第六章

Amortized Analysis

提要

参考资料

Chapter 17 Amortized Analysid

Pages 405 - 430

6.1 平摊分析基本原理

- Amortized Analysis的基本思想
- Amortized Analysis方法

关注一系列**数据结构上**操作的时间复杂度：

考虑操作序列：$OP_1, OP_2, \ldots, OP_m$

想确定这个操作序列可能花费的最长时间

一个可能的想法：考察每种操作OP_i的最坏情况时间复杂度t_i，

由此，上述操作序列可能的最长时间就是：

每种操作OP_i的最坏时间t_i之和

不一定正确！

操作之间实际上是相互关联的，
不能假设它们是相互独立的！

例如：

- 普通栈操作及其时间代价
  - Push(S, x): 将对象x压入栈S
  - Pop(S)：弹出并返回S的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为1
  - n个Push和Pop操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

- 新的栈操作及其时间代价
  - Multipop(S, k):

    去掉S的k个栈顶对象，当$|S|<k$时弹出整个栈
  - 实现算法

```
Multipop(S, k)
1  While  not STACK-EMPTY(S) and k≠0  Do
2          Pop(S);
3          k←k-1.
```

  - Multipop(S, k)的实际代价（设Pop的代价为1）
    - Multipop的代价为$min(|S|, k)$

- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 栈的大小至多为n
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n) = O(n^2)$

分析过于粗糙，不够紧确！

原因：只关注于操作，忽略了数据结构！

HITWH
SE

Amortized Analysis的基本思想

平摊分析目的是分析给定
数据结构上的n个操作代价上界

对一个数据结构
执行一个操作序列：

有的代价很高
有的代价一般
有的代价很低

各个操作的平均代价？
整个序列的代价是多少？

将总的代价平摊到
每个操作上

平摊代价

不涉及概率
异于平均分析

Amortized Analysis的基本思想

- Aggregate Analysis方法（每个操作的代价）
  - 确定n个操作的上界$T(n)$, 每个操作平摊$T(n)/n$
- Accounting方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - 某些操作在数据结构的特殊对象上“预付”代价
- Potential方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - “预付”的代价作为整个数据结构的“能量”

6.2 Aggregate Analysis

- 聚集方法的原理
- 聚集方法的实例之一
- 聚集方法的实例之二

聚集方法实例之一：栈操作系列

- 普通栈操作及其时间代价
  - Push(S, x)：将对象x压入栈S
  - Pop(S)：弹出并返回S的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为1
  - n个Push和Pop操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

聚集方法的原理

目的是分析n个操作系列中每个操作的复杂性上界

数据结构上共有n个操作，最坏情况下：

操作1: Cost=t_1
操作2: Cost=t_2
.
.
.
操作n: Cost=t_n

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

平摊代价：
$T(n)/n$

每个操作被赋予相同代价，不管操作类型

- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n) = O(n^2)$
    - 平摊代价为$T(n)/n = O(n)$

分析太粗糙！！！

  - 精细分析
    - 一个对象在每次被压入栈后至多被弹出一次
    - 在非空栈上调用Pop的次数(包括在Multipop内的调用)至多为Push执行的次数，即至多为n
    - 最坏情况下操作序列的代价为$T(n) \le 2n = O(n)$
    - 平摊代价=$T(n)/n=O(1)$

n-1个push
1个multipop

聚集方法实例之二： 二进制计数器

- 问题定义：由0开始计数的k位二进制计数器

  输入：k位二进制变量x，初始值为0

  输出：$x+1 \bmod 2^k$

  数据结构：

  $A[0..k-1]$作为计数器，存储x

  x的最低位在$A[0]$中，最高位在$A[k-1]$中

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

- 计数器加1算法

输入：$A[0..k-1]$，存储二进制数x

输出：$A[0..k-1]$，存储二进制数$x+1 \bmod 2^k$

```
INCREMENT(A)
1     i←0
2     while  i<k and A[i]=1  Do
3           A[i]←0;
4           i←i+1;
5     If  i<length[A]  Then  A[i]←1
```

- 初始为零的计数器上n个INCREMENT操作分析

Counter Value									每个操作 Cost
N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

- 粗略分析
  - 每个Increment的时间代价最多$O(k)$
  - n个Increment序列的时间代价最多$O(kn)$
  - n个Increment平摊代价为$O(k)$
  - 例如上例中：$k*n=8*16=128$
- 精细分析

操作Cost = O(发生改变的位数)

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

- 精细分析
  - $A[0]$每次操作发生一次改变，总次数为n
  - $A[1]$每两次操作发生一次改变，总次数为$n/2$
  - $A[2]$每四次操作发生一次改变，总次数为$n/4$
  - 一般地
    - 对于$i=0, 1, \ldots, \lg n$, $A[i]$改变次数为$n/2^i$
    - 对于$i>\lg n$, $A[i]$不发生改变
      （因为n个操作结果为n，仅涉及$A[0]$至$A[\lg n]$位）
  - $T(n)= \Sigma_{0\le i \le \lg n} n/2^i < n \Sigma_{0\le i \le \infty} 1/2^i = O(n)$
  - 每个Increment操作的平摊代价为$O(1)$

6.3 The Accounting Method

- Accounting方法的原理
- Accounting方法的实例之一
- Accoutning方法的实例之二

Accounting方法的原理

- Accounting方法
  - 目的是分析n个操作序列的复杂性上界，一个操作序列中有不同类型的操作，不同类型操作的代价各不相同
  - 于是我们为每种操作分配不同的平摊代价
    - 平摊代价可能比实际代价大，也可能比实际代价小
    - 如果平摊代价比实际代价高：一部分用于支付实际代价，多余部分作为Credit附加在数据结构的具体数据对象上
    - 当一个操作的平摊代价比实际代价低时：Credit用来补充支付实际代价
  - 平摊代价的选择规则：
    - 设α_i和c_i是操作i的平摊代价和实际代价

数据结构中存储的Credit在任何时候都必须非负，

即$\sum_{1\le i\le n}\alpha_i - \sum_{1\le i\le n}c_i \ge 0$永远成立

栈操作序列的分析

- 各栈操作的实际代价
  - Cost(PUSH)=*1*
  - Cost(POP)=*1*
  - Cost(MULTIPOP)=$min\{k, s\}$
- 各栈操作的平摊代价
  - Cost(PUSH)=*2*
    - 一个*1*用来支付PUSH的开销，
    - 另一个*1*存储在压入栈的元素上，预支POP的开销
  - Cost(POP)=*0*
  - Cost(MULTIPOP)=*0*
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n} c_i \ge 0$ 对于任意*n*个操作序列都成立
    - 因为栈中的元素个数≥0
- *n*个栈操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

二进制计数器Increment操作序列分析

- Increment操作的平摊代价
  - 每次一位被置1时，付2美元
    - 1美元用于置1的开销
    - 1美元存储在该“1”位上，用于支付其被置0时的开销
    - 置0操作无需再付款
  - Cost(Increment)=2
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n} c_i$ 对于任意n个操作序列都成立
  - 即：任何时刻，计数器上的Credit非负
- n个Increment操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

- 初始为零的计数器上n个INCREMENT操作分析

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	每个操作 Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

6.4 The Potential Method

- Potential方法的原理
- Potential方法的实例之一
- Potential方法的实例之二

Potential方法的原理

- Potential方法
  - 目的是分析n个操作系列的复杂性上界
  - 在会计方法中，如果操作的平摊代价比实际代价大，我们将余额与数据结构的数据对象相关联
  - Potential方法把Credit余额与整个数据结构关联，所有这样的余额之和，构成数据结构的势能
    - 如果操作的平摊代价大于操作的实际代价，势能增加
    - 如果操作的平摊代价小于操作的实际代价，要用数据结构的势能来支付实际代价，势能减少

- 数据结构势能的定义
  - 考虑在初始数据结构D_0上执行n个操作
  - 对于操作i
    - 操作i的实际代价为c_i
    - 操作i将数据结构D_{i-1}变为D_i
    - 数据结构D_i的势能是一个实数$\phi(D_i)$，ϕ是一个正函数
    - 操作i的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$
  - n个操作的总平摊代价

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

总平摊代价必须是总实际代价的上界

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

  - 关键是ϕ的定义
    - 保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$，使总平摊代价是总实际代价的上界
    - 如果对于所有i，$\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$，可以保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$
    - 实际可以定义$\phi(D_0) = 0$，$\phi(D_i) \geq 0$（由具体问题确定）

栈操作序列的分析

- 栈的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为栈D_m中对象的个数，于是
    - $\phi(D_0)=0$， D_0是空栈
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$，因为栈中对象个数不会小于0
    - n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - 栈操作的平摊代价（设栈D_{i-1}中具有s个对象）
    - PUSH: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s+1)-s=2$
    - POP: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s-1)-s=0$
    - MULTIPOP(S, k): 设$k'=min(k,s)$

      $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=k'+(s-k')-s=k'-k'=0$
  - n个栈操作序列的平摊代价是$O(n)$

二进制计数器操作序列分析

- 计数器的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为第m个操作后计数器中1的个数b_m
    - $\phi(D_0)=0$， 0的计数中不包含“1”
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$，因为计数器中1的个数不会小于0
    - 于是，n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - INCREMENT操作的平摊代价
    - 第i个INCREMENT操作把t_i个位置成0，实际代价为$c_i\leq t_i+1$
    - 计算操作i的平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})$
      - If $b_i=0$，操作i把所有k位置0，所以$b_{i-1}=k$，$t_i=k$
      - If $b_i>0$，则$b_i=b_{i-1}-t_i+1$
      - 于是$b_i\leq b_{i-1}-t_i+1$

        $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=b_i-b_{i-1}\leq b_{i-1}-t_i+1-b_{i-1}=1-t_i$
      - 平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})\leq(t_i+1)+(1-t_i)=2$
  - n个操作序列的总平摊代价是$O(n)$

6.5 动态表性能平摊分析

- 动态表的概念
- 动态表的扩张与收缩
- 仅含扩张操作的动态表平摊分析
- 一般的动态表平摊分析

动态表——基本概念

- 动态表
- 动态表支持的操作
  - TABLE-INSERT:将某一元素插入表中
  - TABLE-DELETE:将一个元素从表中删除
- 数据结构:用一个(一组)数组来实现动态表
- 非空表T的装载因子$\alpha(T)$
  - $\alpha(T)$= T存储的对象数/表大小
  - 如果动态表的装载因子以一个常数为下界，则表中未使用的空间就始终不会超过整个空间的一个常数部分
  - 空表的大小为0，装载因子为1

动态表——基本概念

- 虽然插入和删除操作可能会引起表的扩张和收缩，从而具有较高的实际代价
- 但是，利用平摊分析能够证明，插入和删除操作的平摊代价为$O(1)$
- 同时保证动态表中未用的空间始终不超过整个空间的一部分。

动态表的表示

设T表示一个动态表:

- $table[T]$是一个指向表示表的存储块的指针
- $num[T]$表T中的数据项个数
- $size[T]$是T的大小
- 开始时，$num[T]=size[T]=0$

HITWH SE

数据插入算法

算法：TABLE—INSERT(T, x) /*复杂的插入操作*/

```
1       If  size[T]=0 Then                          /*开销为常数*/
2           获取一个大小为1的表 table[T];
3           size[T]←1;
4       If  num[T]=size[T] Then                     /*开销取决于size[T]*/
5           获取一个大小为 2×size[T]的新表new-table;
6           将 table[T]中元素插入new-table;         /*简单插入操作*/
7           释放 table[T];
8           table[T]←new-table;
9           size[T]←2×size[T];
10          将 x插入table[T];
11          num[T]←num[T]+1
```

动态表的扩张

- 插入一个数组元素时,完成的操作包括
  - 分配一个比原表包含更多的槽的新表
  - 再将原表中的各项复制到新表中去
- 常用的启发式技术是分配一个比原表大一倍的新表,
  - 只对表执行插入操作,则表的装载因子总是至少为1/2
  - 浪费掉的空间就始终不会超过表总空间的一半

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

聚集分析-粗略分析

- 考察第i次操作的代价C_i
  - 如果i=1, C_i=1;
  - 如果$num[T]<size[T]$, C_i=1;
  - 如果$num[T] = size[T]$, C_i=i;
- 共有n次操作
  - 最坏情况下,每次都按照扩张操作计量,总的代价上界为n^2
- 这个界不精确
  - n次TABLE—INSERT操作并不常常包括扩张表的代价
  - 仅当i-1为2的整数幂时第i次操作才会引起一次表的扩张

聚集分析-精细分析

- 第i次操作的代价C_i
  - 如果$i-1=2^m$, $C_i=i$； 否则$C_i=1$
- n次TABLE—INSERT操作的总代价为 $\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^j < n + 2n = 3n$

★每一操作的平摊代价为$3n/n=3$

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

会计方法

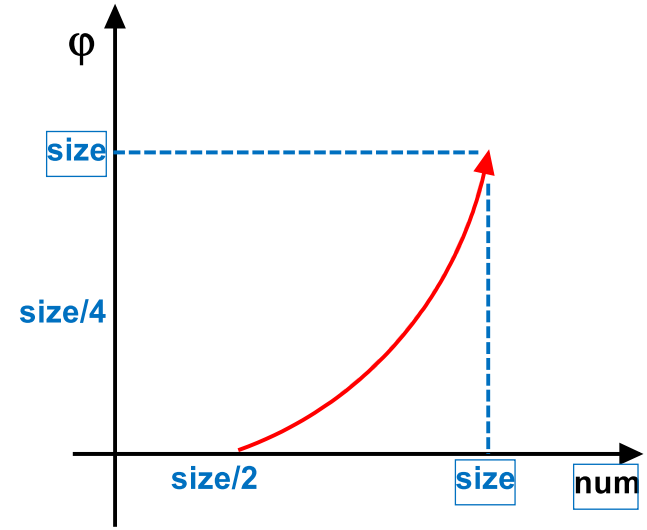
- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3
  - 1支付第10步中的基本插入操作的实际代价
  - 1作为自身的存款
  - 1存入表中第一个没有存款的数据上
- 当发生表的扩张时，数据复制的代价由数据上的存款来支付
- 任何时候，存款总和非负
- 初始为空的表上n次TABLE-INSERT操作的平摊代价总和为$3n$

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

势能法分析

势怎么定义才能使得表满发生扩张时势能能支付扩张的代价?

- 如果势能函数满足
  - 刚扩充完,$\phi(T)=0$
  - 表满时 $\phi(T)=size(T)$



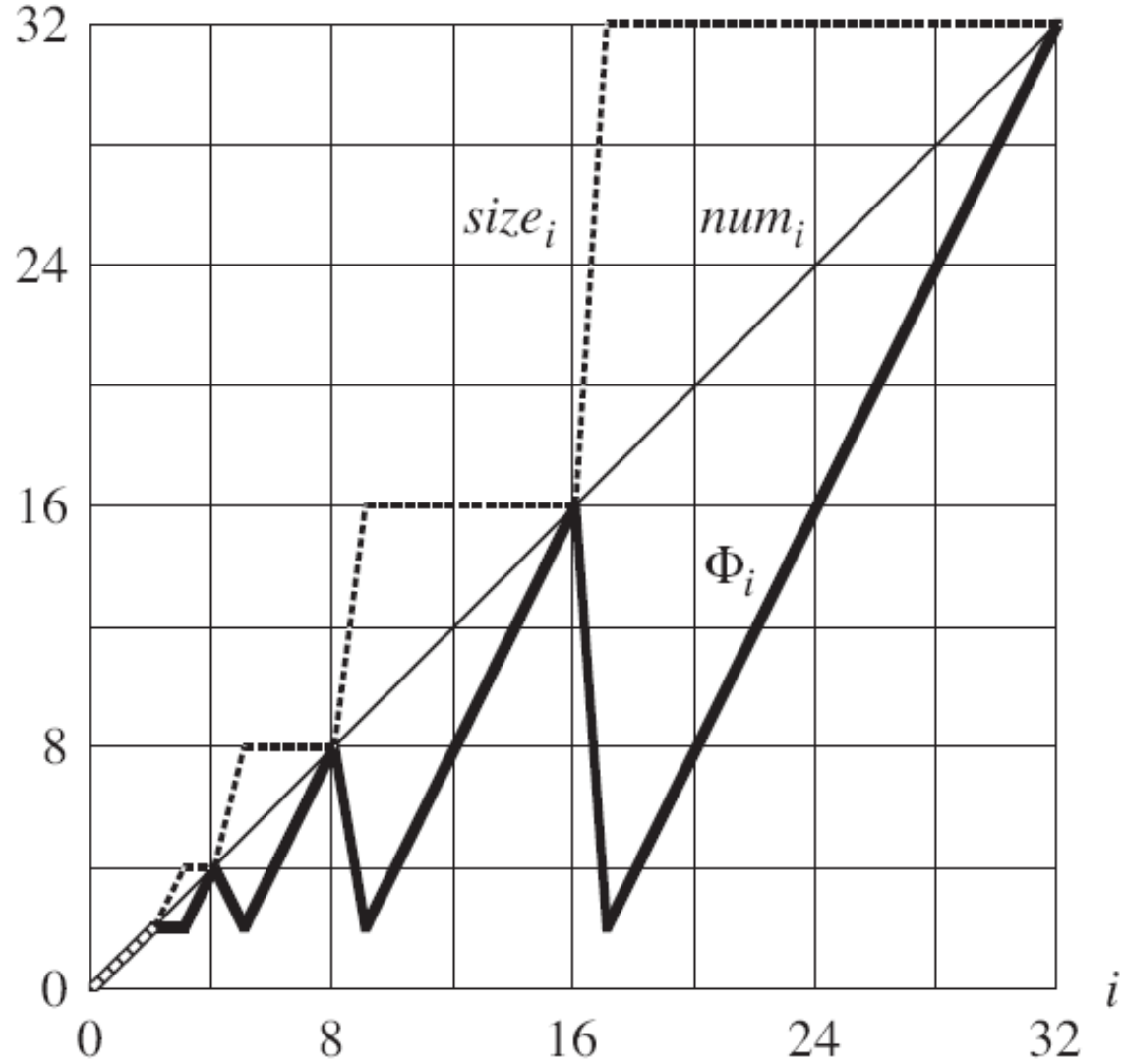
- 定义$\phi(T)=2*num[T]-size[T]$
  - 由于 $num[T]\geq size[T]/2$，故$\phi(T)\geq 0$
  - 因此，n次TABLE－INSERT操作的总的平摊代价是总的实际代价的一个上界
- 第i次操作的平摊代价
  - 如果未发生扩张, $\alpha_i=3$
  - 如果发生扩张,$\alpha_i=3$

Why???

- 初始为空的表上n次插入操作的代价的上界为$3n$

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

32 Table-Insertions



动态表的扩张与收缩

- Table-Delete：将指定的数据对象从表中删除
- 表的收缩：当动态表的装载因子很小时，对表进行收缩

  理想情况下，我们希望：

  – 表具有一定的丰满度

  – 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略

  – 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半

  – $n = 2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列：
  - 前$n/2$个操作是插入，后跟I D D I I D D I I...
  - 每次扩张和收缩的代价为$O(n)$，共有$O(n)$扩张或收缩
  - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为$O(n)$--每个操作的平摊代价太高

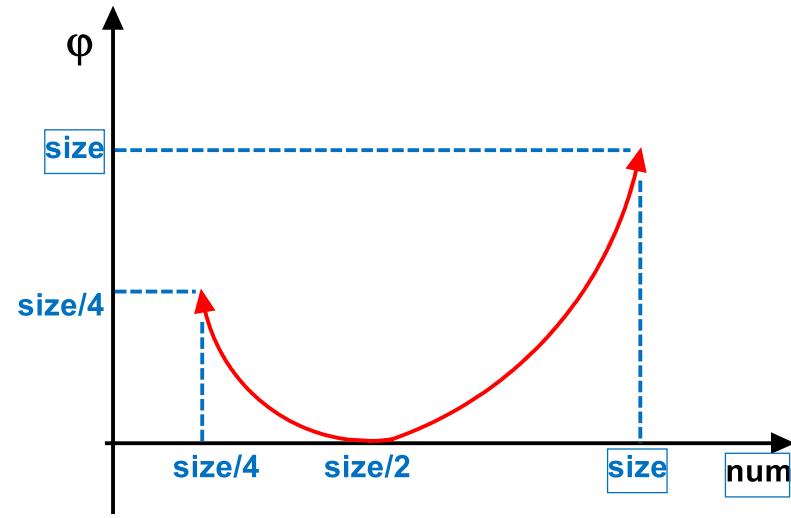
动态表的扩张与收缩

- 改进的收缩策略(允许装载因子低于1/2)
  - 满表中插入数据项时，将表扩大一倍
  - 删除数据项引起表不足1/4满时，将表缩小为原表的一半
  - 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2
  - 表的装载因子的下界是1/4

动态表上n次(插入、删除)操作的代价分析

势能函数的定义

- 操作序列过程,势能总是非负的
  - 保证一系列操作的总平摊代价即为其实际代价的一个上界
- 表的扩张和收缩过程要消耗大量的势
- 势能函数应满足
  - $num(T)=size(T)/2$时，势最小
  - 当$num(T)$减小时，势增加直到收缩
  - 当$num(T)$增加时，势增加直到扩充
- 势能函数特征的细化
  - 当装载因子为1/2时，势为0
  - 装载因子为1时，有$num[T]=size[T]$，即$\phi(T)=num[T]$。这样当因插入一项而引起一次扩张时，就可用势来支付其代价
  - 当装载因子为1/4时，$size[T]=4\cdot num[T]$。即$\phi(T)=num[T]$。因而当删除某项引起一次收缩时就可用势来支付其代价



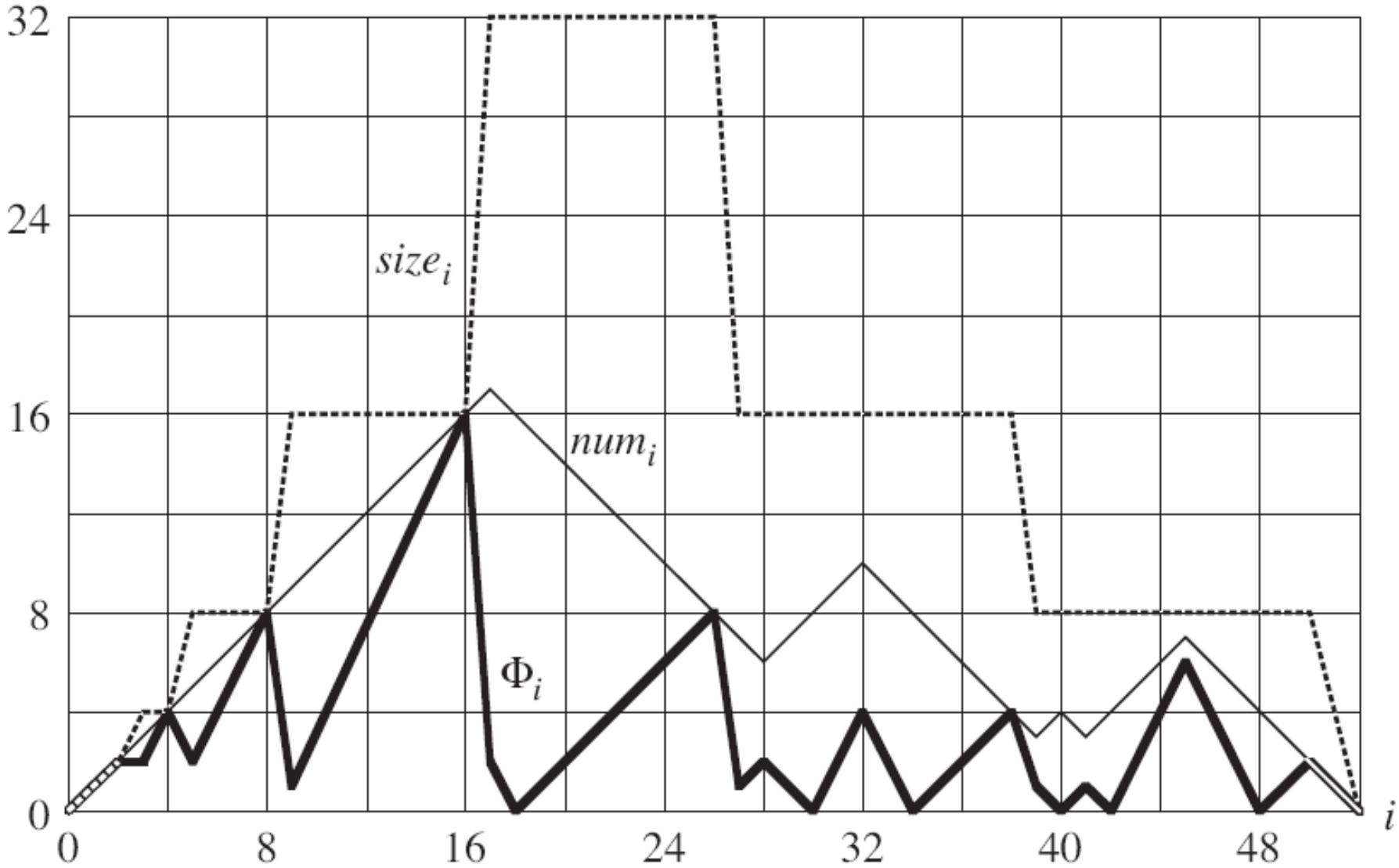
$$\Phi(T)=\begin{cases}2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\geq 1/2\\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2\end{cases}$$

平摊代价的计算

- 第i次操作的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(T_i) - \phi(T_i - 1)$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT：未扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT：扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE：未收缩 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE：收缩 $\alpha_i \leq 3$
- 动态表上的n个操作的实际时间为$O(n)$

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

52次操作：Table-Insertion与Table-Deletion混合



6.6*并查集性能平摊分析

- 并查集的概念和基本操作
- 并查集的线性链表实现
- 并查集的森林实现
- 并查集性能的平摊分析

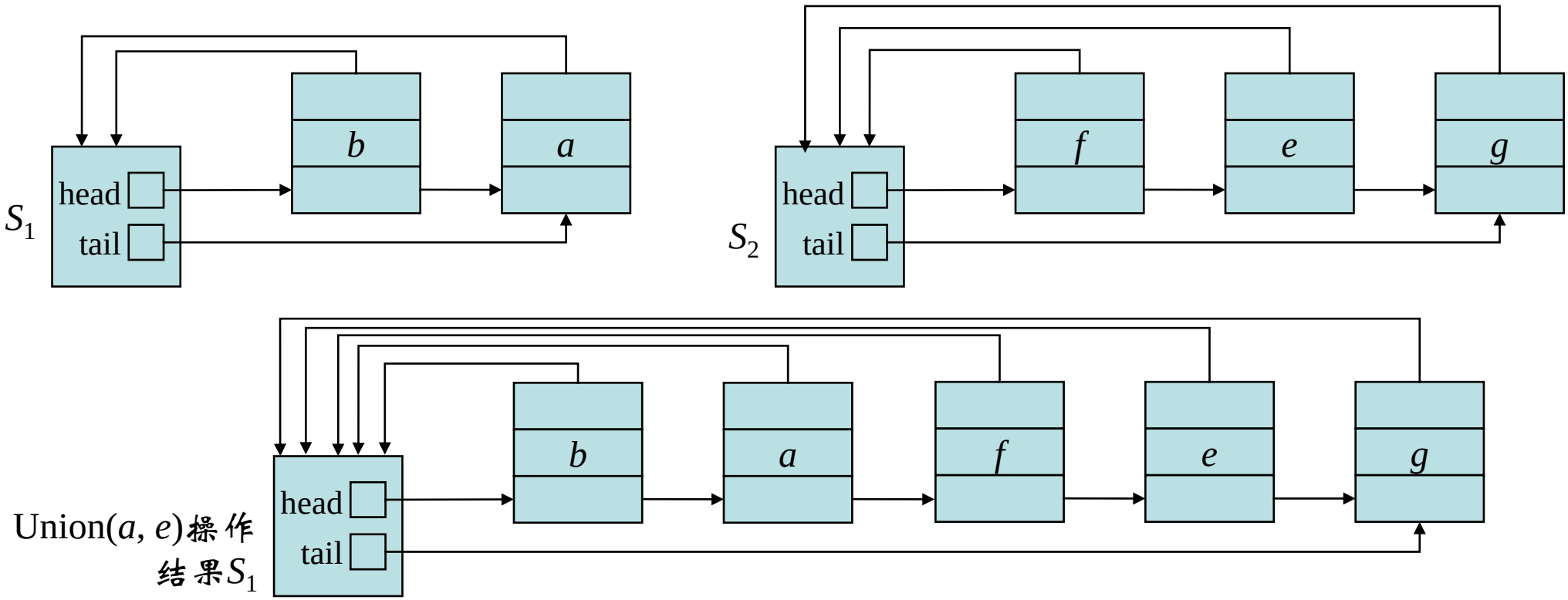
并查集的概念和基本操作

- 很多应用需要对集合进行存储、并对之查询等
  - 元素插入集合
  - 查找给定元素所在的集合
  - 集合合并等
- 若所处理集合为不相交集合，则可利用并查集，使得在并查集上执行n次集合操作的代价几乎总为$O(n)$
- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,\ldots,S_n\}$
  - 每个集合S_i有一个代表元素x_i
- MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的集合.

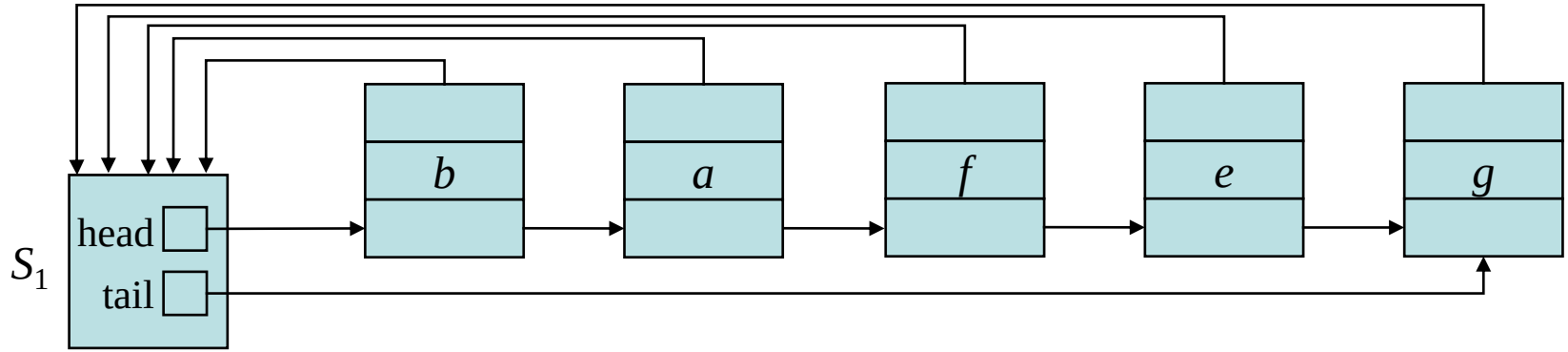
  UNION(x,y) ：合并包含元素x和y的集合

  FIND-SET(x) ：返回x所在集合的代表元素

- 实现方法1：可以将集合存储为一个链表
  - 集合插入或合并操作的代价为$O(1)$
  - 每次查找某一元素所在集合的操作代价为$O(n)$，则执行n次集合操作的代价为$O(n^2)$
- 实现方法2：添加指向Head的指针



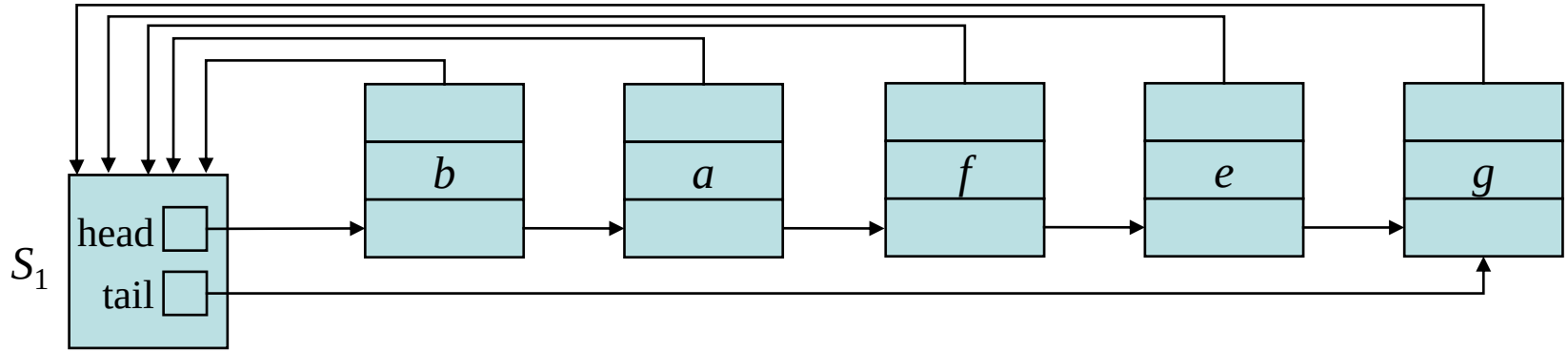
线性链表实现2性能



- 性能：
  - MAKE-SET(x): $O(1)$
  - FIND-SET(x): $O(1)$
  - UNION(x, y): $O(n)$ 更新指向Head的指针的代价为O(n)

- m个MAKE-SET, UNION和FIND-SET操作，其中n个操作是MAKE-SET
- 总体代价为$\theta(m+n^2)$

线性链表实现2性能

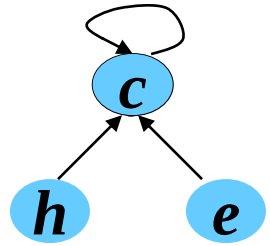


- 改进前的性能：
  - UNION(x, y): $O(n)$ 更新指向Head的指针的代价为O(n)
- 改进策略：
  - 更新短链表中指向Head的指针

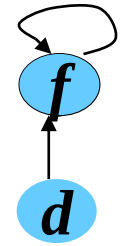
- m个MAKE-SET, UNION和FIND-SET操作，其中n个操作是MAKE-SET
- 改进后总体代价为$O(m+n\lg n)$

森林实现

- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,...,S_n\}$
  - 每个集合S_i有一个代表元素x_i
  - 将每个集合组织为一个有根树，树的每个节点对应集合中的一个元素
  - 每个节点y维护一个指针，指向其父节点$p(y)$
  - 根节点中存储的元素为集合的代表元素，其指针指向自身

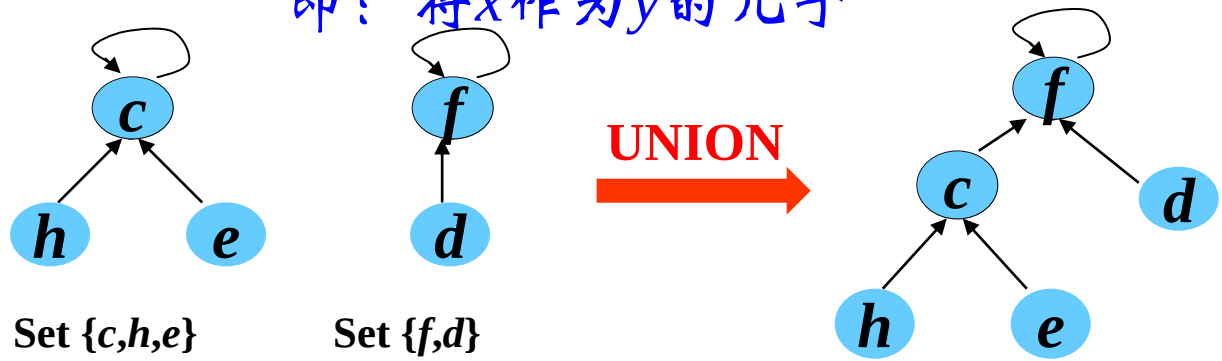


Set {*c*, *h*, *e*}



Set {*f*, *d*}

- 支持的操作
  - MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的集合. $O(1)$
    即：创建仅含元素x的一棵树
  - FIND-SET(x) ：返回x所在集合的代表元素 $O(h)$
    即：从结点x沿父指针访问直到树根
  - UNION(x,y) ：合并包含元素x和y的集合 $O(h)$
    即：将x作为y的儿子



- n次合并操作可能得到深度为n的树（简单路径）
- FIND-SET(x)的最坏时间复杂性为$O(n)$
- n次FIND-SET(x)操作的时间复杂度可能达到$O(n^2)$

- 改进目标：使得如下操作序列的代价尽可能低
  - n个MAKE-SET 操作 (开始阶段执行).
  - m个MAKE-SET, UNION, FIND-SET操作(后续)
  - $m \geq n$,UNION操作至多执行 n-1次

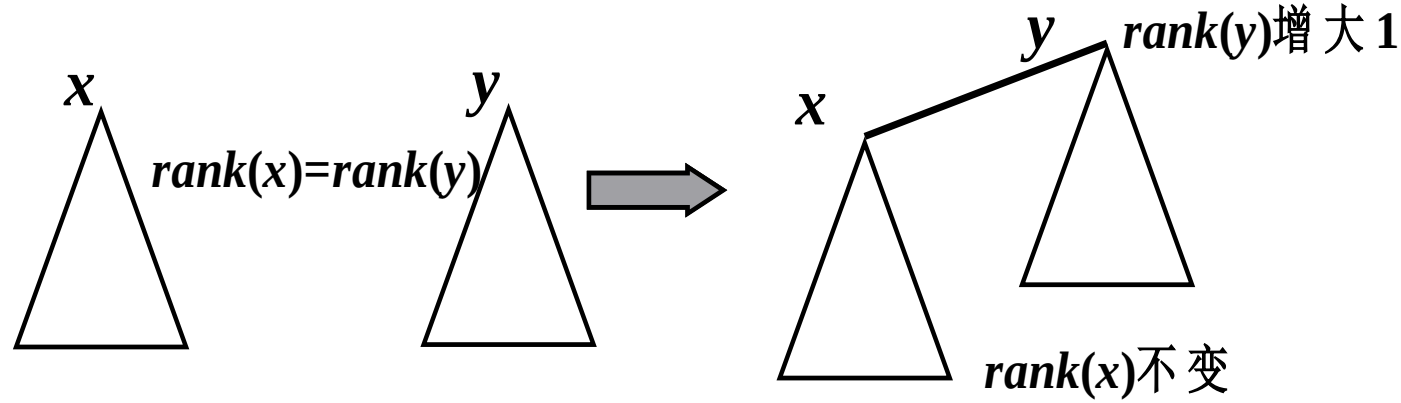
- 首要改进对象：
  - FIND-SET(x) ：返回x所在集合的代表元素
    即：从结点x沿父指针访问直到树根 $O(h)$
  - UNION(x,y) ：合并包含元素x和y的集合 $O(h)$
    即：将x作为y的儿子

改进策略之按秩合并

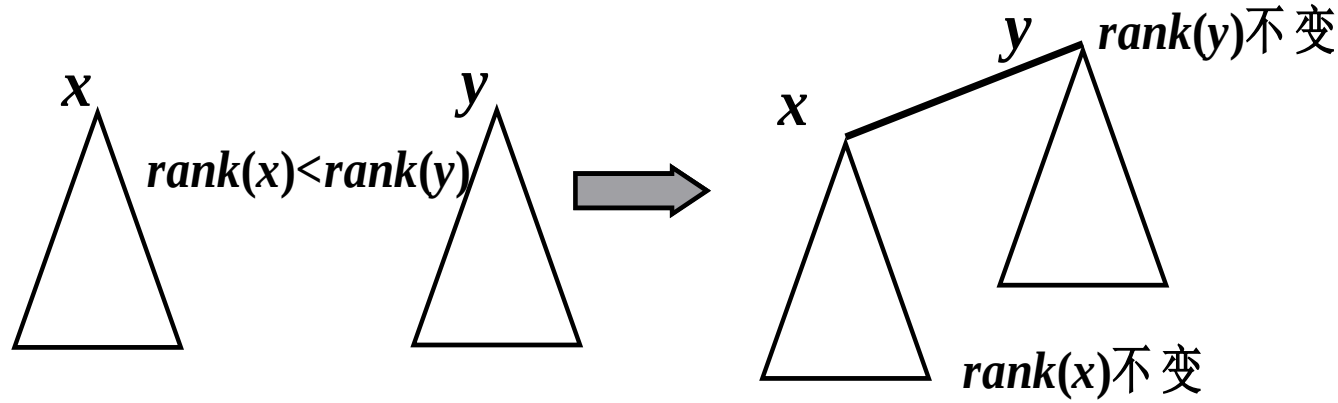
根据以下规则，维护每个结点的秩

- Make-Set(x)操作执行时定义结点x的秩为0
- Find-Set(x)操作不改变任意顶点的秩
- Union(x,y) 分两种情况修改结点的秩：
  - 情形a：rank(x)=rank(y)。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，rank(y)增加1，rank(x)不变（其他结点的秩也保持不变）
  - 情形b：rank(x)<rank(y)。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，rank(y)和rank(x)保持不变（其他结点的秩也保持不变）

情形a


x
y
rank(x)=rank(y)
y
rank(y)增大1
x
rank(x)不变

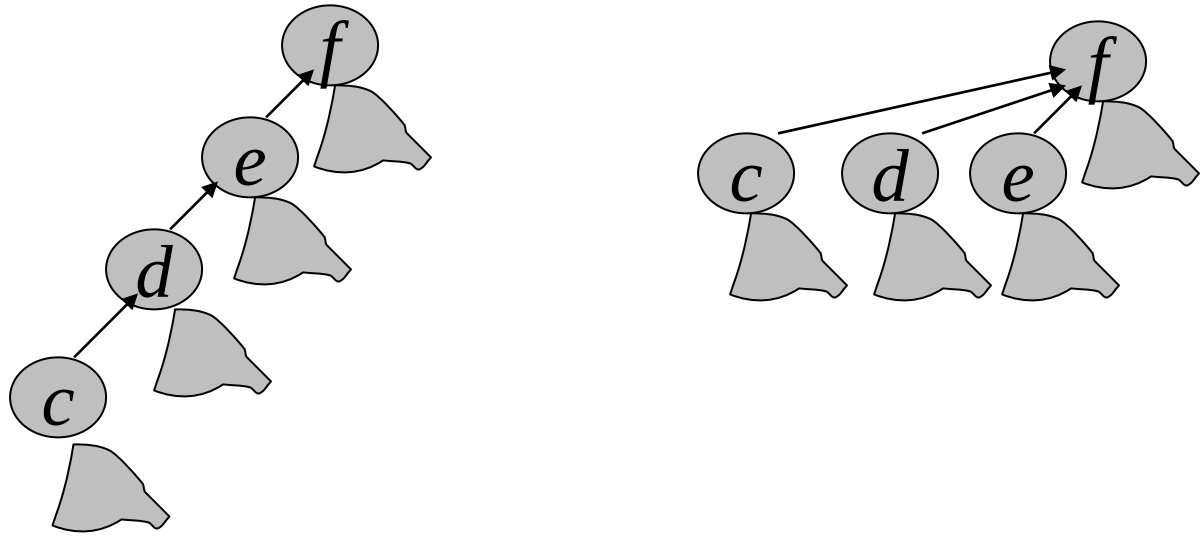
情形b


x
y
rank(x)<rank(y)
y
rank(y)不变
x
rank(x)不变

改进策略之路径压缩

执行FIND-SET(x)时

- 修改x到根结点r的路径上的所有结点的指针，使其指向根结点r
- 路径压缩增加了执行单次FIND-SET(x)操作的时间开销
- 树中的路径长度大幅度降低，为后续FIND-SET(x)操作节省了时间



并查集森林实现的操作算法

MAKE-SET(x)

1. rank[x]←0
2. p[x]←x

FIND-SET(x)

1. Q←∅
2. While $x \neq$ p[x] Do
3. 将x插入Q;
4. $x \leftarrow p[x]$;
5. For $\forall y \in Q$ do
6. $p[y] \leftarrow x$;
7. 输出x

LINK(x, y)

1. if rank[x]>rank[y] then
2. $p[y] \leftarrow x$
3. else $p[x] \leftarrow y$
4. if rank[x]=rank[y] then
5. rank[y] ← rank[y] +1

UNION(x, y)

1. LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))

并查集森林实现的性能

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- n是Make-Set操作的个数
- $\alpha(n)\leq 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的

欲得上述结果，需要

- 讨论一个增长缓慢的函数-阿克曼函数的逆函数
- 讨论秩的性质
- 证明上述时间复杂度

阿克曼函数是定义在$k\geq 0, j\geq 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果} k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果} k\geq 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=2j+1$
- $A_2(j)=2^{j+1}(j+1)-1$
- $A_k(j)$是一个“急速”增长的函数

$A_0(1)=1+1=2$

$A_1(1)= 2*1+1=3$

$A_2(1)= 2^{1+1}(1+1)-1= 7$

$A_3(1)=A_2^{(1+1)}(1)=A_2^{(2)}(1)=A_2(A_2(1))=A_2(7)=2^{7+1}(7+1)-1=2047$

$A_4(1)=A_3^{(2)}(1)=A_3(A_3(1)) =A_3(2047)=A_2^{(2048)}(2047)$

$>> A_2(2047) =2^{2048}.2048-1 >2^{2048} =(2^4)^{512} =(16)^{512}>10^{80}$

阿克曼函数的逆函数

阿克曼函数的逆函数定义定义为

$$\alpha(n)=min\{k \mid A_k(1)\geq n\}$$

由于阿克曼函数急速增长，需要$\alpha(n)$缓慢增长

$\alpha(n)\leq 4$在人类实践认知范围总成立

n	$0\leq n\leq 2$	$n=3$	$4\leq n\leq 7$	$8\leq n\leq 2047$	$2048\leq n\leq A_4(1)$	...
$\alpha(n)$	0	1	2	3	4	...

秩的性质

引理1.对于含有n个结点的并查集，秩具有如下性质:

(1) 如果$x \neq p(x)$，则$rank(x) < rank(p(x))$

(2) $rank(x)$的初始值为0，逐步递增直到x不再是集合的代表元素，此后保持不变

(3)对于任意x, $rank(p(x))$是在操作过程中单调递增

(4)$rank(x) \leq n-1$对任意结点成立

证明.根据秩的定义和并查集上的操作算法可得

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- 直观上
  - $Level(x)$是阿克曼函数的最大级,使得该函数在自变量$rank(x)$上的函数值不超过$rank(p(x))$;
  - $Iter(x)$是$Level(x)$级阿克曼函数在$rank(x)$上迭代的最大次数，使得迭代结果不超过$rank(p(x))$

并查集森林实现性能的平摊分析(1)

对并查集中的每个非根结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- $0 \leq Level(x) < \alpha(n)$, 且$Level(x)$随时间递增
  - $0 \leq Level(x)$，因为$rank(p(x)) \geq rank(x)+1 = A_0(rank(x))$
  - $Level(x) < \alpha(n)$，因为$A_{\alpha(n)}(rank(x)) \geq A_{\alpha(n)}(1) \geq n > rank(p(x))$
- $1 \leq Iter(x) \leq rank(x)$, 且只要$Level(x)$不变则$\mathrm{Iter}(x)$不变或增大
  - $1 \leq Iter(x)$，因为$rank(p(x)) \geq A_{\mathrm{Level}(x)}(rank(x)) = A^{(1)}_{Level(x)}(rank(x))$
  - $Iter(x) \leq rank(x)$，因为 $A^{(rank(x)+1)}_{Level(x)}(rank(x)) = A_{Level(x)+1}(rank(x)) > \mathrm{rank}(p(x))$
  - 由于$\mathrm{rank}(p(x))$随时间单调递增，仅当$\mathrm{Level}(x)$增大时$\mathrm{Iter}(x)$减小
  - 换言之，只要$Level(x)$不变则$\mathrm{Iter}(x)$不变或增大

并查集森林实现性能的平摊分析(2)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- $0\leq\phi_q(x)\leq\alpha(n)\text{rank}(x)$
  - 若x是树根，显然
  - 若x不是树根，则
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)\text{-}Level(x)]\text{rank}(x)\text{-Iter}(x)$
    $\geq[\alpha(n)\text{-}(\alpha(n)\text{-}1)]\text{rank}(x)\text{-rank}(x)$
    $=0$
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)\text{-}Level(x)]\text{rank}(x)\text{-Iter}(x)$
    $\leq[\alpha(n)\text{-}(0)]\text{rank}(x)\text{-}0$
    $=\alpha(n)\text{rank}(x)$

并查集森林实现性能的平摊分析(3)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- 若x不是树根，第q+1个操作是Link或Find-Set，则$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)$
  - rank(x)和$\alpha(n)$不变
  - 若rank(x)=0, $\phi_{q+1}=\phi_q=0$, 论断成立
  - 若rank(x)≥1，（Level(x)单调递增）
    - *Level*(x)保持不变，Iter(x)增大，$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)$-1
    - *Level*(x)增大，Iter(x)不变或减小，

      [$\alpha(n)$-*Level*(x)]rank(x)至少减小*rank*(x)

      Iter(x)至多减小rank(x)-1，因为Iter(x)<rank(x)

      $\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)$-1

并查集森林实现性能的平摊分析(4)

定义并查集在q个操作之后的势能ϕ_q为

$$\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$$

- $\phi_q \geq 0$恒成立，因为$0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n)\text{rank}(x)$对任意$x$成立
- 并查集上任意操作序列的总平摊代价≥总实际代价

并查集森林实现性能的平摊分析(5)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x) = 0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Make-Set操作的平摊代价为$O(1)$

Make-Set(y)：

- 实际代价为$O(1)$
- 势能的增量为0
  - 新增一棵以y为树根的树，y的势能为0
  - 不改变其他树的结构和rank，其他结点的势能不变

并查集森林实现性能的平摊分析(6)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x) = 0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Link(y, z)操作的平摊代价为$O(\alpha(n))$

- 实际代价为$O(1)$
- 势能增量为$O(\alpha(n))$
  - 不妨设合并后，y是z的父结点
  - 操作仅可能改变rank(y)
  - 势能发生变化的结点只能是y，z和操作之前y的子结点w
    - w不是树根，必有$\phi_{q+1}(w) \leq \phi_q(w)$（参照前面的性质）
    - z的势能不会增加

      操作前，z是树根，故$\phi_q(z) = \alpha(n)$rank(z)

      操作后，rank(z)不变，且$0 \leq \phi_{q+1}(z) \leq \alpha(n)$rank($z$)
    - y的势能至多增大$\alpha(n)$

      操作前，y是树根，故$\phi_q(y) = \alpha(n)$rank(y)

      操作时，rank(y)增大1或保持不变

      操作后，y仍是树根，$\phi_{q+1}(y) \leq \phi_q(y) + \alpha(n)$

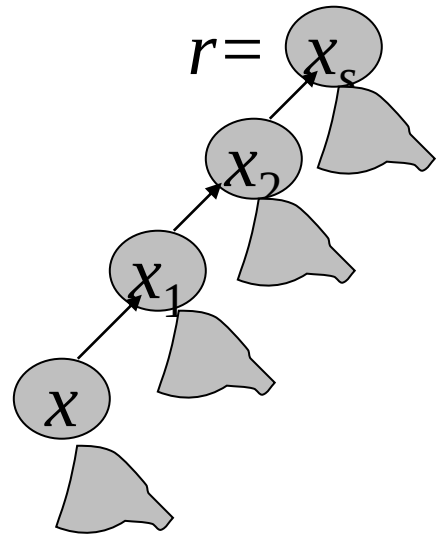
并查集森林实现性能的平摊分析(7)

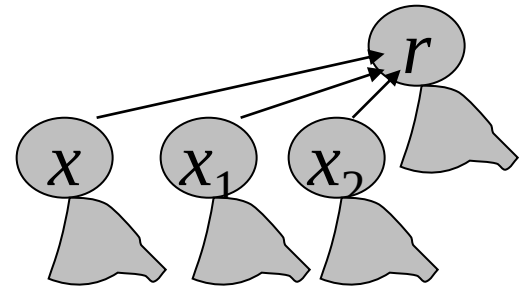
势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x) = 0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Find-Set(x)操作的平摊代价为$O(\alpha(n))$

- 实际代价为$O(s)$





- $x=x_1,x_2,\ldots,x_{s-1}$的势能不会增加

  因为它们不是树根，故$\phi_{q+1}(x_i) \leq \phi_q(x_i)$（前面的结论）

- 树根r的势能不会发生变化

  rank(r)未发生变化

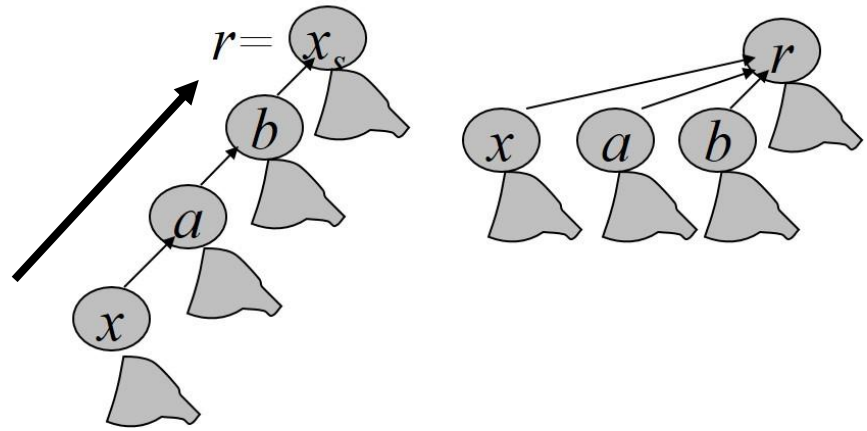
并查集森林实现性能的平摊分析(8)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x) = 0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Find-Set(x)操作的平摊代价为$O(\alpha(n))$

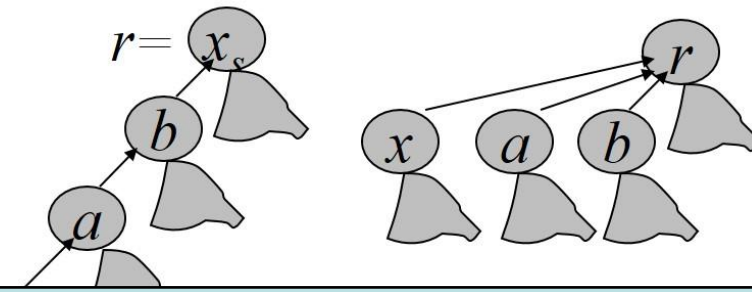
- 路径$x, x_1, \ldots, x_s$上至少有$s-[\alpha(n)+2]$个结点的势能至少减小1
  - 哪些节点的势能至少减少1呢?
  - 结点b在a之后出现在从x到根的路径上, 若$rank(a)>0$, $Level(a)=Level(b)$, b不是根, 则结点a的势能至少减少1



并查集森林实现性能的平摊分析(9)

- 结点b在a之后出现在从x到根的路径上，若$rank(a)>0$, $Level(a)= Level(b)$, b不是根，则结点a的势能至少减少1
  - 设$k = Level(a) = Level(b)$
  - $rank(p(a)) \geq A_k^{(iter(x))}(rank(x))$ (根据$Iter(a)$的定义)
  - $rank(p(b)) \geq A_k(rank(b))$ (根据$Level(b)$的定义)
  - $rank(b) \geq rank(p(a))$ (根据b和a的出现顺序)
  - 于是有如下关系：
  - $$rank(p(b)) \geq A_k(rank(b))$$
    $$\geq A_k\left(rank(p(a))\right)$$
    $$\geq A_k\left(A_k^i(rank(a))\right)$$
    $$= A_k^{(i+1)}(rank(a))$$

i为FIND-SET之前$Iter(x)$的取值

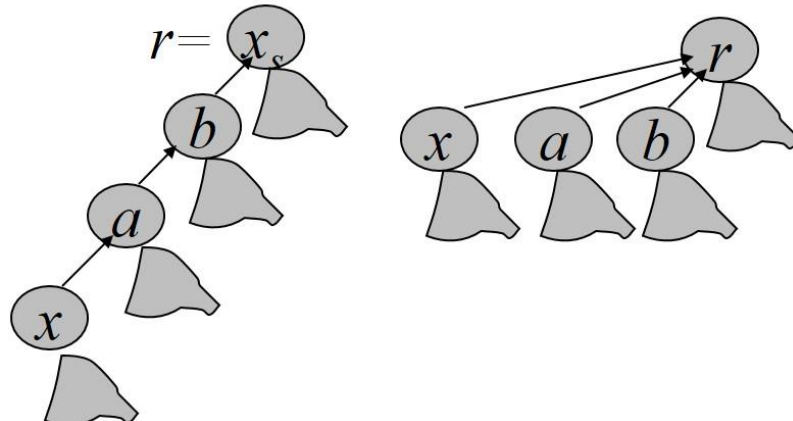


FIND-SET(x)之后a和b的父结点都是$p(b)$，即节点a的父结点的秩增长之后不小于$A_{Level(a)}^{Iter(a)+1}(rank(a))$. $Level(a)$或$Iter(a)$将发生变化，导致a的势能至少减少1.

并查集森林实现性能的平摊分析(3)

- 结点b在a之后出现在从x到根的路径上，若$rank(a)>0$, $Level(a)= Level(b)$, b不是根，则结点a的势能至少减少1
  - 从x到根的路径上，不满足上述条件的结点最多有多少个？$\alpha(n)+2$:
    - 根节点、叶子节点不满足上述条件
    - 对于i=0, 1, …,$\alpha(n)-1$, 最后一个出现并满足$Level(c)=i$的节点c不满足上述条件；

- 路径$x_0,x_1,\ldots,x_s$上至少有s-[$\alpha(n)$+2]个结点的势能至少减小1
  - $\Phi_i - \Phi_{i+1} \geq s-(\alpha(n)+2)$
  - $\widehat{c_{i+1}} = c_{i+1} + \Phi_{i+1} - \Phi_i$
    $\leq s-(s-(\alpha(n)+2))$
    $= \alpha(n)+2 = O(\alpha(n))$



在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- Make-Set操作的平摊代价为$O(1)$
- Union操作的平摊代价为$O(\alpha(n))$
- Union操作的平摊代价为$O(\alpha(n))$
- n是Make-Set操作的个数，亦即并查集管理的数据对象的个数
- $\alpha(n)\leq 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的