习 题 课

例 1 设 A, B, C 是三个任意集合，则

（1）若 $A \in B, B \in C,$ 则 $A \in C$ 可能吗？ $A \in C$ 常真吗?举例说明；

（2）若 $A \subseteq B$，则 $A \in B$ 可能吗？证明你的断言。

解：（1）举例说明如下： $A = \{a\}, B = \{\{a\}\}, C = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$，则有

$$A \in B, B \in C, A \in C \text{。}$$

但 $A \in C$ 不常为真。若 $A = \{a\}, B = \{\{a\}\}, C = \{\{\{a\}\}\}$，则有

$$A \in B, B \in C, \text{但} A \notin C \text{。}$$

（2）若 $A = \{a\}, B = \{a, \{a\}\}$，则有 $A \in B, A \subseteq B$。

例 2 设 A,B,C 是任意三个集合：

（1）若 $A \cup B = A \cup C$，则有 $B = C$ 吗？

（2）若 $A \cap B = A \cap C$，则有 $B = C$ 吗？

（3）若 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = A \cap C$，则有 $B = C$ 吗？

解：（1）、（2）不成立，（3）成立。

反例如下自己举。

（3）**由集合相等的定义来证明：**

例 3 设 A,B 为任意集合，证明

（1） $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

（2） $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$

证：（1） $\forall x \in P(A)$，有 $x \subseteq A$，而 $A \subseteq B$，故 $x \subseteq B$，即 $x \in P(B)$。所以 $P(A) \subseteq P(B)$。

反之，$\forall x \in A$，则 $\{x\} \subseteq A$，即 $\{x\} \in P(A)$，又 $P(A) \subseteq P(B)$，所以 $\{x\} \in P(B)$，即 $\{x\} \subseteq B$，所以 $x \in B$，即 $A \subseteq B$。

（2） $P(A)=P(B)\Leftrightarrow(P(A)\subseteq P(B))\wedge(P(B)\subseteq P(A))$

$$\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A\Leftrightarrow A=B。$$

例 4 设 A,B 是两个任意集合，证明：

（1） $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$；（2） $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$；（3）举例说明 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

其中 2^A 表示集合 A 的幂集。

证：（1）证 $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$。

$\forall\ x\in 2^A\bigcup 2^B$，有 $x\in 2^A$ 或 $x\in 2^B$。

若 $x\in 2^A$，则 $x\subseteq A$，而 $A\subseteq A\bigcup B$，故 $x\subseteq A\bigcup B$，因此 $x\in 2^{A\cup B}$。

同理，若 $x\in 2^B$，也有 $x\in 2^{A\cup B}$。

因此 $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$。

（2）证 $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$。

证 $\forall x\in 2^A\bigcap 2^B\Leftrightarrow x\in 2^A$ 且 $x\in 2^B\Leftrightarrow x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$

$$\Leftrightarrow x\subseteq A\bigcap B\Leftrightarrow x\in 2^{A\cap B}。$$

所以 $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$。

（3）下面举例说明 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

设 $A=\{1\},B=\{2\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\}\},2^B=\{\varnothing,\{2\}\}$。

$2^A\bigcup 2^B=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$，而 $A\bigcup B=\{1,2\},2^{A\cup B}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，

所以 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

例 5（多项选择）设集合 A 是以空集 $\varnothing$ 为唯一元素的集合，集合 $B=2^{2^A}$，则下列各式那个正确？

(1) $\varnothing\in B$；(2) $\varnothing\subseteq B$；(3) $\{\varnothing\}\subseteq B$；(4) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\subseteq B$；(5) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}\in B$。

解： 选（1），（2），（3），（4）。

例 6 设 A,B 是任意集合，则

（1）若 $A\setminus B=B$，则 A， B 有何关系？

（2） $A\setminus B=B\setminus A$，则 A 与 B 又有何关系。

证：（1）由 $A\setminus B=B$，则可得出 $A=B=\phi$。

（2）由 $A\setminus B=B\setminus A$，可导出 $A=B$。〔决不是 $A=B=\phi$〕

例 7 (1)举例说明，结合律不适用于集合的差运算之中。

(2) 证明：对任意集合 A,B,C，有 $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ ，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$ 。

解： (1) 若 $A=\{1,2,3\},B=C=\{2\}$，则 $\left(A\setminus B\right)\setminus C\subseteq A\setminus\left(B\setminus C\right)$。

(2) 证明：$\forall\ x\in\left(A\setminus B\right)\setminus C$，有 $x\in\left(A\setminus B\right),x\notin C$，即 $x\in A$ 但 $x\notin B,x\notin C$，

从而 $x\notin B\setminus C$，于是 $x\in A\setminus\left(B\setminus C\right)$，即 $\left(A\setminus B\right)\setminus C\subseteq A\setminus\left(B\setminus C\right)$。

例 8 设 A,B,C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件

（1）$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=A$；（2）$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=\phi$；

（3）$(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)=\phi$；（4）。$(A\setminus B)\Delta(A\setminus C)=\phi$

解：（1） $A\bigcap B\bigcap C=\phi$。

（2）$(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=\phi\Rightarrow A\setminus(B\bigcap C)=\phi\Leftrightarrow A\subseteq(B\bigcap C)$。

（3） $A\subseteq B\bigcup C$

（4）A\B=A\C。

例 9 设 A,B 是集合，证明：

（1） $A=\phi\Leftrightarrow B=A\Delta B$；（2）$(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\varnothing$。

证：（1）$\Rightarrow$ 显然。

$\Leftarrow$ 反证法：假设 $A\neq\phi$，则 $\exists x_0\in A$，若 $x_0\in B$，则 $x_0\in$ 左，但 $x_0\notin$ 右，矛盾。

若 $x_0\in B$，则 $x_0\in$ 左，但 $x_0\in$ 右，矛盾。故假设不成立，即 $A=\phi$。

（2）两边同时 交上 B，即得 $B=\varnothing$。

例 11 设 A,B,C 是任意三个集合，则

$$(A\bigcap B)\bigcup C=A\bigcap(B\bigcup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$$

证： $\Rightarrow$ 两边同并上 A 有：

$A\cup((A\cap B)\cup C)=A\cup[A\cap(B\cup C)]=A$，$[A\cup(A\cap B)]\cup C=A\cup C=A$；

$\Rightarrow C\subseteq A$

$\Leftarrow$ 若 $C\subseteq A$，则 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$。

例 12 设 V 是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$。

证： $\Rightarrow$ 因为 $S\subseteq T\subseteq W$，故 $S\Delta T=T\setminus S\subseteq W\setminus S\subseteq S\Delta W$。

$\Leftarrow$ **先证** $S\subseteq T$。设 $x\in S$，则

若 $x\notin T$，则 $x\in S\setminus T\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$ 且 $x\notin S$，矛盾。

所以 $x\in T$，即 $S\subseteq T$。

其次，证明 $T\subseteq W$。设 $x\in T$，则有两种情况：

若 $x\notin S$。则 $x\in T\setminus S\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$。

若 $x\in S$。由 $S\subseteq W$，知 $x\in W$。

总之，$\forall x\in T$，有 $x\in W$，故 $T\subseteq W$。

习 题 课

例 1 (P_{16}^3) 设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A\Delta\left(B\Delta C\right)=\left(A\Delta B\right)\Delta C$。

证：两边展开 $=\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(B\cap C^C\cap A^C\right)\cup\left(C\cap B^C\cap A^C\right)$

故结论成立。

例 2 (P_{20}^2) 设 A,B,C 为任意集合，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

答案：$A\cup B\cup C$。

例 3 (P_{20}^{4}) 设 $M_1,M_2,\cdots$ 和 $N_1,N_2,\cdots$ 是集合 S 的子集的两个序列，对 $i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，有 $N_i\bigcap N_j=\phi$。令 $Q_1=M_1,Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^C,n=2,3,\cdots$。试证：

$$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)。$$

证：$\forall x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$，则

当 $n=1$ 时，$x\in N_1\Delta Q_1=N_1\Delta M_1\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，故 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

当 $n\geq 2$ 时，设 $x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$，有 $x\in(N_n\setminus Q_n)$ 或 $x\in(Q_n\setminus N_n)$。则

1. 若 $x\in(N_n\setminus Q_n)$，则 $x\in N_n$，但 $x\notin Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_i)^c$,即$x\notin M_n$或$x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_i$，因此有 $x\notin M_n$或$x\in M_i(i\leq n-1)$。于是

（1）若 $x\in N_n$ 且 $x\notin M_n$，有 $x\in N_n\setminus M_n\subseteq N_n\Delta M_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

（2）若 $x\in N_n$ 且 $x\in M_i(i\leq n-1)$，由 $N_i\bigcap N_j=\varnothing(i\neq j)$，有 $x\notin N_i$ 且 $x\in M_i$ $(i\leq n-1)$，于是 $x\in M_i\setminus N_i\subseteq M_i\Delta N_i\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

2. 若 $x\in Q_n\setminus N_n$，则 $x\in Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_k)^c$，即$x\in M_n$ 但 $x\notin N_n$。于是

$x\in M_n\setminus N_n\subseteq M_n\Delta N_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

综上可得：$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

例 4 (P_{25}^{2}) 设 A,B 为集合，证明：$A\times B=B\times A$ 充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1）$A=\varnothing$；（2）$B=\varnothing$；（3）$A=B$。

1．若 $A\times B=B\times A=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$。

2．若 $A\times B=B\times A\neq\varnothing$，则 $\forall x\in A,y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=B\times B$。于是

$x\in B, y\in A$，因此 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，故 $A=B$。

例 6 (P_{33}^{4}) 马大哈写 n 封信，n 个信封，把 n 封信放入到 n 个信封中，求全部装错的概率是多少？〔n 个人，n 顶帽子，全部戴错的概率是多少？〕

解： n 封信放入到 n 个信封中的全部排列共有：$|S_n|=n!$；

令 A 表示所有信都装错的集合，即

$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_n \mid i_1\neq 1, i_2\neq 2,\cdots,i_n\neq n\}$。

令 A_i 表示第 i 个信封恰好装对的集合，则 $A_i^C\subseteq A$。所以全部装错的集合为：

$$A=A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C。$$

于是，易得

$|A_i|=(n-1)!, |A_i\cap A_j|=(n-2)!, i\neq j$。

对于 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$，有 $|A_{i1}\cap A_{i2}\cap\cdots\cap A_{ik}|=(n-k)!$。又

$$|A|=|A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C|=|S_n|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=n!-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\cdots+(-1)^nC_n^n(0)!$$

$$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}),$$ 故

$$P=\frac{|A|}{|S_n|}=\frac{|A|}{n!}=\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\approx e^{-1}=0.3679$$

〔答案：0.3679，当 n≥10 时，概率都近似等于 0.3679〕。

例 7 (P_{33}^{5}) 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

证： 设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是小伙的集合，$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$ 是姑娘的集合。

与 f_1 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_1} 表示；

与 f_2 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_2} 表示；

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

与 f_n 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_n} 表示；

于是，由题意：$G_{f_1} \cup G_{f_2} \cup \cdots \cup G_{f_n} = G$ 且 $G_{f_i} \neq \phi$ 且 $G_{f_i} \neq G$，$i = 1, 2, 3, \cdots, n$。

若存在 $G_{f_i}, G_{f_j} (i \neq j)$，使得 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$，则结论成立。

反证法：假设不存在 G_{f_i} 和 G_{f_j} 满足 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$。于是

$\forall i, j (i \neq j), G_{f_i}$ 与 G_{f_j} 应满足：$G_{f_i} \subseteq G_{f_j}$ 或 $G_{f_j} \subseteq G_{f_i}$ 必有一个成立。

因此把 G_{f_1}，$G_{f_2}, \cdots$，G_{f_n} 重新排列有：$G_{f_{i1}} \subseteq G_{f_{i2}} \subseteq \cdots \subseteq G_{f_{in}}$。从而 f_{in} 与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

因此假设不成立，本题得证。

例 8 甲每 5 秒放一个爆竹，乙每 6 秒放一个，丙每 7 秒放一个，每人都放 21 个爆竹，共能听见多少声响。

解：设 $A = \{0, 5, 10, 15, \cdots, 100\}, B = \{0, 6, 12, 18, \cdots, 120\}, C = \{0, 7, 14, 21, \cdots, 140\}$，则能听见多少声响相当于并集的个数，即

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 21 \times 3 - \left(\left[\frac{100}{5 \times 6} \right] + 1 \right) - \left(\left[\frac{100}{5 \times 7} \right] + 1 \right) - \left(\left[\frac{120}{6 \times 7} \right] + 1 \right) + \left(\left[\frac{100}{5 \times 6 \times 7} \right] + 1 \right) = 54$$

0, 30, 60, 90 　　0, 35, 70 　　0, 42, 84 　　　　0