概率论与数理统计

§4　二维随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

二、连续型随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 $(1)Z = X+Y$, $(2)W = |X-Y|$ 的分布列.

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

$Z=X+Y$ 的分布

例2　若 X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0$, 1 , 2 ,…, $P(Y=l)=b_l$, $l=0,1,2,\ldots$,求 $Z=X+Y$ 的概率函数.

解　$P(Z=m)=P(X+Y=m)$

$$=\sum_{k=0}^{m} P(X=k, Y=m-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m} P(X=k)P(Y=m-k)$$

由独立性

$=a_0b_m+a_1b_{m-1}+\ldots+a_mb_0$ 　$m=0,1,2,\ldots$

例3 X与Y 独立,且$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$

求 $Z = X + Y$ 的分布列.

解 依题意

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(Y = j) = \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^j}{j!} \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

于是 $$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i)$$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{i!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,\quad k=0,1,\ldots$$

即Z 服从参数为  的泊松分布.

二、连续型随机变量函数的分布

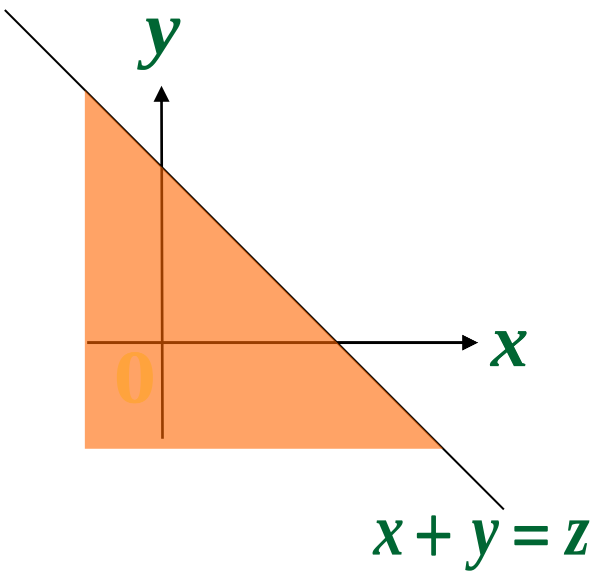
例4　设X和Y的联合密度为 $f(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 $Z=X+Y$的分布函数是:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(X+Y\le z)$$

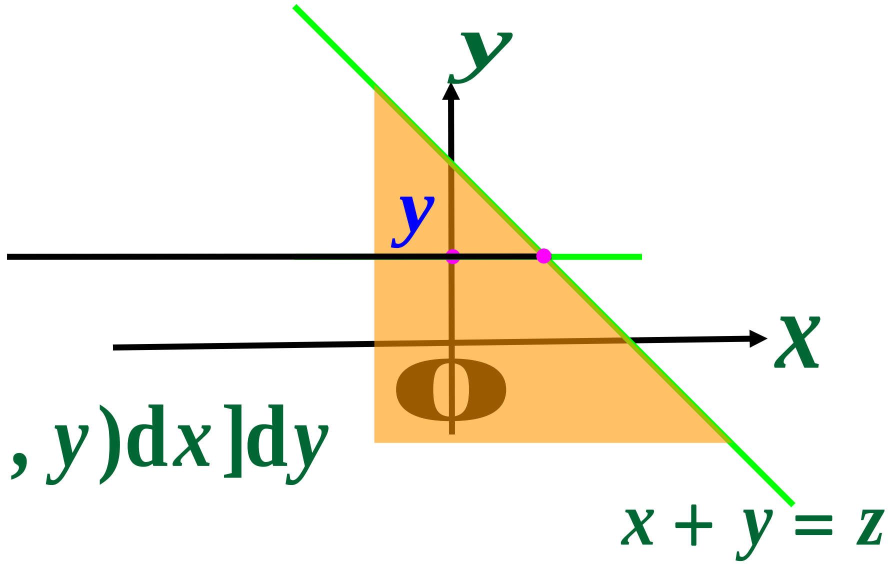
$$=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$



这里积分区域 $D=\{(x,y): x+y\le z\}$

它是直线 $x+y=z$ 及其左下方的半平面.

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



化成累次积分,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

固定z和y,对方括号内的积分作变量代换, 令 $x=u-y$,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

变量代换

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

交换积分次序

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

由概率密度与分布函数的关系，即得$Z=X+Y$的概率密度为:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y$$

由X和Y的对称性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

以上两式即是两个随机变量和的概率密度的一般公式.

特别地，当 X 和 Y 独立，设 (X,Y) 关于 X , Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ， 则上述两式化为:

$$\begin{cases} f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

卷积公式

下面我们用卷积公式来求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

例4 设 X 和 Y 是两个独立的随机变量,其概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 (1) $Z=X+Y$ 概率密度函数;

(2) $Z=2X+Y$ 概率密度函数;

解 (1) 公式法 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}e^{-(z-x)} & 0\le x\le 1, z>x\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

故 当$z<0$时，$f_Z(z)=0.$

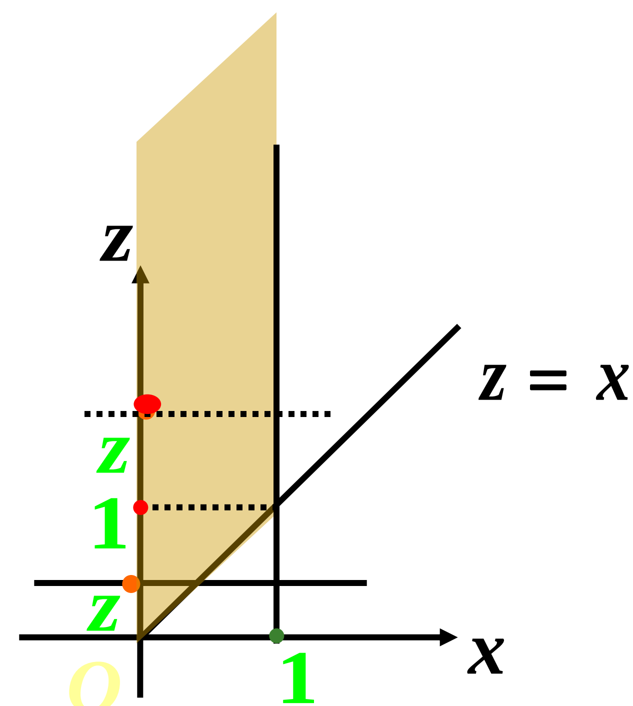
当$0\le z<1$ 时，

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$$

当 $1\le z$时，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x$$

$$=(e-1)e^{-z}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge 1.\end{cases}$$

◆ **连续型** $\boxed{\text{分布函数法}}$

已知(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, $Z=X+Y$,

求Z 的概率密度$f_Z(z)$，分两步:

第一步 **求Z的分布函数** $F_Z(z)$

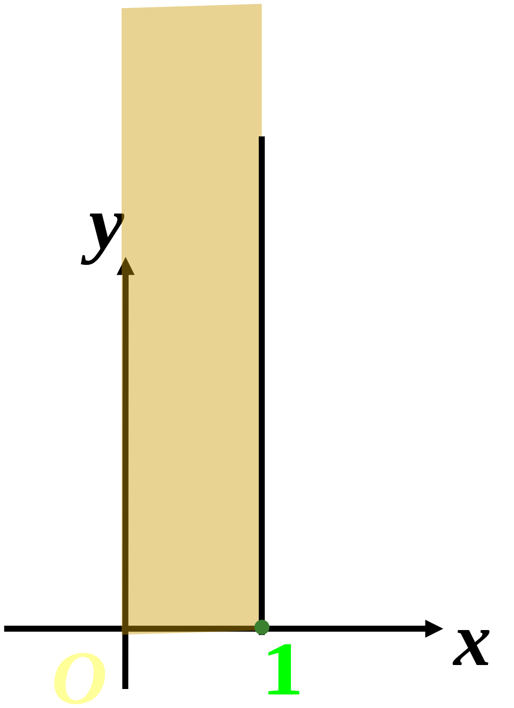
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二步 **求Z的概率密度** $f_Z(z)=F_Z'(z)$

解　**(1) 分布函数法**

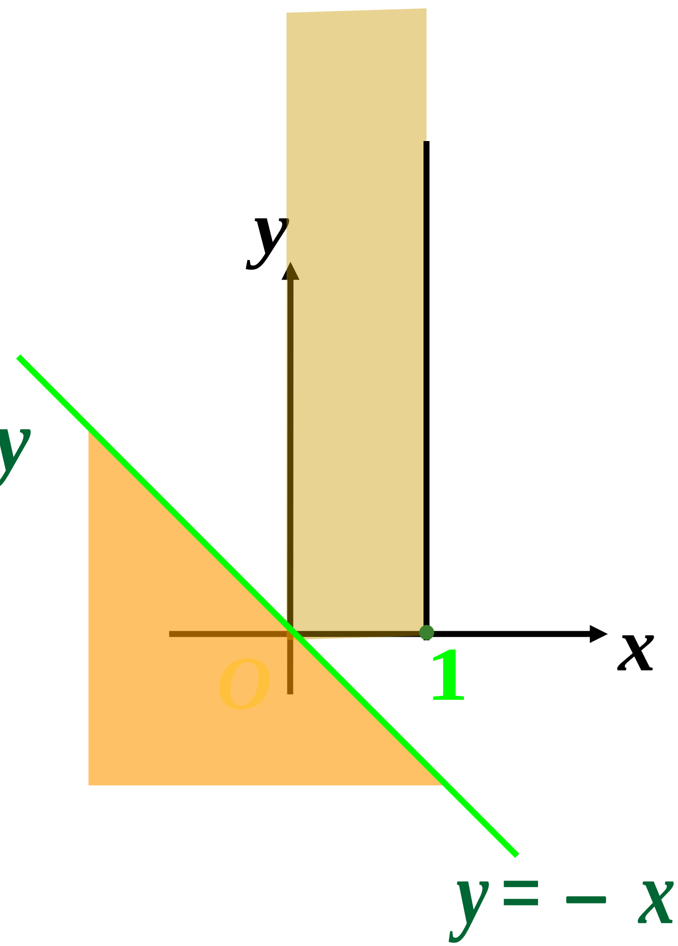
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \le x \le 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

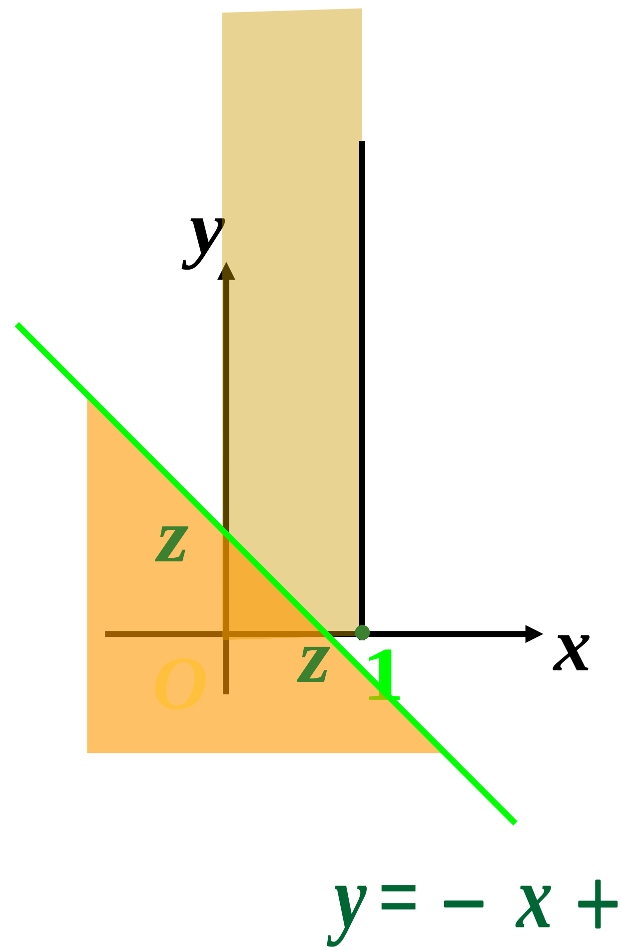
当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$



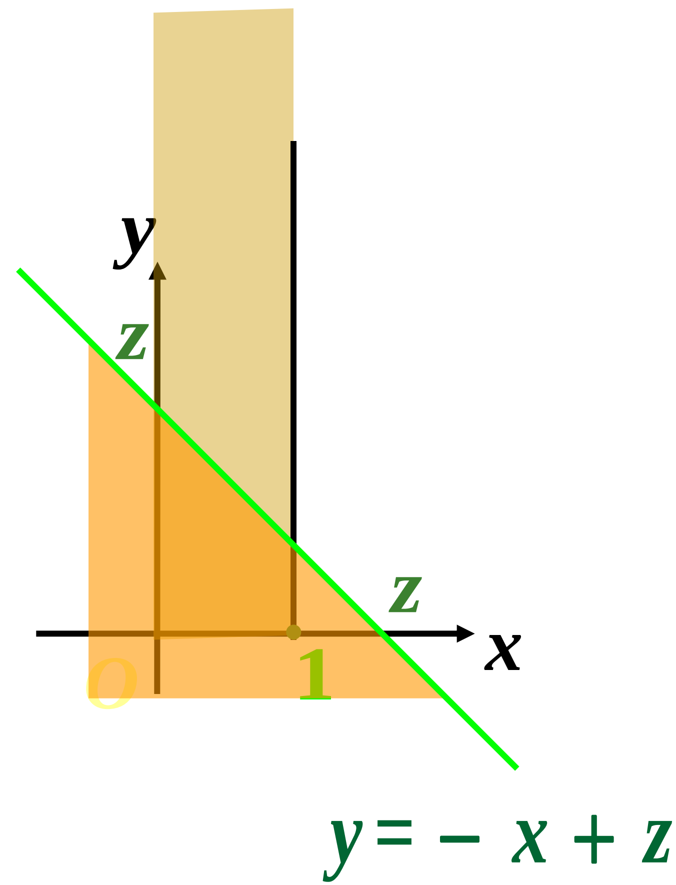
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$0 < z \le 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$= z - 1 + e^{-z}$$



$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $z > 1$ 时,

$$F_Z(z) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$= 1 + (1 - e)e^{-z}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ z-1+e^{-z} & 0<z<1\\ 1+e^{-z}\left(1-e\right) & z\ge 1\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-z} & 0<z<1\\ e^{-z}\left(e-1\right) & z\ge 1\end{cases}$$

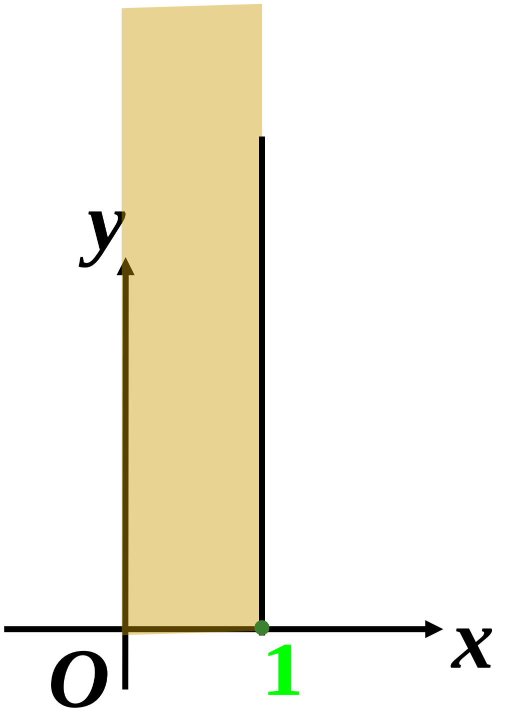
解 **(2) 分布函数法**

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

$$= P(2X + Y \le z)$$

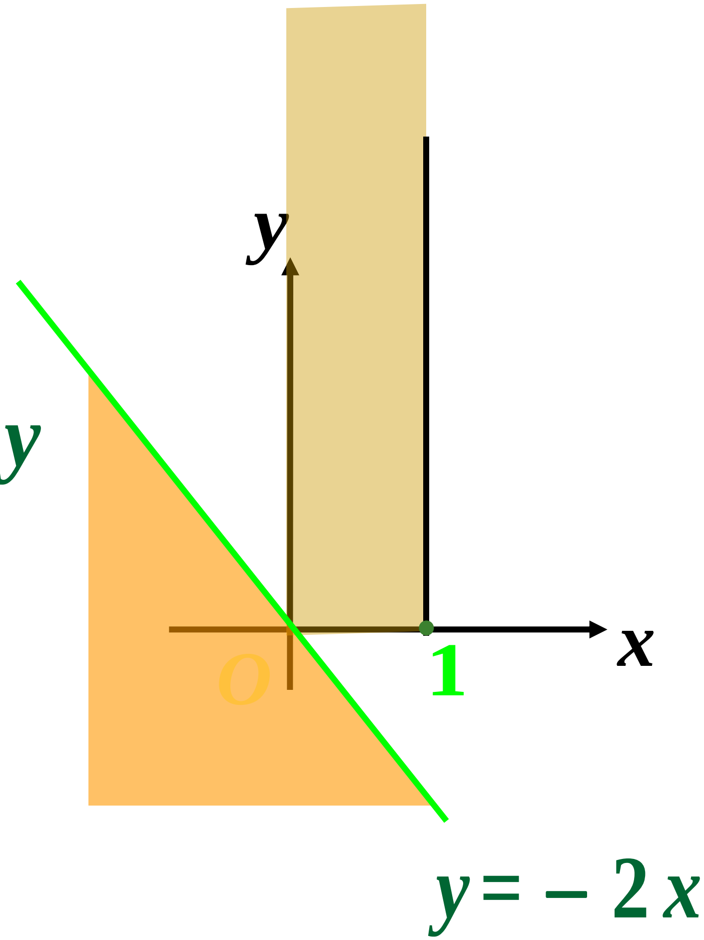
$$= \iint_{y \le -2x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \le x \le 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

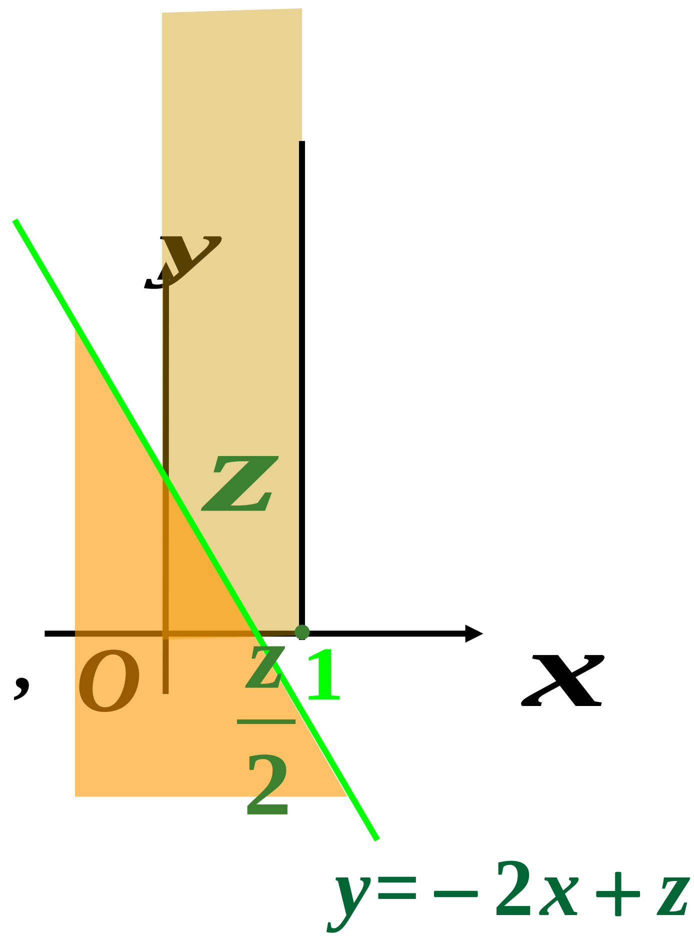


$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(2X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -2x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$



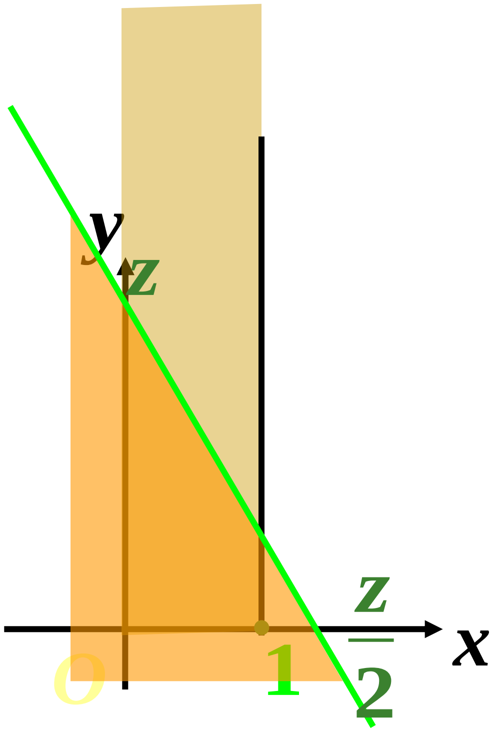
$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$
$$=P(X+Y\le z)$$
$$=\iint_{y\le -2x+z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $0<\frac{z}{2}\le 1$时，即$0<z\le 2$时，

$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{z-1+e^{-z}}{2}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -2x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$y = -2x + z$

当 $\frac{z}{2} > 1$ 时，即 $z > 2$ 时，

$$F_Z(z) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{z-2x} e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(1 - e^2)e^{-z}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \dfrac{z-1+e^{-z}}{2} & 0<z<2 \\ 1+\dfrac{1}{2}e^{-z}\left(1-e^{2}\right) & z\ge 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \dfrac{1-e^{-z}}{2} & 0<z<2 \\ \dfrac{1}{2}e^{-z}\left(e^{2}-1\right) & z\ge 2 \end{cases}$$

例4　若 X 和Y 独立, 具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 .

解　(1) 公式法 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限, 先找出使被积函数不为 0 的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

故 当$z<0$ 或$z\geq 2$时， $f_Z(z)=0.$

当$0\leq z<1$ 时，

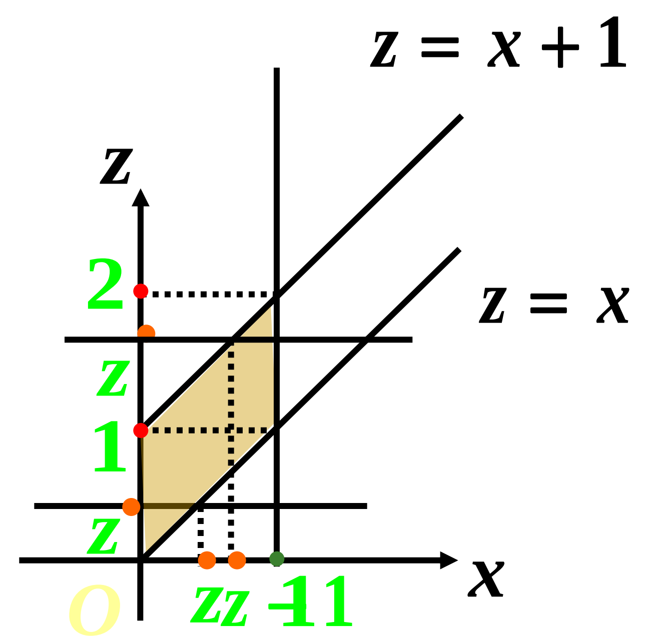
$$f_Z(z)=\int_0^z dx = z$$

当$1\leq z<2$时，

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 dx = 2-z$$

于是

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\leq z<1, \\ 2-z, & 1\leq z<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

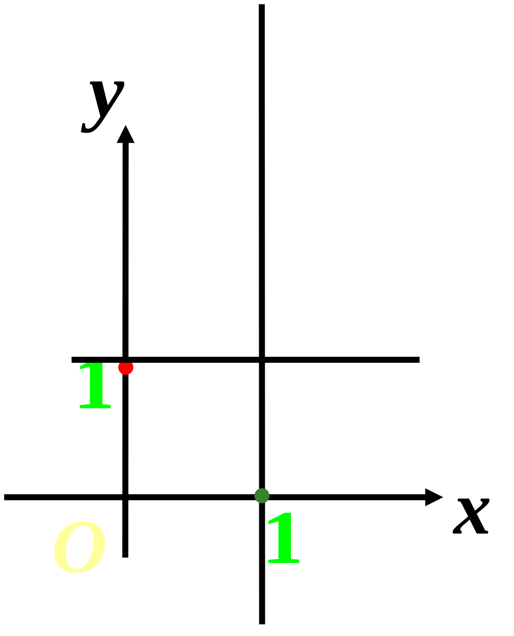


(2) 分布函数法

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

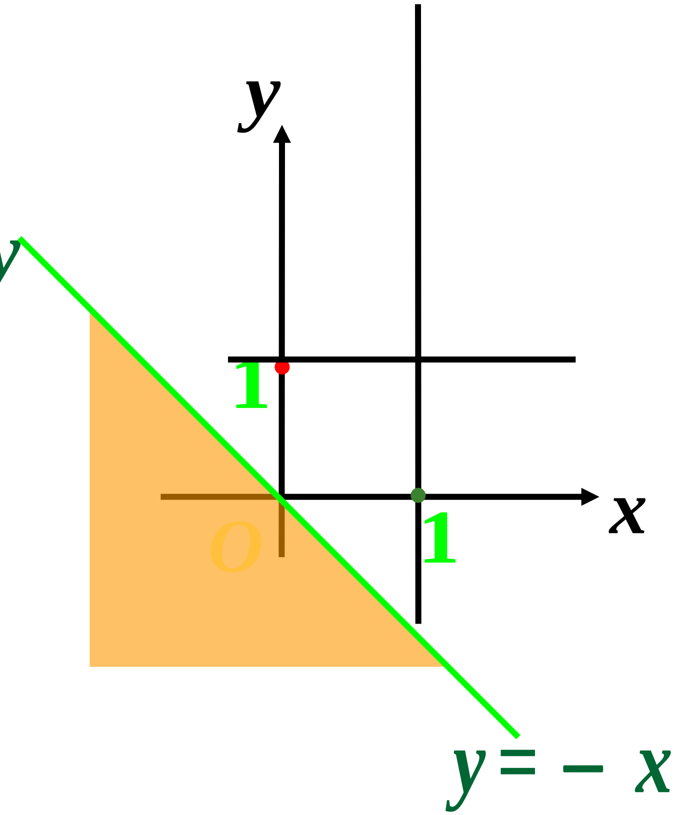
$$= P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P(X + Y \le z)$$
$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

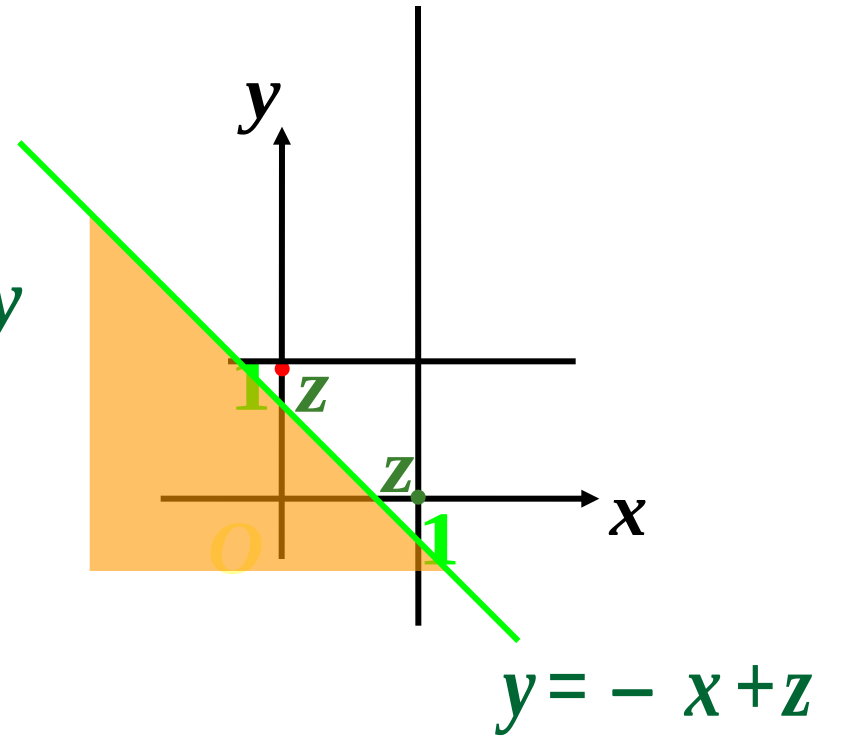


当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

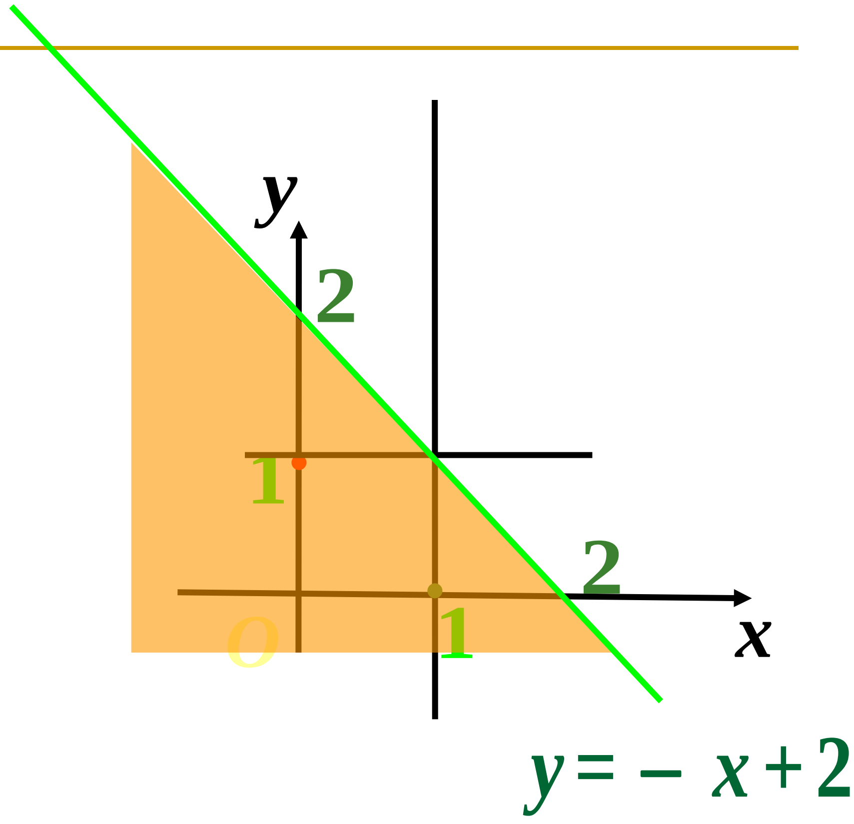
$$= P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $0 < z < 1$ 时，

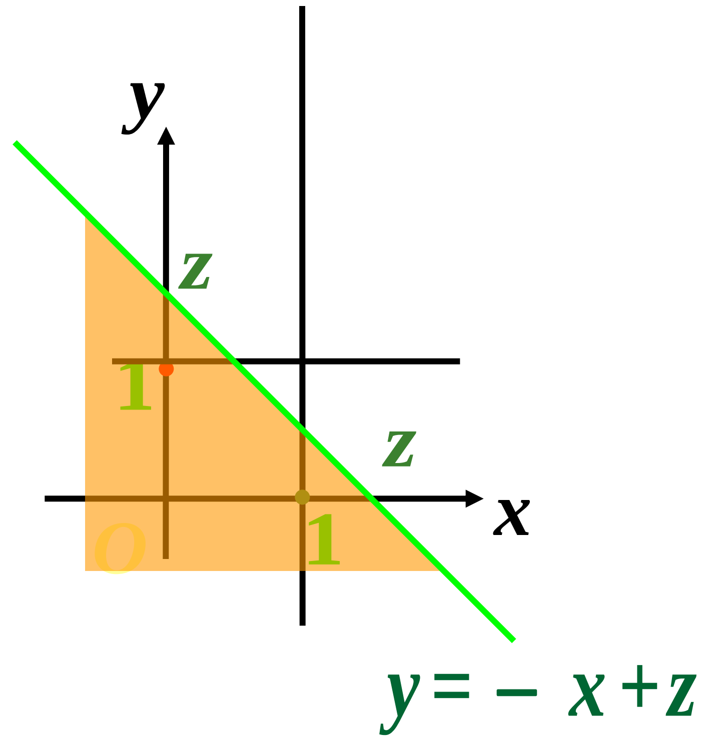
$$F_Z(z) = \frac{1}{2} \cdot z \cdot z = \frac{1}{2} z^2$$


y
2
1
O
1
2
x
$y = -x + 2$

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

$$= P(X + Y \le z)$$

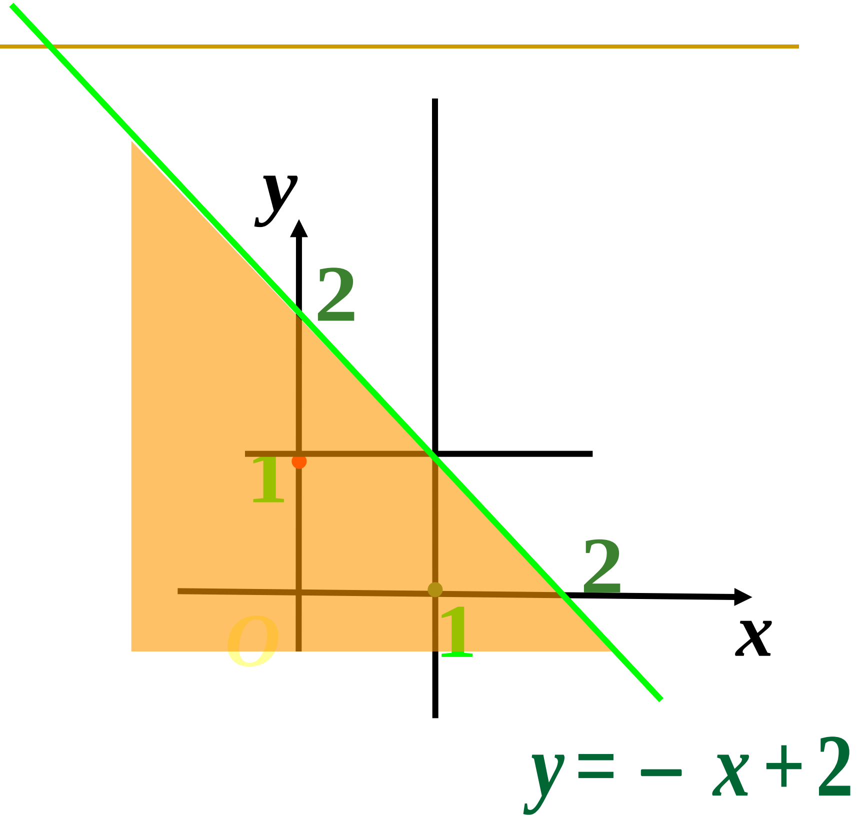
$$= \iint\limits_{y \le -x+z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $1 \le z < 2$ 时，

$$F_Z(z) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2-z) \cdot (2-z)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2$$


y
2
1
2
O
1
x
$y=-x+2$

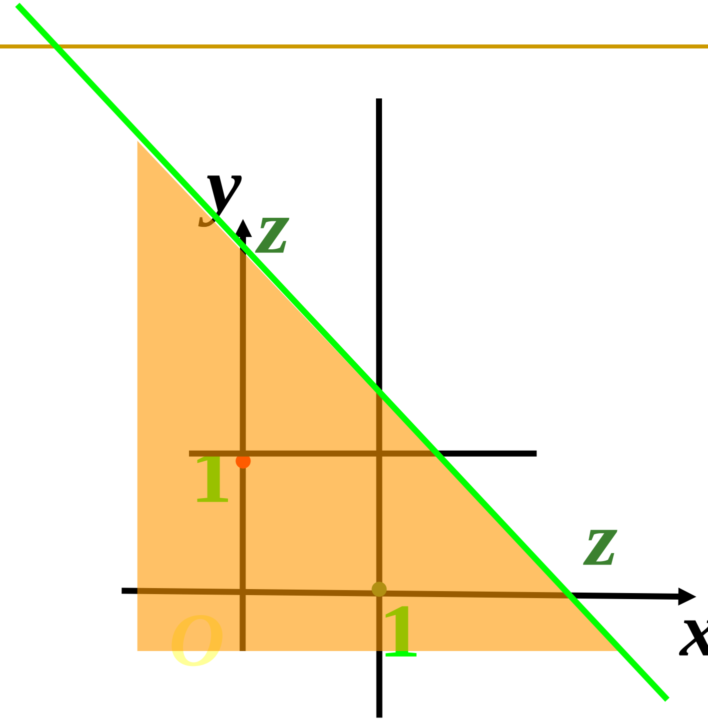
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

$$= P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{y \le z - x} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $2 \le z$ 时，

$$F_Z(z) = 1$$



$y = -x + z$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{1}{2}z^2 & 0 < z \le 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(2-z)^2 & 1 < z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

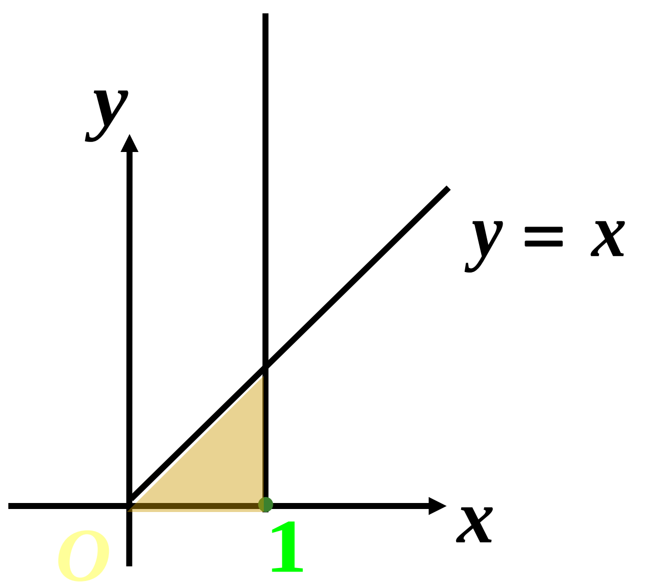
练习.设随机变量 X 和Y 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<x<1;0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：随机变量 $Z=X-Y$ 的概率密度；

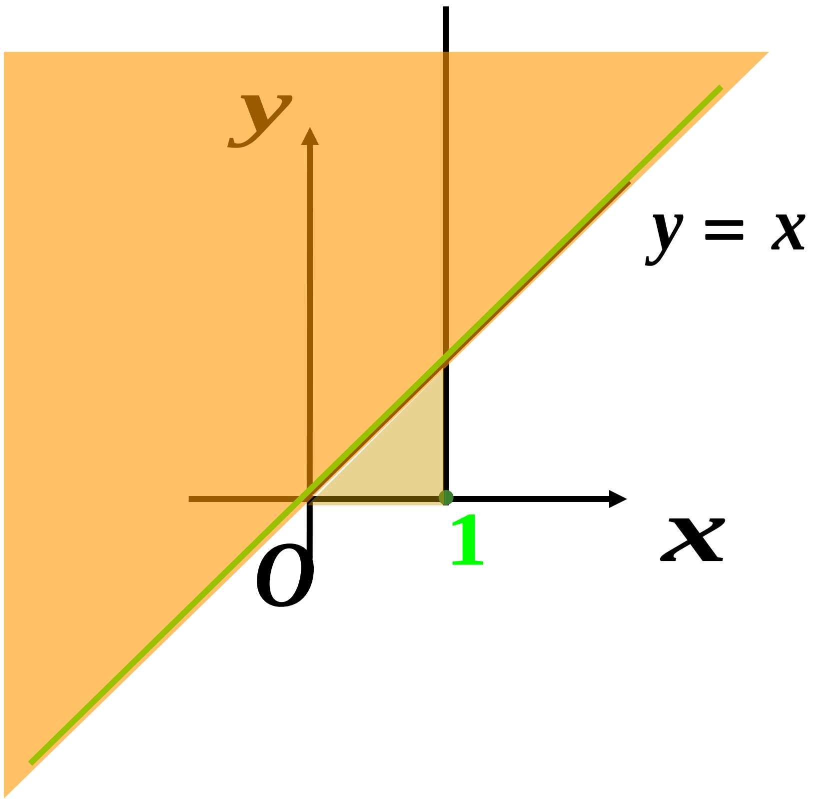
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{y\ge x-z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

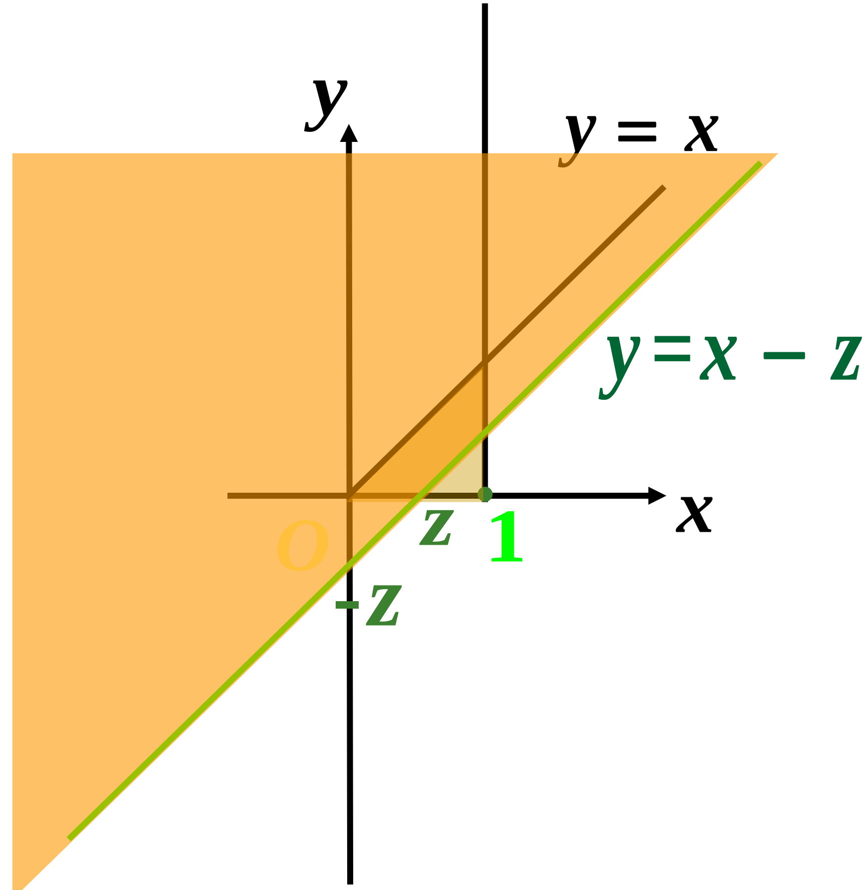
$$= \iint\limits_{y\ge x-z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{y\ge x-z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



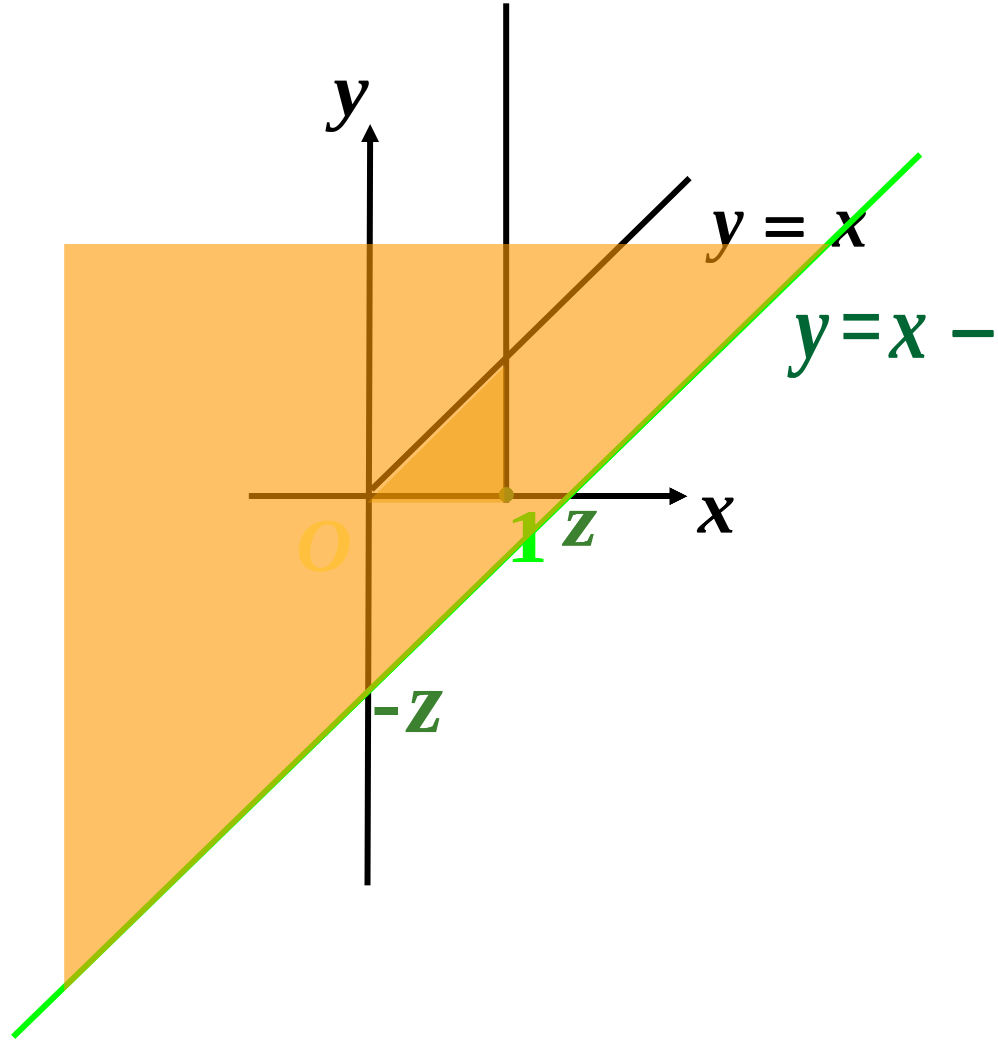
当$0 < z \le 1$时,

$$F_Z(z) = 1 - \int_z^1 \left[\int_0^{x-z} 3x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3$$

$$\boldsymbol{F_Z(z) = P\{Z \le z\}} = \iint\limits_{x-y \le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{y \ge x-z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$z \ge 1$时，$F_Z(z)$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{3}{2}z - \dfrac{1}{2}z^3 & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}z^2 & 0 < z \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

练习1 X 和 Y 服从区域D上的均匀分布,其中区域D由直线 $y=1+x, y=1-x$ 以及x轴围成的三角形区域,

求 $Z=X+Y$ 概率密度函数;

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+1}{2}, & -1<z<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

练习2设 X 和 Y 是两个随机变量，其联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0; y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+2Y$ 概率密度函数;

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$

当$z>0$时，$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\left[\int_0^{z-2y}2e^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

$$=1-e^{-z}-ze^{-z}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z} & 0 < z \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ ze^{-z} & z > 0 \end{cases}$$

练习3设 X 和 Y 独立, 概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases} 2y & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 .

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 2ye^{-x}, & x>0,0<y<1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases},$$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

当$z\le 0$时, $F_Z(z)=0$

当$0<z<1$时, $F_Z(z)=\int_0^z\left[\int_0^{z-y}2ye^{-x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

$$=z^2-2z+2-2e^{-z}$$

当$z \geq 1$时，$F_Z(z) = \int_0^1 \left[\int_0^{z-y} 2ye^{-x} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$

$$= 1 - 2e^{-z}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ z^2 - 2z + 2 - 2e^{-z} & 0 < z < 1 \\ 1 - 2e^{-z} & z \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 2z - 2 + 2e^{-z} & 0 < z < 1 \\ 2e^{-z} & z \geq 1 \end{cases}$$

练习4. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1;0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度；

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $0<z\le 1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}\cdot z\cdot z=\frac{1}{2}z^2$

当 $1<z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\frac{1}{2}\cdot(2-z)\cdot(2-z)=1-\frac{1}{2}(2-z)^2$

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{1}{2} z^2 & 0 < z \le 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(2-z)^2 & 1 < z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例5　设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　由于　$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式　$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=x-\frac{z}{2}}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般,设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布,且有$Z \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

有限个**相互独立**的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例6 X与Y独立, 且$X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,\sigma^2)$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布.

由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<y<+\infty,$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right)$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$
$$=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right)$$
$$=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$

当$z>0$时，$F_Z(z)=P(Z\le z)$

$$=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例7 X与Y独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为

$$P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2},\ Z=XY\ \text{的分布函数为}F(z)$$

$F(z)$有几个间断点　　　P106 29 同类型题目

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$$

$$=P(Y=0)P(XY\le z\mid Y=0)+P(Y=1)P(XY\le z\mid Y=1)$$

因为X与Y独立

$$=\frac{1}{2}P(0\le z)+\frac{1}{2}P(X\le z)$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\frac{1}{2}P(0\le z)+\frac{1}{2}P(X\le z)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}F_X(z), & 当z<0时\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}F_X(z) & 当z\ge 0时\end{cases}$$

例8 X与Y 独立, Y的概率密度是 $f(y)$, X的分布为

$P(X=b_i)=p_i, b_i>0, p_i>0, i=1,2,\ldots,n$.令$Z=\dfrac{Y}{X}$,求

Z的概率密度函数.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{Y}{X}\le z\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(X=b_i)P\left(\frac{Y}{X}\le z\mid X=b_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_iP\left(\frac{Y}{b_i}\le z\right)=\sum_{i=1}^{n}p_iP\left(Y\le b_iz\right)=\sum_{i=1}^{n}p_iF_Y\left(b_iz\right)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_Y(b_i z)$$

两边同时关于y求导

$$f_Z(z) = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i f(b_i z)$$

期中考试后第一次课;第十一次课结束

三. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

$$F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$
$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$$
$$=F_X(z)F_Y(z).$$

若X与Y独立同分布，分布函数都是$F(\cdot)$

$$F_{\max}(z)=F^2(z)$$

三. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

$$
\begin{aligned}
F_{\min}(z)=P\{N\le z\}&=1-P\{N>z\}\\
&=1-P\{X>z,Y>z\}\\
&=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}\\
&=1-[1-P\{X\le z\}]\cdot[1-P\{Y\le z\}]\\
&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].
\end{aligned}
$$

若X与Y独立同分布，分布函数都是$F(\cdot)$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$

则$M=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的分布函数 $F(\cdot)$,则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\quad F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

1. 设 X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，令 $Z=\min(X,Y)$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 为（　）.

（A）$F_X(z)F_Y(z)$；　（B）$1-F_X(z)F_Y(z)$；

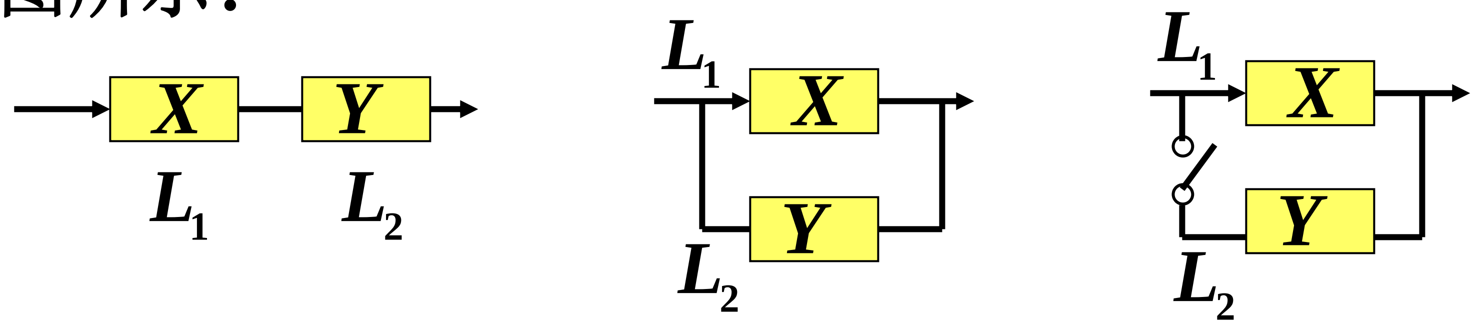
（C）$[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$；　（D）$1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

2. 设 X 与 Y 相互独立且同分布，且 X 的分布函数分别为 $F(x)$，令 $Z=\min(X,Y)$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 为（　）.

（A）$F^2(z)$；　（B）$F(x)F(y)$；

（C）$1-[1-F(z)]^2$；　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$.

例 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用(当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$
$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$