第四章 无穷集合及其基数习题

P_{136} 1. 设 A 为由序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

的所有项组成的集合，则是否市可数的？为什么？

解：因为序列是可以重复的，故

若 A 是由有限个数组成的集合，则 A 是有限的集合；

若 A 是由无限个数组成的集合，则 A 是可数的。

故本题 A 是至多可数的。

2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多可数。

证：在每个开区间中取一个有理数，则这些有理数构成的集合是整个有理数集合 Q 的子集，因此是至多可数的。

3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多可数。

证：设 A 是所有不连续点的集合，f 是一个单调函数，则 $\forall x_0 \in A, x_0$ 对应着一个区间 $(f(x_0-0), f(x+0))$，于是由上题便得到证明。

4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集合。

证：设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, B=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}\}$, 则 $B \subseteq A$ 且 $|B|=k<\infty$。

令 $\mathrm{B}=\{B \,|\, B \subseteq A, |B|<\infty\}$，

设 $\varphi: A \to \{0,1\}$，则 φ 是 A 的子集的特征函数。

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B)=$ {0，1 的有穷序列}，即 $\forall a_i \in A$，

若 $a_i \in B$，则对应 1；若 $a_i \notin B$ 则对应 0。于是

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B)$ 就对应着一个由 0，1 组成的有限序列 0，1，1，0，⋯，0，1。此序列对应着一个二进制小数，而此小数是有理数。于是，可数集 A 的所有有限子集 B 对应着有理数的一个子集。

又 $\forall B_1, B_2 \in \mathrm{B}, B_1 \neq B_2, B_1, B_2$ 对应的小数也不同，故 φ 是单射。而可数集 A 的所有有限子集 B 是无穷的，故 B 是可数的。

5. 判断下列命题之真伪：

(1)若 $f:X\to Y$ 且 f 是满射，则只要 X 是可数的，那么 Y 是至多可数的；

(2)若 $f:X\to Y$ 且 f 是单射，那么只要 Y 是可数的，则 X 也是可数的；

(3)可数集在任一映射下的像也是可数的；

答案：对，错，错。

7. 设 A 是有限集， B 是可数集，证明： $B^A=\{f\mid f:A\to B\}$ 是可数的。

证：由第四题可得。

8. 设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*。证明 Σ^* 是可数集

证 1：设有限字母 Σ 上所有字（包括空字 ε）所形成的集 Σ^*，则 Σ^* 是可数的。

A_1＝{长度为 1 的字符串}

A_2＝{长度为 2 的字符串}

$\vdots \qquad \vdots$

A_n＝{长度为 n 的字符串}

$\vdots \qquad \vdots$

因为 A_i 中每个长度都是有限的，而 $\Sigma^*=\bigcup_{i=1}^{\infty}Ai$，故 Σ^* 是至多可数的。又 Σ^* 显然是无穷的，故 Σ^* 是可数的。

证 2：不妨假设 $\Sigma=\{a,b,c\}$（**令** $\Sigma=\{0,1\}$ **也是可以**），则可按字典序排序为：

$\varepsilon,a,b,c,aa,ab,ac,ba,bb,bc,\cdots,aaa,aab,\cdots$。由于 Σ^* 的全部元素可以排成无重复项的无穷序列，故 Σ^* 是可数的。

2.4 习题

P_{142} 2. 找一个初等可数 $f(x)$，使得它是 $(0,1)$ 到实数 R 的一一对应。

解： $Ctgx$，或 tgx，或 $tg(x-\dfrac{\pi}{2})$

3. 试给出一个具体的函数，使得它是从 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一一对应。

证： $(0,1)$ 中包含一个可数子集 $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$ 可数。

$A_1=A\bigcup\{0,1\}=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$——可数的，故 $A\sim A_1$。

令 $\varphi:(0,1)\to[0,1],\forall x\in(0,1)$

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{当}x\,\overline{\in}\,A \\ 0 & \text{当}x=\dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{当}x=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2^{i-2}} & \text{当}x=\dfrac{1}{2^i},i\geq 3 \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 即为所求。

4. 证明：若 A 可数，则 2^A 不可数。（用对角线方法）。

证： A 可数，则令 $A=\{1,2,3,\cdots\}$。

假设 2^A 可数，则 A 的子集（即 2^A 的元素）是可数的，故 2^A 中元素可排成一个无重复项的无穷序列：

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$$

而 $2^A\sim Ch(A)=\{f\,|\,f:A\to\{0,1\}\}$，于是特征函 $Ch(A)$ 可数，即 $Ch(A)$ 可写成下列无穷序列形式：

$$f_1,f_2,\cdots,f_n\cdots$$

$$\begin{array}{l} f_1:a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ f_2:a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ f_3:a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots \\ f_n:a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots \end{array}$$

其中 $a_{ij}=0$ 或 $1,j=1,2,3,\cdots$。

造一个特征函数 β。令 $\beta=\{b_i\}_1^\infty$

$$b_1=\begin{cases}1 & 若 a_{11}=0\\0 & 若 a_{11}=1\end{cases};$$

$$b_2=\begin{cases}1 & 若 a_{22}=0\\0 & 若 a_{22}=1\end{cases};$$

$$\vdots$$

$$b_n=\begin{cases}1 & 若 a_{nn}=0\\0 & 若 a_{nn}=1\end{cases}$$

$$\vdots$$

则 $\beta\neq f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n,\cdots$，但 β 确实是 A 到 $\{0,1\}$ 的一个映射，即 β 是 A 的子集的特征函数，矛盾。故 2^A 不可数。