线性代数与空间解析几何

8.2　化实二次型为标准形

一、正交变换化实二次型为标准形

二、配方法化实二次型为标准形

三、初等变换法化实二次型为标准形

一、正交变换化实二次型为标准形

设 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$

若记 $X = (x_1, x_2, \cdots x_n)^{\mathrm{T}}, Y = (y_1, y_2, \cdots y_n)^{\mathrm{T}}, C = (c_{ij})$

则上述线性变换可 记作 $X = CY$

若 C 是可逆的,则称此变换为可逆线性变换.

若 C 是正交的,则称此变换为正交线性变换.

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

即：对二次型$f = X^T AX$(A为对称阵)

寻找合适的可逆线性变换$X = CY$,使得

$$f = X^{\mathrm{T}} AX = (CY)^{\mathrm{T}} A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}} AC)Y$$

$$= Y^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} Y$$

$$= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

即对实对称矩阵A,寻找可逆矩阵C,使得$C^{\mathrm{T}}AC$为对角阵

结论　任给可逆矩阵C,令$B=C^TAC$,如果A为对称矩阵,则B也为对称矩阵, 且$R(B)=R(A)$.

说明

1. 二次型经可逆变换$X=CY$后,其秩不变,但f的矩阵由A变为$B=C^{\mathrm{T}}AC$;

2. 要使二次型f经可逆变换$x=Cy$变成标准形,就是要使$C^{\mathrm{T}}AC$成为对角矩阵.

回忆

定理6.6 设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵P

使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 是A 的n个特征值.

修改定理

设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵P

使得$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 是A 的n个特征值.

把此结论应用于二次型,有

定理 任给二次型 $f = X^T AX$,总有正交变换$X = PY$,使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 f 的矩阵$A = (a_{ij})$的特征值.

注：正交变换只能化二次型为标准形，不能化二次型为规范形

例1 求一个正交变换$X = PY$,把二次型

$$f = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$$

化为标准形.

解

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

它的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^3.$$

于是A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3.$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$时,解方程$(-E - A)X = 0,$

可得基础解系

$$T_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},T_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=T_1=(1,1,0,0)^T$$

$$\beta_2=T_2-\frac{(T_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1,0)^T-\frac{1}{2}(1,1,0,0)^T$$

$$=\frac{1}{2}(1,-1,2,0)^T$$

$$\beta_3 = T_3 - \frac{(T_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(T_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(-1,0,0,1)^T - \frac{-1}{2}(1,1,0,0) - \frac{-1}{6}(1,-1,2,0)^T$$

$$=\frac{1}{3}(-1,1,1,3)^T$$

单位化即得

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

当$\lambda_4 = 3$时,解方程$(3E - A)X = 0$

得基础解系$T_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化即得$P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

且有 $f = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$，求出 A；

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$；

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化，单位化，得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，记 $C = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$；

5. 作正交变换 $x = Cy$，则得 f 的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

小结

实二次型的化简问题，在理论和实际中经常遇到，通过在二次型和对称矩阵之间建立一一对应的关系，将二次型的化简转化为将对称矩阵化为对角矩阵，而这是已经解决了的问题，请同学们注意这种研究问题的思想方法.

二、配方法化实二次型为标准形

例1 利用配方法化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

将f 中含有变量x_1 的平方项(其系数不为0),将x_1 的项归并起来,配方得到

$$\begin{aligned} f&=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3 \\ &=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2^2+10x_3^2+8x_2x_3 \\ &=[(x_1+x_2)^2+2x_1x_3]+x_2^2+10x_3^2+8x_2x_3 \end{aligned}$$

$$=[(x_1+x_2)^2+2x_1x_3]+x_2^2+10x_3^2+8x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+10x_3^2-x_3^2+8x_2x_3-2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+9x_3^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+3x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$

$$f=y_1^2+y_2^2$$

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3 \\ x_2=\quad y_2-3y_3 \\ x_3=\quad y_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例2 利用配方法化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵.

f 中不含有变量平方项,令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

$$=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

$$= (2y_1^2 - 4y_1y_3) - 2y_2^2 + 8y_2y_3$$

$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3$$

$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2 - 4y_3^2) - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 8y_3^2 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

$$=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow$ 则有 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

即经过两次线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$f = 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

$$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$ 标准形

令 $\begin{cases} w_1 = \sqrt{2} z_1 \\ w_2 = \sqrt{6} z_3 \\ w_3 = \sqrt{2} z_2 \end{cases}$

则 $f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$ 规范形

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项，但是$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

练习 利用配方法化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

利用配方法化二次型

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

小结

将一个二次型化为标准形，可以用**正交变换法**，也可以用**拉格朗日配方法**，或者其它方法，这取决于问题的要求．如果要求找出一个正交矩阵，无疑应使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用．正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单．需要注意的是，**使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩**．

三、初等变换法化实二次型为标准形

定理 对任意实对称矩阵A,一定存在可逆矩阵C,使得$C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$为对角阵

$$C^{\mathrm{T}}AC=(P_1P_2\cdots P_k)^T A(P_1P_2\cdots P_k)$$

$$=P_k^T\cdots P_2^T P_1^T AP_1P_2\cdots P_k$$

(1) 初等矩阵的转置仍为同种类型的初等矩阵;

$$E^T(i,j)=E(i,j)$$

$$E^T(i(k))=E(i(k))$$

$$E^T(i,j(k))=E(j,i(k))$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C^T A C \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$