1 Einleitung

In diesem Vortrag geht es vorallem um Syzygien und Freie Auflösungen, was der Title nahe legt. Was der Title aber nicht erfüllen kann, ist es uns einen Grund zu geben nach diesen Dingen zu suchen. Fangen wir doch damit an, wie eine Syzygie definiert ist um zu sehen , was sie ist. Auf dem Weg sammeln wir noch ein paar Grundlagen mit ein:

Definition 1 (Eis1).] Ein **Komplex von R-Modulen ist eine Sequenz von Modulen F_i und Abbildungen $F_i \to F_{i-1}$, sodass für alle i die Komposition $F_{i+1} \to F_i \to F_{i-1}$ Null wird.**
Die Homologie dieses Komplexes in F_i ist der Modul

$$\ker\left(F_i \to F_{i-1}\right) \big/ \operatorname{im}\left(F_{i+1} \to F_i\right).$$

Eine freie Auflösung eines R-Moduls M ist ein Komplex

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_n \overset{\phi_n}{\to} \cdots \to F_1 \overset{\phi_1}{\to} F_0$$

von freien R-Modulen, sodass $\operatorname{coker}\phi_1 = M$ und $\mathcal{F}$ exakt ist. (Man schreibt auch gelegentlicht ein $\to 0$ an das Ende des Komplexes und fordert Exaktheit ausser in F_0. Diese schreibweise wird haeufig missbraucht, um zu sagen, dass die exakte Sequenz

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_n \overset{\phi_n}{\to} \cdots \to F_1 i \overset{\phi_1}{\to} F_0 \to M \to 0$$

eine Aufloesung von M ist. Das Bild von ϕ_i nennen wir die i-te Syzygie von M.
Ein Auflösung heisst freie, graduierte Auflösung, wenn R ein graduierter Ring, die F_i graduierte freie Module und die Abbildungen homogen vom Grad 0 sind. Wenn es ein $n < \inf$ gibt, sodass $F_{n+1} = 0$, aber $F_i \neq 0 \forall 0 \leq i \leq n$, nennen wir $\mathcal{F}$ eine endliche Auflösung von Länge n.

Nur für Expose Hier eine kurze Auffrischung der Begrifflichkeiten:

Definition 2 (Freier Modul [**?**]0.3). Ein freier R-Modul ist ein Modulm der isomorph zu einen direkten Summe von R Kopien ist.

Beispiel 1. Ein sehr einfaches Beispiel ist

$$M := \mathbb{R} \cdot x \oplus \mathbb{R} \cdot y \oplus \mathbb{R} \cdot z = \mathbb{R}^3$$

Definition 3 (Graduierter Ring [**?**]1.5). Ein **graduierter Ring ist ein Ring R zusammen mit einer direkten Summenzerlegung**

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \textbf{ als abelsche Gruppen,}$$

sodass

$$R_i R_j \subset R_{i+1} \mathbf{for} i, j \geq 0.$$

Beispiel 2. Der einfachste graduierte Ring ist der Ring Polynome $S = k\left[x_1, \dots, x_r\right]$ mit der Graduierung

$$S = S_0 \oplus S_1 \oplus \dots,$$

wobei S_d der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d ist.