线性代数与空间解析几何

6.2　相似矩阵

一、相似矩阵的概念

二、方阵相似对角化的条件及方法

三、几何重数与代数重数

四、实对称矩阵的正交相似对角化

一、相似矩阵的概念

1. **定义** 设A,B都是n阶矩阵,若存在可逆矩阵T,使

$$B=T^{-1}AT,$$

则称矩阵A与B**相似**.

同时称从A到B的这种变换为**相似变换**.

可逆矩阵T称为相似变换矩阵.

若A与一个对角阵D相似,则称A可以**相似对角化**.

2. 相似关系的性质

(1) 自反性：A 与 A 自身相似. 相似矩阵为 E

(2) 对称性：若 A 与 B 相似, 相似矩阵为 T

则 B 与 A 相似, 相似矩阵为 T^{-1}

(3) 传递性： 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似

则 A 与 C 相似.

注意： 相似与等价的关系

相似 $\Rightarrow$ 等价, 反之不成立

3. 相似矩阵的性质

(1) A 与 B 相似 $\Rightarrow R(A)=R(B)$

(2) A 与 B 相似 $\Rightarrow |A|=|B|$

(3) A 与 B 相似 $\Rightarrow A$ 与 B 同时可逆或者同时不可逆;

当 A 与 B 同时可逆时, A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(4) A 与 B 相似 $\Rightarrow A^n$ 与 B^n 相似;

(5) A 与 B 相似 $\Rightarrow A$ 与 B 的特征多项式相同 (定理6.2)

(6) A与B相似$\Rightarrow A$与B的特征值相同

注意:

① A与B相似, A与B有相同的特征值但是**不一定有相同的特征向量.**

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

计算A的特征值为$\lambda_1=1$,对应的特征向量为$X_1=(1,2)^T$

$\lambda_2=-2$,对应的特征向量为$X_2=(2,1)^T$

$X_1=(1,2)^T$ 不是B的特征向量

② A与B有相同的特征值，A与B不一定相似.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

③ A与B都是实对称矩阵时，A与B相似$\Leftrightarrow$

A与B的特征值相同

(7) A 与 B 相似 $\Rightarrow tr(A)=tr(B)$

(8) **推论6.1** 若 n 阶方阵 A 与对角阵 $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

例1 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$,

验证$P^{-1}AP=D$,并求A^k

二、方阵相似对角化的条件及方法

定理6.3 (1) n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似(即 A 能对角化)的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) $T^{-1}AT=D$ 为对角阵 $\Leftrightarrow T$ 的 n 个列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量,并且这 n 个线性无关的特征向量对应的特征值依次为对角阵 D 的主对角线上的元素.

(1).A 与对角阵相似的判定条件

(2).A 与对角阵相似时,如何求相似变换矩阵和对角阵

推论 如果n阶方阵A恰好有n个互不相同的特征值，则A一定与对角阵相似.

注意 如果A的特征方程有重根，此时不一定有n个线性无关的特征向量，从而矩阵A不一定能对角化，但如果能找到n个线性无关的特征向量，A还是能对角化.

例2 求可逆矩阵T 使得$T^{-1}AT=D$ 为对角阵,

其中$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **P173 例5**

解: **(1) 求A 的特征值**

A 的特征多项式为

$$|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

因此A 的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=2$

(2) 求A 的不同特征值下的两个线性无关的特征向量

对于特征值为$\lambda_1=1$,解方程组$(E-A)X=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组$(E-A)X=0$的基础解系为$T_1=(-3,1)^T$

因此A的属于特征值$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量为

$$T_1=(-3,1)^T$$

对于特征值为$\lambda_2=2$,解方程组$(2E-A)X=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组$(2E-A)X=0$的基础解系为$T_2=(1,0)^T$

(3)令

$$T=(T_1,T_2)=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

则$T^{-1}AT=D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

例3 设3阶方阵A的特征值为1,-1,-1，其对应的特征向量为$T_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $T_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $T_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$,

求A与A^9. **P173 例6**

作业P184 11 设4阶实对称矩阵A的特征值为-1,-1,1,1,

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$是$A$的属于特征值$-1$的特征向量,

求A与A^{2n}.

设$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是A的属于特征值1的特征向量

则ξ与ξ_1,ξ_2正交,有

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3=(-1,1,1,0)^T\ \xi_4=(-1,-1,0,1)^T$,

令 $T=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $T^{-1}AT=D=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

$$A=TDT^{-1}=T\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

作业P184 11 设4阶实对称矩阵A 的特征值为-1,-1 ,1, 1,

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$是A的属于特征值-1的特征向量,

求A与A^{2n}.

设$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是A的属于特征值1的特征向量

则ξ与ξ_1,ξ_2正交,有

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_4=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3 = (-1,1,1,0)^T \ \xi_4 = (-1,-1,0,1)^T$，

注意到ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4相互正交,单位化得

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}, i = 1,2,3,4$$

令$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{3}/3 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$

则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

$$A=PDP^{-1}=PDP^{T}=P\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}P^{T}.$$

三、几何重数与代数重数

1. 代数重数　λ_0 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值，若 λ_0 是 A 的特征方程的 m 重根，则称 m 是 λ_0 的代数重数.

2. 几何重数　称 λ_0 对应的特征子空间 $N(\lambda_0 E - A)$ 即 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的解空间的维数，称为 λ_0 的几何重数.

即属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量的个数.

λ_0 的几何重数 $= n - R(\lambda_0 E - A)$.

3. 性质　定理6.4

矩阵 A 的特征值的几何重数小于等于它的代数重数.

例4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$有两个线性无关的特征向量,

则$a=(\quad)$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 2 & \lambda+3 & -a \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

$\lambda=-1$是三重特征值, $\lambda=-1$的代数重数为3

$\lambda=-1$的几何重数$\leq$代数重数=3

A有两个线性无关的特征向量, $\lambda=-1$的几何重数≥ 2

$$n-R(\lambda_0 E-A)=3-R(-E-A)$$

$$n - R(\lambda_0 E - A) = 3 - R(-E - A)$$

$$2 \le 3 - R(-E - A) \le 3$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le R(-E - A) \le 1$$

$$-E - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = -1$$

注:

(1) 复数域内, n 阶方阵A 的所有特征值的代数重数之和一定等于n,因此若A 的每个特征值的几何重数等于它的代数重数,则A 一定有n 个线性无关的特征向量,从而A 一定可以相似对角化.

(2) 若A 的某一个特征值的几何重数小于其代数重数,则A 的线性无关的特征向量的个数一定小于n ,从而A 不能相似对角化.

4. 定理　判断矩阵是否可以相似对角化

复矩阵A与对角阵相似的$\Leftrightarrow$

A的每一个特征值的几何重数等于代数重数.

定理　细化

设n阶方阵A的相异特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,

其代数重数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_m$, 且有$\sum_{i=1}^{m} r_i = n$,

则A与对角阵相似的$\Leftrightarrow n - R(\lambda_i E - A) = r_i$.

例5 P176 例7

设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$可以相似对角化,求$x,y$ 满足的条件;

并求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$ 为对角阵。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$$E-A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-x&2&-y\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$n-R(\lambda_1 E-A)=3-R(E-A)=2$$

$$R(E-A)=1 \Rightarrow x=y$$

$$3E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&2&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$n-R(\lambda_3 E-A)=3-R(3E-A)=1$$

练习 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

求k 取何值时,存在可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP$ 为对角阵, 并求P及相应矩阵及对角阵.

矩阵相似对角化的步骤

(1) 求A 的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$;

(2) 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$互异,则$A$ 与对角阵相似;

若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 中互异的为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$, 每个$\lambda_i$ 的代数重数为r_i,若λ_i 的几何重数$n-R(\lambda_i E-A)=r_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$, 则A 与对角阵相似;

否则A 与对角阵不相似;

(3) 当A 与对角阵相似时，求出A 的n 个线性无关的特征向量$T_1,T_2,\ldots T_n$, 并令$T=(T_1,T_2,\ldots T_n)$, 则有

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

例6

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$$能否相似对角化

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-3&1\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

对于特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$,

$$2E-B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$3-R(2E-B)=3-1=2$$

代数重数=几何重数

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

对于特征值为$\lambda_3=6$,

$$6E - B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换求秩}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 - R(6E - B) = 1$$

代数重数=几何重数

练习

判定$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$能否与对角阵相似，若可以相似在相似时求可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP$为对角阵。

四、实对称矩阵的正交相似对角化

定理6.6 设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵P

$$使得 P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 是A 的n个特征值.

例7 P177 例8

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$ 求正交矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵，

并求A^n

(1) 求特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

因此A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

(2) 求三个规范正交向量

对于特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$,解方程组$(-E-A)X=0$

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组$(-E-A)X=0$的基础解系为

$$T_1=(-1,1,0)^T,T_2=(-1,0,1)^T$$

将T_1,T_2利用$Schmidt$正交化方法正交化,得

$$\beta_1 = T_1 = (-1,1,0)^T$$

$$\beta_2 = T_2 - \frac{(T_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (-1,0,1)^T - \frac{1}{2}(-1,1,0)^T$$

$$= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$$

再将β_1,β_2 单位化

$$P_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$$

$$P_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$$

对于特征值为$\lambda_3=5$,解方程组$(5E-A)X=0$

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组$(5E-A)X=0$的基础解系为$T_3=(1,1,1)^T$

再将T_3 单位化

$$P_3=\frac{T_3}{|T_3|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

(3)令$P=(P_1,P_2,P_3)$得到正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例3 设3阶方阵A 的特征值为1,-1,-1，其对应的

特征向量为$T_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$T_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$T_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$，

求A与A^9. **P173 例6**

作业P184 11 设4阶实对称矩阵A 的特征值为-1,-1,1,1,

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$是$A$的属于特征值$-1$的特征向量，

求A与A^{2n}.

设$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是A的属于特征值1的特征向量

则ξ与ξ_1,ξ_2正交,有

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3=(-1,1,1,0)^T$ $\xi_4=(-1,-1,0,1)^T$,

令 $T=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\0&2&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\text{则} T^{-1}AT=D=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

$$A=TDT^{-1}=T\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}T^{-1}.$$

作业P184 11 设4阶实对称矩阵A 的特征值为-1, -1 ,1, 1,

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$是A的属于特征值-1的特征向量,

求A与A^{2n}.

设$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是A的属于特征值1的特征向量

则ξ与ξ_1,ξ_2正交,有

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_4=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_3 = (-1,1,1,0)^T\ \xi_4 = (-1,-1,0,1)^T$,

注意到ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4相互正交,单位化得

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}, i = 1,2,3,4$$

$$令P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{3}/3 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

$$A=PDP^{-1}=PDP^{T}=P\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}P^{T}.$$

判定矩阵是否能与对角阵相似

(1) 观察A 是否为实对称矩阵，实对称矩阵必定与对角阵相似；

(2) 求A 的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$，若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$互异，则$A$ 与对角阵相似；

(3) 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 中互异的为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$，每个$\lambda_i$ 的重数为r_i，若λ_i 的几何重数$n-R(\lambda_i E-A)=r_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$，则A 与对角阵相似；

否则A 与对角阵不相似.