(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则a,b应满足(　　)

(A)$2a+3b=4$.　(B)$3a+2b=4$.　(C)$a+b=1$.　(D)$a+b=2$.

二、填空题(本题共6小题，每小题4分，共24分，把答案填在题中横线上.)

(9)设$\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\,du,\end{cases}$则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______.

(10)$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=$______.

(11)已知曲线L的方程为$y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点是$(-1,0)$，终点为$(1,0)$，则曲线积分$\int_L xy\,dx+x^2dy=$______.

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则$\Omega$的形心的竖坐标$\bar{z}=$______.

(13)设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^T$. 若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2，则$a=$______.

(14)设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则$E(X^2)=$______.

三、解答题(本题共9小题，共94分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解.

(16)(本题满分10分)

求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} \mathrm{d}S$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数($i=1,2,3$). 试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差.