线性代数与空间解析几何

8.1　实二次型

一、二次型的定义及其矩阵

二、合同矩阵

一、二次型的定义及其矩阵

1. 定义 含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为二次型.

当a_{ij}都是复数时,称f为复二次型;

当a_{ij}都是实数时,称f为实二次型;

2. 标准二次型

只含有平方项的二次型,即形如

$$f = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_n x_n^2$$

3. 规范二次型

称形如 $f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_{p+q}^2$

的二次型为规范二次型

4. 二次型的矩阵表示法

取$a_{ij}=a_{ji}$，则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$

$$
\begin{aligned}
f&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&\quad+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&\quad+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\\
&\quad+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)\\
&\quad+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f = x^T Ax$,其中A为对称矩阵.

4. 二次型的矩阵及秩

在二次型的矩阵表示中,任给一个二次型,就唯一地确定一个对称矩阵;反之,任给一个对称矩阵,也可唯一地确定一个二次型.这样,二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系.

对称矩阵A叫做二次型f的矩阵;

f叫做对称矩阵A的二次型;

对称矩阵A的秩叫做二次型f的秩.

例1 写出二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$$

的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

二、合同矩阵

1. 定义 设A, B都是n阶矩阵，若存在可逆矩阵C，使

$$B = C^T AC,$$

则称矩阵A与B**合同**.

2. 合同关系的性质

(1) 自反性：A与A自身合同.

(2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同.

(3) 传递性：若A与B合同，B与C合同

则A与C合同.

3. 等价、相似、合同的关系

A 与 B 等价： $B=PAQ(P,Q$均可逆).

A 与B 相似： $B=C^{-1}AC$.

A 与B 合同： $B=C^{T}AC$.

A 与B 相似 $\Rightarrow$ A 与 B 等价, 反之不成立

A 与B 合同 $\Rightarrow$ A 与 B 等价, 反之不成立

A 与B 相似和合同在一种情况下是一回事, 即当C是正交矩阵的时候

定理6.6　设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵P

使得
$$P^{-1}AP = P^{T}AP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 是A 的n个特征值.

定理6.6说明　任意n阶实对称矩阵都与对角阵合同.

例2 写出二次型的矩阵,并求其秩.

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

练习

二次型$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为()

例3

设二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的秩为2

1. 求参数c;　2. 写出二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$$