

## 3.6.1. Спектральный анализ электрических сигналов.

Дорогинин Д.В.

**Цель работы:** исследование спектра колебаний электрических сигналов.

**В работе используются:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

### Теория

#### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция  $f(t)$ , которая периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

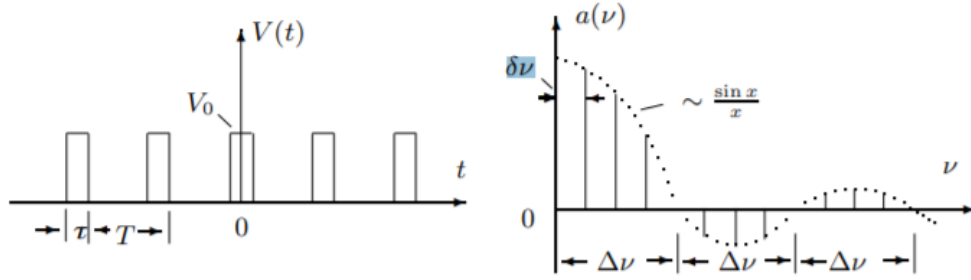
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $t_1$  — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для  $A_n$  и  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

## Периодическая последовательность прямоугольных импульсов



Введем величину:  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

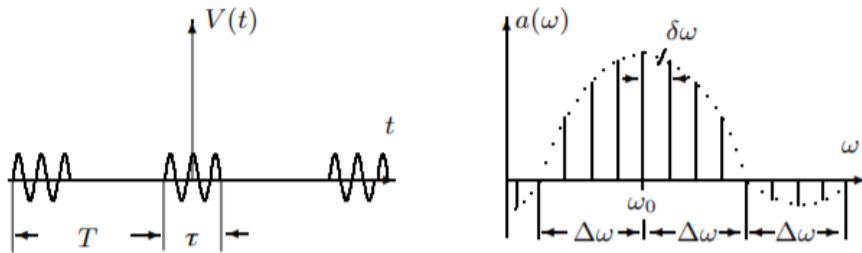
Здесь  $V_0$  — амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то  $b_n = 0$ .

Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда введем ширину спектра, равную  $\Delta\omega$  — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

## Периодическая последовательность цугов



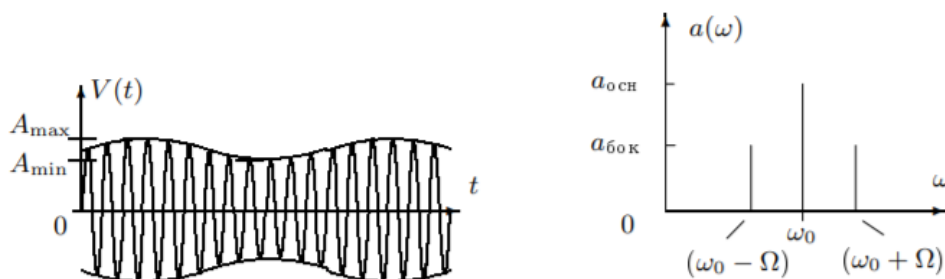
Возьмём цуги колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторений  $T$ .

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на  $\omega_0$ .

## Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega \ll \omega_0$ .

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент  $m$  называется *глубиной модуляции*. При  $m < 1$  амплитуда меняется от минимальной  $A_{\min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{\max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

## Ход работы

### Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем прямоугольные колебания с  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц (период  $T = 1$  мс) и длительностью импульса  $\tau = T/20 = 50$  мкс.

Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя либо  $\tau$ , либо  $\nu_{\text{повт}}$ , наблюдаем, как изменяется спектр.

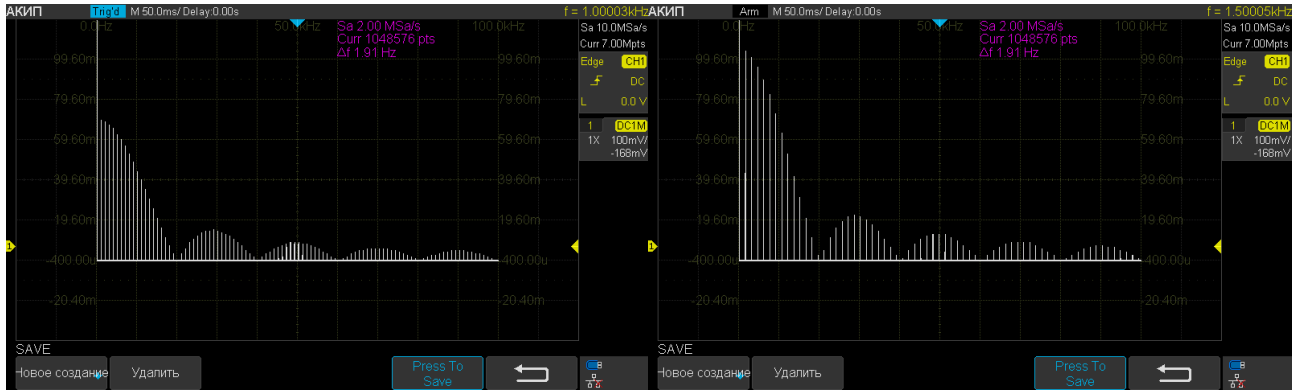
Теперь зафиксируем  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц и  $\tau = 50$  мкс. Для этих параметров измерим величину  $a_n$  и  $\nu_n$  для первых 5 гармоник и сравним с рассчитанными значениями по формуле (5).

Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от  $\Delta\nu$  и установим зависимость между  $\Delta\nu$  и  $\tau$ , полученную из формулы (6).

$\tau$ , мкс	50	75	100	125	150	175	200
$\Delta\nu$ , кГц	19.6	13.4	9.8	8.0	6.5	5.5	4.5
$1/\tau \cdot 10^3$ , с <sup>-1</sup>	20	13	10	8	7	6	5

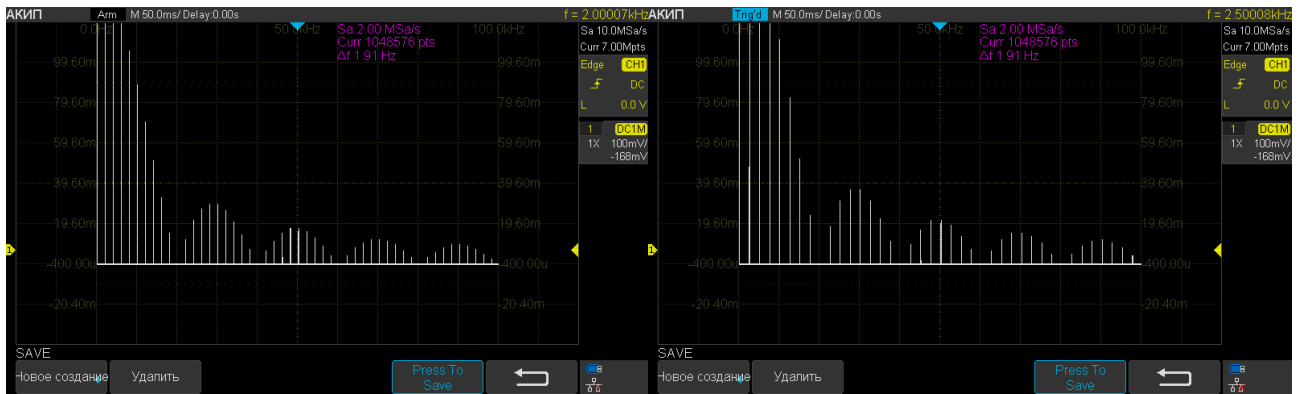
$$\Delta\nu\tau \approx 1.000 \pm 0.018$$

В итоге получаем, что формула (6) довольно точно выполняется.



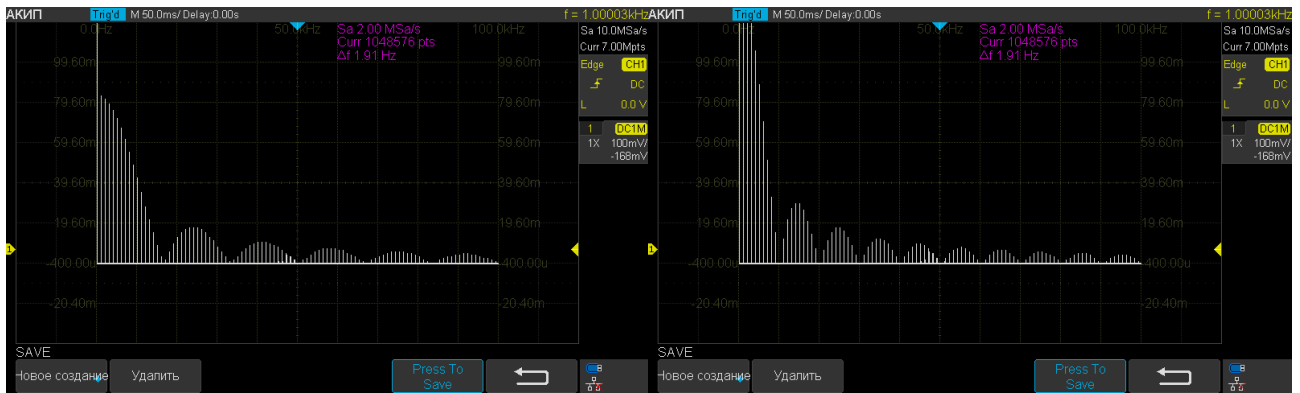
(a)  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ .

(b)  $\nu_{\text{повт}} = 1.5 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ .



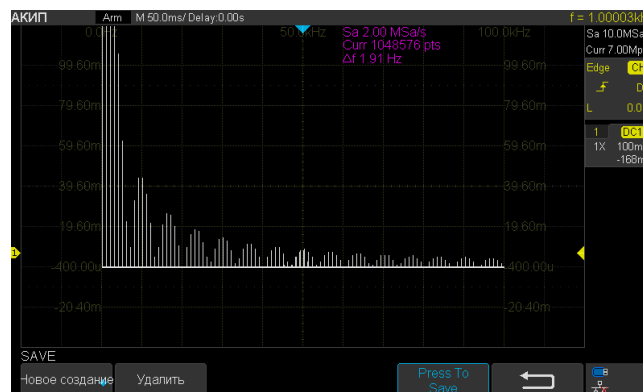
(c)  $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ .

(d)  $\nu_{\text{повт}} = 2.5 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ .



(e)  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 60 \text{ мкс}$ .

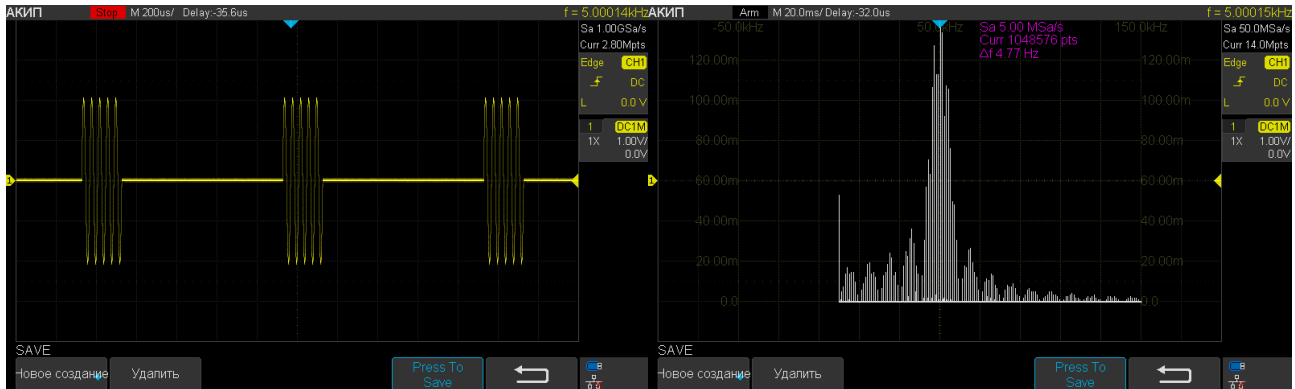
(f)  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ .



(g)  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 150 \text{ мкс}$ .

## Исследование спектра периодической последовательности цугов

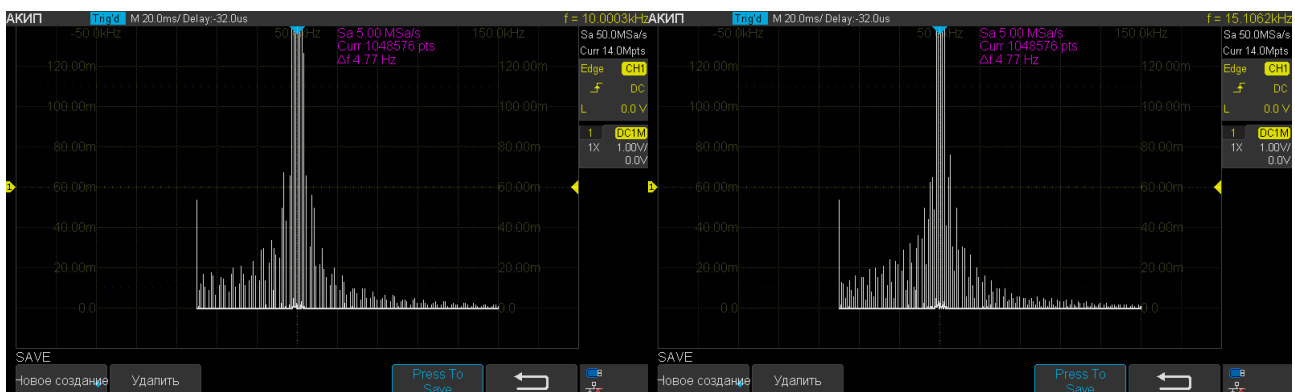
Получаем на экране последовательность цугов с характерными параметрами:  $\nu_0 = 50$  кГц,  $T = 1$  мс, число периодов в одном импульсе  $N = 5$  (длительность импульса  $\tau = T/\nu_0 = 100$  мкс).



(a) Последовательность цугов.

(b) Спектр для цугов.

Теперь будем менять эти параметры по одному и зафиксируем несколько таких изменений:



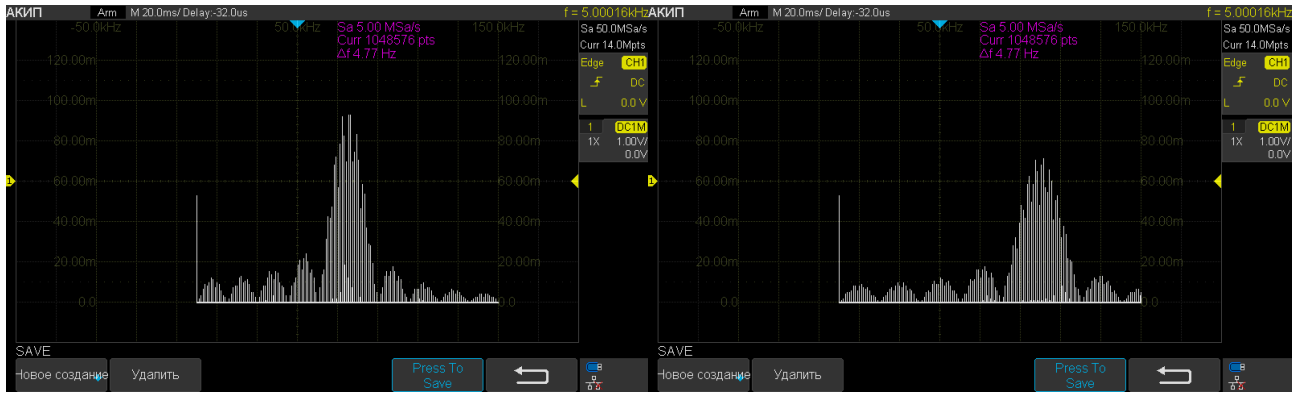
(a)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 10$ .

(b)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 15$ .



(c)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $T = 2.5$  мс,  $N = 5$ .

(d)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $T = 5$  мс,  $N = 5$ .



(a)  $\nu_0 = 75$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 5$ .

(b)  $\nu_0 = 100$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 5$ .

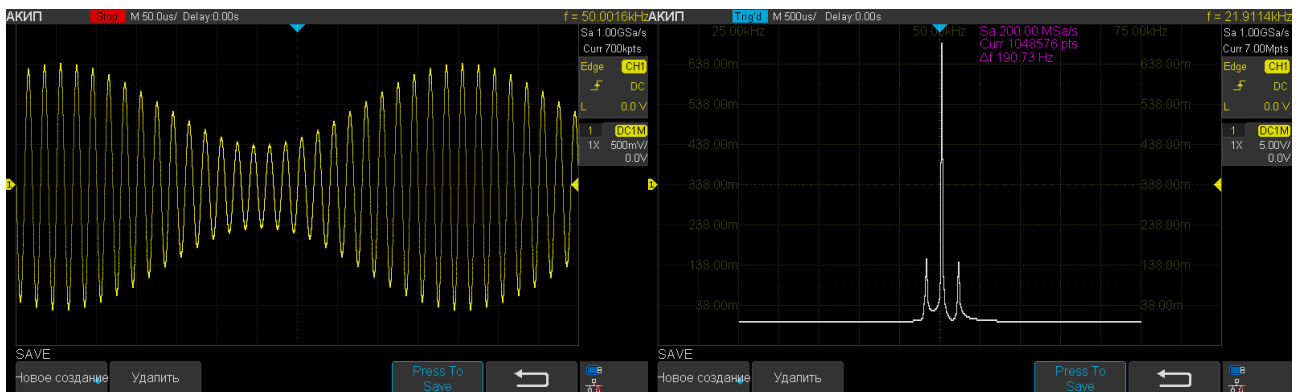
Теперь зафиксируем  $\nu_0 = 50$  кГц,  $N = 5$ . Для этих параметров измерим, меняя  $T$  ( $\nu_{\text{повт}}$ ), зависимость  $\delta\nu$  от  $\tau$ .

$\Delta\nu$ , кГц	23	32	35	38	35	45
$n$	42	33	18	13	10	8
$\nu_{\text{повт}}$ , кГц	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0

Итоговое отношение:  $\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = 1.05 \pm 0.08$

## Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

Выведем на экран картину амплитудно-модулированного сигнала с характерными параметрами: несущая частота  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц, глубина модуляции - 50 % ( $m = 0.5$ ). Картины данного сигнала и его спектра будут выглядеть следующим образом:



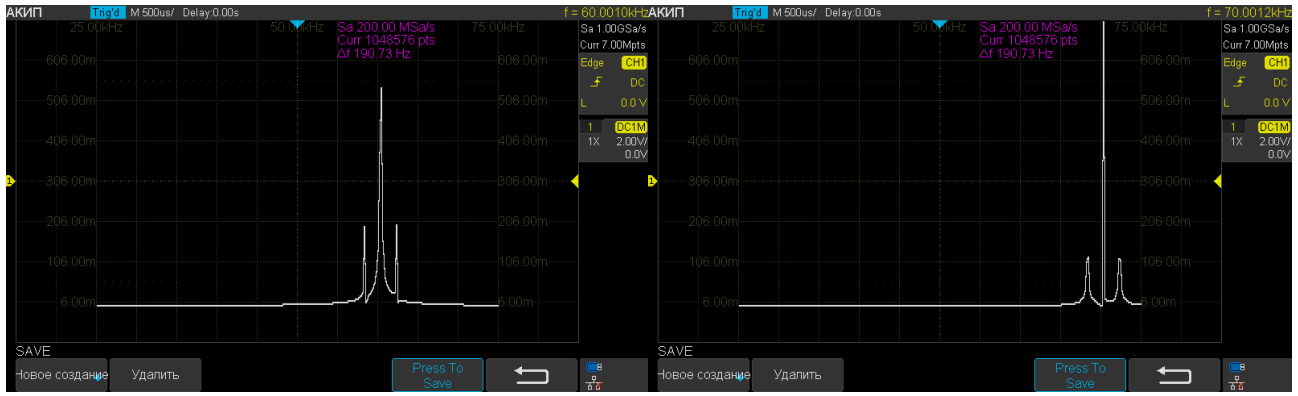
(a) Амплитудно-модулированный сигнал.

(b) Спектр для  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц.

Найдем для него  $A_{\text{max}}$  и  $A_{\text{min}}$  и проверим справедливость формулы (9).

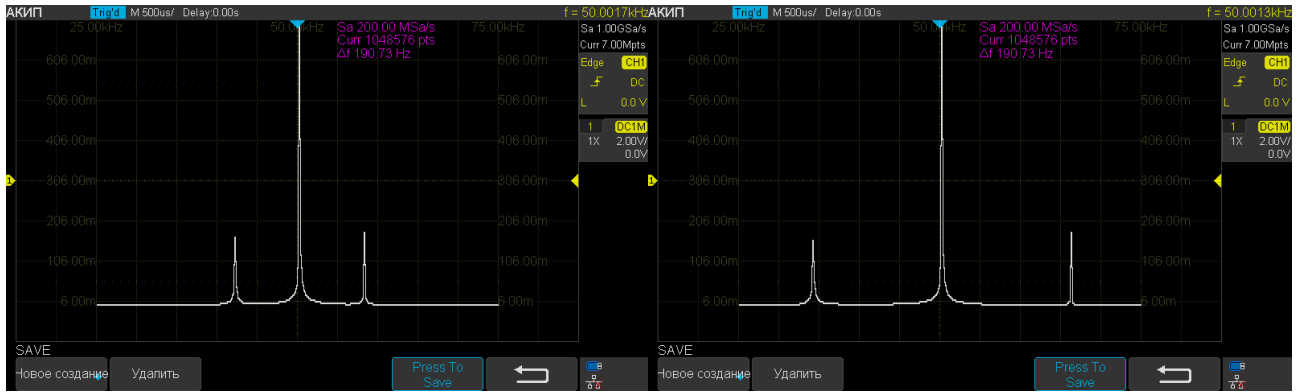
$A_{\text{max}}$ , В	1.52
$A_{\text{min}}$ , В	0.48
$m$	0.52

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0.5, а из теории у нас получилась 0.52, то мы видим, что формула (9) верна.



(a)  $\nu_0 = 60$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц.

(b)  $\nu_0 = 70$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц.



(c)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 8$  кГц.

(d)  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{\text{мод}} = 16$  кГц.

Получим на экране спектр и будем изменять параметры сигнала:

Из формулы (10) следует, что  $a_{\text{осн}} = A_0$ , а  $a_{\text{бок}} = \frac{mA_0}{2}$ .

$m, \%$	10	25	50	75	100
$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	360	820	1660	2320	3260
$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	6240	6240	6240	6240	6240
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.06	0.13	0.27	0.37	0.52
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m, \%$	57.7	52.6	53.2	49.6	52.2
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m = (53.1 \pm 1.3)\%$					

Из (10) имеем  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} \cdot m = 0.5$ , что с высокой точностью повторяет наш результат.