# 2013年（数一）真题答案解析

## 一、选择题

(1) D

**解**　用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=c\neq 0,$$

因此 $k-1=2,\dfrac{1}{k}=c$，即 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.故应选 D.

(2) A

**解**　$F'_x=2x-y\sin(xy)+1,\quad F'_y=-x\sin(xy)+z,\quad F'_z=y.$

曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$，

切平面方程为：

$$1\cdot(x-0)-(y-1)+1\cdot(z+1)=0,$$

即 $x-y+z=-2$.故应选 A.

(3) C

**解**　观察到 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的正弦函数，对 $f$ 进行奇延拓，其周期为 2.

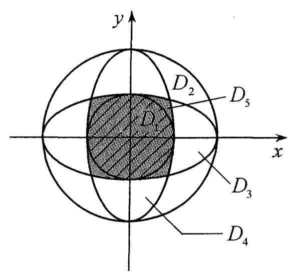
故 $S(x)=f(x)$.

$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$.故应选 C.

(4) D

**解**　由格林公式得

$$I_i=\oint_{\Delta_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$




其中　$D_1:x^2+y^2\leqslant 1,$

$D_2:x^2+y^2\leqslant 2,$

$D_3:\dfrac{x^2}{2}+y^2\leqslant 1,$

$D_4:x^2+\dfrac{y^2}{2}\leqslant 1.$

显然在 $D_4$ 内有

$1-x^2-\dfrac{y^2}{2}>0$，在 $D_4$ 外有 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}<0$，

又如图有 $D_1\subset D_4,D_4\subset D_2$.由重积分性质知 $I_4>I_1,I_4>I_2$.

又 $D_4=D_5+D_4\backslash D_5,D_3=D_5+D_3\backslash D_5$，在 $D_3\backslash D_5$ 上 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}<0$，在 $D_4\backslash D_5$ 上

$1-x^2-\dfrac{y^2}{2}>0$，

故 $I_4=\iint\limits_{D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4\setminus D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$>I_3=\iint\limits_{D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3\setminus D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.故应选 D.

(5) B

**解** 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,那么对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即 $$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\cdots\cdots\\\boldsymbol{\gamma}_n=\mathrm{b}_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出.

由向量组等价的定义可知,应选 B.

(6) B

**解** 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$,考察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$ 的条件.

首先,显然 $|\boldsymbol{A}|=0$,因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

其次,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2+b$,因此如果 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $b$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值.于是“充要条件”为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\-1&-a&1\end{vmatrix}=-4a^2=0\Rightarrow a=0.$$

因此充要条件为 $a=0$,$b$ 为任意实数,故应选 B.

(7) A

**解** 将随机变量 $X_2$ 和 $X_3$ 化成标准正态后再比较其大小.

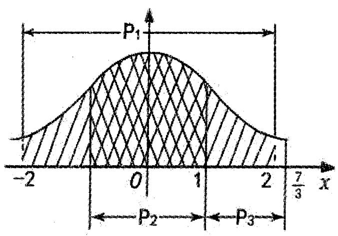
$p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)$,

$p_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\left\{\frac{-2}{2}\leqslant\frac{X_2}{2}\leqslant\frac{2}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$,

$p_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant 2\}$

$=P\left\{\frac{-2-5}{3}\leqslant\frac{X_3-5}{3}\leqslant\frac{2-5}{2}\right\}$

$=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1)$,




由右图正态分布曲线下的面积所代表的概率可知

$p_1>p_2>p_3$.  故应选 A.

(8) C

**解** 当 $X \sim t(n)$ 时，$X^2 \sim F(1,n)$，又 $Y \sim F(1,n)$，故 $Y$ 与 $X^2$ 同分布.

当 $c > 0$ 时，由 $t$ 分布的对称性有

$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{|X| > c\} = P\{X > c \cup X < -c\} = 2P\{X > c\} = 2\alpha.$

故应选 C.

**二、填空题**

(9) 1

**解** 把 $x=0$ 代入方程有 $f(0)=1$.方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端同时对 $x$ 求导有

$f'(x)-1=e^{x[1-f(x)]}[1-f(x)-xf'(x)]$.

把 $x=0$ 代入上式得 $f'(0)=2-f(0)=1$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1.$$

(10) $C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$

**解** 由常系数非齐次线性微分方程解的性质可得

$$y_1-y_3=e^{3x},\quad y_2-y_3=e^x$$

是相应二阶齐次线性微分方程的两个特解.

故相应二阶齐次线性微分方程的通解为

$$y_0=C_1e^{3x}+C_2e^x.$$

所以所求非齐次方程的通解可表示为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}.$$

(11) $\sqrt{2}$

**解** $\because \dfrac{dx}{dt}=\cos t,\quad \dfrac{dy}{dt}=t\cos t,$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},$$

从而 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

(12) ln2

**解** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x}=0+\ln\left.\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$

(13) $-1$

**解** 题设条件“$a_{ij}+A_{ij}=0$”即 $\boldsymbol{A}^{T}=-\boldsymbol{A}^{*}$，于是 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^{2}$，可见 $|\boldsymbol{A}|$ 只可能是 0 或 $-1$.

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{T})=r(-\boldsymbol{A}^{*})=r(\boldsymbol{A}^{*})$，则 $r(\boldsymbol{A})$ 只可能为 3 或 0.

而 $A$ 为非零矩阵，因此 $r(\boldsymbol{A})$ 不能为 0，从而 $r(\boldsymbol{A})=3$，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}|=-1$.

或，用特例法.取一个行列式为 $-1$ 的正交矩阵满足 $\boldsymbol{A}^{T}=-\boldsymbol{A}^{*}$.

故应填 $-1$.

(14) $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

**解** 由于 $X\sim E(1)$，$a>0$，则由指数分布的分布函数有

$$P\{Y\leqslant a+1\mid Y>a\}=\frac{P\{Y>a,Y\leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}=\frac{P\{a<Y\leqslant a+1\}}{1-P\{Y\leqslant a\}}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-(a+1)}-(1-\mathrm{e}^{-a})}{1-(1-\mathrm{e}^{-a})}=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-a-1}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

**三、解答题**

(15) **解** 由条件显然有

$$f(1)=0,\quad f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

由分部积分法及换元积分法有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=-4\int_0^1\ln(x+1)\,\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{令 } t=\sqrt{x}}-4\ln2+8\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=-4\ln2+8\left[\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=-4\ln2+8-8\arctan t\Big|_0^1\\&=-4\ln2+8-2\pi.\end{aligned}$$

(16) (Ⅰ) **证** $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$， $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，

又 $\because a_{n-2}=n(n-1)a_n\ (n\geqslant 2)$，

$\therefore S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，

$\therefore S''(x)-S(x)=0$ 得证.

(Ⅱ) **解** $S''(x)-S(x)=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程,其特征方程为

$$\lambda^2-1=0,$$

从而$\lambda=\pm 1$,于是 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

又 $S(0)=a_0=3, S'(0)=a_1=1$,

代入上式得 $\begin{cases}C_1+C_2=3\\-C_1+C_2=1\end{cases}$,

解得 $C_1=1, C_2=2$,

所以 $S(x)=e^{-x}+2e^x$.

(17) **解** 先求驻点,令

$$\begin{cases}f_x=\left(x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}=0\\f_y=\left(1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}=0\end{cases},$$

解得$\begin{cases}x=-1\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$

为了判断这两个驻点是否为极值点,求二阶导数

$$\begin{cases}f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}\\f_{xy}=\left(x^2+1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}\\f_{yy}=\left(2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)e^{x+y}\end{cases}$$

在点$\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$处,

$$A=f_{xx}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-e^{-\frac{5}{3}},$$

$$B=f_{xy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}},$$

因为 $A<0, AC-B^2<0$,所以$\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$不是极值点.

类似地,在点$\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$处,

$$A=f_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3e^{-\frac{1}{3}},$$

$$B=f_{xy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}}$$

因为 $A>0, AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0$,所以$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$是极小值点,极小值为

$f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}}=-e^{-\frac{1}{3}}$.

(18) **证** (Ⅰ) 设 $F(x)=f(x)-x$, $x\in[-1,1]$.

$\because$ $f(x)$ 是奇函数,$\therefore$ $f(0)=0$.

从而 $F(1)=f(1)-1=0$,

$F(0)=f(0)-0=0$,

且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导.由罗尔中值定理,存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)-1=0$. 即 $f'(\xi)=1$.

(Ⅱ) 设 $G(x)=f'(x)+f(x)-x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数,

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数,

$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1)$,

$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(-1)=f'(1)$.

故 $G(1)=G(-1)$,且 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 内连续,在 $(-1,1)$ 内可导.由罗尔中值定理,$\exists\eta\in(-1,1)$ 使得

$$G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0.$$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

**另解 1**: 设 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$,则由(1):$G(\xi)=0$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $f'(x)$ 为偶函数,可知 $G(-\xi)=0$.

则 $\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使 $G'(\eta)=0$,

即 $e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$.

亦即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

**另解 2**: 令 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$,则 $G(\xi)=0$.

由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $f'(x)$ 为偶函数,得 $G(-\xi)=0$.

$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]\subset[-1,1]$ 上可导,由罗尔定理知

$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\in(-1,1)$, $G'(\eta)=0$,

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19) **解** (Ⅰ) $\overline{AB}=\{-1,1,1\}$

$$L:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$,对应于 $L$ 上的点 $M_0(x_0,y_0,z)$,则 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,

由 $\begin{cases}x_0=1-z\\ y_0=z\end{cases}$

得 $\Sigma: x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$

即 $\Sigma: x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

(Ⅱ) 显然 $\overline{x}=0, \overline{y}=0, \overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega}dv}$,

记 $D_z=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1\right\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)=\frac{10}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z=\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{14}{3}\pi,$$

$\therefore\ \bar{z}=\dfrac{7}{5}$,

$\therefore$ 形心坐标$\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

(20) **解** 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 成立的充分必要条件为

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\-ax_1+x_2+ax_4=1,\\x_1-x_3-x_4=1,\\x_2-ax_3=b.\end{cases}\qquad(*)$$

对方程组的增广矩阵施以初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{array}\right).$$

当 $a\neq-1$ 或 $b\neq0$ 时,方程组(*)无解.

当 $a=-1,b=0$ 时,方程组(*)有解,通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

综上,当且仅当 $a=-1,b=0$ 时,存在满足条件的矩阵 $\boldsymbol{C}$,且

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2&-k_1\\k_1&k_2\end{pmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

(21) **证** (Ⅰ)记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]\\&=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

又 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵,所以二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,所以

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$, $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$,

于是 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,又

$r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2$,

所以 $\lambda_3=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22) **解** (Ⅰ) 由题设条件知,$P\{1\leqslant Y\leqslant 2\}=1$

记 $Y$ 的分布函数为 $F_Y(y)$,则

当 $y<1$ 时,$F_Y(y)=0$,

当 $1\leqslant y<2$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leqslant y\}\\&=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x\\&=\frac{y^3+18}{27}.\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$.

所以 $Y$ 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅱ) $P\{X\leqslant Y\}=P\{X<2\}=\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

(23) **解** (Ⅰ) $EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$

所以 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$,其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

(Ⅱ) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值,似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时,$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-3\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$.

令 $\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$,得 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.

所以 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.