(1)

پارسا اسکندرنژاد
۹۵۳۱۰۰۳

e^n , $\sqrt{2}^{\log n}$ $\Rightarrow$

$$\sqrt{2}^{\log n} = (2^{\log n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2\sqrt{n}e^n} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2}^{\log n} < e^n}$$

$(\log n)^{\log n}$, $\sqrt{2}^{\log n}$ $\Rightarrow$

$$\exists m \geq 0\ \forall x \geq m \Rightarrow \log x \geq \sqrt{2} \Rightarrow m = 2^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\log n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{\log n}\right)^{\log n} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2}^{\log n} < (\log n)^{\log n}}$$

$2^{\sqrt{2\log n}}$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2\log n}} < 2^{2\log n} = n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \overset{2\times\,\text{Hop}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0 \Rightarrow \boxed{2^{\sqrt{2\log n}} < e^n}$$

$2^{\sqrt{2\log n}}$, $\sqrt{2}^{\log n}$ $\Rightarrow$

$\sqrt{n}$ در قسمت اول دیدیم.

$$\sqrt{n} = 2^{\log\sqrt{n}} \Rightarrow 2^{\sqrt{2\log n}}\ \boxed{?}\ 2^{\log\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{2\log n}\ \boxed{?}\ \log\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{\log n}\ \boxed{?}\ \log n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)'}{2\sqrt{2}(\log n)' \times \frac{1}{2\sqrt{\log n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{2}}$$

ادامه صفحه بعد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{۲}} = +\infty \Rightarrow \boxed{۲^{\sqrt{۲\log n}} < \sqrt{۲}^{\log n}}$$

$(\log^n)^{\log n}$, e^n $\Rightarrow$

$$(\log^n)^{\log^n} = ۲^{\log\log(n)\log n}$$

$$\log\log(n)\log n < (\log n)^۲ < n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^۲}{n} \overset{HOP}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{۲\log n \frac{1}{n\ln n}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\log^n)^{\log^n} < e^n}$$

$n!$, $\log n!$ $\Rightarrow$ واضح است

$$\boxed{\log n! < n!}$$

$\sqrt{۲}\log n$, $\log n!$, $\log n^{\log n}$

$$(\log n)! = (\log n)(\log n - 1)\cdots 1 \leq \underbrace{\log n \times \log\frac{n}{۲} \times \log\frac{n}{۴} \times \cdots \times 1}_{\log n}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\log n)! < (\log n)^{\log n}}$$

$$\boxed{\sqrt{۲}\log n < \log n!}$$

$$\log n \log n-1 = \log n \log\frac{n}{۲} < \log n! \Rightarrow \sqrt{۲}\log n < \log\frac{n}{۲}\log n$$

$n!$ و e^n $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{e}{1}\times\frac{e}{2}}_{\text{بزرگتر از ۱}}\times\underbrace{\cdots\times\frac{e}{n}}_{\text{کوچکتر از ۱}}\right)=0 \Rightarrow \boxed{e^n < n!}$$

روش دوم: بسط تیلور

روش سوم: استقرا

$\log^* n$

$\rightarrow$ $\log^* 16 = 3$

$\log^* 2^{16} = 4$ $\quad \log^* 2^{2^{16}} = 5$ $\quad \cdots$

از آن جایی که تقریباً $\log^*$ یک تابع ثابت است و از همه توابع موجود رشد کمتری دارد.

پس داریم:

$$\log^* n < 2^{\sqrt{2\log n}} < \sqrt{2}\log n < \log n! < (\log n)^{\log n} < e^n < n!$$

(۲)

ⓐ $T(n) = \sqrt{n}\,T(\sqrt{n}) + n$

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + 1$$

$$g(n) = g(\sqrt{n}) + 1$$

$$\xrightarrow{n=2^{2^K}} g(2^{2^K}) = g(2^{2^{K-1}}) + 1$$

$$\Longrightarrow h(K) = h(K-1) + 1$$

معادله مشخصه

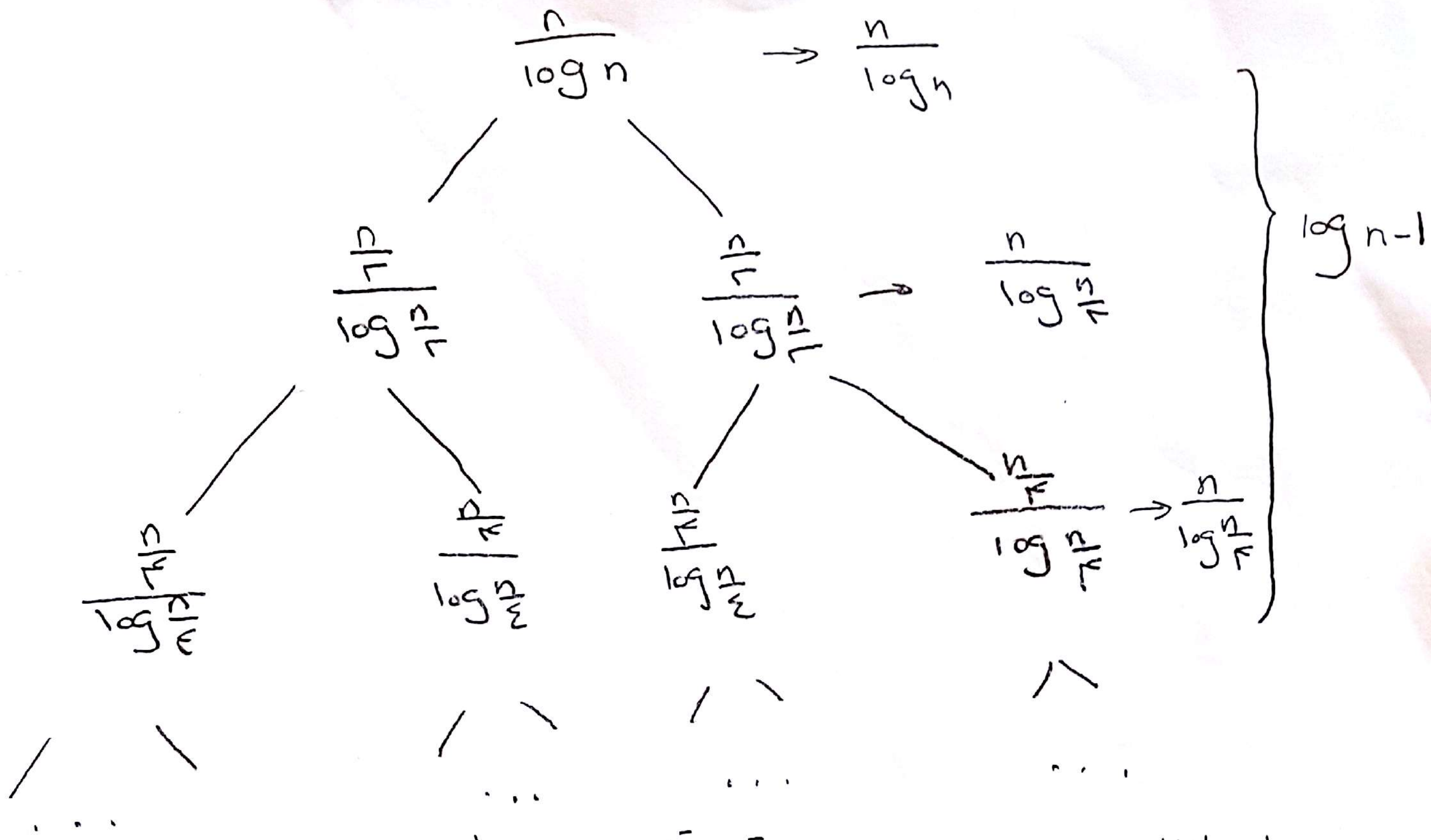
$\Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow$ جواب : $C_1 + C_2K = \circ$

$C_1 + C_2\log\log n = \circ$

$\Downarrow$

$T(n) = \Theta(\log\log n)$

ب



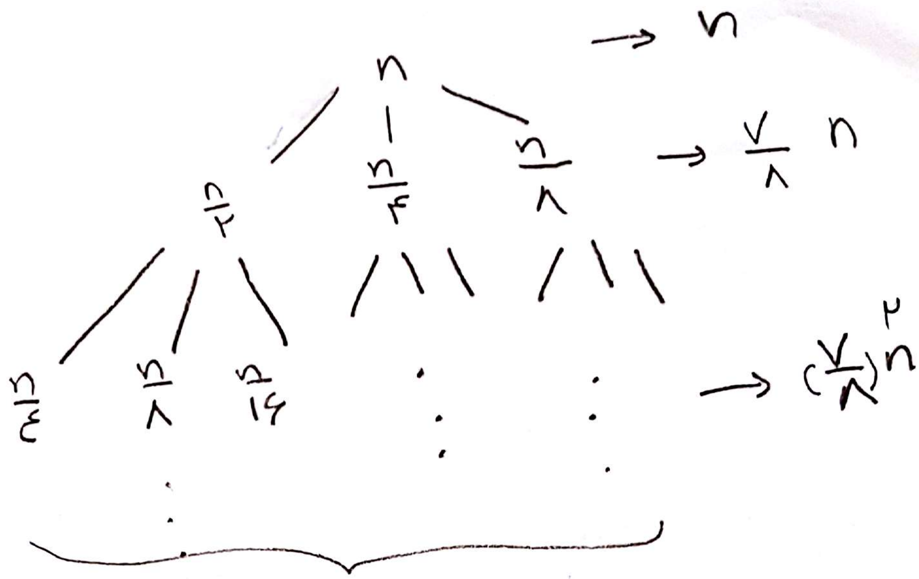
$$T(n) = n + n\sum_{i=0}^{\log n -1} \frac{1}{\log \frac{n}{2^i}} \xrightarrow[n=2^k]{\text{تغییر متغیر}} T(2^k) = 2^k\left(1+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\log 2^{k-i}}\right)$$

$$T(2^k) = 2^k\left(1+\sum_{0}^{k-1}\frac{1}{k-i}\right) = 2^k\left(1+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)}_{\text{سری هارمونیک} = \ln k}\right)$$

$$T(2^k) = 2^k + 2^k \ln k \overset{2^k=n}{=\!=} n + n\ln\ln n$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n\log\log n)$$

ⓒ $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n$



$T(n) = n + \frac{7}{8}n + (\frac{7}{8})^2 n + \cdots + gT(1)$

$\Rightarrow \underbrace{n + \frac{7}{8}n + (\frac{7}{8})^2 n + \cdots}_{n\left(\frac{1}{1-\frac{7}{8}}\right) = 8n} < T(n)$

$n\left(\frac{1}{1-\frac{7}{8}}\right) = 8n \implies T(n) = \omega(n)$

(d) $T(n) = ۴T(\sqrt{\frac{n}{۳}}) + \log^۲ n$

$n = ۳^K \Longrightarrow T(۳^K) = ۴T(۳^{\frac{K}{۲}-۱}) + \log^۲ ۳^K$

$g(K) = ۴g(\frac{K}{۲}-۱) + K^۲ \log^۲ ۳$

$\simeq g(K) = ۴g(\frac{K}{۲}) + K^۲ \log^۲ ۳$

$K = ۲^Z \Longrightarrow g(۲^Z) = ۴(۲^{Z-۱}) + ۲^{۲Z} \log^۲ ۳$

$\Rightarrow h(Z) = ۴h(Z-۱) + ۴^Z \log^۲ ۳$

معادله مشخصه $h(Z) = ۴^Z C_۱ + Z۴^Z C_۳ \Longrightarrow T(n) = \Theta(Z۴^Z)$

+ جواب ناممکن

$= \Theta(K^۲ \log K)$

$= \Theta(\log^۲ n \log\log n)$

جواب ناممکن : حدس: $C_۱ ۴^Z + C_۲ \to C_۱ ۴^Z + C_۲ \stackrel{?}{=} C_۱ ۴^Z + ۴C_۲ + ۴^Z \log^۲ ۳$

$C_۲ = ۰ \quad C_۱ \checkmark$

جواب همگن : مشخصه معادله $x = ۴ \Rightarrow C_۳ Z ۴^Z$

Scanned by CamScanner

(e) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n!$

$$\xrightarrow[= \Theta(n \log n)]{\log n!} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$$

$$\xrightarrow{n = 2^K} T(2^K) = 2T(2^{K-1}) + K 2^K$$

$$\Longrightarrow g(K) = 2g(K-1) + K 2^K$$

$$\Longrightarrow g(K) = (c_1 + c_2 K + c_3 K^2) 2^K$$

$$(c_1 + c_2 K + c_3 K^2) 2^K \xrightarrow[\log n = k]{} (c_1 + c_2 \log n + c_3 \log^2 n) n$$

$$\Longrightarrow T(n) = \Theta(n \log^2 n)$$

الف) ۳

```
Algorithm H(int n, double p) {
    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=i+1; j<=n; j++)
            if( random() < fact(logn)* hypercube-distance(i, j) * p)
                cout << "DS";
}
```

```
hypercube-distance(int i, int j) {
    int h = ۰;
    while(i * j != ۰ && i != ۱ && j != ۱) {
        if(i %۲ == j%۲)
            h++;
        i = i /۲;
        j = j /۲;
    }
    return h;
}
```

چون حلقه تا جایی پیش می رود که یکی از i و j به 1 برسد و هر بار نیز هر دو تقسیم بر ۲ می شوند لذا مرتبه تابع (hypercube...) $\min(\log i, \log j)$ است.

چون $j = i+1$ لذا $\min(\log i, \log j)$
$= \log i$

حلقه‌ها $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \log i = \sum_{i=1}^{n} (n-i)\log i = \sum_{i=1}^{n} n\log i - \sum_{i=1}^{n} i\log i$

$= n\underbrace{(\log 1 + \log ۲ + \dots + \log n)}_{\log n! \Rightarrow \theta = n\log n} - \sum i\log i \Rightarrow T(n) = O(n^۲ \log n)$

(۳) ب

```
x=0
for(i=۱;i<=n;i++){
    for(j=۱;j<=n;j++)
        x++;
    n--;
}
```

i	حلقه دوم
۱	n
۲	$n-۱$
۳	$n-۲$
⋮	⋮
$\frac{n}{۲}$	$\frac{n}{۲}+۱$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{\frac{n}{۲}}(n+۱-i)$$

$$= n\times\frac{n}{۲}+\frac{n}{۲}+\frac{(۱+\frac{n}{۲})\frac{n}{۲}}{۲} = \frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۲}+\frac{n}{۴}+\frac{n^۲}{۸}$$

$$\Rightarrow T(n)=\Theta(n^۲)$$

Scanned by CamScanner

(۴)

تقریب استرلینگ برای فاکتوریل ← $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\Rightarrow (\log n)! = \sqrt{2\pi \log n}\left(\frac{\log n}{e}\right)^{\log n} \quad (A)$$

و $\log(n!) = O(n\log n)$ (B)

(البته $\Theta(n\log n)$ ولی این جا فقط حد بالا را لازم داریم.)

از (A) و (B) لگاریتم می‌گیریم ←

$$(B)\ \log(n\log n) = \underbrace{\log n}_{f} + \log\log n$$

$$(A)\ \log\left(\sqrt{2\pi\log n}\left(\frac{\log n}{e}\right)^{\log n}\right) = \log(\sqrt{2\pi\log n}) + \underbrace{\log n \log\frac{\log n}{e}}_{g}$$

بزرگترین ترم هرکدام را مقایسه می‌کنیم (g, f) ←

$f \to \log n$

$g \to \log n \log\log\frac{n}{e}$

$$\Rightarrow \log n < \log n \log\log\frac{n}{e} \Rightarrow f < g$$

$$\rightarrow (B) < (A) \Rightarrow \log(n!) < (\log n)!$$

۵

الف)

مثال نقض $\Rightarrow f(n) = \theta(\frac{1}{n^2}) = O(n^2)$

$g(n) = \theta(\frac{1}{n^2}) = O(n)$

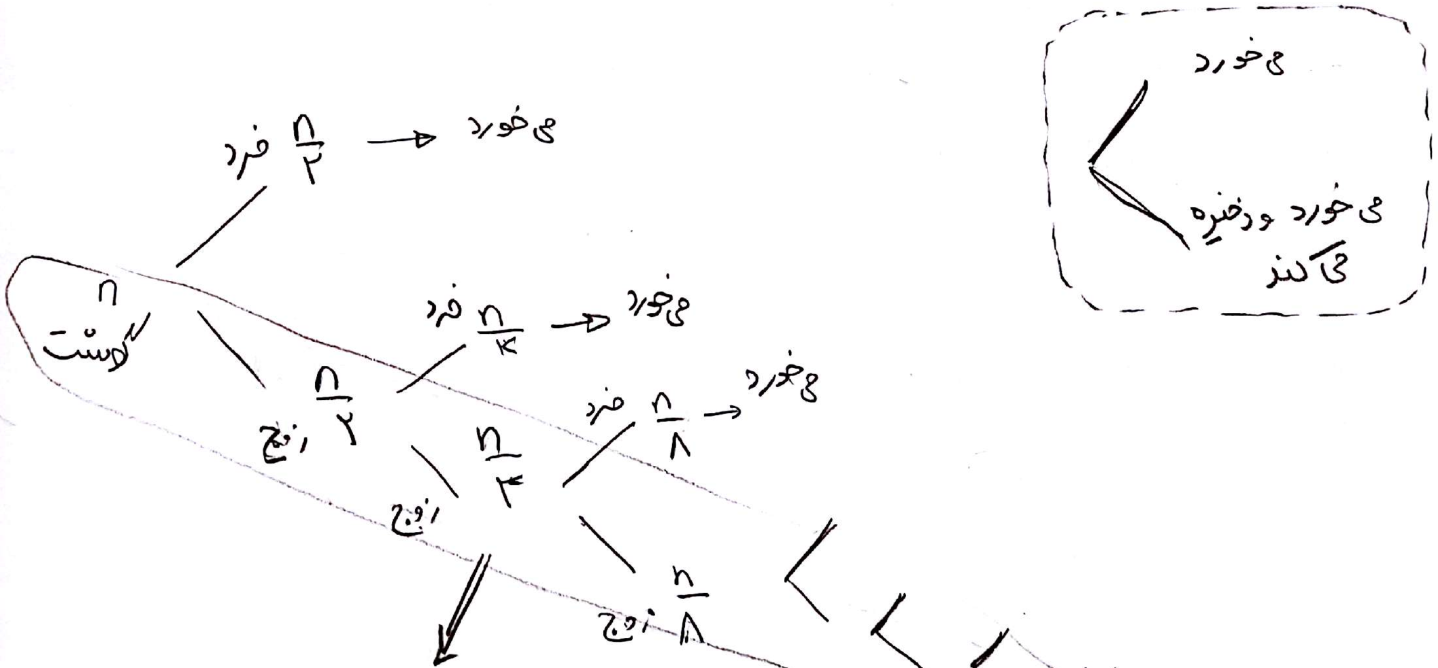
$\Rightarrow f(g(n)) = \theta(n^4) \neq O(n^3)$

ب)

مثال نقض $\Rightarrow f(n) = \frac{\log n}{2} = \Omega \log n$

$2^{f(n)} = 2^{\frac{\log n}{2}} = (2^{\log n})^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \neq \Omega(n)$

۶



$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots = \frac{n}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2n}}$

$\Rightarrow T(n) = \theta(n)$

(در واقع جمع بالا را در نظر گرفتیم چرا که تا بی‌نهایت نمی‌رود
بلکه به ۱ رسیده و می‌میرد.)

۷-

```c
int test(int n){
    int i,j, count=0;
    for(i=0; i<n; i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            count++;
    return count;
}
```

در ورودی n حلقه اول یک بار
نسبت به ورودی قبلی یعنی n-1
بیشتر اجرای شود (i^*) همچنین
در حلقه دوم n بار بیشتر i++
اجرا می شود و چون ۲ تا از آن
داریم می شود n^*+n و تا ورودی
های قبل نیز $T^*(n-1)$ اجرا می شود.

لذا داریم:

$$T(n) = T(n-1) + 2n + 1$$

راه دوم: تست عدد

$$T(1) = 3$$
$$T(2) = 8$$
$\Rightarrow$ فقط گوشتا