2009年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) A

解 由已知条件

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=-\frac{a^3}{6b}=1.$$

所以 $a^3=-6b$.故应选 A.

(2) A

解 令 $z=y\cos x$,则 z 关于 y 为奇函数,关于 x 为偶函数,由题意易知 D_1,D_3 均关于 y 轴对称,D_2,D_4 均关于 x 轴对称.所以由对称性

$I_2=I_4=0$,

$$I_1=2\iint\limits_{D_1右}y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y y\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 y\sin y\,\mathrm{d}y>0,$$

$$I_3=2\iint\limits_{D_3右}y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_0^{-y}y\cos x\,\mathrm{d}x=-2\int_0^1 y\sin y\,\mathrm{d}y<0.$$故应选 A.

(3) D

解 不妨设 $f(x)=g(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$,其中 $g(0)=-1,g(1)=0,g(2)=2$,由题干图得,

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ g(x), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时,$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t=t\Big|_0^x=x$,由此可排除 A,C.

又当 $2<x\leqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又由定积分的几何意义知,$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x>0$,故 $2<x\leqslant 3$ 时 $F(x)>0$.故应选 D.

(4) C

解 若令 $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,却有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.故排除 A,D.

若取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散,却有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.故排除 B.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 均为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}|b_n|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2b_n^2}{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}an^2\cdot\lim_{n\to\infty}|b_n|=0,$$

由正项级数比较判别法的极限形式知：当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.

(5) A

解 由 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

得 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}.$$

(6) B

解 由$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，得$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1},\qquad \boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=3\boldsymbol{B}^{-1}.$$

故 $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&6\boldsymbol{B}^{-1}\\6\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

(7) C

解 $$f(x)=F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

由于$\Phi(x)$为标准正态分布函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x-1}{2}=u}2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)\mathrm{d}u=2,$$

则 $EX=0+0.35\times2=0.7$.

(8) B

解 $$F_Z(z)=P\{xy\leqslant z\}$$

$$=P\{xy\leqslant z|y=0\}\ P\{y=0\}+P\{xy\leqslant z|y=1\}\ P\{y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[P\{xy\leqslant z|y=0\}+P\{xy\leqslant z|y=1\}\right].$$

由于 x,y 相互独立，故 $F_Z(z)=\frac{1}{2}[P\{x\cdot 0\leqslant z\}+P\{x\leqslant z\}]$.

(1)若 $z<0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$，

(2)若 $z\geqslant 0$，则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}[1+\Phi(z)]$，

所以 $z=0$ 为间断点.故有一个间断点.

二、填空题

(9) $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+yf'_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.

(10) $x(1-e^x)+2$

解 由齐次通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，得特征根为 $r_1=r_2=1$，故 $a=-2,b=1$.

微分方程为 $y''-2y'+y=x$.

设特解为

$y^*=Ax+B,(y^*)'=A,(y^*)''=0$，

$-2A+Ax+B=x,A=1$，

$-2+B=0,B=2$.

所以特解为 $y^*=x+2$.

非齐次的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$.

把 $y(0)=2,y'(0)=0$ 代入得 $C_1=0,C_2=-1$.

故应填 $-xe^x+x+2$.

(11) $\frac{13}{6}$

解 由题意可知，$x=x,y=x^2,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，则 $ds=\sqrt{1+4x^2}\,dx$.

所以

$$\int_L x\,ds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

(12) $\frac{4}{15}\pi$

解 由对称性

$$\iiint_\Omega x^2\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz,$$

所以 $$\iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4\,dr=\frac{4}{15}\pi.$$

(13) 2

解 设 λ 是 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值，$\boldsymbol{\eta}$ 是属于 λ 的特征向量，从而 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$.

由于 $\lambda\neq 0,\boldsymbol{\eta}\neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\eta}\neq 0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\eta}=\mu\neq 0$，有 $\mu\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$，所以 $\boldsymbol{\eta}=\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}$，从而 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}=\lambda\cdot\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}$.

所以，$\lambda=2$.

(14) -1

解 因为 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计，所以

$$E(\overline{X}+kS^2)=np^2.$$

而 $$E(\overline{X}+kS^2)=E(\overline{X})+kE(S^2)=EX+kDx=np+knp(1-p),$$

则 $k(1-p)=p-1$，即 $k=-1$.

三、解答题

(15) **解** $f'_x(x,y)=2x(2+y^2)$,

$f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令$\begin{cases}f'_x(x,y)=0,\\ f'_y(x,y)=0,\end{cases}$ 解得唯一驻点$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

由于

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right),$$

$$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0,$$

$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e,$$

所以 $B^2-AC=-2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)<0$，且 $A>0$，

从而 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$是 $f(x,y)$的极小值，极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$.

(16) **解** 曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$的交点为(0,0)与(1,1)，所围区域的面积

$a_n=\displaystyle\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

$S_1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$,

$S_2=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

考察幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，知其收敛域为$(-1,1]$，和函数为$-\ln(1+x)$.

因为$S(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$，令 $x=1$，得

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S(1)=1-\ln 2.$$

(17) **解** (Ⅰ) 椭球面 S_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$.

设切点为(x_0,y_0)，则$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在(x_0,y_0)处的切线方程为$\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$.

将 $x=4,y=0$ 代入切线方程得 $x_0=1$，从而 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-{x_0}^2}=\pm\dfrac{3}{2}$.

所以切线方程为$\dfrac{x}{4}\pm\dfrac{y}{2}=1$，从而圆锥面 S_2 的方程为$\left(\dfrac{x}{4}-1\right)^2=\dfrac{y^2+z^2}{4}$,

即 $(x-4)^2-4y^2-4z^2=0$.

（Ⅱ） S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为$\frac{3}{2}$、高为 3 的锥体体积$\frac{9}{4}\pi$与部分椭球体体积V之差，其中

$$V=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(4-x^2)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi,$$

故所求体积为$\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi$.

(18) **解** （Ⅰ）取 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

由题意知 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（Ⅱ）对于任意的 $t\in(0,\delta)$，函数 $f(x)$在$[0,t]$上连续，在$(0,t)$内可导，由右导数定义及拉格朗日中值定理可得

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi),\text{其中 }\xi\in(0,t).$$

由于 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=A$，且当 $t\to0^+$ 时，$\xi\to0^+$，所以 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(\xi)=A$，故 $f'_+(0)$存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19) **解** 取$\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，Ω 为Σ与Σ_1 之间的部分.

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

根据高斯公式，可得

$$\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi,$$

所以 $I=4\pi$.

(20) **解** （Ⅰ）对矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\xi}_1)$施以初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可求得

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{k}{2}\\ k\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

又

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},$$

对矩阵($\boldsymbol{A}^2 \vdots \boldsymbol{\xi}_1$)施以初等行变换,得

$$(\boldsymbol{A}^2 \vdots \boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可求得

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-a\\ a\\ b\end{pmatrix},$$

其中 a,b 为任意常数.

(Ⅱ) **证法一** 由(Ⅰ)知

$$|\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}&-\frac{1}{2}-a\\1&\frac{1}{2}-\frac{k}{2}&a\\-2&k&b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0,$$

所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

证法二 由题设可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$.设存在数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},\tag{①}$$

等式两端左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},\tag{②}$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_3\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0},$$

于是 $k_3=0$,代入②式,得 $k_2\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$,故 $k_2=0$,将 $k_2=k_3=0$ 代入①式,可得 $k_1=0$,从而 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21) **解** (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2)),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2.$$

（Ⅱ）由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，其秩为 2，故 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$，于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=0$ 时，$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，此时 f 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=-1$ 时，$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$，此时 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=2$ 时，$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，此时 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

综上可知，$a=2$.

(22) **解**　（Ⅰ）$P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{C_2^1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{9}.$

（Ⅱ）由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 0,1,2.

(X,Y)的概率分布为

X \\ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

(23) **解**　（Ⅰ）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\lambda}.$

令 $\overline{X}=EX$，即 $\overline{X}=\dfrac{2}{\lambda}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

（Ⅱ）　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$为样本观测值，则似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\dfrac{2}{\overline{X}}$.