2005年（数一）真题答案解析

一、填空题

(1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

解 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$，及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}$，

可得斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

(2) $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

解 直接用一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right],$$

再由初始条件确定任意常数即可.

即原方程等价为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，

于是通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\int x^2\ln x\,dx+C\right]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+C\frac{1}{x^2},$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，

故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$， $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$， $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$.

由单位向量 $\boldsymbol{n}$ 知，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(4) $(2-\sqrt{2})\pi R^3$

解 由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega}3dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\,dr=(2-\sqrt{2})\pi R^3.$$

(5) 2

解　由题意知

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}=\boldsymbol{AC},\text{其中}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

等式两端同时取行列式得

$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{C}|$,而 $|\boldsymbol{C}|=2$,所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

(6) $\frac{13}{48}$

解　本题涉及两次试验,想到用全概率公式,第一次试验的各种结果即为完备事件组

$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}=\frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}$.

二、选择题

(7) C

解　先求 $f(x)$ 的表达式.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+|x|^{3n})^{\frac{1}{n}}=1^0=1\quad(|x|<1),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+1)^{\frac{1}{n}}=2^0=1\quad(|x|=1),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3\quad(|x|>1).$$

因此,$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$

由 $y=f(x)$ 的表达式及它的函数图形可知,$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处不可导,其余点 $f(x)$ 均可导,因此选 C.

(8) A

解法一　任一原函数可表示为

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时,有 $F(-x)=F(x)$,

于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,

即 $-f(-x)=f(x)$,　也即 $f(-x)=-f(x)$,

可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数,可见 A 为正确选项.

解法二　令 $f(x)=1$,则取 $F(x)=x+1$,排除 B、C;

令 $f(x)=x$,则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$,排除 D;故应选 A.

(9) B

解　因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$

于是　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$

可见有　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(10) D

解　令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$,显然 $F(0,1,1)=0$.

且$\frac{\partial F}{\partial x}=y+ze^{xz},\frac{\partial F}{\partial y}=x-\frac{z}{y},\frac{\partial F}{\partial z}=-\ln y+xe^{xz}$ 在点$(0,1,1)$的某邻域内连续,

又 $F'_x(0,1,1)=(y+ze^{xz})\Big|_{(0,1,1)}=2\neq 0,F'_y(0,1,1)=-1\neq 0$,

据隐函数存在定理知,方程$F(x,y,z)=0$,可以确定具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$. 因为 $F'_z(0,1,1)=0$,所以未必能确定隐函数 $z=z(x,y)$. 故应选 D.

(11) B

解　令　$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$,则

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$,

$(k_1+k_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1=0,\\ k_2\lambda_2=0.\end{cases}$$

当 $\lambda_2\neq 0$ 时,显然有 $k_1=0,k_2=0$,此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关;反过来,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关,则必然有 $\lambda_2\neq 0$. 否则,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(12) C

解　设交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 2 行的初等矩阵为 $\boldsymbol{P}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$.

$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=|\boldsymbol{PA}|(\boldsymbol{PA})^{-1}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,

从而　$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{B}^*$

即交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(13) D

解　由 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$

或 $P\{X+Y=1\}=P\{X+Y=1\mid X=0\}$

可知:$a+b=a+0.1$,而 $a+b=0.5$,故 $a=0.4,b=0.1$.

(14) D

解 因为 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$，$\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且两者独立，所以

$$\frac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2 \Big/ n-1} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1).$$

三、解答题

(15) **解法一**
$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3 \sin\theta\cos\theta[1+r^2]\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3[1+r^2]\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3\,\mathrm{d}r\right) = \frac{3}{8}.$$

解法二 记 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，

$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \sqrt{2}, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，

则有 $[1+x^2+y^2] = 1, (x,y) \in D_1$，

$[1+x^2+y^2] = 2, (x,y) \in D_2$.

于是

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

(16) **解** 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} = 1,$$

所以当 $x^2 < 1$ 时，原级数绝对收敛，

当 $x^2 > 1$ 时，原级数发散，因此原级数的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}$， $x \in (-1,1)$，

则 $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$， $x \in (-1,1)$，

$S''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \dfrac{1}{1+x^2}$， $x \in (-1,1)$.

由于 $S(0) = 0, S'(0) = 0$，

所以 $S'(x) = \int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan x$，

$S(x) = \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，$x\in(-1,1)$，

从而 $f(x)=2S(x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\dfrac{x^2}{1+x^2}$，　$x\in(-1,1)$.

(17) **解** $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=16+2f(x)\Big|_0^3=16+4=20.$$

(18) **证** (Ⅰ) 令 $g(x)=f(x)+x-1$，

则 $g(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $g(0)=-1<0, g(1)=1>0$，

所以存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$，

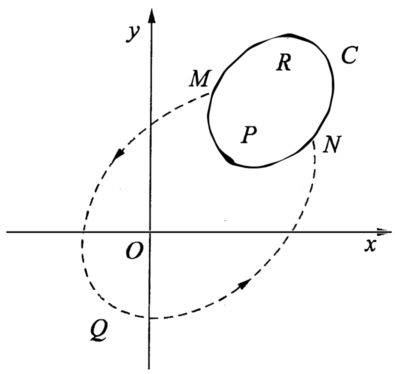
即 $f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ) 根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,\xi)$，$\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},$$

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

从而 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1.$



(19) (Ⅰ) **证** 如上图所示，设 C 是半平面 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线，在 C 上任意取定两点 M,N，作围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNRM}$，同时得到另一围绕在原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNPM}$.

根据题设可知

$$\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{\overset{\frown}{MQNPM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0.$$

根据第二类曲线积分的性质，利用上式可得

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\int_{\overset{\frown}{NRM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{\overset{\frown}{MPN}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{NRM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\int_{\overset{\frown}{NPM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{\overset{\frown}{MQNPM}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=0.$$

(Ⅱ) **解**　设 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}, Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P,Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数.

由(1)知，曲线积分 $\int_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\cdot 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}. \qquad ②$$

比较 ①、② 两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y, & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5. & ④\end{cases}$$

由 ③ 得 $\varphi(y)=-y^2+C$，

将 $\varphi(y)$ 代入 ④ 得 $2y^5-4Cy^3=2y^5$，

所以 $C=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$.

(20) **解**　(Ⅰ) 由于二次型 f 的秩为 2，对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 的秩为 2，所以有

$$\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-4a=0，得 a=0.$$

(Ⅱ) 当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=0$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=2$ 的线性无关的特征向量为　$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=0$ 的线性无关的特征向量为　$\boldsymbol{\eta}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

易见 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 两两正交.

将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化得

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

取 $Q=[e_1,e_2,e_3]$,则 Q 为正交矩阵.

令 $X=QY$,得

$$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=2y_1^2+2y_2^2.$$

(Ⅲ) **解法一** 在正交变换 $X=QY$ 下,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 化成 $2y_1^2+2y_2^2=0$,解之得 $y_1=y_2=0$,从而

$$X=Q\begin{bmatrix}0\\0\\y_3\end{bmatrix}=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}0\\0\\y_3\end{bmatrix}=y_3e_3=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

解法 二 由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0,$$

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$

其通解为 $X=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(21) **解** 由于 $AB=0$,故 $r(A)+r(B)\leqslant 3$,

又由 a,b,c 不全为零,可知 $r(A)\geqslant 1$.

当 $k\neq 9$ 时,$r(B)=2$,于是 $r(A)=1$;

当 $k=9$ 时,$r(B)=1$,

于是 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

对于 $k\neq 9$,由 $AB=0$ 可得

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=0 \text{ 和 } A\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}=0.$$

由于 $\eta_1=(1,2,3)^T,\eta_2=(3,6,k)^T$ 线性无关,故 η_1,η_2 为 $AX=0$ 的一个基础解系,

于是 $AX=0$ 的通解为

$$X=c_1\eta_1+c_2\eta_2,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

对于 $k=9$,分别就 $r(A)=2$ 和 $r(A)=1$ 进行讨论.

如果 $r(A)=2$,则 $AX=0$ 的基础解系由一个向量构成. 又因为 $A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=0$,所以 $AX=0$ 的通解为 $X=c_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 c_1 为任意常数.

如果 $r(A)=1$,则 $AX=0$ 的基础解系由两个向量构成. 又因为 A 的第一行为 (a,b,c) 且 a,b,c 不全为零,所以 $AX=0$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$. 不妨设 $a\neq 0$,$\eta_1=(-b,a,0)^{\mathrm{T}}$,$\eta_2=(-c,0,a)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解,故 $AX=0$ 的通解为 $X=c_1\eta_1+c_2\eta_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(22) **解** （Ⅰ）当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x;$$

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$.

即 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $0<y<2$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2};$$

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$.

即 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（Ⅱ）**解法一** 当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，

$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=z-\dfrac{z^2}{4}$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

解法二 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\mathrm{d}x$，

其中 $f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<z<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\dfrac{z}{2}$.

即 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(23) **解** （Ⅰ）$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k\neq i}X_k\right]=\dfrac{n-1}{n},i=1,2,\cdots,n.$

（Ⅱ）
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)&=E(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)=E(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})\\&=E(X_1X_n)+E(\overline{X}^2)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})\\&=EX_1EX_n+D\overline{X}-\frac{1}{n}E(X_1{}^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}E(X_1X_i)-\frac{1}{n}E(X_n{}^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_iX_n)\\&=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$