

# 2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题( 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内. )

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = ( \quad )$

- (A) 1. (B) e. (C)  $e^{a-b}$ . (D)  $e^{b-a}$ .

(2) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$  确定, 其中  $F$  为可微函数, 且  $F'_2 \neq 0$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A)  $x$ . (B)  $z$ . (C)  $-x$ . (D)  $-z$ .

(3) 设  $m, n$  均是正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性( )

- (A) 仅与  $m$  的取值有关. (B) 仅与  $n$  的取值有关.  
(C) 与  $m, n$  的取值都有关. (D) 与  $m, n$  的取值都无关.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = ( \quad )$

- (A)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ . (B)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ .  
(C)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ . (D)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ .

(5) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 则( )

- (A) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = m$ . (B) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = n$ .  
(C) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = m$ . (D) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = n$ .

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ . 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于( )

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .  
(C)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ . (D)  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

(7) 设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $P\{X=1\} = ( \quad )$

- (A) 0. (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $\frac{1}{2} - e^{-1}$ . (D)  $1 - e^{-1}$ . 淘宝店铺: 筑梦教育

(8) 设  $f_1(x)$  为标准正态分布的概率密度,  $f_2(x)$  为  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则  $a, b$  应满足( )

(A)  $2a + 3b = 4$ .

(B)  $3a + 2b = 4$ .

(C)  $a + b = 1$ .

(D)  $a + b = 2$ .

二、填空题( 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上. )

(9) 设  $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du, \end{cases}$  则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(10)  $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(11) 已知曲线  $L$  的方程为  $y = 1 - |x|$  ( $x \in [-1, 1]$ ), 起点是  $(-1, 0)$ , 终点为  $(1, 0)$ , 则曲线积分  $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ , 则  $\Omega$  的形心的竖坐标  $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 设  $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$ . 若由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的向量空间的维数为 2, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$ , 则  $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题( 本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. )

(15) ( 本题满分 10 分 )

求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$  的通解.

(16) ( 本题满分 10 分 )

求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

(17)(本题满分10分)

(I) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由;

(II) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(18)(本题满分10分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.

(19)(本题满分10分)

设  $P$  为椭球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$  上的动点, 若  $S$  在点  $P$  处的切平面与  $xOy$  面垂直, 求点  $P$  的轨迹  $C$ , 并计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$ , 其中  $\Sigma$  是椭球面  $S$  位于曲线  $C$  上方的部分.

(20)(本题满分11分)

设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 已知线性方程组  $Ax = b$  存在2个不同的解.

(I) 求  $\lambda, a$ ;

(II) 求方程组  $Ax = b$  的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $\mathbf{Q}$  的第三列为  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ .

(I) 求矩阵  $\mathbf{A}$ ;

(II) 证明  $\mathbf{A} + \mathbf{E}$  为正定矩阵, 其中  $\mathbf{E}$  为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ .

(23)(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P$	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	$\theta^2$

其中参数  $\theta \in (0, 1)$  未知. 以  $N_i$  表示来自总体  $X$  的简单随机样本 (样本容量为  $n$ ) 中等于  $i$  的个数 ( $i = 1, 2, 3$ ). 试求常数  $a_1, a_2, a_3$ , 使  $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$  为  $\theta$  的无偏估计量, 并求  $T$  的方差.