

# 1 Einleitung

In diesem Vortrag geht es vor allem um Syzygien und Freie Auflösungen, was der Title nahe legt. Was der Title aber nicht erfüllen kann, ist es uns einen Grund zu geben nach diesen Dingen zu suchen. Fangen wir doch damit an, wie eine Syzygie definiert ist um zu sehen, was sie ist. Auf dem Weg sammeln wir noch ein paar Grundlagen mit ein:

**Definition 1** ( ). Ein **Komplex von  $R$ -Modulen** ist eine Sequenz von Modulen  $F_i$  und Abbildungen  $F_i \rightarrow F_{i-1}$ , sodass für alle  $i$  die Komposition  $F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1}$  Null wird. Die **Homologie** dieses Komplexes in  $F_i$  ist der Modul

$$\ker(F_i \rightarrow F_{i-1}) / \operatorname{im}(F_{i+1} \rightarrow F_i).$$

Eine **freie Auflösung** eines  $R$ -Moduls  $M$  ist ein Komplex

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

von freien  $R$ -Modulen, sodass  $\operatorname{coker} \phi_1 = M$  und  $\mathcal{F}$  exakt ist. (Man schreibt auch gelegentlich ein  $\rightarrow 0$  an das Ende des Komplexes und fordert Exaktheit ausser in  $F_0$ . Diese Schreibweise wird häufig missbraucht, um zu sagen, dass die exakte Sequenz

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine Auflösung von  $M$  ist. Das Bild von  $\phi_i$  nennen wir die  $i$ -te *Syzygie* von  $M$ .

Ein Auflösung heisst freie, graduierte Auflösung, wenn  $R$  ein graduierter Ring, die  $F_i$  graduierte freie Module und die Abbildungen homogen vom Grad 0 sind. Wenn es ein  $n < \infty$  gibt, sodass  $F_{n+1} = 0$ , aber  $F_i \neq 0 \forall 0 \leq i \leq n$ , nennen wir  $\mathcal{F}$  eine endliche Auflösung von Länge  $n$ .

**Nur für Expose** Hier eine kurze Auffrischung der Begrifflichkeiten:

**Definition 2** (Freier Modul [1]0.3). Ein freier  $R$ -Modul ist ein Moduln der isomorph zu einer direkten Summe von  $R$  Kopien ist.

**Beispiel 1.** Ein sehr einfaches Beispiel ist

$$M := \mathbb{R} \cdot x \oplus \mathbb{R} \cdot y \oplus \mathbb{R} \cdot z = \mathbb{R}^3$$

**Definition 3** (Graduierter Ring [1]1.5). Ein **graduierter Ring** ist ein Ring  $R$  zusammen mit einer direkten Summenzerlegung

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \text{ als abelsche Gruppen,}$$

sodass

$$R_i R_j \subset R_{i+j} \text{ für } i, j \geq 0.$$

**Beispiel 2.** Der einfachste graduierte Ring ist der Ring Polynome  $S = k[x_1, \dots, x_r]$  mit der Graduierung

$$S = S_0 \oplus S_1 \oplus \dots,$$

wobei  $S_d$  der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad  $d$  ist.

Also das hat jetzt nicht so viel zum Verständnis beigetragen, wie ich dachte; wobei, unsere Syzygie besteht also aus Punkten aus einer direkten Summe, sozusagen einem  $n$ -Tupel  $a_1, \dots, a_n$ . Desweiteren folgt aufgrund der Exaktheit und der Tatsache, dass unsere Abbildungen von Grad 0 sind, d.h. sie sind jeweils der Form

$$f(x) = x_1 f_1 + \dots + x_k f_k$$

, dass alle Punkte der Syzygie die folgende Gleichung erfüllen:

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

Also sind unsere Syzygien Lösungen von linearen Gleichungen.

Syzygien werden in Computeralgebra System verwendet, um Multivariate Gleichungen zu lösen

## 2 Das Hilbertsche Syzygientheorem

**Theorem 3** (Das Hilbertsche Syzygien Theorem [1]1.13). *Wenn  $R = k[x_1, \dots, x_r]$  gilt, dann hat jeder endlich erzeugte graduierte  $R$ -Modul eine endlich erzeugte freie Auflösung von Länge  $\leq r$  aus endlich erzeugten freien Moduln.*

Um das jetzt aber zu beweisen müssen wir etwas ausholen, doch wollen wir mit einem Beispiel beginnen.

**Beispiel 4** (Exercise 1.22). Sei  $R = k[x]$  Dann haben alle endlich erzeugten  $R$ -Module eine endliche freie Auflösung.

*Beweis.* **REPLACE ME** □

**Theorem 5** (Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen [2]).

**Beispiel 6.** Sei  $R = k[x]$  ( $x^n$ ), dann sehen die freien Auflösungen von  $R/(x^m)$  für alle  $m \leq n$  als **MISSING** geschrieben werden können.

*Beweis.* **REPLACE ME** □

## 3 Gröbner Basen

**Definition 4** (Initialer Term [1]325). Wenn  $>$  eine Ordnung auf Monomen ist, dann definieren wir für alle  $f \in F$  den **initialen Term von  $f$** , geschrieben als  $\text{in}_>(f)$ , als den grössten Term von  $f$  bezüglich der Ordnung  $>$ . Wenn  $M$  ein Untermodul von  $F$  ist, dann bezeichnet  $\text{in}_>(M)$  den Untermodul, der von  $\{\text{in}_>(f) \mid f \in F\}$  erzeugt wird. Wir werden oft  $\text{in}_>$  mit  $\text{in}$  abkürzen, wenn die Ordnung klar ist.

**Beispiel 7.** Sei  $>_{lex}$  Die Ordnung in der gilt  $x > y$ , dann ist  $\text{in}_{>_{lex}}(x^2 + xy + y^2) = x^2$

**Definition 5** (Gröbnerbasis [1]328). Eine **Gröbnerbasis** bezüglich einer Ordnung  $>$  auf einem freien Modul mit Basis  $F$  ist eine Menge von Elementen  $g_1, \dots, g_t$  in  $F$ , sodass wenn  $M$  ein Untermodul von  $F$  erzeugt von  $g_1, \dots, g_t$  ist, gilt, dass die  $\text{in}_>(g_1), \dots, \text{in}_>(g_t)$   $\text{in}_>(M)$  erzeugen. Wir sagen dann, dass  $g_1, \dots, g_t$  eine **Gröbnerbasis von  $M$**  sind.

**Proposition-Definition 8** ([1]15.6). Sei  $F$  ein freier  $S$ -Modul mit einer Basis und Monomordnung  $>$ . Wenn  $f, g_1, \dots, g_t \in F$  dann gibt es einen Ausdruck

$$f = \sum f_i g_i + f' \text{ mit } f' \in F, f_i \in S_i,$$

bei dem kein  $f'$  in  $(\in (g_1), \dots, \in (g_t))$  vorkommt und

$$\text{in}(f) \geq \text{in}(f_i g_i)$$

für alle  $i$ . Jedes solches  $f'$  heisst **Rest** von  $f$  in Bezug auf  $g_1, \dots, g_t$  und ein Ausdruck  $f = \sum f_i g_i + f'$ , der die Bedingungen von oben erfüllt, heisst **Standard Ausdruck** für  $f$  ausgedrückt in  $g_i$ .

**Algorithmus 1** (Divisionsalgorithmus [1]15.7). Sei  $F$  ein freier  $S$ -Modul mit Basis und fester Monomordnung. Wenn  $f, g_1, \dots, g_t \in F$ , dann können wir einen Standard Ausdruck

$$f = \sum m_u g_{s_u} + f'$$

von  $f$  bezüglich  $g_1, \dots, g_t$  finden, indem wir die Indices  $s_u$  und die Terme  $m_u$  induktiv definieren. Wenn wir bereits  $s_1, \dots, s_p$  und  $m_1, \dots, m_p$ , gewählt haben, dann wählen wir, falls

$$f'_p := f - \sum_{u=1}^p m_u g_{s_u} \neq 0$$

und  $m$  der maximale Term von  $f'_p$ , der durch eines der  $\text{in}(g_i)$  teilbar ist,

$$s_{p+1} = i, m_{p+1} = m / \text{in}(g_i)$$

. Dieser Vorgang bricht entweder ab, wenn  $f'_p = 0$  oder wenn keines der  $\text{in}(g_i)$  ein Monom aus  $f'_p$  teilt; der Rest  $f'$  ist dann  $f'_p$ .

**Notation 1** ([1]331). Sei  $F$  ein freier Modul über  $S$  mit Basis und Monomordnung  $>$ . Seien  $0 \neq g_1, \dots, g_t \in F$  und  $\oplus S\epsilon_i$  ein freier Modul mit Basis  $\{\epsilon_i\}$  die den  $\{g_i\}$  aus  $F$  über die folgenden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \phi : \oplus S\epsilon_i & & F \\ \epsilon_i & & \mapsto g_i \end{array}$$

entsprechen.

Für jedes Indexpaar  $i, j$ , sodass  $\text{in}(g_i)$  und  $\text{in}(g_j)$  dasselbe Basiselement von  $F$  enthalten, definieren wir

$$m_{ij} = \text{in}(g_i) / \text{GCD}(\text{in}(g_i), \text{in}(g_j)) \in S$$

und setzen

$$\sigma_{ij} = m_{ji}\epsilon_i - m_{ij}\epsilon_j$$

. Diese  $\sigma_{ij}$  Erzeugen die Syzygie auf den  $\text{in}(g_i)$  nach 11. Desweiteren wählen wir für jedes der Indexpaare einen Standardausdruck

$$m_{ji}g_i - m_{ij}g_j = \sum f_u^{(ij)} g_u + h_{ij}$$

für  $m_{ji}g_i - m_{ij}g_j$  bezüglich der  $g_1, \dots, g_t$ . Man kann sehen, dass  $\text{in}(f_u^{(ij)} g_u) < \text{in}(m_{ji}g_i)$  Zur Vereinfachung setzen wir  $h_{ij} = 0$ , falls  $\text{in}(g_i)$  und  $\text{in}(g_j)$  verschiedene Basiselemente von  $F$  enthalten.

**Theorem 9** (Buchberger Kriterium [1]15.8). *Mit der Notation aus 1 folgt, dass die  $g_1, \dots, g_t$  eine Gröbnerbasis bilden, genau dann wenn  $h_{ij}$  für alle  $i$  und  $j$ .*

*Beweis.* **REPLACE ME** □

**Algorithmus 2** (Buchberger Algorithmus [1]333). Unter den Voraussetzungen aus 9 sei  $M$ , das ein Untermodul von  $F$  und  $g_1, \dots, g_t$  seien Erzeuger von  $M$ . Berechne die Reste  $h_{ij}$ . Wenn alle  $h_{ij} = 0$ , dann bilden die  $g_i$  eine Gröbnerbasis von  $M$ . Wenn einige der  $h_{ij} \neq 0$  dann ersetze  $g_1, \dots, g_t$  mit  $g_1, \dots, g_t, h_{ij}$  und wiederholen dann den Prozess. Da der von  $g_1, \dots, g_t, h_{ij}$  erzeugte Untermodul echt grösser als der von  $g_1, \dots, g_t$  erzeugte Untermodul ist, und damit terminiert der Prozess nach endlich vielen Schritten. Die obere Schranke

$$b = ((r+1)(d+1) + 1)^{2^{(s+1)}(r+1)}$$

hält für

$r$  = number of variables

$d$  = maximum degree of the polynomials  $g_i$ , and

$s$  = the degree of the Hilbert polynomial

( this is one less than the dimension; it is between 0 and  $r - 1$  ).

**Definition 6** ([1]334). Wir definieren

$$\tau_{ij} := m_{ji}\epsilon_i - m_{ij}\epsilon_j - \sum_u f_u^{(ij)}\epsilon_u$$

, für  $i < j$ , sodass in  $(g_i)$  und in  $(g_j)$  dasselbe Basiselement von  $F$  enthalten.

**Theorem 10** (Schreyer [1][15.10]). *Mit der Notation von 6, können wir annehmen, dass  $g_1, \dots, g_t$  eine Gröbnerbasis sind. Sei jetzt  $>$  eine Monomordnung auf  $\oplus_{j=1}^t S\epsilon_j$ , für die gilt  $m_{\epsilon_u} > n_{\epsilon_v} \iff$*

$$\text{in}(mg_u) > \text{in}(ng_v) \text{ bezüglich der Ordnung auf } F$$

oder

$$\text{in}(mg_u) = \text{in}(ng_v) \text{ (bis auf Vielfachheit) but } u < v.$$

. Die  $\tau_{ij}$  erzeugen die Syzygien auf den  $g_i$ . Insbesondere sind die  $\tau_{ij}$  eine Gröbnerbasis der Syzygien bezüglich der Ordnung  $>$  und  $\text{in}(\tau_{ij}) = m_{ji}\epsilon_i$ .

*Beweis.* Wir beginnen damit zu zeigen, dass  $\text{in}(\tau_{ij}) = m_{ji}\epsilon_i$ . Es gilt

$$m_{ji} \text{ in}(g_i) = m_{ij} \text{ in}(g_j),$$

und diese Terme sind nach Annahme grösser als alle, die in den  $f_u^{(ij)}g_u$  vorkommen. Deshalb ist  $\in(\tau_{ij})$  entweder (a)  $m_{ji}\epsilon_i$  oder (b)  $-m_{ij}\epsilon_j$  aufgrund des ersten Teils der Definition der Monomordnung  $>$ , und da  $i < j$  gilt  $m_{ji}\epsilon_i > m_{ij}\epsilon_j$  und somit sind wir im Fall (b). Jetzt ist noch zu zeigen, dass die  $\tau_{ij}$  eine Gröbnerbasis bilden.

Let  $\tau = \sum f_v\epsilon_v$  be any syzygy. We must show that  $\in(\tau)$  is divisible by one of the  $\in(\tau_{ij})$ ; that is,  $\in(\tau)$  is a multiple of some  $m_{ji}\epsilon_i$  with  $i < j$ . For each index  $v$ , set  $n_v\epsilon_v = \in(f_v\epsilon_v)$ . Since these terms cannot cancel with each other, we have  $\in(\sum f_v\epsilon_v) = n_i\epsilon_i$  for some  $i$ . Let  $\sigma = \sum' n_v\epsilon_v$  be the sum

over all indices  $v$  for which  $n_v \in (g_v) = n_i \in (g_i)$  up to a scalar; all indices  $v$  in this sum must be  $\geq i$  because we assume that  $n_i \epsilon_i$  is the initial term of  $\tau$ .

Thus,  $\sigma$  is a syzygy on the  $\in (g_v)$  with  $v \geq i$ . By 11, all such syzygies are generated by the  $\sigma_{uv}$  for  $u, v \geq i$ , and the ones in which  $\epsilon_i$  appears are the  $\sigma_{ij}$  for  $j > i$ . It follows that the coefficient  $n_i$  is in the ideal generated by the  $m_{ji}$  for  $j > i$ , and we are done.  $\square$

## 4 Syzygientricks

**Notation 2** ([1]322). Sei  $F$  ein freies Modul mit Basis und  $M$  Untermodul von  $F$  der von  $m_1, \dots, m_t$  erzeugt wird. Sei

$$\begin{aligned} \phi : \bigoplus_{j=1}^t S \epsilon_j &\rightarrow F \\ \phi(\epsilon_j) &= m_j \end{aligned}$$

die Abbildung eines freien Moduls, dessen Bild  $M$  ist. Für alle Indexpaare  $i, j$ , sodass  $m_i$  und  $m_j$  dasselbe Basiselement von  $F$ , definieren wir

$$m_{ij} := m_i / \text{GCD}(m_i, m_j)$$

, wobei wir die  $\sigma_{ij}$  wie folgt als Elemente von  $\ker \phi$  definieren:

$$\sigma_{ij} := m_{ji} \epsilon_i - m_{ij} \epsilon_j.$$

**Lemma 11** ([1]15.1). Mit der Notation 2 gilt, dass  $\ker \phi$  von den  $\sigma_{ij}$  erzeugt wird.

*Beweis.*  $\ker \phi$  ist ein  $k$ -Vektorraum, also können wir annehmen, dass  $\ker \phi = \bigoplus_{n \in F} (\ker \phi)_n$ , wobei

$$(\ker \phi)_n = \left\{ \sum a_v n_v \epsilon_v \in \ker \phi \mid m_v \text{ divides } n, n_v = n m_v, \text{ und } a_v \in k \right\}$$

geschrieben wird. Angenommen

$$\sigma = \sum p_i \epsilon_i \in S^t, \quad p_i \in S$$

ist eine Syzygie, sodass  $\sum p_i m_i = 0$ . Für jedes Monom  $n$  aus  $F$ , das in einem der  $p_j m_j$  vorkommt, und für alle  $i$  sei  $p_{i,n}$  der Term von  $p_i$ , sodass  $p_{i,n} m_i$  ein Vielfaches von  $n$  ist. Es muss gelten  $\sum p_{i,n} m_i = 0$ , damit  $\sum p_{i,n} \epsilon_i$  aus  $(\ker \phi)_n$ . Nehmen wir an, dass  $\sigma = \sum a_v n_v \epsilon_v \in (\ker \phi)_n$ . wenn  $\sigma \neq 0$ . dann sind mindestens zwei der  $a_v n_v \neq 0$ , da  $\sigma$  eine Syzygie ist. OBdA die  $i$ -te und die  $j$ -te, wobei  $i < j$ . Es folgt  $n$  wird von  $m_i$  und  $m_j$  geteilt. und somit ist  $n_i$  teilbar durch

$$\text{LCM}(m_i, m_j) / m_i = m_j / \text{GCD}(m_i, m_j) = m_{ji}$$

Somit können wir ein Vielfaches von  $(n_i / m_{ji}) \sigma_{ij}$  von  $\sigma$  abziehen um unsere Relation zu reduzieren.  $\square$

**Lemma 12** ([1]323). Mit der Notation aus 11 erhalten wir, dass jedes Element von  $\ker \phi$  eindeutig als eine Summe von Elementen  $\tau = \sum n_{ij} \sigma_{ij} \in \ker \phi$  schreiben können, sodass  $n_v m_v$  zum gleichen Monom  $n \in F$  äquivalent sind. Solche Elemente können wir als

$$\tau = \sum n_{ij} \sigma_{ij}$$

, wobei über alle  $i < j$ , sodass  $\text{LCM}(m_i, m_j) \mid n$  und  $n_{ij}$  ein Vielfaches von  $n / \text{LCM}(m_i, m_j) = n_i / m_{ji}$  ist, summieren.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt aus 11. Da wir im letzten Schritt des obigen Beweises nur Terme entfernen, können wir die  $\sigma_{ij}$  von dort nehmen.  $\square$

Diese  $\sigma_{ij}$  nennt man oft **geteilte Koszul Relationen**.

## Literatur

- [1] David Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [2] Structure theorem for finitely generated modules over a principal ideal domain. [https://en.wikipedia.org/wiki/Structure\\_theorem\\_for\\_finitely\\_generated\\_modules\\_over\\_a\\_principal\\_ideal\\_domain](https://en.wikipedia.org/wiki/Structure_theorem_for_finitely_generated_modules_over_a_principal_ideal_domain).
- [3] Syzygy. <http://mathworld.wolfram.com/Syzygy.html>. Accessed: 2017-01-04.