2012年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) C

解　函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的间断点为 $x=\pm 1$

由 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{(x+1)(x-1)}=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}$，故 $x=-1$ 不是渐近线.

考察 $x\to\infty$ 时函数的极限

由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$，故 $y=1$ 是水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=0$，故无斜渐近线.

故应选 C，有 2 条渐近线.

(2) A

解　$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x})(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots\cdots+(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(ne^{nx})$

当 $x=0$ 时 $e^x-1=0$ 故

$f'(0)=1\cdot(1-2)(1-3)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ 故应选 A.

(3) B

解　A 项用枚举法：设 $f(x,y)=|x|+|y|$　则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，

但 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 都不存在即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.　A 错误

B 项.由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$（存在），则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$，

又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，故 $f(0,0)=0$；

且 $\begin{matrix}x\to 0\\y\to 0\end{matrix}$ 时 $f(x,y)$ 是 x^2+y^2 的高阶无穷小

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.　B 正确.

C、D 项用枚举法. $f(x,y)=x$ 满足条件，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 均不存在.故 C、D 错误.故应选 B.

(4) D

解　$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$

又 $\pi<x<2\pi$ 时 $e^{x^2}\sin x<0$

故$\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx < 0$ 故 $I_2 < I_1$

$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx = I_2 + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx$

又 $2\pi < x < 3\pi$ 时 $e^{x^2}\sin x > 0$

故$\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx > 0$ 故 $I_2 < I_3$.

$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x\ dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx$

$\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx = \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\ dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\ dx$

$= \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)d(t+\pi)$

$= \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\ dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin x\,dx = \int_{\pi}^{2\pi}[e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}]\sin x\,dx > 0$

$\therefore I_3 > I_1$

综上 $I_3 > I_1 > I_2$.故应选 D.

(5) C

解 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ C_1 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = C_1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.故应选 C.

(6) B

解 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

故应选 B.

(7) A

解 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$

由 X,Y 相互独立,故

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-(x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$P\{X < Y\} = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{\substack{x<y \\ x>0,y>0}} 4e^{-(x+4y)}dx\,dy = \frac{1}{5}$.故应选 A.

(8) D

解 设两段木棒的长度为 x,y 则 $x+y=1 \Rightarrow y=-x+1$

由定理:若 $y=ax+b$ 则 $|\rho_{XY}|=1$,

若 ① $a<0$ 则 $\rho_{XY}=-1$,

② $a>0$ 则 $\rho_{XY}=1$.

故 $\rho_{XY}=-1$.故应选 D.

二、填空题

(9) e^x

解 由 $f''(x)+f(x)=2e^x \Rightarrow f''(x) \Rightarrow 2e^x-f(x)$ 代入 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$

得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$

$\Rightarrow [f'(x)-3f(x)]e^{-3x}=-2e^{-2x}$（两边同乘 e^{-3x}）

$\Rightarrow [e^{-3x}f(x)]'=-2e^{-2x} \Rightarrow e^{-3x}f(x)=e^{-2x}+C \Rightarrow f(x)=e^x+Ce^{3x}$

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 验证得 $C=0$ $\therefore f(x)=e^x$.

(10) $\dfrac{\pi}{2}$

解 $$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \xlongequal{t=x-1}\int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\underbrace{\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{奇函数}}+\underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{半圆的面积}}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

(11) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

解 令 $u=xy+\dfrac{z}{y}$，则

$$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\mathbf{grad}\ u\Big|_{(2,1,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

(12) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

解 $$\iint_{\Sigma} y^2\,dS=\iint_{D_{xy}} y^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}} y^2\,dx\,dy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2\,dy=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

(13) 2

解 由题意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ 且 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$

$$\therefore \alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{bmatrix} \quad \text{且 } r(\boldsymbol{\alpha\alpha^T})=1$$

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}|=\lambda^3-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda^2=\lambda^3-\lambda^2 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha\alpha^T}$ 的特征值 0,0,1

$\therefore \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值 0,1,1 $\therefore r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T})=2$.

(14) $\dfrac{3}{4}$

解 $$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题

(15) **证** 令 $F(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$,$(-1<x<1)$,又因 $F(x)=F(-x)$,即 $F(x)$ 是偶函数,故只需考虑 $x\geqslant 0$ 的情形.

$f'(x)=f(x)$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{(1+x)(1-x)}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x \qquad x\in(0,1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1 \qquad x\in(0,1)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x \qquad x\in(0,1)$$

因为 $0<x<1$ 时，$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$，$\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}>0$，$\sin x>0$，

故 $\quad f''(x)>0$.

又因为 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 是连续的，故 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上是单调增加的，

$$f'(x)>f'(0)=2>0$$

同理，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上也是单调增加的，$f(x)>f(0)=0$，

故 $F(x)$ 在 $[0,1)$ 上是单调增加的，$F(x)>F(0)=0$；

又因为 $F(x)$ 是偶函数，则 $F(x)>0, x\in(-1,1), x\neq 0$.

又因为 $F(0)=0$，故 $F(x)\geqslant 0$，即原不等式成立，证毕.

(16) **解** 先求出驻点

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\end{cases}$ 可得驻点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$

然后再求驻点处的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)-2x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

在驻点 $(1,0)$ 处，$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}$，$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,0)}=0$，$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0$，且 $A<0$，故 $(1,0)$ 为极大值点，$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

在驻点 $(-1,0)$ 处，

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}},\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(-1,0)}=0,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0$，$A>0$，故 $(-1,0)$ 为极小值点， $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

(17) 解　① 记 $u_n(x)=\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|x^{2(n+1)}\cdot\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\middle/x^{2n}\cdot\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\right|$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right|=x^2$$

当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时幂级数收敛；当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时，幂级数发散，故收敛半径 $R=1$，则收敛区间为 $(-1,1)$，又由于 $x=\pm1$ 时，一般项为无穷大量，幂级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

② 记 $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的和函数，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}.$$

记　$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，　$S_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n}$

由幂级数和函数的性质可得

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\quad x\in(-1,1)$$

由于 $xS_2(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，故由幂级数和函数的性质可得：

$$[xS_2(x)]'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

所以 $xS_2(x)=\displaystyle\int_0^x[tS_2(t)]'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^x$

$$=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

故 $S_2(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$ 且 $x\neq0$

又 $S_1(0)=1$，$S_2(0)=2$.

故 $S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,1)，且 x\neq0，\\ 3 & ，x=0.\end{cases}$

(18) 解　① 设曲线 L 的切点为 $A(f(t),\cos t)$，则当 $0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}$ 时，曲线 L 在切点 A 的切线斜率为　$k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$

故切线方程为 $y=\cos t-\dfrac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)]$

令 $y=0$，则可得切线与 x 轴的交点 B 的坐标 $\left(f(t)+\dfrac{\cos t\cdot f'(t)}{\sin t},\ 0\right)$

故 A 和 B 的距离为　$\mathrm{d}=\sqrt{\dfrac{\cos^2t}{\sin^2t}f'^2(t)+\cos^2t}$

由题意可知：$\mathrm{d}=\sqrt{\dfrac{f'^2(t)\cdot\cos^2t}{\sin^2t}+\cos^2t}=1$

化简可得： $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$

两端积分可得：

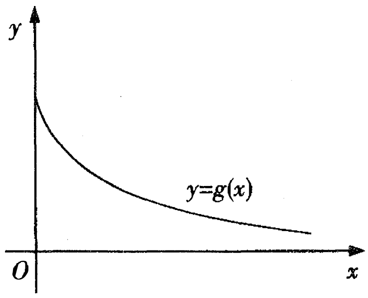
$$f(t)=f(0)+\int_0^t \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^t \frac{\sin^2 x-1+1}{\cos^2 x}\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int_0^t \frac{\sin^2 x-1+1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}\ \sin x=-\sin t+\int_0^t \frac{1}{1-\sin^2}\mathrm{d}$$

$$=-\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x$$

$$=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}=-\sin t+\ln(\sec t+\tan t).$$

② 曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可表示为 $y=g(x),x\in[0,+\infty)$ 如右图所示，



当 $t\to\dfrac{\pi}{2}-0$ 时，$x\to+\infty$

当 $x=f(t)$ 时，$g(x)=\cos t$，故令 S 为所求区域面积.

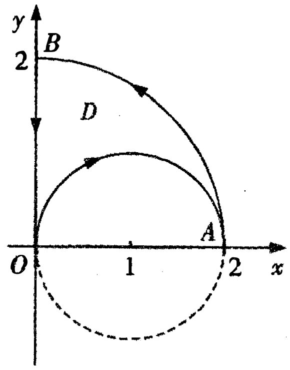
$$S=\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=f(t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ \mathrm{d}\ f(t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t \qquad \text{（由 ① 可得）}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

(19) **解**　利用格林公式

记 $J=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，曲线 L 如右图所示.



$P(x,y)=3x^2y,Q(x,y)=x^3+x-2y,$

并且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2+1-3x^2=1$

由于曲线 L 不封闭，故添加辅助线 L_1：沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$

则$\displaystyle\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}Q(0,y)\mathrm{d}y=\int_2^0(-2y)\mathrm{d}y=\int_0^2 2y\mathrm{d}y=4$

然后在 L_1 与 L 围成的区域D 上用格林公式(边界取正向)，则：

$$\int_{L+L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$$

故　$\displaystyle J=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L+L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4.$

(20) **解**　(Ⅰ) 按第一列展开，可得

$$|\boldsymbol{A}|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\cdot a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(Ⅱ) 当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 可能有无穷多解，由 (Ⅰ) 可得，$a=1$，或 $a=-1$.

(1) 当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right]$

因为 $r(\boldsymbol{A})=3, r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=4$，故方程组无解.即当 $a=1$ 时不合题意，舍去.

(2) 当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=3$，故方程组有无穷多解.选 x_3 为自由变量，则方程组的通解为：$k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

(21) **解** （Ⅰ）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 中有2阶子式 $\begin{vmatrix}2&0\\0&1+a^2\end{vmatrix}=2(1+a^2)\neq0$，故若二次型 f 的秩为2，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$，

故 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=(a+1)^2(a^2+3)=0, a=-1$.

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ 为实对称矩阵.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

故矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值分别为 $0,2,6$.

当 $\lambda=0$ 时，$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

当 $\lambda=2$ 时，$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

当 $\lambda=6$ 时，$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交，故只需单位化.

$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt3}(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt2}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，

令 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y}=2y_2^2+6y_3^2$.

(22) **解** (Ⅰ) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$.

(Ⅱ) 由题设可知

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix},\qquad Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\qquad XY\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{bmatrix},$$

则 $EX=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$EY=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$

$EY^2=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$EXY=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

又因为 $DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1^2=\frac{2}{3}$,

故 $\operatorname{Cov}(X-Y,Y)=\operatorname{Cov}(X,Y)-\operatorname{Cov}(Y,Y)=\operatorname{Cov}(X,Y)-DY$

$$=EXY-EXEY-DY=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(23) **解** (Ⅰ) 由题设条件可知 Z 服从正态分布,且

$EZ=E(X-Y)=EX-EY=\mu-\mu=0$

$DZ=D(X-Y)=DX+DY=\sigma^2+2\sigma^2=3\sigma^2$

故 $Z\sim N(0,3\sigma^2)$,则 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(z-0)^2}{2\cdot 3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<z<+\infty.$$

(Ⅱ) 由题设条件可知,似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{6\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{6\sigma^2}},-\infty<z_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n$$

两边取对数,可得 $\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$

令 $\frac{\partial\ln L(\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$

解得 $\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(Ⅲ) $E\hat{\sigma}^2=E(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=\frac{1}{3n}\cdot nEZ^2$

$$=\frac{1}{3}[DZ+(EZ)^2]=\frac{1}{3}(3\sigma^2+0)=\sigma^2$$

故 $E\hat{\sigma}^2=\sigma^2$,则 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.