Freie Auflösungen und das Syszygien Theorem

Jens Heinrich

10.01.2017

Theorem 1 (Das Hilbert'sche Syzygien Theorem [1]1.13)**.** *Wenn $R = k[x_1, \dots, x_r]$ gilt, dann hat jeder endlich erzeugte graduierte R-Modul eine endlich erzeugte freie Auflösung von Länge $\leq r$ aus endlich erzeugten freien Moduln.*

Algorithmus 1 (Divisionsalgorithmus [1]15.7)**.** Sei F ein freier S-Modul mit Basis und fester Monomordnung. Wenn $f, g_1, \dots, g_t \in F$, dann können wir einen Standard Ausdruck

$$f = \sum m_u g_{s_u} + f'$$

von f bezüglich $g_1, \dots, g_t$ finden, indem wir die Indices s_u und die Terme m_u induktiv definieren. Wenn wir bereits $s_1, \dots, s_p$ und $m_1, \dots, m_p$, gewählt haben, dann wählen wir,

$$f'_p := f - \sum_{u=1}^{p} m_u g_{s_u},$$

falls $f'_p \neq 0$ und m der maximale Term von f'_p, der durch eines der der $\operatorname{in}(g_i)$ teilbar ist,

$$s_{p+1} = i, m_{p+1} = m / \operatorname{in}(g_i)$$

. Dieser Vorgang bricht entweder ab, wenn $f'_p = 0$ oder wenn keines der $\operatorname{in}(g_i)$ ein Monom aus f'_p teilt; der Rest f' ist dann f'_p.

Notation 1 ([1]331)**.** Sei F ein freier Modul über S mit Basis und Monomordnung $>$. Seien $0 \neq g_1, \dots, g_t \in F$ und $\oplus S\epsilon_i$ ein freier Modul mit Basis $\{\epsilon_i\}$ die den $\{g_i\}$ aus F über die folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi : \oplus S\epsilon_i &\to F \\ \epsilon_i &\mapsto g_i \end{aligned}$$

entsprechen.
Für jedes Indexpaar i, j, sodass $\operatorname{in}(g_i)$ und $\operatorname{in}(g_j)$ dasselbe Basiselement von F enthalten, definieren wir

$$m_{ij} = \operatorname{in}(g_i) / \operatorname{ggT}(\operatorname{in}(g_i), \operatorname{in}(g_j)) \in S$$

und setzen

$$\sigma_{ij} = m_{ji}\epsilon_i - m_{ij}\epsilon_j.$$

Diese σ_{ij} Erzeugen die Syzygie auf den in (g_i) nach **??**. Desweiteren wählen wir für jedes der Indexpaare einen Standardausdruck

$$m_{ji}g_i - m_{ij}g_j = \sum f_u^{(ij)} g_u + h_{ij}$$

für $m_{ji}g_i - m_{ij}g_j$ bezüglich der $g_1, \ldots, g_t$. Man kann sehen, dass $\mathrm{in}\left(f_u^{ij} g_u\right) < \mathrm{in}\,(m_{ji}g_i)$.
Zur Vereinfachung setzen wir $h_{ij} = 0$, falls $\mathrm{in}\,(g_i)$ und $\mathrm{in}\,(g_j)$ verschiedene Basiselemente von F enthalten sind.

Theorem 2 (Buchberger Kriterium [1]15.8)**.** *Mit der Notation aus 1 folgt, dass die $g_1, \ldots, g_t$ eine Gröbnerbasis bilden, genau dann wenn h_{ij} für alle i und j.*

Algorithmus 2 (Buchberger Algorithmus [1]333)**.** Unter den Vorraussetzungen aus 2 sei M ein Untermodul von F und $g_1, \ldots, g_t$ seien Erzeuger von M. Berechne die Reste h_{ij}. Wenn alle $h_{ij} = 0$, dann bilden die g_i eine Gröbnerbasis von M. Wenn einige der $h_{ij} \neq 0$ dann ersetze $g_1, \ldots, g_t$ mit $g_1, \ldots, g_t, h_{ij}$ und wiederhole dann den Prozess. Da der von $g_1, \ldots, g_t, h_{ij}$ erzeugte Untermodul echt grösser als der von $g_1, \ldots, g_t$ erzeugte Untermodul ist, terminiert der Prozess nach endlich vielen Schritten. Die obere Schranke

$$b = ((r+1)(d+1)+1)^{2^{(s+1)}(r+1)}$$

hält für

$r =$Anzahl der Variablen
$d =$maximal Grad von g_i , und
$s =$dem Grad des Hilbertpolynoms
(dieser ist um eins kleiner als die Dimension; er liegt zwischen 0 und $r - 1$).

Definition 1 ([1]334)**.** Wir definieren

$$\tau_{ij} := m_{ji}\epsilon_i - m_{ij}\epsilon_j - \sum_u {f_u}^{(ij)} \epsilon_u,$$

für $i < j$, sodass $\mathrm{in}\,(g_i)$ und $\mathrm{in}\,(g_j)$ dasselbe Basiselement von F enthalten.

Theorem 3 (Schreyer [1][15.10)**.** *Mit der Notation von 1, können wir annehmen, dass $g_1, \ldots, g_t$ eine Gröbnerbasis sind. Sei jetzt $>$ eine Monomordnung auf $\oplus_{j=1}^t S\epsilon_j$, für die gilt $m\epsilon_u > n\epsilon_v$*
$\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{in}\,(mg_u) > \mathrm{in}\,(ng_v) \text{ bezüglich der Ordnung auf } F$$

oder

$$\mathrm{in}\,(mg_u) = \mathrm{in}\,(ng_v)\,(\text{bis auf Vielfachheit}) \text{ aber } u < v..$$

Die τ_{ij} erzeugen die Syzygien auf den g_i. Insbesondere sind die τ_{ij} eine Gröbnerbasis der Syzygien bezüglich der Ordnung $>$ und es gilt $\mathrm{in}\,(\tau_{ij}) = m_{ji}\epsilon_i$.

Literatur

[1] David Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.