第二章

算法分析的数学基础

参考资料

《Introduction to Algorithms》

- 第三章
- 第四章
- 附　录

《Concrete Mathematics:
A Foundation for Computer Science》

Ronald L.Graham, *Donald E.Knuth*, and *Oren Patashnik*

提要

2.1 计算复杂性函数的阶
2.2 和式的计算与估计
2.3 递归方程

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.1 计算复杂性函数的阶

- 计算复杂性函数的阶
  - 算法执行时间增长的阶（增长率）
  - 执行时间函数的主导项

例如：

$T(n)=an^2+bn+c$

主导项: an^2

当输入大小n较大时，其它低阶项相对来说意义不大

系数a也相对来说意义不大

即：函数$T(n)$的阶为n^2

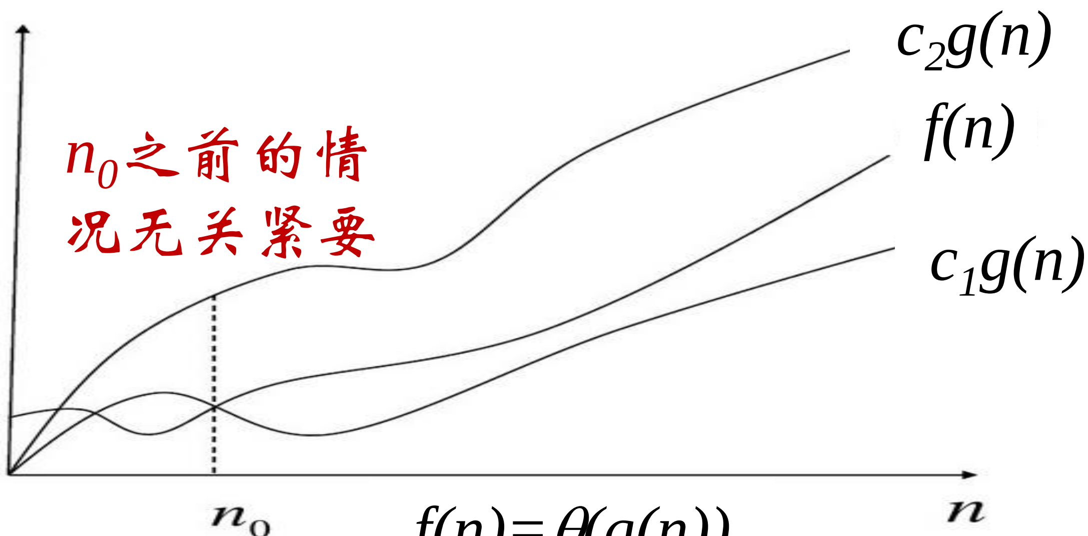
2.1 计算复杂性函数的阶

2.1.1 同阶函数集合

定义2.1.1. 设$f(n)$和$g(n)$是**正值**函数。如果$\exists c_1, c_2>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $c_1g(n)\le f(n)\le c_2g(n)$，则称$f(n)$与$g(n)$同阶，记作$f(n)=\theta(g(n))$。

$\theta(g(n))$可以视为所有与$g(n)$同阶的函数集合：

$\{f(n) \mid \exists c_1, c_2>0,\ n_0,\ \forall n>n_0, c_1g(n)\le f(n)\le c_2g(n)\}$



$f(n)=\theta(g(n))$

2.1.1 同阶函数集合

- **例1，证明：$(1/3)n^2-3n=\theta(n^2)$**

$\exists c_1, c_2>0,\ n_0,\ \forall n>n_0,$

$$c_1 n^2 \le (1/3)n^2-3n \le c_2 n^2$$

对于左侧不等式，$\forall n>1$，有：

$$c_1 \le (1/3)-3/n=(1/6)+(1/6)-3/n$$

即当 $n>18$，$c_1=1/6$ 时，不等式成立

对于右侧不等式，$\forall n>1$，有：$(1/3)-3/n \le c_2$,

即当 $n>18$，$c_2=1/3$ 时，不等式成立

例2 证明 $6n^3 \neq \theta(n^2)$

证. 如果存在 c_1、$c_2>0$，n_0 使得当 $n \geq n_0$ 时，

$c_1 n^2 \leq 6n^3 \leq c_2 n^2$，

即 $c_1 \leq 6n \leq c_2$，$n \leq c_2/6$。

于是，当 $n > c_2/6$ 时与 $n \leq c_2/6$ 矛盾。

2.1.1 同阶函数集合

例3 证明$f(n) = an^2 + bn + c = \theta(n^2)$,
其中$a > 0$。

证. 往构造$c_1, c_2 > 0, n_0$, 使得$n > n_0$时,
$c_1 n^2 \le an^2 + bn + c \le c_2 n^2$成立.

令$c_1 = a/4, c_2 = 7a/4$, 构造n_0使得
$an^2/4 \le an^2 + bn + c \le 7an^2/4n^2$成立.

当$n_0 = 2\max\{\frac{|b|}{a}, \sqrt{|c|/a}\}$时, 上述不等式成立。得证。

命题2.1.1：对于任意正整数d和任意常数$a_d>0$，有：

$$P(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i=\theta\left(n^d\right).$$

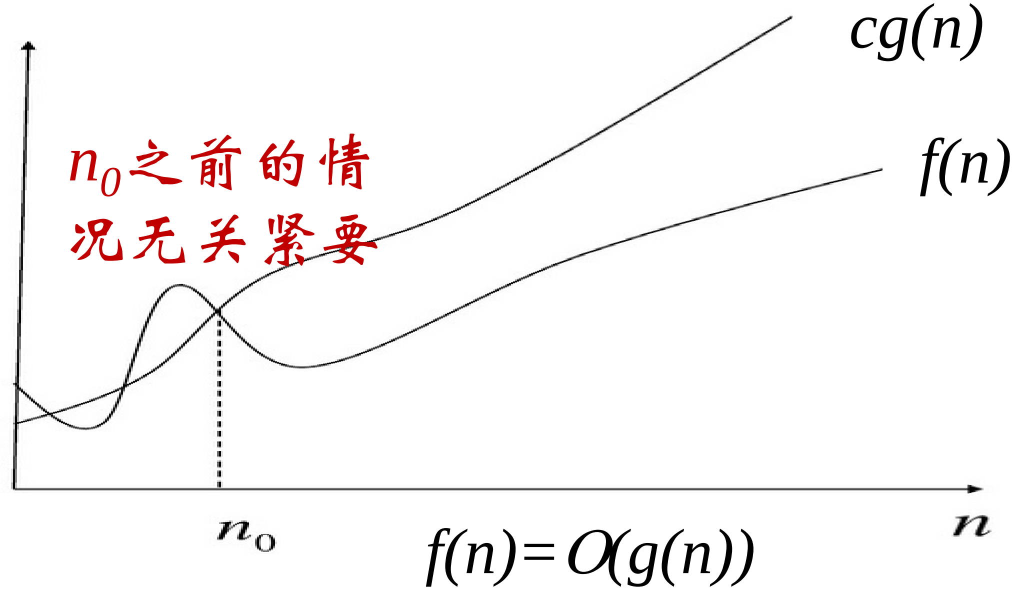
请完成上述命题的证明.

2.1.2 低阶函数集合

定义2.1.2. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\exists c>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $f(n)\le cg(n)$，则称$f(n)$比$g(n)$低阶或$g(n)$是$f(n)$的上界，记作$f(n)=O(g(n))$。

$O(g(n))$可以视为所有比$g(n)$低阶的函数的集合：

$$\{f(n) \mid \exists c,\ n_0,\ \forall n>n_0,\ f(n)\le cg(n)\}$$



2.1.2 低阶函数集合

例1. $f(n)=\theta\big(g(n)\big)\Rightarrow f(n)=O\big(g(n)\big)$

例2. 证明$n=O(n^2)$.

证. 取$c=1, n_0=1$, 则当$n\geq n_0$时, 有

$$0\leq n\leq cn^2$$

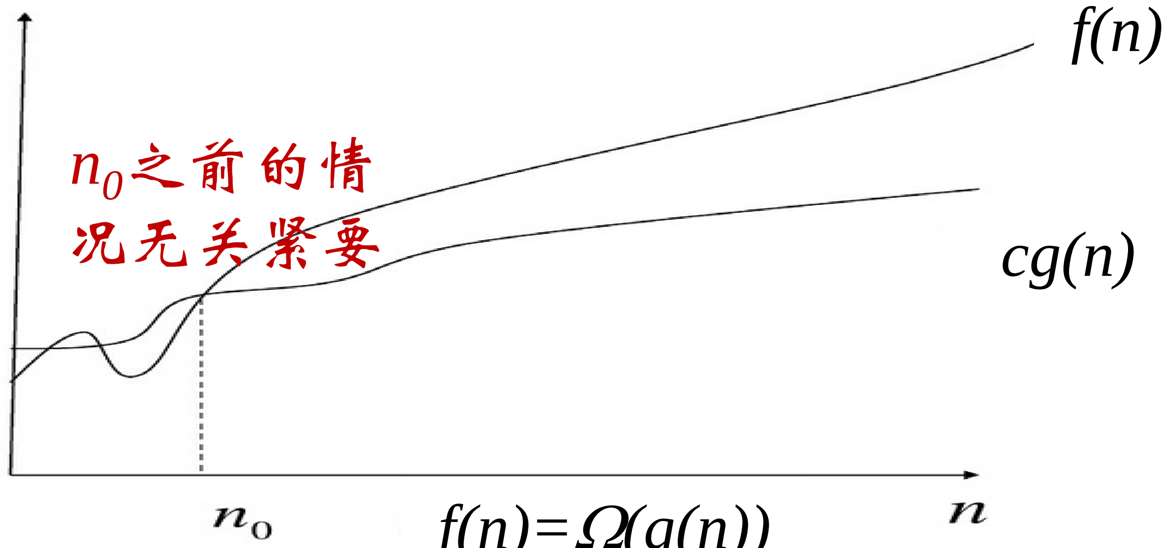
得证.

2.1.3 高阶函数集合

定义2.1.3. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\exists c>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $f(n)\geq cg(n)$，则称$f(n)$比$g(n)$高阶或$g(n)$是$f(n)$的下界，记作$f(n)=\Omega(g(n))$。

$\Omega(g(n))$可以视为所有比$g(n)$高阶的函数集合：

$\{f(n) \mid \exists c, n_0, \forall n>n_0, f(n)\geq cg(n)\}$



$f(n)=\Omega(g(n))$

θ、O、Ω之间的关系

- θ 表示渐进紧界
- O 表示渐进上界
- Ω 表示渐进下界
- $\theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- $f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = an^2+bn+c = \theta(n^2)$, $f(n) = O(n^2)$
- $an+b = O(n^2)$. 为什么？
- $n = O(n^2)$!!!

如果$f(n)=O(n^k)$, 则称$f(n)$是多项式界限的

θ，O，Ω之间的关系

- 一些讨论:
  - 当我们谈到插入排序的最坏运行时间是$O(n^2)$, 这个结论适用于所有的输入，即使对于已经排序的输入也成立，因为$O(n)\subseteq O(n^2)$.
  - 然而插入排序的最坏运行时间$\theta(n^2)$不能应用到每个输入，因为对于已经排序的输入, $\theta(n) \neq \theta(n^2)$.

θ，O，Ω之间的关系

- Ω 用来描述运行时间的最好情况
- 对于插入排序，我们可以说
  - 最好运行时间是 $\Omega(n)$
  - 或者说，运行时间是$\Omega(n)$
  - 插入排序算法的运行时间在$\Omega(n)$和 $O(n^2)$之间
  - 插入排序算法的最坏运行时间是$\Omega(n^2)$
  - 但说插入排序算法的运行时间是$\Omega(n^2)$，是错误的！

极少用Ω来描述算法的运行时间和复杂性

θ，O，Ω之间的关系

定理2.1. 对于任意$f(n)$和$g(n)$, $f(n)=\theta(g(n))$当且仅当 $f(n)=O(g(n))$而且$f(n)=\Omega(g(n))$.

证. $\Rightarrow$: 如果$f(n)=\theta(g(n))$, 则$\exists c_1,c_2>0,n_0>0$, 使得$n\geq n_0$时, $c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$成立. 这也必然使得$f(n)=O(g(n))$和$f(n)=\Omega(g(n))$均成立.

$\Leftarrow$: 如果$f(n)=O(g(n))$而且$f(n)=\Omega(g(n))$, 则由$f(n)=O(g(n))$, 可知$\exists c_1>0,n_1>0$, 使得$n\geq n_1$时, $f(n)\leq c_1g(n)$成立; 又由$f(n)=\Omega(g(n))$, 可知$\exists c_2>0,n_2>0$, 使得$n\geq n_2$时, $f(n)\geq c_2g(n)$成立.
因此, $\exists c_1,c_2>0,n_0=\max\{n_1,n_2\}>0$, 使得$n\geq n_0$时, $c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$成立.

2.1.4 严格低阶函数集合

定义2.1.4. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果 $\forall c>0, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)<cg(n)$，则称$f(n)$严格比$g(n)$低阶或$g(n)$是$f(n)$的严格上界，记作$f(n)=o(g(n))$。

$o(g(n))$可以视为所有比$g(n)$严格低阶的函数集合：

$$\{f(n) \mid \forall c, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)<cg(n)\}$$

2.1.4 严格低阶函数集合

关于低阶O与严格低阶o的进一步说明

- O标记可能是或不是紧的
  - $2n^2 = O(n^2)$ 是紧的，但$2n = O(n^2)$不是紧的.
- o标记用于标记上界但不是紧的情况
  - $2n = o(n^2)$，但是$2n^2 \neq o(n^2)$.
- 区别：某个正常数c在O标记中，但所有正常数c在o标记中.

例1. 证明$2n = o(n^2)$

证. 对$\forall c > 0$, 要得到$2n < cn^2$, 其中$n > 0$, 只需满足$2 < cn$, 即$n > \frac{2}{c}$。

因此, 对$\forall c > 0$, 存在$n_0 = \frac{2}{c}$, 当$n > n_0$时, $2n < cn^2$成立.

例2. 证明$2n^2 \neq o(n^2)$

证. 当$c = 1$时, 不存在任何n_0, 使得$n > n_0$时, $2n^2 < cn^2 = n^2$成立.

命题2.1.2. $f(n) = o\big(g(n)\big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$

证. 由于$f(n) = o\big(g(n)\big)$, 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$n_0 > 0$, 当$n \geq n_0$时, $0 < f(n) < \varepsilon g(n)$成立, 即$0 < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$.

于是, 有$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

2.1.5 严格高阶函数集合

定义2.1.4. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\forall c>0, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)>cg(n)$，则称$f(n)$严格比$g(n)$高阶或$g(n)$是$f(n)$的严格下界，记作$f(n)=\omega(g(n))$。

$\omega(g(n))$可以视为所有比$g(n)$严格高阶的函数集合：

$$\{f(n) \mid \forall c, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)>cg(n)\}$$

命题2.1.3. $f(n)=\omega\big(g(n)\big)$当且仅当$g(n)=o\big(f(n)\big)$

证. $\Rightarrow$: 对$\forall c>0$, 有$\frac{1}{c}>0$. 由$f(n)=\omega\big(g(n)\big)$可知, 对$\forall\ \frac{1}{c}>0$, 存在$n_0>0$, 当$n\geq n_0$时, $f(n)>\frac{1}{c}g(n)$, 即$g(n)<cf(n)$成立. 于是有$g(n)=o\big(f(n)\big)$.

$\Leftarrow$: 对$\forall c>0$, 有$\frac{1}{c}>0$. 由$g(n)=o\big(f(n)\big)$可知, 对$\forall$ $\frac{1}{c}>0$, 存在$n_0>0$, 当$n\geq n_0$时, $g(n)<\frac{1}{c}f(n)$, 即$f(n)>cg(n)$成立. 于是有$f(n)=\omega\big(f(n)\big)$.

命题2.1.4. $f(n) = \omega\big(g(n)\big) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

证. 对$\forall c > 0$, 由于$f(n) = \omega\big(g(n)\big)$, 必然存在$n_0 > 0$, 使得当$n > n_0$时, $f(n) > cg(n)$.

即对$\forall c > 0$, 必然存在$n_0 > 0$, 当$n > n_0$时, $\frac{f(n)}{g(n)} > c$, 于是可得$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

2.1.6 函数阶的性质

A. 传递性：

- $f(n)=\theta(g(n)) \wedge g(n)=\theta(h(n)) \Longrightarrow f(n)=\theta(h(n))$
- $f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Longrightarrow f(n)=O(h(n))$
- $f(n)=\Omega(g(n)) \wedge g(n)=\Omega(h(n)) \Longrightarrow f(n)=\Omega(h(n))$
- $f(n)=o(g(n)) \wedge g(n)=o(h(n)) \Longrightarrow f(n)=o(h(n))$
- $f(n)=\omega(g(n)) \wedge g(n)=\omega(h(n)) \Longrightarrow f(n)=\omega(h(n))$

2.1.6 函数阶的性质(续)

B. 自反性:

- $f(n) = \theta\big(f(n)\big)$
- $f(n) = O\big(f(n)\big)$
- $f(n) = \Omega\big(f(n)\big)$

C. 对称性:

- $f(n) = \theta\big(g(n)\big)$ 当且仅当 $g(n) = \theta\big(f(n)\big)$

D. 反对称性:

- $f(n) = O\big(g(n)\big)$ 当且仅当 $g(n) = \Omega\big(f(n)\big)$
- $f(n) = o\big(g(n)\big)$ 当且仅当 $g(n) = \omega\big(f(n)\big)$

问题

所有函数都是可比的吗？？？

$f(n)=n$ 与 $g(n)=n^{1+\sin(n)}$ 可比吗？

数学公式中函数阶的含义

$n = O(n^2)$表示$f(n) = n, f(n) \in O(n^2)$

数学公式中的函数阶，独立地表示一个匿名函数，例如：
$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n)$中，$\theta(n)$代表一个函数，它是$\theta(n)$中的一个元素，并且使得公式中的等号相等，此处它代表的是$f(n) = 3n + 1$.

等号左侧和右侧都出现函数的阶，表示无论如何选择等号左侧的匿名函数，都存在一个等号右侧匿名函数的选择方法，使得公式中的等号成立.
例如：$2n^2 + \theta(n) = \theta(n^2)$，表示无论如何选择一个$f(n) \in \theta(n)$，都存在$g(n) \in \theta(n^2)$，使得$2n^2 + f(n) = g(n)$.

$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n) = \theta(n^2)$的含义？

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.2 和式的估计与界限

1. 线性和

命题 2.3.1. $\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

命题 2.3.2. $\sum_{k=1}^{n}\theta\big(f(k)\big) = \theta(\sum_{k=1}^{n} f(k))$

请完成命题2.3.2的证明.

2. 级数

命题 2.3.3 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \theta(n^2)$$

命题 2.3.4 $$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

命题 2.3.5 $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln \mathbf{n} + O(1)$$

命题 2.3.6 $$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k-1}\right)=a_n-a_0\ .$$

命题 2.3.7 $$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_0-a_n$$

命题 2.3.8 $$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n}$$

命题 2.3.9 $$\lg\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lg a_k$$

3. 直接求和的界限

例1. $\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2$

例 2. $\sum_{k=1}^{n} a_i \le n \times \max\{a_k\}$.

例 3. 设对于所有 $k \ge 0$, $a_{k+1}/a_k \le r < 1$， 求 $\sum_{k=0}^{n} a_k$ 的上界.

解： $a_1/a_0 \le r \Rightarrow a_1 \le a_0 r$,

$a_2/a_1 \le r \Rightarrow a_2 \le a_1 r \le a_0 r^2$,

$a_3/a_2 \le r \Rightarrow a_3 \le a_2 r \le a_0 r^3$ ……

$a_k/a_{k-1} \le r \Rightarrow a_k \le a_{k-1} r \le a_0 r^k$

于是， $\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \dfrac{a_0}{1-r}$.

例 4．求 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(k/3^k\right)$ 的界

解. 使用例3中的方法. $\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}}=\frac{1}{3}\times\frac{k+1}{k}\le\frac{2}{3}=r.$

因此, $\sum_{k=1}^{\infty}k/3^k\le\sum_{k=1}^{\infty}a_1r^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$

例 5．用分裂和的方法求 $\sum_{k=1}^{n}k$ 的下界．

解： $\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n/2}k+\sum_{k=n/2+1}^{n}k\ge\sum_{k=1}^{n/2}0+\sum_{k=n/2+1}^{n}n/2\ge\left(\frac{n}{2}\right)^2=\Omega\left(n^2\right)$.

例 6．求 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$ 的上界

解：当 $k \geq 3$ 时，$\dfrac{(k+1)^2 / 2^{k+1}}{k^2 / 2^k} = \dfrac{(k+1)^2}{2k^2} \leq \dfrac{8}{9}$

于是 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} \leq \theta(1) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^k = O(1)$.

例 **7**．求 $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 的上界

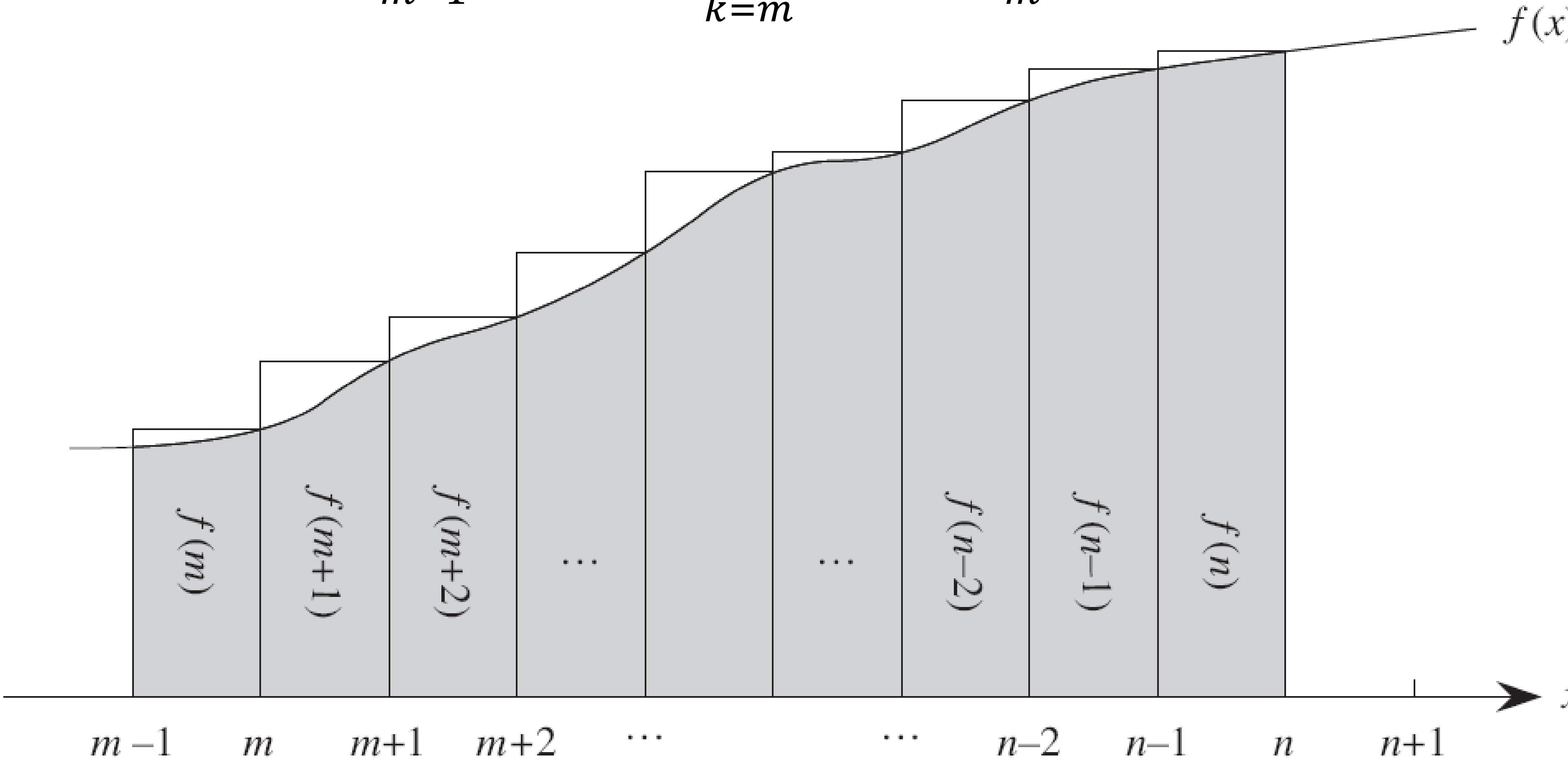
解：$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7})$

$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right) + \cdots$$

$$\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1 \le \lg n + 1$$

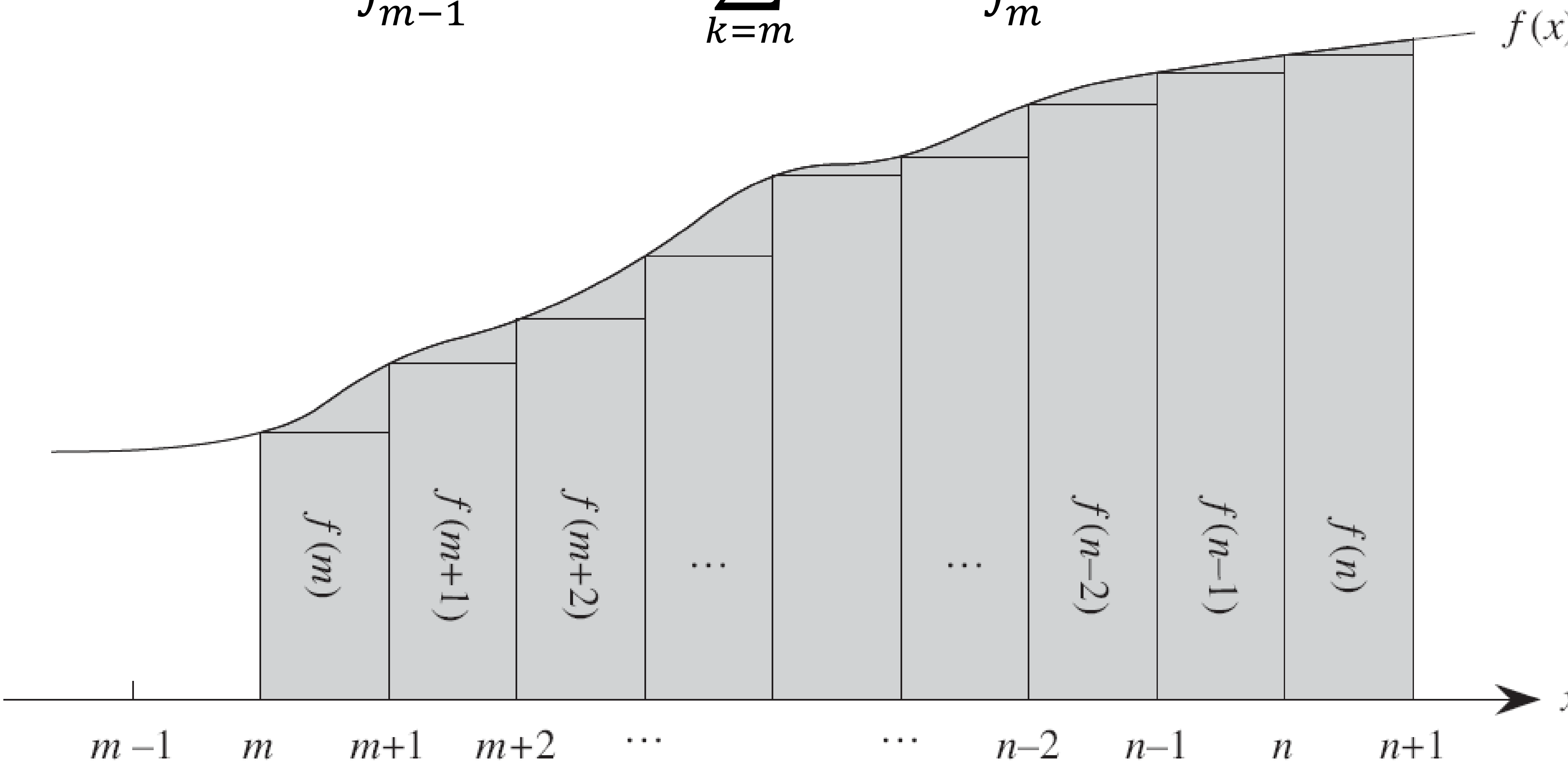
例8. 如果$f(k)$单调递增，则

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



例8. 如果$f(k)$单调递增，则

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



例9. 如果$f(k)$单调递减，则

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

例10.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \sum_{2}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx \le \ln n + 1$$

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.3 递归方程

- 递归方程：递归方程是使用具有小输入值的相同方程来描述一个方程.

  用自身来定义自身

- 递归方程例：Merge-sort排序算法的复杂性方程

  $T(n)=2T(n/2)+\theta(n)$ if $n>1$.

  $T(n)=\theta(1)$ if $n=1$(边界条件)

  $T(n)$的解是$\theta(n\log n)$

边界条件是根据问题的不同而不同的！

求解递归方程的三个主要方法

- 替换方法:
  - 先猜测方程的解,
  - 然后用数学归纳法证明.
- 迭代方法:
  - 把方程转化为一个和式
  - 然后用估计和的方法来求解.
- Master方法:
  - 求解型为$T(n)=aT(n/b)+f(n)$的递归方程

Substitution方法I：联想已知的$T(n)$

例1. 求解$T(n)=2T(n/2 + 17) + n$

解：猜测：$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}+17\right)+n$ 与 $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n$ 只相差一个17.

当n充分大时$T\left(\frac{n}{2}+17\right)$与$T\left(\frac{n}{2}\right)$的差别并不大，因为

$\frac{n}{2}+17$与$\frac{n}{2}$相差小. 我们可以猜$T(n)=O(n\lg n)$.

证明：用数学归纳法

2.3.1 替换(Substitution)方法

Substitution方法I：联想已知的$T(n)$

例1. 求解$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$

解. 猜想$T(n) = O(n\lg n)$, 往证存在常数c, 使得$T(n) \leq cn\lg n$. 假设$m \leq n-1$且$m \geq n_0$时, 有$T(m) \leq cm\lg m$.

因此$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$

$$\leq 2c\left(\frac{n}{2} + 17\right)\lg\left(\frac{n}{2} + 17\right) + n$$

$$\leq 2c\left(\frac{n}{2} + 17\right)\lg\left(\frac{3n}{4}\right) + n \qquad (n \geq 68)$$

$$= cn\lg n - \lg\left(\frac{4}{3}\right)cn + 34c\lg n - 34c\lg\left(\frac{4}{3}\right) + n$$

令$c = 2/\lg\left(\frac{4}{3}\right)$时, n足够大使得$n > 34c\lg n$时, $T(n) \leq cn\lg n$.

Substitution方法II：猜测上下界，减少不确定性范围

例 3. 求解 $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n$.

解：首先证明 $T(n)=\Omega(n)$，$T(n)=O(n^2)$

然后逐阶地降低上界、提高下界。

$\Omega(n)$的上一个阶是$\Omega(n\log n)$,

$O(n^2)$的下一个阶是 $O(n\log n)$。

细微差别的处理

- 问题：猜测正确，数学归纳法的归纳步似乎证不出来
- 解决方法：从guess中减去一个低阶项，可能work.

例 **4**．求解 $T(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)+1$

解：（1）我们猜 $T(n)=O(n)$

证： $T(n)\le c\lfloor n/2 \rfloor+c\lceil n/2 \rceil+1=cn+1\ne cn$

证不出 $T(n)=O(cn)$

（2）减去一个低阶项，猜 $T(n)\le cn-b$， $b\ge 0$ 是常数

证：设当 $\le n-1$ 时成立

$$T(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)+1\le c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor-b+c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil-b+1$$

$=cn-2b+1=cn-b-b+1\le cn-b$（只要 $b\ge 1$）。

避免陷阱

例 5. 求解 $T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$。

解： 猜 $T(n)=O(n)$

证： 用数学归纳法证明 $T(n)\le cn$。

$$T(n)\le 2(c\lfloor n/2\rfloor)+n\le cn+n=O(n)$$

--错！！

错在哪里？ 过早使用了$O(n)$而陷入了陷阱！

应该在证明了$T(n)\le cn$后才可使用。

从$T(n)\le cn+n$不可能得到$T(n)\le cn$

因为对于$\forall c>0$，我们都得不到$cn+n\le cn$。

Substitution方法III：变量替换

经变量替换把递归方程变换为熟悉的方程.

例 6. 求解 $T(n)=2T\left(\sqrt{n}\right)+\lg n$

解：令 $m=\lg n$，则 $n=2^m$， $T\left(2^m\right)=2T\left(2^{\frac{m}{2}}\right)+m$.

令 $S(m)=T\left(2^m\right)$ 则 $T\left(2^{\frac{m}{2}}\right)=S\left(\frac{m}{2}\right)$. 于是， $S(m)=2S\left(\frac{m}{2}\right)+m$.

显然，$S(m)=\mathrm{O}(m\lg m)$，即 $T\left(2^m\right)=O(m\lg m)$

由于 $2^m=n$， $m=\lg n$， $T(n)=O(\lg n\times\lg(\lg n))$.

2.3.2 迭代(Iteration)方法

方法：

循环地展开递归方程，

把递归方程转化为和式，

然后可使用求和技术解之。

例 1. $T(n)=n+3T\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor\right)$，**T(1)=1**

$$=n+3\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/16 \right\rfloor\right)\right)$$

$$=n+3\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/64 \right\rfloor\right)\right)\right)$$

$$=n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+9\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor+27T\left(\left\lfloor n/64 \right\rfloor\right)$$

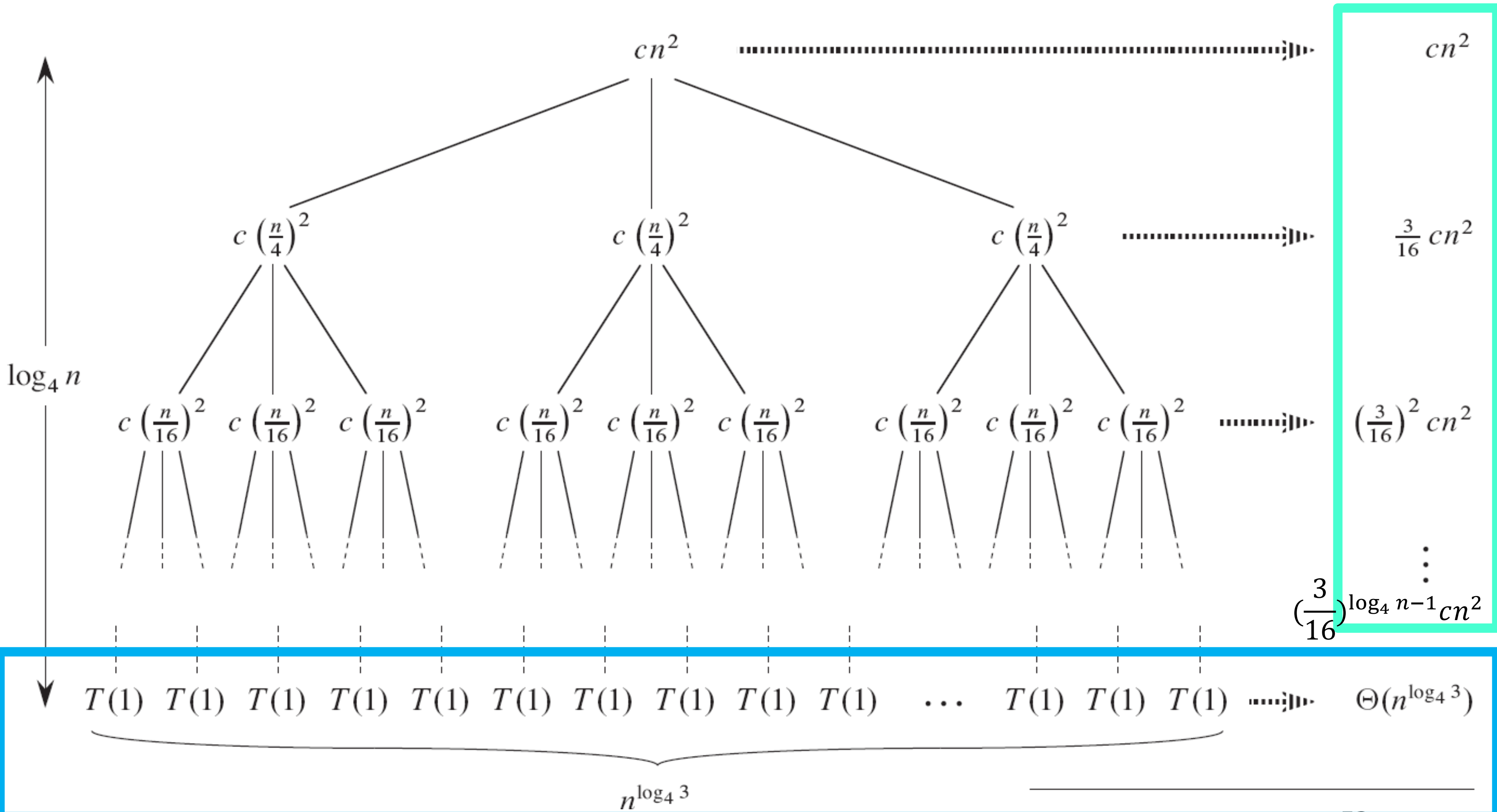
$$=n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^i T\left(\left\lfloor n/4^i \right\rfloor\right)$$

$$\boxed{令 \frac{n}{4^i}=1 \Rightarrow 4^i=n \Rightarrow i=\log_4 n}$$

$$=n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^{\log_4 n}T(\lfloor 1 \rfloor)$$

$$\le \sum_{i=0}^{\log_4 n} 3^i \, n/4^i \cdot \le n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = n\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4n=O(n)$$

求解 $T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + cn^2$



求解 $T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + cn^2$

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right) = \frac{16}{13}cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right) = O(n^2)$$

cn^2

$\frac{3}{16}cn^2$

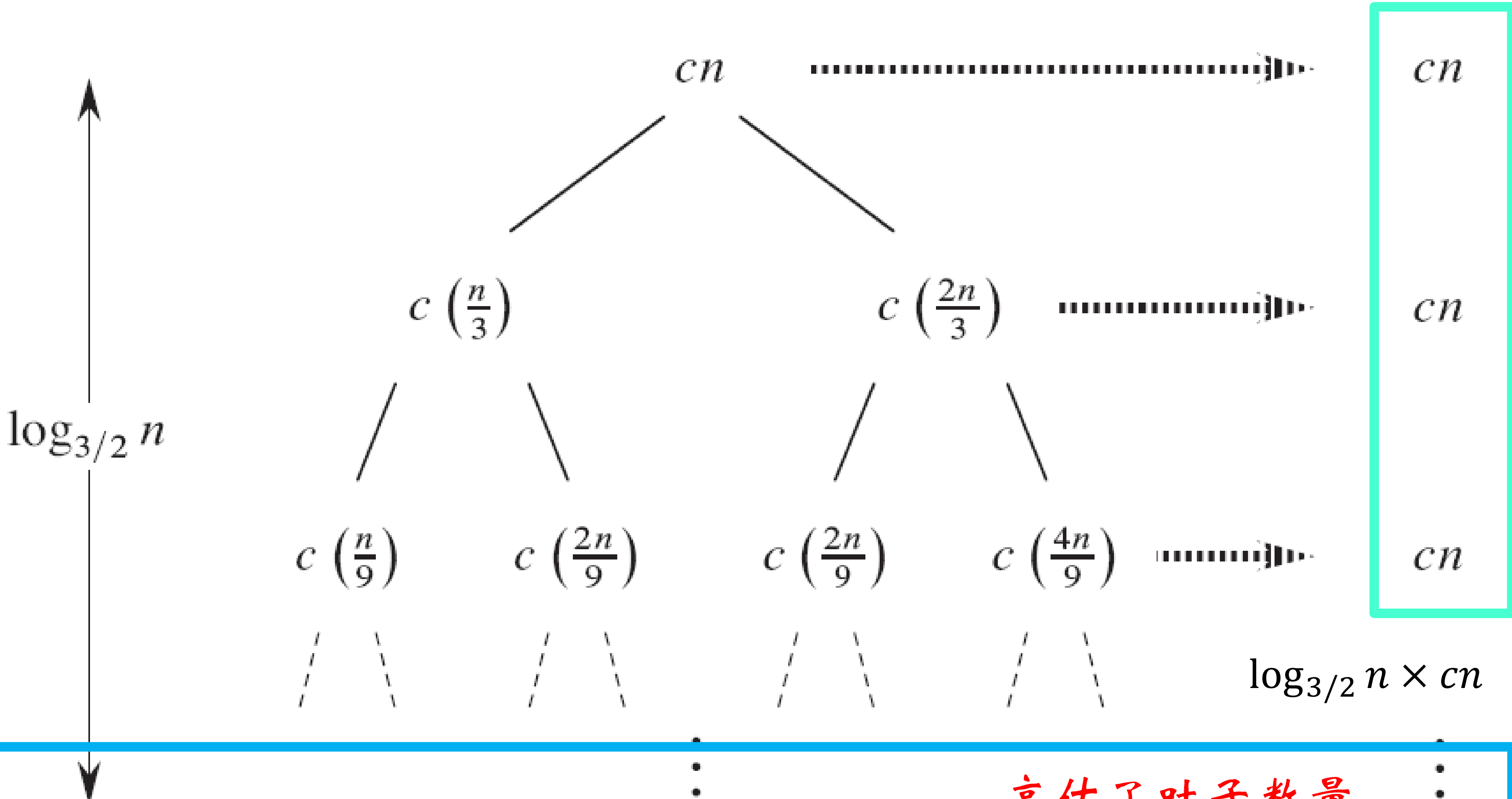
$\left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2$

$\vdots$

$\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2$

$$\underbrace{T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ T(1)\ \cdots\ T(1)\ T(1)\ T(1)}_{n^{\log_4 3}} \quad \Theta(n^{\log_4 3})$$

求解 $T(n)=T(n/3)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+cn$



$$\theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right) \neq O(n \log n)$$

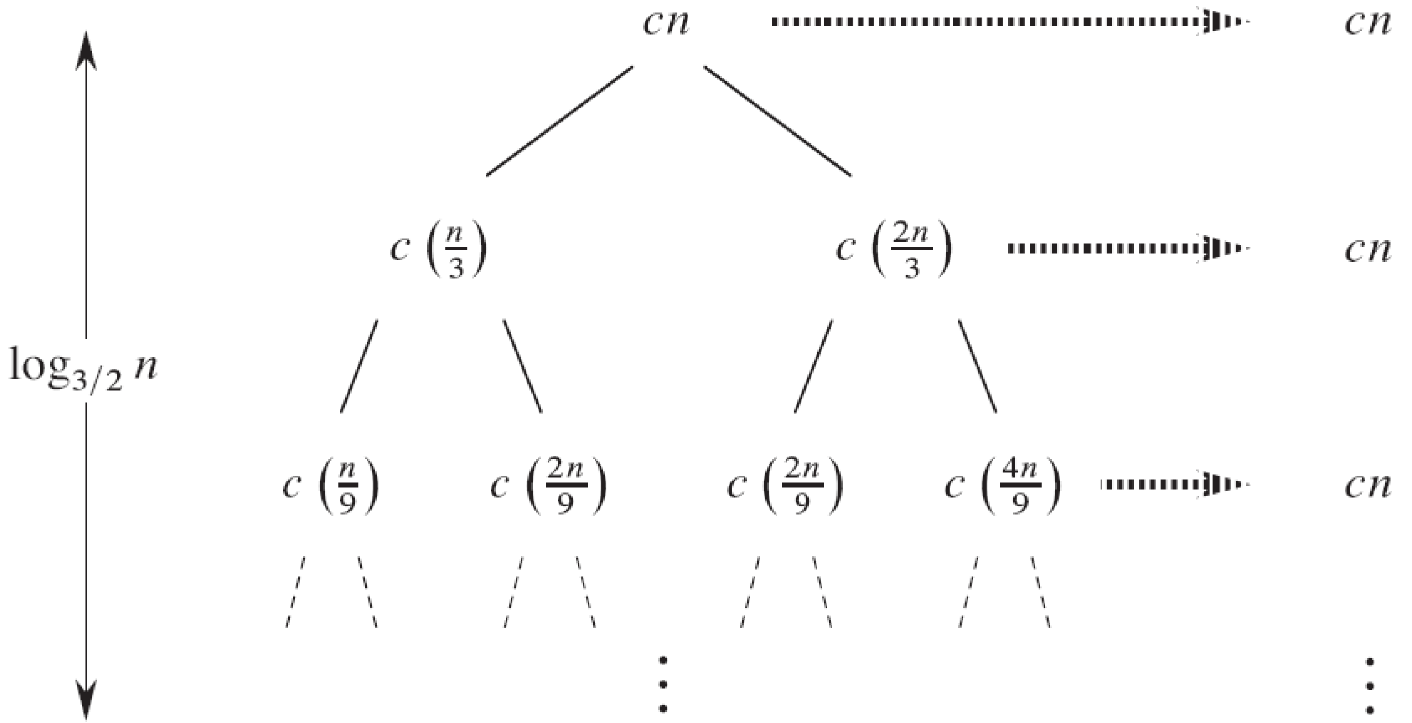
高估了叶子数量

和中间层的加和

求解 $T(n) = T(n/3) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn$

叶子的数量实际为$O(n)$

通过数学归纳法可得$T(n) = O(n\log n)$



2.3.3 Master method

目的：求解 $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ 型方程，$a \geq 1, b > 1$ 是常数，

$f(n)$ 是正函数

一般的分治递归：把问题分成一些更小 (或许有重叠)的子问题，递归地求解这些子问题，然后用所得到的子问题的解去求解原始问题。

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ ：将一个大小为**n**的问题分成大小为***n/b***的***a***个子问题，递归地求解这些子问题，然后用所得到的子问题的解以***f*(n)**的代价求解原始问题。

Master 定理

定理 2.4.1 设 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数集上的函数 $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$. $T(n)$ 可以如下求解：

(1). 若 $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ 是常数，则 $T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

(2). 若 $f(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$，则 $T(n) = \theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$.

(3). 若 $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ 是常数，且对于所有充分大的 n

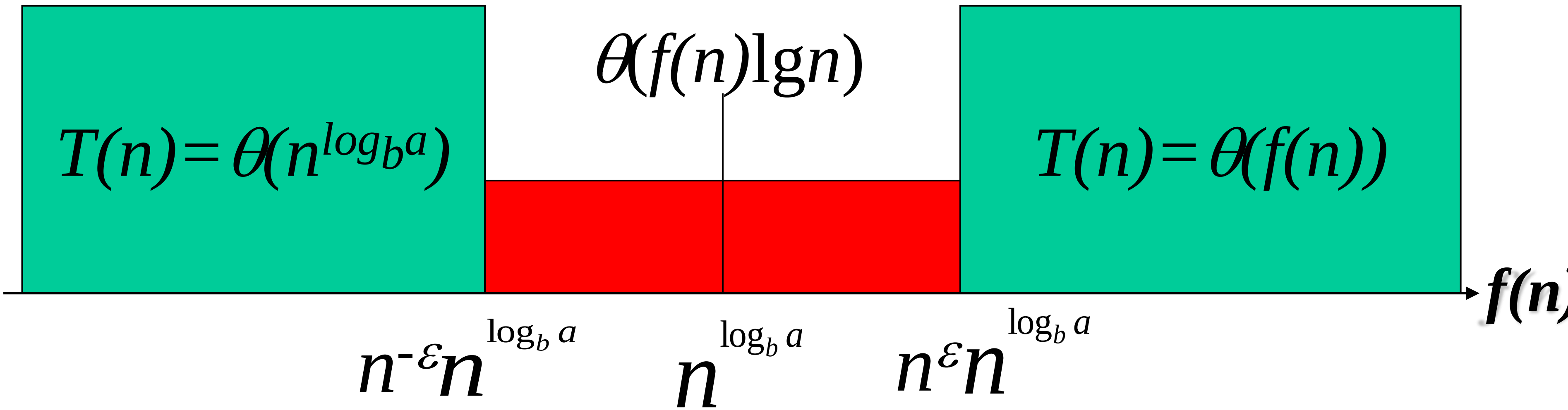
$af\left(n/b\right) \leq cf(n)$，$c<1$ 是常数，则 $T(n) = \theta(f(n))$.

*直观地：我们用 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 比较

(1). 若 $n^{\log_b a}$ 大，则 $T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$

(2). 若 $f(n)$ 大，则 $T(n)=\theta(f(n))$

(3). 若 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 同阶，则 $T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\lg n\right)=\theta(f(n)\lg n)$.



对于红色部分，Master定理无能为力

更进一步：

(1). 在第一种情况，$f(n)$ 不仅小于 $n^{\log_b a}$，必须多项式地小于，即对于一个常数 $\varepsilon > 0$，$f(n) = O(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}})$.

(2). 在第三种情况，$f(n)$ 不仅大于 $n^{\log_b a}$，必须多项式地大于，即对一个常数 $\varepsilon > 0$，$f(n) = \Omega(n^{\log_b a} \cdot n^{\varepsilon})$.

Master定理的使用

例 1. 求解 $T(n) = 9T\left(n/3\right) + n$.

解： $a = 9$，$b = 3$，$f(n) = n$，$n^{\log_b a} = \theta\left(n^2\right)$

$\because f(n) = n = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$，$\varepsilon = 1$

$\therefore T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right) = \theta\left(n^2\right)$

例 2. 求解 $T(n) = T\left(2n/3\right) + 1$.

解： $a = 1$，$b = \left(3/2\right)$，$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$，

$f(n) = 1 = \theta(1) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$，$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right) = \theta(\lg n)$

$\boxed{\text{例 3. 求解 } T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n}$

解： $a = 3$， $b = 4$， $f(n) = n\lg n$， $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O\left(n^{0.793}\right)$

(1) $f(n) = n\lg n \geq n = n^{\log_b a + \varepsilon}$ ， $\varepsilon \approx 0.2$

(2) 对所有 ***n***, $af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\times\frac{n}{4}\lg\frac{n}{4} = \frac{3}{4}n\lg\frac{n}{4} \leq \frac{3}{4}n\lg n = cf(n)$, $c = \frac{3}{4}$.

于是， $T(n) = \theta(f(n)) = \theta(n\lg n)$

例 4. 求解 $T(n) = 2^n T(n/2) + n^n$

解： a=2^n， 非常数项， 不满足master定理条件，
故master定理不适用。

例 5. 求解 $T(n) = 0.5T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}$

解：a<1，不满足master定理条件，

故master定理不适用。

例 6. 求解 $T(n) = 64T(n/8) - n^2 \log n$

解：$f(n)$非正函数，不满足master定理条件，

故master定理不适用。

扩展master定理

定理 2.4.2 设$a \ge 1$和$b > 1$是常数，$f(n)$是一个函数，$T(n)$是定义在非负整数集上的函数$T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$。$T(n)$可以如下求解：

(1). 若$f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$是常数，则$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

(2). 若$f(n) = \theta(n^{\log_b a}\log^k n), k \ge 0$，则$T(n) = \theta(n^{\log_b a}\log^{k+1} n)$

(3). 若$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$是常数，且对于所有充分大的n $af\left(n/b\right) \le cf(n)$，$c<1$是常数，则$T(n) = \theta(f(n))$.

(2). 若 $f(n)=\theta(n^{\log_b a}\log^k n), k\ge 0$， 则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\log^{k+1} n)$

例 7． 求解 $T(n)=2T\left(n/2\right)+n\lg n$.

解： $f(n)=n\lg n$

$a=2, b=2$, 根据原始的 master定理， $n^{\log_b a}=n$

$\log n$ 和 n^{ε} 的大小关系：对于任意ε>0，$\log n \in o(n^{\varepsilon})$

显然无法找到大于零的ε使得：

$n\log n = O(n^{1-\varepsilon})$ 或者 $n\log n=\Omega(n^{1+\varepsilon})$ 成立

$T(n)=n\lg^2 n$

$a=2, b=2, k=1$, 故： $n^{\log_b a}\log^k n = n\lg n = f(n)$

$T(n)=\theta(n\lg^2 n)$

- 计算复杂性函数的阶
  - 同阶、低阶、高阶、严格低阶、严格高阶
  - 算法的复杂性与问题的复杂性
- 递归方程
  - 定义
  - 求解方法：替换法、迭代展开、master方法等