

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Панферов Андрей

2019-11-11

1 Аннотация

В работе проверяются теоретические расчеты моментов инерции некоторых тел и проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера с помощью трифилярного подвеса.

полить воды

2 Теоретические сведения

Платформа Р укреплена на кронштейне и снабжена рычагом, при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. После того, как нижняя платформа Р' оказывается повернутой на угол ϕ относительно верхней платформы Р, возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E$$

Расстояние между точками С и С'' равно длине нити L.

$$(R\cos\phi - r)^2 R^2 \sin^2\phi + z^2 = L^2$$

Учитывая малость угла поворота и пользуясь первым приближением корня получим:

$$z \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляем это выражение в закон сохранения энергии, дифференцируем уравнение сохранения по времени и сокращаем на . Находим уравнение крутильных колебаний:

$$I\ddot{\phi} + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = 0$$

Откуда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2z_0} \quad k = \frac{grR}{4\pi^2z_0} \quad I = kT^2$$

3 Оборудование и инструментальные погрешности

Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить – используются в качестве оборудования. Формулы для расчета погрешностей:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z_0}{z_0} &= \sqrt{4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} \\ \frac{\Delta k}{k} &= \sqrt{5\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + 5\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} \\ \frac{\Delta I_i}{I_i} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_i}{m_i}\right)^2} \\ \frac{\Delta m}{m} &= \sqrt{4\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta I_{\text{диска}}}{I_{\text{диска}}} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2}$$

4 Измерение параметров установки

Параметры установки:

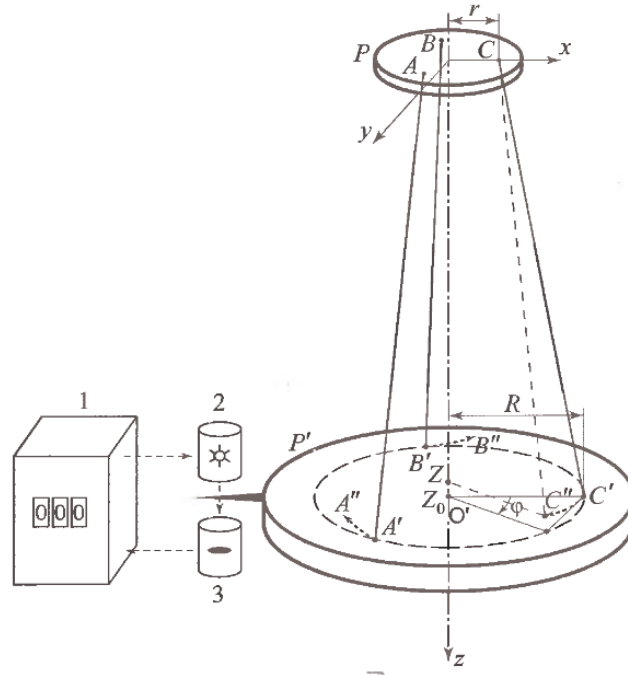
$$z_0 = 2.146 \pm 0.02 \text{ м}$$

$$R = 114.6 \pm 0.5 \text{ мм}$$

$$r = 30.5 \pm 0.3 \text{ мм}$$

$$k = \frac{grR}{4\pi^2 \cdot z_0} = (4.03 \pm 0.06) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

$$m = 983.2 \pm 0.5 \text{ г}$$



5 Колебания пустой платформы

Таблица 1: Серия измерения периодов

$T_{10}, \text{ с}$	43.942	43.886	43.885	43.872	43.886	43.874	43.884	$T_{10\text{ср}} = 4.3890\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0009\text{с}$
---------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_0 = (7.63 \pm 0.11) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

6 Измерение моментов инерции тел

6.1 Диск

$$m = 584.4 \text{ г} ; r = 85.4 \text{ мм}$$

$T_{10}, \text{ с}$	39.292	39.292	39.277	39.225	39.286	39.238	39.212	$T_{10\text{ср}} = 3.9260\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0013\text{с}$
---------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_{\text{диск}} = (2.11 \pm 0.20) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

6.2 Брусок

$$m = 1273.0\text{г} \quad ; \quad l = 209.2\text{мм} \quad ; \quad b = 28.5\text{мм}$$

$T_{10}, \text{с}$	36.998	36.975	36.926	36.971	36.994	36.919	36.958	$T_{10\text{ср}} = 3.6963\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0012\text{с}$
--------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_{\text{брусок}} = (4.79 \pm 0.22) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

6.3 Кольцо

$$m = 776.9\text{г} \quad ; \quad r = 154.3\text{мм}$$

$T_{10}, \text{с}$	41.747	41.718	41.720	41.707	41.701	41.695	41.689	$T_{10\text{ср}} = 4.1611\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0008\text{с}$
--------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_{\text{диск}} = (4.65 \pm 0.13) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

6.4 Кольцо+Диск

$$m = 1361.3\text{г}$$

$T_{10}, \text{с}$	39.112	39.121	39.120	39.059	39.045	39.105	39.103	$T_{10\text{ср}} = 3.9095\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0009\text{с}$
--------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_{\text{диск}} = (6.81 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

6.5 Кольцо+Диск+Брусок

$$m = 2634.3\text{г}$$

$T_{10}, \text{с}$	36.343	36.292	36.285	36.272	36.347	36.360	36.350	$T_{10\text{ср}} = 3.6321\text{с}$	$\delta T_{10\text{ср}} = 0.0014\text{с}$
--------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	------------------------------------	---

$$I_{\text{диск}} = (11.60 \pm 0.21) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

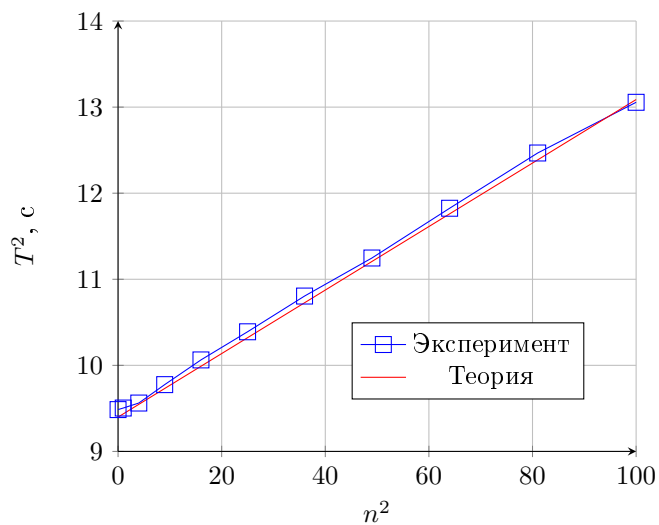
6.6 Сравнение теории с результатами эксперимента

Образец	Диск	Брусок	Кольцо	Диск+Кольцо	Диск+Кольцо+Брусок
$I_{\text{эксп}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$	2.11 ± 0.20	4.79 ± 0.22	4.65 ± 0.13	6.81 ± 0.15	11.60 ± 0.21
$I_{\text{теор}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$	2.13	4.73	4.62	6.75	11.48

7 Проверка закона Гюгенса-Штейнера

Параметры образца : $r = 90.0\text{мм}$; $\delta x = 5\text{мм}$

n	$T_{10}, \text{с}$
0	30.799
1	30.830
2	30.923
3	31.267
4	31.722
5	32.233
6	32.871
7	33.536
8	34.388
9	35.308
10	36.134



8 Обсуждение результатов и выводы

Мы выяснили, что теоретические выводы моментов инерции верны и совпадают с экспериментальными данными. Так же мы выяснили, что момент инерции аддитивен, а закон Гюгенса-Штейнера выполняется, так как линеаризованная зависимость получилась прямой. Погрешности величин не превышают 10%