17. モンテカルロシミュレーション G/G/s(N)

概要:ここでは G/G/s(N) の系に対してのモンテカルロシミュレーションを紹介する。モンテカルロシミュレーションにおいては任意の分布に対する乱数を発生させ、それを入力やサービス時間に利用できる。ここでは、M/G/s(N)に対する厳密な解析モデルはないが、対応する経験則は提案されている。ここでは、その経験式の精度をモンテカルロで評価する。

キーワード: G/G/s(∞); $M/M/s(\infty)$, $M/M/s(N)$; $M/G/s(N)$;モンテカルロ; サービス時間; 正規分布; 経験則

17.1. 序

解析モデルにおいては、扱うことのできる入力時間間隔やサービス時間に対して用いることのできる確率密度分布は限定される。我々は、基本的にそれらに対して指数分布を適用する。モンテカルロシミュレーションでは、任意の確率密度分布に対応する乱数を発生すし、利用する。この乱数発生に関しては章#で扱う。

多数のサービスメンバーがいる場合、サービス時間が任意の確率密度に従う場合に我々は厳密な解析解を得ることができない。しかし、それに対する経験モデルは提案されている。ここでは、その経験モデルの精度をモンテカルロシミュレーションで評価する。

17.2. モンテカルロシミュレーションのプロセス

我々顧客が系に無限にいることをモンテカルロシミュレーションでは扱うことができない。しかし、十分大きな値をとれば、それは無限とみなすことができる。モンテカルロで扱うことのできる系は$G/G/s(N)$である。ここで、入力は一般、出力も一般、サービスメンバー数は複数で任意、系にいることのできる人数はNである。

モンテカルロシミュレーションでは、我々は任意のサービス時間を扱うことができる。しかし、その中で入力頻度とサービス率はばらつく。したがって、その結果はばらつく。したがって、我々はモンテカルロシミュレーションを多数回やり、その平均値をとる必要がある。問題は、その精度はどの程度か、ということである。

17.2.1. 主要コード

時間ステップ Δt を入力頻度 λ と関連させて以下のように設定する。

$$\Delta t = \frac{1}{100\lambda} \tag{1}$$

λ が一定値でない場合は、その最大値を利用する

系にいる平均人数 L_i を各時間ステップで評価し、その平均値を以下のように求める。

$$L = \frac{1}{n_{timeStep}} \sum_i L_i \tag{2}$$

17.2.2. 訪問プロセス

各顧客の待ち時間を累積する。

累積時間が計算する最大時間を超えていなければ、次の顧客を発生させる。超えていれば、何もしない。

17.2.3. サービスプロセス

一番目のサービスメンバーが顧客応対しているか確かめる。

お客がいなければ、何もしない。If it is no, we do nothing.

もし、お客がいれば、応対時間を加算する。

サービス時間が仮定した時間を超えたか判断する。

もし、超えていなければ、何もしない。

もし、超えていれば、待ち相室にお客がいるかチェックする。

お客がいれば、お客を入れる。

お客がいなければ、何もしない。

その客に対するサービス時間を乱数で決める。

顧客の数を 1 引く。

もし、待合室にお客がいなければ、そのサービスメンバーは手空きのままである。

上のプロセスを繰り返す。

17.3. 時間間隔とサービス時間確率分布

モンテカルロシミュレーションにおいては、我々は訪問時間間隔に関して乱数を発生させなけらばならない。その時間分布として、指数分布を利用することが多い。それは、以下で与えられる。

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\langle t_\lambda \rangle} \exp\left(-\frac{t}{\langle t_\lambda \rangle} \right) \quad (for\ 0 < t < \infty) \tag{3}$$

ここで、$\langle t_\lambda \rangle$ は以下である。

$$\langle t_\lambda \rangle = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

我々は、その確率分布に関連づけて乱数を発生さることができる。

サービスタイム時間に対しても同様に、以下のサービス時間分布を定義できる。

$$f_\mu(t) = \frac{1}{\langle t_\mu \rangle} \exp\left(-\frac{t}{\langle t_\mu \rangle}\right) \quad (for\ 0 < t < \infty) \tag{5}$$

ここで、サービス時間の平均値 $\langle t_\mu \rangle$ は以下である。

$$\langle t_\mu \rangle = \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

このサービス時間としては、指数分布でなく、正規分布を用いたい場合もある。正規分布は以下で与えられる。

$$f_\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t_\mu}^2}} \exp\left(-\frac{\left(t - \langle t_\mu \rangle\right)^2}{2\sigma_{t_\mu}^2}\right) \tag{7}$$

ここで、 $\sigma_{t_\mu}^2$ はサービス時間の分散である。

モンテカルトシミュレーションでは、これに限らず分布を定義できれば、それに応じた乱数を発生させ、利用することができる。

17.4. モンテカルロシミュレーションの精度

先に述べたようにモンテカルロシミュレーションは様々な確率分布を利用することができる。あmず、最初にその計算精度を評価する。

まず、解析解があるものに対して、系に滞在している人数 L を評価し、解析モデルと比較する。

17.4.1. 顧客発生およびサービス処理の終端処理

我々は、顧客訪問時間間隔、サービス時間に関して乱数を発生させる。そのうえで、計算時間ステップ Δt を具体的に設定し、シミュレーションをする。

我々はサービス時間に関して指数分布を仮定すると解析解を得ることができる。解析モデルにおいては無限小の時間ステップを仮定しているから、それが存在する領域では厳密

であるとみなすことができる。したがって、このような系でモンテカルロシミュレーション結果と比較することによって、その精度を評価できる。こでは、サービスメンバー数 5 サービス率 2 を仮定する。入力はポアソン分布、したがって顧客発生の時間間隔は指数分布に従うとして変動させる。

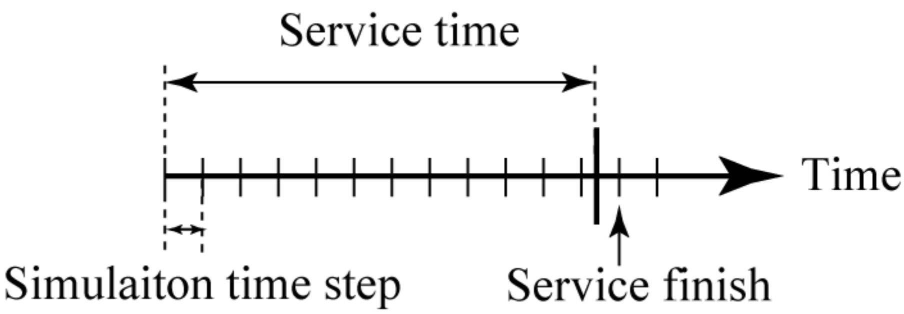
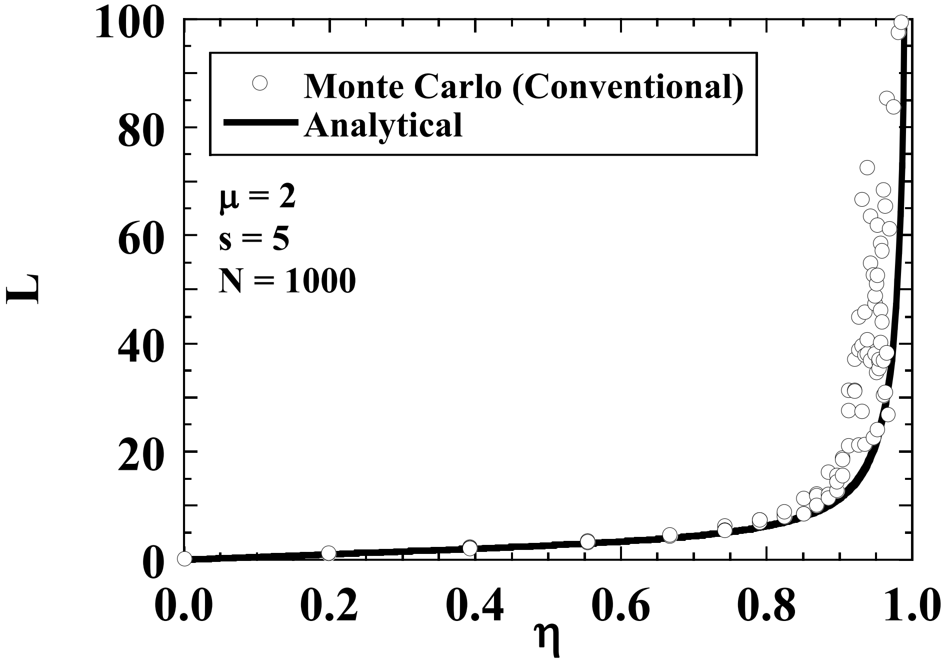


図 1　サービス時間とシミュレーション時間ステップの関係

図 1 に実際に実施するモンテカルロシミュレーションの状況を示す。我々は時間ステップで計算をすすめていく。累積の計算時間ステップが乱数で発生させたサービス時間を超えたとき、我々はサービスを終了する。

しかしながら、図をみて分かる通り、計算で終えるサービス時間は、常に乱数で発生さっせたサービス時間よりも長くなる。したがって、モンテカルロで評価した L は、厳密である解析モデルよりも常に大きめになっていく。



100
80
60
40
20
0
L
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
η
Monte Carlo (Conventional)
Analytical
μ = 2
s = 5
N = 1000

(a)

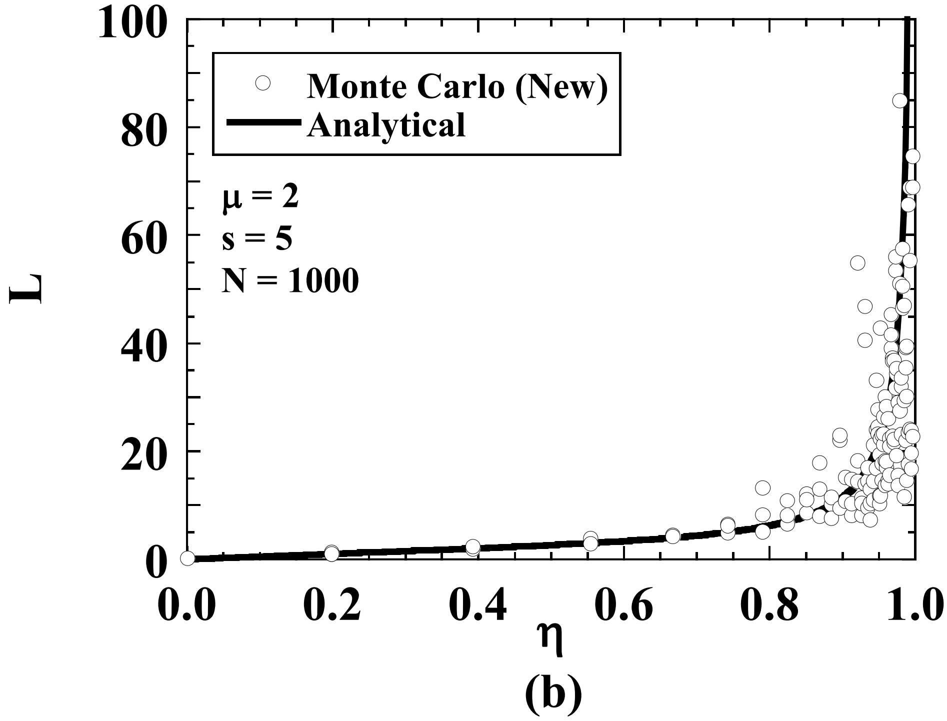


図 2　モンテカルロシミュレーションと解析モデルの比較。s =5 としている。 (a) シミュレーション累積時間がサービス時間を終えた場合に計算をストップする場合。(b)サービス時間をシミュレーションタイムステップで丸めた場合

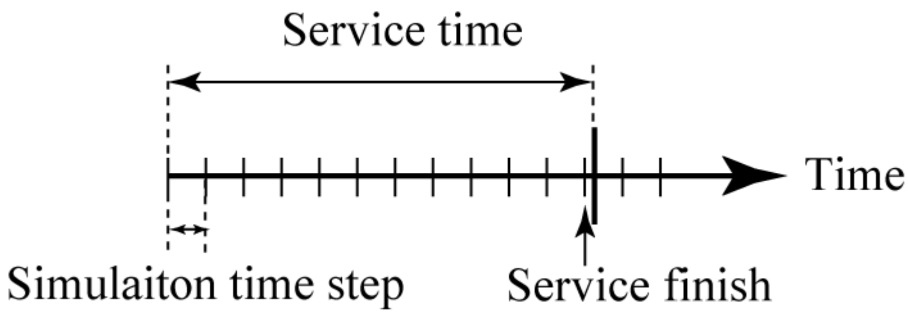
実際にこの問題を回避する方法はサービス時間を四捨五入することである。つまり、計算で利用するサービス時間を以下のようにする。

$$t_{\mu}^{*} = \Delta t \times Int\left[\frac{t_{\mu}}{\Delta t} + 0.5\right] \tag{8}$$

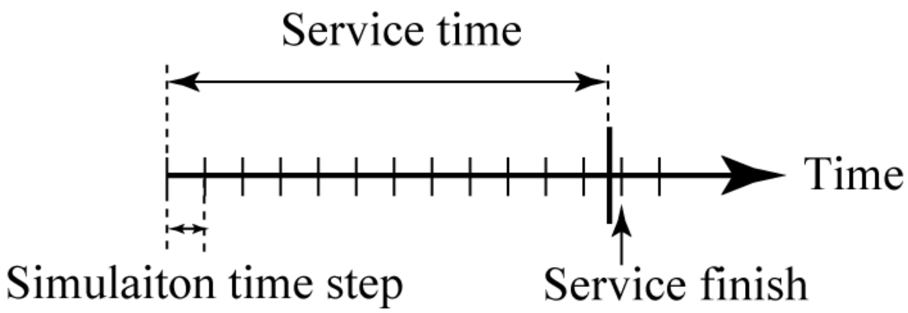
ここで、 Int は引数の整数部をとる関数である。これを施した場合のシミュレーションを図 3 に示す。

これにより、モンテカルロシミュレーション結果は図 2 (b)に示すように厳密解である解析モデルの両側に散らばることになる。

同様の処理を顧客の発生時間間隔に関しても行う。



(a)



(b)

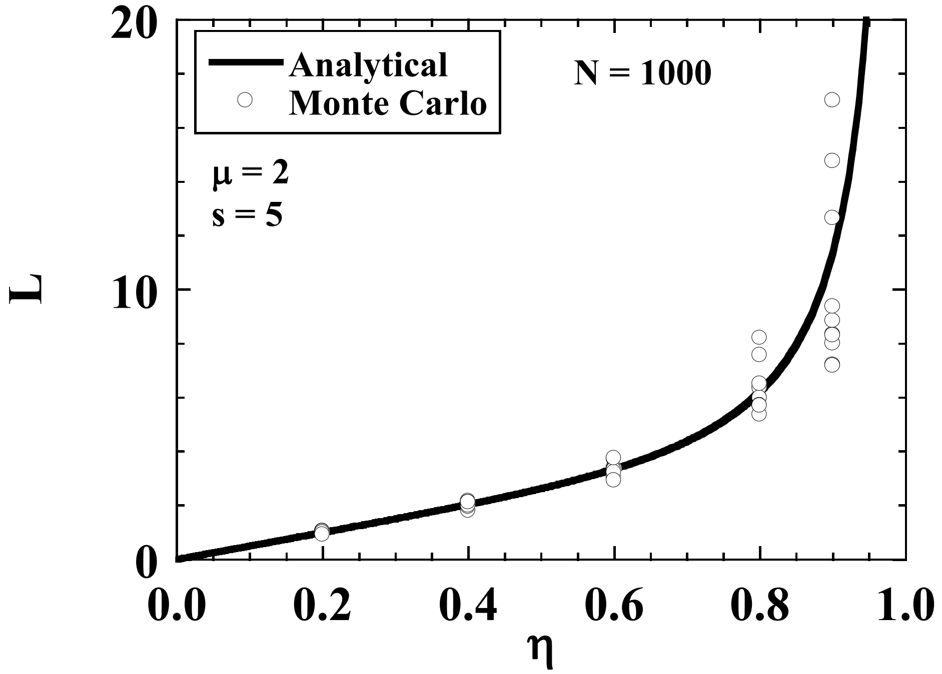
図 3　改良されたサービス時間。 (a) 発生させたサービス時間がシミュレーション時間ステップの左側に近い場合。(b) 発生させたサービス時間がシミュレーション時間ステップの右側に近い場合

17.4.2. 顧客の人数の精度

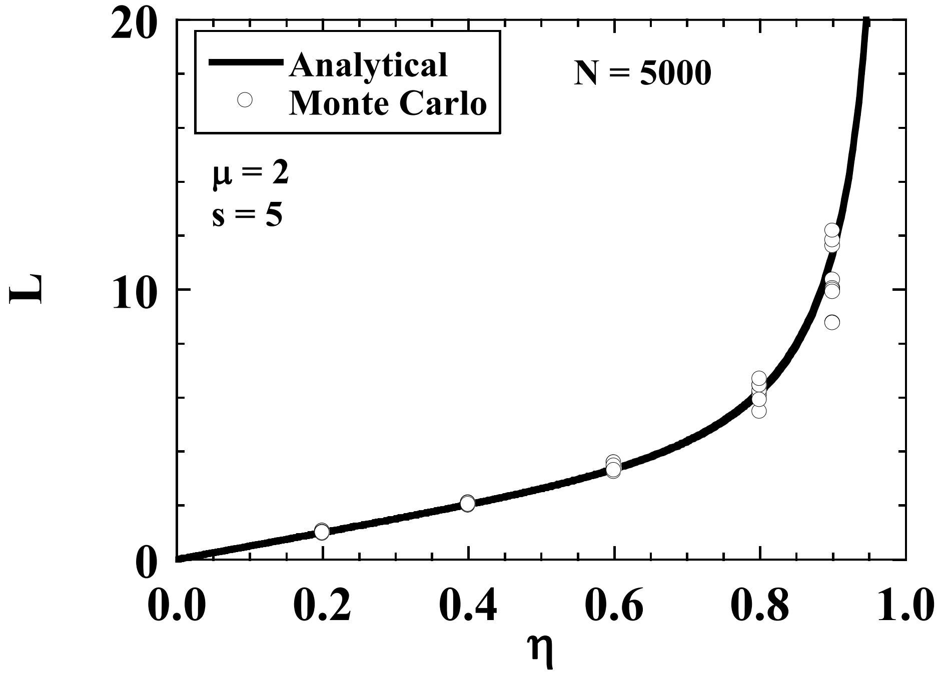
我々は、前の節で改良されたモンテカルロミュレーションにおいては、厳密な計算結果の両側にバラつくようにすることができた。しかし、その精度そのものは評価できていない。

ここでは$M/M/s(\infty)$において、厳密な解のある指数分布の訪問時間間隔とサービス時間を仮定して、モンテカルロシミュレーションの精度を評価する。

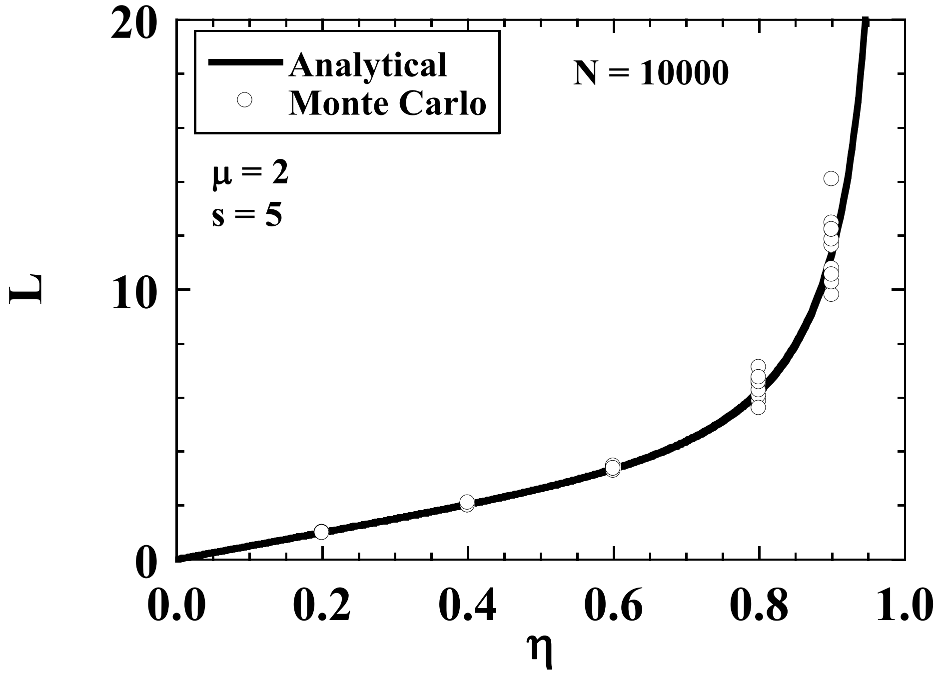
モンテカルロシミュレーションにおいて、各ηにおいて我々はN人の顧客を発生させ、系にいる人数Lを評価する。評価された Lは η が小さい領域では、バラツキは小さいが、η が小さい領域ではバラツキは大きい。バラツキの程度はNを大きくするにつれ、小さくなる。



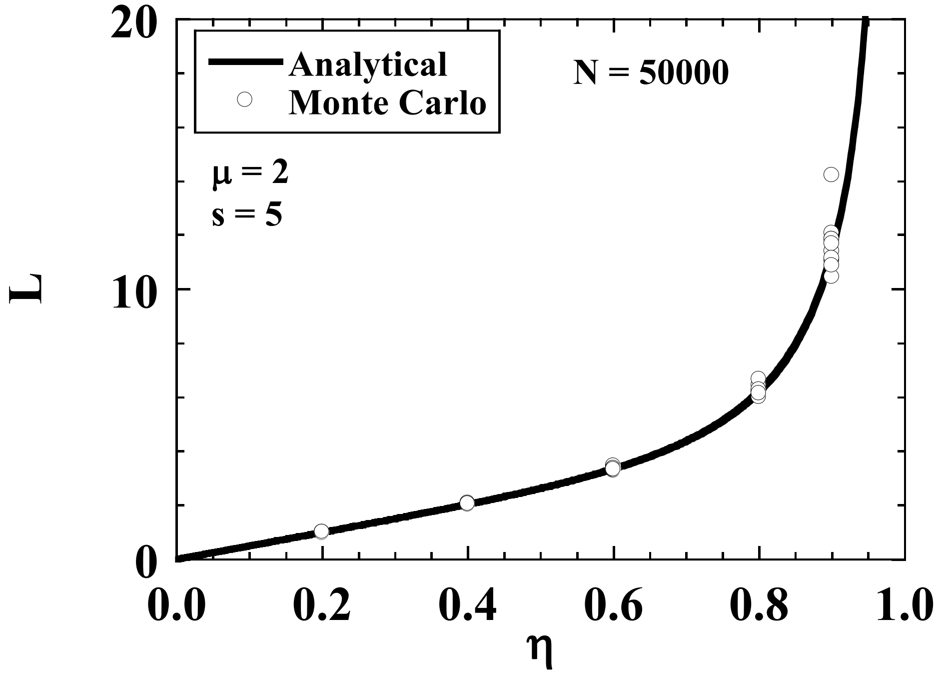
(a)



(b)



(c)



(d)

図 4　L の η 依存性。 $\mu = 2, s = 5$ を仮定している。 (a) $N = 1000$. (b) $N = 5000$. (c) $N = 10000$. (d) $N = 50000$

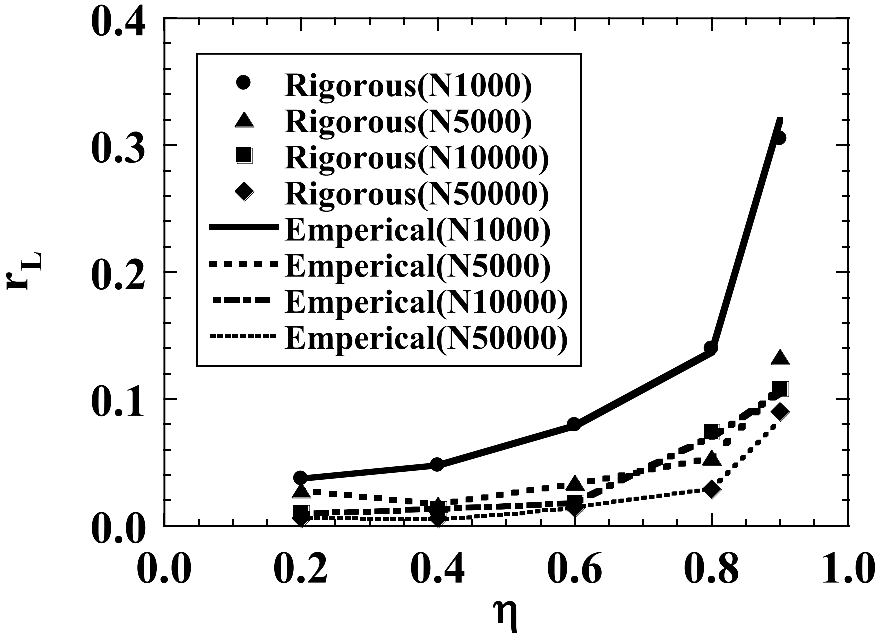


図 5　様々なNにおける r_L のη 依存性。$\mu=2, s=5$ を仮定している

Lの精度を評価する。解析モデルL_{anal}は正確であるとする。モンテカルロで利用する顧客の数をNとし、同じ条件でn 回計算を行う。その各結果をL_iとする。その場合の誤差を以下のように得意義する。

$$\Delta L^2 = \frac{1}{n}\left(L_i - L_{anal}\right)^2 \tag{9}$$

その誤差の比率r_L を更に以下のように定義する。

$$r_L = \frac{\Delta L}{L_{anal}} \tag{10}$$

その結果を図 5に示す。

ηが小さい場合はr_Lは小さい。しかし、η が大きくなるとr_Lは大きくなる。その大きくなる率はNが大きくなるほど、小さくなる。

$\eta = 0.9$において、エラーを10 %.以内に収めるためには、$N \geq 50000$が必要となる。

実際の計算においては、我々は厳密な値を知ることはできない。上の厳密解が得られる場合を想定すると、表 2に示すおよそ以下のN個が必要と思われる。

表 1　N の η 依存性

η	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
N	1000	5000	5000	10000	50000

17.5. モンテカルロシミュレーションと経験則モデルの比較

サービス時間が指数分布に従わない場合、我々は多数のサービスメンバーにおける解析モデルを導出することはできない。そのため、解析モデルが得られる、1 人のサービスメンバーの場合の係数を援用して、それにたいする経験則を提案している。ここでは、そのモデルとモンテカルロシミュレーションの比較を行う

その経験則は以下のようなものである。

$$L_q(M/G/s) = L_q(M/M/s)\frac{1+(\mu\sigma)^2}{2} \tag{11}$$

$$L(M/G/s) = \rho + L_q(M/G/s) \tag{12}$$

$$W_q(M/G/s) = \frac{L_q(M/G/s)}{\lambda} \tag{13}$$

$$W(M/G/s) = \frac{1}{\mu} + W_q(M/G/s) \tag{14}$$

図 6 に示すように、この経験則はモンテカルロシミュレーションの結果とよく合っている。したがって、我々は、この経験則を用いることができる。

我々は、この経験則からさらにミクロな情報を得たい。

L と L_q は状態確率から導かれるものである。したがって、我々は以下のような関係がこの場合も成り立つと仮定する。

$$P_s(M/G/s) = \frac{(1-\eta)^2}{\eta} L_q(M/G/s) \tag{15}$$

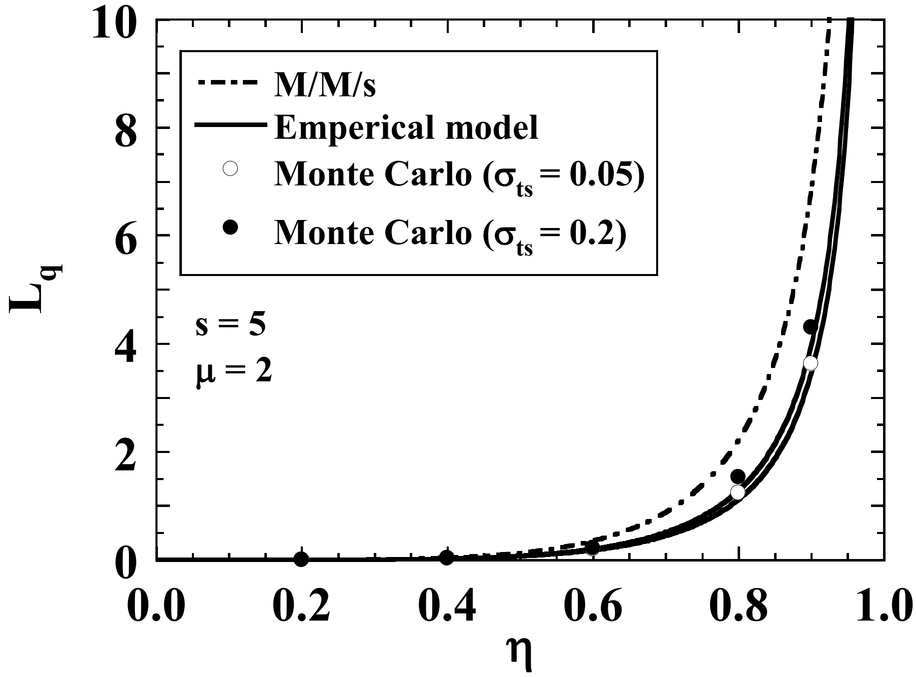
ここで、 $P_s(M/G/s)$ は系の人数がサービスメンバーの数になる確率である。

すると、系の待ち人数が L_{q0} 未満になる確率は以下となる。

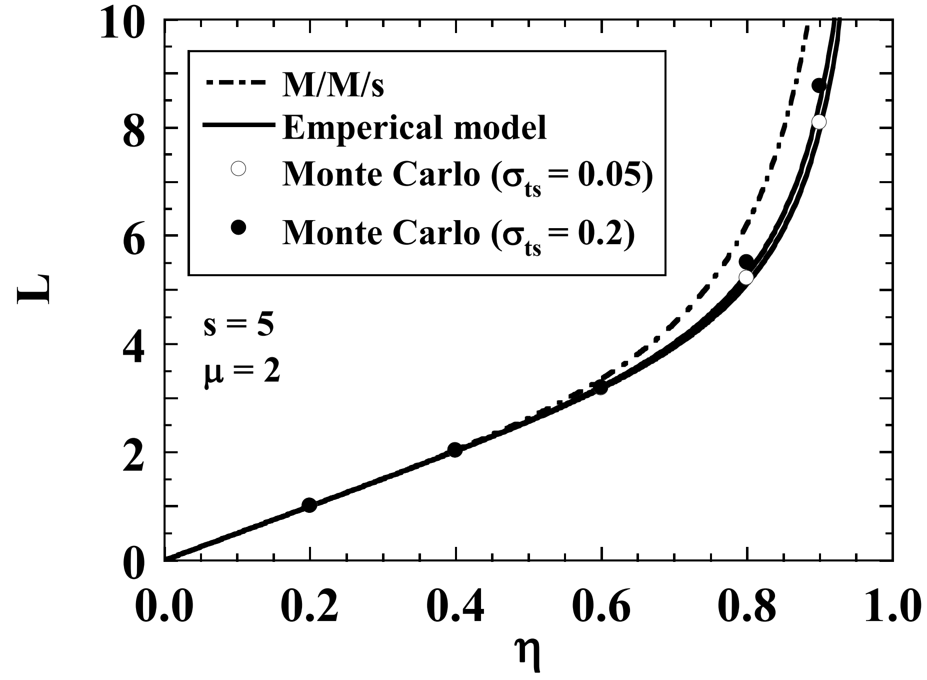
$$P(L_{q0}) = 1 - \frac{1}{1-\eta}\eta^{L_{q0}} P_s(M/G/s) \tag{16}$$

同じように、系における顧客の待ち時間が t 未満になる確率は以下で与えられる。

$$P(t)=1-\frac{P_s(M/G/s)}{1-\eta}e^{-(1-\eta)s\mu t} \tag{17}$$

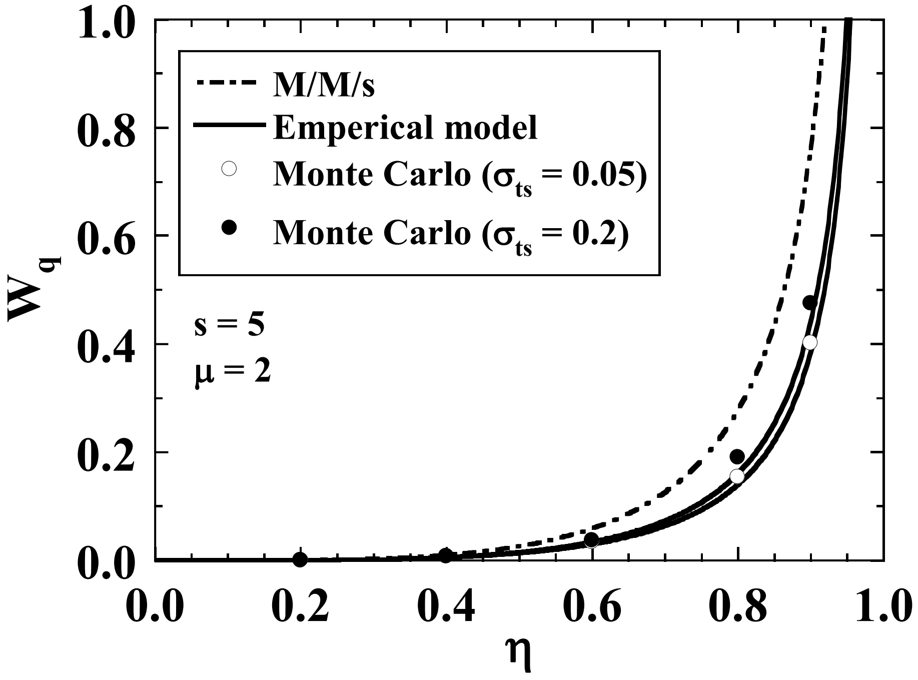


(a)



10
8
6
4
2
0
L
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
η
M/M/s
Emperical model
Monte Carlo (σts = 0.05)
Monte Carlo (σts = 0.2)
s = 5
μ = 2

(b)



M/M/s
Emperical model
Monte Carlo (σ_{ts} = 0.05)
Monte Carlo (σ_{ts} = 0.2)
s = 5
μ = 2
W_q
η
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

(c)

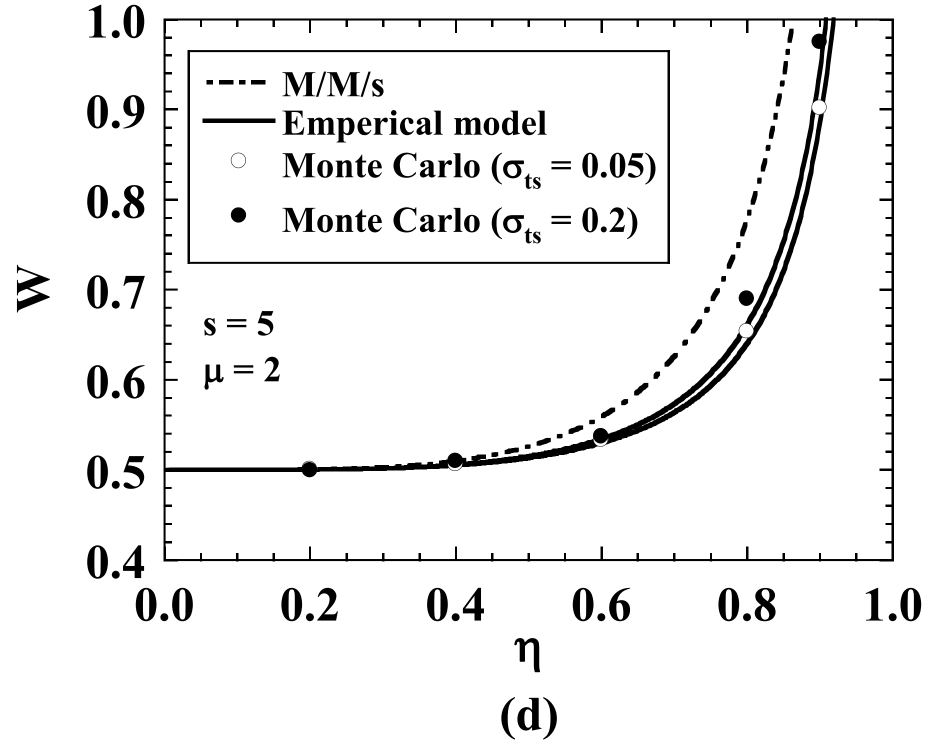


図 6　モンテカルロシミュレーションと経験的なモデルの比較。s =5. を仮定している。(a) L_q . (b) L . (c) W_q . (d) W

17.6. まとめ

この章のまとめを行う。

サービス時間を市湯レーション時間ステップを基準にして以下のまるめを行うとことを提案した。

$$t_\mu^{\ *} = \Delta t \times Int\left[\frac{t_\mu}{\Delta t} + 0.5\right]$$

これにより、オンテカルロシミュレーションは厳密解の両側に分散することになる。また、精度が 10%以下におさまるモンテカルロシミュレーションにおける計算する人数のおおまかな値を示した。

さらに、モンテカルロシミュレーション結果と比較することで、経験則であるモデル式の有用性を示した。これにより、複数のサービスメンバーにおける、任意のサービス時間に対する待ち行列の提供する情報を同じように提供することが期待される。その経験則は以下である。

$$L_q\left(M/G/s\right)=L_q\left(M/M/s\right)\frac{1+\left(\mu\sigma\right)^2}{2}$$

$$L\left(M/G/s\right)=\rho+L_q\left(M/G/s\right)$$

$$W_q\left(M/G/s\right)=\frac{L_q\left(M/G/s\right)}{\lambda}$$

$$W\left(M/G/s\right)=\frac{1}{\mu}+W_q\left(M/G/s\right)$$

$$P\left(L_{q0}\right)=1-\frac{1}{1-\eta}\eta^{L_{q0}}P_s\left(M/G/s\right)$$

$$P\left(t\right)=1-\frac{P_s\left(M/G/s\right)}{1-\eta}e^{-(1-\eta)s\mu t}$$

ただし、

$$P_s\left(M/G/s\right)=\frac{\left(1-\eta\right)^2}{\eta}L_q\left(M/G/s\right)$$

である。