2018年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) D

解　对于 D 选项 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$，

由 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\dfrac{1}{2}$，

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2},$$

可得 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 故应选 D.

(2) B

解　已知平面过点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$两点，可得同平面内一向量$(1,-1,0)$，曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面法向量为$(2x,2y,-1)$. 所以 $2x-2y=0$，即 $x=y$. 故应选 B.

(3) B

解　原式 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{(2n+1)!}$，

易知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^n=\cos x$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(2n+1)!}=\sin x$.

则原式 $=2\sin 1+\cos 1$. 故应选 B.

(4) C

解　利用对称性可计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$.

易得，$K>\pi$，$N<\pi$. 所以 $K>M>N$. 故应选 C.

(5) A

解　易知题中矩阵的特征值均为 3 重特征值 1，若矩阵相似，则特征值对应的 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 秩必然相等，显然 $\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩为 2.

故应选 A.

(6) A

解　对于 B 选项，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{BA})=2\neq r(\boldsymbol{A})$，排除 B.

对于 C 选项，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=2\neq\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$，排除 C.

对于 D 选项，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=2\neq r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，排除 D.

故应选 A.

(7) A

解 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可知,$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,所以 $\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0.5$.

又已知,$\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}(x)\mathrm{d}x=0.3$.

所以,$P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0.2$.

故应选 A.

(8) D

解 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时可接受 H_0,则检验统计量 $|Z|\leqslant U_{0.025}$,则 $|Z|\leqslant U_{0.005}$.

故应选 D.

二、填空题

(9) -2

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)}{\sin kx}}=\mathrm{e}$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)}{\sin kx}=1$.

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin kx}=\dfrac{-2x}{kx}=1$,所以 $k=-2$.

故应填 -2.

(10) $2(\ln 2-1)$

解 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$,即 $f(x)=0$,$y=f(x)$ 与 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 相切 $\Rightarrow f(1)=2$ 且 $f'(1)=2\ln 2$.

$\int_{0}^{1}xf''(x)\mathrm{d}x=xf'(x)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=f'(1)-(f(1)-f(0))=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)$.

故应填 $2(\ln 2-1)$.

(11) $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

解 $$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=(y,-z,-x)\mid(1,1,0)=(1,0,-1)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$$

故应填 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

(12) $-\dfrac{\pi}{3}$

解 $L=\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 则 $\oint_L xy\,\mathrm{d}s=\oint_L\left|\dfrac{1}{2}-(x^2+y^2)\right|\mathrm{d}s=\oint_L\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\mathrm{d}s=-\dfrac{\pi}{3}$.

故应填 $-\dfrac{\pi}{3}$.

(13) -1

解 设 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 λ_1,λ_2,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$,

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\lambda_1=\pm1$,$\lambda_2=\pm1$,

又因为$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

故应填-1.

(14) $\dfrac{1}{4}$

解 $P(AC \mid AB \cup C) \cdot P(AB \cup C) = P(AC)$

$$\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4} + P(C)\right] = \frac{1}{2} \cdot P(C)$$

解得 $P(C) = \dfrac{1}{4}$，故应填$\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

(15) **解**
$$\int e^{2x} \arctan\sqrt{e^x - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x - 1}\,de^{2x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}dx.$$

又
$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}de^x$$
$$= \int \sqrt{e^x - 1}\,de^x + \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}de^x$$
$$= \frac{2}{3}(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1} + 2\sqrt{e^x - 1} + C,$$

所以$\displaystyle\int e^{2x} \arctan\sqrt{e^x - 1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6}(e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C.$

(16) **解** 设圆的半径为x，正方形与正三角形的边长分别为y和z，则问题化为：函数

$f(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在条件 $2\pi x + 4y + 3z = 2(x > 0, y > 0, z > 0)$ 下是否存在最小值.

令 $L(x,y,z,\lambda) = \pi x^2 + y^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$，考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}z + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_0 = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$， $y_0 = \dfrac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$， $z_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

$f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

又当 $2\pi x+4y+3z=2$ 且 $xyz=0$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为

$$f\left(0,\frac{2}{4+3\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4+3\sqrt{3}},$$

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(\text{单位：m}^2).$$

(17) **解** 设 Σ_1 为平面 $x=0$ 被 $\begin{cases}3y^2+3z^2=1,\\ x=0,\end{cases}$ 所围部分的后侧，Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围的立体.

根据高斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

设 $y=r\cos\theta$， $z=r\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-3r^2}}(1+3r^2)r\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

设 $\sqrt{1-3r^2}=t$，则

$$\begin{aligned}2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2}\,\mathrm{d}r&=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(2-t^2)t^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{14\pi}{45}.\end{aligned}$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，所以 $I=\dfrac{14\pi}{45}$.

(18) **解** (Ⅰ) 当 $f(x)=x$ 时，方程化为 $y'+y=x$，其通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-x}\left(C+\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{e}^{-x}(C+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)\\&=C\mathrm{e}^{-x}+x-1.\end{aligned}$$

(Ⅱ) 方程 $y'+y=f(x)$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int_0^x\mathrm{d}t}\left(C+\int_0^x\mathrm{e}^{\int_0^t\mathrm{d}s}f(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

即 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(C+\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

由 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(C+\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$，得

$$y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1\right)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

因为 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，所以

$$\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^T\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_T^{x+T}\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{e^T}\int_0^x e^{u+T}f(u+T)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t.$$

从而 $y(x+T)-y(x)=e^{-x}\left[\left(\frac{1}{e^T}-1\right)C+\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t\right]$.

所以，当且仅当 $C=\frac{1}{e^T-1}\int_0^T e^t f(t)\mathrm{d}t$ 时，$y(x+T)-y(x)=0$.

故方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19) **解**　由于 $x_1\neq 0$，所以 $e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$.

根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,x_1)$，使得 $\frac{e^{x_1}-1}{x_1}=e^{\xi}$.

所以 $e^{x_2}=e^{\xi}$，故 $0<x_2<x_1$.

假设 $0<x_{n+1}<x_n$，则

$$e^{x_{n+2}}=\frac{e^{x_{n+1}}-1}{x_{n+1}}=e^{\eta}(0<\eta<x_{n+1}),$$

所以 $0<x_{n+2}<x_{n+1}$.

故 $\{x_n\}$ 是单调减少的数列，且有下界，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，得 $ae^a=e^a-1$. 易知 $a=0$ 为其解.

令 $f(x)=xe^x-e^x+1$，则 $f'(x)=xe^x$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，所以 $a=0$ 是方程 $ae^a=e^a-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上的唯一的解，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20) **解**　(Ⅰ) $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 当且仅当

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0,\end{cases}$$

对方程组的系数矩阵施以初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

当 $a\neq 2$ 时，方程组只有零解，故 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

当 $a=2$ 时，方程组有无穷多解，通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数，

故 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解是 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a\neq 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 正定，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当 $a=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3\\
&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2,
\end{aligned}
$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

（21）**解**　（Ⅰ）对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别施以初等行变换得

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}.
$$

由题设知 $a=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a=2$，对矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})$ 施以初等行变换得

$$
(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)
$$

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，由于

$$
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_3,
$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解为

$$
\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}，其中\ k_1,k_2,k_3\ 为任意常数.
$$

由于 $|\boldsymbol{X}|=k_3-k_2$，所以满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}，其中\ k_2\neq k_3.
$$

（22）**解**　（Ⅰ）由题设可得

$$EX=(-1)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=0,$$

$$E(XZ)=E(X^2Y)=EX^2\cdot EY=\lambda.$$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=\lambda$.

（Ⅱ）Z 的所有可能取值为全体整数值，且

$P\{Z=0\}=P\{Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$；

对于 $n=\pm1,\pm2,\cdots$，有

$P\{Z=n\}=P\{XY=n\}$

$$=P\left\{X=\frac{n}{|n|},Y=|n|\right\}$$

$$=P\left\{X=\frac{n}{|n|}\right\}P\{Y=|n|\}$$

$$=e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^{|n|}}{2\cdot|n|!}.$$

(23) **解** （Ⅰ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|},$$

则 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，解得

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

所以 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

（Ⅱ）由于 $E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x;\sigma)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma$，所以

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\sigma,$$

又因为

$$E|X|^2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\sigma)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2,$$

$$D(|X|)=E(|X|^2)-(E|X|)^2=\sigma^2,$$

所以

$$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}.$$