2010年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) C

解法 用求幂指数型极限的一般方法。求 $I=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$，

归结为求 $$W=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1+1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)=a-b.$$

因此 $I=e^{a-b}$.故应选 C.

(2) B

解 因为 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定,则对 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ 求偏导数得

$$F'_x=F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right),\quad F'_y=F'_1\cdot\frac{1}{x},\quad F'_z=F'_2\cdot\frac{1}{x},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2\cdot\frac{1}{x}}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{F'_1\frac{1}{x}}{F'_2\frac{1}{x}}=-\frac{F'_1}{F'_2},$$

则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF'_1+zF'_2}{F'_2}-\frac{yF'_1}{F'_2}=z.$

(3) D

解 显然广义积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 有两个瑕点 $x=0$ 与 $x=1$,则

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,瑕点为 $x=0$,

设 $n>1$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot x^{\frac{1}{n}}=0$,由于 $0<\frac{1}{n}<1$,故收敛.

设 $n=1,m=1,2$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在,故此时不是反常积分.

设 $n=1,m>2$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}\cdot x^{1-\frac{2}{m}}$ 存在,又 $0<1-\frac{2}{m}<1$,故收敛.

对于$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，瑕点为$x=1$，当$m$为正整数时，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}=0$，故收敛.

所以，不论m,n取何正整数，反常积分都收敛.故选 D.

(4) D

解
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

(5) A

解 由于$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times m$矩阵，故$r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，$r(\boldsymbol{B})\leqslant m$.

又$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，于是$m=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，$m=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant m$，

所以$r(\boldsymbol{A})=m$，$r(\boldsymbol{B})=m$.

(6) D

解 设λ是$\boldsymbol{A}$的特征值.由于$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，

所以$\lambda^2+\lambda=0$，即$(\lambda+1)\lambda=0$，

故$\boldsymbol{A}$的特征值为-1或 0.又$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，所以$\boldsymbol{A}$可相似于对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$.

且$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=3$，

于是$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) C

解 $P\{X=1\}=P\{X\leqslant1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.

(8) A

解 由于$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，
$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_0^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=a\times\frac{1}{2}+b\int_0^3\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$. 可得$2a+3b=4$，故应选 A.

二、填空题

(9) 0

解 由题设条件 $x'(t)=-\mathrm{e}^{-t}$，$y'(t)=\ln(1+t^2)$，

则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\ln(1+t^2)\mathrm{e}^t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=\left(-e^t\ln(1+t^2)-e^t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)(-e^t)$$

$$=e^{2t}\ln(1+t^2)+\frac{2te^{2t}}{1+t^2}=e^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right].$$

从而$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$,故应填 0.

(10) -4π

解 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$

$$\xlongequal{令\ t=\sqrt{x}}\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2t\,dt=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\,dt=2\left[(t^2\cdot\sin t)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\cdot 2t\,dt\right]$$

$$=-4\int_0^{\pi}t\cdot\sin t\,dt=4\left[(t\cdot\cos t)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos t\,dt\right]=4(-\pi-0)-4\sin t\Big|_0^{\pi}=-4\pi.$$

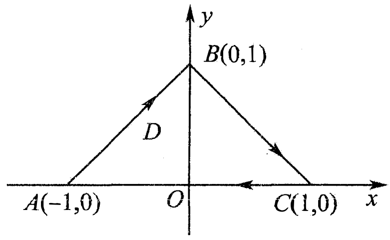
(11) 0

解 利用格林公式如右图所示,由题设条件知.

$L=\overline{AB}+\overline{BC}$.

记$L_1=\overline{CA}$,则$L+L_1$为闭曲线且所围区域记为D,

此时,$P(x,y)=xy$,$Q(x,y)=x^2$,且$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$,$\frac{\partial P}{\partial y}=x$.



由格林公式知

$$\oint_{-(L+L_1)}xy\,dx+x^2dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D x\,dx\,dy=0(由对称性),$$

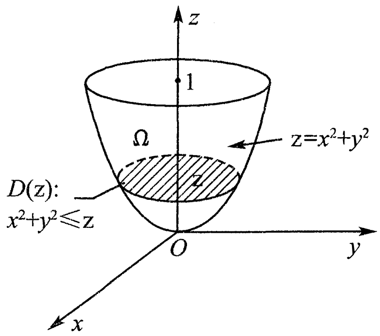
则$\int_L xy\,dx+x^2dy=-\int_{-L}xy\,dx+x^2dy$

$$=-\oint_{-(L+L_1)}xy\,dx+x^2dy+\int_{-L_1}xy\,dx+x^2dy$$

$$=\int_{-L_1}xy\,dx+x^2dy=\int_{-1}^{1}(x\cdot 0+x^2\cdot 0)dx=0.$$

(12) $\frac{2}{3}$

解 由题设所求坐标为$\bar{z}=\dfrac{\iiint_\Omega z\,dV}{\iiint_\Omega dV}$,



其中积分区域Ω如右图所示用平面$z=z(0\leqslant z\leqslant 1)$截积分区域$\Omega$得截面$D(z)$且$D(z)$是一圆域:$x^2+y^2\leqslant z$.

于是$\iiint_\Omega z\,dV=\int_0^1dz\iint_{D(z)}z\,dx\,dy=\int_0^1z\,dz\iint_{D(z)}dx\,dy$

$$=\int_0^1z\cdot\pi z\,dz=\pi\int_0^1z^2dz=\frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_\Omega dV=\int_0^1dz\iint_{D(z)}dx\,dy=\int_0^1\pi z\,dz=\frac{\pi}{2}z^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

即 $\bar{z}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3}$，故应填$\frac{2}{3}$.

(13) 6

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

对矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$进行初等行变换：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=6$.故应填 6.

(14) 2

解 因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k=1$，故

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=C\mathrm{e}=1\qquad(\text{其中}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda}).$$

即得 $C=\mathrm{e}^{-1}$.所以

$$P\{X=k\}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

则 $EX^2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)+1}{(k-1)!}=2$.

三、解答题

(15) **解** 由题设知，齐次方程对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，

解得特征根为：$r_1=1,r_2=2$.

于是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解是：

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x},(C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

由条件知原方程的一个特解可设为：$y_1=x(ax+b)\mathrm{e}^x$，(其中 a,b 为待定系数).

则 $y_1'=[ax^2+(2a+b)\cdot x+b]\mathrm{e}^x$，$y_1''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x$.

将 y_1,y_1',y_1'' 代入原方程并整理得

$$y_1''-3y_1'+2y_1=(2a-b-2ax)\mathrm{e}^x=2x\mathrm{e}^x$$

比较等式两端 x 同次幂的系数得

$$\begin{cases}-2a=2\\2a-b=0\end{cases},\text{即}\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$$

于是特解 $y_1=-x(x+2)\mathrm{e}^x$.

故原方程通解为

$$y=Y+y_1=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x(\text{其中 }C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

(16) **解** 由 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

则 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot2x-x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}2x=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

$f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot2x=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，$x=\pm1$.

则 $f''(0)=2\int_{1}^{0}e^{-t^2}dt<0$，$f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$，

所以 $f(0)=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ 是极大值，$f(\pm 1)=0$ 是极小值.

由于当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$.

故　$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

　　$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(17) **解**　(Ⅰ) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$，

故当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n$，所以 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$.

所以 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(1+n)^2}$，

而 $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{n+1}t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}$，

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+n)^2}=0$，

根据夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18) **解**　① 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}\right|=x^2$，

所以由比值法知，当 $x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数收敛；当 $x^2>1$ 即 $|x|>1$ 时，级数发散.

于是可知幂级数的收敛半径 $R=1$，即收敛区间为 $(-1,1)$；

当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 为交错级数，由莱布尼茨定理知级数收敛，

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

② 记 $S(x)$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的和函数，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot S_1(x)$$

其中 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$x\in[-1,1]$

由幂级数和函数的性质得

$$\begin{aligned}S_1'(x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\\&=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots\\&=\frac{1}{1+x^2},x\in[-1,1].\end{aligned}$$

所以　$S_1(x)=\int_0^x S_1'(t)dt+S_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+0=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x$.

故　$S(x)=xS_1(x)=x\arctan x, x\in[-1,1]$.

(19) **解**　① 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则 $F(x,y,z)=0$ 为椭球面 S 的方程，设点 P 的坐标为(x,y,z)，由题设条件知曲面 S 在点 P 处的切平面法向量为：

$$\boldsymbol{n}_1=\{F_x',F_y',F_z'\}=\{2x,2y-z,2z-y\},$$

又 xOy 平面的法向量为：$\boldsymbol{n}_2=\{0,0,1\}$，由于点 P 处的切平面垂直于 xOy 平面，于是 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，即 $y=2z$.

又因为点 P 在曲面 S 上，所以点 P 的坐标(x,y,z)满足曲面 S 的方程：$x^2+y^2+z^2-yz=1$，从而知动点 P 的轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$$

② 根据题设条件知，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$ 中积分曲面 Σ 是椭球面 S 位于平面 $y=2z$ 上方的部分，因此在 Σ 上：$y\leqslant 2z$，于是 $|y-2z|=2z-y$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$$

在曲面 Σ 的方程：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两端分别对 x、y 求偏导数（此时，$z=z(x,y)$）得

$$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$$

$$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}$$

将曲面 Σ 向 xOy 面投影，得投影域为：

$$D_{xy}:x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1.$$

又因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2-yz)+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad(\text{因 }x^2+y^2+z^2-yz=1)$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\dfrac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20) **解**　（Ⅰ）已知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 2 个不同的解，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})<3$.

又 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，知 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=2$，此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，故 $\lambda=-1$.

又由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$ 得 $a=-2$.

(Ⅱ) 因 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$

则原方程组的等价方程组为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}+x_3\\x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$,其中 x_3 为自由未知量.

令 $x_3=0$,得方程组特解 $\boldsymbol{u}_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

又方程组对应的齐次方程组的等价方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$,其中 x_3 为自由未知量.

令 $x_3=1$,得齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21) **解** (Ⅰ) 由于二次型在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0.$$

由于 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的,设属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$,即 $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$,取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交的,即为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相互正交的,所以只需单位化:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

从而 $\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

（Ⅱ）由于$\boldsymbol{A}$的特征值为1,1,0,所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值为2,2,1,则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值全大于零，故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$是正定矩阵.

（22）**解** 因为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}=A\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$

$$=A\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$$

由概率密度的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}y=A\pi$$

故 $\quad A=\dfrac{1}{\pi}.$

从而 $\quad f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$

又 $\quad f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$

所以 $\quad f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$

（23）**解** 因为 $N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2),$

所以
$$\begin{aligned}ET&=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1EN_1+a_2EN_2+a_3EN_3\\&=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2\\&=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2\end{aligned}$$

由 T 是 θ 的无偏估计量,可知 $ET=\theta$,

则 $\quad \begin{cases}na_1=0,\\ n(a_2-a_1)=1,\\ n(a_3-a_2)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1=0,\\ a_2=\dfrac{1}{n},\\ a_3=\dfrac{1}{n}.\end{cases}$

故 $\quad T=0\times N_1+\dfrac{1}{n}\times N_2+\dfrac{1}{n}\times N_3=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)=\dfrac{1}{n}(n-N_1).$

$$DT=D\left[\frac{1}{n}(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot(1-\theta)\cdot\theta=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$