

## 4.3.1. Изучение дифракции света

Дорогинин Д.В.

Группа Б02-825

**Цель работы:** исследовать явления дифракции Френеля и Фраунгофера на щели, изучить влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов.

**В работе используются:** оптическая скамья, ртутная лампа, монохроматор, щели с регулируемой шириной, рамка с вертикальной нитью, двойная щель, микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом, зрительная труба.

### Описание работы

#### А. Дифракция Френеля

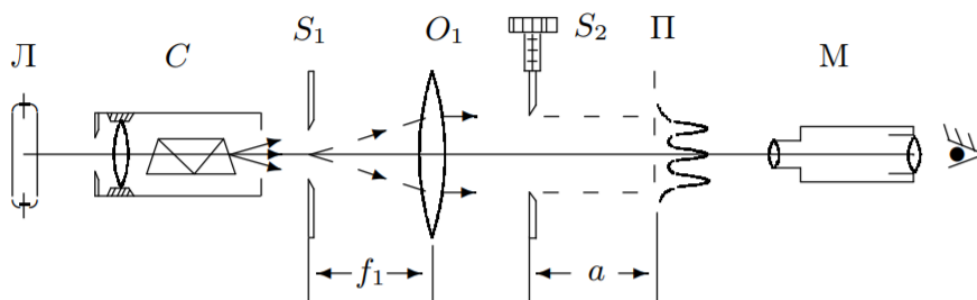


Рис. 1: Схема установки 1.

Схема установки представлена на Рис. 1. Световые лучи освещают щель  $S_2$  и испытывают на ней дифракцию. Дифракционная картина рассматривается с помощью микроскопа М, сфокусированного на некоторую плоскость наблюдения П. Щель  $S_2$  освещается параллельным пучком монохроматического света с помощью коллиматора, образованного объективом  $O_1$  и щелью  $S_1$ , находящейся в его фокусе. На  $S_1$  сфокусированно изображение спектральной линии, выделенной из спектра ртутной лампы Л при помощи монохроматора С, в котором используется призма прямого зрения.

Распределение интенсивности света в плоскости П рассчитаем с помощью зон Френеля. При освещении  $S_2$  параллельным пучком лучей (плоская зона) зоны Френеля представляют собой плоскости, параллельные краям щели. Результирующая амплитуда в точке наблюдения определяется суперпозицией колебаний от тех зон Френеля, которые не перекрыты створками щели. Графическое определение результирующей амплитуды производится с помощью векторной диаграммы – спирали Корню. Суммарная ширина  $m$  зон Френеля  $z_m$  определяется соотношением

$$z_m = \sqrt{am\lambda}, \quad (1)$$

где  $a$  – расстояние от щели до плоскости П. Вид наблюдаемой картины определяется числом Френеля  $\Phi$ :

$$\Phi^2 = \frac{D}{\sqrt{a\lambda}}$$

– число зон Френеля, которые укладываются в ширине щели  $D$ .  $p = \frac{1}{\Phi^2}$  называется *волновым параметром*. Дифракционной картины нет, когда П совпадает с плоскостью щели. При малом удалении от щели  $\Phi \gg 1$  и картина наблюдается в узкой области на границе света и тени у краёв экрана. При последующих удалениях две группы дифракционных полос перемещаются независимо и каждая образует картину дифракции Френеля на экране. Распределение интенсивности может быть найдено с помощью спирали Корню. При дальнейшем увеличении  $a$  две системы полос сближаются и накладываются друг на друга, распределение интенсивности определяется числом зон Френеля в полуширине щели. Если их  $m$ , то будет наблюдаться  $m - 1$  тёмная полоса.

## Б. Дифракция Фраунгофера на щели

Для выкладок ниже нам потребуется знать принцип Гюйгенса-Френеля. Он формулируется следующим образом:

*Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее световое поле в каждой точке пространства будет определяться интерференцией этих волн.*

Теперь рассмотрим первое применение этого принципа, получившее название *метод зон Френеля*

Для этого рассмотрим действие световой волны действующей из точки  $A$  в какой-то точке  $B$ . В этом случае можно, взяв точку  $M_0$  в качестве центра (см. рис. 1), построить ряд концентрических сфер, радиусы которых начинаются с  $b$  и увеличиваются каждый раз на половину длины волны  $\frac{\lambda}{2}$ . При пересечении с плоским фронтом волны  $F$  эти сферы дадут концентрические окружности. Таким образом, на фронте волны появятся кольцевые зоны (зоны Френеля) с радиусами  $r_1, r_2$  и т. д.

Из геометрических соображений посчитав, можно получить, что

$$r_i = i\sqrt{a\lambda} \quad (2)$$

Картина дифракции упрощается, когда ширина щели становится значительно меньше ширины первой зоны Френеля, т.е. если

$$D \ll \sqrt{a\lambda} \quad (3)$$

Это условие всегда выполняется при достаточно большом  $a$ . В этом случае говорят, что *дифракция Фраунгофера*. Дифракционную картину в этом случае называют *дифракцией Фраунгофера*. При выполнении пункта (2) у нас упрощаются фазовые соотношения,

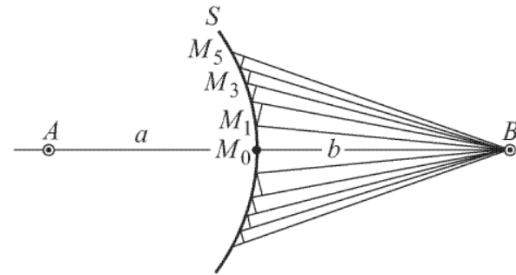


Рис. 2: Построение зон Френеля

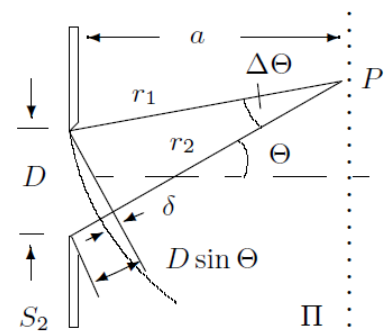


Рис. 3: К фазовым соотношениям при дифракции Фраунгофера

что поясняет рис. 2, в итоге с хорошим приближением можно считать, что разность хода между крайними лучами, приходящими от щели в точке наблюдения  $P$ , с хорошим приближением равна

$$\Delta = r_2 - r_1 \approx D \sin \theta \approx D \cdot \theta \quad (4)$$

Здесь предполагается, что  $\theta$  достаточно мал. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать на установке Рис. 1, но для удобства к подобной установке добавляется объектив  $O_2$ .

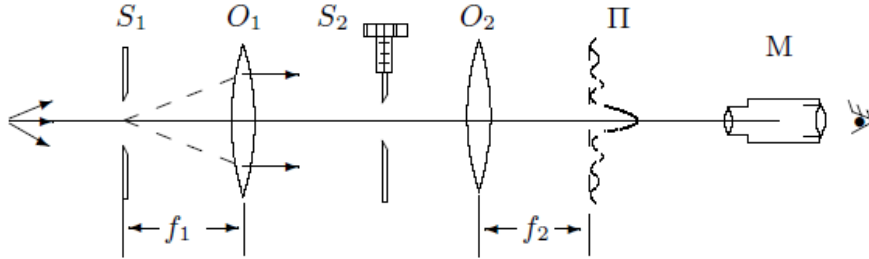


Рис. 4: Схема установки 2.

Дифракционная картина здесь наблюдается в фокальной плоскости объектива  $O_2$ . Каждому значению  $\theta$  соответствует в этой плоскости точка, отстоящая от оптической оси на расстоянии

$$X = f_2 \tan \theta \approx f_2 \theta. \quad (5)$$

Объектив не вносит разности хода между интерферирующими лучам, поэтому в его фокальной плоскости наблюдается неискажённая дифракционная картина. При  $\theta = 0$  разность хода между лучами нулевая, поэтому в центре поля зрения дифракционный максимум. Первый минимум соответствует  $\theta_1$  такому, что в точке наблюдения разность хода пробегаем все значения от 0 до  $2\pi$ . Аналогично рассуждая, для  $m$ -й полосы

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{D} \quad (6)$$

Расстояние  $X_m$  тёмной полосы от оптической оси из (5) и (6)

$$X_m = f_2 m \frac{\lambda}{D} \quad (7)$$

## В. Дифракция Фраунгофера для двух щелей

Для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях  $S_2$  заменим экраном Э с двумя щелями. При этом для оценки влияния ширины входной щели на чёткость вместо  $S_1$  поставим щель с микрометрическим винтом. Два дифракционных изображения входной щели, одно из которых образовано лучами, прошедшими через левую, а другое – через правую щели, накладываются друг на друга. Если входная щель достаточно узка, то дифракционная картина в плоскости П подобна той, что получалась при дифракции на одной щели, однако вся картинка испещрена рядом дополнительных узких полос, наличие которых объясняется суперпозицией световых волн через разные щели. Светлая интерференционная полоса наблюдается в случаях, когда разность хода равна целому числу длин волн. Таким образом, угловая координата максимума порядка  $m$  равна

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{d}, \quad (8)$$

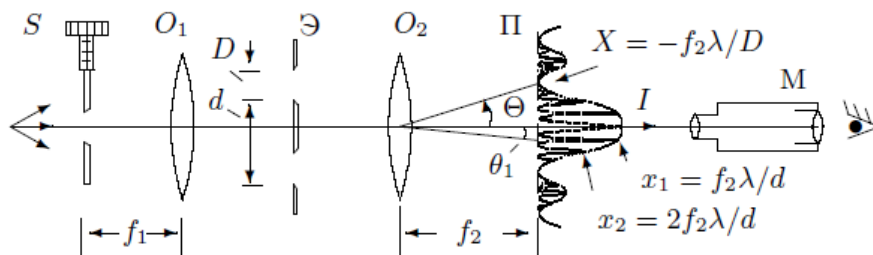


Рис. 5: Схема установки 3.

где  $d$  – расстояние между щелями. Отсюда расстояние между соседними интерференционными полосами в плоскости П равно

$$\delta x = f_2 \frac{\lambda}{d} \quad (9)$$

Число интерференционных полос укладывающихся в области центрального максимума равна отношению ширины главного максимума  $\frac{2\lambda f_2}{D}$  к расстоянию между соседними полосами:

$$n = \frac{2\lambda f_2}{D} \frac{1}{\delta f} = \frac{2d}{D}. \quad (10)$$

При дифракции света на двух щелях чёткая система интерференционных полос наблюдается только при достаточно узкой ширине входной щели  $S$ . При увеличении ширины картинка пропадает и появляется вновь, но полосы при этом сильно размыты и видны плохо.

## Г. Влияние дифракции на разрешающую способность оптического инструмента

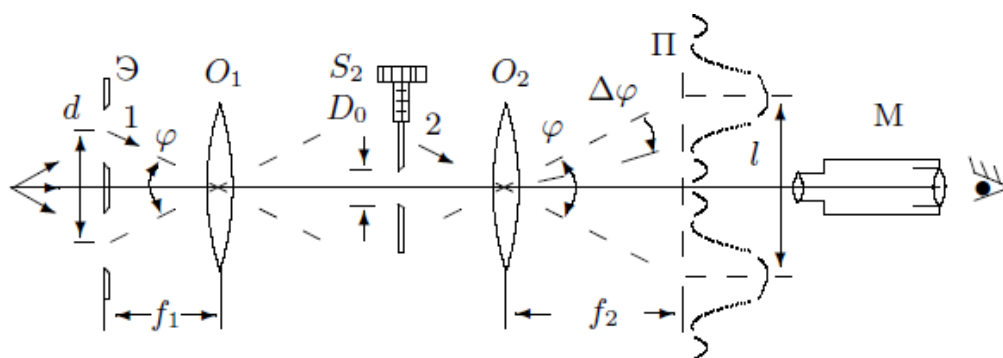


Рис. 6: Схема установки 4.

В отсутствие щели  $S_2$  линзы  $O_1$  и  $O_2$  создают на плоскости П изображение щели  $S_1$  и это изображение рассматриваются микроскопом М. Таким образом, установку можно рассматривать как оптический инструмент, предназначенные для получения изображения предмета. Если перед  $O_2$  расположить  $S_2$ , то изображение объекта будет искажено из-за дифракции. Чем меньше ширина щели, тем сильнее искажение. Качественной характеристикой этого искажения может служить  $\varphi_{min}$  — минимальное угловое расстояние между объектами (источниками), которые всё ещё воспринимаются как отдельные. Поместим

вместо  $S_1$  экран  $\mathcal{E}$  с двумя щелями с расстоянием  $d$ . Тогда на  $S_2$  будут падать два пучка света с углом

$$\varphi = \frac{d}{f_1} \quad (11)$$

Из геометрии расстояние  $l$  между изображениями щелей в плоскости  $\Pi$  равно

$$l = \varphi f_2 = d \frac{f_2}{f_1}. \quad (12)$$

Ширина  $\Delta\varphi$  определяется дифракцией на  $S_2$ . Условия, при которых изображения различимы разные для разных наблюдателей, поэтому используют *критерий Рэлея – максимум одного дифракционного пятна должен совпадать с минимумом другого*. В наших условиях это значит, что угловая полуширина  $\frac{\lambda}{D}$  равна угловому расстоянию  $\frac{l}{f_2}$ .





## Ход работы

### А. Дифракция Френеля

В ходе всей работы  $\lambda = 579.07$  нм. Положение микроскопа, при котором на фоне щели видна одна полоса –  $x_0 = 55.4 \pm 0.1$  см, в качестве погрешности выбираем половину цену деления линейки. Измерим ширину щели микрометрическим винтом и с помощью поперечных салазок микроскопа:

$$\begin{aligned}D_{\text{винт}} &= 335 \pm 5 \text{ мкм}, \\D_{\text{микро}} &= 320 \pm 10 \text{ мкм},\end{aligned}$$

В качестве погрешности берём половину цены деления шкал соответствующих приборов. Зависимость количества полос от расстояния до экрана представлена в Таблице 1. Здесь  $a_n$  – смещение от положения  $x_0$ ,  $z_n$  находится из формулы (1).

$m$	$x$ , см	$\sigma_x$ , см	$a_n$ , см	$2z_n$ , мкм	$\sigma_{2z_n}$ , мкм
1	52,6	0,1	2,8	255	5
2	53,5	0,1	1,9	297	8
3	54,1	0,1	1,3	301	12
4	54,4	0,1	1,0	304	15
5	54,5	0,1	0,9	323	18

Таблица 1: Зависимость  $z_n = f(a_n)$ .

Погрешность  $2z_m$  считается по формуле

$$\varepsilon_{z_n} = \frac{1}{2}\varepsilon_{a_n} \Rightarrow \sigma_{2z_n} = \frac{z_n}{2}\varepsilon_{a_n}.$$

Усредним  $2z_n$  и получим  $D$  – ширину щели. Погрешность для неё считается по формуле

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_D^2 + \tilde{\sigma}_D^2},$$

где  $\sigma_D$  – погрешность  $D$ ,

$$\tilde{\sigma}_D = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (2z_i - D)^2}.$$

Итоговое значение

$$D = 296 \pm 16 \text{ мкм}$$

### Б. Дифракция Фраунгофера на щели

Фокусные расстояния линз  $F_1 = 12.8$  см,  $F_2 = 11.5$  см. Ширина щели  $D = 400 \pm 5$  мкм (погрешность – половина цены деления микрометрического винта).

Измеренные координаты  $X_m$  минимумов представлены в Таблице 2.



$m$	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$X_m$ , мм	0.16	0.34	0.50	0.66	0.14	0.34	0.50	0.66
$\sigma_{X_m}$ , мм	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
$D$ , мкм	420	390	400	404	480	400	400	404
$\sigma_D$ , мкм	50	20	16	12	70	20	16	12

Таблица 2: Зависимость  $X_m = f(m)$ .

$D$  здесь считается по формуле (7), погрешность для  $D$

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(f_2 m \frac{\lambda}{X_m}\right)}{\partial X_m}\right)^2 \cdot \sigma_{X_m}^2} = \frac{f_2 m \lambda}{X_m^2} \cdot \sigma_{X_m} = \frac{D}{X_m} \cdot \sigma_{X_m}.$$

Аналогично предыдущему пункту рассчитаем среднее  $D$ :

$$D = 410 \pm 30 \text{ мкм}$$

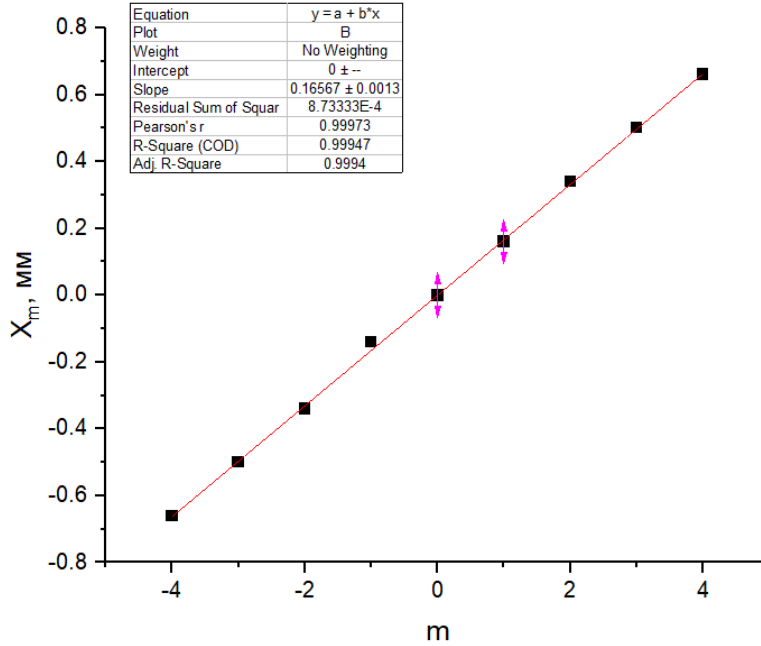


Рис. 7: График зависимости  $X_m = f(m)$ .

Зависимость  $X_m = f(m)$  представлена на Рис. 7. По наклону графика  $X_m = f(m)$  определим  $\Delta X$  – расстояние между соседними минимумами. Приближаем прямой  $y = kx$ , получили

$$\Delta X = 0.1657 \pm 0.0013 \text{ мм.}$$

## В. Дифракция Фраунгофера для двух щелей

Расстояние между тёмными полосами, отстающими друг от друга на максимальное расстояние:  $\Delta X = 0.72 \pm 0.01$  мкм, между ними  $n_{\text{эксп}} = 11 \pm 1$  светлых промежутков. Тогда

$\delta x = \frac{\Delta X}{n} = 65 \pm 7$  мкм. Погрешность определяется по формуле:

$$\sigma_{\delta x} = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{\Delta X}{n}\right)}{\partial \Delta X}\right)^2 \sigma_{\Delta X}^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{\Delta X}{n}\right)}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta X}^2}{n^2} + \frac{\Delta X^2 \sigma_n^2}{n^4}}.$$

Из формулы (9) получаем  $d = 1.02 \pm 0.04$  мм. Погрешность  $d$  определяется по формуле:

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{f_2 \lambda}{\delta x}\right)}{\partial \delta x}\right)^2 \sigma_{\delta x}^2} = \frac{f_2 \lambda}{\delta x^2} \sigma_{\delta x}.$$

Из измерений  $d = 1.00 \pm 0.01$  мм,  $D = 0.20 \pm 0.01$  мм (погрешность – половина цены деления шкалы микроскопа), откуда из формулы (10)  $n_{\text{теор}} = 10 \pm 1$ . Погрешность для  $n_{\text{теор}}$  находим по формуле

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{2d}{D}\right)}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{2d}{D}\right)}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2} = \sqrt{\frac{4\sigma_d^2}{D^2} + \frac{4d^2 \sigma_D^2}{D^4}}.$$

Интерференционные полосы исчезают при  $b_0 = 70 \pm 10$  мкм (погрешность – половина цены деления шкалы микроскопа). Из формулы

$$\frac{b}{f_1} = \frac{\lambda}{d} \quad (13)$$

получаем теоретическое значение  $b_{\text{теор}} = 74,1 \pm 0,7$  мкм, погрешность считается из формулы

$$\sigma_b = \frac{b}{d} \sigma_d.$$

## Г. Влияние дифракции на разрешающую способность оптического инструмента

Изображения почти сливаются при  $D_0 = 60 \pm 10$  мкм (погрешность – половина цены деления шкалы микроскопа). Заметим, что для него выполняется соотношение (12) с учётом  $\frac{\lambda}{D_0} = \frac{l}{f_2}$ .

Значения  $d$  расстояния между щелями и  $D$  их ширины представлены в пункте В.