

Работа Д.2.3

Определение вязкости воздуха по скорости истечения через капилляр

Панферов Андрей

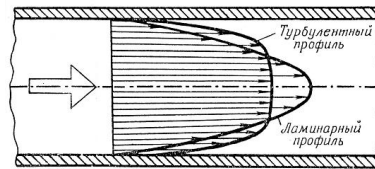
1 Аннотация

В работе производится измерение вязкости воздуха η по измерению объема газа, протекающего через капилляр (иглу шприца) при переменном перепаде давления. Проверяется зависимость расхода газа Q от радиуса капилляра r : $Q \sim r^4$ (формула Пуазейля).

2 Теоретические сведения

Вязкость (внутреннее трение) — свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

При небольших скоростях газа или жидкости течение среды является ламинарным. Движение среды при этом происходит слоями, обладающими разными скоростями. С увеличением скорости потока движение приобретает сложный, запутанный характер, слои перемешиваются, течение становится турбулентным. При этом скорость в каждой точке быстро меняет величину и направление, сохраняется только ее средняя величина.



Характер движения газа или жидкости зависит от соотношения между кинетической энергией движущейся среды и работой сил вязкости. Если первая величина мала по сравнению со второй, то турбулентные пульсации не развиваются и течение остается ламинарным. Отношение плотности кинетической энергии к плотности энергетических потерь из-за работы сил вязкости определяет безразмерное число Рейнольдса:

$$Re = \frac{vr\rho}{\eta}$$

В гладких трубах круглого сечения переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при значениях 1000.

Для вывода формулы Пуазейля рассмотрим стационарное течение вязкой жидкости или газа по трубе.

Мысленно выделим расположенный вдоль оси трубы цилиндр длиной и радиусом r . Скорость жидкости или газа в разных точках сечения, трубы из-за присутствия силы внутреннего трения различна: она будет наибольшей на оси цилиндра и убывать по мере приближения слоев к стенкам цилиндра, поэтому изменение скорости можно характеризовать градиентом d/dr . С внешней стороны на поверхность выделенного цилиндра действует сила вязкого трения, равная

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{d}{dr} S = -\eta \frac{d}{dr} 2\pi r l$$

Так как движение жидкости или газа происходит в разных местах трубы с постоянной для этого места скоростью, то сила $F_{тр}$ должна быть уравновешена силой F давления, вызывающей движение жидкости или газа и создающей перепад давлений $\Delta P = P_1 - P_2$ на торцах выделенного цилиндра, причем эта сила из определения давления равна $S\Delta P$.

$$\frac{d}{dr} = -\frac{\Delta P r}{2\eta l}$$

Постоянная интегрирования получается из граничного условия (скорость у края трубы нулевая), откуда

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

$$dQ = \frac{dV}{dt} = 2\pi r v dr = 2\pi r \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r^2)dr$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\eta l}$$

3 Метод измерений

Если цилиндр шприца с капилляром погрузить в сосуд с водой, так, как показано на рисунке, то скорость заполнения цилиндра определяется, очевидно, пропускной способностью капилляра, оказывающего наибольшее сопротивление потоку воздуха. По мере заполнения цилиндра перепад давления на длине капилляра изменяется и в момент времени t , показанный на рисунке, равен, очевидно, $P_1 - P_2 = \rho_{\text{в}}gh$, где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды.

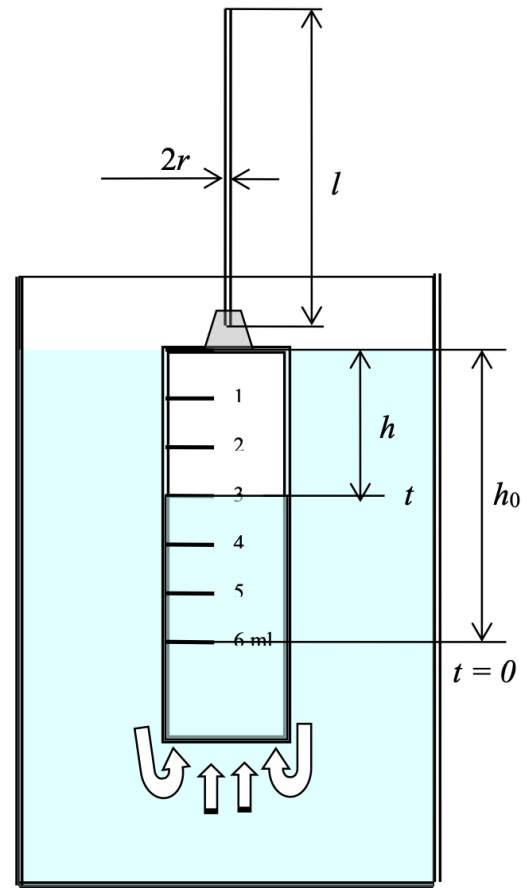
Тогда, в соответствии с формулой Пуазейля, для мгновенного расхода воздуха в момент времени t можно записать:

$$Q = -\frac{Sdh}{dt} = \frac{\pi \rho_{\text{в}}gh_0r^4}{8\eta l}$$

$$\ln \frac{h_0}{h} = \ln \frac{V_0}{V} = \frac{\pi \rho_{\text{в}}gh_0r^4}{8\eta lS}t$$

$$t = \frac{8\eta lS}{\pi \rho_{\text{в}}gh_0r^4} \ln \frac{V_0}{V} = \beta \ln \frac{V_0}{V}$$

$$\eta = \frac{\pi \rho_{\text{в}}gh_0r^4\beta}{8lS}$$



4 Оборудование и инструментальные погрешности

В работе используются: шприц на 20 мл без поршня (т.е. только цилиндр шприца), сменные капилляры (иглы) разных диаметров d и длин l , секундомер с возможностью фиксации промежуточных значений, прозрачный цилиндрический стакан с водой, линейка, небольшой кусочек ластика.

Инструментальные погрешности измерений:

- Объем шприца – 0,05 мл
- Диаметр капилляра – 0,005 мм
- Длина капилляра – 0,5 мм
- Секундомер – 0,2 с
- Линейка – 0,1 см

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Подготовка к эксперименту

В аптеке имелось 3 вида шприцов с такими характеристиками иголок:

No	тип	l , мм	$d_{\text{внеш}}$, мм	$d_{\text{внут}}$, мм
1	G26	12	0.45	0.26
2	G23	30	0.60	0.34
3	G21	38	0.80	0.51

5.2 Проведение измерений

"Длина" шприца – 7.0 ± 0.1 см. Используем это для нахождения сечения шприца.

Соберем установку согласно схеме и проведем серии экспериментов для каждой иглы. Результаты занесем в соответствующие таблицы в разделе Данные.

После взятия средних значений из каждой выборки получим

Измерения для 1 иглы

V, мл	Δt , с	$\ln \frac{V_0}{V}$
19	4.80	0.05
18	9.53	0.11
17	14.71	0.16
16	19.92	0.22
15	25.62	0.29
14	31.98	0.36
13	38.09	0.43
12	45.00	0.51
11	52.78	0.60
10	61.52	0.69
9	69.91	0.80
8	80.11	0.92
7	91.60	1.05
6	104.50	1.20
5	120.97	1.39

Измерения для 2 иглы

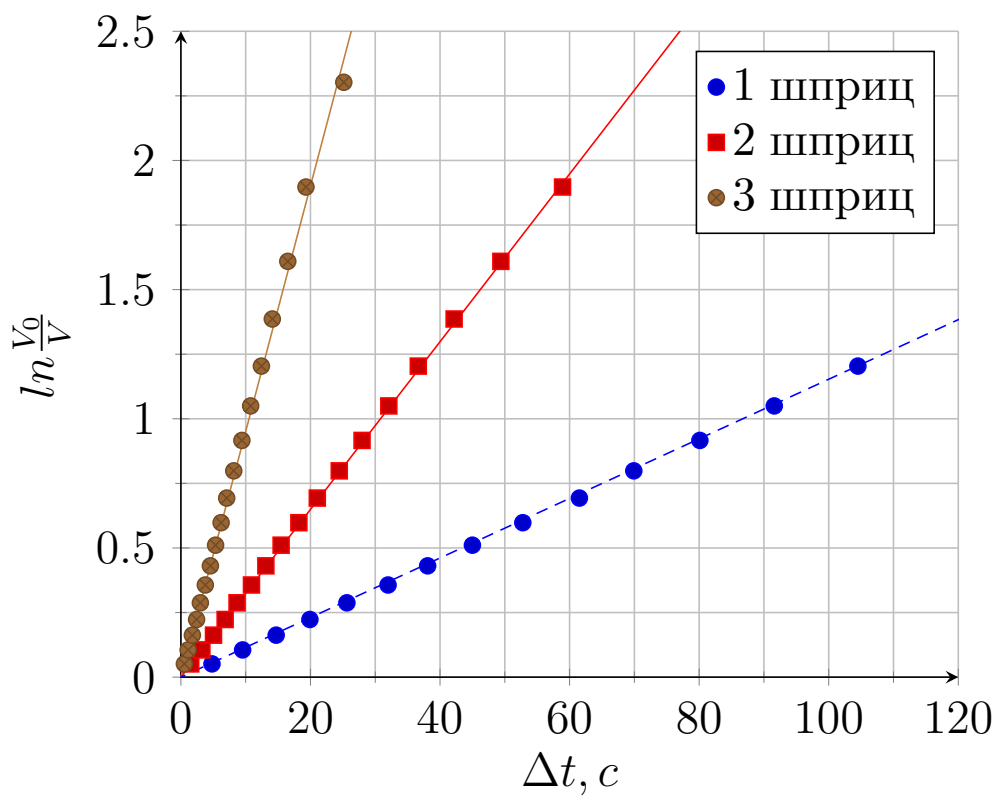
V, мл	Δt , с	$\ln \frac{V_0}{V}$
19	1.52	0.05
18	3.24	0.11
17	5.04	0.16
16	6.83	0.22
15	8.67	0.29
14	10.89	0.36
13	13.12	0.43
12	15.47	0.51
11	18.21	0.60
10	21.06	0.69
9	24.45	0.80
8	27.97	0.92
7	32.09	1.05
6	36.64	1.20
5	42.18	1.39
4	49.39	1.61
3	58.91	1.90

Измерения для 3 иглы

V, мл	Δt , с	$\ln \frac{V_0}{V}$
19	0.54	0.05
18	1.12	0.11
17	1.77	0.16
16	2.42	0.22
15	3.01	0.29
14	3.77	0.36
13	4.55	0.43
12	5.36	0.51
11	6.21	0.60
10	7.07	0.69
9	8.16	0.80
8	9.42	0.92
7	10.77	1.05
6	12.43	1.20
5	14.11	1.39
4	16.50	1.61
3	19.30	1.90
2	25.14	2.30

$$\sigma V \approx 0.5 \text{ мл}, \sigma \Delta t \approx 0.2 \text{ с}$$

Построим графики и найдем их угловые коэффициенты:



Из графиков можно получить значения наклонов прямых, β , а так же из табличных данных оценить среднюю скорость по расходу, откуда пересчитать число Рейнольдса и характерное расстояние ($l_{\text{хар}} \approx 0.2 \cdot r \cdot Re$):

No	β, c^{-1}	$\eta, \text{Па} \cdot c \cdot 10^{-5}$	$v, \frac{\text{мм}}{c}$	Re	$l_{\text{хар}}, \text{мм}$
1	86.7	1.95	0.4	2.66	0.14
2	30.8	1.81	1.2	10.27	0.70
3	10.5	1.11	3.6	82.70	8.4

$$\eta_{\text{ср}} = (1.62 \pm 0.23) \cdot 10^{-5} \text{Па} \cdot c$$

Сравнивая с табличным:

$$\eta_{\text{табл}} = 1.78 \cdot 10^{-5} \text{Па} \cdot c$$

6 Выводы и расчёт погрешностей

6.1 Погрешности

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_1^n \left(\left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 + 16 \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \sigma_{\text{эксп}}^2} \approx 14\%$$

6.2 Вывод

В результате эксперимента было получено значение коэффициента вязкости воздуха, проведена оценка чисел Рейнольдса для каждой серии опытов, а так же была проведена оценка характерных расстояний, при которых устанавливается ламинарное течение. Теоретическая зависимость совпадает с экспериментальной, совпадение значений друг с другом не только по порядку, но ещё и с табличным значением в пределах погрешности ($1.78 \cdot 10^{-5} \text{Па} \cdot c$) говорит о том, что примененная модель течения газа хорошо описывает наблюдаемый процесс. Случайная погрешность данных оказалась относительно малой в сравнении с другими погрешностями (меньше 2 процентов), что значит, можно было бы обойтись 3 сериями измерений с каждой иглой. Проведения измерений с углекислым газом не были произведены так как не удалось приобрести необходимое оборудование - резиновые шарики (в шарик засыпается сода и уксус в пропорции 1:2, далее происходит реакция, в шарике находится почти чистый углекислый газ, этим газом можно продуть и наполнять шприц так, чтобы потом опустить в воду и под действием разности давлений воды CO_2 выходил наружу).

Измерения для 1 шприца

V (мл)	Δt_1 (с)	Δt_2 (с)	Δt_3 (с)	Δt_4 (с)	Δt_5 (с)	Δt_6 (с)	Δt_7 (с)	Δt_8 (с)	Δt_9 (с)	Δt_{10} (с)
19.0	6.00	4.14	5.06	4.65	4.12	4.6	5.1	4.91	4.40	5.02
18.0	12.70	8.42	9.29	8.82	8.09	10.25	9.33	10.03	8.58	9.78
17.0	18.82	13.58	13.71	13.48	13.29	14.86	15.25	15.02	13.98	15.09
16.0	24.65	18.74	18.35	18.41	18.08	19.94	20.72	19.31	19.99	20.97
15.0	31.56	24.34	24.51	23.46	22.91	26.10	27.02	25.12	24.79	26.43
14.0	39.02	30.13	30.83	28.83	28.20	32.21	33.37	31.12	31.97	34.14
13.0	46.48	36.17	37.46	34.26	34.23	38.44	40.48	36.3	36.65	40.44
12.0	55.48	42.65	43.26	40.09	39.90	45.56	47.53	43.77	43.45	48.29
11.0	64.64	49.69	51.42	46.81	46.79	54.59	56.56	51.33	50.66	55.30
10.0	74.66	57.29	60.83	54.20	53.51	62.20	66.13	60.36	60.74	65.23
9.0	85.57	65.01	68.39	61.83	60.58	70.95	76.74	68.21	67.46	74.38
8.0	97.79	73.94	79.64	70.34	67.30	81.28	87.92	79.03	78.15	85.72
7.0	110.86	84.85	93.73	79.86	76.37	91.78	100.81	90.81	87.29	99.6
6.0	126.90	97.10	107.14	90.52	85.66	103.77	115.21	105.57	99.15	114.01
5.0	147.00	107.44	124.24	102.39	98.21	121.38	130.47	130.39	114.65	133.56

Измерения для 2 шприца

V (мл)	Δt_1 (с)	Δt_2 (с)	Δt_3 (с)	Δt_4 (с)	Δt_5 (с)	Δt_6 (с)	Δt_7 (с)	Δt_8 (с)	Δt_9 (с)	Δt_{10} (с)
19.0	1.86	1.36	1.64	1.50	1.38	1.44	1.21	1.70	1.43	1.65
18.0	3.64	3.05	3.20	3.25	2.69	3.27	3.47	3.37	3.30	3.19
17.0	5.78	4.88	5.23	4.92	4.81	4.83	5.13	5.10	5.02	4.65
16.0	7.50	6.76	7.08	6.82	6.62	6.75	6.76	6.65	6.88	6.48
15.0	9.01	8.52	8.98	8.48	8.52	8.51	8.61	8.66	8.69	8.70
14.0	11.43	10.82	11.22	10.58	10.27	10.97	10.85	11.12	11.02	10.66
13.0	13.77	13.15	13.34	12.83	12.60	13.41	13.18	12.87	13.14	12.86
12.0	16.05	15.14	15.75	15.34	14.87	15.73	15.86	15.31	15.65	14.99
11.0	19.28	17.84	18.57	17.90	17.25	18.37	18.46	18.01	18.83	17.62
10.0	22.55	20.58	21.57	21.05	20.51	21.50	20.22	20.99	21.14	20.46
9.0	26.01	24.28	24.78	24.02	23.38	24.76	24.76	24.26	24.82	23.39
8.0	30.01	27.78	28.19	27.45	26.43	27.98	28.22	28.05	28.56	26.98
7.0	34.34	31.14	32.32	31.34	30.97	32.45	32.27	32.72	32.46	30.94
6.0	39.17	36.05	37.76	36.77	35.39	37.05	37.18	36.08	36.24	34.76
5.0	46.20	41.19	42.11	41.63	40.35	42.78	41.84	42.24	42.57	40.87
4.0	55.48	48.02	49.47	49.16	47.72	49.61	48.34	49.39	49.34	47.39
3.0	65.70	56.84	57.78	60.21	57.18	59.44	56.94	59.35	59.19	56.50

Измерения для 3 шприца

V (мл)	$\Delta t_1(c)$	$\Delta t_2(c)$	$\Delta t_3(c)$	$\Delta t_4(c)$	$\Delta t_5(c)$	$\Delta t_6(c)$	$\Delta t_7(c)$	$\Delta t_8(c)$	$\Delta t_9(c)$	$\Delta t_{10}(c)$
19.0	0.50	0.45	0.63	0.72	0.61	0.56	0.44	0.43	0.53	0.50
18.0	1.00	0.91	1.36	1.56	1.16	1.09	0.87	1.05	1.11	1.06
17.0	1.66	1.37	2.15	2.25	1.63	1.81	1.49	1.65	1.95	1.75
16.0	2.14	2.03	2.84	2.85	2.49	2.38	2.25	2.32	2.61	2.34
15.0	2.67	2.60	3.41	3.54	3.07	2.91	2.71	3.00	3.29	2.86
14.0	3.74	3.49	4.17	4.15	3.83	3.66	3.42	3.74	3.83	3.66
13.0	4.72	4.31	4.92	5.00	4.79	4.37	4.12	4.46	4.42	4.42
12.0	5.36	5.04	5.62	5.91	5.40	5.03	5.30	5.39	5.27	5.23
11.0	6.31	5.77	6.79	6.71	6.10	5.99	5.97	6.15	6.28	6.02
10.0	7.20	6.68	7.45	8.14	7.06	6.84	6.52	6.85	7.03	6.94
9.0	8.21	8.16	8.61	9.12	8.58	7.58	7.58	7.79	8.10	7.85
8.0	9.41	9.33	10.09	10.61	9.39	9.10	8.91	8.89	9.29	9.13
7.0	11.23	10.93	11.80	11.77	10.75	10.26	10.07	10.05	10.54	10.29
6.0	13.02	12.26	13.51	13.40	12.56	11.57	12.11	11.44	12.17	12.22
5.0	14.38	14.44	14.94	15.04	14.32	12.83	13.34	14.22	13.40	14.18
4.0	15.98	16.94	17.78	17.16	16.36	16.15	16.29	15.09	16.67	16.58
3.0	19.04	19.21	20.38	20.36	18.61	19.02	19.62	18.07	19.49	19.24
2.0	24.17	28.53	26.04	27.17	22.67	23.08	27.85	22.58	24.90	24.45