线性代数与空间解析几何

3.3 空间中的平面与直线

一　　空间中的平面方程

二　　空间中直线的方程

三　　位置关系

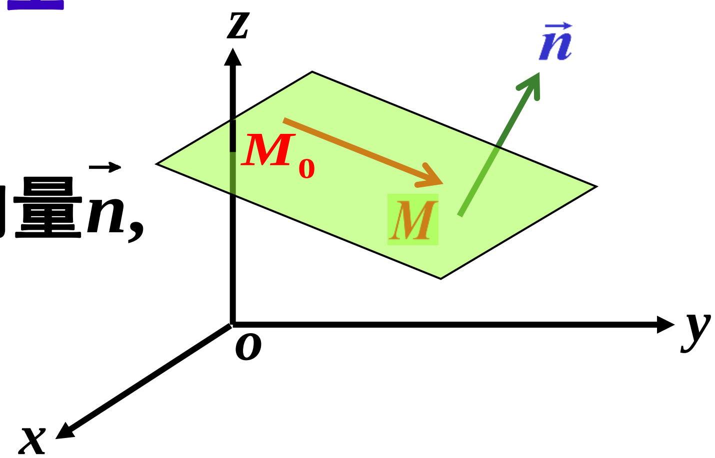
四　　距离

五　　平面束

一　空间中的平面方程

1. 平面的点法式方程

垂直于平面π的任意非零向量$\vec{n}$，叫做该平面的**法向量**



法向量的**特征**：垂直于平面内的任一向量．

已知$\vec{n}=\{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$点在平面π上

任取$M(x, y, z)\in\pi$,

必有$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\ \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的点法式方程

其中法向量为$\vec{n} = \{A, B, C\}$，已知点$M_0(x_0, y_0, z_0)$.

平面上的点都满足上述方程,不在平面上的点都不满足上述方程,上述方程称为平面的方程,平面称为方程的图形.

例1 求过点(2,1,0),且平行于$\vec{a}$=(1,0,1),$\vec{b}$=(0,1,0)的平面方程

解 取法向量$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,1)$$

所求平面方程为$-(x-2)+0(y-1)+(z-0)=0,$

化简得 $x-z-2=0.$

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般方程

其中法向量为$\vec{n}=\{A,B,C\}$,

平面一般方程的几种特殊情况：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过} x \text{ 轴} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于} x \text{ 轴} \end{cases}$

类似的可以讨论$B = 0$或者$C = 0$的情形

(3) $A = B = 0$, 平面平行于xoy坐标面;

类似的可以讨论$A = C = 0$或 $B = C = 0$的情形

例2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和平面$3x+2y-12z+5=0$方程

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$,

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

3. 三点式方程

例 设$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$是空间中不在同一条直线上的三点, 试求过三点$M_1, M_2, M_3$的平面$\pi$的方程

设$M(x, y, z)$是π上任意一点, $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$三个向量共面

$$\left[\overrightarrow{M_1M}\ \ \overrightarrow{M_1M_2}\ \ \overrightarrow{M_1M_3}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ 三点式方程

例3 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4. 截距式方程

例　设平面与三轴分别交于$P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c)$ (其中$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$),求此平面方程.

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & 0-c \end{vmatrix}=0 \qquad bcx+acy+abz=abc$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　y轴上截距　z轴上截距

例4 求通过z轴及过点$M_0(2,3,4)$的平面π的方程

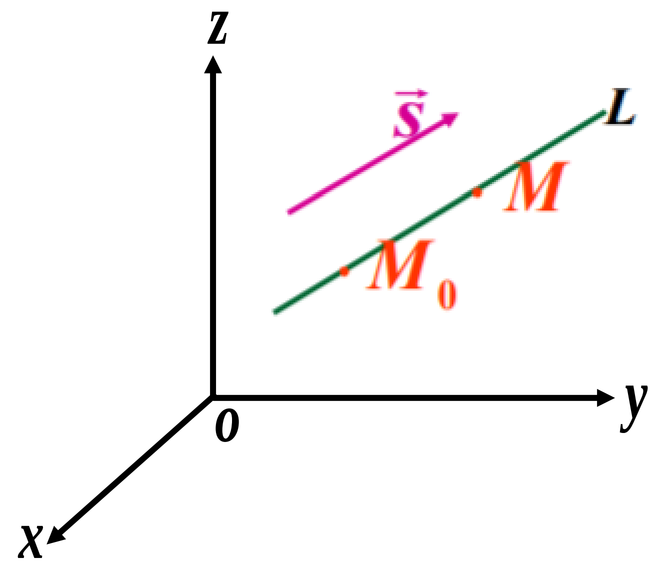
(1)设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$

(2) 三点式$(0,0,0),(0,0,1),(2,3,4)$

(3) $\vec{n}=(0,0,1)\times\overrightarrow{OM_0}$

二　空间中的直线的方程

1. 直线的标准方程



方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的**方向向量**.

已知 (1)$M_0(x_0, y_0, z_0)$是直线L上一点

(2)直线L的方向向量$\vec{s}=\{m, n, p\}, \forall M(x,y,z)\in L,$

$$\overrightarrow{M_0M} // \vec{s}=0 \quad \overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 直线的标准方程

直线标准方程的几种特殊情况:

(1) $m=0, n\neq 0, p\neq 0$ 时，等价于 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$

(2) $m=0, n=0, p\neq 0$ 时，等价于 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0 \end{cases}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 直线的标准方程

2. 直线的参数方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

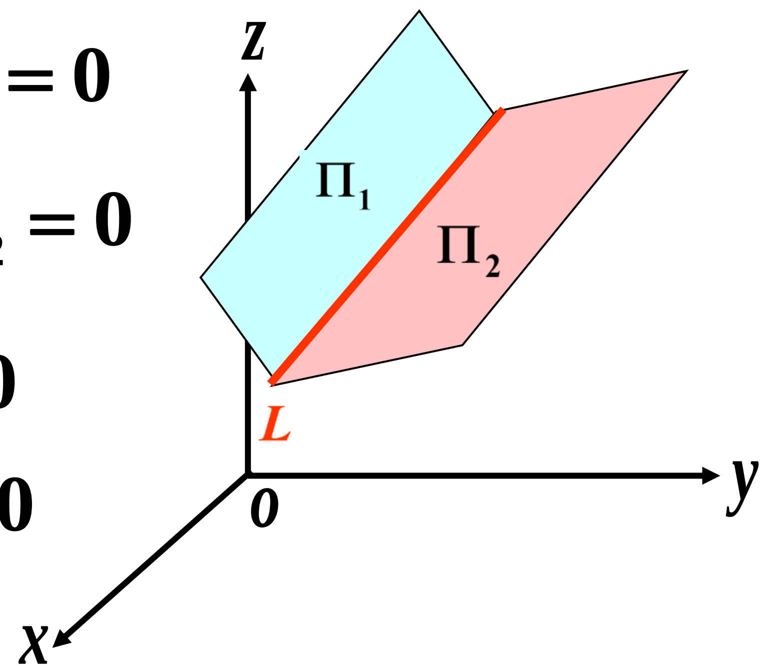
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$ 直线的参数方程

3. 直线的一般方程

定义 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

空间直线的一般方程不来源于标准方程

4. 直线的两点式方程

求过两点$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$的直线$L$的方程

解 $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$在直线$L$上

因此可以取L的方向向量

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$在直线L上

故直线L的方程为$\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

直线的两点式方程

例1 设直线L的一般方程为$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+4y+2z=0 \end{cases}$

求直线L的标准方程和参数方程

解　取$M_0=\{0,0,0\}$, 方向向量$\vec{s}=\{m,n,p\}$

取法向量$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=(-2,0,1)$

所求直线方程为$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$

练习 设直线L的一般方程为$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$.

求直线L的标准方程和参数方程

三　位置关系

1 平面与平面的位置关系

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad \vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad \vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$$

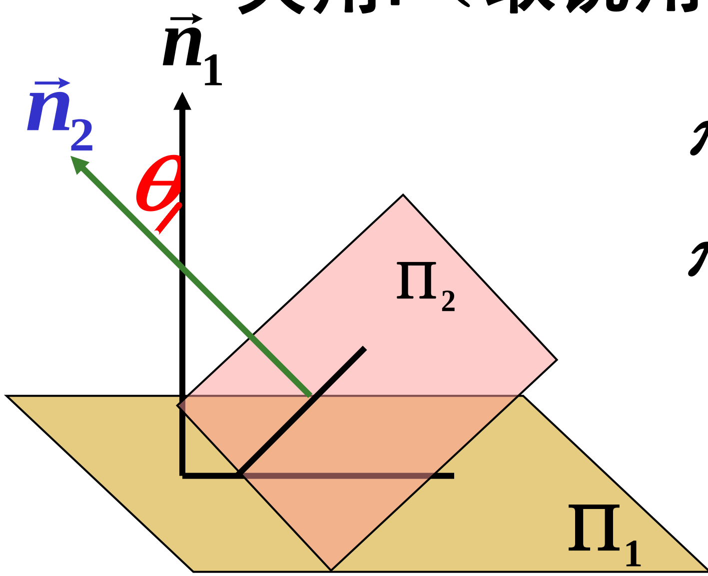
$$(1)\ \pi_1//\pi_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

A_2,B_2,C_2 可以为0,但是不能全为0

$$(2)\ \pi_1 与 \pi_2 重合 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

(3) π_1与π_2 相交于一条直线

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（取锐角）



$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(4) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

2 两直线之间的位置关系

直线$L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$　$\vec{s_1}=\{m_1, n_1, p_1\}$,

直线$L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,　$\vec{s_2}=\{m_2, n_2, p_2\}$,

(1) 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角称之.(锐角)

$$\cos\langle L_1, L_2\rangle=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^{\,2}+n_1^{\,2}+p_1^{\,2}}\cdot\sqrt{m_2^{\,2}+n_2^{\,2}+p_2^{\,2}}}$$

两直线的夹角公式

直线$L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$　$\vec{s_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$,

直线$L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$,　$\vec{s_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$,

(2) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

(3) $L_1 // L_2$ 但不重合$\Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

$\dfrac{x_2-x_1}{m_1} = \dfrac{y_2-y_1}{n_1} = \dfrac{z_2-z_1}{p_1}$不成立

(4) L_1与L_2 重合$\Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

$$\frac{x_2-x_1}{m_1} = \frac{y_2-y_1}{n_1} = \frac{z_2-z_1}{p_1}$$

(5) L_1与L_2 相交于一点(即相交但不重合)

当且仅当L_1, L_2共面,且不平行

$$L_1, L_2\text{共面} \Leftrightarrow [\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2}] = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(6) L_1与L_2 是异面直线$\Leftrightarrow [\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq 0$

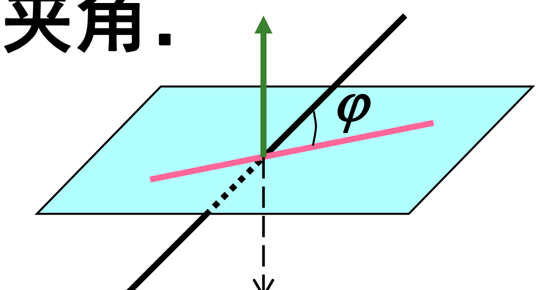
3 直线与平面的位置关系

直线L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $\qquad \vec{s}=\{m,n,p\}$,

平面π: $Ax+By+Cz+D=0$, $\qquad \vec{n}=\{A,B,C\}$,

(1) 直线与平面的夹角

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角φ称为直线与平面的夹角.



$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

$$(\vec{s},\widehat{\ }\vec{n})=\frac{\pi}{2}-\varphi \qquad (\vec{s},\widehat{\ }\vec{n})=\frac{\pi}{2}+\varphi$$

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi)|$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

(2) $L \perp \pi \Longleftrightarrow \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$

(3) $L // \pi \Longleftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0.$

四　距离

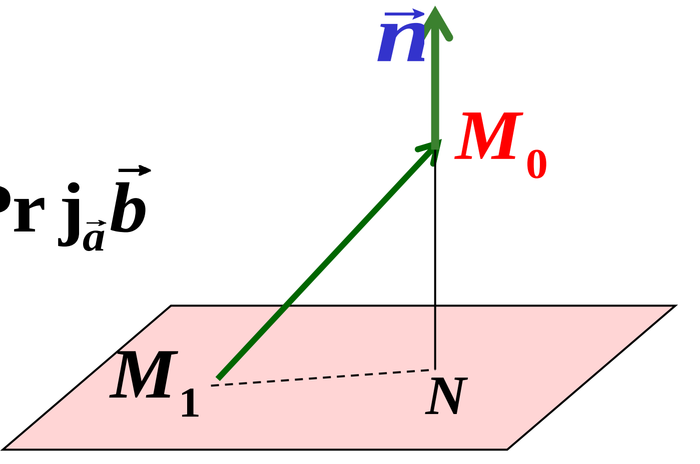
1 点到平面的距离

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面π：$Ax+By+Cz+D=0$外一点, 求$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面π的距离.

$$d=|\mathrm{Pr}\,j_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=|\vec{a}|\,\mathrm{Pr\,j}_{\vec{a}}\vec{b}$$

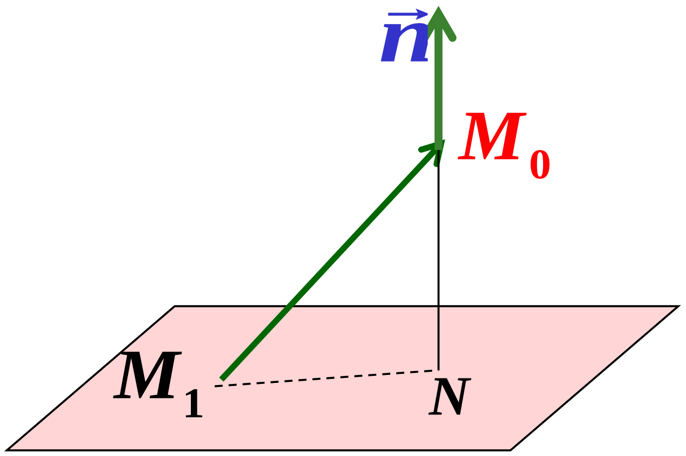
$$\mathrm{Pr\,j}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$



$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$d=|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|$$

$$=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|$$



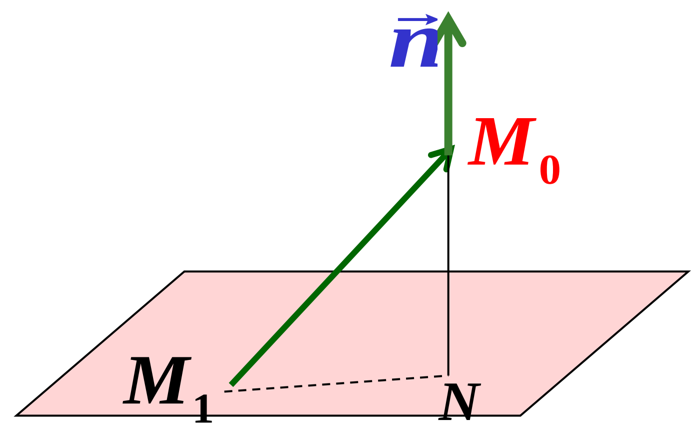
$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\left(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\right)$$

$$d = |\mathrm{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1}|$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



点到平面距离公式

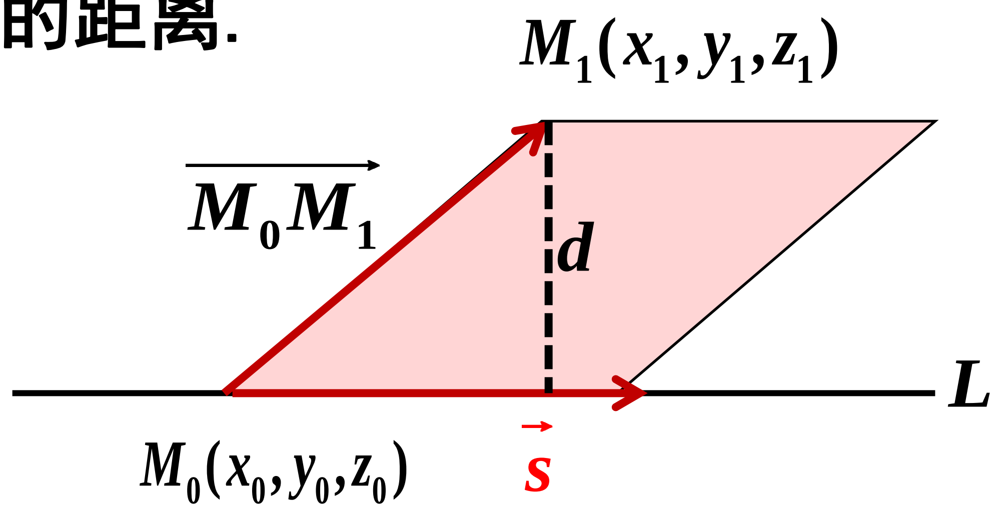
两平行平面间的距离可以转化为点到平面的距离

2 点到直线的距离

设点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, 直线L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

求$M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线L的距离.

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}$$



点到直线距离公式

例 求点$M_1(1,0,2)$, 直线L: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$的距离.

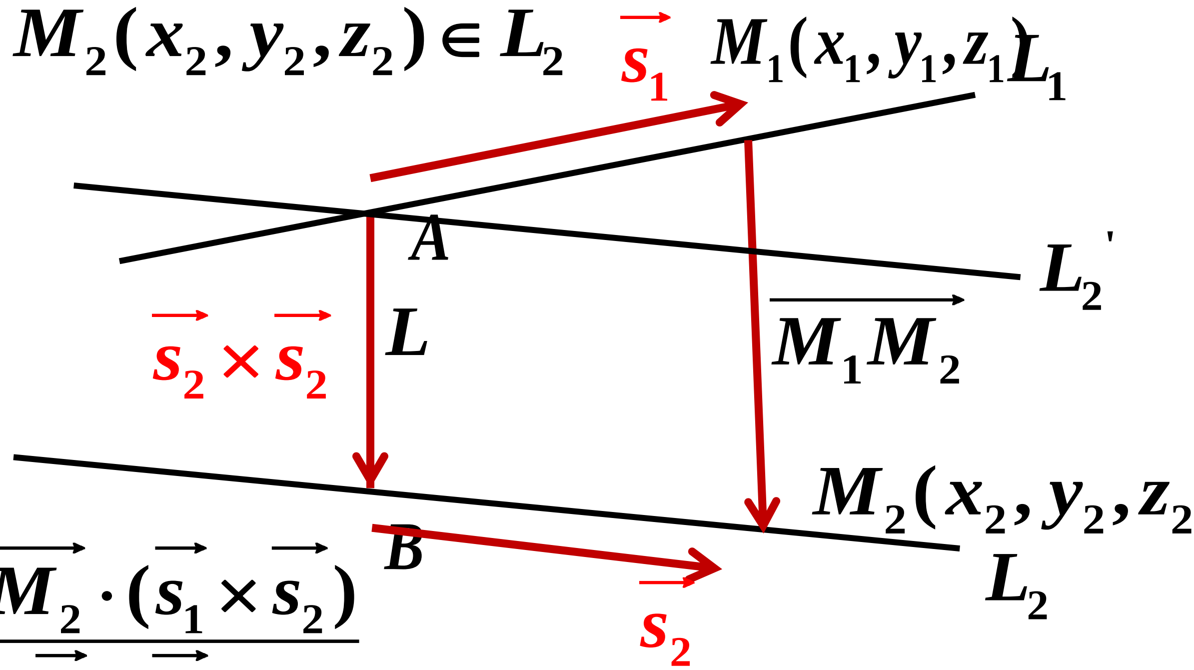
两条平行直线的距离可以转化为点到直线的距离

3 两条异面直线的距离

直线L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $\vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$,

直线L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$,

$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$



$$d=|\mathrm{Prj}_{\vec{s}_1\times\vec{s}_2}\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$=\frac{|[\vec{s}_1\ \vec{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$$

$$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{s}_1\times\vec{s}_2}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$$

五　平面束

1 定义

称通过定直线L的所有平面的全体为通过直线L的平面束

2 平面束方程

设直线L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

λ_1,λ_2 不同时为0

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

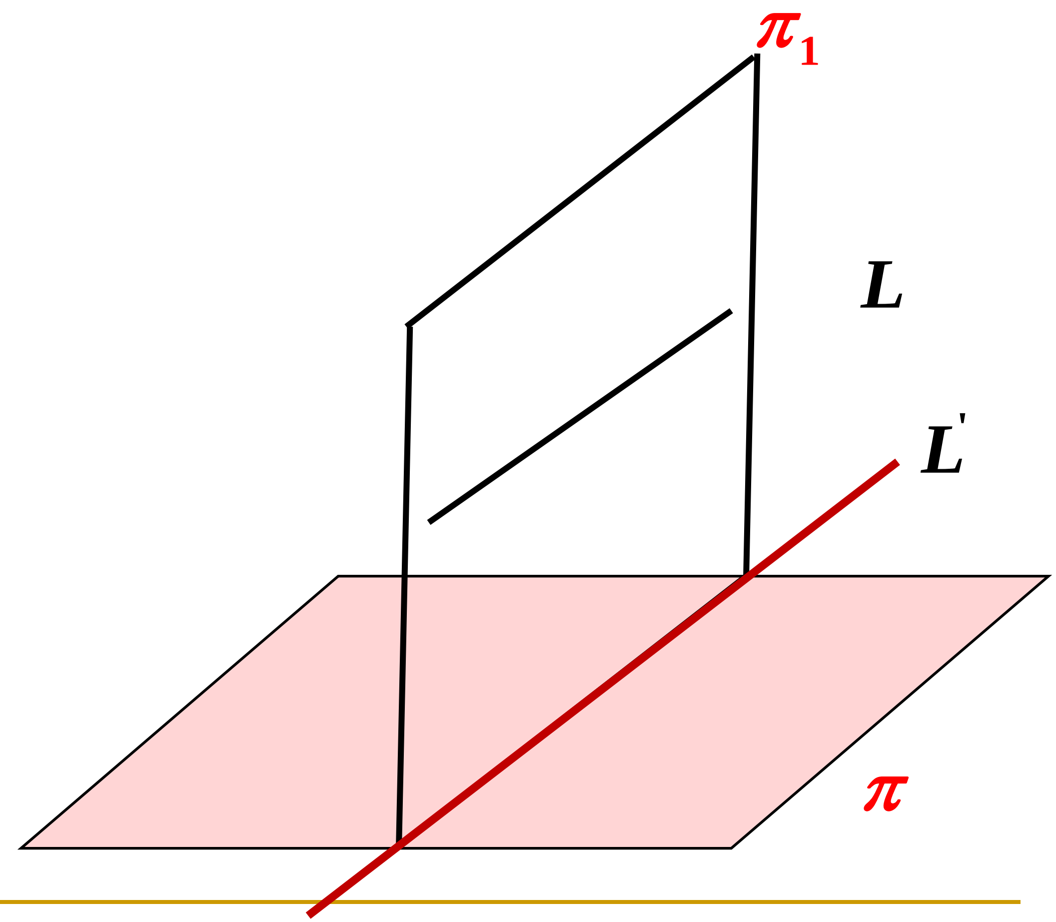
$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

例3 已知直线$L:\begin{cases}3x-2z-6=0\\x+y-2z+1=0\end{cases}$

求(1) L 在平面xoy 上的投影方程

(2) L 在平面$\pi: x+y+2z-5=0$ 上的投影方程

直线L在平面π上的投影：即通过直线L 做一个与平面π垂直的平面π_1, π与π_1的交线



例3 已知直线$L:\begin{cases}3x-2z-6=0\\x+y-2z+1=0\end{cases}$

求(1) L 在平面xoy 上的投影方程

(2) L 在平面$\pi: x+y+2z-5=0$ 上的投影方程

解：设通过 L 的平面束为

$$3x-2z-6+\lambda(x+y-2z+1)=0$$

$$(3+\lambda)x+\lambda y-(2+2\lambda)z-6+\lambda=0$$

$$\left(3+\lambda,\lambda,-(2+2\lambda)\right)\cdot\left(0,0,1\right)=0 \quad \lambda=-1$$

L 在平面xoy 上的投影方程 $\begin{cases}2x-y-7=0\\z=0\end{cases}$

例4 求异面直线$L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$与$L_2:x-1=y+1=z-2$的公垂线方程

$$M_1(0,0,0)\in L_1,\ \vec{s_1}=\{1,2,3\},$$

$$M_2(1,-1,2)\in L_2,\vec{s_2}=\{1,1,1\},$$

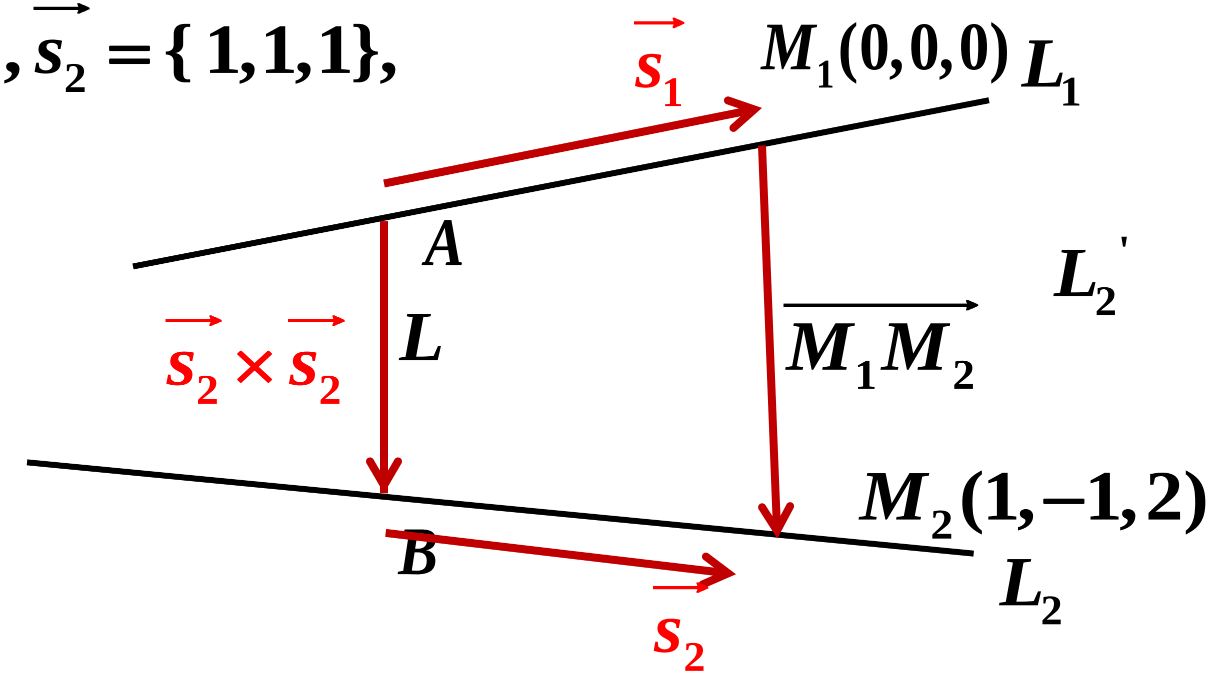
$$A(x_1,y_1,z_1)\in L_1,$$

$$A(t,2t,3t)$$

$$B(x_2,y_2,z_2)\in L_2$$

$$B(1+l,-1+l,2+l)$$

$$\overrightarrow{AB}\perp\vec{s_1},\overrightarrow{AB}\perp\vec{s_2}$$



$$\overrightarrow{AB}=(1+l-t,-1+l-2t,2+l-3t)$$

$$\overrightarrow{s_1}=\{1,2,3\},\ \overrightarrow{s_2}=\{1,1,1\}$$

$$\begin{cases}1+l-t+2(-1+l-2t)+3(2+l-3t)=0\\ 1+l-t+(-1+l-2t)+(2+l-3t)\end{cases}$$

$$t=\frac{1}{2},l=\frac{1}{3}$$

$$A(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})\qquad B(1+l,-1+l,2+l)$$