Appendix. Z_2 Symmetry breaking in Fermi Liquid

Zhiyan Wang

2025 年 9 月 24 日

1 References

? - PW Anderson, 2000: The Symmetries of Fermion Liquids at Low Dimensions —PW Phillips, 2022: Hidden particle-hole symmetry breaking at Fermi Level —ZY, 2024: Topic review: Hatsugai-Kohmoto model (# HK model) —?

2 Background & Abstract

Z_2 symmetry broken. In their clarification of the relationship between the HK and Hubbard models, the Phillips group proposed that both models break a previously hidden symmetry. As early as 2000, P. W. Anderson and Haldane (2000) had suggested that an $O(4)$ symmetry exists on the Fermi surface by treating charge degrees of freedom as a form of pseudospin. Specifically, the Fermi surface exhibits charge and spin conservation, corresponding to an $SU(2) \times SU(2)$ symmetry. However, this still lacks a hidden Z_2 symmetry that connects the $\det O(4) = \pm 1$ sectors. The full symmetry should be $O(4) \cong SU(2) \times SU(2) \times Z_2$, indicating that the spin and charge degrees of freedom are indistinguishable. Through their analysis, Phillips and collaborators demonstrated that performing particle-hole conjugation on one spin species (while leaving the other unchanged) leaves the system invariant—provided this Z_2 symmetry (in somehow way behaves like particle-hole transformation invariant-provided on one spin degree) is unbroken. However, both the HK and Hubbard models explicitly break this discrete symmetry. The result is a fundamental separation of spin and charge degrees of freedom, indicating that the transition from a Fermi liquid to a Mott insulator involves the breaking of a discrete Z_2 symmetry.

3 Hidden Z_2 in Fermi Liquid

虽然 Anderson 与 Haldane 的原文阐述得简约且优雅，本文还是尽可能 follow 一下，以增进对 Fermi liquid 或别的方面的理解。

考虑只有动能，也就是自由费米子系统的哈密顿量:

$$H=\sum_{k,\sigma}\epsilon_k c_{k,\sigma}^{\dagger}c_{k,\sigma}, \tag{1}$$

显然，这个哈密顿量与 $n_{k,\sigma}$，也就是带确定自旋取向，或者带确定动量 k 的粒子数算符都对易。即，对每一个动量流守恒，或者对不同符号的旋量的流守恒。进一步的，我们考虑低能线性近似，只关注费米面附近的行为:

$$\epsilon_k \approx v_F(k-k_F) \tag{2}$$

即 dispersion 与动量对费米面上动量的偏移成正比，此时仍有上下自旋粒子数分别守恒，我们写成容易看出来的形式:

$$H=\sum_k v_F(k-k_F)(c_{k,\uparrow}^{\dagger}c_{k,\uparrow}+c_{k,\downarrow}^{\dagger}c_{k,\downarrow}), \tag{3}$$

3.1 $O(4)$ on Fermi surface

我们第一个想解决的问题是，原文说的费米面上存在 $O(4)$ 怎么来的，如何理解?

对于任意的费米子算符 $c_{k,\sigma}$，我们都可以将其看作为复费米子，用一对实的 Majorana 表示。(当然，这是一种视角，并存在一定的物理意义)

对于一般的动量 k，我们定义:

$$c_{k,\uparrow}=\chi_{k,\uparrow}^1+i\chi_{k,\uparrow}^2,\quad c_{k,\downarrow}=\chi_{k,\downarrow}^1+i\chi_{k,\downarrow}^2, \tag{4}$$

这里 $\chi_{k\sigma}^a$ 是 Majorana 费米子，满足原来的费米子反对易关系:

$$(\chi_{k\sigma}^{\alpha})^{\dagger}=\chi_{k\sigma}^{\alpha},\quad \left\{\chi_{k\sigma}^{a},\chi_{k\sigma'}^{\beta}\right\}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\sigma'}.$$

其中，α,β 代表 $1,2$ 两种 Majorana 费米子，k,σ 还是原来的动量和自旋。因此，现在有四个 Majorana 费米子，重写哈密顿量 Eq.3.

即便是在费米面附近的 H，当我们用 Majorana 表示时，不同的 Majorana 费米子也存在耦合:

$$H=\sum_k v_F(k-k_F)\left(4+2i\chi_{k,\uparrow}^1\chi_{k,\uparrow}^2+2i\chi_{k,\downarrow}^1\chi_{k,\downarrow}^2\right). \tag{5}$$

有趣就有趣在，当正好取费米面时，$k=k_F$，哈密顿量由前面的系数（ϵ_k）控制，为 0.

另一方面，$O(4)$ 是 4 维实向量空间中保持长度不变的线性变换群:

$$O(4)=\left\{R\in GL(4,\mathbb{R})\mid R^{\mathsf{T}}R=I\right\},$$

其中 R^{T} 表示 R 的转置矩阵，I 是 4 维单位矩阵。在这里，$O(4)$ 作用在 Majorana 旋量 $\vec{\gamma}$ 上:

$$\vec{\gamma}\to R\vec{\gamma},\quad R\in O(4).$$

这种变换保持 Majorana 费米子的反对易关系不变。由于哈密顿量在费米面上满足 $H=0$，系统的物理状态在 $O(4)$ 变换下保持不变。也就是说，**在费米面上，H 有 $O(4)$ 对称性.**

3.2 Hidden Z_2 symmetry

回到 $k \neq k_F$ 的情况。考虑此时对某一 Majorana 费米子做镜像反射. 我们假设:

$$\chi^1_{k\uparrow} \to \chi^1_{k\uparrow}, \quad \chi^2_{k\uparrow} \to \chi^2_{k\uparrow}, \quad \chi^1_{k\downarrow} \to \chi^1_{k\downarrow}, \quad \chi^2_{k\downarrow} \to -\chi^2_{k\downarrow}. \tag{6}$$

这就相当于对某一自旋进行了粒子-空穴变换:

$$c_{k\downarrow} \to c^\dagger_{k\downarrow}, \tag{7}$$

因为按照定义，$c^\dagger \sim \chi^1 - i\chi^2$. 现在是 $c \sim \chi^1 + i\chi^2$ 变成了 $\chi^1 - i\chi^2$. 而另一个自旋的算符不变。在此变换下，哈密顿量的变化为

$$H = \sum_k v_F(k-k_F)\left(c^\dagger_{k\uparrow}c_{k\uparrow} - c^\dagger_{k\downarrow}c_{k\downarrow}\right) + \sum_k v_F(k-k_F). \tag{8}$$

显然，变换后的哈密顿量与原始哈密顿量不同。因此，again，仅当 $k = k_F$ 时，哈密顿量为零，此时严格的 Z_2 对称性得以保持。

当然，并不是说 Z_2 就是粒子-空穴对称性，我们需要澄清这一观点，Z_2 只是在这一情况下体现为对某一自旋的电子做粒子-空穴变换后哈密顿量不变，而不是 $Z_2 = \text{PHS}$.

从对称性分析的角度来说为什么 Z_2 应该存在，以及如何理解。 在 Fermi Liquid 理论中，每个动量点的电子包含电荷守恒和自旋守恒。首先我们知道，自旋上下分别守恒那么肯定也有总自旋守恒（总自旋守恒那么上下自旋不一定分别守恒），自旋自由度对应 SU(2)。另一方面，电荷自由度看作是一种赝自旋，也具有 SU(2) 对称性，then，这两个 SU(2) 的乘积结构:

$$\text{SU}(2)_{\text{spin}} \times \text{SU}(2)_{\text{charge pesudospin}} \cong \text{Spin}(4) \tag{9}$$

而 Spin(4) 是 SO(4) 的双覆盖群 (double cover：每个 SO(4) 的旋转，都对应着 Spin(4) 中的两个元素) （* 注意 Spin(4) $\neq$ Sp(4)，两个不是同一个东西!）

前面我们分析了，费米面上，电子的低能自由度呈现出 $O(4)$ 对称性结构。于是，Z_2 是 $O(4)$ 与其连通分支 $SO(4)$ 的商群。具体来说，$O(4)$ 是四维欧几里得空间的正交群，包含所有保持内积的线性变换，包括四维空间中所有保持长度不变的纯旋转 $SO(4)$ 和反射（不在 $SO(4)$ 中的元素）。或者，$O(4)$ 群有两个连通分支：$SO(4)$（行列式 $=1$）和带反射的那一支（行列式 $=-1$）

以上论述有三个容易产生的误解:

1. 误认为 Z_2 是用来连接 $\det \pm 1$ 的两个 $SO(4)$ 的。错误，$SO(4)$ 本身的行列式是 $+1$。纯旋转 + 反射才组成 $O(N)$。所以，要说“连接”，这个词也不一定对，可能理解 Z_2 将 $SO(4)$ 扩展到了 $O(4)$ 可能会好一些。

2. 误以为一个 $SU(2)$ 代表 $\det = +1$，一个 $SU(2)$ 代表 $\det = -1$ 于是开始苦恼该哪个是 -1 的，还以为意味着某种反对称。错误，所谓 $\det \pm 1$ 是 $O(4)$ 中元素的整体性质，不能单独分配给某个 $SU(2)$.

3. 第三个容易误解的就是我上面说的，容易以为 Z_2 就是 PHS.

4 Z_2 breaking

以上阐述完毕，让我们回到 Phillips 这篇文章: Discrete Symmetry Breaking Defines the Mott Quartic Fixed Point.

前面我们讲了存在，现在讲打破。

Motivation.- 物理学家找到了一个比 Hubbard model 更为简单的精确解模型：HK model. 这一模型在过去已经被证明其基态具有 Mott 绝缘体，但是 HK model 能够导致 Mott 物理这一点却不广为接受，我们想理解 HK model 与 Hubbard model 这两个看似不同的物理模型为什么能够产生相同的物理。一方面，两个模型经过傅立叶变换后，HK 相互作用其实就是 Hubbard 相互作用的特殊情况：散射动量为 $0(q=0)$，仅相同动量有相互作用 $(k=p)$. 另一方面，两个模型的谱函数基本有相同的结构。因此这激励我们将重心放在研究 HK interaction 上，本部分要解决的核心问题：HK ineraction 为什么会导致 Mott 物理？我们将要使用 RG 分析费米子相互作用的 scaling dimension，并得出结论：HK interaction 是 perturbation，即，在低能下主导系统行为，HK term 的 scaling dimension 与化学势属于同一量级。

RG.- RG 是如何判断某个相互作用 relevant / irrelevant 的？定义缩放变换（scaling transformation）

- 假设你把动量 $p \to sp$（$s<1$ ，意味着看更长的尺度）
- 时间 $t \to s^z t$（z 是动态指数）
- 场 $\psi(p) \to s^{-\Delta_\psi}\psi(p)$，你会根据自由理论中要求 action 尺度不变来确定 Δ_ψ

给出 action 中的相互作用项，例如：

$$S_{\text{int}} = \int d^d x\, dt\, g \cdot \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi$$

计算这个项在缩放下的维度变化，如果它在缩放后：

- 变大。说明它在大尺度更显著 → relevant
- 变小。说明它会被“洗掉”→ irrelevant
- 不变。说明它是 marginal（可能产生量子修正）

在原文中，Phillips 等人计算了 kinetic term S_0，以及相互作用项，

$$S_{\text{int}} = U \int dt\, d^{d-1}k\, d\ell\, \psi_\uparrow^\dagger(k)\psi_\uparrow(k)\psi_\downarrow^\dagger(k)\psi_\downarrow(k)$$

在这个 rescaling 下会变：

$$S = \int d^d x\, dt\, \mathcal{L} \to s^{\dim(S)} S$$

如果某个项的 scaling 是 s^{α}，则：$\alpha < 0$（也就是像 s^{-2} ）$\to$ 这个项在 $s \to 0$ 时变大！小尺度（高能）下是微弱的。大尺度（低能）下会放大 $\to$ 主导物理行为 $\to$ relevant。如果 $\alpha > 0 \to$ 随着尺度放大变得微弱 $\to$ irrelevant. HK 相互作用只含一个动量积分，四个场导致的 scaling 维数是：

$$[s^1 \cdot s^{d-1} \cdot s^1 \cdot (s^{-1/2})^4] = s^{-2}$$

说明它在 RG 流中是 relevant。

HK interaction breaks Z_2.- 在前面的内容里我们已经确信 HK 相互作用在低能下非常重要，对系统的行为其主导作用，因此嫌疑人锁定是 HK 相互作用。但是打破了这一 Z_2 的后果为什么是电荷产生能隙而不是自旋产生能隙呢？首先，Mott 绝缘体本身并不能保证自旋自由度一定是 gapless 的，常见的铜氧化物高温超导相图里的 AF phase 实际上是 MI 与反铁磁海森堡共存。一个大致的图像是 Mott 绝缘体进一步降低温度可以出现反铁磁序，因此并不是说 Mott 绝缘体一定会有反铁磁序。另一方面，为什么出现的是 charge gap，可以看 HK 相互作用打破之后的形式：$n_{p\uparrow}n_{p\downarrow} \to (1-n_{p\uparrow})n_{p\downarrow}$，其实也就可以看出来，$n_{p\uparrow}n_{p\downarrow}$ 反号了，这体现的就是 charge gap.

5 Summary

总的来说，精准的 O(4) 和 SU(2) 的 charge pseudospin 只存在于费米面，一旦偏离费米面：

1. O(4) 不存在。尽管有任意动量点都可以表示成 4 个 majorana 费米子，但是这四个 majorana 费米子表示的哈密顿量只有在正好处于费米面上时才不变
2. 电荷自由度的对称性降成 U(1).

最后，让我们用 Phillips 的原话总结： The extra Z_2 symmetry obtains only for the electrons precisely at the Fermi surface. In fact, while electrons at the Fermi surface have an SU(2) symmetry those away just have a U(1). As the kinetic energy vanishes for such electrons, extra symmetries emerge. The relevant symmetry that emerges within O(4) is that the sign of only one of the spin currents can be changed（指的是只能对单一的自旋做粒子-空穴变换）without any consequence to the underlying theory. That is, at the Fermi surface, a particle-hole transformation on one species $c_{p\uparrow} \to c^{\dagger}_{p\uparrow}$ or $n_{p\uparrow} \to 1 - n_{p\uparrow}$ but preserving $n_{p\downarrow} \to n_{p\downarrow}$ can be made with impunity. The remaining electrons do not enjoy this symmetry. From the analysis above, it is clear that any interaction of the form $n_{p\uparrow}n_{p\downarrow}$ (the interaction in S_{int}), maximally breaks the momentum-space Z2 symmetry $(n_{p\uparrow} \to 1 - n_{p\uparrow}, n_{p\downarrow} \to n_{p\downarrow})$ of a Fermi surface as it transforms to $(1 - n_{p\uparrow})n_{p\downarrow}$ and hence the 2-body term changes sign. The presence of a charge gap but gapless spin degrees of freedom in the half-filled state are manifestations of the breaking of the discrete Z_2 symmetry as the spin and charge currents can no longer be rotated freely.（这里不能单纯理解成电荷、自旋自由度的互相转换，还是指的这种粒子-空穴对称性破坏，因为四 Majorana 表示实际上把电荷自由度、自旋自由度当成同等对待。）Consequently, both the Mott insulating (gapped charge but gapless charge degrees of freedom) and doped system (absence of particle-hole symmetry) are affected by the breaking of Z_2 symmetry.

常说一句话就是 MI 没有打破任何对称性，因此与一众绝缘体有区分，比如最典型的是 Slater 绝缘体。这里的对称性与本文一直在讨论的 Z_2 对称性不是指的一回事。朗道费米液体破缺 Z_2 对称性至 MI，与我们常说的 phase to phase 的对称性破缺也不太一样，在这边 Z_2 的破缺之后似乎也不能找到对应的序参量进行描述。

理论的局限性　实际上，本文（原文）讨论的时候，并没有明确讨论 filling level 对理论的影响，而是默认半满。但即使是半满我们也知道，MI 并不是立马发生，而是在 $U > W$ 时才进入到 MI phase，这一点单靠上面的对称性打破的分析无法解释

理论的扩展性　原文之所以能刊登上 Nature physics 恐怕不止是对称性这一点，其剩下部分很大程度在使用一个对目前的我来说很复杂的理论（似乎是数学那方面）叫做 K-theory 的证明 Luttinger surface 的稳定性。关于这部分内容，我没有讨论。其次，原文可能有更多细节，因此，若要以严肃的态度对待这些理论，请读原文。