线性代数与空间解析几何

4.2　线性相关与线性无关

一　　线性相关与线性无关的定义

二　　线性相关的一种刻画

三　　线性相关的判定

一　线性相关与线性无关的定义

1. 线性组合 对于n维向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,

若存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$$

则称β是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的**线性组合.**

或说称β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性表示,**

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是表示系数.

例1. 设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$

证明α_3是α_1,α_2的线性组合

设$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

$$(4,1,-1)=k_1(1,2,-1)+k_2(2,-3,1)$$

$$\begin{cases}4=k_1+2k_2\\1=2k_1-3k_2\\-1=-k_1+k_2\end{cases}\Rightarrow k_1=2,k_2=1$$

即$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$

例2. 设$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1$
$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,问$\alpha$是否可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示?

$$设k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=\alpha$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=a_1,k_2=a_2,k_n=a_n$$

$$即\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

当做结论记住

2. 线性相关

给定n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,如果存在

不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性相关**

否则就是 **线性无关**

线性无关 $\Leftrightarrow$若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,则必有

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

例3. 设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性？

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$$

例4. 设$\alpha_1=(1,1,-1),\alpha_2=(2,-3,2),\alpha_3=(3,-2,1)$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性？

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$$\begin{cases} k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1-3k_2-2k_3=0 \\ -k_1+2k_2+k_3=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

由*Cramer*法则，上述方程存在非零解，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

注:

(1) 当向量组中只含有一个向量时

若$\alpha = 0$, 则 α 线性相关;

若$\alpha \neq 0$, 则 α 线性无关.

(2) 当向量组中包含两个向量

两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例;

对于含有两个向量的向量组,它线性相关的充要条件是两向量的对应分量成比例,几何意义是两向量共线;

三个向量相关的几何意义是三向量共面.

(3) 部分组线性相关,则向量组线性相关.

判断：向量组线性相关，则部分组线性相关

(4)若向量组线性无关,则任意一个非零的部分组线性无关.

逆命题不成立

(5)含有零向量的向量组必定线性相关.

例5. 讨论$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,$
$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$的线性相关性？

设$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=\cdots=k_n=0$$

$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,$
$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$**线性无关**

例6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$,证明β_1,β_2,β_3线性无关

设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

即$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3\alpha_3=0$

$$k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$k_1=0$$

$$k_1+k_2=0 \qquad \Rightarrow k_1=k_2=k_n=0$$

$$k_1+k_2+k_3=0$$

故β_1,β_2,β_3线性无关

例7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$

证明$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$ 线性无关

设$k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$

$$(k_2+\cdots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\alpha_2$$

$$+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{m-1})\alpha_m=0$$

$$\begin{cases} \qquad k_2+k_3+\cdots+k_{m-1}+k_m=0 \\ k_1+\qquad k_3+\cdots+k_{m-1}+k_m=0 \\ \cdots\cdots \\ k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{m-1}\qquad =0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$$

由$Cramer$法则,上述方程存在非零解,

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$ 线性无关关.

二　线性相关性的一种刻画

定理一 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\ge 2)$线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少有一个向量可用其余$m-1$个向量线性表示

逆否命题

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\ge 2)$线性无关$\Leftrightarrow$ 其中任一向量均不能由其余向量线性表示.

判断下列命题是否正确　P136　5

(1) 若有常数 k_1, k_2, k_3, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.　×

(2) 若 β 不能表示为 α_1,α_2 的线性组合, 则向量组 α_1,α_2,β 线性无关.　×

(3) α_1,α_2 线性无关, 且 β 不能由 α_1,α_2 的线性表示, 则向量组 α_1,α_2,β 线性无关. √

(4) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意向量都可由其余两个向量线性表示.　×

(5) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意向量都可由其余两个向量线性表示,则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. √

(6) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意两个向量都线性无关,则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关; ×

(7) 设有一组常数k_1,k_2,k_3,使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,且$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示,则$k_3\neq 0$; ×

(8) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关,且$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0$,则$k_1,k_2\cdots k_n$不全为零 ×

定理二 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 均为n 维列向量,令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$,

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$Ax=0$ 存在非零解.

定理三　矩阵判别法

$$\text{设有}n\times m\text{矩阵}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

则A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

(1) 线性相关$\Leftrightarrow R(A)<m$(A的列数)

(2) 线性无关$\Leftrightarrow R(A)=m$(A的列数)

A的行向量组线性无关$\Leftrightarrow R(A)=A$的行向量的个数

A为n阶方阵时,A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

推论1

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ri}\end{pmatrix},\quad \beta_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{ri}\\a_{r+1,i}\\\vdots\\a_{r+s,i}\end{pmatrix},\quad (i=1,2,\cdots,m),$$

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.

若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.

推论2 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$n$维向量组,若 $m>n$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$必定线性相关.

任意n+1个n维向量必定线性相关

例8. **P135 3**

A是n阶可逆矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是$k$个$n$维列向量,

试证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$线性无关$\Leftrightarrow A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k$线性无关

作业 P135 3, 4(3,5)

P136 8， 9