

# 1 Einleitung

In diesem Vortrag geht es vor allem um Syzygien und Freie Auflösungen, was der Title nahe legt. Was der Title aber nicht erfüllen kann, ist es uns einen Grund zu geben nach diesen Dingen zu suchen. Fangen wir doch damit an, wie eine Syzygie definiert ist um zu sehen, was sie ist. Auf dem Weg sammeln wir noch ein paar Grundlagen mit ein:

**Definition 1** ( ). Ein **Komplex von  $R$ -Modulen** ist eine Sequenz von Modulen  $F_i$  und Abbildungen  $F_i \rightarrow F_{i-1}$ , sodass für alle  $i$  die Komposition  $F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1}$  Null wird. Die **Homologie** dieses Komplexes in  $F_i$  ist der Modul

$$\ker(F_i \rightarrow F_{i-1}) / \operatorname{im}(F_{i+1} \rightarrow F_i).$$

Eine **freie Auflösung** eines  $R$ -Moduls  $M$  ist ein Komplex

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

von freien  $R$ -Modulen, sodass  $\operatorname{coker} \phi_1 = M$  und  $\mathcal{F}$  exakt ist. (Man schreibt auch gelegentlich ein  $\rightarrow 0$  an das Ende des Komplexes und fordert Exaktheit ausser in  $F_0$ . Diese Schreibweise wird häufig missbraucht, um zu sagen, dass die exakte Sequenz

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine Auflösung von  $M$  ist. Das Bild von  $\phi_i$  nennen wir die  $i$ -te *Syzygie* von  $M$ .

Ein Auflösung heisst freie, graduierte Auflösung, wenn  $R$  ein graduierter Ring, die  $F_i$  graduierte freie Module und die Abbildungen homogen vom Grad 0 sind. Wenn es ein  $n < \infty$  gibt, sodass  $F_{n+1} = 0$ , aber  $F_i \neq 0 \forall 0 \leq i \leq n$ , nennen wir  $\mathcal{F}$  eine endliche Auflösung von Länge  $n$ .

**Nur für Expose** Hier eine kurze Auffrischung der Begrifflichkeiten:

**Definition 2** (Freier Modul [1]0.3). Ein freier  $R$ -Modul ist ein Moduln der isomorph zu einer direkten Summe von  $R$  Kopien ist.

**Beispiel 1.** Ein sehr einfaches Beispiel ist

$$M := \mathbb{R} \cdot x \oplus \mathbb{R} \cdot y \oplus \mathbb{R} \cdot z = \mathbb{R}^3$$

**Definition 3** (Graduierter Ring [1]1.5). Ein **graduierter Ring** ist ein Ring  $R$  zusammen mit einer direkten Summenzerlegung

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \text{ als abelsche Gruppen,}$$

sodass

$$R_i R_j \subset R_{i+j} \text{ für } i, j \geq 0.$$

**Beispiel 2.** Der einfachste graduierte Ring ist der Ring Polynome  $S = k[x_1, \dots, x_r]$  mit der Graduierung

$$S = S_0 \oplus S_1 \oplus \dots,$$

wobei  $S_d$  der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad  $d$  ist.

Also das hat jetzt nicht so viel zum Verständnis beigetragen, wie ich dachte; wobei, unsere Syzygie besteht also aus Punkten aus einer direkten Summe, sozusagen einem  $n$ -Tupel  $a_1, \dots, a_n$ . Desweiteren folgt aufgrund der Exaktheit und der Tatsache, dass unsere Abbildungen von Grad 0 sind, d.h. sie sind jeweils der Form

$$f(x) = x_1 f_1 + \dots + x_k f_k$$

, dass alle Punkte der Syzygie die folgende Gleichung erfüllen:

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

Also sind unsere Syzygien Lösungen von linearen Gleichungen.

Syzygien werden in Computeralgebra System verwendet, um Multivariate Gleichungen zu lösen

## 2 Das Hilbertsche Syzygientheorem

**Theorem 3** (Das Hilbertsche Syzygien Theorem [1]1.13). *Wenn  $R = l[x_1, \dots, x_r]$  gilt, dann hat jeder endlich erzeugte graduierte  $R$ -Modul eine endlich erzeugte freie Auflösung von Länge  $\leq r$  aus endlich erzeugten freien Moduln.*

Um das jetzt aber zu beweisen müssen wir etwas ausholen, doch wollen wir mit einem Beispiel beginnen.

**Beispiel 4** (Exercise 1.22). Sei  $R = k[x]$  Dann haben alle endlich erzeugten  $R$ -Module eine endliche freie Auflösung.

*Beweis.* REPLACE ME

□

**Theorem 5** (Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen [2]).

**Beispiel 6.** Sei  $R = k[x](x^n)$ , dann sehen die freien Auflösungen von  $R/(x^m)$  für alle  $m \leq n$  als MISSING geschrieben werden können.

*Beweis.* REPLACE ME

□

## 3 Gröbner Basen

**Definition 4** (Gröbnerbasis [1]328). Eine **Gröbnerbasis** bezüglich einer Ordnung  $>$  auf einem freien Modul mit Basis  $F$  ist eine Menge von Elementen  $g_1, \dots, g_t \in F$ , sodass wenn  $M$  ein Untermodul von  $F$  erzeugt von  $g_1, \dots, g_t$  ist, gilt, dass die  $\in_{>}(g_1), \dots, \in_{>}(g_t) \in_{>}(M)$  erzeugen.

Wir sagen dann, dass  $g_1, \dots, g_t$  eine **Gröbnerbasis von  $M$**  sind.

## Literatur

- [1] David Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [2] Structure theorem for finitely generated modules over a principal ideal domain. [https://en.wikipedia.org/wiki/Structure\\_theorem\\_for\\_finitely\\_generated\\_modules\\_over\\_a\\_principal\\_ideal\\_domain](https://en.wikipedia.org/wiki/Structure_theorem_for_finitely_generated_modules_over_a_principal_ideal_domain).

[3] Syzygy. <http://mathworld.wolfram.com/Syzygy.html>. Accessed: 2017-01-04.