

非阿贝尔规范场理论

渐进自由 asymptotic freedom

渐近自由是指系统的相互作用参数 g 会随着能量尺度的升高而逐渐降低

- 物理上，这说明高能时粒子之间通过规范场传递的相互作用会很小
- 低能下耦合常数会非常大——基于Feynman图形的微扰论处理将会失效.
- 当我们探测非阿贝尔规范理论的高能行为时相互作用会变得比较小而使微扰理论计算能够得到可靠的结果

量子色动力学(QCD)理论与SU(3)

- SU(3)群有 $3^2 - 1 = 8$ 个生成元，对应8种夸克
- SU(3)不变性就是在色空间转动的不变性
- 夸克在强相互作用下只能形成束缚态，而这些束缚态就是质子、中子以及介子. 夸克禁闭现象也称为色禁闭.
- 晶格规范场预言粒子之间存在随距离线性增加的相互作用势，就给出了夸克色禁闭的可能.
- 标度方程 $D \rightarrow 0$ 的低能极限预言体系流向强耦合， $g = \infty$ 不动点

Z_2 晶格规范场与夸克禁闭 Wilson loop

Wilson loop 的物理意义可以想象成在时空中插入两个试探(异号)电荷，那么计算Wilson loop的基态期望值等价于：计算距离为 R 的两个单位异号试探电荷存在时规范场基态能量的移动.

进一步的，试探电荷存在时基态能量的移动 ΔE 可理解为(静止的)试探电荷之间的势能

- Wilson loop关联函数(就是Wilson loop的基态期望值)的面积律(area law)具有指数型的按面积衰减形式: $\langle W(C) \rangle \sim e^{-A_c}$
- Wilson loop关联是其回路周长的指数衰减形式即周长律(perimeter law): $\langle W(C) \rangle \sim e^{-P_c}$.

一般把高温满足面积律的相叫做规范场的禁闭态(confined).而低温下满足周长律的称为退禁闭态(deconfined).

- 试探电荷之间的势能是 $V(R) \sim R$. 对于此线性增长的势能，说明两个电荷不能自由运动而只能被束缚在一起. 这种线性势通常认为是量子色动力学中夸克发生禁闭的直接原因
- 周长律表明势能 $V(R)$ 与 R 无关，这样电荷可以自由运动不受限制，这类似于夸克能够自由运动的情况，称为退禁闭相

注意到，在纯规范理论中，我们可以用Wilson loop来区分禁闭态和退禁闭态，但是在有物质场存在的情况下，Wilson loop实际上失效。

*通过Wilson loop计算等效的一维瓦尼尔函数心，确定 Z_2

Introduction.

朗道相变理论强调了对称性的重要性，指出凝聚态物质中对称性的破缺对应着相变的发生。However, 对有些态相变不存在对称性的变化，不存在局域序参量，因而引入拓扑不变量

整数霍尔效应. 霍尔平台 $\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{h}$. 物理上是全部电子被局域化到分立的朗道能级上，变成绝缘体。但是边界是导体。

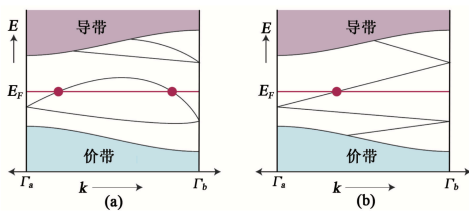
第一陈数 n . 也就是上一段里出现的 n ，它是怎么变成第一陈数的呢？人们发现这个整数与系统占据态在布里渊区中的拓扑性质有关

Z_2 拓扑数. 相比起第一陈数 n , 在具有时间反演对称性系统时为0， Z_2 拓扑数专门用来描述具有时间反演对称性的二维绝缘体系统

1. 普通绝缘体 $Z_2 = 0$

1. 拓扑绝缘体 $Z_2 = 1$

Fig :



边界态. 费米面和边界态相交次数是偶数次，在外在扰动下，边界态可以被拉进体态中，边界态不稳定(left)

费米面和边界态相交奇数次，在足够小的外界扰动下（需要小到不使得系统能隙发生闭合），能隙中始终存在边界态，边界态是稳定的，受拓扑保护的(right)

Method.

文章中介绍了几种方法计算 Z_2 拓扑数（我都不懂），这里主要稍微介绍一下用非阿贝尔贝里联络表示计算 Z_2 拓扑数涉及到的一些概念（也就是Wilson loop法），以及成果展示

- $U(2N)$ 非阿贝尔贝里联络(non-Abelian Berry's connection) $F_{i,i+1}^{nm}$.
- $W(k_y)$ 矩阵定义为 $F_{i,i+1}^{nm}$ 的首尾相接的连乘.

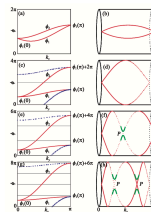
- 等效一维系统占据态的瓦尼尔函数心。简单来说就是利用等效的拓扑性质把三维系统降成二维($k_z = 0, \pi$), 然后又降成一维(固定 k_y 当作绝热变化的参数), 故称为“等效一维”。 $W(k_y)$ 矩阵的本征值的 相位 就是等效一维系统占据态的瓦尼尔函数心

$$\text{eigenvalues: } \lambda_m(k_y) = |\lambda_m| e^{i\phi_m(k_y)}, m = 1, 2, \dots, 2N \quad (1)$$

- 为什么能和 Z_2 拓扑数联系起来? 依然要利用L.Fu和Kane给出的计算 Z_2 拓扑数公式, 将贝里联络进行积分, 通过这个公式和一些计算最后会得到

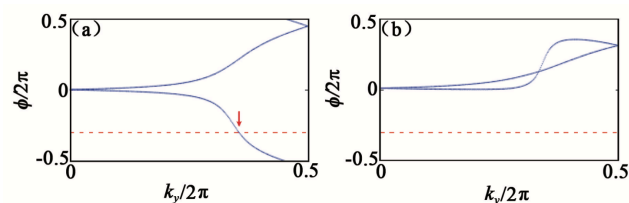
$$Z_2 = \sum_n^{2N} M_n \mod 2 \quad (2)$$

M_n 表明缠绕数。物理上表明, 系统的 Z_2 拓扑数等于等效的一维系统瓦尼尔函数心缠绕数之和模2。如何利用这个来判断拓扑绝缘体?



由于时间反演对称性, 占据能带在 $k_y=0, k_y=\pi$ 处是二重简并的; 绘制相位 ϕ 的变化, 初步想象成一个圆柱体使得这些线段首尾相连, (b)的缠绕数为0, (d)的缠绕数为1

对应于真实材料



(a)瓦尼尔函数心演化曲线(蓝色实线)和参考线(红色虚线)相交一次; (b)瓦尼尔函数心演化曲线和参考线相交零次(或偶数次)可以判断出系统处于普通绝缘体态

Z_2 拓扑数这部分参考:

<https://mp.weixin.qq.com/s/5Gq9O7C1LLg8MvRjMO3OYQ>

<https://mp.weixin.qq.com/s/0oT8KwM5mFFqA7S7Y5Bo6w>

这两篇文章提供的是代码计算的方法. 更多图像和公式:

[余睿, 方忠, 戴希. \$Z_2\$ 拓扑不变量与拓扑绝缘体\[J\]. 物理, 2011, 40\(07\): 462-468.](#)

Heisenberg模型与自旋波激发

对于 $S = 1/2$ 反铁磁量子Heisenberg模型

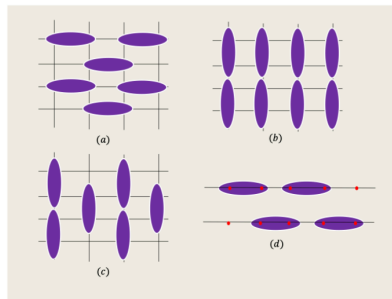
2-spin基态：自旋单重态

1D chain基态：顺磁性的量子自旋液体,而非具有长程序的反铁磁态(Bethe ansatz)

2D 正方晶格基态：Néel type

Frustration: VBS or RVB

- VBS也就是自旋单态，破缺晶体的空间对称性



单个的“bond”就是一个价键，也就是一对自旋单重态

Schwinger玻色子表示(Schwinger boson)

把一个 $S = 1/2$ 自旋用两个玻色子表示

- RVB就是价键在不同格点间共振
 - = VBS + 强量子涨落
 - 也就是QSL: quantum spin liquid(但只是QSL的一种)
 - RVB的激发是产生一个自由的 $S = 1/2$ 自旋单态(注意到，不是自旋单重态)，就是所谓的自旋子(spinon)，该自旋子可以在系统中自由传播，也就是退禁闭的(deconfined)
 - 与之相反，在Néel type中自旋子禁闭的原因在于：自旋子传播会导致传播路径上的自旋发生失配这样自旋子等效于感受到线性势场