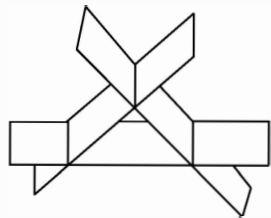


2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k = (\quad)$
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (\quad)
(A) 可导点,极值点. (B) 不可导点,极值点.
(C) 可导点,非极值点. (D) 不可导点,非极值点.
- (3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是 (\quad)
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.
- (4) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$. 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 (\quad)
(A) $y - \frac{x^2}{y^3}$. (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$. (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. (D) $x - \frac{1}{y}$.
- (5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为 (\quad)
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.
- (6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 A, \bar{A} , 则 (\quad)
(A) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$.
(B) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$.
(C) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$.
(D) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$.
- (7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 (\quad)
(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\} (\quad)$
(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.



二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

- (9) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.
- (10) 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.
- (11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.
- (12) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____.
- (13) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 _____.
- (14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(16) (本题满分 10 分)

设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(I) 求 a, b ;

(II) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

(17) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19) (本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这个基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(I) 求 a, b, c ;

(II) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.