模糊集合理论的发展

管野道夫 著　孙 章　金晓龙 译

一、前　言

十来年前，加里福尼亚大学的L·A·柴德教授提出了模糊集合的概念，它是普通集合的拓广。目前，在日本研究所谓"暧昧理论"的人激增；在世界范围内这方面的论文也很多，模糊集合的思想已甚为风行。由于给我指定的题目是"理论的发展"，要增添其他内容就相当困难，所以本文仅就模糊集合论加以说明。至于以模糊集合为基础的模糊代数，请参阅水本雅晴的大作[6]。

二、模糊集合的定义

设X为普通意义下的任一集合。记X的元为x。X的子集合E，可由下面定义的函数给出：

$$\chi: X \to \{0,1\} \tag{1}$$

也就是说，若$x\in E$，则$\chi_E(x)=1$；若$x\notin E$，则$\chi_E(x)=0$。

反之，也可记作

$$E=\{x \mid \chi_E(x)=1\} \tag{2}$$

$$E^c=\{x \mid \chi_E(x)=0\} \tag{3}$$

X的子集间的运算和关系可以换成函数χ的运算和关系，即存在着下列对应：

$$E\cup F \Longleftrightarrow \chi_E \vee \chi_F \tag{4}$$

$$E\cap F \Longleftrightarrow \chi_E \wedge \chi_F \tag{5}$$

$$E^c \Longleftrightarrow 1-\chi_E \tag{6}$$

$$E\subset F \Longleftrightarrow \chi_E \leqslant \chi_F \tag{7}$$

$$E=F \Longleftrightarrow \chi_E = \chi_F \tag{8}$$

这里，$\vee$与$\wedge$分别表示max和min。容易证明，关于$\cup$和$\cap$的结合律、分配律等，若换成$\vee$和$\wedge$后依然成立。

对于(4)式和(5)式，也可表作

$$E\cup F \Longleftrightarrow \chi_E+\chi_F-\chi_E\cdot\chi_F \tag{4'}$$

$$E\cap F \Longleftrightarrow \chi_E\cdot\chi_F \tag{5'}$$

若以这样定义的函数来看上述集合，它们都是些象0和1那样能清楚区分的集合。然而，当我们注意到想要区分事物的认识主体时，情况就稍有不同了。事实上，我们常常说到的往往是些与外界不能清楚区分开来的集合。试看一个被一再引用的例子——"富有魅力的女性集合"。在说到这个集合时，我们并不感到别扭；可是所谓"富有魅力者"，当然是个带有主观性、因人而异的概念，而且，它和与它相对立的"没有魅力的女性集合"之间，无法划定明确的界线。

这样一来，虽然对包含在集合内部的事物、或与外界相对应的它的对立面都有所规定，但由于我们自有主张，所以往往会略微超出规定的界线。也就是说，我们得留意作为相同概念来使用的“区分”这个词，如“我来区分”和“你来区分”就有差异(对幼儿来说，即使对于普通集合——例如“自然数的集合”，他们也不能加以区分)。因此，为了得到尚未能确定的“富有魅力的女性集合”，就要把原来的集合概念加以推广，这就是模糊集合。这对于缺少理性思维的人来说也不会感到困难。

按柴德的定义，“所谓X中的模糊集合(类) A，就是用X中各点x在实数区间$[0,1]$上对应的从属函数$h_A(x)$来表征的集合。”由x和$h_A(x)$的有序对的集合来表示模糊集合十分方便，也即

$$A=\{(x,h_A(x))\}。\tag{9}$$

当然，从属函数$h_A(x)$是定义函数$\chi_E(x)$的拓广，它表示x属于模糊集合A的从属程度。设X为所有女性的集合，而A为由主观确定的“富有魅力的女性的集合”，任一女性x的$h_A(x)$大，则表示主观上认为她的魅力大。

在上述定义中，由于在说明模糊集合A时又用到了A，也没有加以说明(或者说没有用归纳法)，因而不太严格。也可定义如下：

试考虑$h:X\longrightarrow[0,1]$这一映射的全体$[0,1]^X$。“给$[0,1]^X$中的元素h标号，例如记为A，称它为(X的)模糊(子)集合A。”X的全部子集的集合，也就是众所周知的幂集合2^X，它与χ: $X\longrightarrow\{0,1\}$这一映射的全体$\{0,1\}^X$同构，也即

$$2^X\sim\{0,1\}^X\tag{10}$$

X的全部模糊子集的集合用$\tilde{2}^X$表示，显然，它与$[0,1]^X$同构，也即

$$\tilde{2}^X\sim[0,1]^X\tag{11}$$

由于$\{0,1\}^X\subset[0,1]^X$，可得

$$2^X\subset\tilde{2}^X\tag{12}$$

模糊集合可用映射$h:X\longrightarrow[0,1]$表示，若再把它拓广，就能得到L-模糊集合[2]这一概念。用一般的格L来代替区间，就可定义“h: $X\longrightarrow L$(这样的)映射h为L-模糊集合”。这如同在表示集合E时曾把定义函数χ_E叫作集合一样；为此，必需改变集合这一词的含意，想来大家都能理解这一推广了的概念。

无论何种定义，都不得不接受这样的规定：模糊集合常常是某一个非模糊集合扩张后的子集(起初曾考虑过能否把模糊集合跟非模糊集合在同一等级上加以定义，这个问题虽然有趣，但它与数学的基础理论有关，已超出了作者力所能及的范围)。

对于模糊集合的并、交、补、包含关系等可由从属函数间的运算来定义：

$$A\cup B\Longleftrightarrow h_A\vee h_B\tag{13}$$

$$A\cap B\Longleftrightarrow h_A\wedge h_B\tag{14}$$

$$A^c\Longleftrightarrow 1-h_A\tag{15}$$

$$A\subset B\Longleftrightarrow h_A\leqslant h_B\tag{16}$$

$$A=B\Longleftrightarrow h_A=h_B。\tag{17}$$

在非模糊集合中，$E\cup E^c=X$，$E\cap E^c=\phi$成立；而在模糊集合中一般说来，$A\cup A^c\neq X$，$A\cap A^c\neq\phi$。除此以外，$\cup$、$\cap$、c的通常运算法则都能满足。关于并与交，和(4′)、(5′)式对应，有

$$A \oplus B \Longleftrightarrow h_A + h_B - h_A \cdot h_B \tag{18}$$

$$A \cdot B \Longleftrightarrow h_A \cdot h_B \tag{19}$$

把它们分别叫做代数和与代数积。

如果把模糊集合论仅仅看作定义函数的扩张，那就太单纯，从理论上深入探讨的余地也就没有了；然而，引入这种思想和模糊性概念无疑是个杰出的成就。关于模糊集合论的应用有两种类型：一是把用非模糊集合记述的东西换成模糊集合；另一类则是应用模糊性的概念。例如，模糊关系[1]这一概念就是前者的典型例子；而后者可以举出模糊算法[8]作为例子。

三、模糊性的概念

在模糊集合论中，最重要的、也是唯一的概念就是模糊性概念；查德把它和概率论中的随机性概念加以比较。这里，随机性这个词意味着在概率现象中所见到的对象性质的不确定性；而模糊性与随机性有着不同的含意，它起因于人的主观性，与其说它取决于对象的性质、还不如说它意味着属于主观认识方面的暧昧性（某特定的女性是否富有魅力，这个问题带有模糊性，而并不具有随机性）。在模糊集合论中，具体地说就是用"在模糊集合中 x 的从属程度"这一概念来表示模糊性。模糊性和人类丰富的认识能力相结合，就能得到模糊集合的概念。这里包含着必然性。

如果用不确定性这个词来表示不确实知道的事物或事件，那末由于模糊集合论的提出，不确定性就大致分成了随机性（客观的不确定性）与模糊性（主观的不确定性）两大类。一方面，在概率论中有主观概率这一概念，虽然它也表示主观的不确定性，但它还是产生于跟概率现象具有相同等级的理性的主观性；模糊性跟它则稍有不同。总而言之，模糊性这个概念，可以说是"在主体与对象之间的错综复杂关系之中，被窥见的暧昧程度"。

为把随机性和模糊性进行一般的比较，往往将模糊集合 A 的从属函数 $h_A(x)$ 与概率〔精确地说，是概率的密度函数 $\rho(x)$〕进行直接对比；然而这不能说是很好的比较。因为 $h_A(x)$ 毕竟是非模糊集合的定义函数的拓广，而 $\rho(x)$ 与集合无关〔再有，$\int \rho(x)dx = 1$；然而对 $h_A(x)$ 不必要求 $\int h_A(x) = 1$，就跟不必有 $\int \chi_E(x)dx = 1$ 一样〕。模糊集合与概率论之间的关系，还不如说包含在"含糊现象[4]"这一概念之中。

用 $\mathscr{B}$ 表示 X 的波雷耳集合，P 为 $\mathscr{B}$ 上定义的概率测度，那末，在概率空间 $(X, \mathscr{B}, P)$ 中，把具有 $\mathscr{B}$-可测从属函数的模糊集合称为模糊事件（或波雷耳模糊集合）。由于 $\mathscr{B}$ 的元素非模糊集合 E 被称为事件，模糊事件的含义也就不难理解了。用 $\mathscr{B}$ 记 $\mathscr{B}$ 中具有 $\mathscr{B}$-可测从属函数的 X 的所有模糊子集，称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{B}$ 的模糊扩张，$\mathscr{B}$ 仍保存 $\mathscr{B}$ 的性质（对可数的 $\cup$、$\cap$ 以及补运算封闭）。

现在，由

$$\tilde{P}(A) \triangleq \int_X h_A(x)dp \tag{20}$$

来定义 $\tilde{B}$ 上的集合函数 $\tilde{P}(\cdot)$，$\tilde{P}(A)$ 就被称为模糊事件 A 的概率。由于非模糊事件 E 的概率可表示为

$$P(E) = \int_X \chi_E(x)dp \tag{21}$$

$\widetilde{P}(\cdot)$就能看作是 $P(\cdot)$的扩张。实际上在$\mathscr{B}$中 $\widetilde{P}(\cdot)=P(\cdot)$。这样，作为概率空间 $(X,\mathscr{B},P)$的扩张，便可得$(X,\mathscr{B},\widetilde{P})$。关于 $\widetilde{P}$，具有和P相同的关系，例如下列等式成立：

$$\widetilde{P}(A^c)=1-\widetilde{P}(A) \tag{22}$$

$$\widetilde{P}(A\cup B)=\widetilde{P}(A)+\widetilde{P}(B)-\widetilde{P}(A\cap B) \tag{23}$$

对于随机性，我们已有测量它的程度的概率测度。关于模糊性，有人也提出了模糊测度这一概念(因为不具有可加性，严格说它不是测度)。模糊测度是在$\mathscr{B}$上定义的集合函数，它具有下列性质：

(1) $g(\phi)=0$，$g(X)=1$

(2) 若 $A\subset B$，则$g(A)\leqslant g(B)$

(3) 若$\{A_n\}$为对于 n 的单调序列，则

$\lim\limits_{n\to\infty} g(A_n)=g(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$。

概率测度 $P(\cdot)$因为具备 $g(\cdot)$的所有性质，所以可看作是模糊测度的一种。这里，模糊测度一般解释为计量模糊程度的主观性测度(与主观概率相似，但更带随意性)。模糊集合论的从属程度这一概念，可以看作是模糊测度论的模糊程度概念的特例[15]。至此，随机性与模糊性就可以在同一等级上进行比较。

四、模糊集合的运算

如在第二节中叙述的那样，存在着模糊集合的并及交的定义是否唯一这个问题。我们感觉到，用$\vee$定义并、用$\wedge$定义交要比代数和、代数积的意义更为清楚。即使不是唯一的定义，也不应把非模糊集合的并、交等随意地代数地扩张。这里，必须要有现实性。那么，在$\vee$与$\wedge$的定义中有着怎样的现实性(或合理性)呢？R·贝尔曼、M·基尔茨、L·W·冯和K·S·傅等人对此都有研究。这里首先介绍贝尔曼等人的成果。以

$$F=\{[S,\mu(S)]\} \tag{24}$$

表示命题S的模糊集合。从属程度 $\mu(S)$表示S的确切程度、或表示S被接受的程度。这时，由两个不同的命题S和T就能构成 (S 与 T)，(S 或 T) 这样的复合命题。问题是需要研究 $\mu(S$ 与 $T)$，$\mu(S$ 或 $T)$ 和 $\mu(S)$，$\mu(T)$之间的关系。

设

$$\mu(S\text{ 与 }T)=f(\mu(S),\mu(T)) \tag{25}$$

$$\mu(S\text{ 或 }T)=g(\mu(S),\mu(T)) \tag{26}$$

那么，二变量函数 $f,g:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$应该具备怎样的性质呢？自然可举出下面六条作为$f$和$g$的条件：

(1) f和g是关于二个自变量的不减连续函数。

(2) f和g是关于二个自变量的对称函数。

(3) $f(x,x)$ 和 $g(x,x)$是严格的递增函数〔例如，若 $\mu(S_1)=\mu(S_2)>\mu(S_3)=\mu(S_4)$，则有 $\mu(S_1$ 与 $S_2)>\mu(S_3$ 与 $S_4)$〕。

(4) $f(x,y)\leqslant x\wedge y$，$g(x,y)\geqslant x\vee y$。

(5) $f(1,1)=1$，$g(0,0)=0$。

(6) 逻辑上相等的复合命题，其μ值相等〔例如，S_1 与 (S_2 或 S_3) = (S_1 与 S_2)或(S_1 与 S_3)〕。

根据(1)～(6)的条件，可推出 $f(x,y)=x\wedge y, g(x,y)=x\vee y$，也即

$$\mu(S与T)=\mu(S)\vee\mu(T) \tag{27}$$

$$\mu(S或T)=\mu(S)\wedge\mu(T) \tag{28}$$

另一方面，对补运算是否有唯一定义呢？同样，以

$$\mu(非S)=N(\mu(S)) \tag{29}$$

试考虑函数 N，自然的限制是

(1) $N(0)=1, N(1)=0$；

(2) N是连续的、严格地单调减函数；

(3) $N[N(\mu)]=\mu$。

此外，即使加上 $N\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$这一条件，也不一定能得到 $N(x)=1-x$ 这一结论。这使人想起前面的例子，即使某人主观上认为有魅力的女性集合为模糊集合 A、以没有魅力的女性集合作为A的补集，也不能保证后者的特性是 $1-h_A$。为此，需引入一个 $\lambda-$补集合[9]的概念。所谓A的 $\lambda-$补集合，是以

$$h(x)=\frac{1-h_A(x)}{1+\lambda h_A(x)}, \ -1<\lambda<\infty \tag{30}$$

作为从属函数的模糊集合，记作 $A^{c\lambda}$。这一定义满足上述的条件(1)～(3)，对于非模糊集合，因为

$$\frac{1-\chi_E(x)}{1+\lambda\chi_E(x)}=1-\chi_E(x) \tag{32}$$

所以可推得

$$E^{c\lambda}=E^c, \ -1<\lambda<\infty。 \tag{31}$$

λ是参数，用它能在某种程度上表现在求补关系中的主观随意性。

接着介绍 L·W·冯等人[13]对同一问题的研究。试考虑如何根据某一团体内各人的兴趣爱好，来决定该团体的共同意志。如果用某个行动空间的模糊集合来表示每个人的爱好，那么该团体的决策就归结为如何汇总各模糊集合的问题。设行动空间为D，某人所爱好、同意的行动集合构成的模糊集合，以 $f_A(a), a\in D$ 为从属函数。设另一个人相应的从属函数为 $f_B(a)$，两个人共同决策则由二元运算 $f_A(a)$。$f_B(a)$给出。这里，$f_A:D\to S$，S 即使不是[0, 1]区间也可以。用$\mathscr{F}$表示D的模糊子集的族时，$\oplus:\mathscr{F}\times F\to\mathscr{F}$ 称为归并。下面给出关于S及归并的公理：

(公理 1)　S是由线性顺序≤引入拓扑的连结整列拓扑空间。

(公理 2)　在下述的S中，存在着连续的二元运算“$\circ$”：

$$A_1\oplus A_2=\{[a, f_{A_1}(a)\circ f_{A_2}(a)], a\in D\}$$

(公理 3)　$A\oplus A=A$

(公理 4)　$A\oplus B=B\oplus A$

(公理 5)　$A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_m=(A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_{m-1})\oplus A_m$

(公理 6)　设 $A_1=B\oplus C_1, A_2=B\oplus C_2$，那么若 $C_1\supset C_2$，则有 $A_1\supset A_2$。

公理3～6也能改写为S中的二元运算。例如公理6也可表作：设 $b, c_1, c_2\in S$，若 $c_1\geqslant c_2$，则 $b\circ c_1\geqslant b\circ c_2$。

（公理 7） 存在作为 S 的下界 0 的元素 α，对于在 $0 \leqslant x < \alpha$ 中的所有 x，$0 \circ x = 0$ 成立。

（公理 8） 存在作为 S 的上界 1 的元素 β，对于在 $\beta < x \leqslant 1$ 中的全部 x，$1 \circ x = 1$ 成立。

以下定理成立：

〔定理 1〕 若满足公理 1～6，$a \circ b$ 为 $a \wedge b$ 或 $a \vee b$ 或它们的混合型（混合型这里不作介绍）。

〔定理 2〕 若满足公理 1～5 及公理 7，则 $a \circ b = a \wedge b$；若满足公理 1～5 及公理 8，则 $a \circ b = a \vee b$。

试看区间[0,1]，它有公理 7、8 中的下界与上界，且与 S 同相，所以作为二元运算的∨与∧是允许的。

这样，由∨和∧来定义并和交的合理性已用两种方法加以说明；剩下的问题只是这些条件或公理，究竟是否很好地表现了作为我们研究对象的现实世界。

五、从属函数的确定

想要在具体问题中应用模糊集合论，常常遇到的问题是如何确定（测定）从属函数。关于这个问题，还没有确立一般的方法；但已有下面的看法，即并不存在对任何问题、或者对任何人都适用的确定从属函数的方法，因为模糊集合说到底毕竟是依赖于主观随意性的东西。如果对不同个人都适用的确定方法早就已知的话，所谓"模糊性"也就不存在了。也有人认为模糊性过于依赖主观随意性，所以就没有什么确定的方法可言，L·W·冯和 K·S·傅[12]就是这样看问题的。

他们提出要减少"过渡的主观性"，有必要根据"合理的主观性"来确定从属函数。他们提出了

（1） 构成测定从属函数所需的尺度；

（2） 根据族来决定的方法；

然而，也没有提出具体的、有用的算法。那么，对于模糊性究竟应该怎么办才好呢？我们暂且撇开从属函数问题不谈。当测定或计量一般的主观性时，首先遇到的问题就是，能否在主观性本身的"波动"下，描画出一个不变的轮廓；这里的主观性是根据测定者给出的被检验者的一般环境、对被检验者的提问以及他所提供的资料等得出的。关于主观性，把它看成量子力学中的测不准原理不知是否恰当。（如果是这样的话，主观性就成了永远汲不尽的源泉，人对机器的优越性也就不可动摇的了。顺便说一下，相对于理性——合理性，心情、直观——主观性要置于更高的位置；在作为近代合理主义起点的 17 世纪、非合理主义的创始人巴斯噶曾经说过，心情作为一种认识方法确实高于理性。在模糊集合论中，这种非合理主义的主观性起着主要的作用。）

再回到本题上来。某一个从属函数可由其它从属函数合成得到，或者用间接方法确定。例如，当某一概念是其它几个初始概念的复合概念、或是其它概念的修饰概念时，只要基础概念的从属函数已经确定，通过适当的运算便能求得新概念的从属函数。这个方法，由于那些基础概念的从属函数大多很简单，所以具有易于测定这样的优点。而通过普通的加减等运算所得到的新从属函数，不知能否期待它日趋正确。对此我们可参考查德的研究[11]。例如，已经确定了"老人"这一模糊集合的从属函数，若能确定对修饰语"很"的附加运算，便可算出属于"很老的人"这一模糊集合的从属函数。

例如，对于 50 岁以上的人，设年龄为 x，就有

$$h_{老人}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{x-50}\right)^2} \tag{33}$$

$h_{老人}(60)=0.8$；如果修饰语“很”对应着运算

$$h_{很老的人}(x)=[h_{老人}(x)]^2 \tag{34}$$

则有 $h_{很老的人}(60)=0.64$。

如果使用在第三节中叙述过的模糊测度概念，就能得到如下的结果[14]。试考察某人所认为的“具有魅力的脸的集合”这一模糊集合。脸的要素（眼、鼻、口等）s 的集合记为 K，脸 a 的特征函数为 $p_a:K\to[0,1]$。这里，p_a(眼)的值大就意味着脸 a 的眼睛长得令人喜欢。在测定脸是否有魅力时，把表示对脸的各部重视度的主观测度记作 $g(\cdot)$。A 的从属函数就能用模糊积分[8]来表示，也即

$$h_A(a)=f_K p_a(s)\circ g(\cdot) \tag{35}$$

模糊积分是以下式定义的一种泛函数：

$$f_K p_a(s)\circ g(\cdot)=\sup^{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge g(K_\alpha)]$$
$$K_\alpha=\{s|_{p_a(s)\geq\alpha}\} \tag{36}$$

它是对应于概率期望的一个量，被称为由 g 确定的模糊期望。这种方法着眼于由某人主观确定的从属函数的内部构造。因为 $g(\cdot)$ 易于由实验确定，所以可以说 p_a 是客观地确定的。

六、结　　语

在模糊集合的研究中，也有人在考虑另一种依赖于时间的模糊集合[7]。设 $X(t)$ 为在时间 t 中的模糊集合，$X(t)$ 的依赖于时间的模糊集合 $A(t)$ 具有如下的从属函数：

$$\mu_{A(t),t}:X\to[0,1] \tag{37}$$

这种想法对表现随时间变化的主观性等是有效的。还有一个饶有趣味的模糊拓扑[5]的概念。在模糊拓扑中，虽然模糊开集系与通常的开集系是以同样方法定义的，但邻域概念不是指点邻域，而是换成了模糊集合邻域这一概念。这是因为不能用模糊集合来讨论包含或者不包含某一点的问题。但至今尚无能显示这方面优点的具体应用。

以上，以思想方法为中心进行了叙述。文章的题目是《理论的发展》，我写得平淡无味。我这枯燥的文字如对读者学习模糊数学有所帮助，真是不胜荣幸。有片面不当之处，恳请读者指正。在模糊理论的发展背景里，作为近代合理定义的对立面，在工科领域内有可能看到主观主义的复活，但为时尚早。

在“数理科学”杂志 1973 年 12 月号中有丰富的参考文献，请读者一并参阅。

〔システムと制御，19卷第五期 1975 年〕

（上接 24 页）

数论的这个分支过去经历过紧张活动的时期，接着是比较平静的时期，当前只处于迅速发展的时期，1976 年剑桥会议上反映出来的情形正是如此。最近几年的总结表明：Baker 方法在它产生十年之后，正如 Gel'fond 曾经预感的那样，仍然保持其惊人的多产性，其潜力看来还远远没有用尽。

〔*La Recherche* 1977 年 12 月 84 期 1059～1065 页〕