



(希赛)

# 数学与经济管理



## 课程内容提要

(希赛)

### ➤ 图论应用

- 最小生成树 (★★)
- 最短路径 (★)
- 网络与最大流量 (★)

### ➤ 运筹方法

- 关键路径法 (★★★★)
- 线性规划 (★★★★)
- 动态规划 (★★)
- 预测与决策 (★★★★)

### ➤ 数学建模 (★)

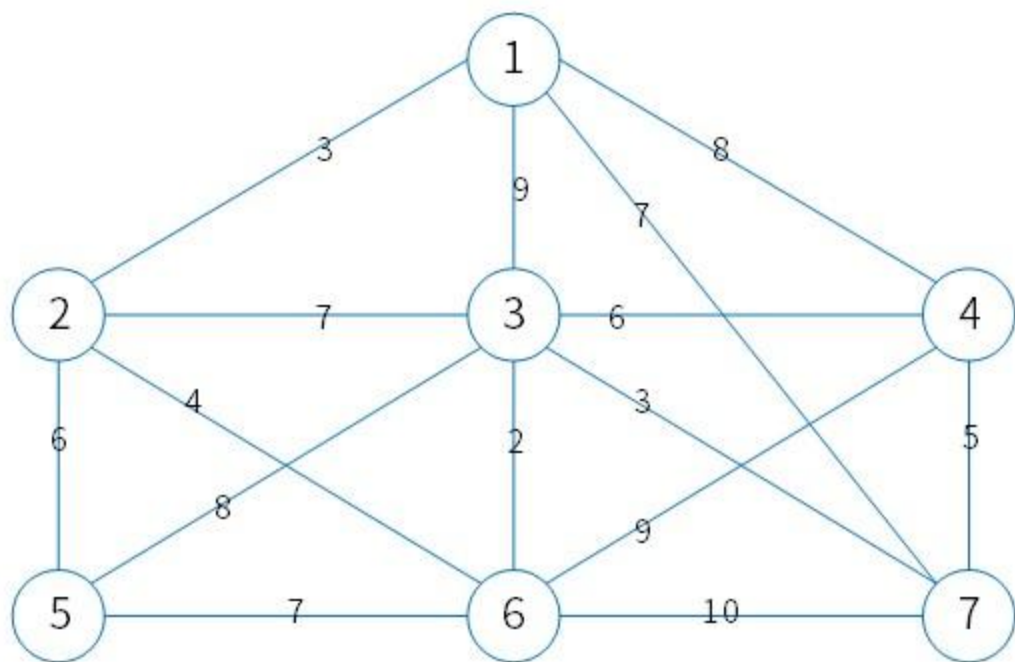


## 图论应用 - 最小生成树

(希赛)

★ 某小区有七栋楼房①~⑦（见下图），各楼房之间可修燃气管道路线的长度（单位：百米）已标记在连线旁。为修建连通各个楼房的燃气管道，该小区内部煤气管道的总长度至少为多少百米？

最小生成树：  
1、所有顶点接入  
2、没有回路  
3、权值之和最小

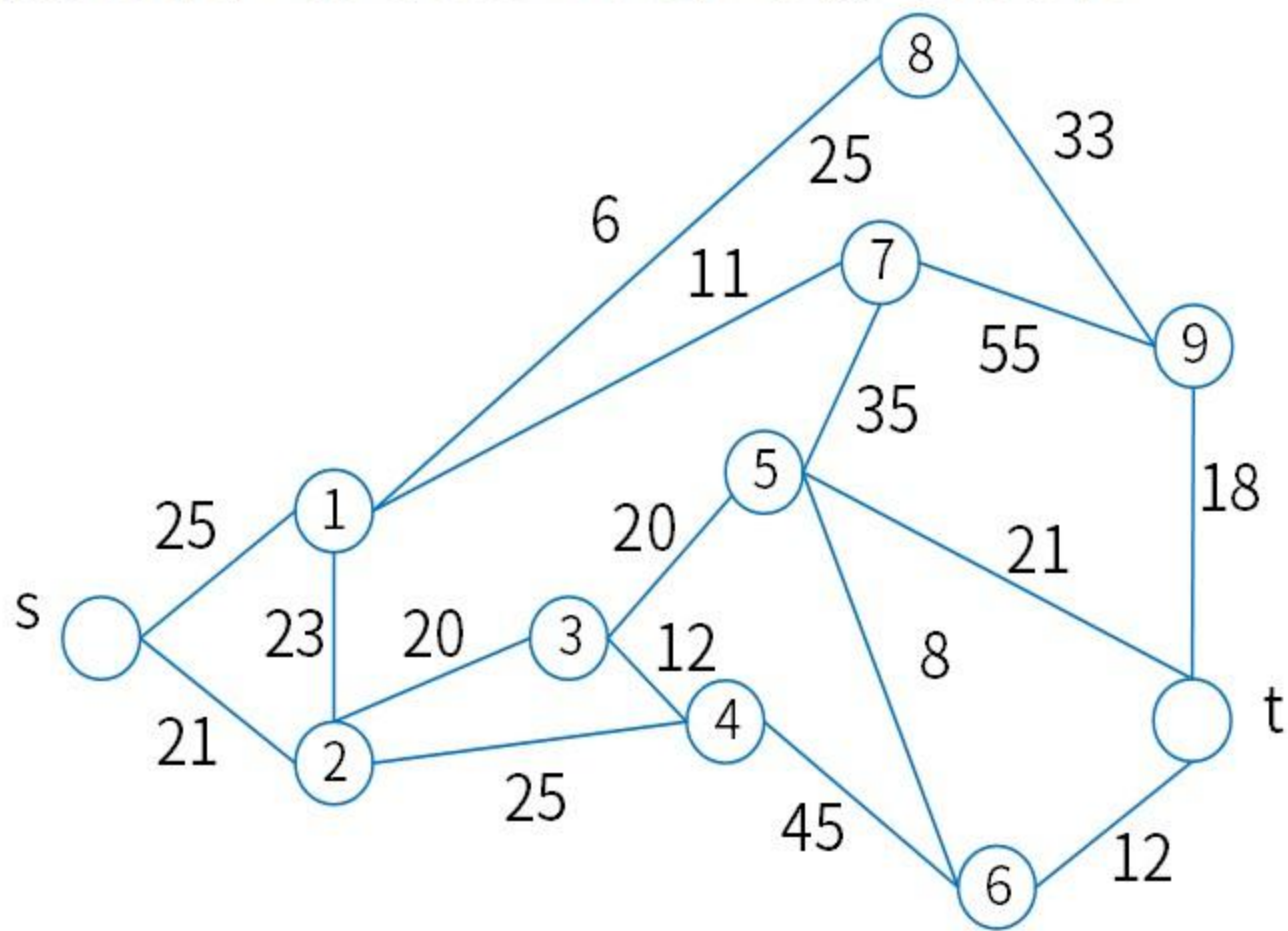




## 图论应用 – 最短路径

(一) 希赛

★ 有一批货物要从城市s发送到城市t，线条上的数字代表通过这条路的花费（单位为万元）。那么，运送这批货物，至少需要花费多少元？

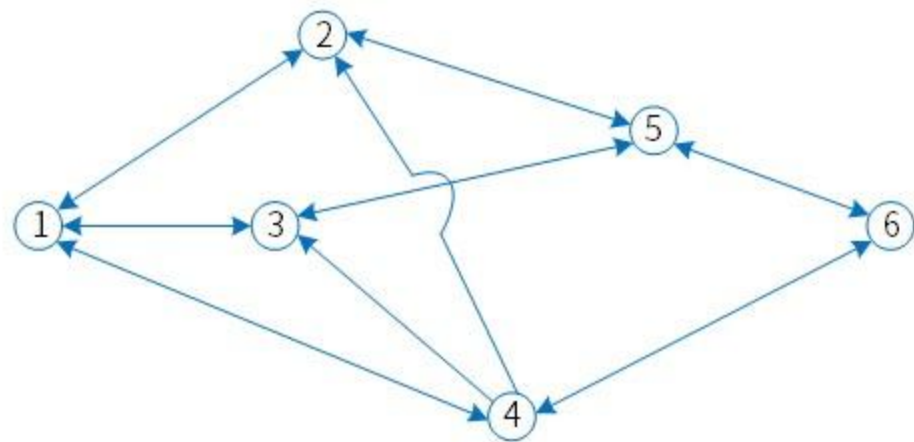




## 图论应用 – 网络与最大流量

(希赛)

★ 下图标出了某地区的运输网，各节点之间的运输能力如下表所示。那么，从节点①到节点⑥的最大运输能力（流量）可以达到多少万吨/小时？



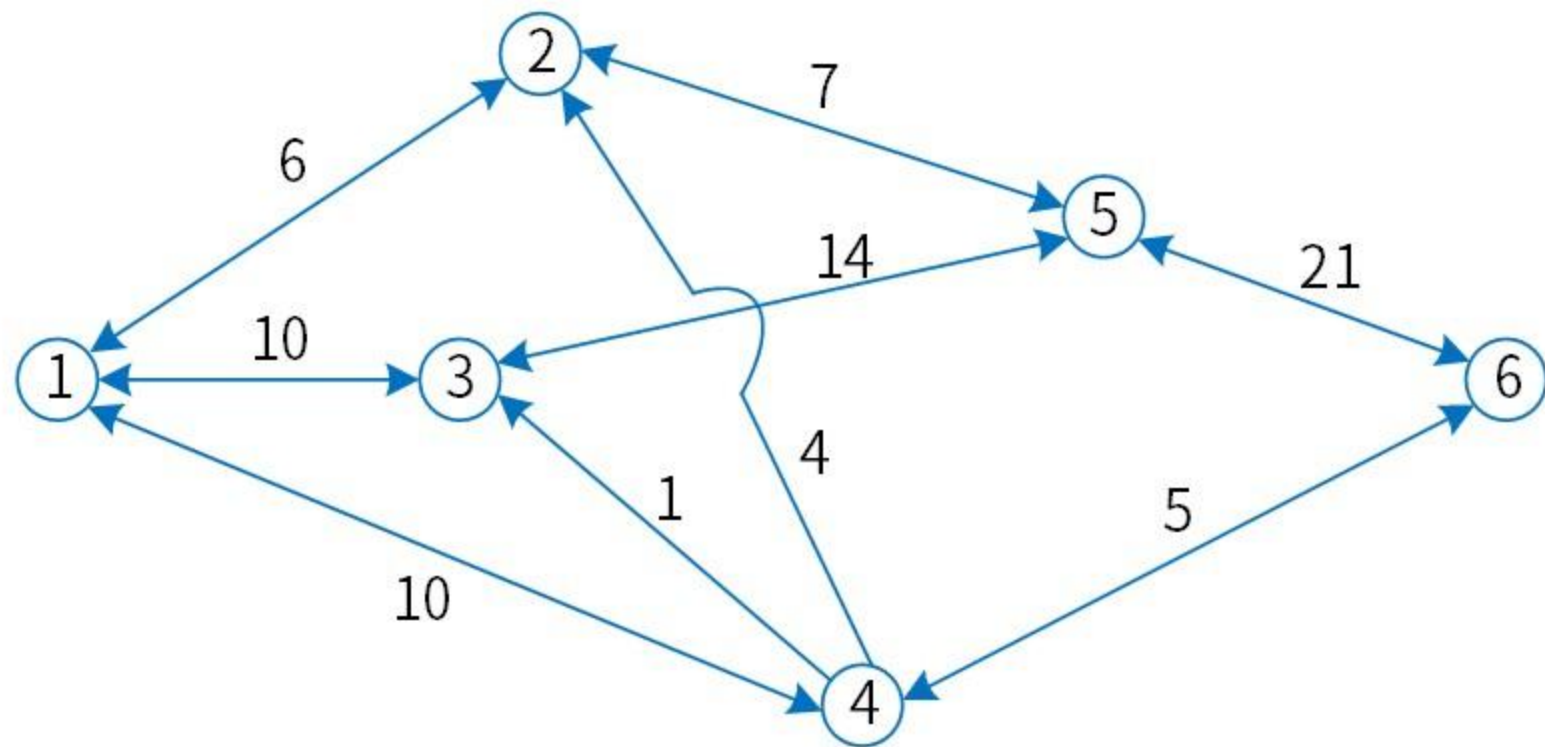
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		6	10	10		
②	6				7	
③	10				14	
④	10	4	1			5
⑤		7	14			21
⑥				5	21	





## 图论应用 - 网络与最大流量

(希赛)

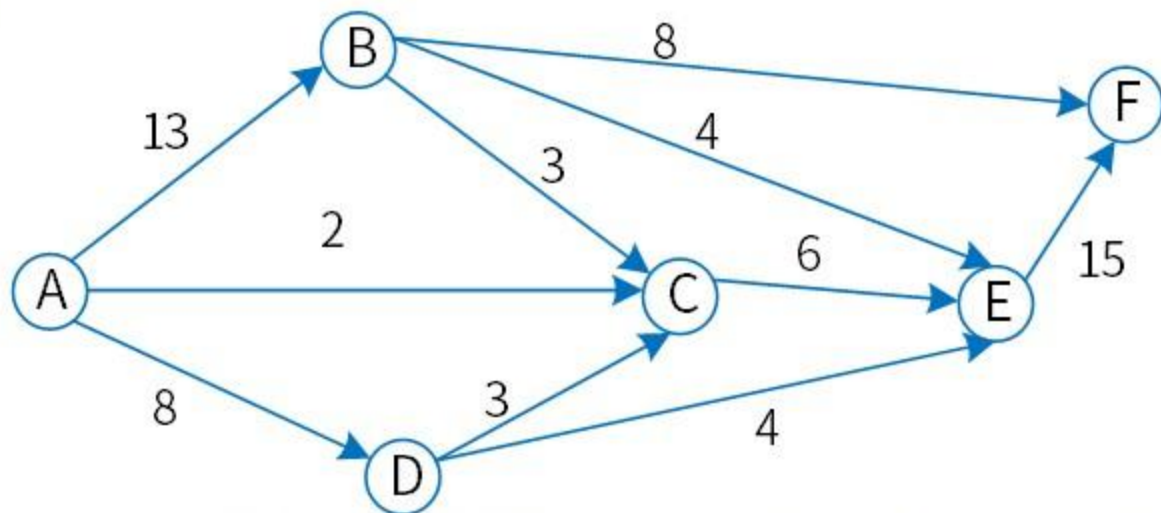




## 图论应用 – 网络与最大流量

(希赛)

在军事演习中，张司令希望将部队尽快从A地通过公路网（见下图）运送到F地：



图中标出了各路段上的最大运量（单位：千人/小时）。根据该图可以算出，从A地到F地的最大运量是（ ）千人/小时。

A 20

B 21

C 22

D 23



## 运筹方法 – 线性规划

(希赛)

某企业需要采用甲、乙、丙三种原材料生产 I、II 两种产品。生产两种产品所需原材料数量、单位产品可获得利润以及企业现有原材料数如下表所示，则公司可以获得的最大利润是 (1) 万元。取得最大利润时，原材料 (2) 尚有剩余。

(1) A 21      B 34      C 39      D 48

(2) A 甲      B 乙      C 丙      D 乙和丙

		产品 (吨)		现有原材料 (吨)
		I	II	
所需资源	甲	1	1	4
	乙	4	3	12
	丙	1	3	6
单位利润 (万元/吨)		9	12	





## 运筹方法 – 线性规划

(希赛)

◆ 设生产 I 与 II 产品的数量分别为：X和Y。则有：

◆ (1)  $X+Y \leq 4$

◆ (2)  $4X+3Y \leq 12$   $9X+12Y=?$

◆ (3)  $X+3Y \leq 6$

◆ (1) 与 (2) 求解得：X=0, Y=4。  $X+3Y = 12$

◆ (1) 与 (3) 求解得：X=3, Y=1。  $4X+3Y = 15$

◆ (2) 与 (3) 求解得：X=2, Y=4/3。  $X+Y = 10/3$   $9*2+12*(4/3)=34$

		产品 (吨)		现有原材料 (吨)
		I	II	
所需资源	甲	1	1	4
	乙	4	3	12
	丙	1	3	6
单位利润 (万元/吨)		9	12	

$$2+4/3=10/3$$

$$2*4+3*(4/3)=12$$

$$2+3*(4/3)=6$$



## 运筹方法 - 动态规划

暴力法求解

(希赛)

某公司现有400万元用于投资甲、乙、丙三个项目，投资额以百万元为单位，已知甲、乙、丙三项投资的可能方案及相应获得的收益如下表所示，则该公司能够获得的最大收益值是（ ）百万元。

A 17      B 18      C 20      D 21

收益 项目 \ 投资额	投资额			
	1	2	3	4
甲	4	6	9	10
乙	3	9	10	11
丙	5	8	11	15

项目	甲	乙	丙	收益值
投资 金额	0	0	4	15
		1	3	14
		2	2	17
		3	1	15
		4	0	11
	1	0	3	15
		1	2	15
		2	1	18
		3	0	14
	2	0	2	14
		1	1	14
		2	0	15
	3	0	1	14
		1	0	12
	4	0	0	10



## 运筹方法 – 动态规划

### 贪心策略分析

(一) 希赛

某企业准备将四个工人甲、乙、丙、丁分配在A、B、C、D四个岗位。每个工人由于技术水平不同，在不同岗位上每天完成任务所需的工时见下表。适当安排岗位，可使四个工人以最短的总工时（ ）全部完成每天的任务。

	A	B	C	D
甲	7	5	2	3
乙	9	4	3	7
丙	5	4	7	5
丁	4	6	5	6

A 13

B 14

C 15

D 16



## 运筹方法 – 预测 – 博弈论

(一) 希赛

### ◆ 囚徒困境 (prisoner's dilemma)

这个例子可以看作是非合作博弈现象的一个抽象概括。它讲的是两个嫌疑犯被隔离审讯。他们面临的处境是：如果两人都坦白，各判刑8年；如果两人都抵赖，各判刑1年（或许证据不足）；如果一人坦白另一人抵赖，则坦白的放出去，不坦白的判刑10年（“坦白从宽、抗拒从严”）。这里，两个囚徒就是两个局中人，每个局中人都有两个策略可供选择：坦白或抵赖。表中每一格的一对数字分别表示局中人不同策略组合的收益，第一个数字是囚徒A的收益，第二个数字是囚徒B的收益。这种有限对策（局中人是有限个，每个局中人的策略数也是有限的）往往用矩阵形式表示。

		囚徒B	
		坦白	抵赖
囚徒A	坦白	-8, -8	0, -10
	抵赖	-10, 0	-1, -1





## 运筹方法 – 预测 – 博弈论

(一) 希赛

甲、乙两个独立的网站主要靠广告收入来支撑发展，目前都采用较高的价格销售广告。这两个网站都想通过降价争夺更多的客户和更丰厚的利润。假设这两个网站在现有策略下各可以获得1000万元的利润。如果一方单独降价，就能扩大市场份额，可以获得1500万元利润，此时，另一方的市场份额就会缩小，利润将下降到200万元。

如果这两个网站同时降价，则他们都将只能得到700万元利润。那么，这两个网站的主管各自经过独立的理性分析后，决定采取什么策略呢？

		乙网站	
		高价	低价
甲网站	高价	1000, 1000	200, 1500
	低价	1500, 200	700, 700





## 运筹方法 – 预测 – 状态转移矩阵

(希赛)

假设市场上某种商品有两种品牌A和B，当前的市场占有率各为50%。  
根据历史经验估计，这种商品当月与下月市场占有率的变化可用转移矩阵P来描述：

$$P = \begin{pmatrix} p(A \rightarrow A) & p(A \rightarrow B) \\ p(B \rightarrow A) & p(B \rightarrow B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

其中， $p(A \rightarrow B)$  是A的市场占有份额中转移给B的概率，依次类推。这样，2个月后的这种商品的市场占有率变化为（ ）。

A A的份额增加了10%，B的份额减少了10%

B A的份额减少了10%，B的份额增加了10%

C A的份额增加了14%，B的份额减少了14%

D A的份额减少了14%，B的份额增加了14%



## 运筹方法 – 预测 – 状态转移矩阵

(希赛)

$$A^{m \times n} \times B^{n \times p} = C^{m \times p}$$

第1个月后:

$$A \ 50\% \times 0.8 + 50\% \times 0.4 = 60\%$$

$$B \ 1 - 60\% = 40\%$$

$$(0.5, 0.5)$$

$$P = \begin{pmatrix} p(A \rightarrow A) & p(A \rightarrow B) \\ p(B \rightarrow A) & p(B \rightarrow B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

第2个月后:

$$A \ 60\% \times 0.8 + 40\% \times 0.4 = 64\%$$

$$B \ 1 - 64\% = 36\%$$

$$(0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4, \ 0.5 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6)$$

$$\rightarrow (0.6, 0.4)$$

$$P = \begin{pmatrix} p(A \rightarrow A) & p(A \rightarrow B) \\ p(B \rightarrow A) & p(B \rightarrow B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$(0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.4, \ 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.6)$$

$$\rightarrow (0.64, 0.36)$$



## 运筹方法 - 决策

(希赛)

- ◆ 决策者
  - ◆ 可供选择的方案
  - ◆ 衡量选择方案的准则
  - ◆ 事件
  - ◆ 每一事件的发生将会产生的某种结果
  - ◆ 决策者的价值观
- 
- 确定型决策
  - 风险决策
  - 不确定型决策





## 运筹方法 – 决策 – 不确定型决策

(希赛)

决策准则	说明
乐观主义准则	maxmax准则，其决策的原则是“大中取大”，总抱有乐观和冒险的态度，决不放弃任何获得最好结果的机会。在决策表中各个方案对各个状态的结果中选出最大者，记在表的最右列，再从该列中选出最大者
悲观主义准则	maxmin准则，其决策的原则是“小中取大”。抱有悲观和保守的态度，在各种最坏的可能结果中选择最好的。决策时从决策表中各方案对各个状态的结果选出最小者，记在表的最右列，再从该列中选出最大者
折中主义准则	Harwicz准则，既不乐观冒险，也不悲观保守，而是从中折中平衡，用一个系数 $\alpha$ （称为折中系数）来表示，并规定 $0 \leq \alpha \leq 1$ ， $cv_i = \alpha * \max\{a_{ij}\} + (1 - \alpha) * \min\{a_{ij}\}$ ，然后比较 $cv_i$ ，从中选择最大者
等可能准则	Laplace准则，当决策者无法事先确定每个自然状态出现的概率时，可以将每个状态出现的概率定为 $1/n$ ，然后按照EMV决策
后悔值准则	Savage准则，每个自然状态的最大收益值（损失矩阵取为最小值）作为该状态的理想目标，并将该状态的其它值与最大值的差作为未达到理想目标的后悔值。决策的原则是最大后悔值达到最小（minmax，大中取小，最小最大后悔值）



运筹方法 – 决策 – 不确定型决策

希赛

乐观：大中取大

决策矩阵：

预计收益（单位：万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	50	150	500
	稳健	100	200	300
	保守	300	250	200

积极





## 运筹方法 – 决策 – 不确定型决策

(一) 希赛

悲观：小中取大

决策矩阵：

预计收益（单位：万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	50	150	500
	稳健	100	200	300
	保守	300	250	200

保守



## 运筹方法 – 决策 – 不确定型决策

(希赛)

等可能

决策矩阵：

预计收益（单位：万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	50	150	500
	稳健	100	200	300
	保守	300	250	200

$$50 \times \frac{1}{3} + 150 \times \frac{1}{3} + 500 \times \frac{1}{3} = 700/3$$

$$100 \times \frac{1}{3} + 200 \times \frac{1}{3} + 300 \times \frac{1}{3} = 600/3$$

$$300 \times \frac{1}{3} + 250 \times \frac{1}{3} + 200 \times \frac{1}{3} = 750/3$$

保守



## 运筹方法 – 决策 – 不确定型决策

(希赛)

后悔值准则：最大后悔值最小

决策矩阵：

预计收益（单位：万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	50	150	500
	稳健	100	200	300
	保守	300	250	200

后悔值：当趋势确定后，哪种策略最合适则其后悔值为0，其他策略据此计算相应亏损即后悔值

后悔值矩阵：

预计收益（单位：万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	250	100	0
	稳健	200	50	200
	保守	0	0	300

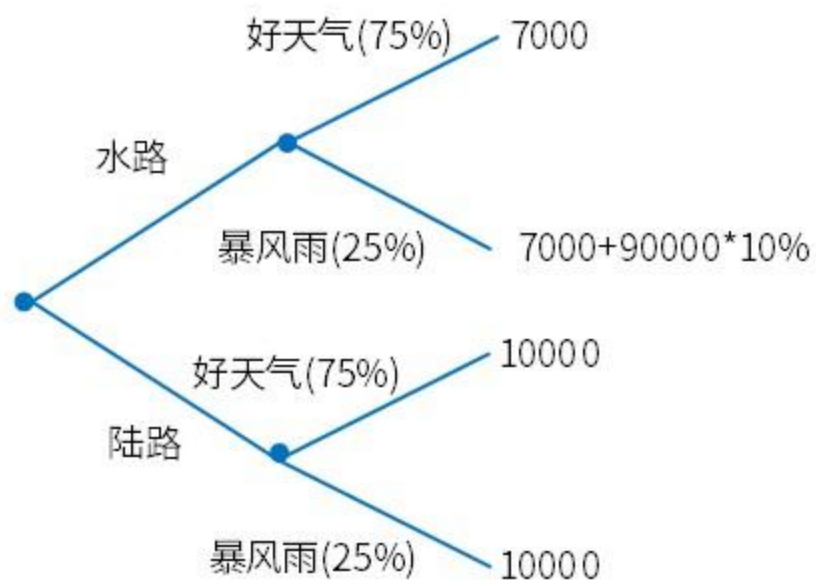
稳健



## 运筹方法 - 决策树

(希赛)

某电子商务公司要从A地向B地的用户发送一批价值为90000元的货物。从A地到B地有水、陆两条路线。走陆路时比较安全，其运输成本为10000元；走水路时一般情况下的运输成本只要7000元，不过一旦遇到暴风雨天气，则会造成相当于这批货物总价值的10%的损失。根据历年情况，这期间出现暴风雨天气的概率为1/4，那么该电子商务公司该如何选择呢？



$$\text{水路: } 7000 \times 0.75 + (7000 + 90000 \times 10\%) \times 0.25 = 9250$$

$$\text{陆路: } 10000 \times 0.75 + 10000 \times 0.25 = 10000$$





## 运筹方法 – 决策表

(希赛)

评估和选择最佳系统设计方案时，甲认为可以采用点值评估方法，即根据每一个价值因素的重要性，综合打分来选择最佳的方案。乙根据甲的提议，对如表所示的系统 A 和 B 进行评估，那么乙认为（ ）。

A 最佳方案是 A

B 最佳方案是 B

C 条件不足，不能得出结论

D 只能用成本/效益分析方法做出判断

		系统A	系统B
评估因素的重要性		评估值	评估值
硬件	35%	95	75
软件	40%	70	95
供应商支持	25%	85	90

A系统：  $95 \times 35\% + 70 \times 40\% + 85 \times 25\% = 82.5$

B系统：  $75 \times 35\% + 95 \times 40\% + 90 \times 25\% = 86.75$





## 运筹方法 - 决策树

(希赛)

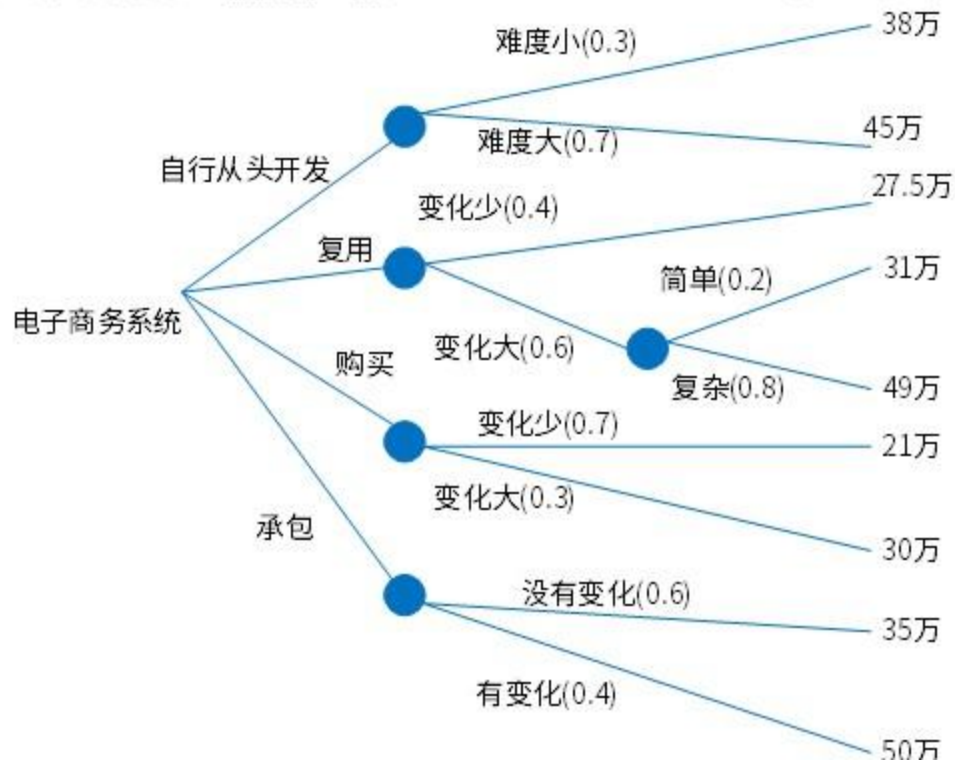
某企业拟进行电子商务系统的建设，有四种方式可以选择：①企业自行从头开发；②复用已有的构件来构造；③购买现成的软件产品；④承包给专业公司开发。针对这几种方式，项目经理提供了如图所示的决策树，根据此图，管理者选择建设方式的最佳决策是（ ）。

A 企业自行从头开发

B 复用已有的构件来构造

C 购买现成的软件产品

D 承包给专业公司开发



自行从头开发:  $0.3 \times 38 + 0.7 \times 45 = 11.4 + 31.5 = 42.9$

复用:  $0.4 \times 27.5 + (0.6 \times 0.2 \times 31 + 0.6 \times 0.8 \times 49) = 11 + (3.72 + 23.52) = 38.24$

购买:  $0.7 \times 21 + 0.3 \times 30 = 14.7 + 9 = 23.7$

承包:  $0.6 \times 35 + 0.4 \times 50 = 21 + 20 = 41$

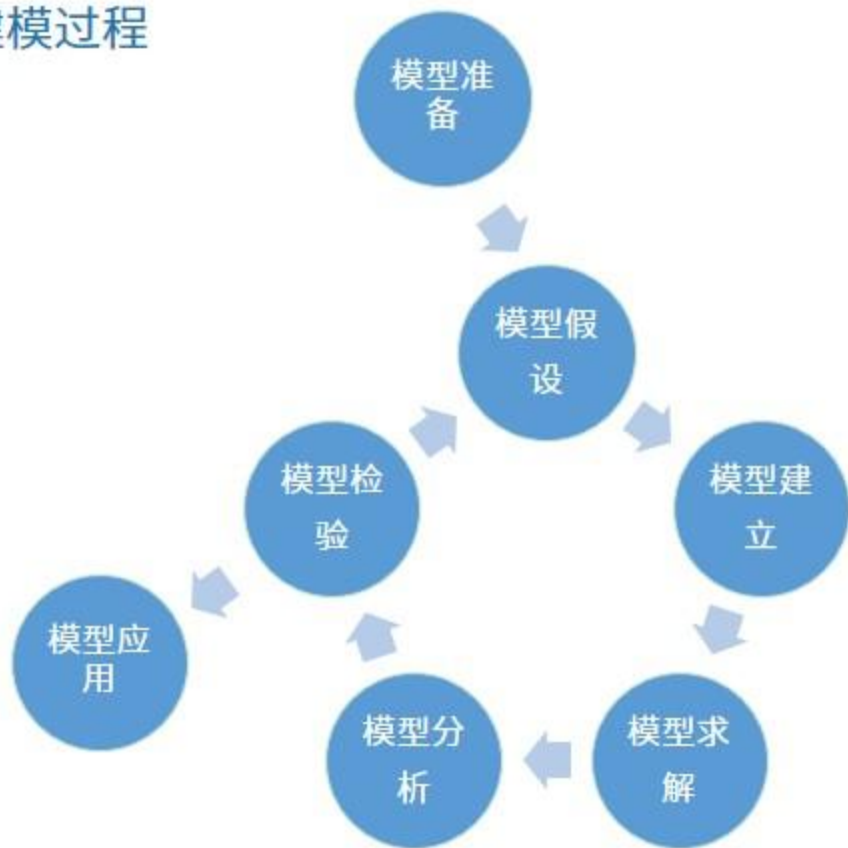


## 数学建模

(希赛)

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象和简化，建立能近似刻画并解决实际问题的模型的一种强有力的数学手段。

### 数学建模过程





## 数学建模

(一) 希赛

- **模型准备**：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息。用数学语言来描述问题。
- **模型假设**：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设。
- **模型建立**：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构。只要能够把问题描述清楚，尽量使用简单的数学工具。
- **模型求解**：利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算（估计）。
- **模型分析**：对所得的结果进行数学上的分析。
- **模型检验**：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。
- **模型应用**：应用方式因问题的性质和建模的目的而异。





## 数学建模-模型分析

(希赛)

- 模型的合理性分析  
(最佳、适中、满意等)
- 模型的误差分析  
(模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差、过失误差、绝对误差、相对误差等)
- 参数的灵敏性分析  
(变量数据是否敏感，在最优方案不变的条件下这些变量允许变化的范围)



## 数学建模-模型检验

(希赛)

- 利用实际案例数据对模型进行检验是很常见的。将模型作为一个黑盒，通过案例数据的输入，检查其输出是否合理。这是应用人员常用的方法。
- 可以请专家来分析模型是否合理。经验丰富的专家一般会根据模型自身的逻辑，再结合实际情况，分析是否会出现矛盾或问题。
- 利用计算机来模拟实际问题，再在计算机上检验该数学模型。有时很难用实际案例或聘请专家来检验模型，例如，试验或实验的代价太大，难以取得实际案例，有的项目技术比较新，缺乏有经验的专家。例如，对某种核辐射防护建立的数学模型，采用计算机模拟方法来检验就十分有效。





## 数学建模

(希赛)

### 数学建模方法

直接分析法：认识原理，直接构造出模型。

类比法：根据类似问题模型构造新模型。

数据分析法：大量数据统计分析之后建模。

构想法：对将来可能发生的情况给出设想从而建模。



## 数学建模

(希赛)

对实际应用问题建立数学模型并求得结果后，还需要根据建模的目的和要求，利用相关知识，结合研究对象的特点，进行模型分析。模型分析工作一般不包括（ ）。

- A 模型的合理性分析
- B 模型的误差分析
- C 模型的先进性分析
- D 参数的灵敏性分析



## 数学建模

(希赛)

对实际应用问题建立了数学模型后，一般还需要对该模型进行检验。通过检验尽可能找出模型中的问题，以利于改进模型，有时还可能会否定该模型。检验模型的做法有多种，但一般不会（ ）。

- A 利用实际案例数据对模型进行检验
- B 进行逻辑检验，分析该模型是否会出现矛盾
- C 用计算机模拟实际问题来检验模型
- D 检验该模型所采用的技术能否被企业负责人理解