

2021 考研数学真题及答案解析

数学 (一)

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求, 把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.)

$$(1) \text{函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{, 在 } x = 0 \text{ 处}$$

(A) 连续且取极大值.

(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数为 0.

(D) 可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 故 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 正确答案为 D.

(2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】 $f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$ ①

$f'_1(x, x^2) + 2x f'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$ ②

分别将 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 代入①②式有

$$f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1, \quad f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2$$

联立可得 $f'_1(1, 1) = 0$, $f'_2(1, 1) = 1$, $df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy$, 故正确答案为 C.

(3) 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则

(A) $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$.

(B) $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$.

(C) $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$.

(D) $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$.

【答案】A.

【解析】根据麦克劳林公式有

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \cdot [1 - x^2 + o(x^3)] = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

故 $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$, 本题选 A.

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)dx =$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}.$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}.$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}.$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{2}{n}.$

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知, 将 $(0,1)$ 分成 n 份, 取中间点的函数值, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}, \text{ 即选 B.}$$

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2, 0.

(B) 1, 1.

(C) 2, 1.

(D) 1, 2.

【答案】B.

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\lambda$$

令上式等于零, 故特征值为 $-1, 3, 0$, 故该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1. 故应选 B.

(6) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 记 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$,

若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}.$

(B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}.$

(C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}.$

(D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}.$

【答案】A.

【解析】利用施密特正交化方法知

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2,$$

故 $l_1 = \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} = \frac{5}{2}$, $l_2 = \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

(7) 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是

$$(A) r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(B) r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(C) r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(D) r \begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

【答案】C.

【解析】(A) $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T A) = 2r(A)$. 故 A 正确.

(B) AB 的列向量可由 A 的列线性表示, 故 $r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$.

(C) BA 的列向量不一定能由 A 的列线性表示.

(D) BA 的行向量可由 A 的行线性表示, $r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$.

本题选 C.

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中不成立的是

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

【答案】D.

【解析】 $P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$

$$P(\bar{A}|A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

因为 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 固有 $P(A) > P(B) - P(AB)$, 故正确答案为 D.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令

$$\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则}$$

$$(A) \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$$

$$(B) \hat{\theta} \text{ 不是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$$

$$(C) \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

$$(D) \hat{\theta} \text{ 不是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

【答案】C.

【解析】因为 X, Y 是二维正态分布, 所以 \bar{X} 与 \bar{Y} 也服从二维正态分布, 则 $\bar{X} - \bar{Y}$ 也服从二维正态分布, 即 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta$,

$D(\hat{\theta}) = D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) - \text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$, 故正确答案为 C.

(10) 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题:
 $H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$,

其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1 - \Phi(0.5)$

(B) $1 - \Phi(1)$

(C) $1 - \Phi(1.5)$

(D) $1 - \Phi(2)$

【答案】B.

【解析】所求概率为 $P\{\bar{X} < 11\}$ $\bar{X} \sim N(11.5, \frac{1}{4})$,

$$P\{\bar{X} < 11\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 11.5}{\frac{1}{2}} \leq \frac{11 - 11.5}{\frac{1}{2}}\right\} = 1 - \Phi(1)$$

故本题选 B.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \arctan(x+1)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

(12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, & x < 0 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】由 $\frac{dy}{dx} = \frac{4te^t + 2t}{2e^t + 1}$, 得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3}$,

将 $t = 0$ 带入得 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{2}{3}$.

(13) 欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 得解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 x^2 .

【解析】令 $x = e^t$, 则 $xy' = \frac{dy}{dt}, x^2y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$, 原方程化为 $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$, 特征方程为 $\lambda^2 - 4 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$, 通解为 $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} = C_1x^2 + C_2x^{-2}$, 将初始条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 带入得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故满足初始条件的解为 $y = x^2$.

(14) 设 Σ 为空间区域 $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 4π .

【解析】由高斯公式得原式 $= \iiint_{\Omega} (2x+2y+1)dV = \int_0^2 dz \iint_D dx dy = 4\pi$.

(15) 设 $A = a_{ij}$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 2, 且 $|A| = 3$, $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解析】 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\alpha = \lambda\alpha, \lambda = 2, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$, 对应的特征向量为 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$ 而 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, $A^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{21} + A_{31} \\ A_{12} + A_{22} + A_{32} \\ A_{13} + A_{23} + A_{33} \end{pmatrix} = \frac{|A|}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即 $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \frac{3}{2}$.

(16) 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球. 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数 _____.

【答案】 $\frac{1}{5}$.

【解答】 联合分布率 $(X, Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{20}$, $DX = \frac{1}{4}$, $DY = \frac{1}{4}$, 即 $\rho_{XY} = \frac{1}{5}$.

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1 - \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^2)) dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(18)(本题满分 12 分)

设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} (n=1, 2, \dots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

$$\text{【答案】 } S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ \frac{e}{e-1}, & x = 1 \end{cases}.$$

【解析】

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-nx} + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} \right], \text{ 收敛域 } (0, 1], S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x \in (0, 1]$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x\ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x]$$
$$= (1-x)\ln(1-x) + x, \quad x \in (0, 1)$$

$$S_2(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S_2(x) = 1$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ \frac{e}{e-1}, & x = 1 \end{cases}$$

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$, 求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

【答案】 66

【解析】 设拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$

$$L'_x = 2x\lambda + 4\mu = 0$$

$$L'_y = 4y\lambda + 2\mu = 0$$

$$L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - z = 6$$

$$4x + 2y + z = 30$$

解得驻点: $(4, 1, 12), (-8, -2, 66)$

C 上的点 $(-8, -2, 66)$ 到 xoy 面距离最大为 66.

(20)(本题满分 12 分)

设 $D \subset R^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1 .

(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【答案】 $-\pi$.

【解析】 (1) 由二重积分的几何意义知: $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma$, 当且仅当 $4 - x^2 - y^2$ 在 D 上

大于 0 时, $I(D)$ 达到最大, 故 $D_1: x^2 + y^2 \leq 4$ 且 $I(D_1) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 8\pi$.

(2) 补 $D_2: x^2 + 4y^2 = r^2$ (r 很小), 取 D_2 的方向为顺时针方向,

$$\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial D_1 + \partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} - \int_{\partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} \\
&= -\frac{1}{r^2} e^{r^2} \int_{\partial D_2} xdx + 4ydy - \frac{1}{r^2} e^{r^2} \int_{\partial D_2} ydx - xdy = \frac{1}{r^2} \iint_{D_2} -2d\sigma = -\pi.
\end{aligned}$$

(21)(本题满分 12 分)

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

(1)求正交矩阵 P ,使得 $P^T AP$ 为对角矩阵;

(2)求正定矩阵 C ,使得 $C^2 = (a+3)E - A$.

$$\text{【答案】(1) } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; (2) C = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

【解析】

$$(1) \text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 1)^2(\lambda - a - 2) = 0$$

得 $\lambda_1 = a+2, \lambda_2 = \lambda_3 = a-1$

当 $\lambda_1 = a+2$ 时

$$((a+2)E - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 的特征向量为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = a-1$ 所

$$((a-1)E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 的特征向量为 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } P = \left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^T AP = \Lambda = \begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix},$$

$$(2) P^T C^2 P = P^T (a+3)E - A)P = ((a+3)E - \Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^T C P P^T C P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T C P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } C = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

(22)(本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为 X , 较长的一段长度记为

Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$; (2) $f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$. (3) $-1 + 2 \ln 2$.

【解析】(1) 由题知: $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$;

(2) 由 $Y = 2 - X$, 即 $Z = \frac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数:

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$$

当 $z < 1$ 时, $F_z(z) = 0$;

当 $z \geq 1$ 时,

$$F_z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases};$$

$$(3) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = -1 + 2 \ln 2.$$