

太阳 GPS 系统的算法研究

【摘要】

太阳在大量视频资料中广泛出现,使用视频中物体太阳影子随时间的变化可以有效地测出视频拍摄的时间和地点,这在视频数据分析中有着十分重要的意义。本文针对如何利用实测数据或原始视频中竖直杆的影子变化,求出日期与地点等潜在信息提出了一系列的解决思路与算法。

我们采用了坐标转换法,建立了以日地系统为参照的整体坐标系和以直杆系统为参照的局部坐标系,并且根据不同的情况,固定一个的坐标系,将所有运动形式都叠加到另一个坐标系中,从而将问题简化,更加注重于解决空间几何关系本身。

而影子定位包括日期,时间,杆长,影长和地点等信息,对于不同的信息组合,我们通过探究,找到不同的解法,来帮助定位。

对于已知杆长,日期与地点而求影子的长度变化曲线的问题,我们将日地坐标系的转轴与局部坐标系的转轴重合,从而在不影响结果准确性的前提下极大地简化了计算。同时充分利用投影特性与向量的运算快速导出仅含时间变量的方程,将方程编译为 MATLAB 的程序语言,直观地将结果展示出来。

当已知测试日期与影子顶端的散点轨迹,要求定位实验位置时,需要对于坐标系关系进行进一步的修改。我们创造性的将整体坐标系和局部坐标系都固定,将问题转换为太阳绕某固定轴旋转的求解过程。并且推导出太阳旋转过程所构成的曲面为圆锥曲面,影子就是太阳曲面与地面的交线,从而知道影子轨迹是圆锥曲线。但是比赛提供的数据,曲率很小,数据不能够很好的拟合。我们进一步研究了在等间隔时间内,太阳曲面的锥顶夹角与影子位置等量的一系列关系。通过多个强相关条件,精确求出杆长,纬度等一系列信息。再通过与北京时间的时差,定位直杆所在地的经度。

当仅知道影子轨迹而未知日期的情况下,我们要求解出太阳直射地的纬度从而得出锥角。杆长在未知日期的情况下依然可以求得,只要将轨迹点按等时划分,由相同时间太阳直射方向扫过的部分占总锥面的比例相同的特点,我们可以列出只包含杆长的等式,进而首先确定杆长。接着根据实际时间间隔的角度关系,求出太阳直射的纬度值,确定可能的日期,将问题转换为已知日期的问题,从而让问题迎刃而解。

而对于视频资料的解析,关键是视频解析和建立合适的坐标系与度量方法。我们运用 OpenCV 和 Python 视频解析技术,将视频转化为静态图片并进行批处理,提取其中各个元素的在照片坐标系中的坐标信息。再利用视频中的其他信息确定摄影机镜头光轴的位置,以及摄影机镜头光轴与杆的相对关系,从而确定视角。根据视角的特殊性建立方便计算的局部坐标系,由已知的杆长作为度量标准,得到视频中的坐标映射在三维空间中的准确位置。使用透视法的作图方法对视频中的不同时刻分别测量,得到一组位置坐标数据。从而使用上述的解决方案确定拍摄地点与日期。

【关键词】空间变换,摄影几何,图像识别,影子定位

一、背景分析

1.1 引言

太阳影子定位是依靠视频中物体的太阳影子的变化从而应用于对确定视频的拍摄地点、拍摄日期等参数进行数据分析。一根竖直固定在水平地面上的直杆是主要的实验器具。随着时间的流逝与季节的交替,投影在地面上的影子会呈现出不同的长度与运动轨迹。根据观测得到的影子状态,我们不仅可以得到当时的太阳运行状况,甚至可以跟据模型推出拍摄地的可能位置与时间等信息。这种以小见大,逐渐深入分析思考是数学建模的超级闪光点。

1.2 问题的提出

根据所给定的初始条件、以及可获得的信息的多少及种类,本文依次提出如下问题:

- 给定当地的位置坐标(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒),当时的日期(2015 年 10 月 22 日)和所采用的实验器材(3m 长直杆)。要求建立模型求出当地时间在 9:00-15:00 时太阳影子长度的变化曲线。
- 根据不同地点,太阳影子随时间所产生的轨迹线不同这一特点。给定实验数据中太阳影子顶点的坐标数据,应用所建立的模型求出若干直杆可能所处的地点。
- 第三问与第二问问题比较相像,但所给的数据中不包含实验的日期。从影子顶点的坐标数据中求出若干可能的实验日期与直杆可能所处的地点。
- 给出一段视频,拍摄角度等视频拍摄信息未知,仅给出时间作为参照,要求找到可能的视频拍摄地点,并且进一步要求如果拍摄时间未知,能否通过视频获取拍摄时间信息。

二、问题分析

2.1 问题一

已知条件:地理位置,当地时间,日期,杆长

未知条件:变化的影子坐标

模型分析:建立适当的整体坐标系与局部坐标系,并通过空间视角转换,固定其中一个坐标系,并且将太阳设置为固定不动,影子变换均由局部坐标系的运动引起(即只有杆在运动)。从而求出影子顶点位置与时间的函数关系,从而求出影子长度随时间变化的曲线。

2.2 问题二

已知条件:变化的影子坐标,北京时间,日期

未知条件:杆长,地理位置

模型分析:在这一问,我们将杆长和所在纬度作为未知量,固定局部坐标系,将太阳作为运动物体,从而将太阳的光线扫过的曲面(圆锥面)在地面上的投影作为影子轨迹。但是在附件中数据曲率很小,但是直接拟合,误差很大不可行。所以我们建立杆长和角度的等式,先求出杆长。再由杆长找到太阳光扫过的圆锥的中轴线,进而确定当地纬度与正午影子位置。通过与北京时间(东八区)的时差求出经度,并分析多种可能的情况,得出完整的结论。

2.3 问题三

已知条件:变化的影子坐标,北京时间

未知条件:地理位置,日期,杆长

模型分析:问题三与问题二的主要区别在于不知道实验的日期,也就不知道阳光直射的纬度值。这需从实验所给的数据中多找到一个等式,从而可以将包含两个未知量(日期与杆长)的方程解出,从而求得若干个可能的地点与日期。对于第三问的多中情况,可以使用对称性

来解决。

2.4 问题四

已知条件：视频坐标系中变化的影子坐标，当地时间，日期，杆长

未知条件：地理位置，空间坐标系中影子坐标

模型分析：问题四的关键在于从视频中分析并提取有用的信息，我们首先由 OpenCV 处理视频，边缘检测提取出视频中的信息，转化为照片坐标系中的坐标。再经过摄影几何分析，从而得到影子顶端在水平地面上的位置坐标。从而使用问题二与问题三的模型求解出位置与时间信息。

三、模型假设及符号说明

3.1 模型假设

- a. 地球的半径相对于地日距离可以忽略不计（地球半径约为 6400km,日地平均距离 149,597,870km）
- b. 不考虑直杆与地的倾斜等误差。

3.2 符号说明

表1 常见符号说明

符号	含义
α	当地地区纬度
β	太阳直射方向与该地法向方向在赤道面上投影的夹角（详见示意图）
γ	太阳直射的纬度位置
L	杆长
P	影长
$\vec{\delta}$	杆顶到影子顶点的矢量
XYZ 坐标系	日地系统的整体坐标系
X'Y'Z'坐标系	直杆所在地的局部坐标系

四、模型建立与求解

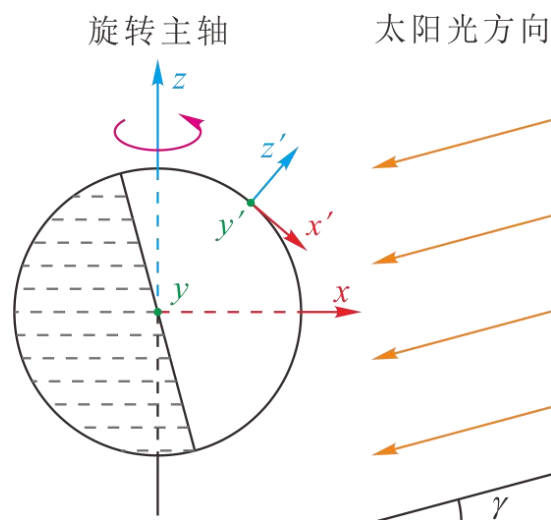
4.1 问题一

4.1.1 模型的准备

a. 初始模型

为了直观展现地球的运动状态与两个坐标系之间的关系，引入示意图：

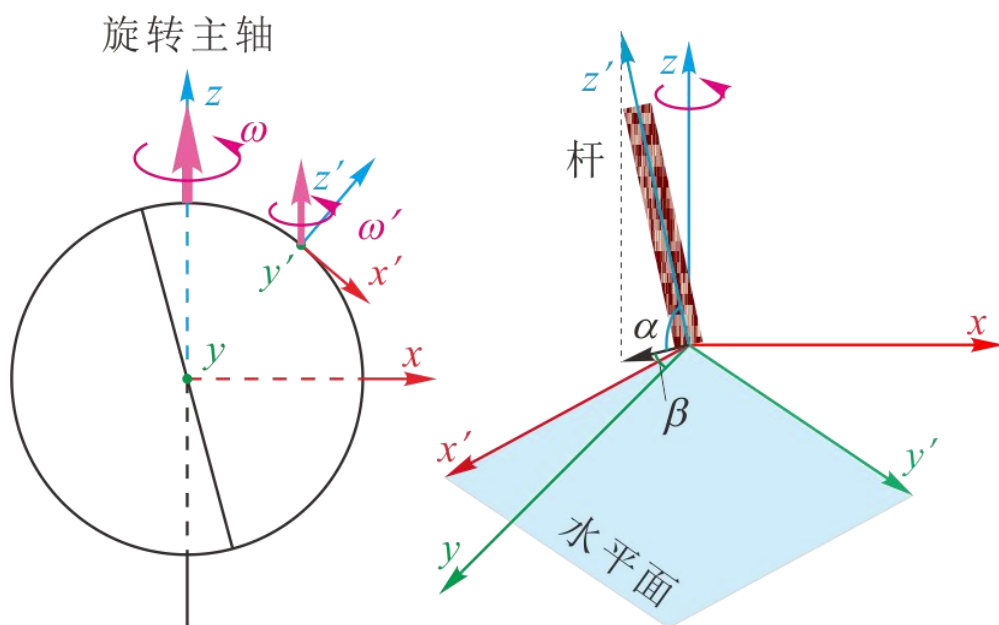
如图 XYZ 坐标系为日地系统的整体坐标系，X'Y'Z'坐标系为直杆所在地的局部坐标系，太阳光线为平行光



而日地系统的变化，除了上图之外，还包括地球与太阳的公转，在这里我们用在 $-23^{\circ}26'$ 到 $23^{\circ}26'$ 变化的参数 β 来体现这一影响因素， β 代表了太阳直射点所在的纬度信息，一年中每日的太阳直射点信息很容易在网络获取，此处对计算直射点信息不加赘述。

b. 变换一

根据假设 1，因为日地距离远大于地球半径 ($D \gg R$)，我们可以将地球的旋转主轴平移，使其经过局部坐标系的原点，从而变成地球旋转主轴在直杆所在地。（如左下图所示）



c. 变换二

为了方便计算，我们将两个坐标系加以整合。将太阳照射方向固定（以太阳为参照物），将观察者视角放在局部坐标系之外。即可得到问题等价于：局部坐标系 $X'Y'Z'$ 沿日地 XYZ 系统中的 Z 轴旋转（如右上所示）

设与当地经线相切的位置为局部坐标系中的 Y' 轴，从而 Y' 轴处在 XY 平面中，同时太阳光线与日地整体坐标系中的 XZ 面平行，所以可以在整体坐标系中求出影子顶点的坐标。

4.1.2 模型的建立

根据要求，我们要求出 9:00-15:00 之间的变化状况，由以上模型的预处理变换，我么很容易看出，一天时间中，模型中只有 β （即太阳直射方向与该地法向方向在赤道面上投影的夹角）在变化，而 β 的区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$ 。但原题中的位置天安门广场不是东八区的正中心，

所以 β 的区间要加上相差的量，即 β 区间为 $\left[-\frac{\pi}{4} - 3^\circ 36' 41'', +\frac{\pi}{4} - 3^\circ 36' 41''\right]$

我们可以假设在局部坐标系中杆子的方向（也是 Z' 轴的方向）为 \vec{r} ，则

$$\vec{r} = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha)$$

可以用点法式方程求出平面的方程：

$$\cos \alpha \cos \beta \bullet x + \cos \alpha \sin \beta \bullet y + \sin \alpha \bullet z = 0$$

设影子顶点坐标为 (X_1, Y_1, Z_1)

因为太阳光照射方向假设与 ZX 平面平行，则在影子顶点与杆子顶点的矢量在 Y 轴上没有投影，所以

$$Y_1 = L \bullet \cos \alpha \sin \beta$$

同时影子顶点与杆子顶点之间矢量平行于太阳光的方向，所以

$$3 \sin \alpha - Z_1 = \tan \gamma (3 \cos \alpha \cos \beta - X_1)$$

第一问中 $L = 3\text{m}$ 代入并整理得：

$$\begin{cases} Y_1 = 3 \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \bullet X_1 + \cos \alpha \sin \beta \bullet Y_1 + \sin \alpha \bullet Z_1 = 0 \\ \tan \gamma \bullet X_1 - Z_1 = 3 \cos \alpha \cos \beta \tan \gamma - 3 \sin \alpha \end{cases}$$

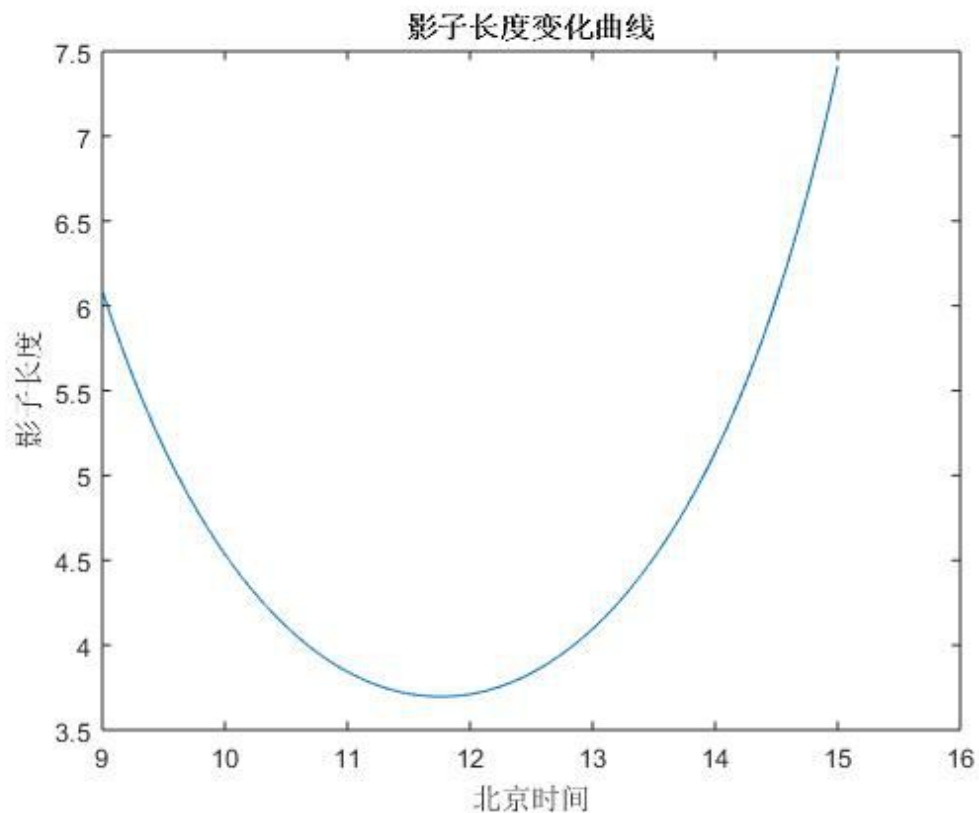
通过 (X_1, Y_1, Z_1) 可以算出影长

$$P = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$$

4.1.3 模型的求解

对模型进行程序实现，这里我们使用了 MATLAB 软件，程序见附件 1。

结果图：

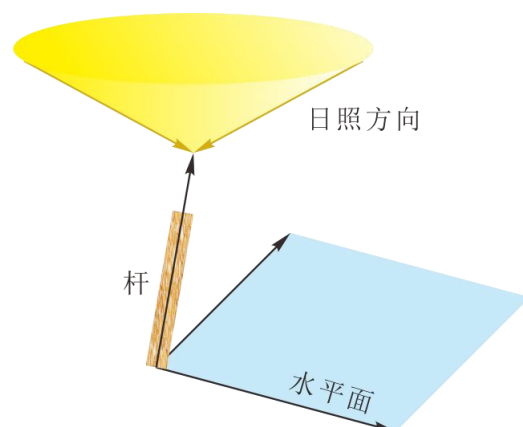
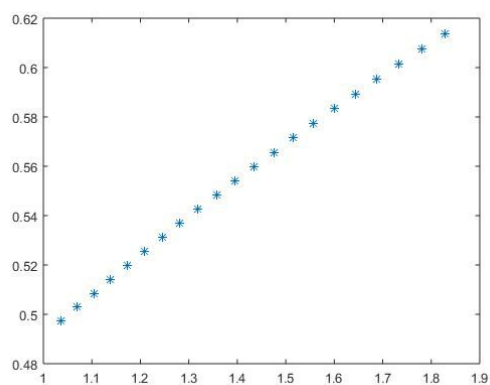


4.2 问题二

4.2.1 模型的准备

a. 附件数据分析

问题二中所给的数据为在一段时间内，影子定点在水平地面坐标位置随时间的变化规律。为了更直观地表示，我们先在平面上标出了点的位置（左下图）。可以看出，这些点所处的轨迹为略微弯曲的曲线，为了能够确定这些点究竟在什么类型的曲线上，我们需要建立新的坐标模型模型进行分析。



b. 空间坐标变换

问题一中，我们将地球主轴平移到直杆所在地，并且固定太阳光和整体坐标系，使得局部坐标系运动，在此问题中，我们将局部坐标系固定，使得太阳在局部坐标系内进行旋转，从而进行分析。

由坐标变换之后，可以看到太阳光轨迹平面是一个锥形（右上图）。影子的轨迹即地平面（局部坐标系水平面）切割圆锥（太阳光锥反向延长的圆锥）所形成的交线。

通过解析几何的知识，我们可以知道，杆子的影子端部所形成的轨迹为一个二次曲线。

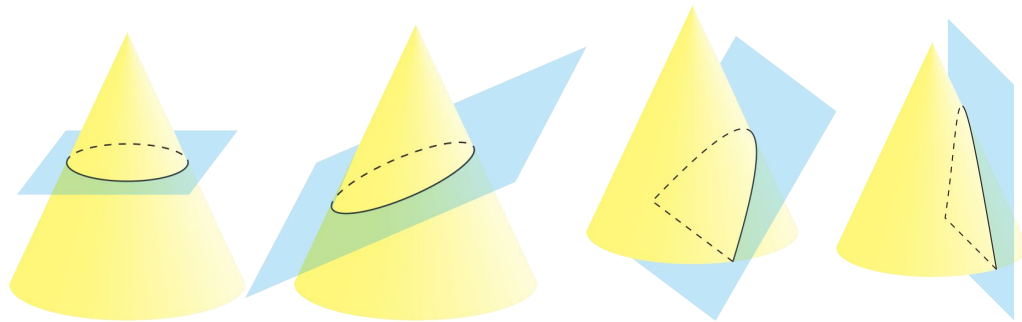
具体特性以及成因如下：

双曲线：在低纬度地区的常见现象

椭圆：高纬度地区的极昼现象，但杆的位置在椭圆内部

抛物线：由椭圆向双曲线过渡的状态

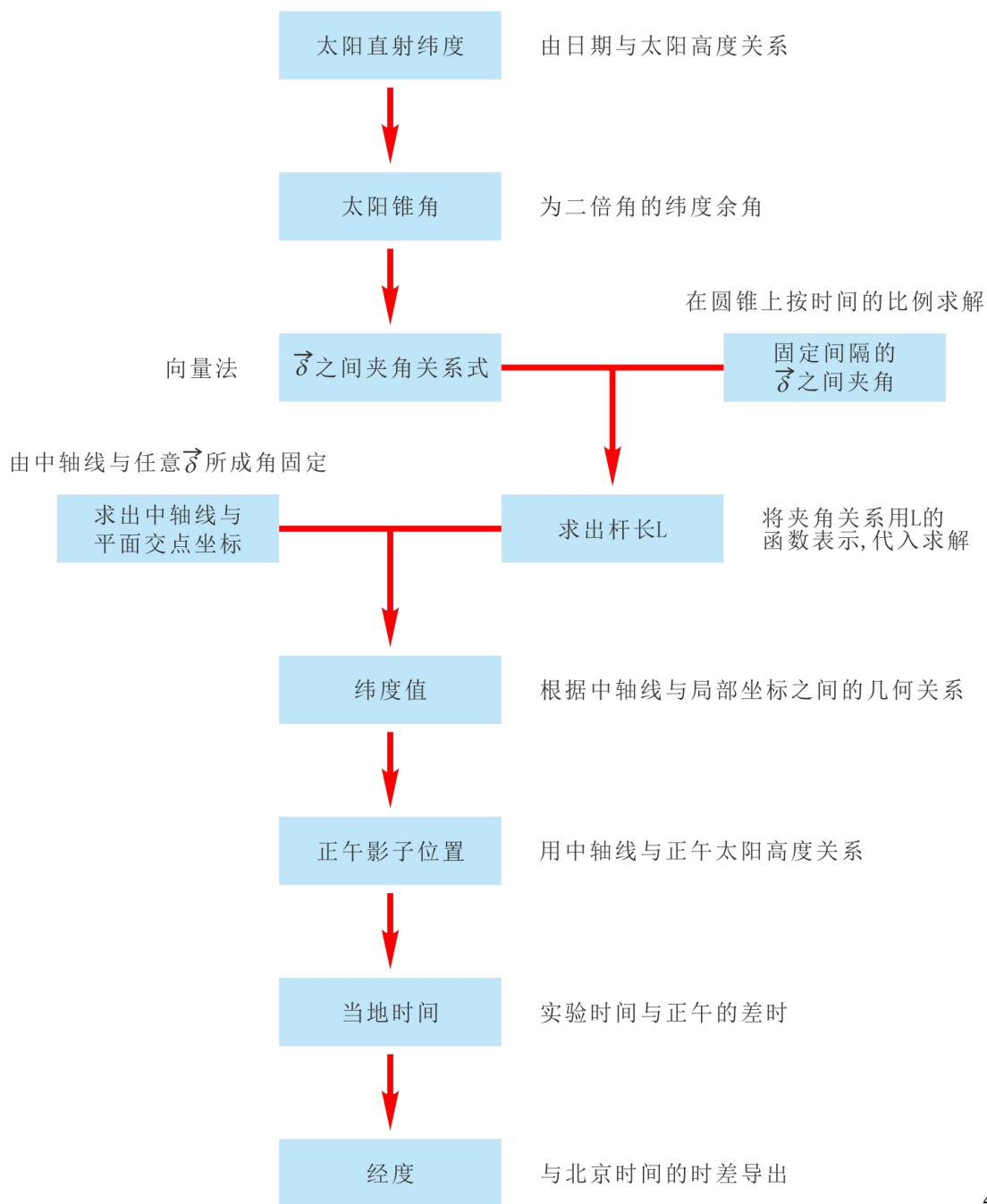
直线：当太阳的直射点位于赤道上时



c. 特殊解法

最简单的方法莫过于对所选的点进行拟合，但多次试验后发现所产生的精度十分差，这主要的原因在于所有的样本点在时间上较短，且较为平缓，拟合的结果误差很大。所以我们将采用其他的方法进行分析，再通过分析结果来间接拟合附件数据，减小误差。

为了便于理解，我们绘制了思路流程图。



4.

4.2.2 模型的建立与求解

a. 角度关系

我们可以通过目前的日期求出锥体的锥角（与直射的纬度两倍的绝对值呈补角）。

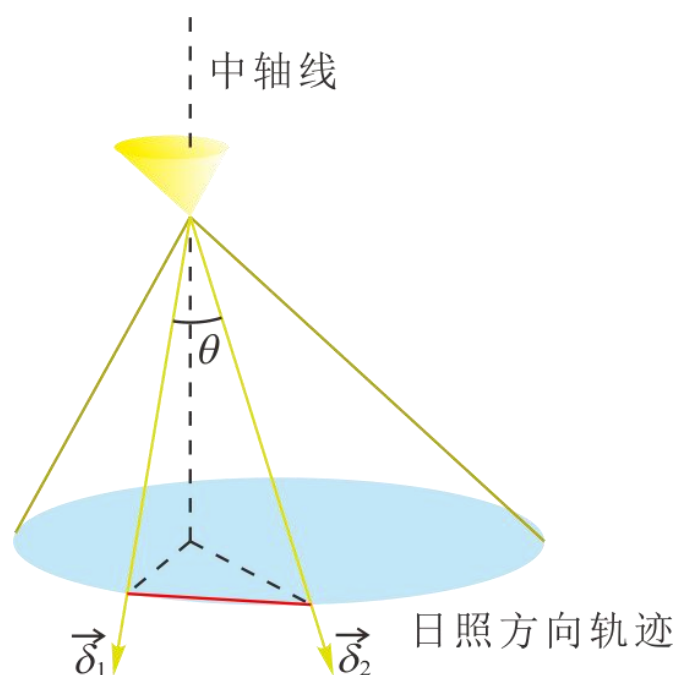
通过网上的计算，可得当天（2015 年 4 月 18 日）的太阳直射纬度 $\gamma = 10.70^\circ$ ，作用在北半球上，故锥角为 158.6°

我们可以引入 $\vec{\delta}$ ，作为杆顶到影子顶点的矢量，我们可以求得固定时间间隔下的 $\vec{\delta}$ 的相对夹角 θ ，从而作为求出杆长 L 的等式。

此题中的时间间隔为一小时，即可以求到两组杆顶到影子顶点之间向量 $\vec{\delta}_1$ ， $\vec{\delta}_2$ 的夹角 θ_{12} ，

再列出夹角 θ_{12} 与杆长 L 的关系式，结合已知的实验数据求出杆长 L 。

示意图：



题目所给的测量时间间隔为 1 小时，为全天的 $\frac{1}{24}$ ，则两个 $\vec{\delta}$ 之间的夹角为

$$\theta = 2 \times \arcsin\left(\frac{\sin(7.5^\circ)}{\sqrt{1 + \tan^2(10.70^\circ)}}\right) = 14.738^\circ$$

b. 杆长 L 的求解

两矢量之间的夹角公式为：

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

杆顶的坐标 $A(0,0,L)$ ，初始点的坐标为 $B(1.0365, 0.4973, 0)$ 终了点的坐标为

$C(1.8277, 0.6135, 0)$

所以

$$\vec{\delta}_1 = (-1.0365, -0.4973, L) \quad \vec{\delta}_2 = (-1.8277, -0.6135, L)$$

代入方程：

$$\cos(14.738) = \frac{1.8944 + 0.3051 + L^2}{\sqrt{(1.3216 + L^2)(3.7169 + L^2)}}$$

求解得：

$$L_1 = 1.9675 \quad L_2 = 0.9858$$

然而杆的长度应该为一个确定的值，由于只使用了初始终了的两个点的数据，所以会出现两个值，而多加点后会使得方程的方程数多于未知量数，故我们把时间缩短为半个小时，重新计算结果

$$L'_1 = 1.9642 \quad L'_2 = 0.7420$$

$$L''_1 = 1.9098 \quad L''_2 = 1.3757$$

由此可见 L_2 的值会随着区间的变化而变化，因而为计算中出现的虚解。

故我们可以得到杆长

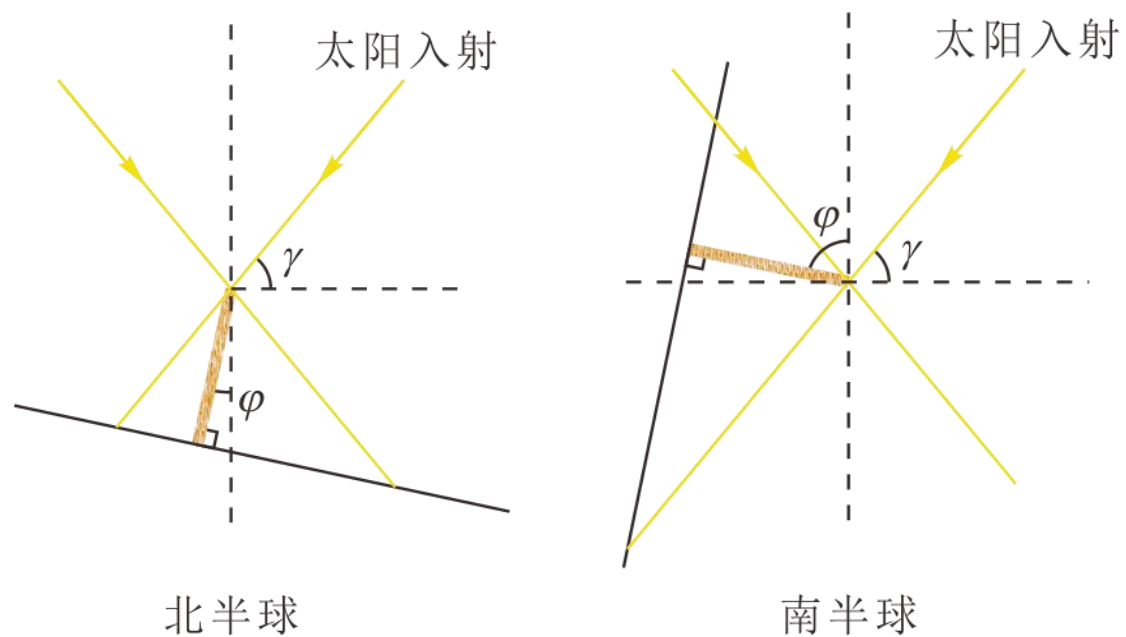
$$L = 1.9675$$

c. 经度的确定

由两个坐标系之间的关系可得，只要我们求出了锥体的中轴线，我们就可以得到经度。

注：所在地是否与太阳直射地在同一个半球上关系到几何特性，故要分类讨论

根据几何特点，为了方便计算，可以参考投影示意图：



我们可以假设中轴线过水平面的焦点坐标为 $(X_2, Y_2, 0)$ ，根据中轴线的性质，我们可以得到中轴线与 $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ 的夹角是相等的且均为 79.3° 。我们设置初始与终了状态下的矢量

$$\vec{\delta}_1 = (1.0365, 0.4973, -1.9675) \quad \vec{\delta}_2 = (1.8277, 0.6135, -1.9675)$$

设置中轴线和水平面的交点为

$$(X_2, Y_2, -1.9675)$$

通过 MATLAB 函数实现得到两组解 $(X_2, Y_2) = (1.5290, -5.6880)$ or $(3.6444, -103.7528)$

解的分析：

由于求解时采用了

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

而为了简便计算使用了平方展开，而第二组解发生了变号，说明该角大于 90° ，进而说明太阳直射与当地所在地不太一个半球上。

当 $(X_2, Y_2) = (1.5290, -5.6880)$ 时，该地在北半球上

于是通过求解杆子和中轴线的角度不难可以求出：

当地纬度为北纬 18.48°

d. 正午位置的确定

根据中轴线可以确定正午的影子位置，当在北纬 18.48° 时，这里的 $\alpha > \beta$ 故正午角为 $\alpha - \beta$ ，我们可以得到正午时的投影角为 7.78° ，即太阳高度为 82.22° 。

设 $\vec{\delta} 0$ 为正午时杆顶端与影子端点之间的矢量

$$\vec{\delta} 0 = (-0.0696, 0.2589, 1.9675)$$

与 $\vec{\delta} 1$ 求夹角得

$$\theta_{01} = 29.77^\circ$$

通过几何关系的转换 θ_{01} 可以转换为真实的时间间隔

$$\theta'_{01} = 30.30^\circ$$

与圆锥的状态进行反向求解即可得到初始测试的时间与当地正午时间的差别时间：

$$t = \frac{\theta'_{01}}{360^\circ} \times 24 = 2.02 \text{ (小时)}$$

根据与北京时间的时区该地区的经度为 110° ，可以求出他们之间的相对时差，从而求出纬度的差别

$$w = 120^\circ - \frac{40}{60} * 15^\circ = 110^\circ$$

所以在北半球可能的地点为(东经 110° , 北纬 18.48°)

当中轴线所过的点为 $X2'=3.6444$ ， $Y2'=-103.7528$ 时，该地区在南半球，同第一个方程的解法，可以得到此时此地的纬度为南纬 1.08° ，即正午投影矢量

$$\vec{\delta} 0 = (0.0144, 0.4085, -1.96)$$

可以求出 $\vec{\delta} 1$ 与 $\vec{\delta} 2$ 之间的夹角 θ_{01} ，通过几何关系的转换 θ_{01} 可以转换为真实的时间间隔

$$\theta_{01} = 26.83^\circ \qquad \theta_{01}' = 27.32^\circ$$

同理可得当地经度为

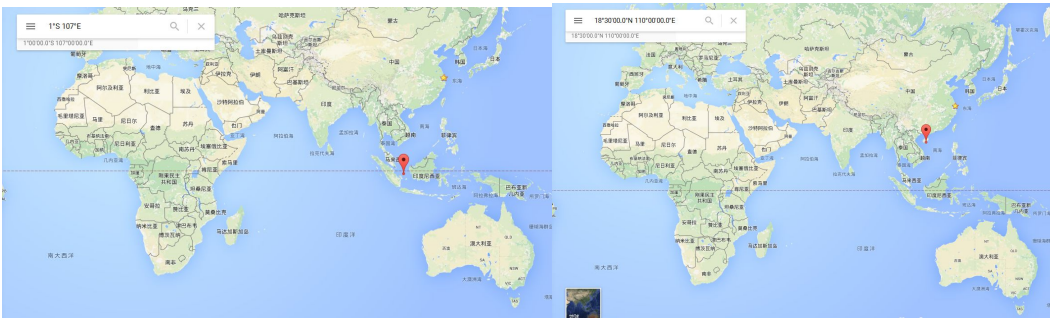
$$w = 106.81^\circ$$

4.2.3 模型的结论

根据所给的条件，我们可以得出，该地区的可能的地理位置为（保留一位小数）

东经 110 度，北纬 18.5 度

东经 107 度，南纬 1 度



4.3 问题三

4.3.1 模型的准备

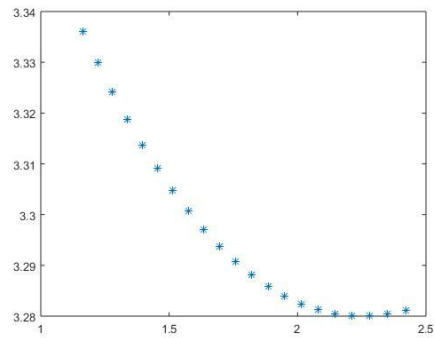
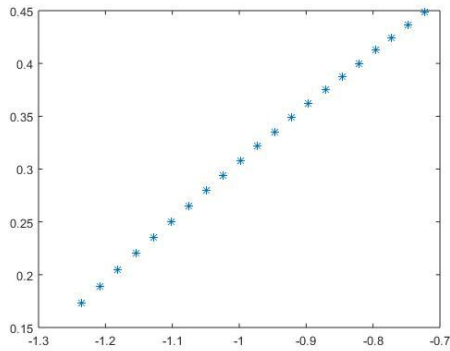
由于未知实验的日期，从而无法确定直射纬度 γ ，所以需要多加入一个未知量。

为了方便后续的计算，我们不妨设此时太阳的直射纬度为 γ_0 ，其余设置与第二问相同。

同时由于题目存在对称性，为了方便计算我们初设太阳作用在北半球上。

4.3.2 模型的建立与求解

为了能够直观地分析，我们先将附件 2 和附件 3 的影子顶点绘出：



a. 求解附件 2

①计算纬度与杆长

附件 2 的情况与问题二较为类似，即原点坐标在二次曲线之内。

其时间间隔为 1 小时，由于有两个未知量，我们可以先确定杆长，由问题二所得到的结论两组间隔相同时间的 $\vec{\delta}$ 所形成的夹角相同。

做出以半小时为时间间隔的向量即 $\vec{\delta}_1$ 、 $\vec{\delta}_2$ 、 $\vec{\delta}_3$ 。两角度表达式为 θ_{12} 、 θ_{23}

$$\vec{\delta}_1 = (-1.2352, 0.173, -L) \quad \vec{\delta}_2 = (-0.9724, 0.3128, -L) \quad \vec{\delta}_3 = (-0.7227, 0.4484, -L)$$

由 $\langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2 \rangle = \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3 \rangle$ 得

$$\theta_{12} = \theta_{23}$$

计算夹角等式可得：

$$L = 2.02\text{m} \quad \theta_{12} = 6.9746^\circ$$

代入

$$\theta = 2 \arcsin\left(\frac{\sin(3.75^\circ)}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma_0)}}\right)$$

得

$$\gamma_0 = 21.5587^\circ$$

得到太阳直射的纬度为 21.5587°

由此可得锥角为 136.8826°

由此可以推断出可能日期为：

5 月 29 日；7 月 15 日；11 月 29 日；1 月 12 日

②计算正午太阳高度与经度

接下来类似于第二问的思路，找到中轴线与水平面的交点坐标

设坐标为 $(X,Y,0)$

通过与问题二类似的方法求解

$$(X,Y)=(258,-347)or(0.719,-2.3)$$

第二组解 $\delta_1 \bullet \delta_2 > 0$ ，说明与太阳直射点在一个半球上

使用解 $(X,Y)=(0.719,-2.3)$

可解得当地的纬度：

$$w=39.69^{\circ}$$

正午矢量：

$$\vec{\delta}_0=(-0.1954,0.6252,-2)$$

根据问题二的求法

$$\theta_{01}=28.74^{\circ}$$

通过几何关系的转换 θ_{01} 可以转换为真实的时间间隔

$$\theta_{01}'=30.95^{\circ}$$

可以求出当地的开始测试时间比正午早 124 分钟

通过与北京时间区时与北京时间比较可以求出该地的经度为 78.8° 。

当地位置为东经 78.8 度，北纬 36.69 度

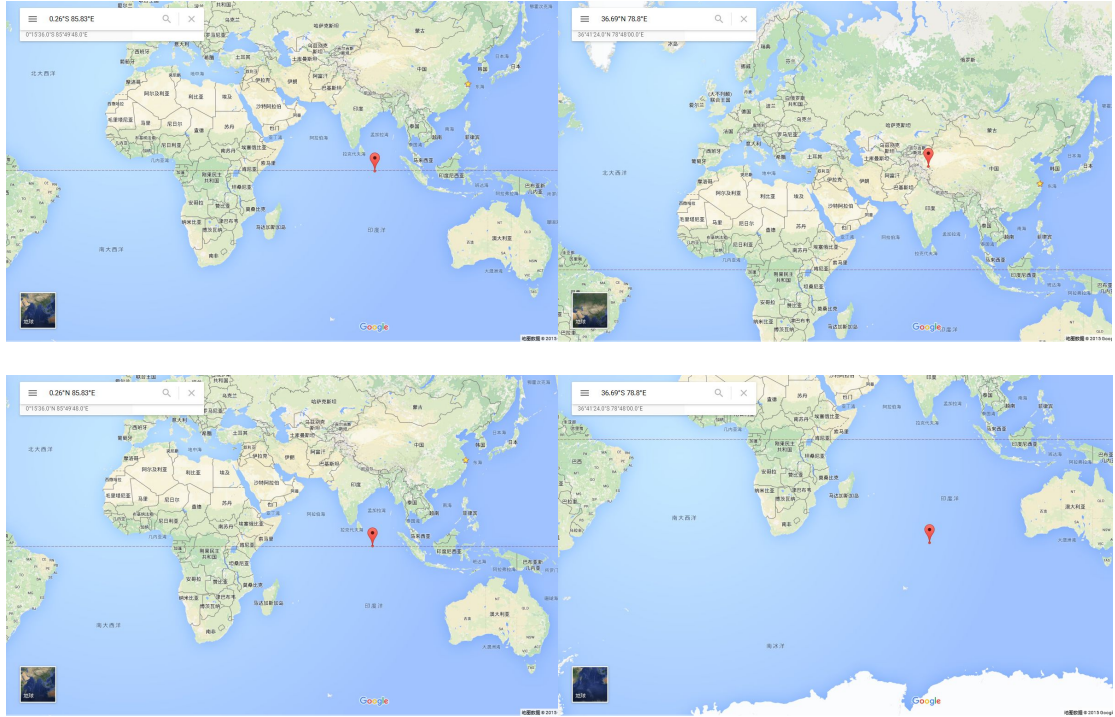
同理，当 $(X,Y)=(258,-347)$ 时

说明测试地点位于南半球，可得：

该地区为南纬 0.26° ，东经 85.83°

结论：

日期	经度	纬度
5 月 29 日	东经 78.8 度	北纬 36.69 度
7 月 15 日	东经 85.83 度	南纬 0.26 度
11 月 29 日	东经 78.8 度	南纬 36.69 度
1 月 12 日	东经 85.83 度	北纬 0.26 度



b. 求解附件 3

附件 3 的情况较为特殊，杆子的原点在轨迹之外，但对与圆锥曲线的求解方法依然适用
其时间间隔为 1 小时，由于有两个未知量，我们可以先确定杆长，由问题二所得到的结论两
组间隔相同时间的 $\vec{\delta}$ 所形成的夹角相同

做出以半小时为时间间隔的向量即 $\vec{\delta}_1$ 、 $\vec{\delta}_2$ 、 $\vec{\delta}_3$ 。两角度表达式为 θ_{12} 、 θ_{23}

$$\theta_{12} = \theta_{23}$$

由

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

可以解得

$$L=3.01\text{m}$$

可以反解出太阳直射纬度

$$\cos(\theta) = 0.9925$$

$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{\sin(3.75^\circ)}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma_0)}}\right)$$

解得

$$\gamma_0 = 20.56^\circ$$

于是可以求出当时的日期的可能值为：
5 月 23 日；7 月 15 号；11 月 24 日；1 月 18 日
我们可以设当时太阳直射于北半球
得到锥角后就可以用问题二的办法求出中轴线

最终可以求得中轴线与水平面的交点为 $(X,Y)=(-0.98,-5.42)or(0.33,-1.22)$

当选取第一组解时，实验地点在南半球上：
由此可得该地的纬度为

$$w=90-\arctan\left(\frac{0.98^2+5.42^2}{L}\right)$$

代入可得：
位置为南纬 28.56°

可以求得正午的投影矢量 $\vec{\delta}0$

$$\vec{\delta}0=(0.6166,3.4103,-3)$$

与 $\vec{\delta}1$ 呈 5.64°
使用

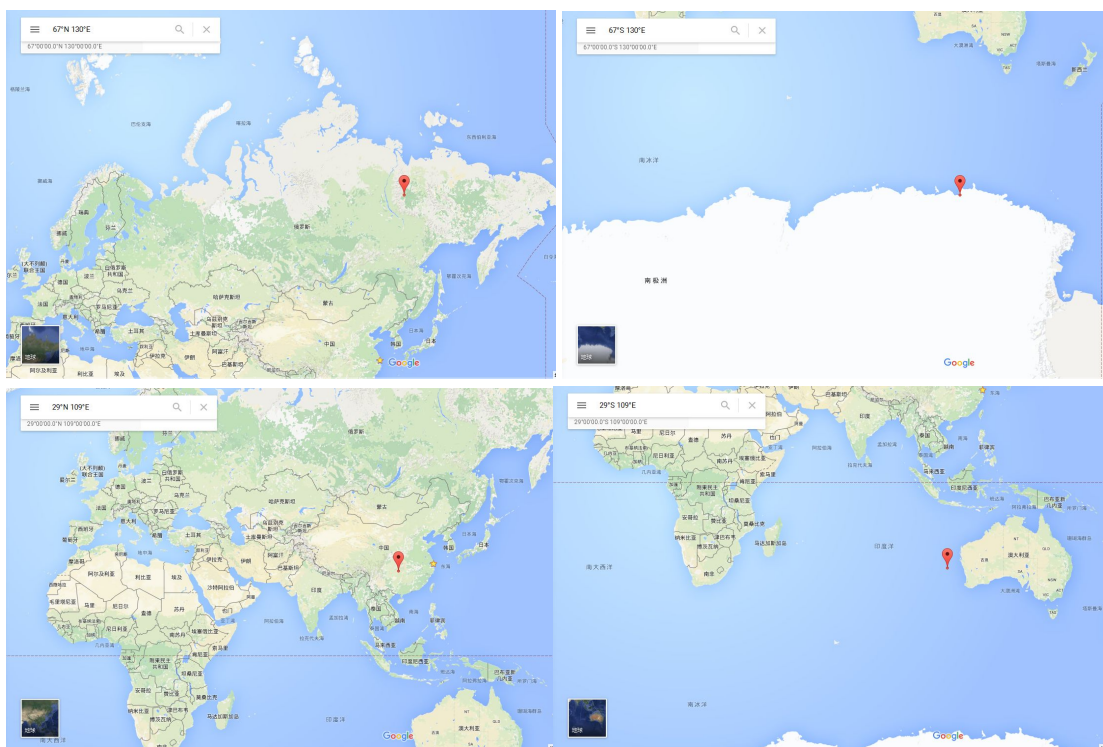
$$\theta=2\arcsin(\frac{\sin(\frac{\theta'}{2})}{\sqrt{1+\tan^2(\gamma_0)}})$$

求出 $\theta'=6.02$ ，由此可得当地时间为 12:24，与北京时间进行比较可得经度为 120° -11.15°
=108.75°
地理位置为：东经 108.75°，南纬 28.56°

当选取第二组解时
用类似于问题二与附件二的解法，可以得到：
该地的纬度为北纬 67.16°，
该地的经度为东经 130°

附件 3 结论：

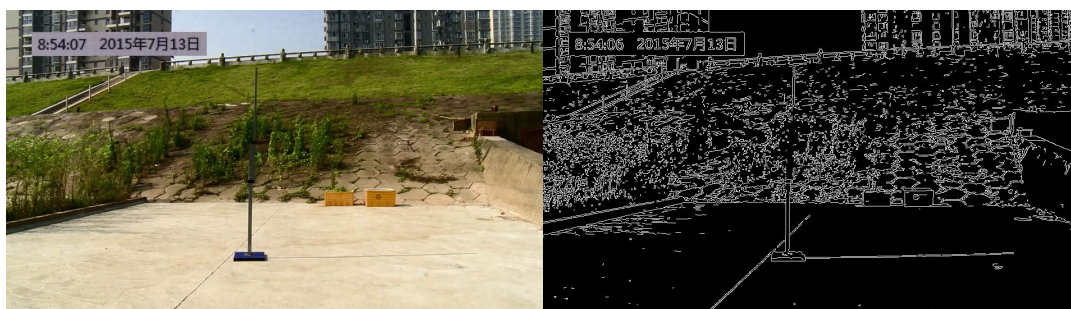
5 月 23 日	东经 130 度	北纬 67 度
7 月 15 日	东经 109 度	南纬 29 度
11 月 24 日	东经 130 度	南纬 67 度
1 月 18 日	东经 109 度	北纬 29 度



4.4 问题四

4.4.1 模型的准备

- 将视频中的视频格式转换为一分钟间隔的图片格式，方便后续处理。
- 通过摄影几何分析，默认摄影机成像的中心轴过所给视频的中心。
- 假设：杆与水平面垂直，并且，在距离变化不大的前提下，水平线的线密度是均匀的。



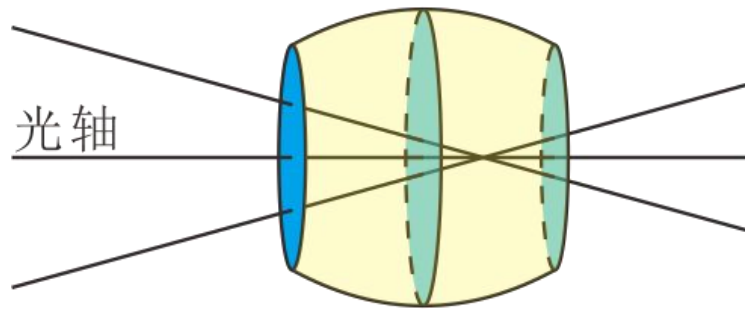
4.4.2 视频信息的提取与转换

由于在图中唯一可以确定的是杆位于竖直的状态，为了能够得到坐标信息，主要要做的就是建立杆的局部坐标系（Z 轴为杆的方向）。

在确立坐标系前，我们可以分析图中所隐含的信息，首先我们可以确定镜头的光轴特性

①光轴的特性

我们将照片的对角线相连，求出其中的交点，我们可以发现两大基本性质
光轴示意图：



性质一：光轴与地面水平

我们将远处的楼房竖直轴线提取出来，发现其严格保持平行，由于楼房与地面垂直，如果光轴不与楼面垂直，根据透视原理会交于一点。

性质二：竖直杆的中点与光轴在同一水平面

示意图：

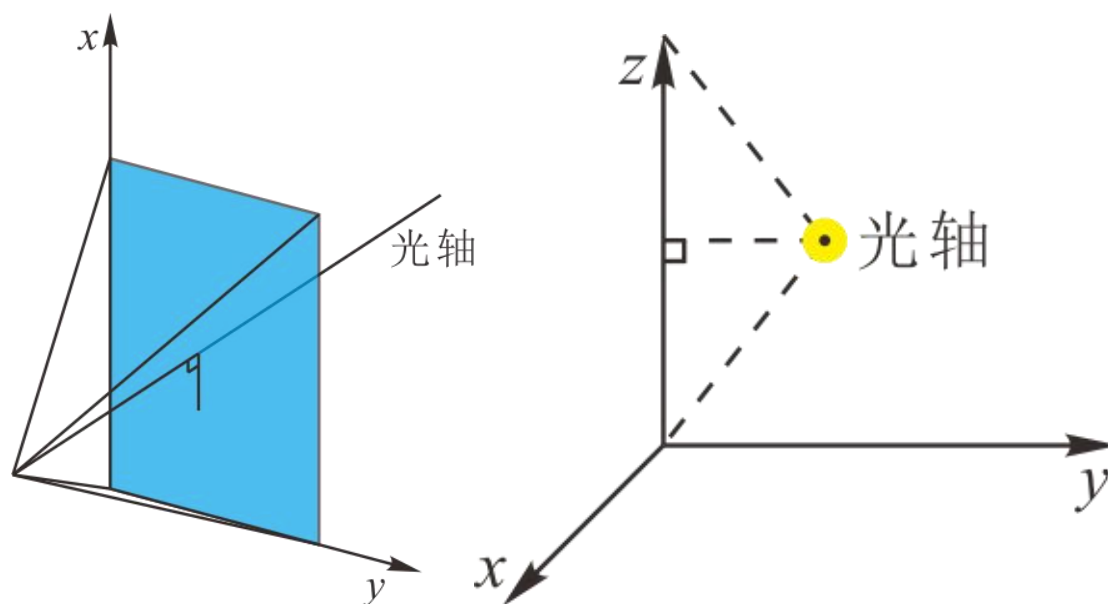


由于 X 轴， Y 轴的方向可以任意选取，我们不妨设 Y 轴的方向为水平向右的。

这样做的话可以有两个好处。

① Y 轴的线密度与 Z 轴相同

证明：由于 Y 轴与 Z 轴处于同一平面 YZ 平面上，且保持直角关系，可以证明 YZ 平面与光轴垂直得证。为了更直观表示，参见示意图（左下）



②X 轴的方位确定

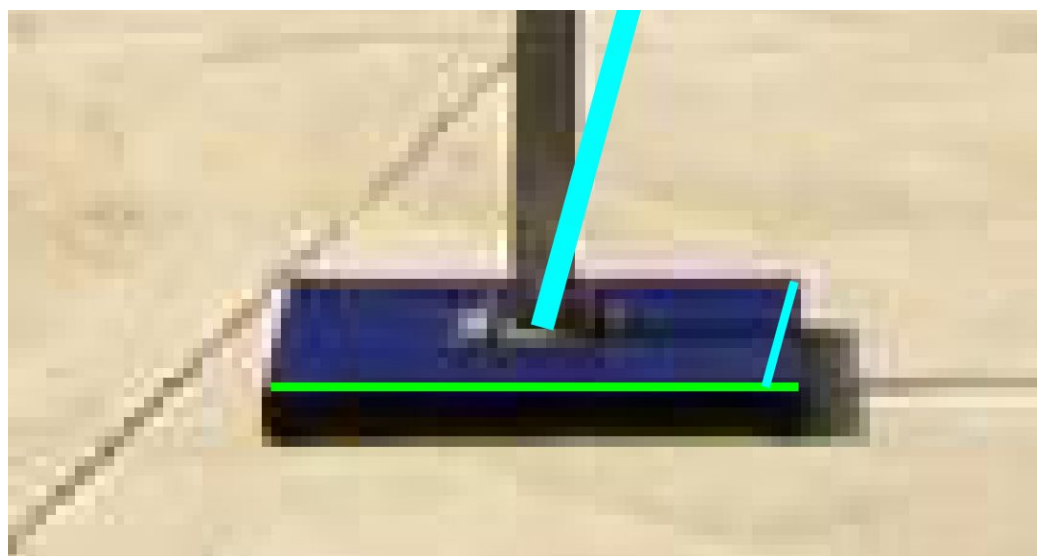
根据透视关系图，光轴垂直于 YZ 平面，则与 X 轴平行，在原图上根据透视关系表示为一条过中心的线。参见示意图（右上）

4.4.3 模型的计算

X 轴线密度的确定：

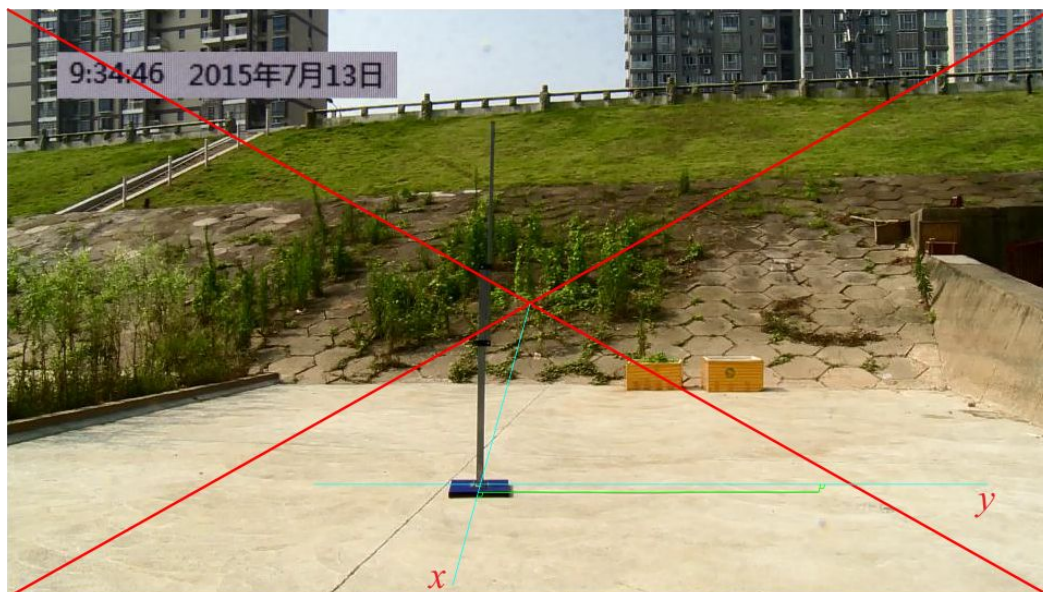
由于不知道 X 轴的线密度，我们使用了正方形的底座作为一个检验的工具，经过比例计算可以得出该处的线密度大约为 6 倍 Y,Z 轴的线密度。

示意图：



坐标的确定：

通过几何制图方法，见示意图：



①时间已知情况

我们计算了 3 个时刻的位置坐标

8:54:06	$(-0.08262, 2.43995, 0)$
9:13:36	$(0.080556, 2.15759, 0)$
9:34:46	$(0.228648, 1.89704, 0)$

杆顶的坐标为 $(0,0,2)$ ，可以求出中轴线与水平面的交点 $(X,Y,0)$

解法与问题三类似

最终得到的结果为 $(X,Y) = (2.89, 0.15) \text{ or } (28, -16)$

当取 $(X,Y) = (28, -16)$ 时位置应处于南半球 $w = 3.5^\circ$ 。求得正午的影子矢量

$\vec{\delta}_0 = (0.84, -0.48, -2)$ ，换算为正午到开始实验的矢量夹角 $\theta = 66.82^\circ$ ，时差角

$$\theta' = 72.76^\circ$$

当地时间为 7:09，与北京时间对比可得

经度为东经 94 度，南纬 3.5 度

当 $(X,Y) = (2.89, 0.15)$ 时 $w = 35^\circ$ ，求得正午的影子矢量 $\vec{\delta}_0 = (0.467, 0.025, -2)$ ，换算为

正午到开始实验的矢量夹角 $\theta = 52^\circ$ ，时差角 $\theta' = 56^\circ$

当地时间为 8:14，与北京时间对比可得

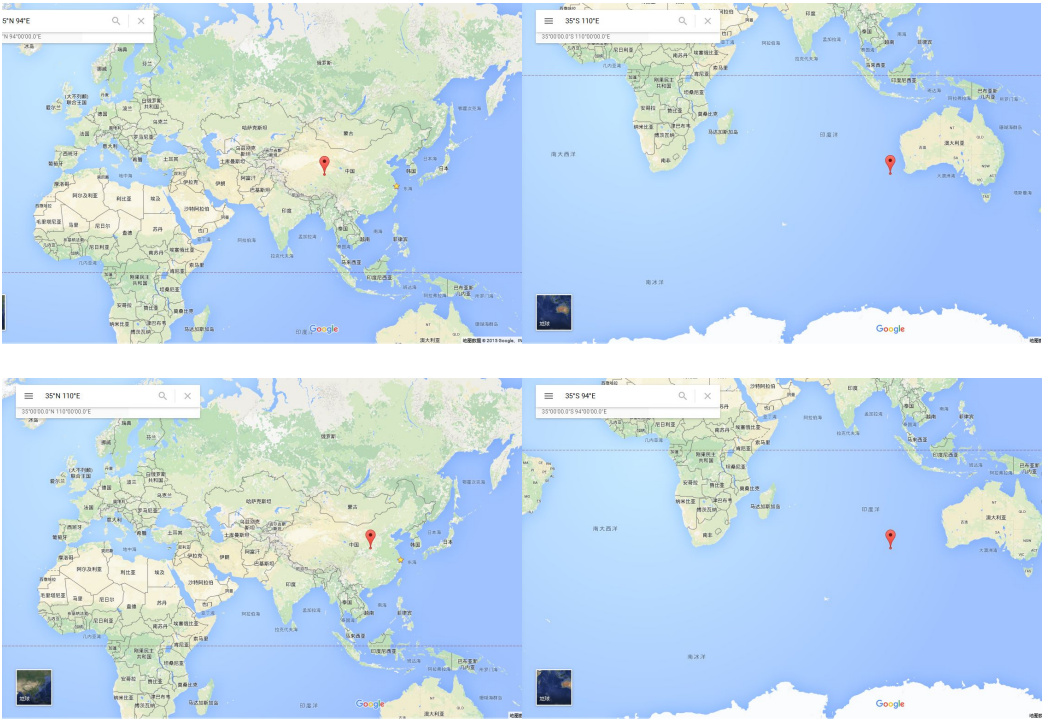
经度为东经 110 度，北纬 35 度

可能的地点有
东经 88 度北纬 35 度
东经 94 度南纬 3.5 度

②时间未知情况
若拍摄时间未知我们可以像问题那样，先求出锥角，后根据锥角确定日期，其余做法与知道拍摄时期时一致。
这里我们可以根据对称性求得其他的可能的日期：
5 月 30 号，12 月 1 号，1 月 11 号

结论：

5 月 30 日 7 月 13 日	东经 110 度	北纬 67 度
	东经 94 度	南纬 3.5 度
12 月 1 日 1 月 11 日	东经 110 度	南纬 35 度
	东经 94 度	北纬 3.5 度



五、误差分析

- a. 问题一的模型中可能产生的误差主要在于移动转轴时产生的误差，不过由于地球半径远小于日地距离，可以忽略不计。模型的优点在于简单，直观，充分利用了坐标变换所带来的计算简化。
- b. 问题二的模型中采取了矢量夹角得计算，当太阳直射纬度较小时可能会将误差放大。另

外取样点较少，对个别点较为敏感也是误差产生的原因。但模型的解法思路比较流畅，环环相扣，严密性较强。

- c. 问题三与问题二较为类似，不过需要另外求解出太阳直射纬度，从而放大了误差。但该模型可以作为问题二模型的拓展。
- d. 问题四主要误差来自于原始数据处理的准确性，在处理原始视频数据时用到了近似，在确定轴之间线密度时精确性不高。但本质上能准确还原三维中的位置，与问题三的连接较为缜密。

六、附录

计算机程序见附件

图片见附件

图像识别数据见附件