

# 2010 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)C. (2)B. (3)D. (4)D. (5)A. (6)D. (7)C. (8)A.

## 二、填空题

(9)0. (10) $-4\pi$ . (11)0. (12) $\frac{2}{3}$ . (13)6. (14)2.

## 三、解答题

(15)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - (x^2 + 2x) e^x$ .

(16)  $f(x)$  的单调增加区间为  $(-1, 0)$  和  $(1, +\infty)$  (或者写为  $[-1, 0]$  和  $[1, +\infty)$ );

$f(x)$  的单调减少区间为  $(-\infty, -1)$  和  $(0, 1)$  (或者写为  $(-\infty, -1]$  和  $[0, 1]$ );

$f(x)$  的极小值为  $f(\pm 1) = 0$ , 极大值为  $f(0) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right)$ .

(17) (I)  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ; (II) 0.

(18) 收敛域为  $[-1, 1]$ ; 和函数为  $x \arctan x$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ).

(19) 点  $P$  的轨迹  $C$  为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \\ y = 2z, \end{cases}$  或者  $\begin{cases} x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, \\ y = 2z; \end{cases}$  曲面积为  $I = 2\pi$ .

(20) (I)  $\lambda = -1, a = -2$ ;

(II)  $\mathbf{x} = c(1, 0, 1)^T + \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)^T$ , 其中  $c$  为任意常数.

(21) (I)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ;

(II) 证明略.

(22)  $A = \frac{1}{\pi}$ ;  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2}$ ,  $-\infty < y < +\infty$ .

(23)  $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \frac{1}{n}$ ;  $D(T) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ .

# 2011 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)C. (2)C. (3)A. (4)B. (5)D. (6)D. (7)D. (8)B.

## 二、填空题

(9) $\ln(\sqrt{2}+1)$ . (10) $e^{-x}\sin x$ . (11)4. (12) $\pi$ . (13)1. (14) $\mu\sigma^2 + \mu^3$ .

## 三、解答题

(15) $e^{-\frac{1}{2}}$ .

(16) $f'_1(1,1) + f''_{11}(1,1) + f''_{12}(1,1)$ .

(17)当  $k \leq 1$  时,原方程有 1 个实根;当  $k > 1$  时,原方程有 3 个不同的实根.

(18)证明略.

(19) $a$ .

(20)( I ) $a = 5$ ;

( II ) $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

(21)(I)矩阵  $A$  的特征值为  $-1, 1, 0$ , 对应的特征向量依次为  $c_1(1, 0, -1)^T, c_2(1, 0, 1)^T, c_3(0, 1, 0)^T$ , 其中  $c_1, c_2, c_3$  均为任意非零常数;

$$(II) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(22)( I )

$Y$			
$X \backslash$	$-1$	$0$	$1$
$0$	$0$	$\frac{1}{3}$	$0$
$1$	$\frac{1}{3}$	$0$	$\frac{1}{3}$

( II )

$Z$	$-1$	$0$	$1$
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

( III )0.

(23)( I ) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ ;

( II ) $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$ .

# 2012 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C. (2) A. (3) B. (4) D. (5) C. (6) B. (7) A. (8) D.

## 二、填空题

(9)  $e^x$ . (10)  $\frac{\pi}{2}$ . (11)  $i + j + k$ . (12)  $\frac{\sqrt{3}}{12}$ . (13) 2. (14)  $\frac{3}{4}$ .

## 三、解答题

(15) 证明略.

(16) 极大值为  $e^{-\frac{1}{2}}$ , 极小值为  $-e^{-\frac{1}{2}}$ .

(17) 收敛域为  $(-1, 1)$ , 和函数为  $S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & -1 < x < 1, \text{ 且 } x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

(18)  $f(t) = \ln |\sec t + \tan t| - \sin t, 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ ; 面积为  $\frac{\pi}{4}$ .

(19)  $I = \frac{\pi}{2} - 4$ .

(20) (I)  $|A| = 1 - a^4$ ;

(II)  $a = -1$ , 通解为  $x = c(1, 1, 1, 1)^T + (0, -1, 0, 0)^T$ , 其中  $c$  为任意常数.

(21) (I)  $a = -1$ ;

(II)  $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 二次型  $f$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $2y_2^2 + 6y_3^2$ .

(22) (I)  $P\{X=2Y\} = \frac{1}{4}$ ;

(II)  $\text{Cov}(X-Y, Y) = -\frac{2}{3}$ .

(23) (I)  $f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty$ ;

(II)  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$ ;

(III) 证明略.

# 2013 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) D. (2) A. (3) C. (4) D. (5) B. (6) B. (7) A. (8) C.

## 二、填空题

(9) 1. (10)  $C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}$ . (11)  $\sqrt{2}$ . (12)  $\ln 2$ . (13)  $-1$ . (14)  $1 - e^{-1}$ .

## 三、解答题

(15)  $-4 \ln 2 + 8 - 2\pi$ .

(16) (I) 证明略;

(II)  $S(x) = 2e^x + e^{-x}$ .

(17)  $f(x, y)$  有唯一极值点  $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$  且为极小值点, 极小值为  $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$

(18) 证明略.

(19) (I)  $x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1$ ;

(II)  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{7}{5}\right)$ .

(20) 当  $a = -1, b = 0$  时, 所有矩阵  $C$  为  $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1, c_2$  为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (I)  $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2; \end{cases}$

(II)  $\frac{8}{27}$ .

(23) (I)  $\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ;

(II)  $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ .

# 2014 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C. (2) D. (3) D. (4) A. (5) B. (6) A. (7) B. (8) D.

## 二、填空题

(9)  $2x - y - z - 1 = 0$ . (10) 1. (11)  $xe^{2x+1}$ . (12)  $\pi$ . (13)  $[-2, 2]$ . (14)  $\frac{2}{5n}$ .

## 三、解答题

(15)  $\frac{1}{2}$ .

(16) 极小值为  $f(1) = -2$ .

(17)  $f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$ .

(18)  $-4\pi$ .

(19) 证明略.

(20) (I)  $(-1, 2, 3, 1)^T$ ;

(II)  $B = \begin{pmatrix} -c_1 + 2 & -c_2 + 6 & -c_3 - 1 \\ 2c_1 - 1 & 2c_2 - 3 & 2c_3 + 1 \\ 3c_1 - 1 & 3c_2 - 4 & 3c_3 + 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2, c_3$  为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (I)  $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases};$

(II)  $\frac{3}{4}$ .

(23) (I)  $E(X) = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$ ,  $E(X^2) = \theta$ ;

(II)  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ;

(III) 存在实数  $a = \theta$ , 使得对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ .

# 2015 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C. (2) A. (3) B. (4) B. (5) D. (6) A. (7) C. (8) D.

## 二、填空题

(9)  $-\frac{1}{2}$ . (10)  $\frac{\pi^2}{4}$ . (11)  $-\mathrm{d}x$ . (12)  $\frac{1}{4}$ . (13)  $2^{n+1}-2$ . (14)  $\frac{1}{2}$ .

## 三、解答题

(15)  $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$ .

(16)  $f(x) = \frac{8}{4-x}, x \in I$ .

(17) 3.

(18) (I) 证明略;

(II)  $f'(x) = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)\cdots u_{n-1}(x)u_n'(x)$ .

(19)  $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .

(20) (I) 证明略;

(II) 当  $k=0$  时, 存在非零向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同, 满足上述条件的的所有  $\xi = c\alpha_1 - c\alpha_3, c$  为任意非零常数.

(21) (I)  $a=4, b=5$ ;

(II)  $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

(22) (I)  $Y$  的概率分布为  $P\{Y=k\} = \frac{1}{64}(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}, k=2, 3, \cdots$ ;

(II)  $E(Y) = 16$ .

(23) (I)  $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$ , 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ;

(II)  $\hat{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

# 2016 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C. (2) D. (3) A. (4) D. (5) C. (6) B. (7) B. (8) A.

## 二、填空题

(9)  $\frac{1}{2}$ . (10)  $j + (y-1)k$ . (11)  $-dx + 2dy$ . (12)  $\frac{1}{2}$ . (13)  $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$ .

(14) (8.2, 10.8).

## 三、解答题

(15)  $5\pi + \frac{32}{3}$ .

(16) (I) 证明略; (II)  $\frac{3}{k}$ .

(17)  $I(t) = e^{2-t} + t$ ;  $I(t)$  的最小值为 3.

(18)  $\frac{1}{2}$ .

(19) 证明略.

(20) 当  $a = -2$  时,  $AX = B$  无解;

当  $a = 1$  时,  $AX = B$  有无穷多解,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2$  为任意常数;

当  $a \neq -2$  且  $a \neq 1$  时,  $AX = B$  有唯一解  $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(21) (I)  $\begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(II)  $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$ ,  $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$ ,  $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$ .

(22) (I)  $f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ ; (II)  $U$  与  $X$  不相互独立;

(III)  $F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 < z \leq 1, \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}z^2 + 3z - 1, & 1 < z \leq 2, \\ 1, & z > 2. \end{cases}$

(23) (I)  $f_T(t) = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$  (II)  $a = \frac{10}{9}$ . 7

# 2017 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)A. (2)C. (3)D. (4)C. (5)A. (6)B. (7)A. (8)B.

## 二、填空题

(9)0. (10) $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$ . (11)-1. (12) $\frac{1}{(1+x)^2}$ . (13)2. (14)2.

## 三、解答题

$$(15) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(1,1), \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = f''_{11}(1,1) + f'_1(1,1) - f'_2(1,1).$$

$$(16) \frac{1}{4}.$$

(17)极大值为  $y(1) = 1$ , 极小值为  $y(-1) = 0$ .

(18)证明略.

$$(19) (I) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0; \end{cases}$$

(II) 64.

(20) (I) 证明略;

(II)  $\mathbf{x} = c(1, 2, -1)^T + (1, 1, 1)^T$ ,  $c$  为任意常数.

$$(21) a = 2, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$(22) (I) \frac{4}{9};$$

$$(II) f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1, \\ z-2, & 2 < z < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(23) (I) f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0; \end{cases}$$

$$(II) \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{Z}, \text{ 其中 } \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i;$$

$$(III) \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}.$$



# 2018 年真题参考答案

## 一、选择题

(1)D. (2)B. (3)B. (4)C. (5)A. (6)A. (7)A. (8)D.

## 二、填空题

(9)  $-2$ . (10)  $2\ln 2 - 2$ . (11)  $i - k$  或  $(1, 0, -1)$ . (12)  $-\frac{\pi}{3}$ . (13)  $-1$ . (14)  $\frac{1}{4}$ .

## 三、解答题

(15)  $\frac{e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1}}{2} - \frac{1}{6}(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} + C$ , 其中  $C$  为任意常数.

(16) 三个图形的面积之和存在最小值, 最小值为  $\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$ .

(17)  $\frac{14\pi}{45}$ .

(18) (I)  $y = x - 1 + Ce^{-x}$ , 其中  $C$  为任意常数.

(II) 证明略.

(19) 证明略.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(20) (I) 当  $a \neq 2$  时,  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解为  $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$ ; 当  $a = 2$  时,  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解为  $(x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, -1, 1)^T$ , 其中  $k$  为任意常数.

(II) 当  $a \neq 2$  时,  $f$  的规范形为  $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ; 当  $a = 2$  时,  $f$  的规范形为  $f = z_1^2 + z_2^2$ .

(21) (I)  $a = 2$ .

(II) 满足  $AP = B$  的可逆矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数, 且  $k_2 \neq k_3$ .

(22) (I)  $\text{Cov}(X, Z) = \lambda$ .

$$(II) Z \text{ 的分布律为 } P\{Z = i\} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, & i > 0, \\ e^{-\lambda}, & i = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^{-i} e^{-\lambda}}{(-i)!}, & i < 0. \end{cases}$$

(23) (I)  $\sigma$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}$ .

(II)  $E(\hat{\sigma}) = \sigma, D(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{n}$ .

# 2019 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C. (2) B. (3) D. (4) D. (5) C. (6) A. (7) C. (8) A.

## 二、填空题

(9)  $\frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}$ . (10)  $\sqrt{3e^x - 2}$ . (11)  $\cos \sqrt{x}$ . (12)  $\frac{32}{3}$ . (13)  $k(-1, 2, -1)^T$ . (14)  $\frac{2}{3}$ .

## 三、解答题

(15) (I)  $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

(II) 凹区间为  $(-\sqrt{3}, 0)$  和  $(\sqrt{3}, +\infty)$ , 凸区间为  $(-\infty, -\sqrt{3})$  和  $(0, \sqrt{3})$ , 拐点为  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ ,  $(0, 0)$  和  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ .

(16) (I)  $a = -1, b = -1$ ; (II)  $\frac{13\pi}{3}$ .

(17)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\pi - 1}$ .

(18) (I) 证明略; (II)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ .

(19)  $\Omega$  的形心坐标为  $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

(20) (I)  $a = 3, b = 2, c = -2$ ;

(II) 证明略, 过渡矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(21) (I)  $x = 3, y = -2$ ;

(II) 满足  $P^{-1}AP = B$  的可逆矩阵为  $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

(22) (I)  $Z$  的概率密度为  $f_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0; \end{cases}$

(II) 当  $p = \frac{1}{2}$  时,  $X$  与  $Z$  不相关;

(III)  $X$  与  $Z$  不相互独立.

(23) (I)  $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ;

(II)  $\sigma^2$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$ .