HITWH
SE

第九章

NP完全性与近似算法

HITWH
SE

- 时间复杂度被分为两种级别：
  - 一种是O(1),O(log(*n*)),O(n^a) 等，我们把它叫做多项式级的复杂度，因为它的规模*n*出现在底数的位置；
  - 另一种是O(a^n)和O(*n*!)型复杂度，它是非多项式级的，其复杂度计算机往往不能承受。
- 当我们在解决一个问题时，我们选择的算法通常都需要是多项式级的复杂度，非多项式级的复杂度需要的时间太多，往往会超时，除非是数据规模非常小

- 自然地，人们会想到一个问题：会不会所有的问题都可以找到复杂度为多项式级的算法呢？
- 答案是否定的。
- 例如：
  - Hamilton回路。
  - 问题是这样的：给你一个图，问你能否找到一条经过每个顶点一次且恰好一次(不遗漏也不重复)最后又走回来的路(Hamilton回路)。
  - 这个问题现在还没有找到多项式级的算法。事实上，这个问题就是我们后面要说的NPC问题。

提要

9.1 NP完全性

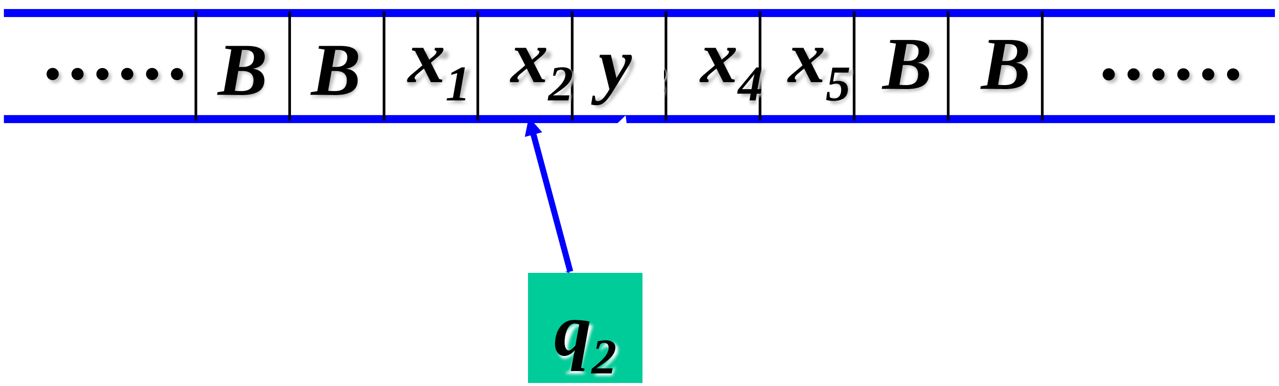
9.2 近似算法的基本概念与 设计方法

NP完全性

- NP完全问题的概念
- 几个重要的NP完全问题

NP 完全性相关概念

- 确定图灵机



$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q0, B, F)$

Q：有穷状态集合

Σ：有穷输入符号集合

Γ：有穷带符号集合，$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ : $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$，$\delta(q, x)=(p, y, D)$, D=L或R

q0：起始状态

$B \in \Gamma - \Sigma$：空白符号

$F \subseteq Q$：终止或接受状态集合

NP完全性相关概念

- 图灵机接受的瞬时描述
  - $X_1X_2\ldots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ldots X_n$
- 瞬时描述的迁移
  - $X_1X_2\ldots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ldots X_n \Rightarrow X_1X_2\ldots pX_{i-1}YX_{i+1}\ldots X_n$
  - $\alpha_1 q\beta_1 \Rightarrow^* \alpha_2 p\beta_2$
- 图灵机作为语言识别器
  - $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$接受的语言为
    $L(M)=\{ w \mid w\in\Sigma^*, q_0w \Rightarrow^* \alpha p\beta, p\in F\}$
  - 例1. 构造图灵机接受 $\{0^n1^m \mid n\geq1, m\geq1\}$
    例2. 构造图灵机接受 $\{0^n1^n \mid n\geq1, m\geq1\}$
- 图灵机作为计算器

NP 完全性相关概念

- 不确定图灵机的定义
  - $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

Q：有穷状态集合

Σ：有穷输入符号集合

Γ：有穷带符号集合，$\Sigma \subseteq \Gamma$

$\cancel{\delta: Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{R, L\},\ \delta(q, x)=(p, Y, D), D=L \text{ 或 } R}$

q_0：起始状态

$B\in\Gamma-\Sigma$：空白符号

$F\subseteq Q$：终止或接受状态集合

$\delta: \delta(q, x)=\{ (p, Y, D) \mid p\in Q, Y\in\Gamma, D\in\{L, R\} \}$

NP完全性相关概念

- 不确定图灵机作为语言识别器
  - $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$接受的语言为 $L(M)=\{ w \mid w \in \Sigma^*$, 存在一个移动序列$q_0 w \Rightarrow^* \alpha p \beta$, $p \in F\}$
- 不确定图灵机作为计算器
- 确定图灵机与非确定图灵机区别
  - 确定性图灵机：每一步只有一种选择。
  - 非确定图灵机:每一步可以有多种选择

NP完全性相关概念

- 图灵机的扩展
  - 多道图灵机
  - 多维图灵机
  - 多带图灵机
  - 具有半无限带的图灵机
  - ……

NP完全性相关概念

- 各种图灵机的计算等价性

  定理1. 所有前面介绍的图灵机计算能力都是等价的。

- 确定图灵机与计算机的等价性

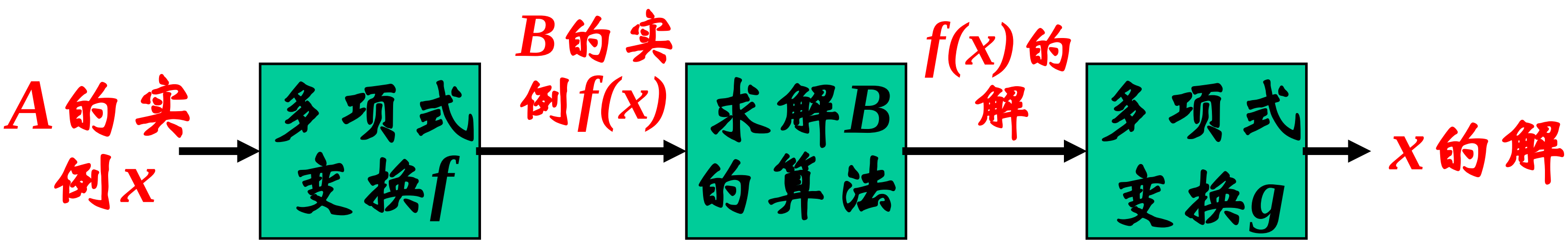
  定理2. 确定图灵机与计算机是等价的，而且在多项式时间内等价。

NP完全性相关概念

- P类问题
  - 确定图灵机在多项式时间内能够求解的全部问题
  - 排序、矩阵链乘、最小生成树等
- NP类问题
  - 非确定图灵机在多项式时间内能够求解的全部问题
  - 旅行商问题、团问题等
- 显然的结论：$P \subseteq NP$
- 悬而未决的问题：$P \subsetneq NP$

NP完全性相关概念

- 多项式时间规约
  - 问题A在多项式时间内可归约为问题B，如果存在具有多项式时间复杂性的变换f和g使得:
    - x 是A的实例 iff $f(x)$是B的实例;
    - s是B实例f(x)的解 iff $g(s)$是A实例x的解.



NP 完全性相关概念

- 多项式时间规约的应用

定理. 设问题A可以在多项式时间内归约为问题B. 如果 $B \in P$，则 $A \in P$.

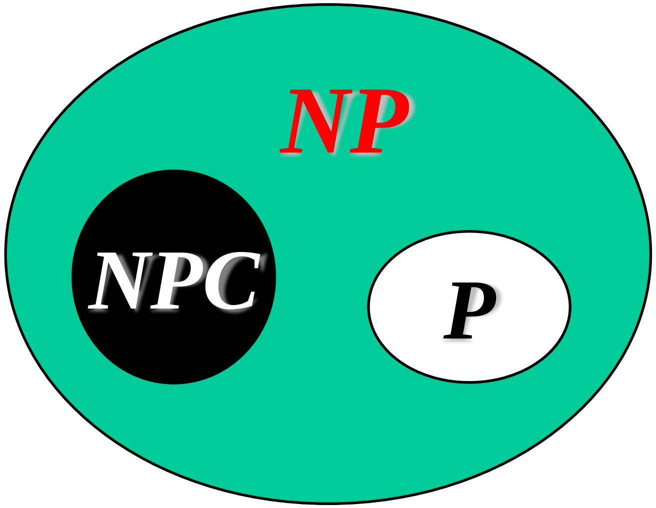
推论. 设问题A可以在多项式时间内归约为问题B. 如果 $A \notin P$，则 $B \notin P$.

NP完全性相关概念

- NP-Complete问题

  问题A称为NP-Complete，如果
  - A∈NP,
  - ∀B∈NP, B可以多项式地归约为A。

  ** 似乎任意一个NP-complete问题都属于NP-P?*



NP 完全性相关概念

- NP-Complete问题

  问题A称为NP-Complete，如果

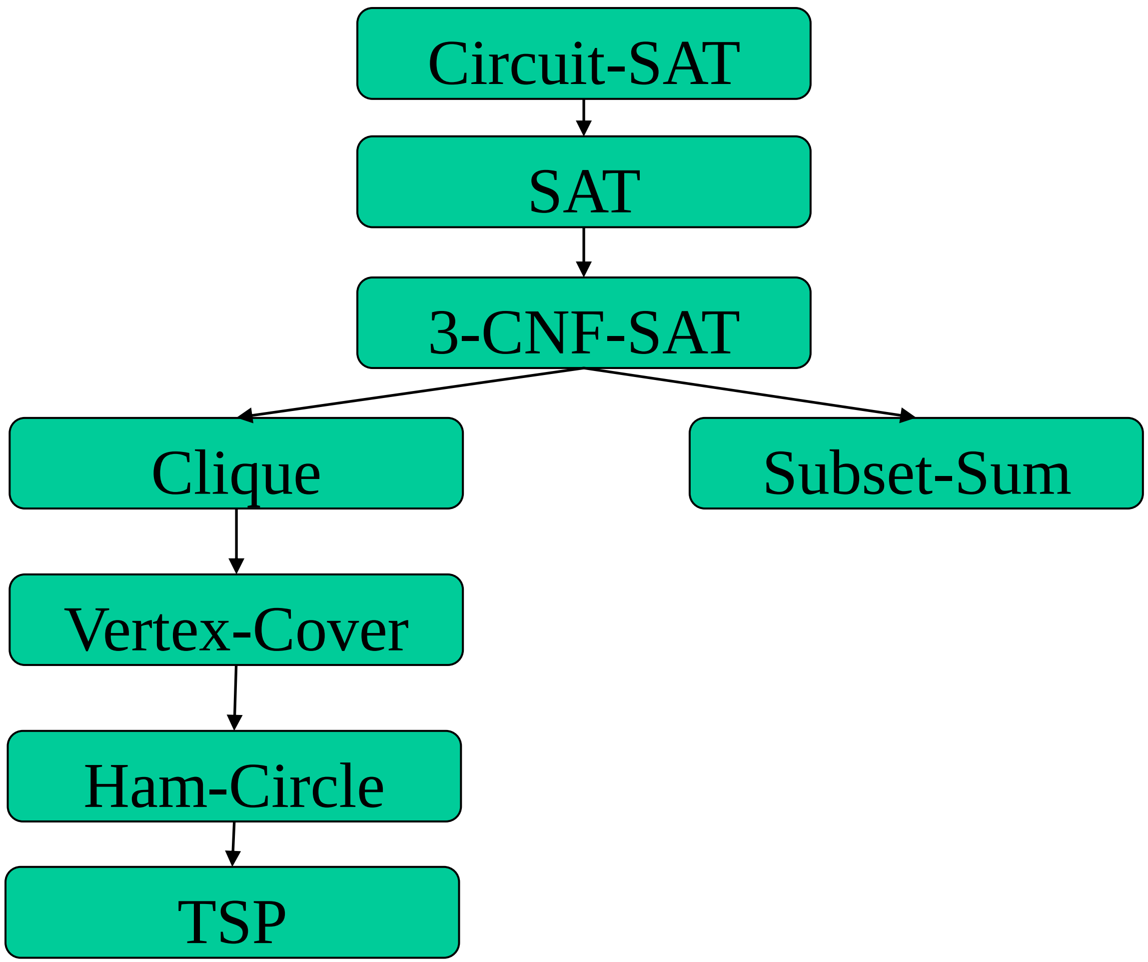
  – A$\in$NP,

  – $\forall$B$\in$NP, B可以多项式地归约为A。

定理. 如果p_1是NP-$Complete$, $p_2 \in NP$, 而且p_1可以在多项式时间内归约到p_2, 则p_2是NP-$Complete$.

定理. 如果一个NP-$Complete$问题$p \in P$, 则$P=NP$.

NP完全性相关概念



几个经典NP完全问题的规约路线

NP 完全性相关概念

- NP-Hard问题

  问题A称为NP-Hard，如果

  – $\forall B \in NP$, B可以在多项式时间内归约为A.

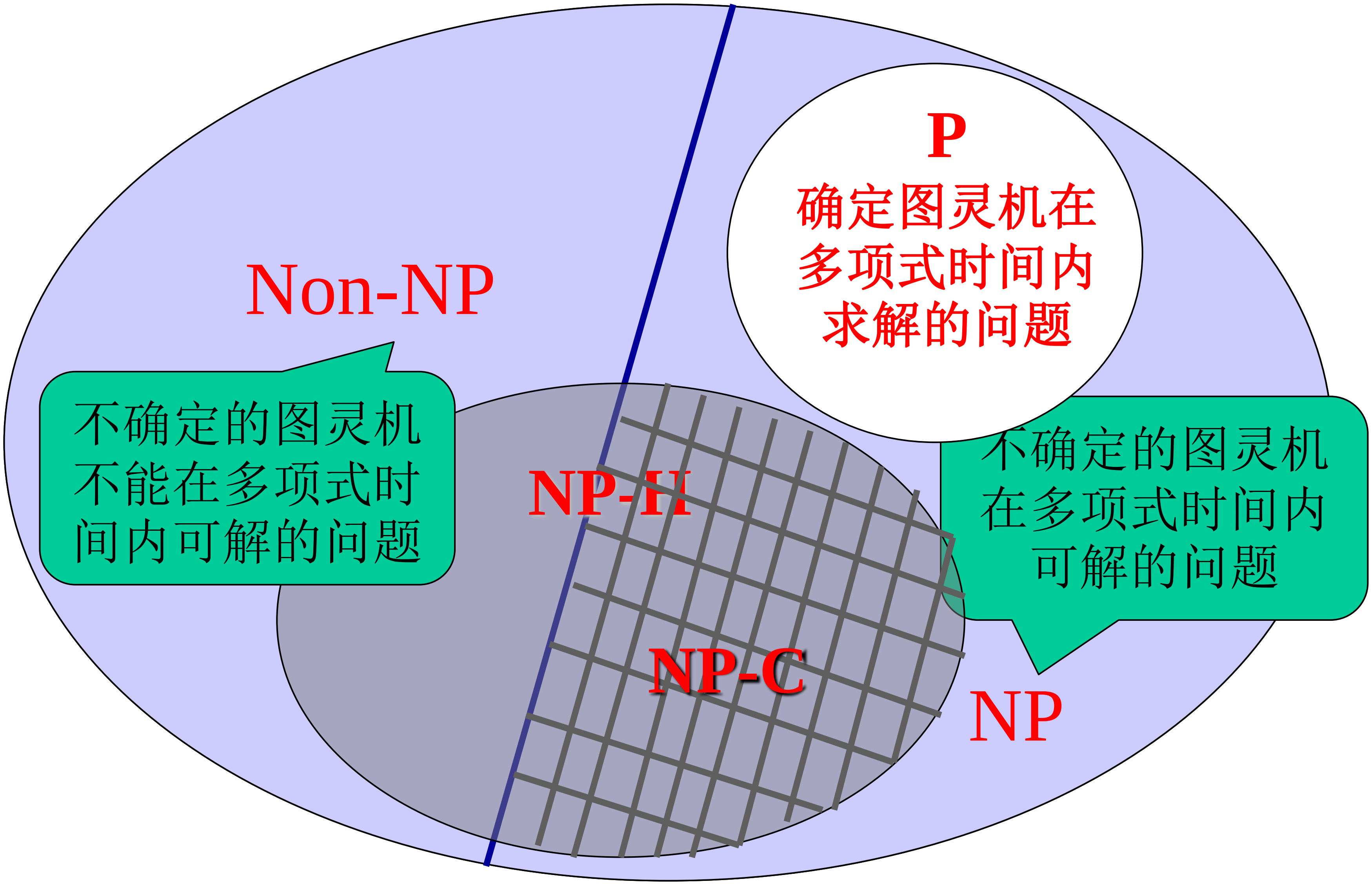
*注意：

➢NP-难问题不一定属于NP问题

➢NP-难问题似乎比NP-完全问题更难

HITWH
SE

NP 完全性相关概念



提要

近似算法的基本概念与设计方法

近似算法的基本概念

- 近似算法的基本思想
  - 很多实际应用中问题都是NP-完全问题
  - NP-完全问题的多项式算法是难以得到的
  - 求解NP-完全问题的方法：
    - 如果问题的输入很小，可以使用指数级算法圆满地解决该问题
    - 否则使用多项式算法求解问题的近似优化解
  - 什么是近似算法
    - 能够给出一个问题的近似解的算法
    - 常用来解决优化问题

近似算法的性能分析

- 近似算法的时间复杂性
  - 分析目标和方法与传统算法相同
- 近似算法解的近似度
  - 本节讨论的问题是优化问题
    - 问题的每一个可能的解都具有一个正的代价
    - 问题的优化解可能具有最大或最小代价
    - 我们希望寻找问题的一个近似优化解
  - 我们需要分析近似解代价与优化解代价的差距
    - Ratio Bound
    - 相对误差
    - $(1\pm\varepsilon)$-近似

- **Ratio Bound**

定义1(Ratio Bound) 设*A*是一个优化问题的近似算法, *A*具有ratio bound *p(n)*, 如果

$$\max\left\{\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right\} \le p(n)$$

其中*n*是输入大小, *C*是*A*产生的近似解的代价,

C^*是优化解的代价.

- 如果问题是最大化问题, max{*C/C**, *C*/C*}=*C*/C*
- 如果问题是最小化问题, max{*C/C**, *C*/C*}=*C/C**
- Ratio Bound不会小于*1*
- Ratio Bound越大, 近似解越坏

- 相对误差

定义2(相对误差)对于任意输入, 近似算法的相对误差定义为$|C-C^*|/C^*$, 其中C是近似解的代价, C^*是优化解的代价.

定义3(相对误差界)一个近似算法的相对误差界为$\varepsilon(n)$, 如果$|C-C^*|/C^* \le \varepsilon(n)$.

结论1. $\varepsilon(n) \le p(n)-1$.

证. 对于最小化问题

$$\varepsilon(n)=|C-C^*|/C^*=(C-C^*)/C^*=C/C^*-1=p(n)-1.$$

对于最大化问题

$$\varepsilon(n)=|C-C^*|/C^*=(C^*-C)/C^*=(C^*/C-1)/(C^*/C)$$
$$=(p(n)-1)/p(n) \le p(n)-1.$$

- 对于某些问题, $\varepsilon(n)$和$p(n)$独立于n, 用p和ε表示之.
- 某些NP-完全问题的近似算法满足: 当运行时间增加时, Ratio Bound和相对误差将减少.
- 结论1表示, 只要求出了Ratio Bound就求出了$\varepsilon(n)$

- 近似模式

定义4 (近似模式) 一个优化问题的近似模式是一个以问题实例I和$\varepsilon>0$为输入的算法族. 对于任意固定ε, 近似模式是一个$(1\pm\varepsilon)$-近似算法.

定义5 一个近似模式$A(I, \varepsilon)$称为一个多项式时间近似模式(PTAS), 如果对于任意$\varepsilon>0$, $A(I, \varepsilon)$的运行时间是关于输入实例大小$|I|$的多项式.

定义 6 一个近似模式称为完全多项式时间近似模式(FPAS,FPTAS), 如果它的运行时间是关于$1/\varepsilon$和输入实例大小n的多项式.

顶点覆盖问题

输入：无向图$G=(V, E)$

输出：$C\subseteq V$, 满足

(1). $\forall(u, v)\in E$, $u\in C$、$v\in C$ 或 $\{u,v\}\subseteq C$

(2). C是满足条件(1)的最小集合。

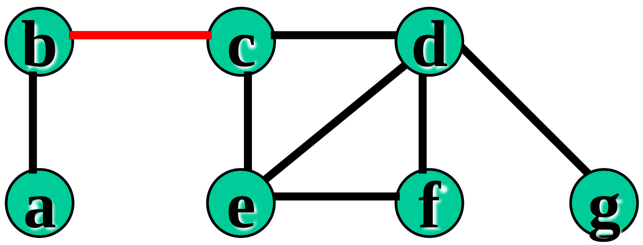
理论上已经证明：

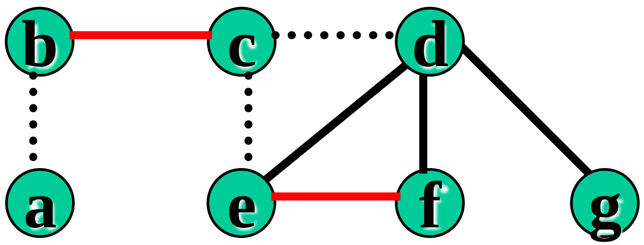
最优顶点覆盖问题是NP-完全问题.

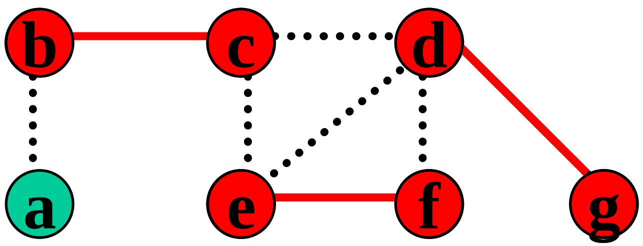
近似算法的设计

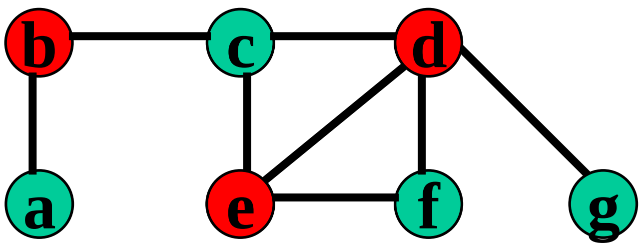
- 算法的基本思想

每次任取一条边，结点加入C，删除相关边，重复该过程









算法解：{b, c, e, f, d, g}

优化解：{b, e, d}

算法及性能分析

- 算法

APPROX-Vertex-Cover (G)

1. $C=0$
2. $E'=E[G]$;
3. **While** $E'\neq 0$ **DO**
4. 任取$(u, v)\in E'$;
5. $C=C\cup\{u, v\}$;
6. 从E'中删除所有与u或v相连的边;
7. **Return** C

时间复杂性

$T(G)=O(|E|)$

- Ratio Bound

定理. Approx-Vertex-Cover的Ratio Bound为2.

证. 令$A=\{(u, v) \mid (u, v)$是算法第4步选中的边$\}$.

若$(u,v)\in A$, 则与(u, v)邻接的边皆从E'中删除.

于是, A中无相邻接边.

第5步的每次运行增加两个结点到C, $|C|=2|A|$.

设C^*是优化解, C^*必须覆盖A.

由于A中无邻接边,

C^*至少包含A中每条边的一个结点. 于是,

$|A|\le|C^*|$,

$|C|=2|A|\le 2|C^*|$,

即$|C|/|C^*|\le 2$.

APPROX-Vertex-Cover (G)

1. $C=0$
2. $E'=E[G]$;
3. While $E'\neq 0$ DO
4. 任取$(u, v)\in E'$;
5. $C=C\cup\{u, v\}$;
6. 从E'中删除所有与u或v相连的边;
7. Return C

近似算法设计

- 基于组合优化的近似算法
- 基于贪心策略的近似算法
- 基于局部优化的近似算法
- 基于动态规划的近似算法
- 基于线性规划的近似算法
- 随机算法、Online算法
- ……

其它算法设计方法

- 智能优化算法
  - 遗传算法
  - 蚁群算法、鱼群算法
  - 模拟退火算法
- 并行与分布式算法
- ……

各位同学的算法课没有结束……