
$$\begin{cases} I = 0 \\ B = 0 \\ C = 5 \\ L = 5 \end{cases} \tag{2}$$

この系に一人の顧客が訪問した場合を考える。この場合、在庫がないから、この顧客は待たなければならない。したがって、状態は以下になる。

$$\begin{cases} I = 0 \\ B = 1 \\ C = 5 \\ L = 6 \end{cases} \tag{3}$$



(a)



(b)

図 2　トヨタの看板方式における状態の遷移の模式図。 I＝0 および B＝0 の系に一人の顧客が訪問した場合。(a) I 初期状態 (b) 次の状態

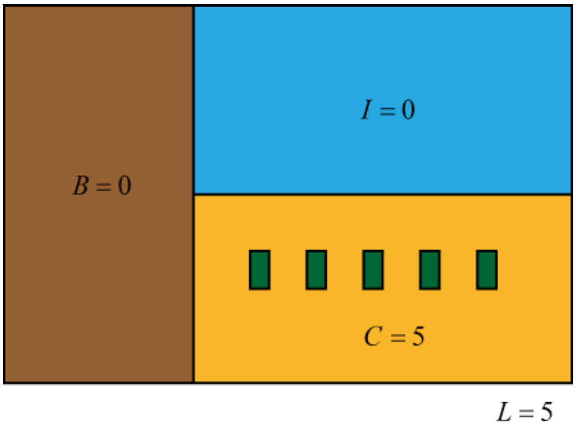
同じような初期条件から、一つの製品が生産される場合を考える。それを図 3 に示す。この場合も初期条件は同じで以下となる。

$$\begin{cases} I = 0 \\ B = 0 \\ C = 5 \\ L = 5 \end{cases} \tag{4}$$

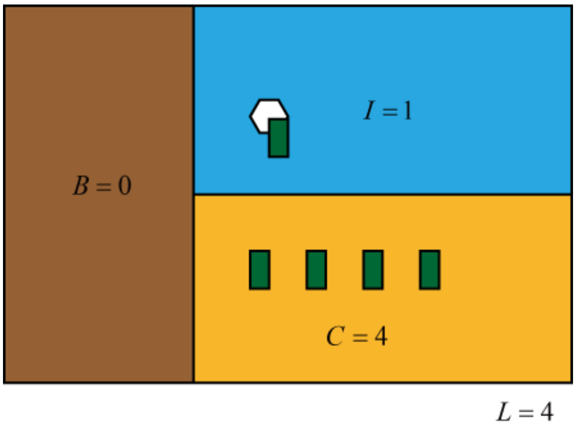
次の状態では一つの製品が生産さるから、以下となる。

$$\begin{cases} I = 1 \\ B = 0 \\ C = 4 \\ L = 4 \end{cases} \tag{5}$$

以上の状態変化を考える。 L に注目すると、一人の顧客が増えれば 1 増え、一つの製品が生産されれば 1 減る。



(a)



(b)

図 3　トヨタの看板方式における状態の遷移の模式図。 I＝0 および B＝0 の系で 1 つの製品が生産された。(a) 初期状態 (b) 次の状態

さらに拡張して以下の状況を考える。

在庫のない状態を考える。つまり、$I=0$ である。しかし、待っている顧客の数は、今度は 0 に限定せず、任意の数 B の待っている状態を考える。ここでは $B=1$ としている。ここに一人の顧客が来た場合を考える。

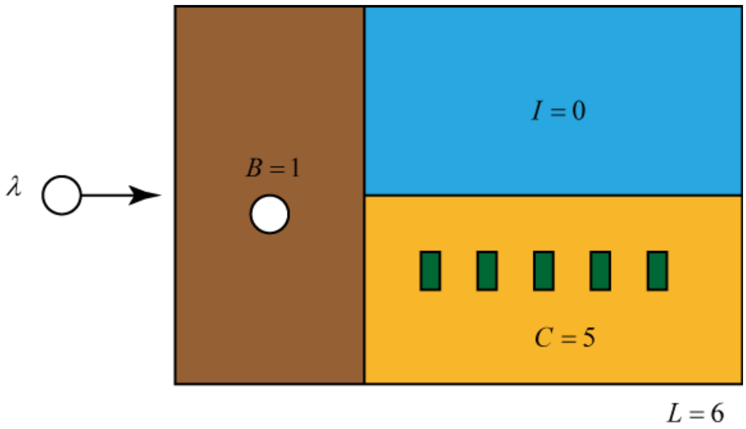
この系に一人の顧客が来た場合を考える。その様相を図 4 に示す。

一人の顧客が来て、在庫はないとわかると彼は待たなければならない。したがって、初期条件は

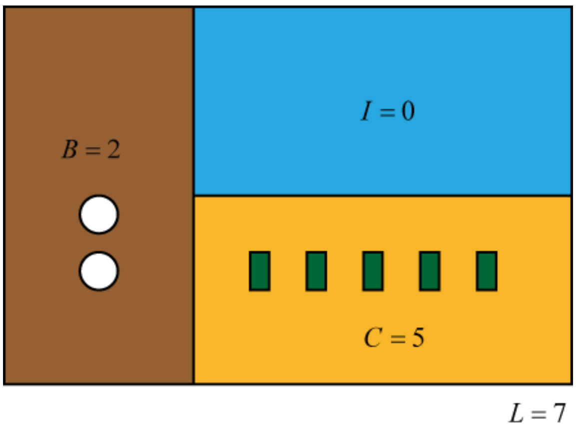
$$\begin{cases} I=0 \\ B=1 \\ C=5 \\ L=6 \end{cases} \tag{6}$$

で、次の状態は以下となる。

$$\begin{cases} I=0 \\ B=2 \\ C=5 \\ L=7 \end{cases} \tag{7}$$



(a)



(b)

図 4　初期条件 I = 0 および B = 1 の状態に顧客が一人訪問した場合。 (a) 初期状態 (b)次の状態

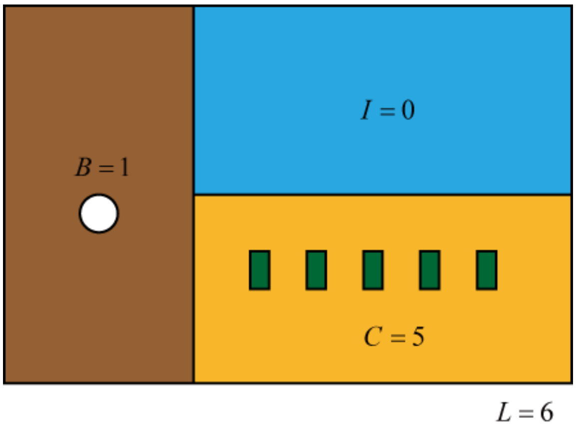
同じ初期状態で、一つの製品が生産された場合を図 5 に示す。

生産された製品は即座に待っている顧客に与えられる。したがって、タグの数は変わらない。待っている顧客の数は一人減る。したがって、初期状態は以下で

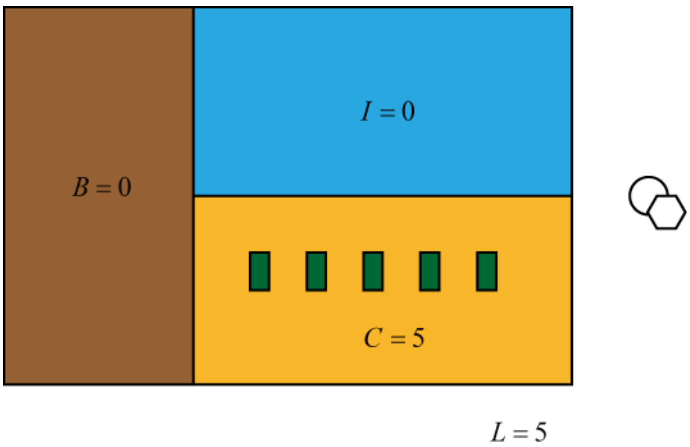
$$\begin{cases} I=0 \\ B=1 \\ C=5 \\ L=6 \end{cases} \tag{8}$$

次の状態は以下になる。

$$
\begin{cases}
I = 0 \\
B = 0 \\
C = 5 \\
L = 5
\end{cases}
\tag{9}
$$



(a)



(b)

図 5　初期条件 I = 0 および B = 1 の状態で製品が一つ製造された場合。 (a) 初期状態 (b)次の状態

在庫が 0 の場合をまとめると以下になる。

$$\begin{cases} L \geq m \\ I = 0 \\ B = L - m \\ C = m \end{cases} \tag{10}$$

次に顧客が系を訪問しても、製品は生産されないから I は 0 である。したがって、C は m のままである。また、

$$\begin{aligned} L &= B + C \\ &= B + m \end{aligned} \tag{11}$$

より、

$$B = L - m \tag{12}$$

となる。

さらに、一人の顧客が系を訪れると L は一つ増え、一つの製品が製造されると L は一つ減る。

つまり、上の関係は、初期状態および、次の状態に対して成り立ち、L の変動は一人の顧客が系を訪れると L は一つ増え、一つの製品が製造されると L は一つ減る、となる。

次に在庫が 0 でない場合を考える。すなわち、$I > 0$ である。この場合は、系を訪問した顧客はただちに製品を得、待つことはない。ここでは、$I = 2$ を仮定する。

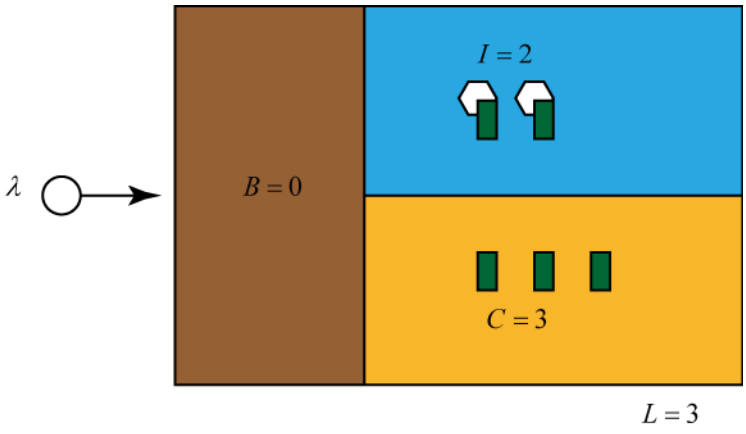
最初に系を顧客が訪問する場合を考える(図 6)。

その顧客はただちに製品を得ることができる。したがって、対応する初期条件は以下となり

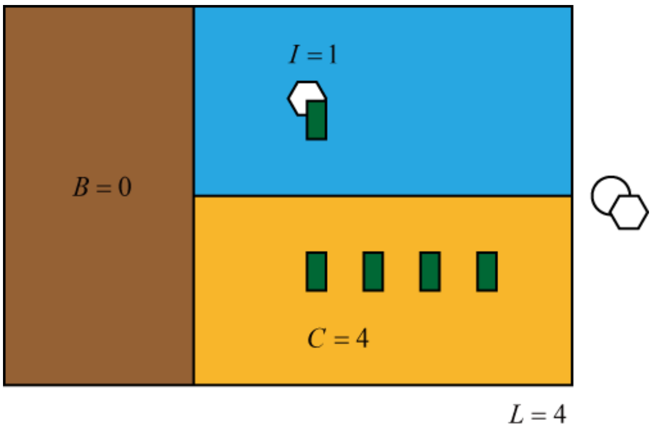
$$\begin{cases} I = 2 \\ B = 0 \\ C = 3 \\ L = 3 \end{cases} \tag{13}$$

次の状態は以下になる。

$$\begin{cases} I = 1 \\ B = 0 \\ C = 4 \\ L = 4 \end{cases} \tag{14}$$



(a)



(b)

図 6　初期条件 I = 2 および B = 0 の状態で顧客が系を訪問した場合。 (a) 初期状態 (b)次の状態

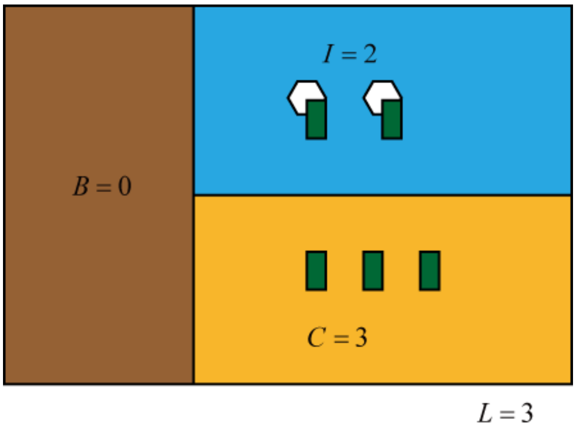
次に、同じ初期条件で、製品が一つ生産される場合を考える。それは図 7 に示している。

この場合は、タグは生産された製品にタグはつけられる。したがって、初期条件は以下で

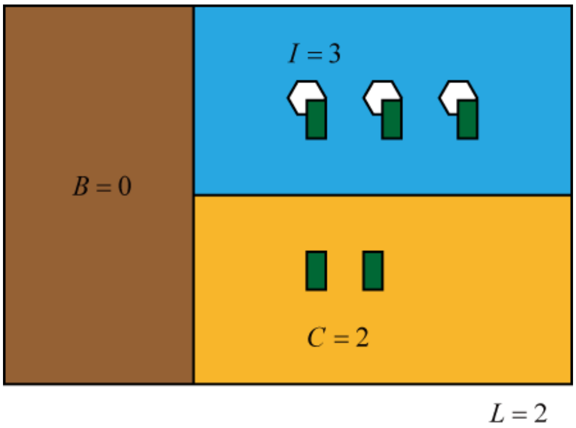
$$\begin{cases} I=2 \\ B=0 \\ C=3 \\ L=3 \end{cases} \tag{15}$$

次の状態は以下になる。

$$\begin{cases} I=1 \\ B=0 \\ C=4 \\ L=4 \end{cases} \tag{16}$$



(a)



(b)

図 7　初期条件 I＝2 および B＝0 の状態で製品が生産された場合。(a) 初期状態 (b)次の状態

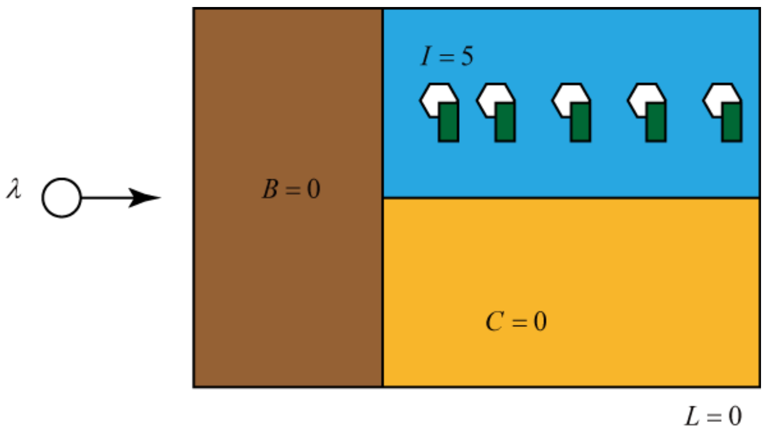
最後に、端点を考える。端点とは全てのタグが製品につけられている場合である。その状態を図 8 に示す。この状態では製品の生産は考えなくていい。

この系に顧客が訪問する場合を考える。彼は待つことなく製品を手にする。したがって、この場合の初期条件は以下で

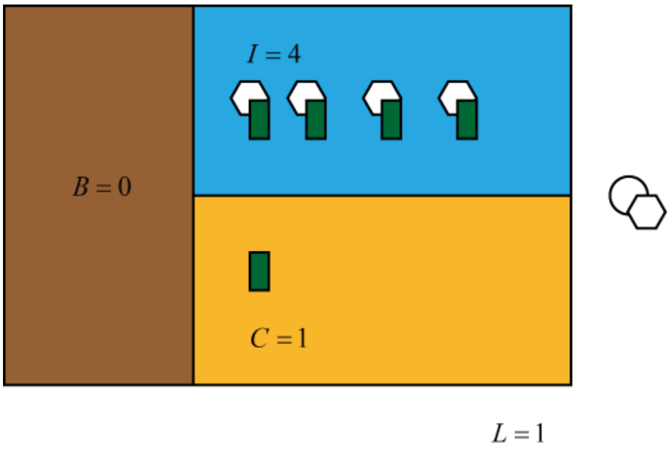
$$\begin{cases} I=5 \\ B=0 \\ C=0 \\ L=0 \end{cases} \tag{17}$$

次の状態は以下である。

$$\begin{cases} I=4 \\ B=0 \\ C=1 \\ L=1 \end{cases} \tag{18}$$



(a)



(b)

図 8　初期条件 I＝5 および B＝0 の状態で顧客が系を訪問した場合。(a) 初期状態 (b)次の状態

$I>0$ の場合を纏めると、以下を得る。

$$\begin{cases} L<m \\ I=m-L \\ B=0 \\ C=L \end{cases} \tag{19}$$

この場合でも L は一人の顧客が系を訪問すれば一つ増え、一つの製品が生産されれば一つ減る。

13.4. L の状態確率

まず、この節では L に注目し、対応する状態確率を求める。

状態確率は以下のように定義される。

$$P_n=P(L=n) \tag{20}$$

つまり、$L=n$ の状態に対する確率を P_n とする。

L は顧客が一人系を訪問すれが 1 増え、製品が 1 台生産されれば 1 減る。したがって、状態確率の遷移は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= \lambda\Delta t P_{n-1}(t)+\mu\Delta t P_{n+1}(t)+(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)P_n(t) \\ &\approx \lambda\Delta t P_{n-1}(t)+\mu\Delta t P_{n+1}(t)+P_n(t)-(\lambda+\mu)\Delta t P_n(t) \end{aligned} \tag{21}$$

これは n が 1 以上の場合に有効である。

ここで、$L=0$ の端点の場合を考える。この場合は全てのタグが製品についている状態である。

L=1 から 0 になる状態を考える。これは、製品を 1 つ生産した場合に相当する。

$L=0$ の状態で何も起こらない場合を考える。この場合の、起こりうるのは顧客の発生で

る。しかし、製品を生産することはできない。したがって、何も起こらない確率は$(1-\lambda\Delta t)$になる。

したがって、状態の遷移は以下となる。

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= \mu\Delta t P_1(t) + (1-\lambda\Delta t)P_0(t) \\
&= \mu\Delta t P_1(t) + P_0(t) - \lambda\Delta t P_0(t)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

これから以下を得る。

$$
\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \left[\mu P_{n+1}(t)-\lambda P_n(t)\right]-\left[\mu P_n(t)-\lambda P_{n-1}(t)\right] \tag{23}
$$

$$
\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = \mu P_1(t)-\lambda P_0(t) \tag{24}
$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考え、定常状態を仮定すると以下となる。

$$
\frac{dP_n(t)}{dt} = \left[\mu P_{n+1}(t)-\lambda P_n(t)\right]-\left[\mu P_n(t)-\lambda P_{n-1}(t)\right] = 0 \tag{25}
$$

$$
\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t)-\lambda P_0(t) = 0 \tag{26}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\mu P_{n+1} - \lambda P_n &= \mu P_n - \lambda P_{n-1} \\
&= \mu P_{n-1} - \lambda P_{n-2} \\
&\cdots \\
&= \mu P_1 - \lambda P_0 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

これから以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \\
&= \rho P_{n-1} \\
&= \rho^2 P_{n-2} \\
&\cdots \\
&= \rho^n P_0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

全ての確率の和は 1 になるから、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n &= P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\
&= P_0 \frac{1}{1-\rho} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{29}
$$

したがって、P_0 は以下のように求まる。

$$
P_0 = 1-\rho \tag{30}
$$

最終的に $L=n$ となる状態確率は以下となる。

$$P_n=(1-\rho)\rho^n \tag{31}$$

13.5. I の状態確率

パラメータ L は状態確率を得るために導入された変数である。それは、製品の在庫量 I や待ち人数 B を求めるために導入されたものである。ここでは、製品の在庫量 I を求める。

ここで、L と他のパラメータの関係を再掲する。

在庫量が 0、すなわち $I=0$ の場合は、$L\geq m$ であり、以下の関係を得る。

$$\begin{cases} L\geq m \\ I=0 \\ B=L-m \\ C=m \end{cases} \tag{32}$$

したがって、在庫が無い確率は以下となる。

$$\begin{aligned} P(I=0)&=P(L\geq m) \\ &=\sum_{n=m}^{\infty}(1-\rho)\rho^n \\ &=(1-\rho)\frac{\rho^m}{1-\rho} \\ &=\rho^m \end{aligned} \tag{33}$$

在庫があれば、どの顧客も製品を即座に得ることができる。したがって、待たない確率 $P(no\ wait)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} P(no\ wait)&=P(I>0) \\ &=1-P(I=0) \\ &=1-\rho^m \end{aligned} \tag{34}$$

在庫があり、 $I>0$ の場合は、$L<m$ となる。この場合は以下の関係になる。

$$\begin{cases} L<m \\ I=m-L \\ B=0 \\ C=L \end{cases} \tag{35}$$

したがって、$I>0$ の場合の状態確率は

$$\begin{aligned} P(I=n)&=P(L=m-n) \\ &=(1-\rho)\rho^{m-n} \\ &=(1-\rho)\rho^m\rho^{-n} \end{aligned} \tag{36}$$

ただし、$n=1,2,\cdots m$ である。

したがって、在庫量 I の期待値は以下となる。

$$
\begin{aligned}
E[I] &= \sum_{n=1}^{m} nP(I=n) \\
&= \sum_{n=1}^{m} nP(I=n) \\
&= (1-\rho)\rho^{m}\left(1\times\frac{1}{\rho}+2\times\frac{1}{\rho^{2}}+\cdots+m\frac{1}{\rho^{m}}\right) \\
&= (1-\rho)\left[m+(m-1)\rho+\cdots+2\rho^{m-2}+\rho^{m-1}\right]
\end{aligned}
\tag{37}
$$

両辺に ρ を掛けると以下を得る。

$$
\rho E[I] = (1-\rho)\left[m\rho+(m-1)\rho^{2}+\cdots+2\rho^{m-1}+\rho^{m}\right] \tag{38}
$$

辺々引いて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
(1-\rho)E[I] &= (1-\rho)\begin{bmatrix} m+(m-1)\rho+\cdots+2\rho^{m-2}+\rho^{m-1} \\ -\left[m\rho+(m-1)\rho^{2}+\cdots+2\rho^{m-1}+\rho^{m}\right] \end{bmatrix} \\
&= (1-\rho)\left[m-\left(\rho+\rho^{2}+\cdots+\rho^{m-2}+\rho^{m-1}+\rho^{m}\right)\right] \\
&= (1-\rho)\left[m-\frac{\rho-\rho^{m+1}}{1-\rho}\right]
\end{aligned}
\tag{39}
$$

これから在庫量の期待値は以下となる。

$$
E[I] = m - \frac{\rho\left(1-\rho^{m}\right)}{1-\rho} \tag{40}
$$

図 9 に $E[I]$ のタグ数依存性を示す。$E[I]$ はいかなる ρ においても、m が増加するにしたがい増加する。在庫の観点からすると、タグの数はできるだけ小さいものを採用したい。

図 10 に待たない確率のタグ数依存性を示す。総タグ数が小さい場合、製品生産のために待つ確率は大きいが、タグ数が増えるに従い待つ確率は減っていく。しかしながら、最終的には確率の上限は 1 であるから、その確率の増加の割合は減っていく。従って、我々は、臨界の待つ確率を P_{wc} と設定し、トータルのタグ数の最適値を求めることにする。つまり、

$$
P_{wc} = 1-\rho^{m} \tag{41}
$$

と置く。したがって、最適のタグ数は以下となる。

$$
m = \frac{\ln\left(1-P_{wc}\right)}{\ln\rho} \tag{42}
$$

図 11 に最適の m の ρ 依存性を示す。最適の m は ρ が増加するに従い増えていく。

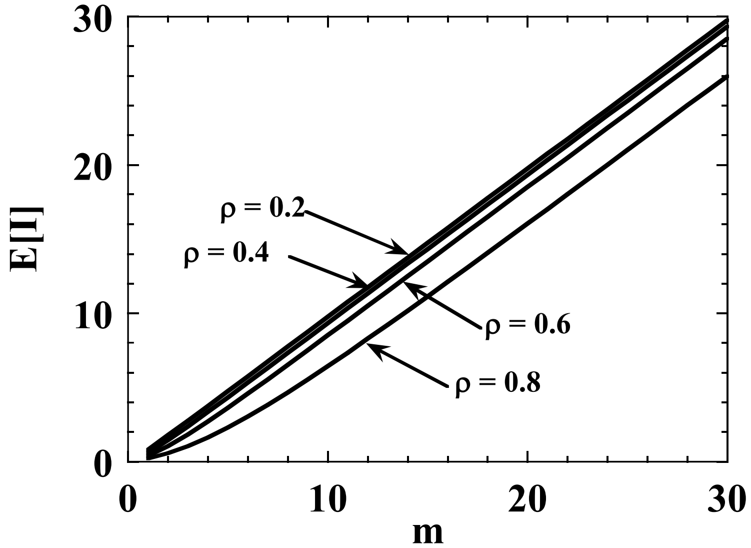


図 9　$E[I]$ のタグ数依存性

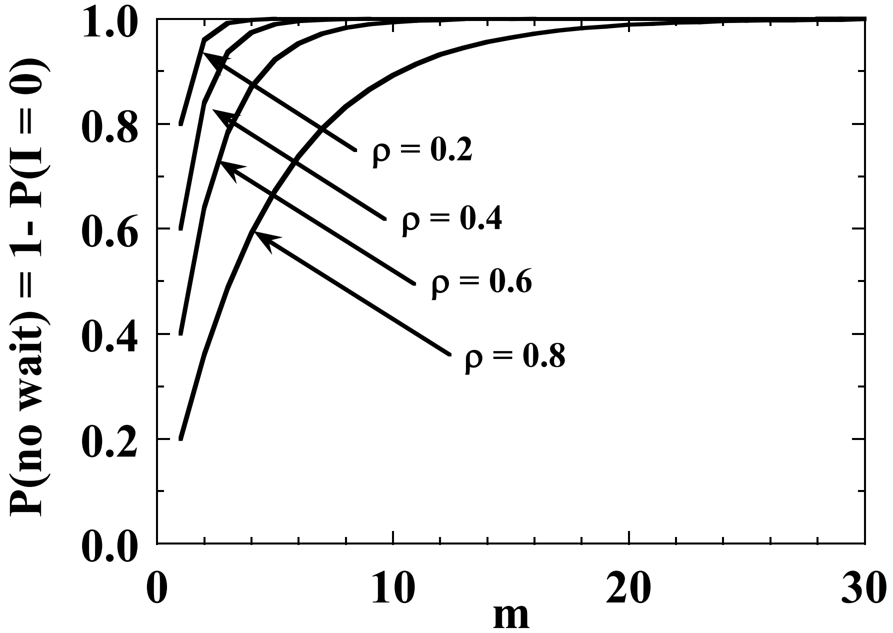


図 10　待たない確率のタグ数依存性

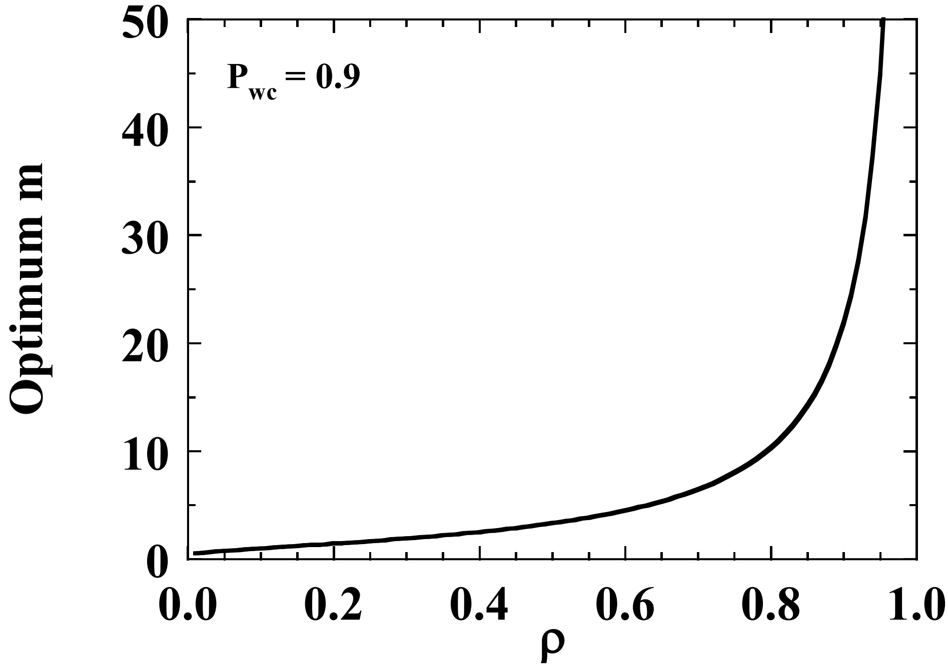


図 11　臨界の待たない確率を設定した場合の最適タグ数の ρ 依存性

I の分散を $V[I]$ と表し、それを以下のように評価する。

$$
\begin{aligned}
V[I] &= \left(0-E[I]\right)^2 P(I=0) + \sum_{n=1}^{m}\left(n-E[I]\right)^2 P(I=n) \\
&= \left(E[I]\right)^2 P(I=0) + \sum_{n=1}^{m}\left\{n^2 - 2E[I]n + \left(E[I]\right)^2\right\} P(I=n) \\
&= \left(E[I]\right)^2 \sum_{n=0}^{m} P(I=n) + \sum_{n=1}^{m}\left[n(n-1)+n\right] P(I=n) - 2E[I]\sum_{n=1}^{m} nP(I=n) \\
&= E[I] - \left(E[I]\right)^2 + A_1
\end{aligned}
\tag{43}
$$

ここで、導入したパラメータ A_1 は以下である。

$$
A_1 = \sum_{n=1}^{m} n(n-1)P(I=n) \tag{44}
$$

A_1 はさらに以下のように評価できる。

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{n=1}^{m} n(n-1)P(I=n) \\
&= (1-\rho)\rho^m\left[2\cdot 1\rho^{-2} + 3\cdot 2\rho^{-3} + \cdots + (m-1)(m-2)\rho^{-(m-1)} + m(m-1)\rho^{-m}\right] \\
&= (1-\rho)\left[m(m-1) + (m-1)(m-2)\rho + \cdots + 3\cdot 2\rho^{m-3} + 2\cdot 1\rho^{m-2}\right]
\end{aligned}
\tag{45}
$$

この式の両辺にρ をかけて、以下を得る。

$$\rho A_1 = (1-\rho)\left[m(m-1)\rho + (m-1)(m-2)\rho^2 + \cdots + 3\cdot 2\rho^{m-2} + 2\cdot 1\rho^{m-1}\right] \tag{46}$$

Eq. 45 と Eq. 46 を辺々引いて、以下を得る。

$$(1-\rho)A_1 = (1-\rho)\left\{m(m-1) - 2\left[(m-1)\rho + (m-2)\rho^2 + \cdots + 2\rho^{m-2} + \rho^{m-1}\right]\right\} \tag{47}$$

したがって、以下となる。

$$A_1 = m(m-1) - 2A_2 \tag{48}$$

ここで、 A_2 は以下である。

$$A_2 = (m-1)\rho + (m-2)\rho^2 + \cdots + 2\rho^{m-2} + \rho^{m-1} \tag{49}$$

この式の両辺にρ を掛けて以下を得る。

$$\rho A_2 = (m-1)\rho^2 + (m-2)\rho^3 + \cdots + 2\rho^{m-1} + \rho^m \tag{50}$$

Eq. 49 と Eq. 50 を辺々引いて、以下を得る。

$$\begin{aligned}(1-\rho)A_2 &= (m-1)\rho - \left(\rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^{m-1} + \rho^m\right) \\ &= (m-1)\rho - \frac{\rho^2\left(1-\rho^{m-1}\right)}{1-\rho}\end{aligned} \tag{51}$$

したがって、 A_2, A_1 以下のようになる。

$$A_2 = (m-1)\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2\left(1-\rho^{m-1}\right)}{(1-\rho)^2} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}A_1 &= m(m-1) - 2A_2 \\ &= m(m-1) - \frac{2(m-1)\rho}{1-\rho} + \frac{2\rho^2\left(1-\rho^{m-1}\right)}{(1-\rho)^2}\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}V[I] &= E[I] - \left(E[I]\right)^2 + A_1 \\ &= m - \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)}{1-\rho} - \left[m - \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)}{1-\rho}\right]^2 + m(m-1) - \frac{2(m-1)\rho}{1-\rho} + \frac{2\rho^2\left(1-\rho^{m-1}\right)}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)}{1-\rho}\left[1-(2m-1)\rho^{m+1}\right] + \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}\left(1 - 2\rho^{m-1} + 2\rho^m - \rho^{2m}\right)\end{aligned} \tag{54}$$

したがって、 I の標準偏差は以下になる。

$$\sigma_I = \sqrt{V[I]} \tag{55}$$

図 12 に $E[I]$ と σ_I のρ依存性を示す。ここでタグ数は 5 としている。$E[I]$ はρが増えるにつれ、単調に減少する。ρが小さい場合は、我々は顧客をあまり得ない。したがって、全てのタグは製品の生産を要求する。そこで、在庫はほぼタグ数となる。 関連するσ_I も小さくなる。ρが増えていうと、顔客をたまに得るようになる。これにより、在庫はこの顧客によって消費されるようになり、減っていく。したがって、来る顧客の数のバラツキがσ_I の増加を呼ぶ。ρ が 1 に近づいてくると、我々は顧客を頻繁に得る。その状態では在庫はなく、関連するσ_I は減っていく。

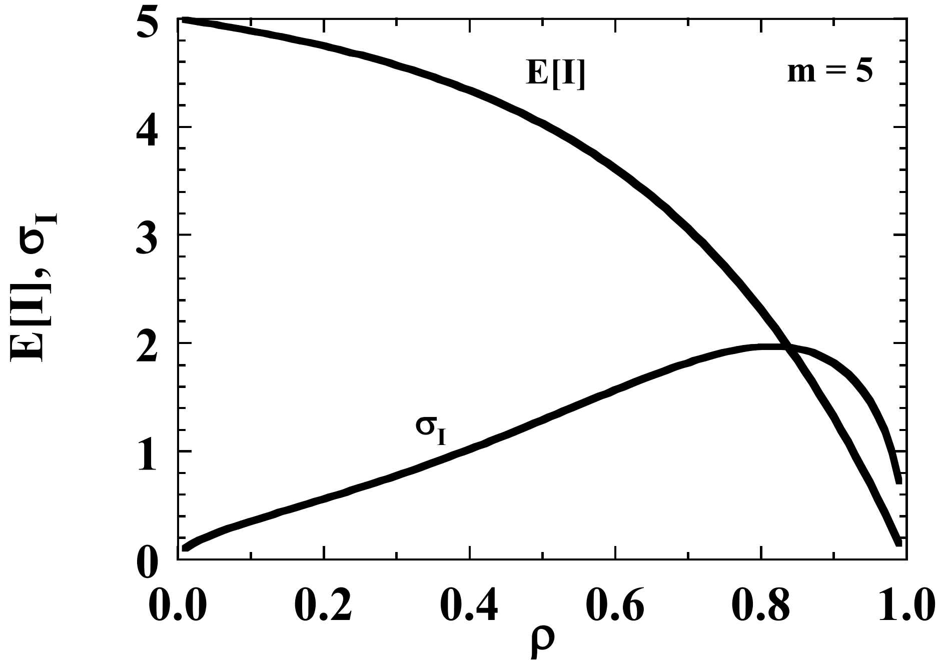


図 12　$E[I]$ とσ_I の　ρ依存性

13.6. B に対する状態確率

待っている顧客の数Bに対する状態確率を考える。

導入されたパラメータ　L　と他のパラメータの関係を再掲する。

$I>0$かつ　$L<m$の場合、以下の関係があった。

$$
\begin{cases}
L < m \\
I = m - L \\
B = 0 \\
C = L
\end{cases}
\tag{56}
$$

さらに、$C = L$ で $L = m$ の場合も、$B = 0$ である。したがって、$B = 0$ である確率は以下である。

$$
\begin{aligned}
P(B = 0) = P(L \leq m) \\
&= \sum_{n=0}^{m} (1-\rho)\rho^n \\
&= (1-\rho)(1+\rho+\cdots+\rho^m) \\
&= (1-\rho)\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \\
&= 1-\rho^{m+1}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$I = 0$ で $L > m$ の場合、以下である。

$$
\begin{cases}
L > m \\
I = 0 \\
B = L - m \\
C = m
\end{cases}
\tag{58}
$$

したがって、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P(B = n) = P(L = m+n) \\
&= (1-\rho)\rho^{m+n} \\
&= (1-\rho)\rho^m \rho^n
\end{aligned}
\tag{59}
$$

全ての場合の確率の和を取ると以下になる。

$$
\begin{aligned}
(1-\rho^{m+1}) + (1-\rho)\rho^m \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n &= (1-\rho^{m+1}) + (1-\rho)\rho^m \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \\
&= (1-\rho^{m+1}) + (1-\rho)\rho^m \frac{\rho}{1-\rho} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{60}
$$

つまり、期待通り全ての場合の確率の和は 1 になっている。

B の期待値は以下となる。

$$
\begin{aligned}
E[B] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(B=n) \\
&= (1-\rho)\rho^m \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n \\
&= (1-\rho)\rho^m \left(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots\right)
\end{aligned}
\tag{61}
$$

この式の両辺に ρ をかけて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
\rho E[B] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(B=n) \\
&= (1-\rho)\rho^m \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n \\
&= (1-\rho)\rho^m \left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots\right)
\end{aligned}
\tag{62}
$$

したがって、以下となる。

$$
\begin{aligned}
(1-\rho)E[B] &= (1-\rho)\rho^m \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots\right) \\
&= (1-\rho)\rho^m \frac{\rho}{1-\rho} \\
&= \rho^{m+1}
\end{aligned}
\tag{63}
$$

よって、B の期待値は以下となる。

$$
E[B] = \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}
\tag{64}
$$

図 13 に $E[B]$ の ρ 依存性を示す。ここでは、様々な m の値を仮定している。$E[B]$ は ρ が増加するにしたがい、増加していき、ρ が 1 に近づくにつれ、急激に増加する。 一方、$E[B]$ は m が増加するにしたがい、減少していく。これは、m が増加するにしたがい、在庫量が増えていくためである。

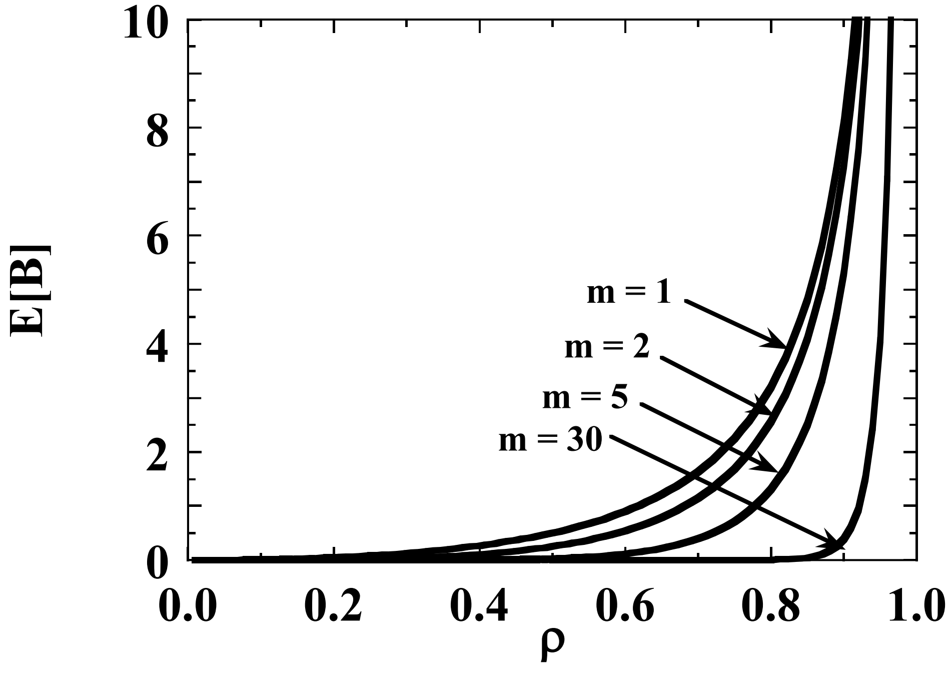


図 13　$E[B]$ の ρ 依存性。ここでは、様々な B を仮定している

次に B の分散 $V[B]$ を以下のように評価する。

$$\begin{aligned} V[B] &= \left(0 - E[I]\right)^2 P(B=0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n - E[B]\right)^2 P(B=n) \\ &= \left(E[I]\right)^2 P(B=0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2 - 2E[B]n + \left(E[B]\right)^2\right\} P(B=n) \\ &= \left(E[B]\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} P(B=n) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n-1)+n\right] P(B=n) - 2E[B]\sum_{n=1}^{\infty} nP(B=n) \\ &= E[B] - \left(E[B]\right)^2 + B_1 \end{aligned} \tag{65}$$

ここで、パラメータ B_1 は以下のように定義される。

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P(B=n) \tag{66}$$

B_1 は更に以下のように展開される。

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P(B=n) \\ &= (1-\rho)\rho^m \left(2\cdot 1\rho^2 + 3\cdot 2\rho^3 + 4\cdot 3\rho^4 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{67}$$

この式の両辺に ρ をかけて以下を得る。

$$\rho B_1 = (1-\rho)\rho^m \left(2\cdot 1\rho^3 + 3\cdot 2\rho^4 + 4\cdot 3\rho^5 + \cdots\right) \tag{68}$$

Eq. 68 および Eq. 69 を辺々引いて以下を得る。

$$\begin{aligned}(1-\rho)B_1 &= (1-\rho)\rho^m \begin{pmatrix}\left(2\cdot 1\rho^2 + 3\cdot 2\rho^3 + 4\cdot 3\rho^4 + \cdots\right) \\ -\left(2\cdot 1\rho^3 + 3\cdot 2\rho^4 + 4\cdot 3\rho^5 + \cdots\right)\end{pmatrix} \\ &= (1-\rho)\rho^m \left(2\cdot 1\rho^2 + 2\cdot 2\rho^3 + 2\cdot 3\rho^4 + \cdots\right) \\ &= 2(1-\rho)\rho^m \left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots\right)\end{aligned} \tag{69}$$

したがって、以下となる。

$$B_1 = 2\rho^m \left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots\right) \tag{70}$$

この式の両辺にρ を掛けて以下を得る。

$$\rho B_1 = 2\rho^m \left(\rho^3 + 2\rho^4 + 3\rho^5 + \cdots\right) \tag{71}$$

Eq. 71 および Eq. 72 を辺々引いて以下を得る。

$$\begin{aligned}(1-\rho)B_1 &= 2\rho^m \left(\rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \cdots\right) \\ &= 2\rho^m \frac{\rho^2}{1-\rho}\end{aligned} \tag{72}$$

したがって、以下を得る。

$$B_1 = 2\rho^m \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}V[B] &= E[B] - (E[B])^2 + B_1 \\ &= \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho} - \frac{\rho^{2m+2}}{(1-\rho)^2} + 2\rho^m \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\rho^m + \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}\rho^m \left(2-\rho^m\right)\end{aligned} \tag{74}$$

Bの標準偏差は以下となる。

$$\sigma_B = \sqrt{V[B]} \tag{75}$$

図 14 に$E[B]$と σ_B のρ 依存性を示す。ここではタグ総数を 5 としている。 両者ともρの増加とともに単調に増加し、ρが 1 に近づくにつれ、急激に増加する。

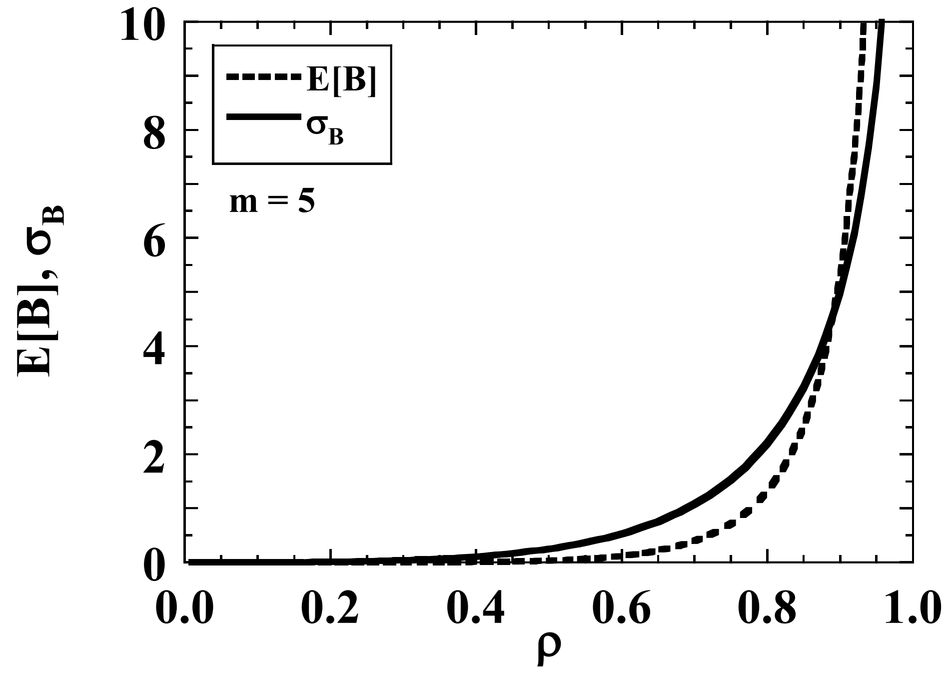


図 14　$E[B]$ と σ_B の ρ 依存性。$m=5$ としている

13.7. C に対する状態確率

我々は製品についていないタグの数 C の状態確率を議論する。

ここで、導入したパラメータ L と他のパラメータの関係を再掲する。

$I>0$ で $L<m$ の場合、以下になる。

$$\begin{cases} L<m \\ I=m-L \\ B=0 \\ C=L \end{cases} \tag{76}$$

したがって、以下を得る。

$$\begin{aligned} P(C=n) &= P(L=n) \\ &= (1-\rho)\rho^n \end{aligned} \tag{77}$$

$I=0$ で $L\geq m$ の場合、以下の関係を得る。

$$\begin{cases} L \geq m \\ I = 0 \\ B = L - m \\ C = m \end{cases} \tag{78}$$

したがって、以下になる。

$$\begin{aligned} P(C = m) &= P(L \geq m) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\frac{\rho^m}{1-\rho} \\ &= \rho^m \end{aligned} \tag{79}$$

全ての場合の確率の和は以下になる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m-1} (1-\rho)\rho^n + \rho^m &= (1-\rho)\frac{1-\rho^m}{1-\rho} + \rho^m \\ &= 1 \end{aligned} \tag{80}$$

つまり、全ての場合の確率の和は期待通り 1 になる。

したがって、C の期待値は以下になる。

$$\begin{aligned} E[C] &= \sum_{n=1}^{m-1} n(1-\rho)\rho^n + m\rho^m \\ &= (1-\rho)\left[\rho + 2\rho^2 + \cdots + (m-1)\rho^{m-1}\right] + m\rho^m \end{aligned} \tag{81}$$

この式の両辺に ρ を掛けると以下を得る。

$$\rho E[C] = (1-\rho)\left[\rho^2 + 2\rho^3 + \cdots + (m-1)\rho^m\right] + m\rho^{m+1} \tag{82}$$

式を辺々引いて以下を得る。

$$\begin{aligned} (1-\rho)E[C] &= (1-\rho)\left[\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m-1} - (m-1)\rho^m\right] + m\rho^m - m\rho^{m+1} \\ &= (1-\rho)\left[\frac{\rho-\rho^m}{1-\rho} - (m-1)\rho^m\right] + m\rho^m - m\rho^{m+1} \\ &= \rho - \rho^m - (m-1)\rho^m + (m-1)\rho^{m+1} + m\rho^m - m\rho^{m+1} \\ &= \rho - \rho^{m+1} \\ &= \rho(1-\rho^m) \end{aligned} \tag{83}$$

したがって、期待値は以下となる。

$$E[C] = \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho} \tag{84}$$

C の分散 $V[C]$ は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
V[C] &= \sum_{n=0}^{m-1}\left(n-E[C]\right)^2 P(C=n)+\left(m-E[C]\right)^2 P(C=m) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\left\{n^2-2E[C]n+\left(E[C]\right)^2\right\}P(C=n) \\
&\quad +\left\{m^2-2E[C]m+\left(E[C]\right)^2\right\}P(C=m) \\
&= -2E[C]\sum_{n=0}^{m} nP(C=n)+\left(E[C]\right)^2\sum_{n=0}^{m} nP(C=n) \\
&\quad +m^2P(C=m)+\sum_{n=1}^{m-1} n^2P(C=n) \\
&= -\left(E[C]\right)^2+m^2P(C=m) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{m-1} n(n-1)P(C=n)+\sum_{n=1}^{m-1} nP(C=n) \\
&= -\left(E[C]\right)^2+m^2P(C=m) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{m} nP(C=n)-mP(C=m) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{m-1} n(n-1)P(C=n) \\
&= E[C]-\left(E[C]\right)^2+m(m-1)P(C=m)+C_1
\end{aligned}
\tag{85}
$$

ここでパラメータ C_1 は以下である。

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{n=1}^{m-1} n(n-1)P(C=n) \\
&= (1-\rho)\left[2\cdot 1\rho^2+3\cdot 2\rho^3+\cdots+(m-1)(m-2)\rho^{m-1}\right]
\end{aligned}
\tag{86}
$$

この式の両辺に ρ を掛けて以下を得る。

$$
\rho C_1=(1-\rho)\left[2\cdot 1\rho^3+3\cdot 2\rho^4+\cdots+(m-2)(m-3)\rho^{m-1}+(m-1)(m-2)\rho^m\right] \tag{87}
$$

Eq. (85)と Eq. (86) で辺々引いて

$$
(1-\rho)C_1=(1-\rho)\left\{2\left[\rho^2+2\rho^3+\cdots+(m-2)\rho^{m-1}\right]-(m-1)(m-2)\rho^m\right\} \tag{88}
$$

を得る。したがって、C_1 は以下となる。

$$
C_1=2\left[\rho^2+2\rho^3+\cdots+(m-2)\rho^{m-1}\right]-(m-1)(m-2)\rho^m \tag{89}
$$

この式の両辺に ρ を掛けると以下を得る。

$$
\rho C_1=2\left[\rho^3+2\rho^4+\cdots+(m-2)\rho^m\right]-(m-1)(m-2)\rho^{m+1} \tag{90}
$$

Eq. (88),と Eq. (89)において辺々引いて以下を得る。

$$
\begin{aligned}
(1-\rho)C_1 &= 2\left[\rho^2+\rho^3+\cdots+\rho^{m-1}-(m-2)\rho^m\right]-(m-1)(m-2)\rho^m(1-\rho) \\
&= 2\left[\frac{\rho^2-\rho^m}{1-\rho}-(m-2)\rho^m\right]-(m-1)(m-2)\rho^m(1-\rho)
\end{aligned}
\tag{91}
$$

これから、C_1 は以下となる。

$$
C_1=\frac{2\left(\rho^2-\rho^m\right)}{(1-\rho)^2}-\frac{2(m-2)\rho^m}{1-\rho}-(m-1)(m-2)\rho^m \tag{92}
$$

$V[C]$ は以下のように求まる。

$$
\begin{aligned}
V[C] &= E[C]-\left(E[C]\right)^2+m(m-1)P(C=m)+C_1 \\
&= \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)}{1-\rho}-\frac{\rho^2\left(1-\rho^m\right)^2}{(1-\rho)^2}+m(m-1)\rho^m \\
&\quad +\frac{2\left(\rho^2-\rho^m\right)}{(1-\rho)^2}-\frac{2(m-2)\rho^m}{1-\rho}-(m-1)(m-2)\rho^m \\
&= \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)-2(m-2)\rho^m}{1-\rho}+\frac{2\left(\rho^2-\rho^m\right)-\rho^2\left(1-\rho^m\right)^2}{(1-\rho)^2}+2(m-1)\rho^m
\end{aligned}
\tag{93}
$$

C の標準偏差は以下となる。

$$
\sigma_C=\sqrt{V[C]} \tag{94}
$$

図 15 に $E[C]$ と σ_C の ρ 依存性を示す。ここでは $m=5$ としている。$E[C]$ は ρ が増加するにつれ、単調に増加する。ρ が小さい場合、我々はめったに顧客は得ない。したがって、すべてのタグは製品の生産を要求し、在庫量はほぼタグ数 m となり、タ製品にひもづいていないタグはほとんどない。関連する標準偏差 σ_C も小さい。ρ が増えてくると、たまに顧客を得、在庫はその顧客によって消費される。したがって、在庫量は減っていき、製品にひもづいていないタグが増えていく。関連する σ_C も増えていく。ρ がさらに増加し、1 に近づいていくと、我々は頻繁に顧客を得、そこには在庫はなく、製品につけられたタグはなくなる。したがって、そえは 5 に近づいていく。また、値は 5 に限定されていくため、σ_C は減っていく。

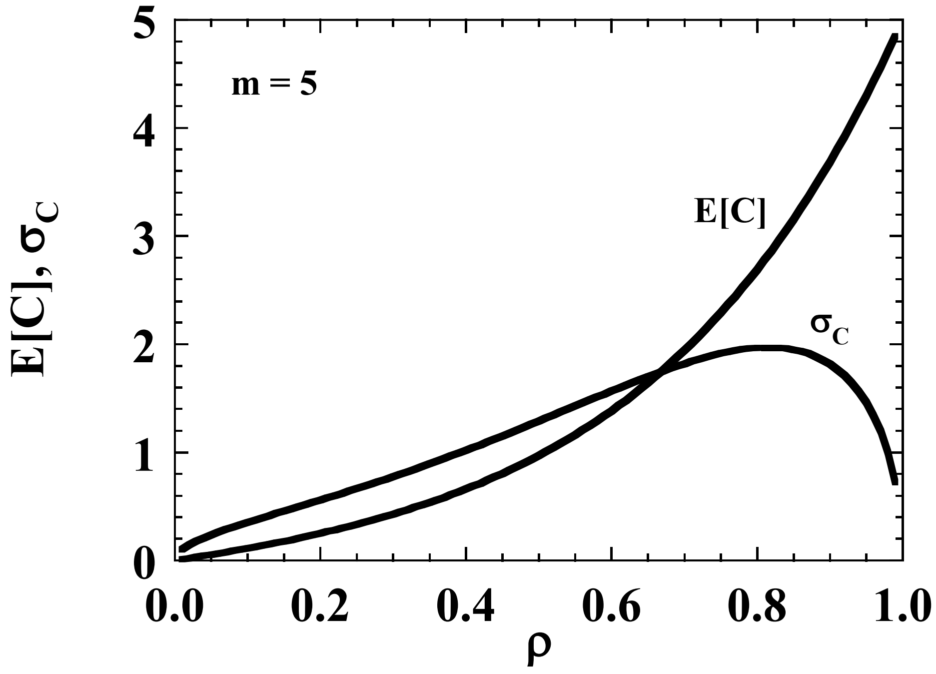


図 15　$E[C]$ と σ_C の ρ 依存性

13.8. 呼損

我われは顧客は在庫がなければ待つと仮定していた。もう一つの顧客の選択としては、待たずに系を去るということがなされる。この場合を呼損と呼ぶ。それをここでは扱う。

$n = m - 1$ までは、同じであり、以下を得る。

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \tag{95}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \left[\mu P_{n+1}(t) - \lambda P_n(t)\right] - \left[\mu P_n(t) - \lambda P_{n-1}(t)\right] \tag{96}$$

定常状態を仮定し、以下を得る。

$$P_n = \rho^n P_0 \tag{97}$$

先に述べたように、この式は $n = m - 1$ まで有効である。我々は、$n = m$ の場合を考えなくてはならない。

$L = m$ の状態を考える。

状態　$L = m - 1$ で、顧客が一人来ると状態 $L = m$ になる。対応する確率は $\lambda \Delta t P_{m-1}(t)$ であ

る。

何も状態が変化しない場合を考える。それは、製品が製造されないことである。製品が製造されない確率は$\left(1-\mu\Delta t\right)$ である。したがって、対応する確率は$\left(1-\mu\Delta t\right)P_m\left(t\right)$ である。

以上をまとめると以下になる。

$$\begin{aligned} P_m\left(t+\Delta t\right) &= \lambda\Delta t P_{m-1}\left(t\right)+\left(1-\mu\Delta t\right)P_m\left(t\right) \\ &\approx \lambda\Delta t P_{m-1}\left(t\right)+P_m\left(t\right)-\mu\Delta t P_m\left(t\right) \end{aligned} \tag{98}$$

したがって、以下となる。

$$\frac{dP_m\left(t\right)}{dt}=\lambda P_{m-1}\left(t\right)-\mu P_m\left(t\right) \tag{99}$$

定常状態を仮定すると以下になる。

$$\begin{aligned} P_m &= \rho P_{m-1} \\ &= \rho P_{m-1} \end{aligned} \tag{100}$$

Eq. 96 で $n=m-1$ と置いたものを代入し、以下を得る。

$$\begin{aligned} P_m &= \rho P_{m-1} \\ &= \rho\rho^{m-1}P_0 \\ &= \rho^m P_0 \end{aligned} \tag{101}$$

したがって、Eq. 96 は$n=m$ でも成り立つ。

ただし、P_0 は異なる。それは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \left(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{m-1}+\rho^m\right)P_0 &= \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho}P_0 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{102}$$

これから以下を得る。

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}} \tag{103}$$

最終的には以下となる。

$$P_n=\frac{\left(1-\rho\right)\rho^n}{1-\rho^{m+1}} \quad for\ n=0,1,2,\cdots,m \tag{104}$$

呼損確率 P_{loss} は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{loss} &= P_m \\ &= \frac{\left(1-\rho\right)\rho^m}{1-\rho^{m+1}} \end{aligned} \tag{105}$$

図 16 に P_{loss} の ρ 依存性を示す。P_{loss} は g ρ が増加するにしたがい、単調に増加し、m が増加するにつれ、減少する。

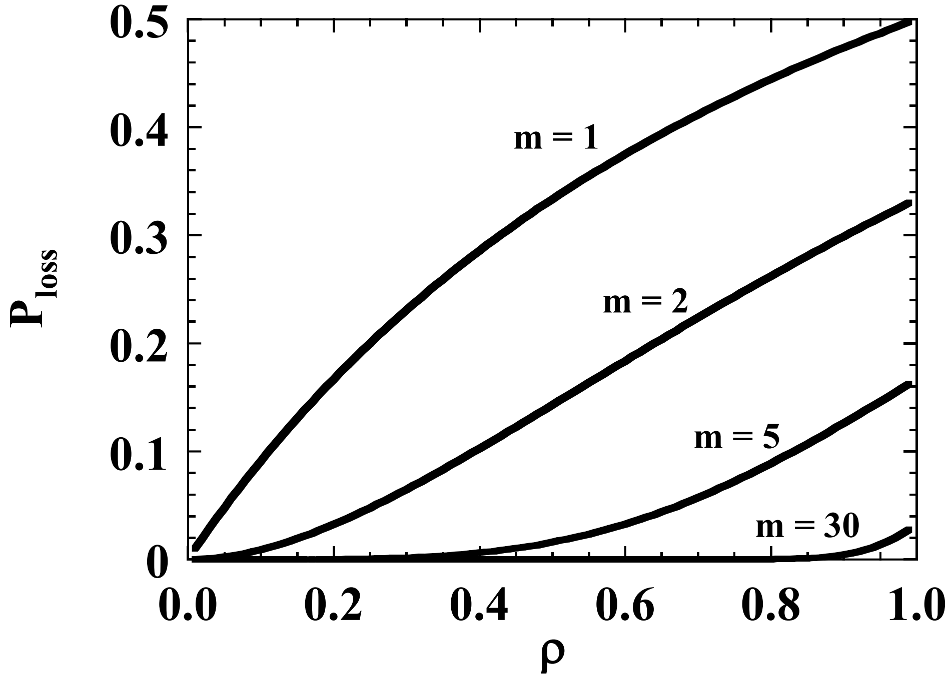


図 16　P_{loss} の ρ 依存性。さまざまなタグ数を仮定している

顧客が即座に製品を受け取ることができる確率 $P_{receive}$ は以下である。

$$\begin{aligned} P_{receive} &= 1 - P_m \\ &= 1 - \frac{(1-\rho)\rho^m}{1-\rho^{m+1}} \\ &= \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+1}} \end{aligned} \tag{106}$$

この確率は、呼損を考慮しないモデルでは $P(no\ wait)$ であった。それは、以下である。

$$\begin{aligned} P(no\ wait) &= P(I>0) \\ &= 1 - P(I=0) \\ &= 1 - \rho^m \end{aligned} \tag{107}$$

図 17 に $1-P_{loss}$ の ρ 依存性を占める。$1-P_{loss}$ は ρ が増えるにつれ減少していく。m を増加させると $1-P_{loss}$ の低下の程度は小さくなる。$P_{receive}$ は常に $P(no\ wait)$ より大きい。これは、この系においては待つ顧客が無いためである。したがって、このような系では、呼損も含めて評価する必要がある。

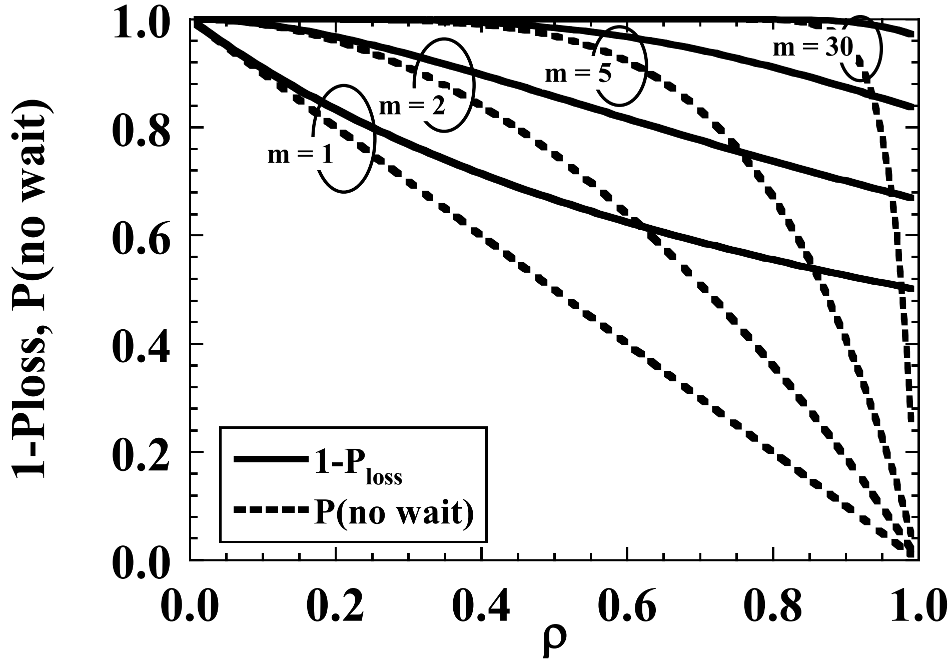


図 17　$1-P_{loss}$ の ρ 依存性。ここでは様々なタグ数を仮定している。$P(no\ wait)$ も併記している

13.9. まとめ

この章のまとめをする。

タグ数 m の場合の在庫確率は以下である。

$$\begin{cases} P(I=0)=\rho^m & for\ n=0 \\ P(I=n)=(1-\rho)\rho^m\rho^{-n} & for\ n=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

在庫の期待値、分散、標準偏差は以下である。

$$E[I]=m-\frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho}$$

$$V[I]=\frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho}\left[1-(2m-1)\rho^{m+1}\right]+\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}\left(1-2\rho^{m-1}+2\rho^m-\rho^{2m}\right)$$

$$\sigma_I=\sqrt{V[I]}$$

待たない確率は以下である。

$$P(no\ wait) = P(I > 0)$$
$$= 1 - \rho^m$$

タグ数 m で、待っている顧客の人数の状態確率は以下である。

$$\begin{cases} P(B=0) = 1 - \rho^{m+1} & for\ n = 0 \\ P(B=n) = (1-\rho)\rho^m \rho^n & for\ n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

待っている顧客の期待値、分散、標準偏差は以下である。

$$E[B] = \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}$$

$$V[B] = \frac{\rho}{1-\rho}\rho^m + \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}\rho^m\left(2-\rho^m\right)$$

$$\sigma_B = \sqrt{V[B]}$$

タグ数 m で、製品についていないタグ数の状態確率は以下である。

$$\begin{cases} P(C=n) = (1-\rho)\rho^n & for\ n = 0,1,2,\cdots,m-1 \\ P(C=m) = \rho^m & for\ n = m \end{cases}$$

この期待値、分散、標準偏差は以下である。

$$E[C] = \frac{\rho\left(1-\rho^m\right)}{1-\rho}$$

$$V[C] = \frac{\rho\left(1-\rho^m\right) - 2(m-2)\rho^m}{1-\rho} + \frac{2\left(\rho^2-\rho^m\right) - \rho^2\left(1-\rho^m\right)^2}{(1-\rho)^2} + 2(m-1)\rho^m$$

$$\sigma_C = \sqrt{V[C]}$$

これまでの解析は在庫が無ければ、客は待つと仮定していいたが、ここでは在庫が無ければ客は去るとする。その場合、客が去っている確率は以下となる。

$$P_{loss} = \frac{(1-\rho)\rho^m}{1-\rho^{m+1}}$$