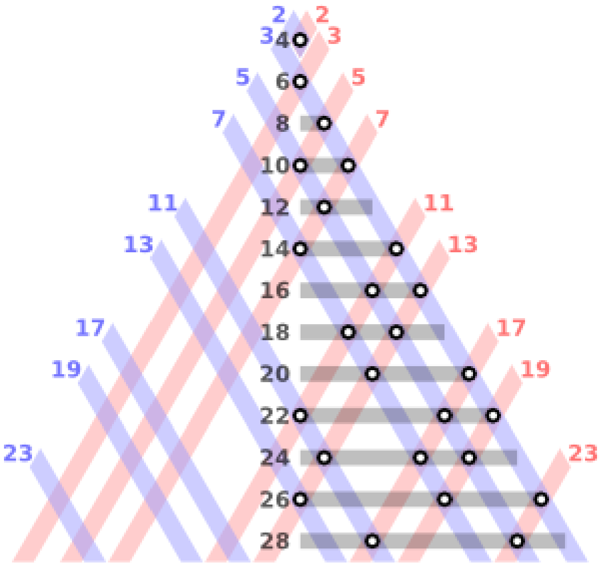
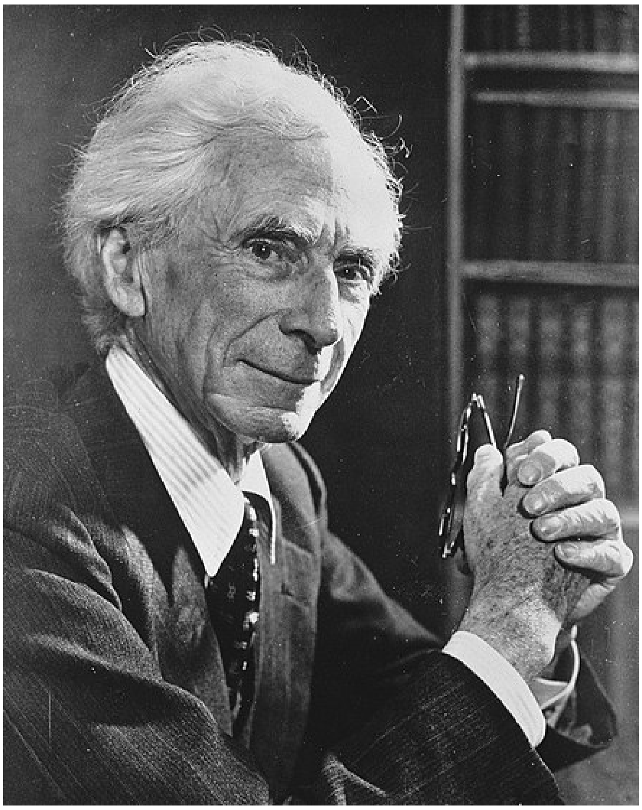
数学的 bug

- 永远无法证明的真理
- ## 数学
  - ### Maths
    - Máthēma 学习

      希腊语
    - 数学的抽象
    - 数学题一定有解
    - [哥德巴赫猜想]()
      - 任一大于2的偶数，都可表示成两个素数之和

    - 清楚的、确定的、对错分明的
  - ### 危机
    - 1901，罗素，**理发师悖论**
      - 一个理发师宣布：“我只给不自己理发的人理发”。那理发师给不给自己理发？

    - 命题用严谨的数学公式表达
        - $R=\{x \mid x \notin x\}$
            - 悖论：$R \in R \Longleftrightarrow R \notin R$
- **贝里悖论**
    - 所有的自然数都能用 20 个以内的汉字表达出来吗?
        - 9591332891356103001572950135262069636211687549032310189928360051655222742019104623643964105922184775
    - 证明
        - 假设存在「不能用 20 个以内汉字表达的自然数」
        - 则必存在一个「最小的不能被二十个以内汉字表达的自然数」
        - 矛盾，故假设不成立
- **有趣数字悖论**
    - 有些自然数很有趣
    - 命题：所有的自然数都是有趣的
    - 证明：
        - 假设存在「无趣的自然数」
        - 则必然存在一个「最小的无趣的自然数」
        - 矛盾，故原假设不成立
- 矛盾
    - 一对矛盾可以用于证明一切

- 如果「宇琪爱工作」和「宇琪不爱工作」同时成立，就可以直接证明哥德巴赫猜想
- 证明
  - 因为「宇琪爱工作」为真
  - => 则【「宇琪爱工作」或「哥德巴赫猜想」】为真
  - => 「宇琪爱工作」和「哥德巴赫猜想」至少有一个为真
  - 因为「宇琪不爱工作」为真
  - => 前半句不成立，则「哥德巴赫猜想」为真
- 爆炸原理
  - 实质条件陈述从矛盾中可以得出任何事物的规则
  - $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$
- **解决矛盾**
  - 罗素：**类型论**
    - 把数学对象、命题排出层次结构，禁止自己定义自己
  - 策梅洛：ZFC 集合论

- ## 希尔伯特
  - 希尔伯特
    - 现代数学之父
      
  - 1920，《希尔伯特纲领》
    基于公理和证明的数学体系

- 1. 每个领域都有自己的公理
    - 显然成立
    - 不证自明
    - 大家都接受
- 2. 形式语言
    - 符号符号
    - f(x) 在 p 处的极限为 L
        - $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$
        - [高数教材]
- 3. 证明其他命题

- [算数领域的皮亚诺公理]
    - [皮亚诺]
        - 
    - 1. 0 是自然数
        - $\exists 0 : 0 \in \mathbb{N}$
    - 2. 每一个确定的自然数 n，都有一个确定的后继数 n'，n' 也是自然数
        - $\forall n \in \mathbb{N} : \exists n' \in \mathbb{N}$
    - 3. 对于每个自然数 m、n，m=n 当且仅当 m 的后继数 = n 的后继数
        - $\forall m, n \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$
    - 4. 0 不是任何自然数的后继数
        - $\neg(\exists n \in \mathbb{N} : n' = 0)$

- 5. 任意关于自然数的命题，如果证明：它对自然数 0 是真的，且假定它对自然数 n 为真时，可以证明对 n' 也真。那么，命题对所有自然数都真
  - $\forall A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (n \in A \Rightarrow n' \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}$
- 证明 1+1=2
  -

1	∀x;x=y⇒(x=z⇒y=z)	19	x=y⇒y=x	37	(∀x x=y⇒y=x)⇒((0'+0')=y⇒y=(0'+0'))
2	∀x;x=y⇒(x=z⇒y=z)⇒x+0=y⇒(x+0=z⇒y=z)	20	∀x (x+y')=(x+y)'	38	(0'+0')=y⇒y=(0'+0')
3	x+0=y⇒(x+0=z⇒y=z)	21	∀x (x+y')=(x+y)'⇒(0'+y')=(0'+y)'	39	∀y (0'+0')=y⇒y=(0'+0')
4	∀y x+0=y⇒(x+0=z⇒y=z)	22	(0'+y')=(0'+y)'	40	∀y (0'+0')=y⇒y=(0'+0') ⇒ ((0'+0')=(0'+0)'⇒(0'+0)'=(0'+0')
5	∀y x+0=y⇒(x+0=z⇒y=z)⇒ x+0=x⇒(x+0=z⇒x=z)	23	∀y (0'+y')=(0'+y)'	41	((0'+0')=(0'+0)'⇒(0'+0)'=(0'+0')
6	x+0=x⇒(x+0=z⇒x=z)	24	∀(0'+y')=(0'+y)'⇒(0'+0')=(0'+0)'	42	(0'+0)'=(0'+0')
7	x+0=z⇒x=z	25	(0'+0')=(0'+0)'	43	(∀z x=y⇒(x=z⇒y=z)) ⇒ x=y⇒(x=0''⇒y=0'')
8	∀z x+0=z⇒x=z	26	∀x (x+0)=x	44	x=y⇒(x=0''⇒y=0'')
9	(∀z x+0=z⇒x=z)⇒(x+0=x⇒x=x)	27	∀x (x+0)=x ⇒ (0'+0)=0'	45	∀x x=y⇒(x=0''⇒y=0'')
10	(x+0=x⇒x=x)	28	(0'+0)=0'	46	∀x x=y⇒(x=0''⇒y=0'')⇒((0'+0)' =y⇒((0'+0)' =0''⇒y=0''))
11	x=x	29	∀x (x=y⇒x'=y')	47	(0'+0)' =y⇒((0'+0)' =0''⇒y=0'')
12	∀z x=y⇒(x=z⇒y=z)	30	∀x (x=y⇒x'=y')⇒ ((0'+0)=y⇒(0'+0)'=y')	48	∀y (0'+0)'=y⇒((0'+0)' =0''⇒y=0'')
13	∀z x=y⇒(x=z⇒y=z)⇒x=y⇒(x=x⇒y=x)	31	((0'+0)=y⇒(0'+0)'=y')	49	∀y (0'+0)' =y⇒((0'+0)' =0''⇒y=0'')⇒ ((0'+0)' =(0'+0')⇒((0'+0)' =0''⇒(0'+0')=0''))
14	x=y⇒(x=x⇒y=x)	32	∀y ((0'+0)=y⇒(0'+0)'=y')	50	(0'+0)' =(0'+0')⇒((0'+0)' =0''⇒(0'+0')=0'')
15	x=y⇒(x=x⇒y=x)⇒(x=y⇒x=x)⇒(x=y⇒y=x)	33	∀y (0'+0)=y⇒(0'+0)'=y')⇒((0'+0)=0'⇒(0'+0)'=0'')	51	(0'+0)' =0''⇒(0'+0')=0''
16	(x=y⇒x=x)⇒(x=y⇒y=x)	34	((0'+0)=0'⇒(0'+0)'=0'')	52	(0'+0')=0''
17	x=x⇒(x=y⇒x=x)	35	(0'+0)'=0''	53	即 1+1=2, 证毕。
18	x=y⇒x=x	36	∀x x=y⇒y=x		

- 四大性质
  - **完备性**

    所有的真命题都可以从公理出发得到证明
  - **一致性**

    这个体系不存在矛盾
  - **可判定性**

    存在一个算法能判定任意一个命题是否可以从公理出发证明
  - 保守性

    如果某个关于于“实际物”的结论用到了“假想物”（如不可数集合）来证明，那么不用“假想物”依然可以证明
- 1925，外尔
  - “用毫无意义的公式游戏取代内容数学”
  - “毫无意义的公式清单知识‘分析的冷酷幽灵’”
  - “没有智力上的意义”
- 1930，希尔伯特退休演讲
  - 我们不知道。我们也不应知道。
    - Ignoramus et ignorabimus.

      拉丁文
  - 我们必须知道。我们终将知道。
    - Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

      德语
    -

- ## 哥德尔
  - 
  - 24岁，1930.9.7，柯尼斯堡 第二届精确科学认识论会议，提出哥德尔不完备定理
    - 数学不具有完备性
    - 必然存在某些真命题是无法被证明的
  - ### 哥德尔第一不完备性定理
    - **一、对应**
      - 把数学中的所有东西都映射到一个自然数上（**哥德尔数**）
        - 把对数学的性质的讨论转换为对数的性质的讨论
      - 变量符号 x、y、z 及后续变量，映射到 13、17、19 及后续质数上

符号	哥德尔数	含义
$\sim$	1	非
$\vee$	2	或
$\supset$	3	如果...则...
$\exists$	4	存在
$=$	5	等于
0	6	零
s	7	后继
(	8	标点符号
)	9	标点符号
,	10	标点符号
$+$	11	加
$\times$	12	乘

x 13

y 17

z 19

- 皮亚诺算数公理
  - 1. 0 是自然数
    - $\exists 0 : 0 \in \mathbb{N}$
    - $\exists 0$
  - 2. 每一个确定的自然数 n，都有一个确定的后继数 n'，n' 也是自然数
    - $\forall n \in \mathbb{N} : \exists n' \in \mathbb{N}$
    - $(\exists x)(x = sy)$
  - 3. 对于每个自然数 m、n，m=n 当且仅当 m 的后继数 = n 的后继数
    - $\forall m, n \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$
    - $(sx = sy) \supset (x = y)$
  - 4. 0 不是任何自然数的后继数
    - $\neg(\exists n \in \mathbb{N} : n' = 0)$
    - $\sim (sx = 0)$
- **二、命题的表示**
  - 原命题 $0 \times x = 0$
    - 符号的哥德尔数：6, 12, 13, 5, 6
    - 命题的哥德尔数：质数序列与对应符号哥德尔数的幂的和
      - 质数：2、3、5、7、11
      - 幂的和：$2^6 \times 3^{12} \times 5^{13} \times 7^5 \times 11^6$
    - = 12362075680455161718750000000
  - 皮亚诺算数公理的哥德尔数
  - 算数基本定理

- **每个大于 1 的自然数**，要么本身就是质数，要么可以写为 2 个或以上的质数的积，而且这些**质因子按大小排列之后，写法仅有一种方式**
- 保证每一个命题都能对应到唯一的一个哥德尔数
- 而对于任意一个哥德尔数，都可以求出它究竟是什么命题
  - 243000000
  - 134014370487315742199056189063162190005814697956250000000

    > 留后

- **三、命题的证明过程的表示**
  - 证明“1 是存在的”
    - 证明过程
      - 公理，$(\exists x)(x=sy)$
      - 那么，$(\exists x)(x=s0)$
    - $(\exists x)(x=sy)(\exists x)(x=s0)$
- 所有命题都可以用哥德尔数表示：质数有无穷多个
  - 不存在最大的质数
  - $\sim(\exists \text{最大的质数})$
  - $\sim(\exists p)(p\text{是质数}, \text{且} \forall q \text{是质数}, p \geq q)$
  - 存在和任意的互相转化
    - **存在** x **不满足**条件 H === **非任意** x **满足**条件 H
    - **不存在** x **满足**条件 H === **任意** x **不满足**条件 H
  - $\sim(\exists p)(p\text{是质数} \wedge (\sim(\exists q)(q\text{是质数} \wedge (p<q))$
  - 质数
    - 没有除 1 和自身外的因数
    - $s(\sim(\exists m)(1<m<s),(\exists n)(m \times n=s))$
  - $\sim(\exists p)((\sim(\exists m)(1<m<p),(\exists n)(m \times n=p)) \wedge(\sim(\exists q)(\sim(\exists k)(1<k<q),(\exists l)(k \times l=q)) \wedge(p<q))$
  - 大于、小于、且
    - a 大于 b：$\exists x, a=b+x$
    - a 小于 b：$\exists y, b=a+y$
    - c 且 d：$\sim(\sim c \vee \sim d)$
- 讨论命题的命题也可以用哥德尔数表示
  - 【“0 + 1 = 1”的第二个符号是加号】
    - “0 + 1 = 1”这个命题的哥德尔数能被 3^11 整数，但不能被 3^12 次方整除
    - $(\exists x)(x \times 3^{11}=m) \wedge \sim(\exists x)(x \times 3^{12}=m)$
  - 【“哥德巴赫猜想”不可以被证明】

- 没有任意一个证明过程以“哥德巴赫猜想”收尾
- 不存在一个 k 步的证明过程，使得它的哥德尔数可以被【第 k 个质数的「哥德巴赫猜想的哥德尔数」的幂】整除

- sub(a, b, c)
    - 有这样一个命题：$(\exists x)(x = sy)$
        - 哥德尔数为：3255680639016245722922904568235895612229969831423665565013515044933930283596406809375000000000
        - **把这个数字记为 m**
        - 然后用 m 去替换掉原命题中的 y，得到一个新的命题
        - $(\exists x)(x = sm)$
            - 当然这里的 m 是个数字，不是变量
        - 那么这个**新的命题**的哥德尔数是：
            - 2544505506623817446857554674534320916400128263886078395309938120751512333824128847692440829547861385399237709503114129908383498505518662673807369458027257232437209929224432882546647493759204033410803572881056355445850603317245703591194583109449917714566077905330905558089469437137085706323816047612377328534294951544657202975327201885452759369812493113255624299958149983518934072203968450737866628703773249023971529131431742524148744811370991846035710328156841433001857687734683927554691172634081472277864595396875000000000
    - 函数 sub(a, b, c)

        a、b、c 不是变量，均为一个具体的自然数
        - **取**哥德尔数为 a 的命题
        - **找**到命题中哥德尔数为 c 的**符号**的位置
        - 把它**替换**成**数字** b
        - 得到的新命题的**哥德尔数**，就记为 sub(a, b, c)
- **哥德尔第一不完备性定理证明**
    - 有这么一个命题：【无法证明哥德尔数是 sub(y, y, 17) 的命题】

        y 是一个变量，代表任一个大数
        - sub(y, y, 17) 是什么呢?
            - 找到哥德尔数是 y（一个大数）的命题
                - 先假设这个大数是 10^999
            - 假设是【y能被 5整除】这么一个命题

                此处的 y 是变量
            - 找到其中哥德尔数是 17 的符号（即符号“y”）
            - 替换为 y（10^999），得到新命题

        - 【10^999 能被 5 整除】
        - 这个新命题的哥德尔数就是 sub(10^999，10^999, 17)
      - 在原命题中，y 是变量，代表任意一个大数
    - 记【无法证明哥德尔数是 sub(y, y, 17) 的命题】这个命题的哥德尔数是 n
      - n 是一个真实的、具体的、明确的、现在就能计算出来的明确的数字
    - 有这么一个命题【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】
      - 那么先看看，什么是「哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题」
      - sub(n, n, 17)
        - **取** 【无法证明哥德尔数是 sub(y, y, 17) 的命题】
        - **找**到符号 “y”
        - **替换**成 n
        - 得到【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】 （n 是那个数字）
        - 也就是说这个命题：【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】的哥德尔数正好就是 sub(n, n, 17)
        - 而这个命题说的就是自己是无法证明的
    - 证明命题的真or假
      - 1. 假设此命题是假的：【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】
      - 2. 即可以证明「**哥德尔数是 sub(n,n,17) 的命题**」
      - 3. 可以证明，就是真命题，即「**哥德尔数是 sub(n,n,17) 的命题**」是一个真命题
      - 4. 即它是真的：【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】
      - 矛盾，故假设不成立
    - 因此，这个命题是真的，但无法证明【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】
    - 从数学公理出发，证明了任何一个包含了足够强的算数公理的形式化系统**如果是一致的，就是不完备的**，即其中必存在一些既不能证明也不能证否的命题
      - 如果是一致的，就只能是不完备的
- **哥德尔第二不完备性定理**
  - “建立公理体系不仅仅是要避免悖论，它必须走的更远，要在每个知识领域内表明，基于公理系统的矛盾是绝对不可能的”——希尔伯特《公理化思想》
  - 1931 年，一致性
    - 哥德尔第二不完备性定理：**公理系统无法证明自身是否具有一致性**
  - 刚刚的证明过程简略
    - 巧妙的构造一个哥德尔数为 sub(n, n, 17) 的命题
    - 只要数学公理体系具有一致性
    - 那么该命题就必须是真且无法证明
    - 反正法：**【假设 => 推导 => 矛盾 => 假设不成立】**

        - 只用了一个条件，假设公理体系具有一致性
        - 哥德尔第二不完备性定理的证明
            - 如果「可以从公理出发，证明公理体系具有**一致性**」
            - 那么就真的通过反证法证明了「【无法证明哥德尔数是 sub(n, n, 17) 的命题】为真」
            - 而这个命题是不可以证明的
            - 所以「不可以从公理出发，证明公理体系具有一致性」
        - 类似于光速
    - 1947，移居美国，美国公民考试，哥德尔漏洞
- ## 图灵
    - 可判定性不成立
    - 1936，基于图灵机停机问题的思路，证明了数学是不可判定的
        - 不可能有一套算法能机械的判断出所有数学命题的真或假