线性代数与空间解析几何

5.1　齐次线性方程组

一、齐次线性方程组解的结构

二、解的性质

一、齐次线性方程组解的结构

假设有m个方程n个未知数的齐次线性方程组

代数形式
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 未知向量 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

矩阵形式 $AX = O(m$ 维列向量$)$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

向量形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n = 0$

二、解的性质

(1) 显然$O=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}$ 是齐次线性方程组的解,称为**零解;**

(2) 若存在非零向量$\xi=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1}$ 满足方程, 称其为齐次线性方程组的**非零解.**

(3) 若ξ_1和ξ_2都是齐次线性方程组的解向量, 则$\xi_1+\xi_2$仍为齐次线性方程组的解向量;

(4) 若ξ 是齐次线性方程组的解向量, k 是常数, 则$k\xi$仍为齐次线性方程组的解向量;

齐次线性方程组的解空间

齐次线性方程组的解集合$N(A)=\{\xi \mid A\xi=0\}$

$N(A)=\{\xi \mid A\xi=0\}$关于加法和数乘满足封闭性, 因此构成向量空间, 称为齐次线性方程组的解空间.

如何求出齐次线性方程组的解空间?

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间V 的一组基底,则

$$V = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$$

因此要想求齐次线性方程组的解空间，只需求出解空间的一个基底即可.

定理1 齐次线性方程组的解集合$N(A)=\{\xi \mid A\xi=0\}$是向量空间, 并且$N(A)$的维数为$n-R(A)$

其中n 是未知量的个数, $R(A)$是系数矩阵的秩.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{m\,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + +a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + +a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

令 $x_{r+1}=1, x_{r+2}=0, \cdots, x_n = 0$, 带入上述方程组, 求解得

$$\xi_1 = \left(d_{11}, d_{21}, \cdots d_{r1}, 1, 0 \cdots, 0\right)^T$$

令 $x_{r+1}=0, x_{r+2}=1, \cdots, x_n = 0$, 带入上述方程组, 求解得

$$\xi_2 = \left(d_{12}, d_{22}, \cdots d_{r2}, 0, 1 \cdots, 0\right)^T$$

…………………………………

令 $x_{r+1}=0, x_{r+2}=0, \cdots, x_n = 1$, 带入上述方程组, 求解得

$$\xi_{n-r} = \left(d_{1n-r}, d_{2n-r}, \cdots d_{rn-r}, 0, 0 \cdots, 1\right)^T$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots \xi_{n-r}=\begin{pmatrix} d_{1n-r} \\ d_{2n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

推论1 设A是$m\times n$矩阵, $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$, 则

(1) $AX=0$有唯一零解的$\Leftrightarrow R(A)=n$ (未知量的个数)

(2) $AX=0$有无穷解的$\Leftrightarrow R(A)<n$ (未知量的个数)

(3) 当$R(A)=r<n$时, 若$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是$N(A)$的一个基底,

则$AX=0$的解空间可表示成

$$N(A)=\{X\mid X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},k_i\in F(R)\}$$

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 称为齐次线性方程组的**基础解系**.

此时齐次线性方程组的**通解为**

$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

当$R(A)=n$时, 方程组只有零解. $N(A) = \{0\}$

此时齐次线性方程组的没有基础解系

当$R(A)=r<n$时, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 为齐次线性方程组的基础解系 $\Leftrightarrow$

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 为$AX = 0$的$n - R(A)$个线性无关的解向量

要证明某个向量组为齐次线性方程组的基础解系

(1)该组向量都是方程组的解；

(2)该组向量线性无关；

(3) 线性无关的个数是n-$R(A)$；

例1 P165 13

证明与齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系等价的线性无关的向量组也是 $AX=0$ 的基础解系.

推论2 n个未知数，n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的 $\Leftrightarrow R(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$

例2 求解下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

讲解初等行变换法解方程组

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&2&4&-2\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&6&0\\0&0&0&7&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{matrix}\end{array}$$

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_5\\ x_3=x_5\\ x_4=0\end{cases}$$

取$x_2=1, x_5=0,$

得$x_1=-2, x_3=0, x_4=0$

于是$\xi_1=(-2,1,0,0,0)^T$

取$x_2=0, x_5=1,$ 得$x_1=1, x_3=1, x_4=0$

于是$\xi_2=(-2,0,1,0,1)^T$ 通解为$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2$