线性代数与空间解析几何

6.1 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

二、特征值与特征向量的的性质

三、实对称矩阵的特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

1. 定义

设A是n阶矩阵,如果存在数$\lambda \in F$ 和n维非零列向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,使关系式

$$Ax=\lambda x$$

成立, 那末,这样的数λ称为方阵A的一个特征值.

非零向量X 称为A的对应于特征值λ 的特征向量.

说明　特征向量$X \neq 0$,特征值问题是对方阵而言的.

2. 求法

若无特别说明,都是在复数域内讨论特征值与特征向量.

1. 特征值的求法

(1). n 阶方阵A 的特征值,就是使齐次线性方程组 $\left(\lambda E_n - A\right)X = 0$ 有非零解的λ 值,

齐次线性方程组$\left(\lambda E_n - A\right)X = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$

$$\left|\lambda E - A\right| = 0 .$$

即满足方程$\left|\lambda E - A\right| = 0$ 的λ都是矩阵A 的特征值.

(2). $|\lambda E - A| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

这是以λ为未知数的一元n次方程,

称为方阵A的**特征方程**.

记$f(\lambda) = |\lambda E - A|$,它是$\lambda$的$n$次多项式,称其为方阵$A$的**特征多项式**.

即特征值就是特征方程$|\lambda E - A| = 0$的根.

2. 特征向量的求法

属于特征值λ_i的特征向量

即齐次线性方程组$\left(\lambda_i E_n - A\right)X = 0$的非零解

特征子空间

齐次线性方程组$\left(\lambda_i E_n - A\right)X = 0$的解空间

$N\left(\lambda_i E_n - A\right)$，称为$A$的**属于特征值$\lambda_i$的特征子空间**.

$$N\left(\lambda_i E_n - A\right)=\{X \mid \left(\lambda_i E_n - A\right)X = 0\}$$

注： 特征子空间中,除了零向量以外,其余向量均是A的属于特征值λ_i的特征向量.

例1 求下列矩阵的特征值和特征向量

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\4&-3&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

解: A 的特征多项式为

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\-1&\lambda+1&-1\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$$

因此A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$

对于特征值为$\lambda_1=1$,解方程组$(E-A)X=0$

$$E-A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组$(E-A)X=0$的基础解系为$\xi_1=(1,1,1)^T$

因此A的属于特征值$\lambda_1=1$的所有特征向量为

$X_1=k(1,1,1)^T$ k为任意非零常数.

对于特征值为$\lambda_2=\lambda_3=-2$,解方程组$(-2E-A)X=0$

$$-2E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组$(-2E-A)X=0$的基础解系为

$$\xi_2=(-1,1,0)^T \quad \xi_3=(-1,0,1)^T$$

因此A的属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=-2$的所有特征向量为

$X_2=k_2\xi_2+k_3\xi_3$, k_2,k_3 为不同时为零的任意常数.

求下列矩阵的特征值和特征向量

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

解：B 的特征多项式为

$$|\lambda E_3 - B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ -4 & \lambda+3 & 0\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+1)^2=0$$

因此B 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=-2$

对于特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$,解方程组$(-E-B)X=0$

$$-E-B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组$(-E-B)X=0$的基础解系为

$$\xi_1=(-1,-2,1)^T$$

因此A的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的所有特征向量为

$X_1=k(1,1,1)^T$ k为任意非零常数.

对于特征值为$\lambda_3=-2$,解方程组$(-2E-B)X=0$

$$-2E-B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组$(-2E-B)X=0$的基础解系为

$\xi_2=(0,0,1)^T$

因此B的属于特征值$\lambda_3=-2$的所有特征向量为

$X_2=k_2\xi_2$，k_2为不为零的任意常数.

3. 小结

求矩阵特征值与特征向量的步骤:

1. 计算A的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$;

2. 求特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的全部根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,就是$A$的全部特征值;

3. 对于特征值λ_i,求齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A) X = 0$$

的非零解,就是对应于λ_i的特征向量.

例2 判断

(1) A 与 A^{T} 有相同的特征值与特征向量；

A 与 A^{T} 有相同的特征值,但是不一定有相同的特征向量;

(2) $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的解都是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量；

除了零向量以外

(3) 若X_1, X_2都是A 的属于特征值λ_0 的特征向量, 则 X_1, X_2 的任意线性组合$\sum_{i=1}^{2} k_i X_i$都是A 的属于特征值 λ_0 的特征向量;

若$\sum_{i=1}^{2} k_i X_i = 0$,则不是特征向量.

(4) 若X_1, X_2是方程$(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个基础解系, 则

$\sum_{i=1}^{2} k_i X_i$是A 的属于特征值λ_0 的全部特征向量, 其中

k_1, k_2均为非零常数；　k_1, k_2为不全为零常数；

(5) 若X_1, X_2是A 的两个特征向量, 则$k_1X_1 + k_2X_2$

$(k_1, k_2$不全为零) 也是A 的特征向量；

属于不同特征值的特征向量的线性组合不再是A的特征向量

作业 P184 8　　第二十次课结束

二、特征值与特征向量的的性质

特征方程$|\lambda E - A| = 0$在复数域内恒有解,解的个数等于特征方程的次数(重根按照重数计算),因此n阶方阵A在复数域内有n个特征值.

n阶矩阵A 的特征值与特征向量的性质

设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) A的n个特征值之和等于A的n个主对角线元素之和;

即$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) A的n个特征值的乘积等于A的行列式的值;

即$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

0是A的特征值 $\Leftrightarrow |A|=0$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

将特征方程左端的特征多项式展开

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| = 0$$

例1 设$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=12$

求x的值

例2 设λ是A的特征值，证明λ^2是A^2的特征值.

例3 设λ是A的特征值，证明$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值，

其中$f(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_nA^n$

可以当作结论记住，直接应用

例4 设A为n阶方阵,满足$A^2-2A-3E=0$,求A 的特征值

例5 设A为n阶可逆阵,$\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n$ 是其特征值,$x_1,x_2,\dots,x_n$ 是其对应的特征向量,试求A^{-1} 及A^* 的全部特征值和特征向量。

例6 设$\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n$ 是A 的n个特征值，试证

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$$

例7

设n阶方阵A的各行元素之和为k,

(1) 试证：k 是A 的一个特征值, 并求A的属于特征值k的一个特征向量

(2) 当A为可逆矩阵, $k \neq 0$, A^{-1}的各行元素之和?

$3A^{-1}+5A$各行元素之和?

思考题

设4阶方阵A满足条件: $\det(3E+A)=0$,

$AA^T=2E$, $\det A<0$, 求A^*的一个特征值.

(3) 属于不同特征值的特征向量线性无关.

定理6.1 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶方阵$A$的$m$个特征值, $X_1,X_2,\cdots,X_m$依次是与之对应的特征向量.如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等,则$X_1,X_2,\cdots,X_m$线性无关.

推论 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶方阵$A$的$m$个特征值，$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{i,r_i}$是$A$的属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，$i=1,2,...,m$.若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等，则向量组

$$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1,r_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2,r_2},\cdots,X_{m1},X_{m2},\cdots,X_{m,r_m}$$

线性无关.

问题:n阶矩阵A是否一定有n个线性无关的特征向量?

注意

1.属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2.属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量.

3.矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一；一个特征向量不能属于不同的特征值.

作业 P184 2,6,8,13

三、实对称矩阵的特征值与特征向量

n阶实对称矩阵A 的特征值满足

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数；

练习 设A为n阶实对称阵, 满足$A^3-3A^2+5A-3E=0$, 求A 的特征值

(2) 实对称矩阵对应于不同特征值的实特征向量必正交；

注意： 对于一般矩阵，只能保证不同特征值对应的特征向量线性无关,但是不能保证正交

例1 A为3阶实对称阵, A的特征值为$1,2,2$, $X_1=(1,1,0)^T$, $X_2=(0,1,1)^T$都是A的属于特征值2的特征向量

(1)求A 的对应于特征值1的特征向量

(2)求A 的对应于特征值1的实单位特征向量

设$X=(x_1,x_2,x_3)^T$,是A的属于特征值1的特征向量

则有$(X,X_1)=0,(X,X_2)=0,$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\quad =0 \\ \qquad\; x_2+x_3=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi=(1,-1,1)^T$$

(3) 实对称矩阵A的r_i重特征值λ_i，一定有r_i个线性无关的实特征向量.

注意：对于一般矩阵没有这个性质

简单的归纳总结

矩阵	A	kA	A^n	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^n	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\dfrac{\vert A\vert}{\lambda}$	$\lambda^{-1}+f(\lambda)$
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

例：已知 -2 是 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & x & -2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $x=(\quad)$