2017年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) A

解 由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，得 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2ax}=\dfrac{1}{2a}=b$.

所以 $ab=\dfrac{1}{2}$.故应选 A.

(2) C

解 由 $f(x)f'(x)>0$，可得 $2f(x)f'(x)>0$，即$[f^2(x)]'>0$.

因此 $f^2(x)$严格单增，故有$|f(x)|$严格单增，所以有$|f(1)|>|f(-1)|$.

故应选 C.

(3) D

解 向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$的方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点$(1,2,0)$处的三个偏导数为：

$$f'_x(1,2,0)=4,f'_y(1,2,0)=1,f'_z(1,2,0)=0.$$

所以函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点$(1,2,0)$处沿向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)}=f'_x(1,2,0)\cos\alpha+f'_y(1,2,0)\cos\beta+f'_z(1,2,0)\cos\gamma$$

$$=4\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{2}{3}=2.$$

故应选 D.

(4) C

解 令 $s_1(t)$，$s_2(t)$表示甲，乙两人的路程，由题意，计时开始时，甲在乙前方 10m，要想在 t_0 时刻乙追上甲，应有 $s_1(t_0)-s_2(t_0)=-10$.根据题干图中阴影部分面积数值为 10，20，3，可得

$t=10$ 时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10$.

$15<t<20$ 时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{t}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10+\int_{10}^{t}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$>10+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10-20=-10.$$

$t=25$ 时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$

$$=10-20=-10.$$

$t > 25$ 时,$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t+\int_{25}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$

$$=-10+\int_{25}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t>-10.$$

故应选 C.

(5) A

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量,故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$.

所以,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 1,0,0.所以,$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$,即矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

故应选 A.

(6) B

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是上三角矩阵,所以特征值都是 1,2,2.

所以,要判别 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 能否相似对角化,只需考察属于 2 的线性无关的特征向量的个数即可.

对于 $\boldsymbol{A}$,属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-1=2$.

对于 $\boldsymbol{B}$,属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=3-2=1$.

所以,$\boldsymbol{A}$ 可以和 $\boldsymbol{C}$ 相似,但是 $\boldsymbol{B}$ 不能.

故应选 B.

(7) A

解 因为 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,

所以 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$,

则 $P(AB)>P(A)P(B)$.

而 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$,

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}<\frac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)}=\frac{P(B)[1-P(A)]}{1-P(A)}=P(B).$$

故 $P(B|A)>P(B|\overline{A})$.故应选 A.

(8) B

解 因为 $X_i\sim N(\mu,1)$,

所以 $X_i-\mu\sim N(0,1)$,

则 $\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$,故 A 正确;

因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{1}\sim\chi^2(n-1)$, 故 C 正确;

因为 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\right)$,

所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$,

则 $n(\overline{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1)$，故 D 正确.

对于 B 选项：$X_n - X_1 \sim N(0,2)$，

则 $\dfrac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，所以 $\left(\dfrac{X_n - X_1}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1)$.从而 B 错误.

故应选 B.

二、填空题

(9) 0

解 根据 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的幂级数展开式求解.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,(|x|<1).$$

故有 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}n!, & n \text{ 为偶数},\\ 0, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$

所以 $f^{(3)}(0)=0$. 故应填 0.

(10) $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

解 微分方程的特征方程为

$$\gamma^2+2\gamma+3=0.$$

特征根为 $\gamma_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$.

因此，原方程的通解为 $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$.

故应填 $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$.

(11) -1

解 令 $P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q(x,y)=\dfrac{-ay}{x^2+y^2-1}$，

则曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关的条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

而 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，故 $a=-1$.

故应填 -1.

(12) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

解 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}, x\in(-1,1)$.

$$\text{则}\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x nx^{n-1}\,dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=\frac{x}{1+x}.$$

所以，$S(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}, x\in(-1,1)$.

故应填$\frac{1}{(1+x)^2}$.

(13) 2

解 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故矩阵$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$可逆，所以，$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=r(A)$，易知，$r(A)=2$. 故应填 2.

(14) 2

解 X 的概率密度

$$f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

则 $$\begin{aligned}EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &=0.5\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x+0.25\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &=0+0.5\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &=0.5\left[2\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t+4\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\right] \\ &=2.\end{aligned}$$

三、解答题

(15) 解 因为 $y=f(\mathrm{e}^x, \cos x)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\mathrm{e}^x-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\sin x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=&\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\mathrm{e}^x+\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}\mathrm{e}^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\sin x\right)\mathrm{e}^x \\ &-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cos x-\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\mathrm{e}^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\sin x\right)\sin x.\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$u=\mathrm{e}^0=1, v=\cos 0=1$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}+\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}-\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}.$$

(16) 解 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \\ &=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x \\ &=\left.\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\ln 2-\left.\frac{1}{4}(x-1)^2\right|_0^1-\left.\frac{1}{2}\ln(1+x)\right|_0^1 \\ &=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(17) **解**　由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0, \qquad ①$$

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0. \qquad ②$$

在①式中令 $y'=0$ 得 $x=-1, x=1$.

当 x 分别取 -1 和 1 时，由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 得 $y(-1)=0, y(1)=1$.

将 $x=-1, y(-1)=0$ 及 $y'(-1)=0$ 代入②式得 $y''(-1)=2$.

因为 $y'(-1)=0, y''(-1)>0$，所以 $y(-1)=0$ 是 $y(x)$ 的极小值.

将 $x=1, y(1)=1$ 及 $y'(1)=0$ 代入②式得 $y''(1)=-1$.

因为 $y'(1)=0, y''(1)<0$，所以 $y(1)=1$ 是 $y(x)$ 的极大值.

(18) **解**　（Ⅰ）由题设知 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，所以 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限的保号性可知，存在 $a\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(a)}{a}<0$，即 $f(a)<0$.

又 $f(1)>0$，所以存在 $b\in(a,1)\subset(0,1)$，使得 $f(b)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(0)=f(b)=0$，根据罗尔定理，存在 $c\in(0,b)\subset(0,1)$，使得

$$f'(c)=0.$$

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，由题设知 $F(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上可导，且

$$F(0)=0, F(c)=0, F(b)=0.$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c), \eta\in(c,b)$，使得 $F'(\xi)=F'(\eta)=0$，

即 ξ, η 是方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的两个不同实根.

(19) **解**　（Ⅰ）圆锥面与柱面的交线 C 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x, \end{cases}$ 消去 z 得 C 到 xOy 平面的投影柱面为 $x^2+y^2=2x$，故所求投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0. \end{cases}$

（Ⅱ）因为 S 的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 S 的质量为

$$M=\iint_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S.$$

又 S 在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$，所以

$$M=9\iint_D \sqrt{2(x^2+y^2)}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=18\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=64.$$

(20) **解**　（Ⅰ）由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有 2 个不为零的特征值，从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.
故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，故 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

又 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

（21）**解**　二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}.$$

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=0$，又 $|\boldsymbol{A}|=6-3a$，于是 $a=2$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$，所以特征值为 $-3,6,0$.
不妨设 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=-3$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 $\lambda_2=6$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

故所求的一个正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

（22）**解**　（Ⅰ）$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$，

$$P\{Y\leqslant EY\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

（Ⅱ）Z 的分布函数记为 $F_Z(z)$，那么
$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X+Y \leqslant z\} \\
&= P\{X=0\}P\{X+Y \leqslant z \mid X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leqslant z \mid X=2\} \\
&= \frac{1}{2}P\{Y \leqslant z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leqslant z-2\}.
\end{aligned}
$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0 \leqslant z < 1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z\}=\frac{z^2}{2}$；

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}$；

当 $2 \leqslant z < 3$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$；

当 $z \geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$.

所以 Z 的概率密度为

$$
f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ z-2, & 2<z<3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

(23) **解** （Ⅰ）Z_1 的分布函数为

$$
F(z)=P\{Z_1 \leqslant z\}=P\{|X_1-\mu| \leqslant z\}=\begin{cases} 2\Phi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)-1, & z \geqslant 0, \\ 0, & z<0, \end{cases}
$$

所以 Z_1 的概率密度为

$$
f(z)=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geqslant 0, \\ 0, & z<0. \end{cases}
$$

（Ⅱ）$EZ_1=\int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^{+\infty} z\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma.$

$\sigma=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}EZ_1$，令 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$，得 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$

（Ⅲ）记 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值，则似然函数为

$$
L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f(z_i)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2},
$$

对数似然函数为 $\ln L(\sigma)=n\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}}-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$，得 σ 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.