2019年（数一）真题答案解析

一、选择题

（1）C

解　$\tan x$ 的麦克劳林展开式为 $x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，

故 $x-\tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$，则 $k=3$. 故应选 C.

（2）B

解　$f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ 不存在，

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点. $f(0)=0$，在 $x=0$ 点的左邻域内 $f(x)<0$，

右邻域内 $f(x)<0$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 故应选 B.

（3）D

解　取 $u_n=-\dfrac{1}{\ln n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 发散，A 错误.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$ 收敛，则由莱布尼茨判别法，$\dfrac{1}{u_n}$ 应单调递减趋向于零，

而由题意 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则 $\dfrac{1}{u_n}$ 单调递减不趋于零，B 错误.

取 $u_n=-\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ 发散，C 错误.

对于 D 选项：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)=(u_2^2-u_1^2)+(u_3^2-u_2^2)+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_1^2)$ 存在，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 收敛. 故应选 D.

（4）D

解　曲线积分与数径无关，则应使 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，排除 A、B.

对于 C 选项，$x=0$ 不连续，排除. 故应选 D.

（5）C

解　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，根据 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 得：$\lambda^2+\lambda=2$，解得 $\lambda=1$ 或 -2.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值的积为 $|\boldsymbol{A}|$ 的值，

故 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $1,-2,-2$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，

故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故应选 C.

（6）A

解　三张平面无公共交线，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解 $\Rightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$，排除 B、D.

又因为三张平面两两相交，且交线相互平行，则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

只有一个线性无关解，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，

故应选 A.

(7) C

解 由 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 得

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$.

故应选 C.

(8) A

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立，

则 $E(X-Y)=0$，$D(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$，得 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

故 $P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\dfrac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$ 与 σ^2 有关，与 μ 无关.

故应选 A.

二、填空题

(9) $\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x\cdot f'+y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y\cdot f'+x$，代入得

$\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$. 故应填 $\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

(10) $\sqrt{3e^x-2}$

解 $2yy'-y^2-2=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2}{2y}\Rightarrow\dfrac{2y}{y^2+2}dy=dx\Rightarrow\int\dfrac{2y}{y^2+2}dy=\int dx$，

则通解 $y^2+2=ce^x$，再由 $y(0)=1$，得 $c=3$，

故特解 $y=\sqrt{3e^x-2}$. 故应填 $\sqrt{3e^x-2}$.

(11) $\cos\sqrt{x}$

解 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$. 故应填 $\cos\sqrt{x}$.

(12) $\dfrac{32}{3}$

解 将曲面方程代入积分表达式中，原积分 $=\displaystyle\iint_{\Sigma}|y|\,dx\,dy$，

由于 Σ 关于 xoz 平面对称，则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}|y|\,dx\,dy=2\iint_{\Sigma_1}y\,dx\,dy$，其中 Σ_1 为 Σ 的右半侧 $(y\geqslant 0)$，

原积分 $=2\displaystyle\iint_{D_{xy}}y\,dx\,dy$，其中 D_{xy} 为 Σ_1 在 xoz 平面的投影，

$D_{xy}=2\displaystyle\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,dr=\frac{32}{3}$. 故应填 $\dfrac{32}{3}$.

(13) $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{T}$，$k\in\mathbf{R}$

解 先计算 $\boldsymbol{A}$ 的秩，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，可知 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$；又由于 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，可知 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 从而有 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有一个向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，从而 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 即为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，故应填 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

(14) $\dfrac{2}{3}$

解　由随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 可知 X 的分布函数

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases} EX=\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned}P\{F(X)>EX-1\}&=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}\\&=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

故应填 $\dfrac{2}{3}$.

三、解答题

(15) **解**　(Ⅰ) 这是一阶线性微分方程，由公式法可得方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right)=(x+C)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

因为 $y(0)=0$，可知 $C=0$，则 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(Ⅱ) $y'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+(-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，进一步 $y''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，

令 $y''=0$，得 $x=0$，$x=\pm\sqrt{3}$.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

则函数的凸区间为：$(-\infty,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$，

凹区间为：$[-\sqrt{3},0)$，$[\sqrt{3},+\infty)$，

拐点：$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

(16) **解**　(Ⅰ) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2ax$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2by$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,4)}=6a$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,4)}=8b$，

由于方向导数最大方向即为梯度方向，从而 $\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}$，所以 $a=b$ 且 $a<0$，$b<0$.

又由于 $6a\left(-\dfrac{3}{5}\right)+8b\left(-\dfrac{4}{5}\right)=10$，所以 $a=b=-1$.

（Ⅱ）要计算曲面 $z=2-x^2-y^2(z\geqslant 0)$（设为 Σ）的面积，只需对函数 l 在曲面上求第一型曲面积分.

即 $S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

其中 D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$.

用极坐标计算该积分可得 $S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\dfrac{13\pi}{3}$.

（17）**解**　由题意，所求面积为

$$S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ |\sin x|\ \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

因为
$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x&=-\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x\\&=(-1)^n[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi}]-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

得
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{2}[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi}]$$

所以
$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-n\pi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}]=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}.$$

（18）**解**　（Ⅰ）$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

因为在积分区间 $[0,1]$ 上，$x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$ 且不恒等于 0，

所以 $a_{n+1}-a_n<0$，即 $\{a_n\}$ 单调减少.

当 $n\geqslant 2$ 时，因为
$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n,\end{aligned}$$

所以
$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots).$$

（Ⅱ）$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+2}\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

因为 $\{a_n\}$ 单调减少且 $a_n>0$，所以 $\dfrac{n-1}{n+2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

（19）**解**　设形心坐标 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由于 Ω 是关于 yOz 平面对称的，

由对称性可知 $\overline{x}=0$，由先二后一法可知：

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{12};$$

则 $\bar{z}=\dfrac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V}=\dfrac{1}{4}$.

$$\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}V=\int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\displaystyle\iint_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{u=y-z} \iint_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}(u+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$

$$=\iint_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u=\pi z(1-z)^2,$$

则 $\displaystyle\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}V=\int_0^1 \pi z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}$,

故 $\bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V}=\dfrac{1}{4}$,则形心为$\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

(20)**解** (Ⅰ)由题目可知:

$\boldsymbol{\beta}=b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,代入可得$\begin{cases}b+c+1=1\\2b+3c+a=1\\b+2c+3=1\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=3\\b=2\\c=-2\end{cases}$.

(Ⅱ)由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0$,

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 R^3 的一个基;

设过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{C}$,进而有

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$$

(21)**解** (Ⅰ)因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,

即$\begin{cases}x-4=y+1,\\4x-8=-2y,\end{cases}$解得 $x=3,y=-2$.

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)$,

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,-1,-2$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $2,-1,-2$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\xi_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\xi_3=(1,-2,-4)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\eta_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\eta_2=(1,-3,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\eta_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，

得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22) **解**　(Ⅰ) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}\\&=P\{XY\leqslant z\mid Y=-1\}P\{Y=-1\}+P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}P\{Y=1\}\\&=pP\{-X\leqslant z\}+(1-p)P\{X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=pP\{X\geqslant -z\}+(1-p)\cdot 0=p\mathrm{e}^{z}$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p\cdot 1+(1-p)P\{X\leqslant z\}=1-(1-p)\mathrm{e}^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$$

(Ⅱ) $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-EX\cdot EZ\\&=E(X^2Y)-EX\cdot E(XY)\\&=E(X^2)\cdot E(Y)-(EX)^2\cdot E(Y)\\&=DX\cdot EY\\&=1-2p,\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，得 $p=\frac{1}{2}$. 所以 $p=\frac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

(Ⅲ) 因为

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0$,

$P\{X\leqslant 1\}>0,P\{Z\leqslant -1\}>0$,

所以

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}\neq P\{X\leqslant 1\}P\{Z\leqslant -1\}$.

故 X 与 Z 不相互独立.

(23) **解** (Ⅰ) 由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\sigma^2)\mathrm{d}x = 1$,得

$$1=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=A\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,$$

所以 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(Ⅱ) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值,则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma^2)$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$,得 σ^2 的最大似然估计值为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$,

所以 σ^2 的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.