线性代数与空间解析几何

8.3 正定二次型

一、实二次型的惯性定律

二、正定二次型

一、实二次型的惯性定律

定理8.2(惯性定理) 设n元实二次型$f = X^{\mathrm{T}}AX$，经实可逆变换$X = C_1Y$ 及 $X = C_2Z$ 化成标准形

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$$

$$f = l_1z_1^2 + l_2z_2^2 + \cdots + l_rz_r^2 \qquad (l_i \neq 0),$$

则$k_1,k_2,\cdots,k_r$中正数的个数与$l_1,l_2,\cdots,l_r$中正数的个数相等.$k_1,k_2,\cdots,k_r$中负数的个数与$l_1,l_2,\cdots,l_r$中负数的个数也相等.

正数的个数(正惯性指数), 负数的个数(负惯性指数)

$$f = X^T AX$$

$$\begin{cases} X = CY(C\text{可逆})k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 \\ X = PY(P\text{正交})\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2 \\ \text{规范形}y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_{p+q}^2 \end{cases}$$

$R(A) = f$ 的正惯性指数+f 的负惯性指数

定理8.2(惯性定理) 秩为r的实二次型f 的标准形中, 正平方项的项数p (f 的正惯性指数) 是唯一确定的,而负平方项的项数恰好为$q = r - p$ (负惯性指数)也是唯一的. $p - q$ 称为**符号差**.

小结论

1. 任一实二次型$f=x^{\mathrm{T}}Ax$可经实可逆变换化为规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots y_{p+q}^2,$$

换句话说对于任意n阶实对称矩阵A，存在可逆矩阵C，

$$\text{使得}C^{\mathrm{T}}AC=\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

2. A与B是两个n阶实对称矩阵

(1) A与B合同，则$R(A)=R(B)$；反之不成立.

(2) 实对称矩阵A与B合同$\Leftrightarrow$

$X^{\mathrm{T}}AX$与$X^{\mathrm{T}}BX$有相同的正负惯性指数

总结一下等价,相似,合同的关系

$$\text{矩阵}A\text{与}B\text{等价} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)A\text{与}B\text{同型}, R(A)=R(B) \\ (2)\text{存在可逆矩阵}P\text{与}Q\text{,使得} \end{cases}$$

$$PAQ = B.$$

对于同型矩阵而言,秩是矩阵等价的不变量

矩阵A与B相似 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P,使得

$$P^{-1}AP = B.$$

实对称矩阵A与B相似 $\Leftrightarrow$ A与B有相同的特征值

矩阵A与B合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P,使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = B.$$

归纳总结

矩阵A与B等价$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

$$A\text{与}B\text{相似}\begin{cases} A\text{与}B\text{均可以对角化}\begin{cases}\lambda_A=\lambda_B,\ \text{则相似}\\ \lambda_A\neq\lambda_B,\text{则不相似}\end{cases}\\ A\text{可对角化},B\text{不可对角化},\ \text{则不相似}\\ A\text{与}B\text{均不可对角化},\text{则不能直接判断}\end{cases}$$

A与B合同

- A与B均为对称阵
  - A与B正负惯性指数相同则合同
  - 否则不合同
- A对称,B不对称，则不合同
- A与B均不对称,则不能直接判断

实二次型的惯性定律

例1：二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$的负惯性指数?

例2：

若$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&2\\0&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&1&1\end{pmatrix}$

则下列错误的是　C

(A) A与B相似，B与C等价

(B) A与B合同，A与C相似

(C) A与C合同，B与C等价

(D) A与B合同，B与C相似

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda + 2 & -2 \\ & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda + 2 & -4 \\ & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

练习1 若$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 则 **D**

(A) A与B 等价而不合同

(B)A与B合同而不相似

(C)A与C相似而不合同

(D)A与B 合同而且相似

练习2 若$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B

则(A) A与B不合同也不相似

(B)A与B合同而不相似

(C)A与C相似而不合同

(D)A与B合同而且相似

例3：

下列二次型的矩阵中，与$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$的矩阵合同的是

（A）$3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　（B）$-3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$

（C）$-2y_1^2+y_2^2$　（D）$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$

例4：

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$经正交线性变换化为标准形 $y_1^2+2y_3^2$ ，则$a=($　　$)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 0\\ 1 & 0 & c\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

二、正定二次型

1. 定义

设有实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$,如果对任何列向量$X \neq 0$,都有$f = X^{\mathrm{T}}AX > 0$,则称f 为正定二次型,对应的对称矩阵A 是正定的;

$$\text{证明矩阵}A\text{是正定的}\begin{cases}(1)A\text{是对称的;}\\ \\ (2)\text{所确定的二次型是正定的.}\end{cases}$$

2. 正定二次型的判定定理

定理一 A 为 n 阶实对称矩阵, 则下列命题等价

(1) $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 是正定二次型(矩阵 A 是正定的);

(2) f 的正惯性指数为 n; (A 与单位矩阵 E_n 合同)

(3)存在可逆矩阵 P ,使得 $A = P^{\mathrm{T}}P$;

(4) A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于0.

定理二 若二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 正定(A正定)

(1) A的主对角元$a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$;

(2) $|A| > 0$.

注意定理二是判定矩阵正定的必要条件，不是充分条件

判定下列矩阵是否正定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

顺序主子式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为矩阵A的顺序主子式

定理三 矩阵A正定$\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式$P_i > 0$

正定二次型

例1： 判定二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$
$+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正定性

法1： $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ A的各阶顺序主子式$P_i>0$

$$2>0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5>0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

法2： $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$

法3：配方法求标准形

$$f = 2(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_2 - \frac{x_3}{3})^2 + \frac{4}{3}x_3^2$$

例2： P237 6

求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 中的参数t，使得二次型是正定的

法1： $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{pmatrix}$ A的各阶顺序主子式$P_i>0$

$$5>0 \qquad \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0 \qquad \begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=t-2>0$$

法2： $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = t-2>0$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = t+6>0$$

例3 P237 10 $f = X^{\mathrm{T}}AX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$

(1) 写出f在正交变换下的标准形

(2) 判定f是否正定

(3) $n=2$ 时，求正定矩阵B，使得$A=B^2$

(1) f 的矩阵$A=$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - \frac{n+1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})^{n-}$$

因此 f 在正交变换下的标准形为

$$f = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2) + \frac{n+1}{2} y_n^2$$

例4 设 A,B是n阶正定矩阵,$k>0,l>0$,

证明 $kA+lB$ 是正定的

$$\text{证明矩阵}A\text{是正定的}\begin{cases}(1)A\text{是对称的;}\\(2)\text{所确定的二次型是正定的.}\end{cases}$$

证明 (1)A,B是n阶正定矩阵,A,B一定是对称矩阵,

$$A^T=A,B^T=B$$

$$(kA+lB)^T=kA^T+lB^T=kA+lB$$

(2)$\forall X\neq 0,\ X^T(kA+lB)X=kX^TAX+lX^TBX$

A, B是n阶正定矩阵,

故$\forall X \neq 0, X^T AX > 0, X^T BX > 0, k > 0, l > 0$

$$X^T(kA+lB)X = kX^T AX + lX^T BX > 0$$

故 $kA+lB$ 是正定的

例5 设A是n阶正定矩阵，证明 A^{-1} 及A^{*} 是正定的

(1) A是n阶正定矩阵, A一定是对称矩阵

$$A^T = A$$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$， A^{-1}是对称矩阵

(2)设A的所有特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

A是n阶正定矩阵, A的所有特征值$\lambda_i > 0$

A的所有特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

则A^{-1}的所有特征值为$\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$， A^{-1} 是正定的

例6 设A,B是n阶正定矩阵，证明AB正定的充要条件是$AB=BA$

1.必要性

A,B是n阶正定矩阵，A,B一定是对称矩阵，

$$A^T = A, B^T = B$$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

$\because AB$是n阶正定矩阵，AB一定是对称矩阵，

$$(AB)^T = AB$$

$$AB = BA$$

2.充分性　法一

(1)A,B是n阶正定矩阵,A,B一定是对称矩阵,

$$A^T = A, B^T = B$$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

$$\because AB = BA$$

$\therefore (AB)^T = BA = AB$　$\therefore AB$是对称阵

(2)A,B是n阶正定矩阵,

故存在可逆矩阵P,Q,使得

$$A = P^T P, B = Q^T Q$$

$$AB = P^T P Q^T Q$$

$$= Q^{-1} Q (P^T P Q^T Q)$$

$$= Q^{-1} (Q P^T P Q^T) Q$$

$$= Q^{-1} [(P Q^T)^T P Q^T)] Q$$

令$C = (P Q^T)^T P Q^T$，故C是正定的

$$AB = Q^{-1} [(P Q^T)^T P Q^T)] Q = Q^{-1} C Q$$

故AB与C 是相似的, 故AB与C 有相同的特征值

C是正定的,故C 的所有特征值都大于0

因此AB也是正定的

法二

(2)设λ是AB的任一特征值,对应的特征向量为$X \neq 0$

则有$ABX = \lambda X$, $X \neq 0$

A是正定矩阵,A可逆,

$$A^{-1}ABX = \lambda A^{-1}X,$$

$$BX = \lambda A^{-1}X,$$

两边同时左乘X^T, $X^TBX = \lambda X^TA^{-1}X$,

A是正定矩阵,A^{-1}正定, B是正定矩阵

$X^TBX > 0, X^TA^{-1}X > 0$, $\lambda > 0$ $\therefore AB$是正定的

例7 设A是m阶正定矩阵，B是$m\times n$阶实矩阵

证明$B^{\mathrm{T}}AB$正定$\Leftrightarrow R(B)=n$

1.必要性　法一

$B^{T}AB$是n阶正定矩阵，$R(B^{T}AB)=n$

$$R(B^{T}AB)=n\le R(B)\le n$$

$$R(B)=n$$

必要性　法二

$B^T AB$是n阶正定矩阵， $\forall X \neq 0, X^T B^T ABX > 0$

$$X^T B^T ABX = (BX)^T A(BX) > 0$$

由于A是正定的， $BX \neq 0$

即$\forall X \neq 0, BX \neq 0,$

也就是齐次线性方程组$BX=0$只有零解

所以$R(B)=n$

2.充分性

(1) A是n阶正定矩阵，A一定是对称矩阵，

$$A^T = A$$

$$(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$$

$$\therefore B^T AB \text{ 是对称阵}$$

(2) $\forall X \neq 0, X^T B^T ABX = (BX)^T A(BX)$

$R(B)=n$，齐次线性方程组$BX=0$只有零解

故$\forall X \neq 0, BX \neq 0$， A是n正定矩阵，

$$(BX)^T A(BX) > 0$$

P237 13　设A 是$m\times n$阶实矩阵

证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定 $\Leftrightarrow R(A)=n$

例8 设A是n阶实对称矩阵，有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$；

(1) a满足什么条件，$aE+A$ 正定？

(2) 正数ε满足什么条件，$E+\varepsilon A$ 正定？

(1) 设A是n阶实对称矩阵，有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$；

$aE+A$ 的特征值为$a+\lambda_1, a+\lambda_2, \cdots, a+\lambda_n$

$aE+A$ 正定的充分必要条件是所有特征值大于0

即$a+\lambda_1 > 0, a+\lambda_2 > 0, \cdots, a+\lambda_n > 0$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$，故$a+\lambda_1 < a+\lambda_2 < \cdots < a+\lambda_n$

即只要$a+\lambda_1 > 0$即可

(2) 设A是n阶实对称矩阵，有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$；

$E+\varepsilon A$ 的特征值为$1+\varepsilon\lambda_1, 1+\varepsilon\lambda_2, \cdots, 1+\varepsilon\lambda_n$

$E+\varepsilon A$ 正定的充分必要条件是所有特征值大于0

即$1+\varepsilon\lambda_1 > 0, 1+\varepsilon\lambda_2 > 0, \cdots, 1+\varepsilon\lambda_n > 0$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$，故$1+\varepsilon\lambda_1 < 1+\varepsilon\lambda_2 < \cdots < 1+\varepsilon\lambda_n$

即只要$1+\varepsilon\lambda_1 > 0$即可

例9 已知$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$是正定矩阵，

证明$\Delta=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$

证明 $A=\left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}$

A是正定矩阵，故$\forall X \neq 0,\ X^T AX > 0.$

取$X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \neq 0, Y=(x_2, x_3)^T, Y \neq 0$

则有$X_1^T A X_1 = (0, Y^T)\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$

$$= (0, Y^T)\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= Y^T B Y$$

A是正定矩阵，则有$X_1^T A X_1 = Y^T B Y > 0$

因此B是正定的，$|B| = \Delta > 0$

练习题

1.设A是n阶实对称矩阵, B是正定矩阵,若BA的特征值都大于0,证明A正定.

2.设A是m阶矩阵, B是n阶矩阵,若$P=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$是正定阵,证明$B$正定.

3. 设A是n阶实对称矩阵, $AB+B^{\mathrm{T}}A$是正定矩阵,证明A可逆.

4. 设A,B分别为m阶，n阶正定矩阵，试判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

5. 设$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 在满足$X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时的最大值和最小值.

练习 设$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 在满足$X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时的最大值和最小值.

思考 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX$在$X^{\mathrm{T}}X=a$ 时的最大值和最小值.