2016年（数一）真题答案解析

一、选择题

（1）C

解　取 $a=0$，若 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^b}=\frac{1}{1-b}(1+x)^{1-b}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{1-b}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)^{b-1}}-1\right]$ 收敛，只需 $b>1$ 即可. 说明 $a<1$ 可以使原反常积分收敛，排除 B，D.

再取 $a=-1,b=2$.

$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=+\infty$，

发散，说明满足 $a<1$ 且 $b>1$，原反常积分发散，排除 A.

（2）D

解　当 $x<1$ 时，$F(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C_1$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=\int \ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C_2$；

且 $\lim\limits_{x\to1}F(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+C_1)=C_1-1$；$\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x\ln x-x+C_2)=C_2-1$.

又 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此有 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1}F(x)=F(1)$，即 $C_1-1=C_2-1$，

所以 $C_1=C_2=C$. 故原函数为 $F(x)=\begin{cases}x^2-2x+C, & x<1,\\ x\ln x-x+C, & x\geqslant 1.\end{cases}$

当 $C=1$ 时，对应的原函数为 D.

（3）A

解　因为 $y_1(x)=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$ 和 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，所以，$y_2(x)-y_1(x)=2\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解.

代入该齐次方程，得 $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)\cdot2\sqrt{1+x^2}=0$，故 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$.

再将 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 代入原方程，可得

$4x(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+x^2}[(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}]=q(x)$，

解得 $q(x)=3x(1+x^2)$.

（4）D

解　因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$，可得 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-0}{x-0}=1,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x-0},$$

而 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$，可得 $1<\frac{1}{nx}<\frac{n+1}{n}$，且当 $x\to0^+$ 时 $n\to\infty$.

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，

由夹逼准则$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{nx}=1$，即 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(5) C

解 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，有$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，即有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{T}$，即 A 正确；

$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，即 B 正确，而 D 正确. 故应选 C.

(6) B

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$，特征值为$-1,-1,5$.

二次型的标准形为 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$. 故应选 B.

(7) B

解 $p=P\{x\leqslant\mu+\sigma^2\}=P\left\{\dfrac{x-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$.

因为 $\Phi(x)$ 单调增加，所以 p 随 σ 的增加而增加. 故应选 B.

(8) A

解 (X,Y) 的联合分布为：

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

由此可得 $EX=0\times\dfrac{4}{9}+1\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{3}$；同理，$EY=\dfrac{2}{3}$.

$EX^2=0\times\dfrac{4}{9}+1^2\times\dfrac{4}{9}+2^2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$；同理 $EY^2=\dfrac{8}{9}$.

又 $EXY=\dfrac{2}{9}$，所以，$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=-\dfrac{2}{9}$.

又 $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{4}{9}$，同理，$DY=\dfrac{4}{9}$，故

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\dfrac{E(XY)-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=-\dfrac{1}{2}$. 故应选 A.

二、填空题

(9) $\dfrac{1}{2}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

(10) $\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$

解 由旋度定义公式，得

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0\cdot\boldsymbol{i}+1\cdot\boldsymbol{j}+(y-1)\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}.$$

(11) $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

解 等式$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$两边分别关于x,y求导，

得$z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1(x-z,y)\cdot(1-z'_x)$；

$(x+1)z'_y-2y=x^2[f'_1(x-z,y)\cdot(-z'_y)+f'_2(x-z,y)]$.

再将$x=0,y=1$代入原式，可得$z=1$.

将$x=0,y=1,z=1$代入上述两式，得$z'_x=-1,z'_y=2$.

故$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

(12) $\frac{1}{2}$

解 $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$，则

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^nx^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

$$\frac{x}{1+ax^2}=x\cdot\frac{1}{1+(ax^2)}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-ax^2)^n=x(1-ax^2+a^2x^4-a^3x^6+\cdots)$$

$$=x-ax^3+a^2x^5-a^3x^7+\cdots,$$

所以$f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}=\left(-\dfrac{1}{3}+a\right)x^3+\left(\dfrac{1}{5}-a^2\right)x^5+\left(-\dfrac{1}{7}+a^3\right)x^7+\cdots$,

又$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$,

因此$\dfrac{1}{3!}f'''(0)=-\dfrac{1}{3}+a$，又$f'''(0)=1$，故$a=\dfrac{1}{2}$.

(13) $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

解 按最后一行展开，得

$$(-1)^{4+1}\times4\begin{vmatrix}-1&0&0\\ \lambda&-1&0\\ 0&\lambda&-1\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\times3\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&\lambda&-1\end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{4+3}\times2\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\ 0&\lambda&0\\ 0&0&-1\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\ 0&\lambda&-1\\ 0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

(14) $(8.2,10.8)$

解 μ的置信区间为$\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

已知$\bar{x}=9.5$，置信上限为10.8，

则 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}=1.3$，所以置信下限为 8.2.

故应填(8.2，10.8).

三、解答题

(15) **解** $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\theta)^3-1]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}+5\pi.$$

(16) **解** (Ⅰ) 微分方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0$.

解得 $\lambda_1=-1+\sqrt{1-k}$，$\lambda_2=-1-\sqrt{1-k}$.

因为 $0<k<1$，所以 $\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$，从而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$，其中 C_1 与 C_2 是任意常数.

综上可知，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}(C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x})=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}(C_1\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x})=0.$$

又 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{k}(y''(x)+2y'(x))\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}(y'(x)+2y(x))\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{k}.$$

(17) **解** 因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，所以

$$f(x,y)=\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{2x-y}+C(y).$$

将 $f(0,y)=y+1$ 代入上式，得 $C(y)=y+1$.

所以 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$.

从而

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t.$$

$I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1$. 令 $I'(t)=0$ 得 $t=2$.

由于当 $t<2$ 时，$I'(t)<0$，$I(t)$ 单调减少；当 $t>2$ 时，$I'(t)>0$，$I(t)$ 单调增加，所以 $I(2)=3$ 是 $I(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值.

(18) **解** 根据高斯公式得

$$I=\iiint_\Omega(2x+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

因为 $\displaystyle\iiint_\Omega\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1=\frac{1}{3}$，

$$\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}x\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12},$$

所以 $I=2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

(19) **解** (Ⅰ) 因为 $x_{n+1}=f(x_n)$,所以

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$,其中 ξ 介于 x_n 与 x_{n-1} 之间.

又 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$,所以 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(Ⅱ) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_n=x_{n+1}-x_1$.

由(Ⅰ)知,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)$ 存在,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$,由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 及 $f(x)$ 连续,得 $c=f(c)$,

即 c 是 $g(x)=x-f(x)$ 的零点.

因为 $g(0)=-1$,$g(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\eta)>0$,其中 $\eta\in(0,2)$,

且 $g'(x)=1-f'(x)>0$,所以 $g(x)$ 存在唯一零点,且零点位于区间 $(0,2)$ 内.

于是 $0<c<2$,即 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20) **解** 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B})$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)=\boldsymbol{C}.$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时,由于

$$\boldsymbol{C}\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right),$$

所以 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有唯一解,且

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时,由于

$$\boldsymbol{C}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解,且

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix},$$ 其中 k_1,k_2 为任意常数.

当 $a=-2$ 时,由于

$$C=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

(21) **解**(Ⅰ) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_1=(1,1,0)^T$;

当 $\lambda_2=-2$ 时,解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_2=(1,2,0)^T$;

当 $\lambda_3=0$ 时,解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_3=(3,2,2)^T$.

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$,令 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以

$$\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(Ⅱ) 因为 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$,所以

$$\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{97}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{A}^2=\cdots=\boldsymbol{BA}^{99},$$

即 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

(22) **解**(Ⅰ) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3,&(x,y)\in D,\\0,&\text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) 对于 $0<t<1$,

$$P\{U \leqslant 0, X \leqslant t\} = P\{X > Y, X \leqslant t\} = \int_0^t \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} 3\mathrm{d}y = \frac{3}{2}t^2 - t^3,$$

$$P\{U \leqslant 0\} = P\{X > Y\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X \leqslant t\} = \int_0^t \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3\mathrm{d}y = 2t^{\frac{3}{2}} - t^3.$$

由于 $P\{U \leqslant 0, X \leqslant t\} \neq P\{U \leqslant 0\}P\{X \leqslant t\}$，所以 U 与 X 不相互独立.

（Ⅲ）当 $z < 0$ 时，$F(z) = 0$；当 $0 \leqslant z < 1$ 时，

$$\begin{aligned} F(z) &= P\{Z \leqslant z\} = P\{U + X \leqslant z\} \\ &= P\{U = 0, X \leqslant z\} = P\{X > Y, X \leqslant z\} = \frac{3}{2}z^2 - z^3; \end{aligned}$$

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，
$$\begin{aligned} F(z) &= P\{U + X \leqslant z\} \\ &= P\{U = 0, X \leqslant z\} + P\{U = 1, X \leqslant z - 1\} \\ &= \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2; \end{aligned}$$

当 $z \geqslant 2$ 时，$F(z) = P\{U + X \leqslant z\} = 1$.

所以 $F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1, \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2. \end{cases}$

（23）**解**　（Ⅰ）总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0 \leqslant x < \theta, \\ 1, & x \geqslant \theta. \end{cases}$$

从而 T 的分布函数为

$$F_T(z) = [F(z)]^3 = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{z^9}{\theta^9}, & 0 \leqslant z < \theta, \\ 1, & z \geqslant \theta. \end{cases}$$

所以 T 的概率密度为

$$f_T(z) = \begin{cases} \dfrac{9z^8}{\theta^9}, & 0 < z < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（Ⅱ）$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_T(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\theta} \frac{9z^9}{\theta^9}\mathrm{d}z = \frac{9}{10}\theta$，从而 $E(aT) = \frac{9}{10}a\theta$.

令 $E(aT) = \theta$，得 $a = \frac{10}{9}$.

所以当 $a = \frac{10}{9}$ 时，aT 为 θ 的无偏估计.