2007年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) B

解 当 $x\to 0^+$ 时，

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left[1+\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1\right)\right]=\ln\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}.$$故应选 B.

(2) D

解 只有间断点 $x=0$.由于 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，

故 $x=0$ 为垂直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0+\ln 1=0$，

故 $x\to-\infty$ 时有水平渐近线 $y=0$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$，

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0,$$

故 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

综上，所求曲线的渐近线条数为 3 条，答案为 D.

(3) C

解 如题目中图所示，大小半圆的面积分别为 π 与 $\frac{1}{4}\pi$.

按定积分的几何意义知，当 $x\in[0,2]$ 时 $f(x)\geqslant 0$，当 $x\in[2,3]$ 时 $f(x)\leqslant 0$. 则

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^2 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi.$$

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 为偶函数.

得 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{8}\pi$， $F(-2)=F(2)=\frac{1}{2}\pi$.

因此 $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.故应选 C.

(4) D

解 由选项 A 的条件得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，从而 $f(0)=0$.

由选项 B 的条件得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=0$，从而 $f(0)=0$.

由选项 C 的条件得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 存在.

因此 A、B、C 正确.故应选 D.

(5) D

解 由 $f''(x)>0\ (x>0)$ 得 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调上升.$f(x)$ 只有以下三种情形：

(1)由存在 $x_0\in(0,+\infty)$，$f'(x_0)=0$ 得

$$f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x>x_0.\end{cases}$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,x_0]\searrow$，在 $[x_0,+\infty)\nearrow$，

又 $x>x_1>x_0$ 时

$f(x)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$，

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(2)对所有 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(3)对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)\searrow$，则或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\exists$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0\ (x>0)$.

$u_n=f(n)\searrow$，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$.

又如，$f(x)=\dfrac{1}{x}-x\Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0(x>0)$.

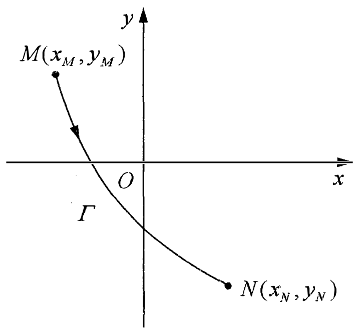
$u_n=f(n)=\dfrac{1}{n}-n\searrow$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}u(n)=-\infty$.

所以 A、B 不正确.

由(1)，(2)得 C 不正确，而 D 正确.故应选 D.

(6) B

解 记点 M 与 N 的坐标分别为 (x_M,y_M)，(x_N,y_N)，如右图所示.将 $f(x,y)=1$ 代入被积表达式得



A 项 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x=\int_\Gamma 1\mathrm{d}x=x_N-x_M>0$；

B 项 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma 1\mathrm{d}y=y_N-y_M<0$；

C 项 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=\Gamma$ 的弧长 >0；

D 项 $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y=0$，

因为将 $f(x,y)=1$ 求全微分得 $f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y=0$.正确答案为 B.

(7) A

解 因为 $$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.故应选 A.

(8) B

解 根据相似的必要条件：$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$，易见 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似.由此可排除 A 与 C.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$，

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3，3，0.故二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$.而二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数亦为 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.故应选 B.

(9) C

解 设事件 A=“第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”，则 A 表示共射击 4 次，其中前 3 次只有 1 次击中目标，且第 4 次击中目标.因此

$P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$. 故应选 C.

(10) A

解 由于(X,Y)服从二维正态分布，因此 X 与 Y 不相关可知 X 与 Y 相互独立.于是有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x).$$

选项 A 正确.

若仔细分析，由于 X 与 Y 不相关，即 $\rho=0$，因此(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]}.$$

而 X,Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}=f_X(x)$$，故应选 A.

二、填空题

(11) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$

解 原式 $=-\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2+\int_1^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}.$

(12) $yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y\, f_2'$

解 由多元复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}(x^y)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}(y^x)=yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y\, f_2'.$$

(13) $C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}$

解 特征方程 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 的根为 $\lambda=1,\lambda=3$.

非齐次项 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$，$\alpha=2$ 不是特征根，非齐次方程有特解 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$.

代入方程得 $(4A-8A+3A)\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow A=-2$.

因此，通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}$.

(14) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

解 如图所示.Σ 关于 yOz 平面对称，x 关于 x 为奇函数，从而 $\oiint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0$.

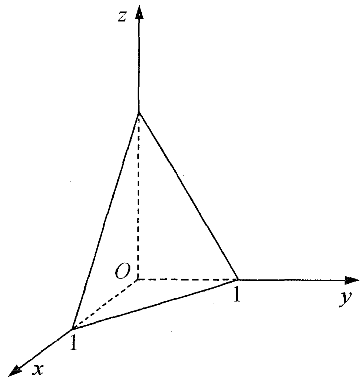
由变量的轮换对称性

得 $\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S.$

即 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S$

$=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$

$=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}1\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\cdot$曲面 Σ 的面积.



记 Σ 在第一卦限部分的面积为 σ_1，则 $\sigma_1\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，即 $\sigma_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此 $I=\dfrac{1}{3}\cdot 8\sigma_1=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}.$

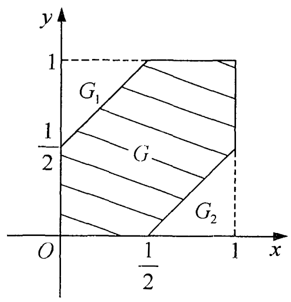
(15) 1

解 因为$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

可知秩 $r(\boldsymbol{A}^3)=1$.

(16) $\dfrac{3}{4}$

解 这是一个几何型概率的计算题.设所取的两个数分别为 x 和 y，则以 x 为横坐标以 y 为纵坐标的点(x,y)随机地落在边长为 1 的正方形内，如右图所示.



设事件 A 表示“所取两数之差的绝对值小于$\dfrac{1}{2}$”，则样本空间 $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$；事件 A 的样本点集合为区域G 中所有的点，而$G=\{(x,y):0<x<1,0<y<1,|y-x|<\dfrac{1}{2}\}$.区域$\Omega$ 的面积 $S_\Omega=1$，区域G 的面积　$S_G=S_\Omega-S_{G_1}-S_{G_2}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}.$

因此　$P(A)=\dfrac{S_G}{S_\Omega}=\dfrac{3}{4}.$

三、解答题

(17) **解**　由
$$\begin{cases}f'_x=2x-2xy^2=0,\\ f'_y=4y-2x^2y=0,\end{cases}$$
得 D 内驻点为$(\pm\sqrt{2},1)$，$f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

在边界 $L_1:y=0(-2\leqslant x\leqslant 2)$上，记
$$g(x)=f(x,0)=x^2,$$
显见在 L_1 上 $f(x,y)$的最大值为 4，最小值为 0.

在边界 $L_2:x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$上，记

$$h(x)=f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x^2+8(-2\leqslant x\leqslant 2),$$

由 $h'(x)=4x^3-10x=0$ 得驻点

$$x_1=0,x_2=-\sqrt{\frac{5}{2}},x_3=\sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$h(0)=f(0,2)=8.$$

$$h\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}.$$

综上，$f(x,y)$在 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

(18) **解** 取Σ_1为 xOy 平面上被椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由Σ和Σ_1围成的空间闭区域.根据高斯公式，得

$$\begin{aligned}I_1&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z+0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 3z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 6\pi z(1-z)\,\mathrm{d}z=\pi.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}I_2&=\iint\limits_{\Sigma_1}xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-3\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

所以

$$I=I_1-I_2=\pi.$$

(19) **证** 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(a)=h(b)=0$.

设 $f(x),g(x)$在(a,b)内的最大值 M 分别在$\alpha\in(a,b),\beta\in(a,b)$取得.

当$\alpha=\beta$时，取 $\eta=\alpha$，则 $h(\eta)=0$.

当$\alpha\neq\beta$时，

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geqslant 0,$$

$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M\leqslant 0,$$

由介值定理，存在介于α与β之间的点η，使得 $h(\eta)=0$.

综上，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $h(\eta)=0$.

因此由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$，使得

$$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0,$$

再由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $h''(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)=g''(\xi).$$

(20) **解** (Ⅰ) 对 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 求一、二阶导数，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

代入 $y''-2xy'-4y=0$ 并整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0,$$

于是
$$\begin{cases}2a_2-4a_0=0,\\(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0,n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

从而
$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots.$$

(Ⅱ) 因为 $y(0)=a_0=0,y'(0)=a_1=1$ 故

$$a_{2n}=0,n=0,1,2,\cdots,$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot4\cdot2}a_1$$

$$=\frac{1}{n!},n=1,2,\cdots,$$

从而
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},x\in(-\infty,+\infty).$$

(21) **解** 因为方程组①与②的公共解,即为联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases} \qquad ③$$

的解.

对方程组③的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施以初等行变换,有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right)=\boldsymbol{B}.$$

由于方程组③有解,故③的系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩,于是$(a-1)(a-2)=0$,即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时,

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此①与②的公共解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

当 $a=2$ 时，

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此①与②的公共解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(22) **解**　(Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1$，知

$$\boldsymbol{B\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\lambda}_1^5-4\boldsymbol{\lambda}_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3$,所以 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_i^5-4\boldsymbol{\lambda}_i^3+1(\boldsymbol{i}=1,2,3)$，即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $-2,1,1$.

由 $\boldsymbol{B\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$，知 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵.设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的任一特征向量.因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，所以 $(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{\alpha}_1=0$，即

$$x_1-x_2+x_3=0.$$

解得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_2,k_3 为不全为零的任意常数.

(Ⅱ) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

(23) 解 (Ⅰ) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(x-\frac{5}{8}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7}{24}.$$

(Ⅱ) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$,

其中 $f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x),0<x<1,0<z-x<1,\\0, \quad 其他,\end{cases}$

$$=\begin{cases}2-z, & 0<x<1,0<z-x<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时,$f_Z(z)=0$;

当 $0<z<1$ 时,

$$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\mathrm{d}x=z(2-z);$$

当 $1\leqslant z<2$ 时,

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}x=(2-z)^2,$$

即 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z<1,\\(2-z)^2, & 1\leqslant z<2,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(24) 解 (Ⅰ) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_\theta^1\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}.$

令 $\overline{X}=EX$,即 $\overline{X}=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$,得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 因为

$$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4[D\overline{X}+(E\overline{X})^2]$$

$$=4\left[\frac{1}{n}DX+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta\right)^2\right]$$

$$=\frac{4}{n}DX+\frac{1}{4}+\theta+\theta^2,$$

又 $DX\geqslant 0,\theta>0$,

所以 $E(4\overline{X}^2)>\theta^2$,

即 $E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2$,

因此 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.