线性代数与空间解析几何

5.2　非齐次线性方程组

一、非齐次线性方程组有解的条件

二、解的结构

假设有m个方程n个未知数的非齐次线性方程组

代数形式
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

未知向量 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

右端项$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

增广矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \vdots \beta)=(A \vdots \beta)$

代数形式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

矩阵形式 $AX = \beta$(m 维列向量)

向量形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n = \beta$

一、非齐次线性方程组有解的条件

以下三个条件等价

(1) 非齐次线性方程组有解;

(2) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$等价.

定理一 非齐次线性方程组解的存在性定理

非齐次线性方程组有解的充要条件是其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩. 即$R(A)=R(B)$

无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(B)$

注：非齐次线性方程组首先判断解是否存在，然后求解.

二、非齐次线性方程组解的结构

设有非齐次线性方程组$AX=\beta$

对应的齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$

称为非齐次方程组的**导出组**

定理二

方程组$AX=\beta$与其导出组$AX=\mathbf{0}$的解向量满足

(1) 若η_1,η_2是$AX=\beta$的解,则$\eta_1-\eta_2$是$AX=\mathbf{0}$的解.

(2) 若η是$AX=\beta$的解,ξ是$AX=\mathbf{0}$的解,

则$\xi+\eta$是$AX=\beta$的解.

推论 设A是系数矩阵,B是增广矩阵,n是未知量个数

(1) 方程组$AX=\beta$有唯一解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$

(2) 方程组$AX=\beta$有无穷解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$

(3) 当$R(A)=R(B)=r<n$时,设$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是导出组$AX=0$的一个基础解系,$\eta^*$是$AX=\beta$的一个特解,

则$AX=\beta$的通解可表示为

$$X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

推论 设A是系数矩阵,B是增广矩阵,n是未知量个数

(1) 方程组$AX=\beta$有唯一解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$

证明:

$$AX=\beta\text{有唯一解}\Leftrightarrow\begin{cases}AX=\beta\text{有解}\Leftrightarrow R(A)=R(B)\\ \text{唯一解}\Leftrightarrow AX=0\text{只有零解}\end{cases}$$

$$AX=0\text{只有零解}\Leftrightarrow R(A)=n$$

推论 设A是系数矩阵,B是增广矩阵,n是未知量个数

(2) 方程组$AX=\beta$有无穷解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$

$$AX=\beta \text{ 有无穷解} \Leftrightarrow \begin{cases} AX=\beta \text{ 有解} \Leftrightarrow R(A)=R(B) \\ \text{无穷解} \Leftrightarrow AX=0 \text{ 有非零解} \end{cases}$$

$AX=0$有非零解$\Leftrightarrow R(A)=r<n$

推论 设A是系数矩阵,B是增广矩阵,n是未知量个数

(2) 方程组$AX=\beta$有无穷解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$

(3) 当$R(A)=R(B)=r<n$时, 设$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是导出组$AX=0$的一个基础解系, η^*是$AX=\beta$的一个特解, 则$AX=\beta$的通解可表示为

$$X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

求解非齐次线性方程组解的步骤

(1) 判断解是否存在. 即$R(A)$是否等于$R(B)$

(2) 若解存在,求导出组$AX=0$的基础解系

(3) 求$AX=\beta$的特解

(4) 写出通解表达式

例　　求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

初等行变换解方程组

$$(A \vdots \beta) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

导出组的基础解系

$$\xi = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)^T$$

同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{2}{3}x_4 = -1 \end{cases}$$

令x_4=0,得到方程组的特解为η^*=(1,1,-1,0)^T

判断下列命题是否正确

A 是$m\times n$ 矩阵,$\beta\in R^m$, $AX=0$ 是$AX=\beta$ 的导出组

(1) 若$AX=0$ 只有零解,则$AX=\beta$ 存在唯一解;

(2) 若$AX=0$ 有非零解,则$AX=\beta$ 存在无穷解;

(3) 若$AX=\beta$ 有两个不同的解,则 $AX=0$ 必有非零解;

(4) 若$AX=0$ 有非零解,则$A^T X=0$ 有非零解;

(5) 若$R(A)=r=m$,则$AX=\beta$ 必有解;

(6) 若$R(A)=r=n$,则$AX=\beta$ 必有唯一解;

(7) 若$m=n$,则$AX=\beta$ 必有唯一解.

P164 11 设η是非齐次线性方程组 $AX=\beta\ (\beta\neq 0)$的解, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次方程组$AX=0$的基础解系,

(1) $\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\eta,\xi_1+\eta,\xi_2+\eta,\cdots,\xi_{n-r}+\eta$ 是$AX=\beta$的$n-r+1$个线性无关的解向量;

P165 12 设非齐次线性方程组 $AX=\beta\ (\beta\neq 0)$的系数矩阵的秩为r, $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r+1}$ 是它的$n-r+1$个线性无关的解向量

证明：它的任意一个解向量可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1.$

非齐次线性方程组的解向量构成的向量组

其极大无关组的秩为$n-r+1.$

非齐次线性方程组的解集合不构成向量空间