2014年（数一）真题答案解析

一、选择题

（1）C

解　由渐近线定义可知，四个选项的曲线均不存在水平渐近线和垂直渐近线.

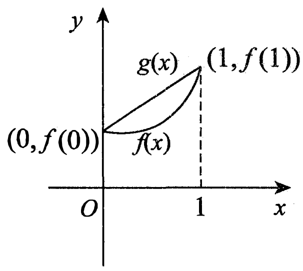
对于 $y=x+\sin\frac{1}{x}$，可知

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0.$$

所以 $y=x$ 是 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 的斜渐近线. 故应选 C.

（2）D

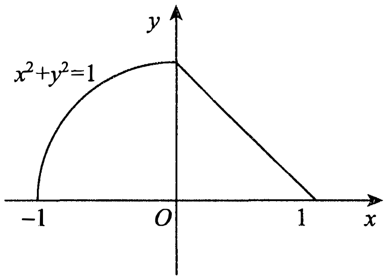


解　当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 是凹函数.

而 $g(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$ 可视为连接 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 的直线段，如右图所示，则 $f(x)\leqslant g(x)$.

故应选 D.

（3）D



解　积分区域如右图所示，换成极坐标则为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

故应选 D.

（4）A

解　因为 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^3+\pi(a^2+b^2-4b)$.

所以相当于求 a^2+b^2-4b 极小值点.

显然 $a=0,b=2$ 时积分最小，即 $a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$.　故应选 A.

（5）B

解　由行列式展开定理按第一列展开：

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)=-(ad-bc)^2.$$　故应选 B.

（6）A

解　因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}.$

对任意的常数 k,l，矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 的秩都为 2，

淘 宝 店 铺 ： 光 速 考 研 工 作 室

所以若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 一定线性无关.

而当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$时，

对任意的常数 k,l，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 故应选 A.

(7) B

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-0.5P(A)$
$=0.5P(A)=0.3$，

得 $P(A)=0.6$，

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.2$.　故应选 B.

(8) D

解 $EY_1=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y_1}(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_1(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)$，

$$EY_2=\frac{1}{2}E(X_1+X_2)=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2),$$

故 $EY_1=EY_2$，又因为

$$DY_1=E(Y_1^2)-(EY_1)^2,DY_2=E(Y_2^2)-(EY_2)^2,$$

则 $DY_1-DY_2=E(Y_1^2)-E(Y_2^2)$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_1(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_2(y)\mathrm{d}y\right]-E\left[\frac{1}{4}(X_1+X_2)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}E(X_1^2)+\frac{1}{2}E(X_2^2)-\frac{1}{4}E[(X_1+X_2)^2]$$

$$=\frac{1}{4}E(X_1^2+X_2^2-2X_1X_2)=\frac{1}{4}E[(X_1-X_2)^2]>0,$$

即 $DY_1>DY_2$. 故应选 D.

二、填空题

(9) $2x-y-z=1$

解 $Z_x'=2x(1-\sin y)-\cos x\cdot y^2,Z_x'(1,0)=2.$

$Z_y'=-x^2\cos y+2y(1-\sin x),Z_y'(1,0)=-1.$

所以曲面在(1,0,1)处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2,-1,-1\}$.

则切平面方程为 $2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$，

即 $2x-y-z=1$.

(10) 1

解 $f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C,x\in[0,2]$.

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，可知 $C=0$，

即 $f(x)=x^2-2x$.

又 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=1$.

(11) $x\mathrm{e}^{2x+1}$

解 方程变形为 $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，属于齐次方程.

设 $u=\frac{y}{x}$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$
两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$
$$\ln|\ln u-1|=\ln x+C_1,$$
即 $\ln u-1=Cx$.

故 $\ln\frac{y}{x}-1=Cx$，代入 $y(1)=\mathrm{e}^3$，可得 $C=2$，所以 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

(12) π

解 由斯托克斯公式
$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\iint_\Sigma\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi,$$
其中 $\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ y+z=0\end{cases}$ 取上侧，$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

(13) $[-2,2]$

解 由配方法可知
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2.\end{aligned}$$
由于负惯性指数为1，则 $4-a^2\geqslant 0$，

所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

(14) $\frac{2}{5n}$

解
$$\begin{aligned}E\left(C\sum_{i=1}^n X_i^2\right)&=C\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=C\sum_{i=1}^n E(X^2)\\&=Cn\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=Cn\int_\theta^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}\mathrm{d}x=Cn\cdot\frac{5}{2}\theta^2.\end{aligned}$$
因为 $C\sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏性估计，所以 $E\left(C\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=\theta^2$.

即 $Cn\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2$，所以 $C=\frac{2}{5n}$.

三、解答 题

(15) **解**
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}+x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(16) **解** 在 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两端关于 x 求导,得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0.$$

令 $y'=0$,得 $y=-2x$,或 $y=0$(不适合方程,舍去).

将 $y=-2x$ 代入方程得 $-6x^3+6=0$,解得 $x=1$,$f(1)=-2$.

在 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$ 两端关于 x 求导,得

$(3y^2+2xy+x^2)y''+2(3y+x)(y')^2+4(y+x)y'+2y=0.$

求得 $f''(1)=\dfrac{4}{9}>0$.

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f(1)=-2$.

(17) **解** 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]e^{2x}.$$

从而函数 $f(u)$ 满足方程

$$f''(u)=4f(u)+u. \qquad ①$$

方程 ① 对应的齐次方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}.$$

方程 ① 的一个特解为 $-\dfrac{u}{4}$,故方程 ① 的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-2C_2-\dfrac{1}{4}=0.\end{cases}$

解得 $\qquad C_1=\dfrac{1}{16},C_2=-\dfrac{1}{16}$.

故 $f(u)=\dfrac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$.

(18) **解** 设 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1\end{cases}$所围部分的下侧,$\Sigma_1$ 与 Σ 所围成的空间区域记为 Ω,则

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$
$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dxdydz$$

由于 $\qquad \displaystyle\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=0$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz=0,$$

所以 $$I=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\,dx\,dy\,dz.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^1(3r^2+7)r\,dz=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)(3r^2+7)\,dr=4\pi,$$

于是 $I=-4\pi$.

(19) **证** （Ⅰ）因为 $\cos a_n-\cos b_n=a_n$，且 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<a_n<b_n$.

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（Ⅱ）因为
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\frac{a_n}{1-\cos b_n}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\cos b_n}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1-\cos a_n}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{bn}$ 收敛.

(20) **解** （Ⅰ）对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）对矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})$ 施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，则

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_1\boldsymbol{\alpha}$， k_1 为任意常数；

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+k_2$ ， k_2 为任意常数；

淘 宝 店 铺 ： 光 速 考 研 工 作 室

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\boldsymbol{\alpha}$， k_3 为任意常数.

于是,所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha}),\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

(21) **证** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$.

因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=0$（$n-1$ 重）.

由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

因为 $r(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$,

所以 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,

于是 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

(22) **解** （Ⅰ）$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$

$$=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}.$$

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时,$F_Y(y)=\dfrac{3y}{4}$；

当 $1\leqslant y<2$ 时,$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}$；

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

(Ⅱ)随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2 \frac{1}{4}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

(23)**解** (Ⅰ)总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$EX=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2},$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\theta.$$

(Ⅱ)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值,似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时,$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum\limits_{i=1}^n \ln x_i-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=0$,得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$.

从而 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

(Ⅲ)存在,$a=\theta$.因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列,且 $EX_1^2=\theta<+\infty$,所以根据辛钦大数定律,当 $n\to\infty$ 时,$\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 EX_1^2,即 θ.所以对任何 $\varepsilon>0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0.$$