2015年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) C

解　由二阶导函数 $y=f''(x)$ 的图形可知，二阶导数为零的点有两个，而 $x=0$ 则是二阶导数不存在的点.

在二阶导数为零的点中只有一个点左、右两侧二阶导数的符号相反，因此对应曲线 $y=f(x)$ 上一个拐点.

在 $x=0$ 左侧，$f''(x)$ 为正，在 $x=0$ 右侧，$f''(x)$ 为负，因曲线 $y=f(x)$ 上点 $(0,f(0))$ 也是一个拐点.

故曲线 $y=f(x)$ 共有 2 个拐点，故应选 C.

(2) A

解　由题设条件知，$y_1=\frac{1}{2}e^{2x}$，$y_2=-\frac{1}{3}e^x$ 是已知二阶常系数非齐次线性微分方程所对应的齐次微分方程的两个特解，由此知 $r_1=2$，$r_2=1$ 是特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的两个根.

由一元二次方程根与系数的关系，得 $a=-(2+1)=-3$，$b=2$，

于是原方程化为 $y''-3y'+2y=ce^x$，

由二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构知：$y_3=xe^x$ 是原方程的一个特解，将 $y_3=xe^x$ 代入 $y''-3y'+2y=ce^x$ 中，得 $c=-1$，即 $a=-3$，$b=2$，$c=-1$.故应选 A.

(3) B

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，因此该级数的收敛半径 $R=1$，收敛区间为：$(-1,1)$；

根据收敛半径 R 的计算定理，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径也是 $R=2$，而其收敛区间为：$(0,2)$；

而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 可视为由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 逐项求导所得，根据幂级数的性质知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间仍是 $(0,2)$，因为 $\sqrt{3}\in(0,2)$，所以 $x=\sqrt{3}$ 是收敛点.

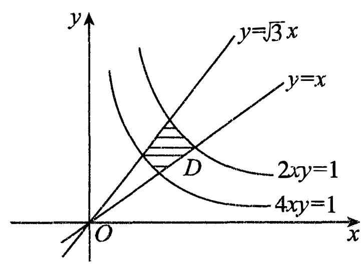
而 $x=3$ 不属于 $(0,2)$，由数项级数收敛与发散的定义知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n2^n$ 发散，即 $x=3$ 是发散点.

(4) B

解　如右图示，在极坐标系中积分区域 D 为：

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}\right\},$$

于是有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.故应选 B.



(5) D

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-2)(a-1)(2-1)=(a-2)(a-1).$$

由线性方程组有无穷多解，得 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即 $d=1$ 或 $d=2$.

同理，当 $a=2$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，如 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即 $d=1$ 或 $d=2$.　故应选 D.

(6) A

解
$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

又因为
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

故应选 A.

(7) C

解　对于 A,B 选项：

当事件 A 与 B 独立时，$P(AB)=P(A)P(B)$.

而当 A,B 不独立时，$P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 没有确定的关系，所以 A,B 选项错误.

对于 C,D 选项：

由概率性质 $P(A)\geqslant P(AB)$，$P(B)\geqslant P(AB)$，两式相加，得

$P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB)$，即 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.故应选 C.

(8) D

解　因为 X,Y 不相关，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)=EX\cdot EY=0$，即 $E(XY)=EX\cdot EY$，

则
$$E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2EX$$
$$=[DX+(EX)^2]+EX\cdot EY-2EX=5.$$

二、填空题

(9) $-\dfrac{1}{2}$

解　利用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

(10) $\dfrac{\pi^2}{4}$

解 因为$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$为奇函数，$|x|$是偶函数，且积分区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$关于原点对称，所以由奇、偶函数在对称区间上的定积分性质得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\,\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

(11) $-\mathrm{d}x$

解 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$F_x'=yz+1-\sin x$；$F_y'=xz$；$F_z'=\mathrm{e}^z+xy$，

将 $x=0,y=1$ 代入已知方程得，$\mathrm{e}^z=1\Rightarrow z=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F_x'}{F_z'}\Big|_{(0,1,0)}=-\frac{yz+1-\sin x}{xy+\mathrm{e}^z}\Big|_{(0,1,0)}=-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F_y'}{F_z'}\Big|_{(0,1,0)}=-\frac{xz}{xy+\mathrm{e}^z}\Big|_{(0,1,0)}=0,$$

于是由公式得 $\mathrm{d}z\,|_{(0,1)}=-\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$.

(12) $\dfrac{1}{4}$

解 利用轮换对称性知：$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V$，于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=6\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=3\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x\\&=3\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(13) $2^{n+1}-2$

解 第 i 行的$\dfrac{1}{2}$倍加到第 $i+1$ 行，$i=1,2\cdots,n-1$.

$$\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\0&2&\cdots&0&2+2\times\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2+2\times\frac{1}{2}+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\0&0&\cdots&0&2+2\times\frac{1}{2}+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&&&2\\&2&&2+2\times\frac{1}{2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&2\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\end{vmatrix}=2^{n+1}-2.$$

(14) $\frac{1}{2}$

解 由于相关系数为0,所以 X,Y 都服从正态分布,即 $X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$,且 X 和 Y 相互独立.

由 $X\sim N(1,1)$,可得 $X-1\sim N(0,1)$,所以

$$
\begin{aligned}
P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}\\
&=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\}\\
&=P\{X-1<0\}P\{Y>0\}+P\{X-1>0\}P\{Y<0\}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

三、解答题

(15) **解** 由于 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$,

所以

$$
\begin{aligned}
f(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x\\
&=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o(x^3)\\
&=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)=kx^3$ 在 $x\to0$ 时等价,所以 $\begin{cases}1+a=0,\\ b-\frac{a}{2}=0,\\ k=\frac{a}{3}.\end{cases}$

解得 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$.

(16) **解** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),$$

该切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$.

根据题设条件可知 $\frac{1}{2}\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4$,

即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\frac{1}{8}y^2$.

解得 $y=-\frac{8}{8C+x}$.

因为 $f(0)=2$, 所以 $C=-\frac{1}{2}$.

故 $f(x)=\frac{8}{4-x}$, $x\in I$.

(17) **解** 因为函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大,且最大方向导数是该点梯度向量的长度, 而

$$\mathbf{grad}f(x,y)=(1+y,1+x),\ |\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2},$$

因此,问题转化为求 $\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$,由

$$\begin{cases}F'_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0,\\ F'_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\ y=2.\end{cases}$

又 $|\mathbf{grad}f(1,1)|=2\sqrt{2}$,

$|\mathbf{grad}f(-1,-1)|=0$,

$|\mathbf{grad}f(2,-1)|=|\mathbf{grad}f(-1,2)|=3$,

所以 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

(18) **解** (Ⅰ)因为函数 $u(x),v(x)$ 可导,所以

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}=u'(x),\ \lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}=v'(x),\text{且}\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)=v(x).$$

从而

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]'&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)v(x+\triangle x)-u(x)v(x)}{\triangle x}\\&=\lim_{\triangle x\to 0}\left[\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}v(x+\triangle x)+u(x)\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\right]\\&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)+u(x)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

(Ⅱ)

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).$$

(19) **解** 设 L_1 是从点 B 到点 A 的直线段,$\sum$ 为平面 $z=x$ 上由 L 与 L_1 围成的半圆面下侧,其法向量的方向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

由 Stokes 公式

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z^2-x^2+y & x^2y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}(2x^2y+1)\mathrm{d}S.$$

由于曲面 $\sum$ 关于 xOz 平面对称,所以 $\iint\limits_{\Sigma}2x^2y\mathrm{d}S=0$,故

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

又 L_1 的参数方程为 $x=0$，$y=y$，$z=0$（y 从 $-\sqrt{2}$ 到$\sqrt{2}$），所以

$$\int_{L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}y\,\mathrm{d}y=0\ .$$

因此 $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

（20）**解** （Ⅰ）由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P},$$

其中
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

且 $|\boldsymbol{P}|=4\neq 0$,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}$，则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

所以
$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

对 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-k\end{pmatrix},$$

所以当 $k=0$ 时，方程组 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，且所有非零解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ c\text{ 为任意非零常数}.$$

故在两个基下坐标相同的所有非零向量为

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}c\\0\\-c\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),\ c\text{ 为任意非零常数}.$$

（21）**解** （Ⅰ）由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$

于是
$$3+a=2+b,\ 2a-3=b,$$

解得
$$a=4,\ b=5.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵.

(22) **解** （Ⅰ）每次观测中，观测值大于 3 的概率为

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2,\ k=2,3,\cdots.$$

（Ⅱ）
$$\begin{aligned}EY&=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=16.\end{aligned}$$

(23) **解** （Ⅰ）由于总体 X 服从区间 $[\theta,1]$ 上的均匀分布，所以

$$EX=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

（Ⅱ）记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n),\\0, & \text{其他}\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\\0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

由此可知，当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$