

Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Лабораторная работа № 3.2.4

(Общая физика: электричество и магнетизм)

Свободные колебания в электрическом контуре

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2017 год

Цель работы: исследование свободных колебаний в электрическом контуре.

Оборудование: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин емкостей, индуктивность, электронный осциллограф, мост.

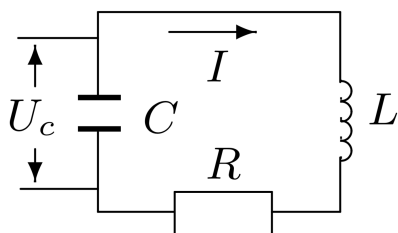
1. Историческая справка

Колебания в контуре, содержащем конденсатор и катушку индуктивности, впервые были обнаружены в 1842 году американским ученым Джозефом Генри. Позднее электрические колебания были исследованы английским физиком Уильямом Томсоном.

Сейчас такие контуры, часто содержащие и сопротивление (катушки или резистора), называются колебательными.

2. Теоретическое введение

Основное уравнение колебательного контура



$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (1)$$

Где $\gamma = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — собственная частота контура. Решением этого уравнения являются затухающие колебания:

Рис. 1: Колебательный контур

$$I = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Можно записать решение (1) и для напряжения:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta)$$

В контуре со слабым затуханием ($\omega \simeq \omega_0$) верна **формула Томпсона** для периода:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Режим работы контура, при котором $\gamma = \omega_0$, называется **критическим**. Его сопротивление равно

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Потери затухающих колебаний принято характеризовать через **добротность** и **логарифмический декремент затухания**:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad - \quad \text{Добротность, потери энергии} \quad (2)$$

$$\Theta = \frac{1}{n} \gamma T = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} \quad - \quad \text{Лог. декремент, потери амплитуды} \quad (3)$$

3. Экспериментальная установка

Исследуемый колебательный контур состоит из индуктивности L , ёмкости C и резистора R (рис. 1). Конденсатор контура заряжается короткими одиночными импульсами, после каждого из которых в контуре возникают свободные затухающие колебания. Подав напряжение с конденсатора на осциллограф, можно по картине, возникающей на экране осциллографа, определить период колебаний в контуре, исследовать затухание колебаний и определить основные параметры колебательного контура.

Картину колебаний можно представить не только в координатах (U, t) , но и в координатах (U, \dot{U}) , или, как говорят, на фазовой плоскости. В этих координатах кривая незатухающих колебаний ($\gamma = 0$) имеет вид эллипса (или окружности - при одинаковых амплитудах U и \dot{U}), а картина реальных колебаний изображается сворачивающейся спиралью.

Схема подключения осциллографа для изучения колебаний на фазовой плоскости представлена на рис. 2. На вертикальный вход осциллографа подаётся напряжение U_C с конденсатора, а на горизонтальный — напряжение с резистора U_R .

На рис. 3 приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре типа рис. 1. Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит диодный тиристор D и ограничительный резистор R_1 . Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ($\simeq 1$ МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь.

Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

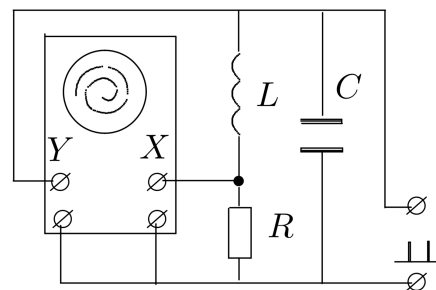


Рис. 2: Фазовый режим

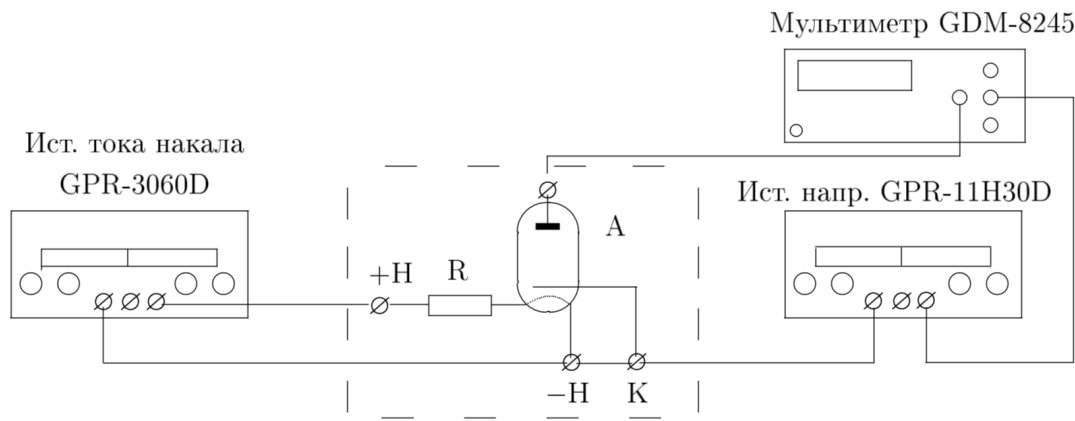


Рис. 3: Схема экспериментальной установки

4. Ход работы

4.1 Измерение периодов

Проведем измерения при $R = 0$. Будем изменять емкость от 0,02 до 90 мкФ, проводя измерения периода по формуле:

$$T_{\text{экс}} = T_0 \frac{x}{nx_0}$$

где $T_0 = 0,01$ с, x_0 — расстояние одного импульса, x — расстояние n импульсов. Погрешность $\sigma_x = \sigma_{x_0} = 0,1$, $\sigma_{T_0} = 0,001$ с. Тогда

$$\sigma_{T_{\text{э}}} = T_{\text{э}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}$$

А $T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC}$, где $L = 393$ мГн, $\sigma_L = 7$ мГн (получено как среднее и среднее отклонение от рассчитанных $L = 383, 386, 393, 400$). $\frac{\sigma_C}{C} \approx 0$. Тогда

$$\sigma_{T_{\text{т}}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}$$

Результаты сведем в таблицу 1 и построим график рис. 4.

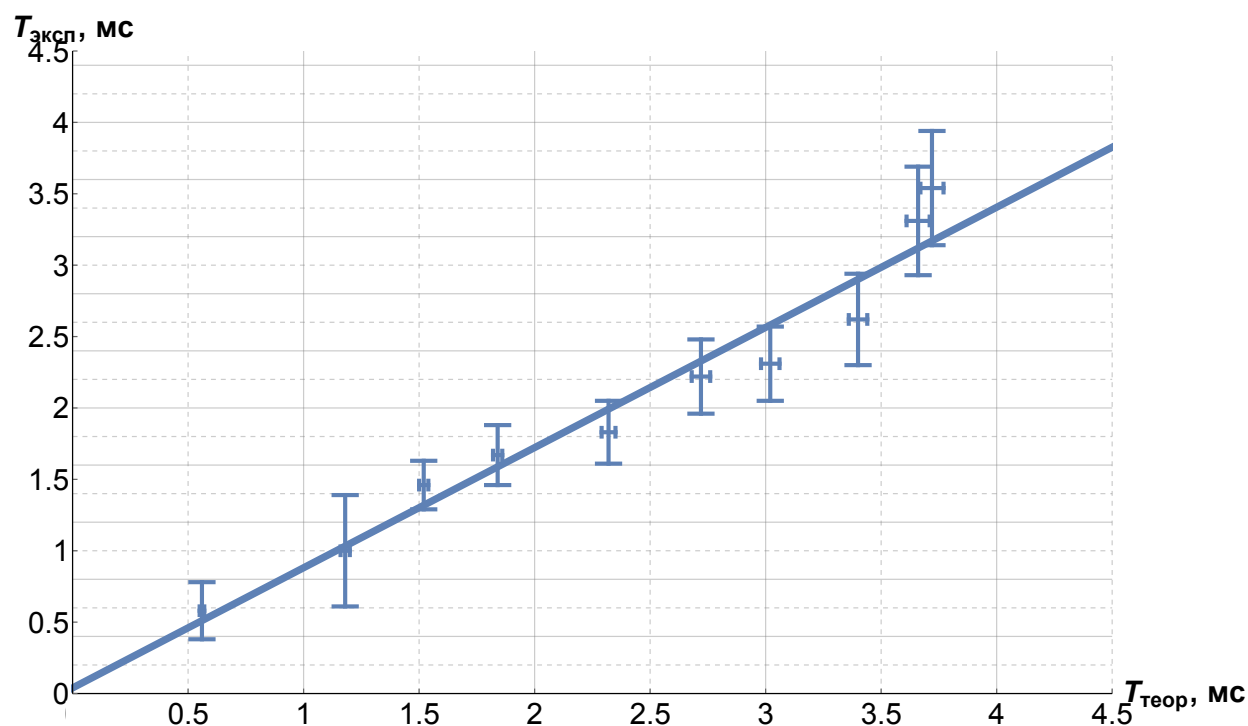
4.2 Критическое сопротивление и декремент затухания

Теперь, считая $L = 200$ мГн, вычислим частоту емкость, считая $\nu_0 = \frac{1}{LC} = 5$ кГц $\Rightarrow C = 5$ нФ. Тогда

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 12,6 \text{ кОм}$$

Таблица 1: Результаты измерений

C , мкФ	x_0	n	x	$T_{\text{эксп}}$, мс	$\sigma_{T_{\text{э}}}$, мс	$T_{\text{теор}}$, мс	$\sigma_{T_{\text{т}}}$, мс
0.02	6.0	2	0.7	0.58	0.2	0.56	0.01
0.09	3.0	2	0.6	1.00	0.39	1.18	0.02
0.15	6.0	4	3.5	1.46	0.17	1.52	0.02
0.22	6.0	3	3.0	1.67	0.21	1.84	0.02
0.35	6.0	3	3.3	1.83	0.22	2.32	0.03
0.48	6.0	3	4.0	2.22	0.26	2.72	0.04
0.59	6.5	3	4.5	2.31	0.26	3.02	0.04
0.75	6.5	2	3.4	2.62	0.32	3.4	0.04
0.87	6.5	2	4.3	3.31	0.38	3.66	0.05
0.90	6.5	2	4.6	3.54	0.4	3.72	0.05

Рис. 4: Зависимость $T_{\text{теор}}$ от $T_{\text{эксп}}$

Установим эту C на магазине емкостей, будем наблюдать картину затухающих колебаний, изменяя R от $0,1R_{\text{кр}}$ до $R_{\text{кр}}$. Сопротивление магазина, при котором колебания переходят в апериодический, примерно равен критическому.

Теперь, изменяя сопротивление от примерно $0,1R_{\text{кр}}$ до $0,3R_{\text{кр}}$, будем измерять амплитуды колебаний, разделенных на n частей, для вычисления декремента по формуле (3). Погрешности амплитуд $\sigma_{U_k} = \sigma_{U_{k+n}} = 0,1$, т.е.

Таблица 2: Результаты измерений

$R, \text{ Ом}$	n	U_k	U_{k+n}	Θ	σ_Θ	$R_k, \text{ Ом}$	$\sigma_{R_k}, \text{ Ом}$
1100	3	3.0	0.9	0.40	0.05	1142	2
1400	3	3.0	0.6	0.54	0.09	1442	3
1800	2	2.9	0.8	0.64	0.08	1842	4
2200	2	2.8	0.6	0.77	0.13	2242	4
2500	1	2.7	1.0	0.99	0.11	2542	5
2700	1	2.6	0.9	1.06	0.12	2742	5
3300	1	2.5	0.8	1.14	0.15	3342	7
3600	1	2.5	0.7	1.27	0.19	3642	7

$$\sigma_\Theta = \Theta \sqrt{\left(\frac{\sigma_{U_k}}{U_k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_{k+n}}}{U_{k+n}}\right)^2}$$

Измерив на универсальном мосте сопротивление катушки при нашей частоте 5 кГц, добавим его к сопротивлению магазина, получив сопротивление контура R_k . Результаты сведем в таблицу 2. Теперь построим график $\frac{1}{\Theta^2}$ от $\frac{1}{R^2}$, считая погрешность $\sigma_{\frac{1}{\Theta^2}} = 2 \frac{1}{\Theta^2} \frac{\sigma_\Theta}{\Theta}$. Данные для графика рис. 5 сведены в таблице 3.

Таблица 3: Результаты измерений

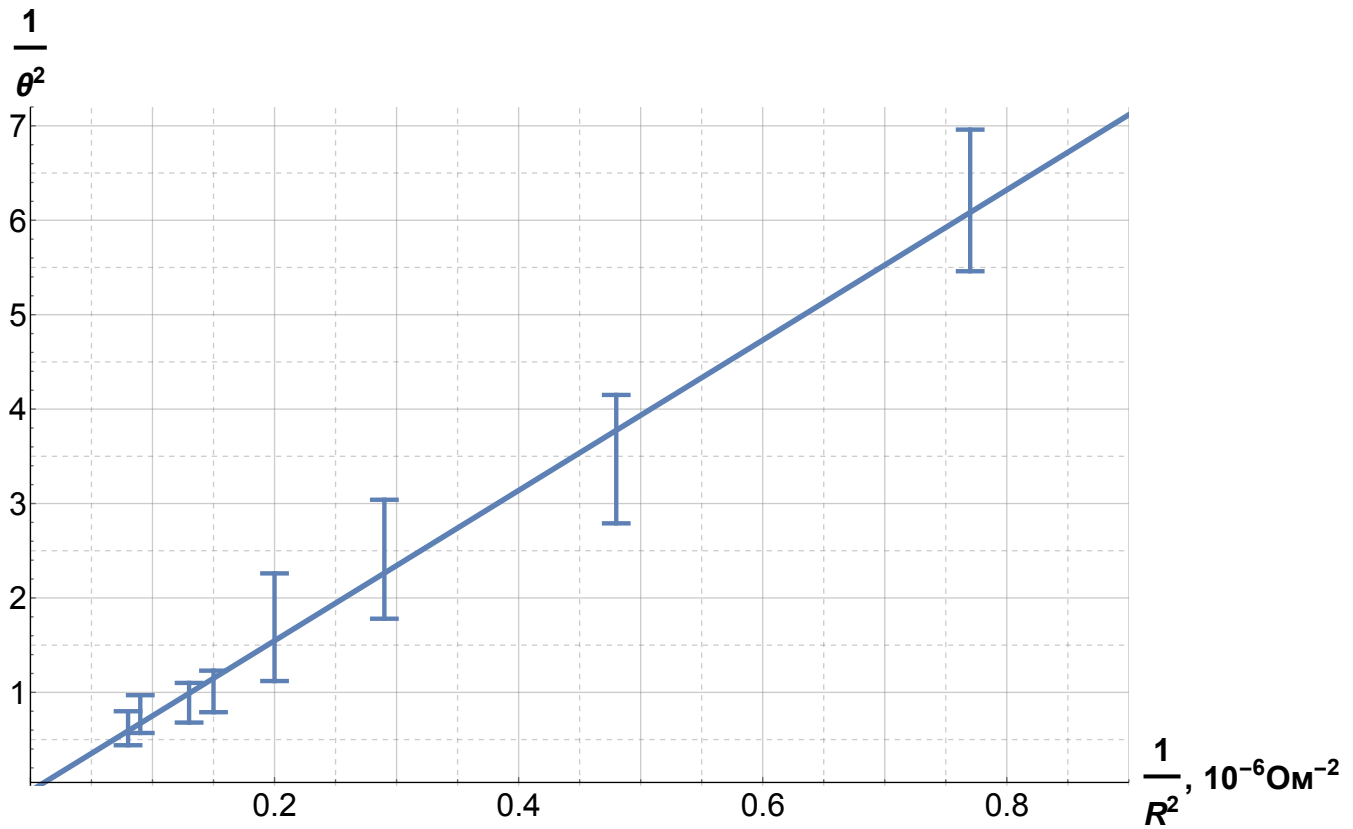
$\frac{1}{\Theta^2}$	$\sigma_{\frac{1}{\Theta^2}}$	$\frac{1}{R^2}, 10^{-6} \text{ Ом}^{-2}$
6.21	0.75	0.77
3.47	0.68	0.48
2.41	0.63	0.29
1.69	0.57	0.2
1.01	0.22	0.15
0.89	0.21	0.13
0.77	0.2	0.09
0.62	0.18	0.08

Аппроксимируя полученные данные, получаем следующий результат:

Таблица 4: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate	Standard Error
b	0.039	0.176
a	7.957	0.281

Если заменить $\frac{1}{\Theta^2} = Y$, $\frac{1}{R^2} = X$, то получаем, что $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 7.957 \cdot 10^6 \text{ Ом}^2$. Посчитаем

Рис. 5: Зависимость $\frac{1}{\theta^2}$ от $\frac{1}{R^2}$

$$R_{\text{кр}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}} \approx 17,71 \text{ кОм}$$

Погрешность равна $\sigma_{R_{\text{кр}}} = R_{\text{кр}} \frac{1}{2} \frac{\sigma_a}{a} \approx 0,31 \text{ кОм}$.

Вычислим теоретическое значение $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, где $C = 5 \text{ нФ}$, $L = 393 \text{ мГн}$. Получаем $R_{\text{кр}} \approx 17,73 \text{ кОм}$, погрешность $\sigma_{R_{\text{кр}}} = R_{\text{кр}} \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L} \approx 0,33 \text{ кОм}$.

Таким образом, мы видим, что эти результаты прекрасно согласуются между собой.

4.3 Добротность

По формуле (2) посчитаем добротность через параметры контура $C = 5 \text{ нФ}$, $L = 393 \text{ мГн}$, беря минимум и максимум сопротивления контура из таблицы 2. Погрешность равна $\sigma_Q = Q \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}$.

$$R = 1,1 \text{ кОм}, \quad Q = 7,76 \pm 0,09$$

$$R = 3,6 \text{ кОм}, \quad Q = 2,43 \pm 0,03$$

Теперь сделаем это по формуле

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}$$

Аналогично возьмем минимум и максимум декремента из таблицы 2. Погрешность равна $\sigma_Q = Q \frac{\sigma_\Theta}{\Theta}$.

$$\Theta = 0,4, \quad Q = 7,82 \pm 0,51$$

$$\Theta = 1,27, \quad Q = 2,47 \pm 0,27$$

Теперь возьмём логарифмический декремент затухания, полученные через отношения радиусов спиралей, т.е. $\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{r_k}{r_{k+n}}$. Радиус мы будем измерять, наблюдая картину фазовых колебаний (см. рис. 2). При $R = 1,2$ кОм, $r_k = 0,7, r_{k+3} = 3,1 \Rightarrow \Theta \approx 0,51$. При $R = 3,6$ кОм, $r_k = 0,6, r_{k+1} = 2,4 \Rightarrow \Theta \approx 1,39$. Погрешность считается аналогично формулам выше. Получаем:

$$\Theta = 0,51, \quad Q = 6,33 \pm 0,87$$

$$\Theta = 1,27, \quad Q = 2,27 \pm 0,43$$

5. Вывод

Итак, в этой работе мы изучили свободные колебания в электрическом контуре: сначала измеряли периоды при $\gamma \approx 0$, затем находили критическое сопротивление и изучали колебательный контур при сопротивлениях порядка $0,1 - -0,4R_{кр}$. Мы исследовали зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура, а также добротности от параметров контура и от декремента.

Основные результаты занесены в таблицы:

Таблица 5: Расчет критического сопротивления

L	$R_{кр}$		
	Теор.	Подбор	Граф.
393 ± 7 мГн	$17,73 \pm 0,33$ кОм	12,6 кОм	$17,71 \pm 0,31$ кОм

Таблица 6: Расчет добротности

R	Q		
	Теор.	$f(\Theta)$	Спираль
1242 Ом	$7,76 \pm 0,09$	$7,82 \pm 0,51$	$6,33 \pm 0,87$
3642 Ом	$2,43 \pm 0,03$	$2,47 \pm 0,27$	$2,27 \pm 0,43$