

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Валеев Рауф Раушанович
группа 825

6 ноября 2019 г.

Цель работы

Изучить спектры электрических сигналов.

Оборудование

генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

Теория

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Метод для описания сигналов. Для него используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \quad (2)$$

Если сигнал четен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (4)$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем некоторые величины:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x} \quad (5)$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть у нас τ кратно T . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (6)$$

Периодическая последовательность цугов

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right) \quad (7)$$

Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (8)$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (9)$$

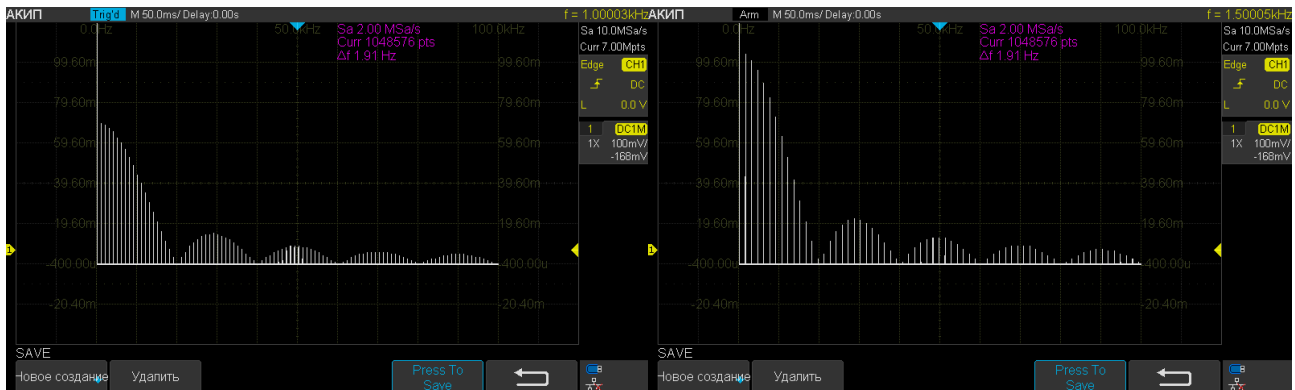
Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (9) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \quad (10)$$

Ход работы

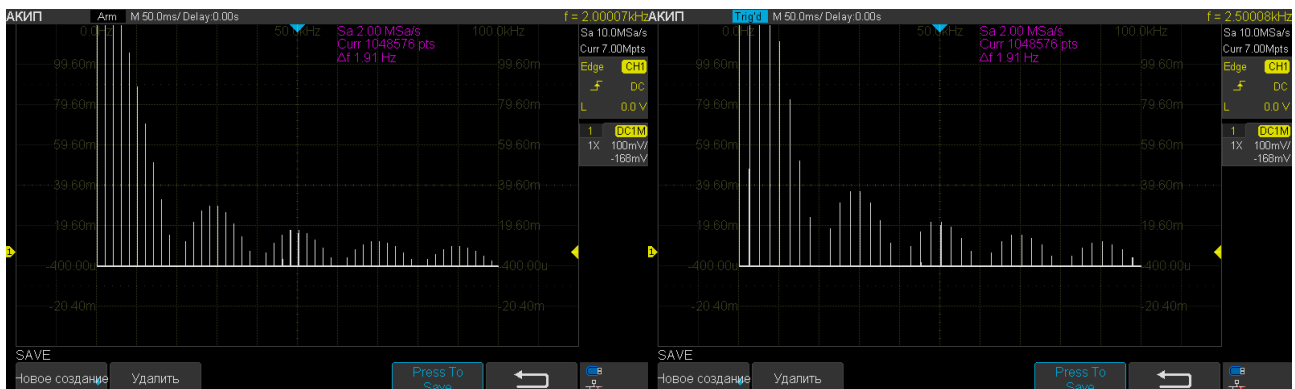
Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем колебания прямоугольные с $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ (период $T = 1 \text{ мс}$) и длительность импульса $\tau = T/20 = 50 \text{ мкс}$. Получаем на экране спектр сигнала, потом изменяя τ и $\nu_{\text{повт}}$, не изменяя другой величины наблюдаем, как изменяется спектр.



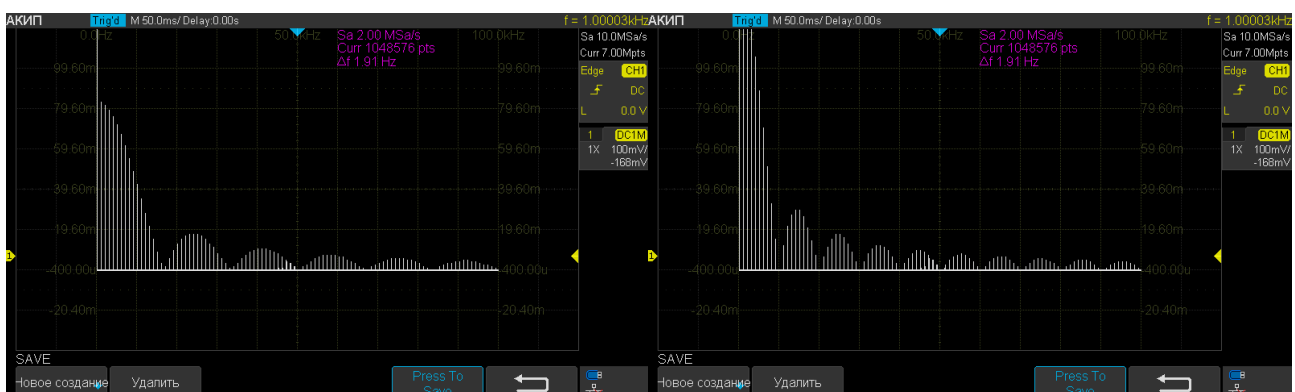
(a) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$.

(b) $\nu_{\text{повт}} = 1.5 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$.



(c) $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$.

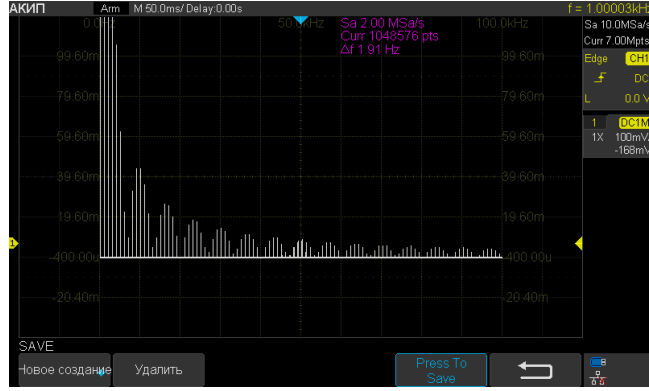
(d) $\nu_{\text{повт}} = 2.5 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$.



(e) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 60 \text{ мкс}$.

(f) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$.

Теперь зафиксируем $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и $\tau = 50 \text{ мкс}$. Для этих параметров измерим величину a_n и ν_n . И сравним с рассчитанными значениями по формуле (5).



(а) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 150 \text{ мкс}$.

n гармоники	1	2	3	4	5
f , кГц	29,4	49,4	69,6	89,8	110
a_n , мВ	15,6	9,2	7,5	5,2	4,4
$a_{n,\text{теория}}$, мВ	11,6	10,3	8,4	6,1	3,6
$\frac{ a_n - a_{n,\text{теория}} }{a_{n,\text{теория}}}$	0,25	0,12	0,12	0,16	0,18
$\Delta\nu$, кГц	20	20	20,2	20,2	20,2

Таблица 1. Исследование амплитуд и частот гармоник.

Из таблицы мы видим, что $\Delta\nu$ сохраняются между гармониками, что сходится с теорией. Так же мы видим, что амплитуды довольно неплохо сходятся с теорией. Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от $\Delta\nu$ и установим зависимость между $\Delta\nu$ и τ , полученную из формулы (6).

τ , мкс	50	75	100	125	150	175	200
$\Delta\nu$, кГц	19,6	13,4	9,8	8,0	6,5	5,5	4,5
$1/\tau \cdot 10^3$, с^{-1}	20	13	10	8	7	6	5
$\Delta\nu\Delta t \approx 1,000 \pm 0,018$							

Таблица 2. Исследование зависимости Δt от $\Delta\nu$.

В итоге получаем, что формула (6) довольно точно выполняется.

Исследование спектра периодической последовательности цугов

Получаем на экране последовательность цугов с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = T/\nu_0 = 100$ мкс). Сам сигнал выглядит так:

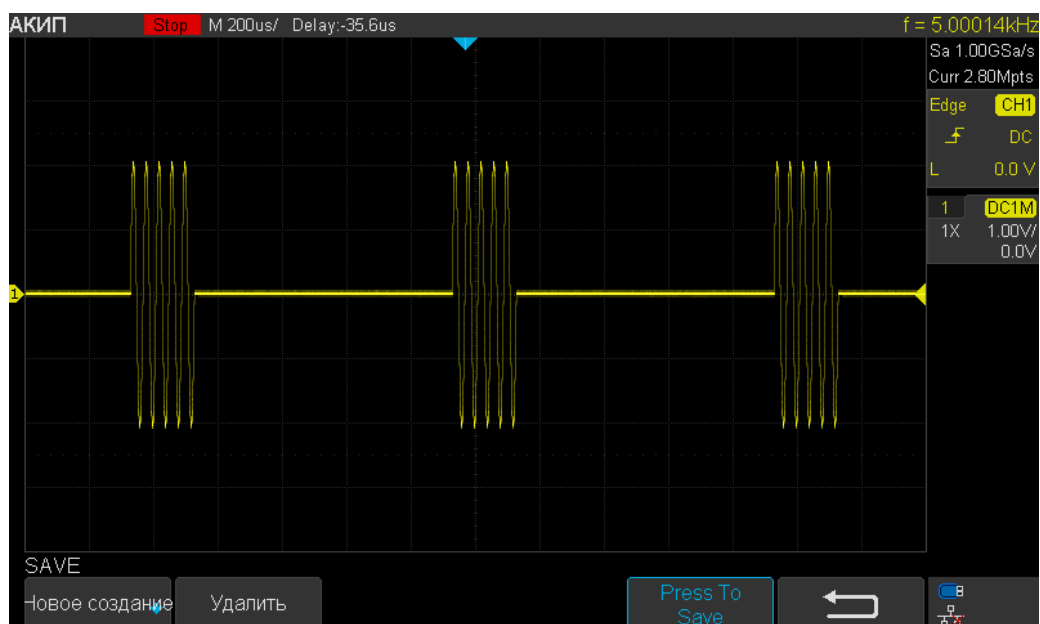


Рис. 8. последовательность цугов.

Для этого сигнала мы получаем картину для спектра

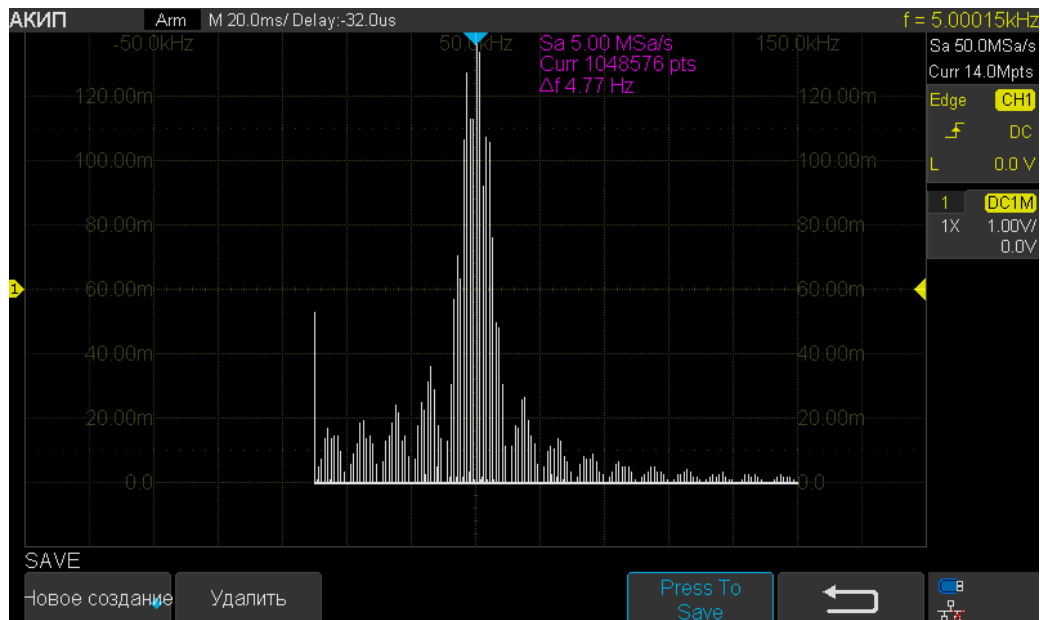
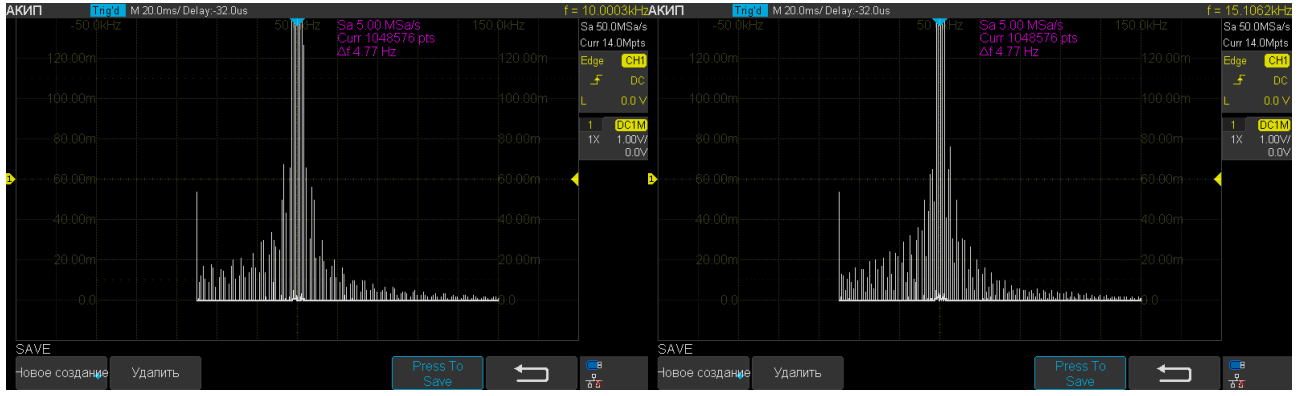


Рис. 9. Спектр последовательности цугов.

Теперь будем менять эти параметры по одному и зафиксируем несколько таких изменений



(a) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 10$.

(b) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 15$.



(c) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 2.5$ мс, $N = 5$.

(d) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс, $N = 5$.



(e) $\nu_0 = 75$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$.

(f) $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$.

Теперь зафиксируем $\nu_0 = 50$ кГц, $N = 5$. Для этих параметров измерим, меняя T ($\nu_{\text{повт}}$), зависимость $\delta\nu$ от τ .

$\Delta\nu$, кГц	23	32	35	38	35	45
n	42	33	18	13	10	8
$\nu_{\text{повт}}$, кГц	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0

Таблица 3. Зависимость $\Delta\nu$ от $\nu_{\text{повт}}$.

Итоговое отношение: $\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = 1.05 \pm 0.08$

Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

Выведем на экран картину амплитудно-модулированного сигнала с характерными параметрами: несущая частота $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубину модуляции - 50 % ($m = 0,5$). Картина данного сигнала будет выглядеть следующим образом:

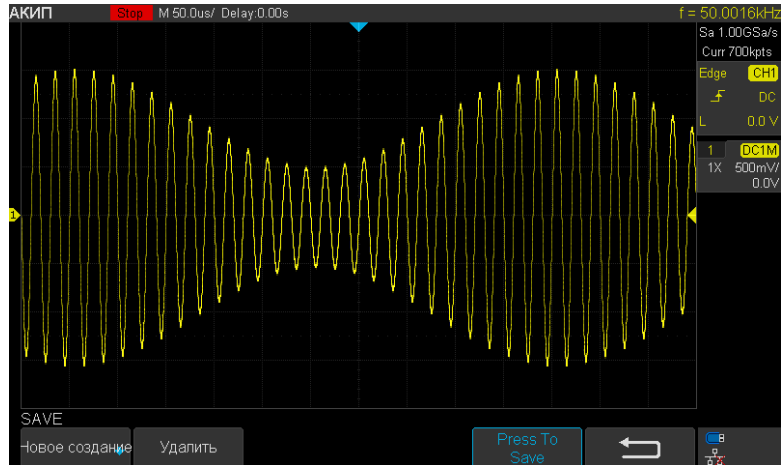


Рис. 16. Картина амплитудно-модулированного сигнала.

Найдем для него A_{max} и A_{min} и проверим справедливость формулы (9).

A_{max} , В	1,52
A_{min} , В	0,48
m	0,52

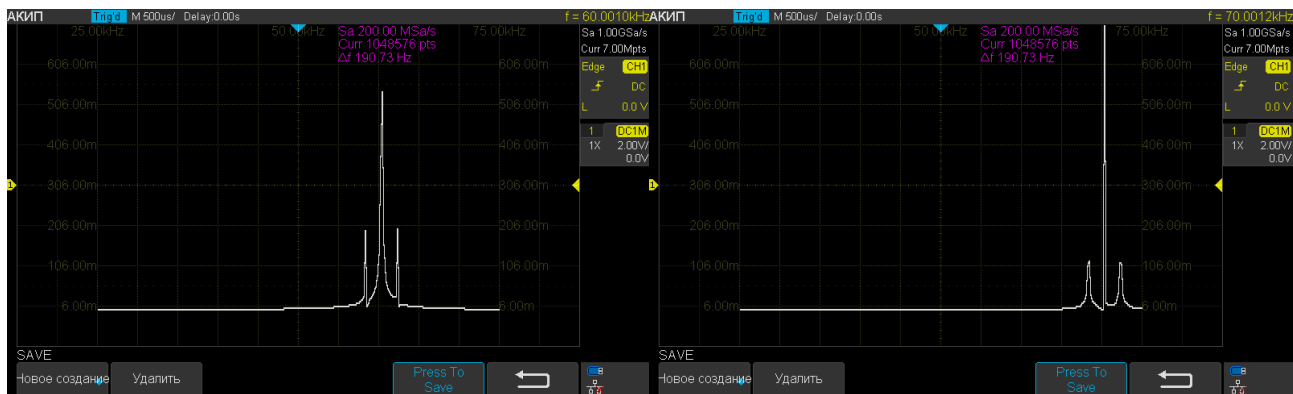
Таблица 3. Измерения максимальной и минимальной амплитуд и проверка формулы (9)

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,52, то мы видим, что формула (9) верна. Получим на экране спектр сигнала и будем изменять параметры сигнала. Из формулы (10) следует, что $a_{\text{осн}} = A_0$, а $a_{\text{бок}} = \frac{mA_0}{2}$, это нам и предстоит проверить в следующей серии измерений.

m , %	10	25	50	75	100
$a_{\text{бок}}$, мВ	360	820	1660	2320	3260
$a_{\text{осн}}$, мВ	6240	6240	6240	6240	6240
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0,06	0,13	0,27	0,37	0,52
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m$, %	57,69	52,56	53,21	49,57	52,24
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m = (53,1 \pm 1,31)$, %					

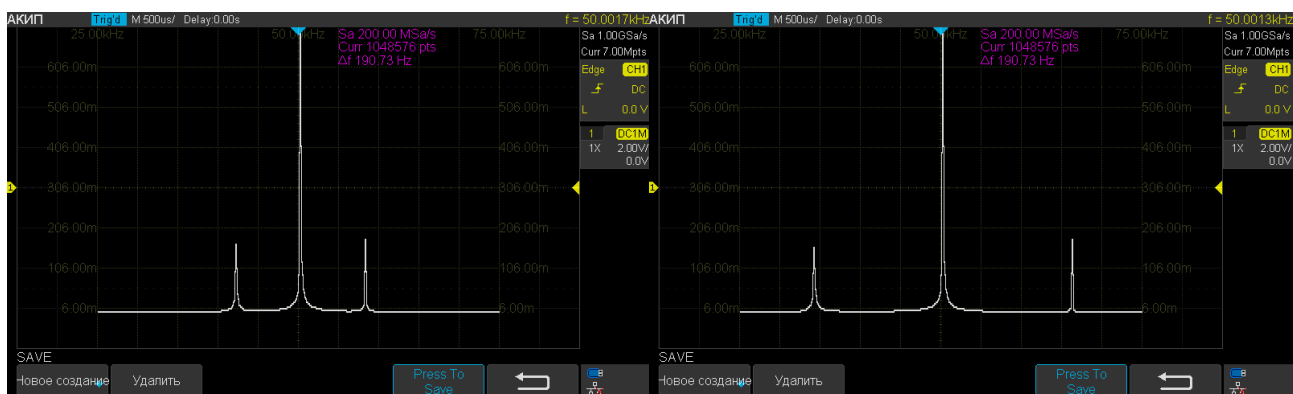
Таблица 3. Исследование зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m .

Так как из написанного выше должно было получиться, что $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} \cdot m \approx 0,5$, что у нас и получилось.



(a) $\nu_0 = 60$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц.

(b) $\nu_0 = 70$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц.



(c) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 8$ кГц.

(d) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 16$ кГц.

Вывод

Мы убедились в справедливости разложения в ряд Фурье сигналов, с помощью анализа спектра сигналов и получения для них характерных величин и проверки закономерностей.

Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.
2. **Дополнительное описание лабораторной работы 3.6.1:** Исследование спектров сигналов; Под ред. МФТИ, 2018 г. - 10 с.