Freie Aufloesungen und das Syszygien Theorem

Jens Heinrich

10.01.2017

Theorem 1 (Das Hilbert'sche Syzygien Theorem [1]1.13)**.** *Wenn $R = l\left[x_1, \ldots, x_r\right]$ gilt, dann hat jeder endlich erzeugte graduierte R-Modul eine endlich erzeugte freie Auflösung von Länge $\leq r$ aus endlich erzeugten freien Moduln.*

Algorithmus 1 (Divisionsalgorithmus [1]15.7)**.** Sei F ein freier S-Modul mit Basis und fester Monomordnung. Wenn $f, g_1, \ldots, g_t \in F$, dann können wir einen Standard Ausdruck

$$f = \sum m_u g_{s_u} + f'$$

von f bezüglich $g_1, \ldots, g_t$ finden, indem wir die Indices s_u und die Terme m_u induktiv definieren. Wenn wir bereits $s_1, \ldots, s_p$ und $m_1, \ldots, m_p$, gewählt haben, dann wählen wir, falls

$$f'_p := f - \sum_{u=1}^{p} m_u g_{s_u} \neq 0$$

und m der maximale Term von f'_p, der durch eines der der $in\left(g_i\right)$ teilbar ist,

$$s_{p+1} = i, m_{p+1} = m/in\left(g_i\right)$$

. Dieser Vorgang bricht entweder ab, wenn $f'_p = 0$ oder wenn keines der $in\left(g_i\right)$ ein Monom aus f'_p teilt; der Rest f' ist dann f'_p.

Theorem 2 (Buchberger Kriterium [1]15.8)**.** *Mit der Notation aus* **??** *folgt, dass die $g_1, \ldots, g_t$ eine Gröbnerbasis bilden, genau dann wenn h_{ij} für alle i und j.*

Beweis. REPLACE ME □

Algorithmus 2 (Buchberger Algorithmus [1]333)**.** Unter den Vorraussetzungen aus 2 sei M, das ein Untermodul von F und $g_1, \ldots, g_t$ seien Erzeuger von M. Berechne die Reste h_{ij}. Wenn alle $h_{ij} = 0$, dann bilden die g_i eine Gröbnerbasis von M. Wenn einige der $h_{ij} \neq 0$ dann ersetze $g_1, \ldots, g_t$ mit $g_1, \ldots, g_t, h_{ij}$ und wiederholen dann den Prozess. Da der von $g_1, \ldots, g_t, h_{ij}$ erzeugte Untermodul echt grösser als der von $g_1, \ldots, g_t$ erzeugte Untermodul ist, und damit terminiert der Prozess nach endlich vielen Schritten. Die obere Schranke

$$b = \left(\left(r+1\right)\left(d+1\right)+1\right)^{2^{(s+1)}(r+1)}$$

hält für

$$
\begin{aligned}
r =& \text{number of variables}\\
d =& \text{maximum degree of the polynomials } g_i \text{ , and}\\
s =& \text{the degree of the Hilbert polynomial}\\
& \text{(this is one less than the dimension; it is between 0 and } r-1 \text{).}
\end{aligned}
$$

Theorem 3 (Schreyer [1][15.10)**.** *Mit der Notation von* **??***, konnen wir annehmen, dass* $g_1, \ldots, g_t$ *eine Gröbnerbasis sind. Sei jetzt* $>$ *eine Monomordnung auf* $\oplus_{j=1}^{t} S\epsilon_j$*, für die gilt* $m\epsilon_u > n\epsilon_v \iff$

$$\mathrm{in}\,(mg_u) > \mathrm{in}\,(ng_v) \textit{ bezüglich der Ordnung auf } F$$

oder

$$\mathrm{in}\,(mg_u) = \mathrm{in}\,(ng_v)\,(\textit{bis auf Vielfachheit})\; \textit{butu} < v.$$

. Die τ_{ij} *erzeugen die Syuygien auf den* g_i*. Insbesondere sind die* τ_{ij} *eine Gröbnerbasis der Syzygien bezüglich der Ordnung* $>$ *und* $\mathrm{in}\,(\tau_{ij}) = m_{ji}\epsilon_i$.

Literatur

[1] David Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.