

Работа 4.3.1

Дифракции Френеля и Фраунгофера

Валеев Рауф Раушанович
группа 825

Цель работы: исследовать явления дифракции Френеля и Фраунгофера на щели, изучить влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов.

В работе используются: оптическая скамья, ртутная лампа, монохроматор, щели с регулируемой шириной, рамка с вертикальной нитью, двойная щель, микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом, зрительная труба.

1 Дифракция Френеля

Установка

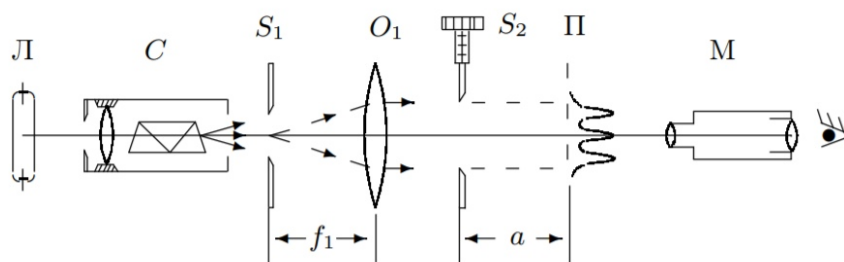


Рис. 1: Схема установки.

Схема установки представлена на Рис. 1.

Теория

Распределение интенсивности света в плоскости Π рассчитаем с помощью зон Френеля. При освещении S_2 параллельным пучком лучей (плоская зона) зоны Френеля представляют собой плоскости, параллельные краям щели. Результирующая амплитуда в точке наблюдения определяется суперпозицией колебаний от тех зон Френеля, которые не перекрыты створками щели. Графическое определение результирующей амплитуды производится с помощью векторной диаграммы – спирали Корню. Суммарная ширина m зон Френеля z_m определяется соотношением

$$z_m = \sqrt{am\lambda}, \quad (1)$$

где a – расстояние от щели до плоскости П. Вид наблюдаемой картины определяется числом Френеля Φ :

$$\Phi^2 = \frac{D}{\sqrt{a\lambda}}$$

– число зон Френеля, которые укладываются в ширине щели D . $p = \frac{1}{\Phi^2}$ называется *волновым параметром*.

Ход работы

1. Соберем и настроим экспериментальную установку.
2. Постепенно отодвигая микроскоп от S_2 , отметим положение, при котором на фоне щели видна одна тёмная полоса. Смещение от начального положения даёт a .
3. Измеряем ширину D щели S_2 с помощью микрометрического винта и поперечных салазок микроскопа и

$$D_{micro} = (2,855 \pm 0,005) \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$D_{shel} = (2,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

В данных, написанных выше, берем погрешность, равную половине цены деления шкалы, то есть в случае микрометрического винта: $0,001/2$, а в случае салазок микроскопа: $0,01/2$.

4. Проследим за изменением количества полос при изменении расстояния a . Принимая $x_0 = 46,8$ см, запишем все данные, которые мы получили, и из формулы (1) получим $2z_m$, сравним из с D и построим это все на графике. При расчетах используются $\lambda = 576,96$ нм.

количество полос m	x , см	δx , см	a_m , см	$2z_m$, мкм	$\delta(2z_m)$, мкм
1	44,20	0,05	2,6	245	9
2	45,00	0,05	1,8	289	16
3	45,60	0,05	1,2	290	20
4	46,5	0,05	0,8	270	30
5	46,15	0,05	0,7	280	40
6	46,25	0,05	0,6	290	40

Таблица 1: Зависимость расстояния от щели до плоскости наблюдения от числа темных полос.

Погрешности в таблице выше получаются для x из половины цены деления поперечных салазок микроскопа (было описано в пункте 3), а для z_m из почленного дифференцирования формулы (1), а именно погрешность для z_m равна

$$\delta(2z_m) = 2z_m \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial(2\sqrt{a_m m \lambda})}{\partial a_m}\right)^2 \sigma_{a_m}^2} = 2z_m \sqrt{\frac{m\lambda}{a_m}} \sigma_{a_m}$$

А если вспомнить, что $z_m = \sqrt{a_m m \lambda}$, то формула погрешности примет вид, который использовался для подсчета погрешности в таблице:

$$\delta(2z_m) = 2m\lambda\sigma_{a_m}$$

Усреднив $2z_m$ мы получим ширину щели D , погрешность для нее считается по формуле

$$\delta D_{mid} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i - D_{mid})^2}$$

и итоговая погрешность

$$\delta D = D \cdot \sqrt{\sigma^2(D)_{mid} + (\delta D/D)^2}$$

Все это будет показано численно в выводе.

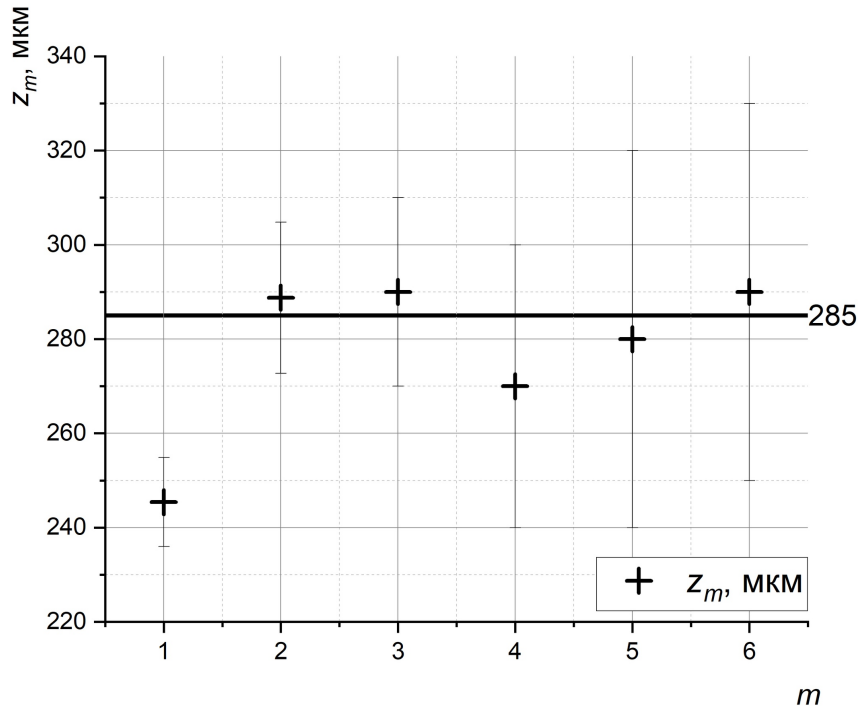


Рис. 2: Визуализация данных, полученных в пункте А

2 Дифракция Фраунгофера на щели

Теория

Для выкладок ниже нам потребуется знать *принцип Гюйгенса-Френеля*. Он формулируется следующим образом

Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее

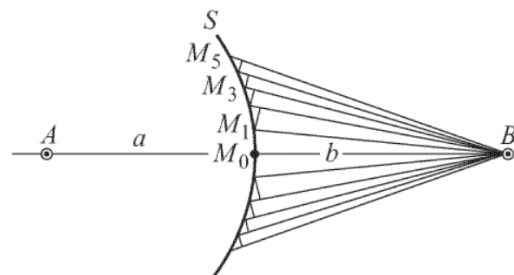


Рис. 3: Построение зон Френеля

световое поле в каждой точке пространства будет определяться интерференцией этих волн.

Теперь рассмотрим первое применение этого принципа, получившее название *метод зон Френеля*

Для этого рассмотрим действие световой волны действующей из точки A в какой-то точке B .

В этом случае можно, взяв точку M_0 в качестве центра (см. рис. 1), построить ряд концентрических сфер, радиусы которых начинаются с b и увеличиваются каждый раз на половину длины волны $\lambda/2$. При пересечении с плоским фронтом волны F эти сферы дадут концентрические окружности. Таким образом, на фронте волны появятся кольцевые зоны (зоны Френеля) с радиусами r_1, r_2 и т. д.

Из геометрических соображений посчитав, можно получить, что

$$r_i = i\sqrt{a\lambda} \quad (2)$$

Введем так же обозначение: *число Френеля*

$$\Phi^2 = \frac{D}{\sqrt{a\lambda}} \quad (3)$$

В этом пункте рассмотрим дифракцию, когда ширина щели становится значительно меньше ширины первой зоны Френеля, т.е. если

$$D \ll \sqrt{a\lambda} \quad (4)$$

Это условие всегда выполняется при достаточно большом a . В этом случае говорят, что *дифракция Фраунгофера*. При выполнении пункта (2) у нас заметно упрощаются фазовые соотношения, что поясняет рис. 2, в итоге с хорошим приближением можно считать, что разность хода между соседними лучами равна

$$\Delta = r_2 - r_1 \approx D \sin \theta \approx D \cdot \theta \quad (5)$$

Здесь предполагается, что θ достаточно мал. Рис. 4: К фазовым соотношениям при дифракции Фраунгофера

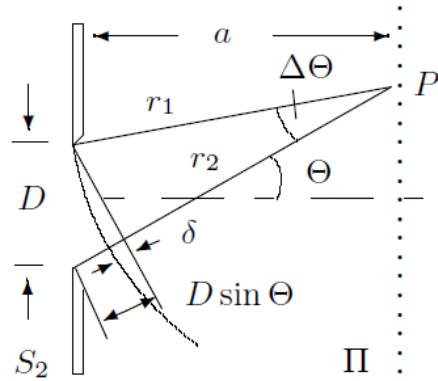


Схема установки

Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать на подобной установке

Объектив здесь нужен для удобства, так как неудобно работать с очень узкими щелями. Дифракционная картина здесь наблюдается в фокальной плоскости объектива O_2 .

Посчитав легко определить угловую координату любой темной полосы:

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{D} \quad (6)$$

И расстояние от центра соответственно

$$X_m = f_2 m \frac{\lambda}{D} \quad (7)$$

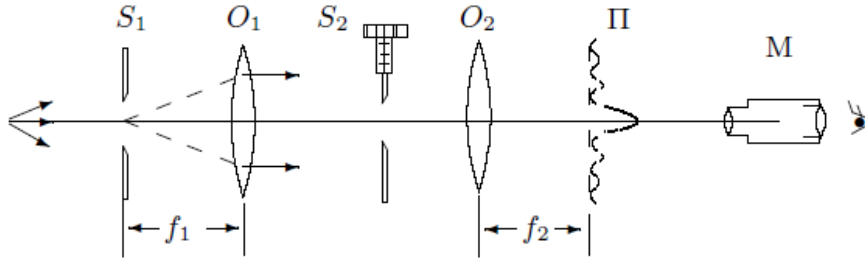


Рис. 5: Схема установки для пункта 2

Ход работы

Для начала запишем фокусные расстояния линз: $F_1 = 9$ см, $F_2 = 10,8$ см. Ширина щели $D = (395 \pm 5)$ мкм. Такая погрешность, потому что опять таки берем половину цены деления.

1. Добавим линзу O_2 и настроим микроскоп на фокальную плоскость. Затем подберём ширину щели, для получения дифракции.
2. Измерим X_m нескольких минимумов и запишем все в таблицу и построим график.

номер минимума m	X_m , мм	δX_m , мм	D , мм	δD , мм
1	0,16	0,005	0,39	0,03
2	0,34	0,005	0,37	0,03
3	0,46	0,005	0,40	0,03
4	0,64	0,005	0,39	0,03
-1	-0,16	0,005	0,39	0,03
-2	-0,34	0,005	0,37	0,03
-3	-0,46	0,005	0,40	0,03
-4	-0,64	0,005	0,39	0,03

Таблица 2: Данные, измеренные в пункте Б

Для X_m такая погрешность, поскольку брали половину цены деления. В данной таблице D мы находили из формулы (7), соответственно погрешность мы считаем по формуле

$$\delta D = D \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \left(f_2 m \frac{\lambda}{X_m} \right)}{\partial X_m} \right)^2} \cdot \sigma_{X_m}^2 = D \cdot \frac{f_2 m \lambda}{X_m^2} \cdot \sigma_{X_m}$$

Опять таки можем подставить D :

$$\delta D = \frac{f_2^2 m^2 \lambda^2}{X_m^3} \sigma_{X_m} = \frac{D^2}{X_m} \cdot \sigma_{X_m}$$

Усреднив D мы получим ширину щели D , погрешность для нее считается по формуле

$$\delta D_{mid} = D \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i - D_{mid})^2}$$

и итоговая погрешность

$$\delta D = D \cdot \sqrt{\sigma^2(D)_{mid} + (\delta D/D)^2}$$

Все это будет показано численно в выводе.

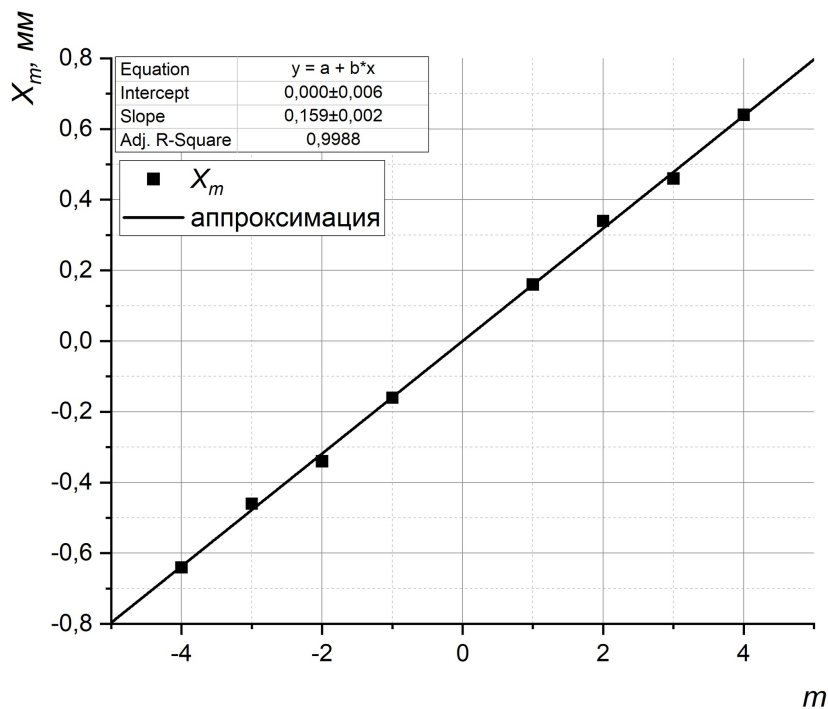


Рис. 6: Визуализация данных и аппроксимация

- Поскольку наклон графика у нас получился $k = (0,159 \pm 0,002)$ мм. Отсюда $\Delta X = (0,159 \pm 0,002)$ мм.

Все числа и погрешности для наклона графика мы взяли из МНК, а именно

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}, \sigma_k \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2}$$

- Убедимся, что смещение щели S_2 не приводит к сдвигу картинки.
- При уменьшении щели масштаб картинки уменьшается, пока картинка полностью не исчезнет.

3 Дифракция Фраунгофера для двух щелей

Установка

Заменяем S_2 на две щели

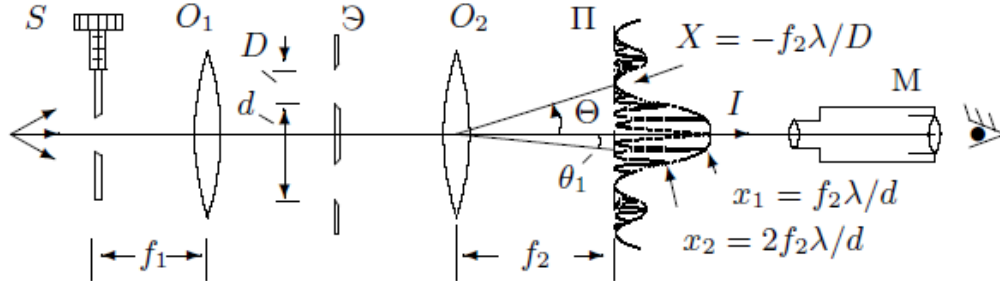


Рис. 7: Установка для третьего пункта

В этом случае легко видеть, что угловая координата максимума будет

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{d} \quad (8)$$

И между соседними полосами

$$\delta x = f_2 \frac{\lambda}{d} \quad (9)$$

Так же нетрудно оценить число интерференционных полос укладывающихся в области центрального максимума

$$n = \frac{2d}{D} \quad (10)$$

Ход работы

1. Не перемещая линз заменим S_2 и, слегка передвигая ее вдоль скамьи, найдем резкое изображение.
2. Определим расстояние между темными полосками внутри центрального максимума. Посчитаем число светлых промежутков между ними. Измерим ширину центрального максимума. $X = (0,720 \pm 0,005)$ мм, между ними $n = 11 \pm 1$ светлых промежутков. Погрешность для X взялась из половины цены деления, а для n она появилась в связи с тем, что мы могли сбиться, при подсчете полос.
3. Далее определим расстояние δx между минимумами по формуле $\delta x = \frac{X}{n} = (65 \pm 5)$ мкм. Далее из формулы (9) мы можем получить расстояние d между щелями

$$d = (0,97 \pm 0,05) \text{ мм}$$

Здесь погрешность берется из формулы

$$\delta d = d \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial (f_2 \frac{\lambda}{\delta x})}{\partial (\delta x)} \right)^2 \cdot \sigma_{\delta x}^2} = d \cdot f_2 \lambda \frac{1}{\delta x^2} \cdot \sigma_{\delta x}$$

В итоге, вспомнив и выражении для d получаем, что

$$\delta d = \frac{d^2}{\delta x} \sigma_{\delta x}$$

Измерив мы получили, что

$$d = (1,000 \pm 0,005)_{\text{мм}}$$

$$D = (0,180 \pm 0,005)_{\text{мм}}$$

Погрешность берем как половину цены деления. Отсюда из формулы (10) мы получаем, что

$$n_{theor} = 11 \pm 1$$

Погрешность для n берем из формулы

$$\delta n = n \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{2d}{D}}{\partial d}\right)^2 \cdot \delta_d^2 + \left(\frac{\partial \frac{2d}{D}}{\partial D}\right)^2 \cdot \delta_D^2} = \sqrt{\frac{4\delta_d^2}{D^2} + \frac{4d^2\delta_D^2}{D^4}}$$

4. Исследуем влияние когерентности на видность картины. Для этого расширяя щель S подберём b_0 такую, при которой первый раз исчезают интерференционные полосы. $b_{0pract} = (0,0715 \pm 0,0005)$ мм. Из формулы

$$\frac{b}{f_1} = \frac{\lambda}{d}$$

мы получаем, что

$$b_{theor} = 0,060 \pm 0,002_{\text{мм}}$$

Погрешность для этой формулы опять таки берется из

$$\delta b = b \cdot \left| \frac{\partial \frac{f_1 \lambda}{d}}{\partial d} \right| \sigma_d = \frac{b f_1 \lambda}{d^2} \cdot \sigma_d = \frac{b^2 \sigma_d}{d}$$

4 Влияние дифракции на разрешающую способность оптического инструмента

Схема установки

Если перед O_2 расположить S_2 , то изображение объекта будет искажено из-за дифракции. Качественной характеристикой этого искажения может служить φ_{min} — минимальное угловое между объектами (источниками).

$$\varphi = \frac{d}{f_1} \tag{11}$$

Из геометрии l между объектами равно

$$l = \phi \cdot d_2 \tag{12}$$

$$\frac{\lambda}{D_0} = \frac{l}{f_2} = \frac{d}{f_1} \tag{13}$$

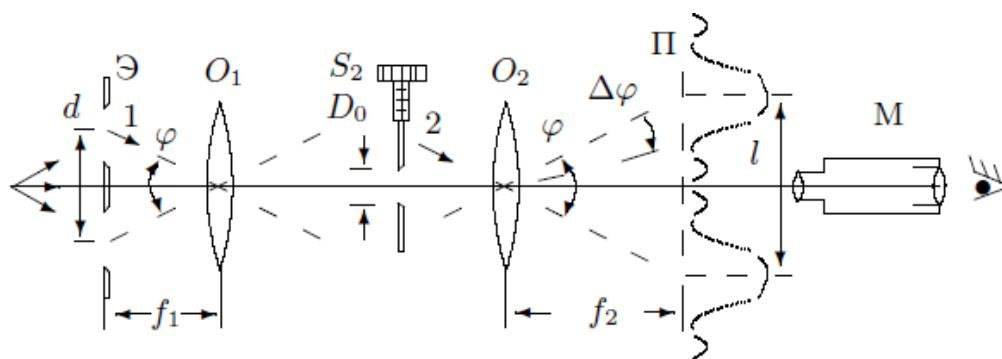


Рис. 8: Схема установки для пункта 4.

Ход работы

1. Собрать схему, изменив в схеме из предыдущего пункта только S .
2. Поставить между линзами щель S_2 и уменьшая ее ширину наблюдать ухудшение изображения. Подобрать ширину S_2 так, чтобы изображения почти сливались.

$$D_0 = (0,055 \pm 0,005)\text{мм}$$

Погрешность берем как половину цены деления. В итоге получаем, что выполнено соотношение (13).

3. Поставить двойную щель и измерить расстояние между щелями и толщину самих щелей.

$$d = (1,000 \pm 0,005)\text{мм}$$

$$D = (0,180 \pm 0,005)\text{мм}$$

Погрешность берем как половину цены деления.

Вывод

Приведем итоги наших вычислений в таблице:

	Дифракция Френеля	Дифракция Фраунгофера на одной щели		Дифракция Фраунгофера на двух щелях
$D_{theor}, \text{ мм}$	$0,28 \pm 0,2$	$0,38 \pm 0,04$	$d_{theor}, \text{ мм}$	$0,97 \pm 0,05$
$D_{prac}, \text{ мм}$	$0,285 \pm 0,005$	$0,395 \pm 0,005$	$d_{prac}, \text{ мм}$	$1,000 \pm 0,005$

Из нее мы видим, что все теоретические формулы, приведенные в данной работе хорошо сходятся с измерениями.

Так же в работе были проверены и подтверждены качественные рассуждения.