# 2011年（数一）真题答案解析

## 一、选择题

(1) C

**解** 令 $u=(x-1)(x-2)^2, v=(x-3)^3(x-4)^4$，

则 $y=uv, y'=u'v+uv', y''=u''v+2u'v'+uv'', y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$，

由于已知函数 $y(x)$ 具有任意阶导数，因此在拐点处必有 $y''(x)=0$，而 $y''(1)\neq 0, y''(2)\neq 0$，$y''(3)=0, y''(4)=0$，于是可排除 A、B，即点 $(3,0)$ 与 $(4,0)$ 是拐点的可疑点.

而 $y'''(3)=36>0$，即 $y''(x)$ 在 $x=3$ 的小邻域内单调增加，由 $y''(3)=0$ 知 $y''(x)$ 在 $x=3$ 左、右两侧符号由负变为正，即曲线 $y(x)$ 在点 $(3,0)$ 两侧凹凸性相反，由定义知点 $(3,0)$ 为拐点；而 $y''(x)$ 在 $x=4$ 两侧符号相同，则 $(4,0)$ 不是拐点.故应选 C.

(2) C

**解** 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域必关于 $x=1$ 对称(端点除外)，据此可排除选项 A、B；

将 $x=0$ 代入得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，因为 $\{a_n\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由莱布尼茨审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

将 $x=2$ 代入得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其前 $n$ 项和数列为：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，由条件知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，

综上知：幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$.

(3) A

**解** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y), \dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)}$，

若函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值，则

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0, \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)\cdot\dfrac{f'(0)}{f(0)}=0,\end{cases} \quad ①$$

且 
$$B^2-AC=\left(\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}\right)^2-\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}$$
$$=\dfrac{[f'(0)]^4}{f^2(0)}-f''(0)\ln f(0)\cdot f(0)\dfrac{f(0)f''(0)-[f'(0)]^2}{f^2(0)}<0, \quad ②$$

$$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=f''(0)\ln f(0)>0, \quad ③$$

由 ①、②、③ 式得 $f(0)>1, f''(0)>0$,故应选 A.

(4) B

**解** 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$\sin x<\cos x<1<\cot x$,于是 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$,

由定积分性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x,$$

即 $I<K<J$.故应选 B.

(5) D

**解** 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$,

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2$,于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$,故应选 D.

(6) D

**解** 因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量,所以 $r(\boldsymbol{A})=3$,于是 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,

故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 3 个线性无关的解向量,排除选项 A,B.

又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=3$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组中含有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,

因为$(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,显然 D 正确.

(7) D

**解** $\because f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\geqslant 0$,

而$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)F_1(x)\mathrm{d}x$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)\mathrm{d}F_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\mathrm{d}F_2(x)$

$=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\mathrm{d}F_2(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)\mathrm{d}F_2(x)=1$,

$\therefore f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 满足概率密度的两条性质.故应选 D.

(8) B

**解** 因为 $UV=\begin{cases}XY, & \text{当 } X\geqslant Y \text{ 时},\\ YX, & \text{当 } X<Y \text{ 时},\end{cases}$

所以 $UV=XY$,于是 $E(UV)=E(XY)=EX\cdot EY$.故应选 B.

## 二、填空题

(9) $\ln(1+\sqrt{2})$

**解** 因为 $y'(x)=\tan x$.

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

(10) $\mathrm{e}^{-x}\sin x$

**解** 由条件知:$P(x)=1, Q(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$,于是微分方程通解为

$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+C)$,

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$,因此所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

(11) 4

**解** 因为 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，所以

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin(xy)}{1+(xy)^2}\cdot y=\frac{y\sin(xy)}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y^2\cdot\frac{(1+x^2y^2)\cdot\cos(xy)-2xy\cdot\sin(xy)}{(1+x^2y^2)^2},$$

于是 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$.

(12) π

**解** 由题设条件知 $P=xz,Q=x,R=\frac{y^2}{2}$，

根据斯托克斯公式得

$$\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma(y-0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(1-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是位于柱面 $x^2+y^2=1$ 内的平面 $z=x+y$，取上侧，且

$$\iint_\Sigma y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\iint_\Sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint_\Sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\leqslant1}1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

其中 $D_{xy}$ 是 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影.

因此 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=\pi$.

(13) 1

**解** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，

因为二次型经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，再由 $|\boldsymbol{A}|=-(a-1)^2=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$，得 $a=1$.

(14) $\mu\sigma^2+\mu^3$

**解**：因为 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，

所以 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $X,Y$ 相互独立.

则 $E(XY^2)=EX\cdot E(Y^2)=EX\cdot[DY+(EY)^2]=\mu(\mu^2+\sigma^2)=\mu\sigma^2+\mu^3$.

## 三、解答题

(15) **解** 令 $y=\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$，则当 $x>0$ 时，

$$\ln y=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\frac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{\mathrm{e}^x-1},$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln y)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\ln(1+x)}\cdot\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(1+x)\cdot\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(1+x)\cdot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x(1+x)+x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2}.$$

当 $x<0$ 时，$\ln y=\dfrac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{\mathrm{e}^x-1}$，同样可得

$$\lim_{x\to0^-}\ln y=-\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(16) **解**　由题设条件得 $g'(1)=0, g(1)=1$.

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f_1'+yg'(x)\cdot f_2'$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}''[g(x)+xg'(x)]+g'(x)\cdot f_2'+y\cdot g(x)\cdot g'(x)\cdot f_{22}''$,

将 $x=1, y=1, g'(1)=0, g(1)=1$ 代入上式得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

(17) **解**　令 $f(x)=k\arctan x-x$，则

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

1) 当 $k\leqslant1$ 时，$f'(x)=\dfrac{-[(1-k)+x^2]}{1+x^2}\leqslant0$，因此，$f(x)$ 单调减少，

此时 $f(x)$ 只有一个零点，即 $f(0)=0$，即原方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根 $x=0$；

2) 当 $k>1$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\sqrt{k-1}, x_2=\sqrt{k-1}$，

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 时，$f'(x)<0$，因此，$f(x)$ 单调减少；

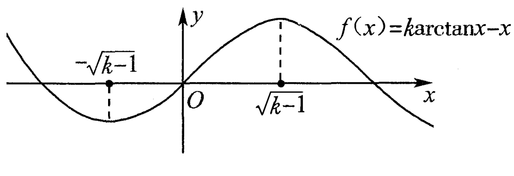
当 $x\in(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 时，$f'(x)>0$，因此，$f(x)$ 单调增加；

当 $x\in(\sqrt{k-1},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，因此，$f(x)$ 单调减少，

所以 $x_1=-\sqrt{k-1}$ 是极小值点，$x_2=\sqrt{k-1}$ 是极大值点；

由于 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 的极大值 $f(\sqrt{k-1})>0$，$f(x)$ 的极小值 $f(-\sqrt{k-1})<0$.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，$f(0)=0$，




综上知：$f(x)$ 在 $k>1$ 时在 3 个不同的零点且分别位于 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$，$(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内，此时函数 $f(x)$ 的草图如右图所示，即原方程在 $k>1$ 时有三个不同的实根.

(18)（Ⅰ）**证**　利用拉格朗日微分中值定理

令 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right)$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=f'(\xi)\cdot\frac{1}{n}\left(0<\xi<\frac{1}{n}\right),$$

即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln1=\frac{1}{(1+\xi)n}$，

$\because 0<\xi<\frac{1}{n}$，$\therefore \frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+\xi}<1$，

则 $\frac{1}{1+n}<\frac{1}{n(1+\xi)}<\frac{1}{n}$，

故有 $\frac{1}{1+n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结论知 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，

因此有 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，

令 $n=1,2,3,\cdots,n$ 得

$$\ln2-\ln1<1,$$
$$\ln3-\ln2<\frac{1}{2},$$
$$\ln4-\ln3<\frac{1}{3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

将上述各不等式两端分别相加得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是 $a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0$，

即数列 $\{a_n\}$ 有下界.

又因为 $a_n-a_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0$（由（Ⅰ）的结论）

即数列 $\{a_n\}$ 是单调下降的.

综上知数列 $\{a_n\}$ 单调下降且有界.

根据极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且有限，故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19) **解**　由题设条件知积分区域 $D$ 可表示为：$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$，

于是有

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[\int_0^1 y\,\mathrm{d}f'_x(x,y)\right]$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[(yf'_x(x,y))\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]$$
$$=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,1)-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=(xf(x,1))\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,y)$$
$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,y)\quad(\because f(x,1)=0)$$
$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\left[(xf(x,y))\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\int_0^1\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\quad(\because f(1,y)=0)$$
$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a,$$

故 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a.$

(20)**解** （Ⅰ）因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\ &\cdots\cdots& \\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\neq0$，

而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩小于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩，从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

解得 $a=5$.

（Ⅱ）**解** 设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$，

则 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&4&-3\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix},$$

从而 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

$$=(2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

即 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$

(21) 解　(Ⅰ) 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，由题设条件知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$.

所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其对应的特征向量.

又秩$(\boldsymbol{A})=2$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而，另一特征值 $\lambda_3=0$，

设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $-1,1,0$，其对应的特征向量分别为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$k_3\boldsymbol{\alpha}_3$（其中 $k_i\neq 0$，$i=1,2,3$）.

(Ⅱ) 由于不同特征值的特征向量正交，则只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(22) 解　(Ⅰ) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 可知 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$，

于是　$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$，

则　$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\dfrac{1}{3}$，

同理　$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{1}{3}$，

即概率分布如下

| $X \backslash Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ |
| $1$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ |

（Ⅱ）$Z=XY$ 的可能取值为 $-1,0,1$.

$P\{XY=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$,

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$,

$P\{XY=0\}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

故 $Z$ 的分布律为

| $Z$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

（Ⅲ）$EX=\frac{2}{3}, EY=0, E(XY)=0$,

故 $\quad \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$,

则 $\quad \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$.

(23)解 （Ⅰ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值,则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}},$$

则 $\quad \ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$,

令 $\quad \frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^4}=0$,

得 $\quad \sigma^2$ 的极大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

（Ⅱ）因为 $\quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$,

所以 $\quad E\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=n, D\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=2n$,

于是 $\quad E(\hat{\sigma}^2)=\frac{\sigma^2}{n}E\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\sigma^2$,

$$D(\hat{\sigma}^2)=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{2}{n}\sigma^4.$$