# 第四章

# Dynamic Programming Algorithms

# 提要

4.1 Elements of Dynamic Programming

4.2 Matrix-chain multiplication

4.3 Longest Common Subsequence

4.4 0/1 Knapsack Problem

4.5 The Optimal binary search trees

4.6 The Minimum Edit Distance

# 参考资料

## Introduction to Algorithms

## 第15章

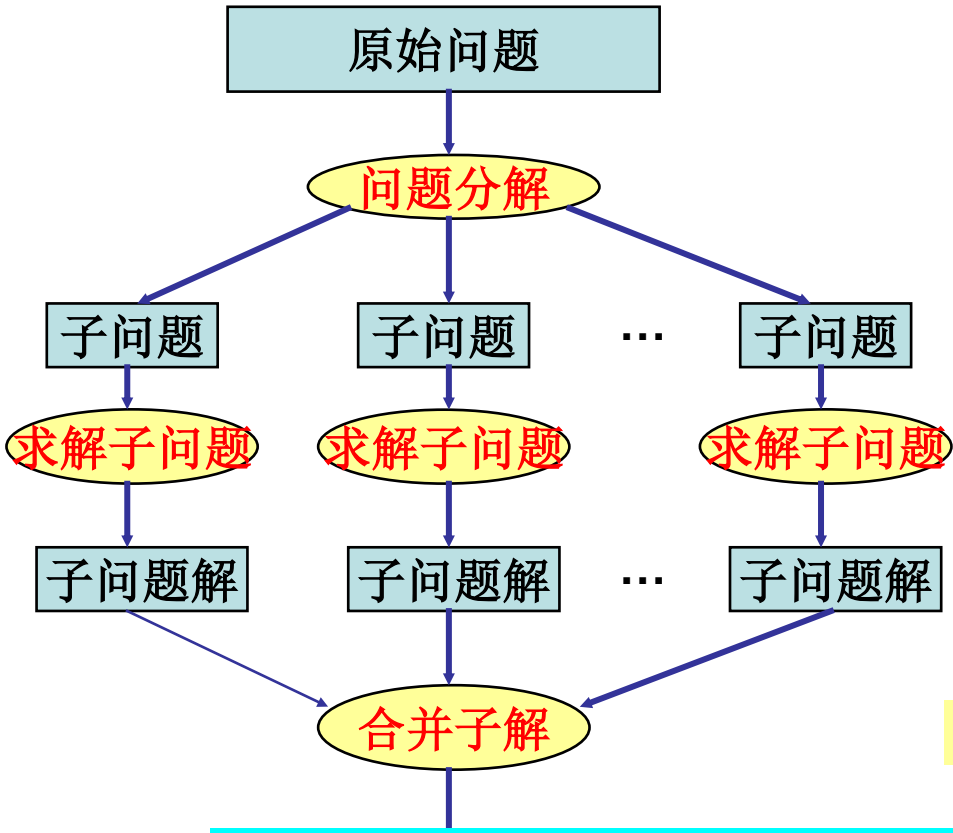
## 15.2, 15.3, 15.4, 15.5

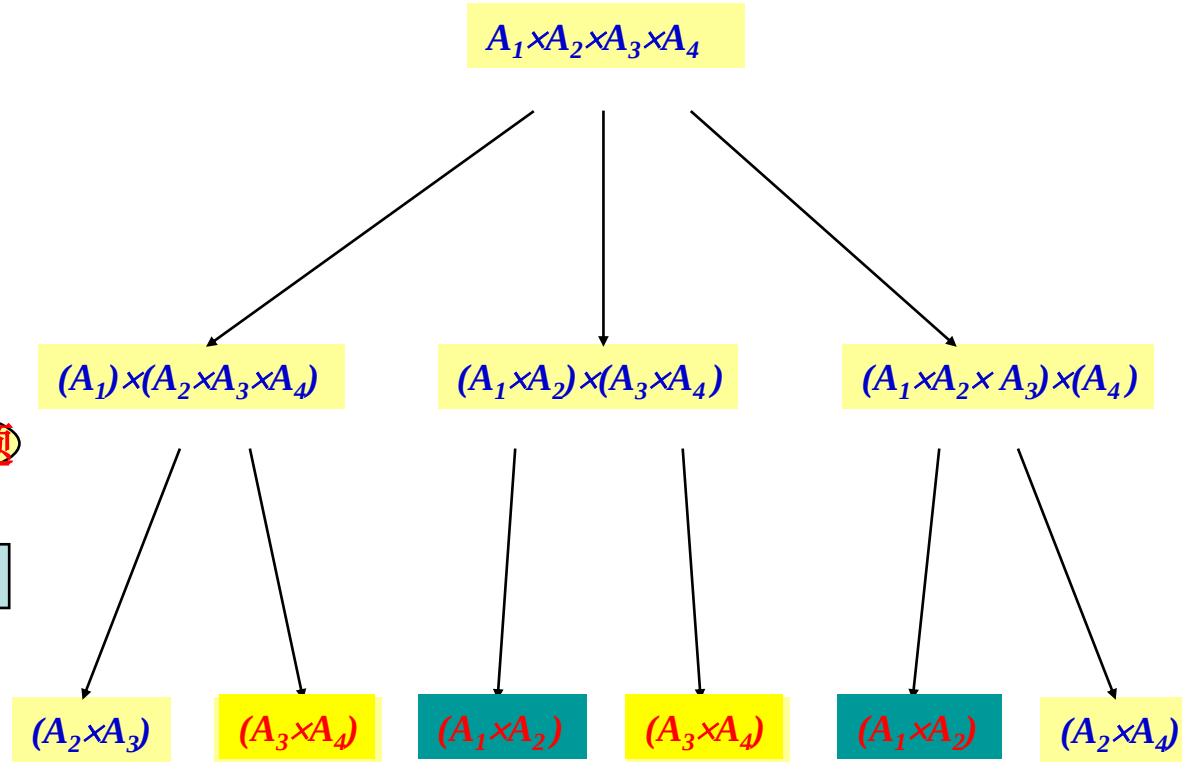
# 4.1 Elements of Dynamic Programming

**Why?**
**What?**
**How?**

# Why?

- Divide-and-Conquer方法的问题




问题：如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低

# Why?

- 优化问题
  - 问题可能有很多解，每个可能的解都对应有一个值，这个值通常称为代价
  - 优化问题是要在该问题所有可能的解中找到具有最优值(最大/最小)的解，即问题的一个最优解
  - 一个问题的最优解不一定是唯一的
  - 举例：最短路径，旅行商、任务调度等问题
  - 因此我们也可以说：优化问题就是给定一个代价函数，在问题的解空间中搜索具有最小或最大代价的优化解

动态规划是解决优化问题的一种常见方法

# What?

- Dynamic Programming历史
  - 动态规划是运筹学的一个分支，20世纪50年代初美国数学家R.E.Bellman等人在研究多阶段决策过程(Multistep decision process)的优化问题时，提出了著名的最优性原理，把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法----动态规划自底向上地求解子问题
  - 多阶段决策问题：求解的问题可以划分为一系列相互联系的阶段，在每个阶段都需要做出决策，且一个阶段决策的选择会影响下一个阶段的决策，从而影响整个过程的活动路线，求解的目标是选择各个阶段的决策使整个过程达到最优

# What?

- Dynamic Programming
  - 把原始问题划分成一系列子问题
    - 不同子问题的数目常常只有多项式量级
  - 求解每个子问题仅一次，并将其结果保存在一个表中，以后用到时直接存取，不重复计算，节省计算时间
  - 自底向上地求解子问题
- 适用范围
  - 一类优化问题：可分为多个相关子问题，子问题的解被重复使用

# How?

- 使用Dynamic Programming的条件
  - 优化子结构
    - 当一个问题的优化解包含了子问题的优化解时，我们说这个问题具有优化子结构。
  - 重叠子问题
    - 在问题的求解过程中，很多子问题的解将被多次使用

# How?

- Dynamic Programming算法的设计步骤
  - 分析优化解的结构
  - 递归地定义最优解的代价
  - 递归地划分子问题，直至不可分
  - 自底向上地求解各个子问题
    - 计算优化解的代价并保存之
    - 获取构造最优解的信息
  - 根据构造最优解的信息构造优化解

# 4.2 Matrix-chain Multiplication

# 问题的定义

- 输入：$<A_1, A_2, ..., A_n>$，$A_i$是$p_{i-1} \times p_i$矩阵
- 输出：计算$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$的最小代价方法

矩阵乘法的代价/复杂性：乘法的次数

若$A$是$p \times q$矩阵，$B$是$q \times r$矩阵，则$A \times B$的代价是$O(pqr)$

# Motivation

- 矩阵链乘法
  - 矩阵乘法满足结合率。
  - 计算一个矩阵链的乘法可有多种方法:

例如，$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4)$

$= (A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4)))$

$= ((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4))$

....

$= ((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4)$

- 矩阵链乘法的代价与计算顺序的关系
  - 设$A_1$=10×100矩阵, $A_2$=100×5矩阵, $A_3$=5×50矩阵

$$T((A1\times A2)\times A3)=10\times100\times5+10\times5\times50=7500$$

$$T(A1\times(A2\times A3))=100\times5\times50+10\times100\times50=75000$$

**结论: 不同计算顺序有不同的代价**

- 矩阵链乘法优化问题的解空间
  - 设$p(n)$=计算$n$个矩阵乘积的方法数
  - $p(n)$的递归方程

$$(A_1 \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n)$$

$p(k)$ $p(n-k)$

$$p(n) = 1 \quad \text{if } n=1$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(k)\,p(n-k) \quad \text{if } n>1$$

$$P(n) = \Omega(2^n)$$

$(A_1) \times (A_2 \times \ldots \times A_n)$

$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \ldots \times A_n)$

….

$(A_1 \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_n)$

…

$(A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n)$

如此之大的解空间是无法用枚举方法求出最优解的！

# 下边开始设计求解矩阵链乘法问题的Dynamic Programming算法

- 分析优化解的结构
- 递归地定义最优解的代价
- 递归地划分子问题，直至不可分
- 自底向上地求解各个子问题
  - 计算优化解的代价并保存之
  - 获取构造最优解的信息
- 根据构造最优解的信息构造优化解

# 分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n) \end{cases}$$

如果等式右端所有子问题的最优乘法方案的代价均已知，则
根据等式右端组合子问题的解，取组合方案代价的最小值即可获得解

# 分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) & \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) & \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k\ ) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n) \end{cases}$$

$$cost_{1\sim n} = Min \begin{cases} cost_{1\sim 1} + cost_{2\sim n} + p_0 p_1 p_n \\ cost_{1\sim 2} + cost_{3\sim n} + p_0 p_2 p_n \\ \ldots. \\ cost_{1\sim k} + cost_{k+1\sim n} + p_0 p_k p_n \\ \ldots \\ cost_{1\sim n-1} + cost_{n\sim n} + p_0 p_{n-1} p_n \end{cases}$$

其中$A_i$是$p_{i-1} \times p_i$矩阵

# 分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) & \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) & \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. & \\ (A_1 \times \ldots \times A_k) & \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots & \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) & \times (A_n) \end{cases}$$

优化子结构：

如果红色方案是代价最小的方案，则该方案中
计算$A_1 \times \ldots \times A_k$的方案必须是代价最小的方案
计算$A_{k+1} \times \ldots \times A_n$的方案必须是代价最小的方案

下面用$A_{i\sim j}$表示矩阵链$A_i \times \ldots \times A_j$相乘

# 分析优化解的结构

- 优化解的结构
  - 若计算$A_{1\sim n}$的优化顺序在$k$处断开矩阵链，即$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$，则在$A_{1\sim n}$的优化顺序中，对应于子问题$A_{1\sim k}$的解必须是$A_{1\sim k}$的优化解，对应于子问题$A_{k+1\sim n}$的解必须是$A_{k+1\sim n}$的优化解.

$$(A_1\times\ldots\times A_k)\times(A_{k+1}\times\ldots\times A_{n-1}\times A_n)$$

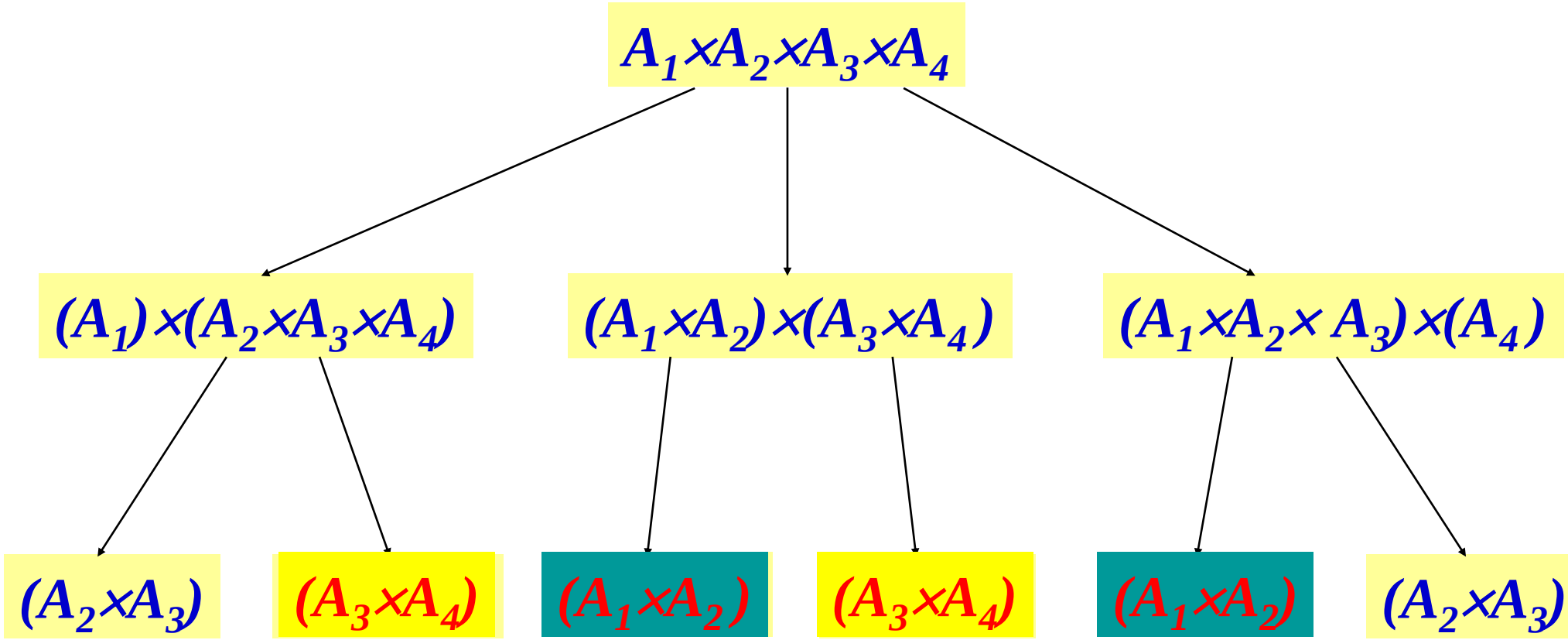
$$((A_1\times\ldots A_i)\times(A_{i+1}\times\ldots\times A_k))\times((A_{k+1}\times\ldots A_j)\times(A_{j+1}\times\ldots\times A_n))$$

  - 否则,若优化解中给出的子问题$A_{1\sim k}$的计算顺序不是$A_{1\sim k}$的优化顺序，则一定存在$A_{1\sim k}$的一个计算代价更小的优化顺序:

$$((A_1\times\ldots A_r)\times(A_{r+1}\times\ldots\times A_k))$$

  - 用其替代$A_{1\sim n}$的优化解中$A_{1\sim k}$的计算顺序，将会得到一个计算代价更小的解，则与$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$是优化顺序相矛盾了。
  - 对子问题$A_{k+1\sim n}$亦同理。

- 子问题重叠性




具有子问题重叠性

# 递归地定义最优解的代价

- 递归求解过程
  - 一般化表示：计算子链$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优乘法方案

$$A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j = \begin{cases} (A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_j) \\ (A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_{j-1}) \times (A_j) \end{cases}$$

# 递归地定义最优解的代价

$$A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j = \begin{cases} (A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_j) \\ (A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_{j-1}) \times (A_j) \end{cases}$$

$$cost_{i\sim j} = Min_{i \le k \le j-1} \begin{cases} cost_{i\sim i} + cost_{i+1\sim j} + p_{i-1} p_i p_j \\ cost_{i\sim i+1} + cost_{i+2\sim j} + p_{i-1} p_{i+1} p_j \\ \ldots \\ Cost_{i\sim k} + cost_{k+1\sim j} + p_{i-1} p_k p_j \\ \ldots \\ cost_{i\sim j-1} + cost_{j\sim j} + p_{i-1} p_{j-1} p_j \end{cases}$$

其中$A_r$是$p_{r-1} \times p_r$矩阵

# 递归地定义最优解的代价

- 假设
  - $m[i, j]$ = 计算$A_{i\sim j}$的最小乘法数
  - $m[1, n]$ = 计算$A_{1\sim n}$的最小乘法数

$$(A_i \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots . A_j)$$

考虑到所有的$k$，优化解的代价方程为

$$m[i, j] = 0 \qquad \text{if } i=j$$

$$m[i, j] = \min_{i\le k<j}\{ m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_k p_j \} \qquad \text{if } i<j$$

# 递归地划分子问题

$$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| m[i,i] | m[i,i+1] | …… | m[i,j-1] | m[i,j] |
| | | | | m[i+1,j] |
| | | | | m[i+2,j] |
| | | | | …… |
| | | | | m[j, j] |

# 递归地划分子问题

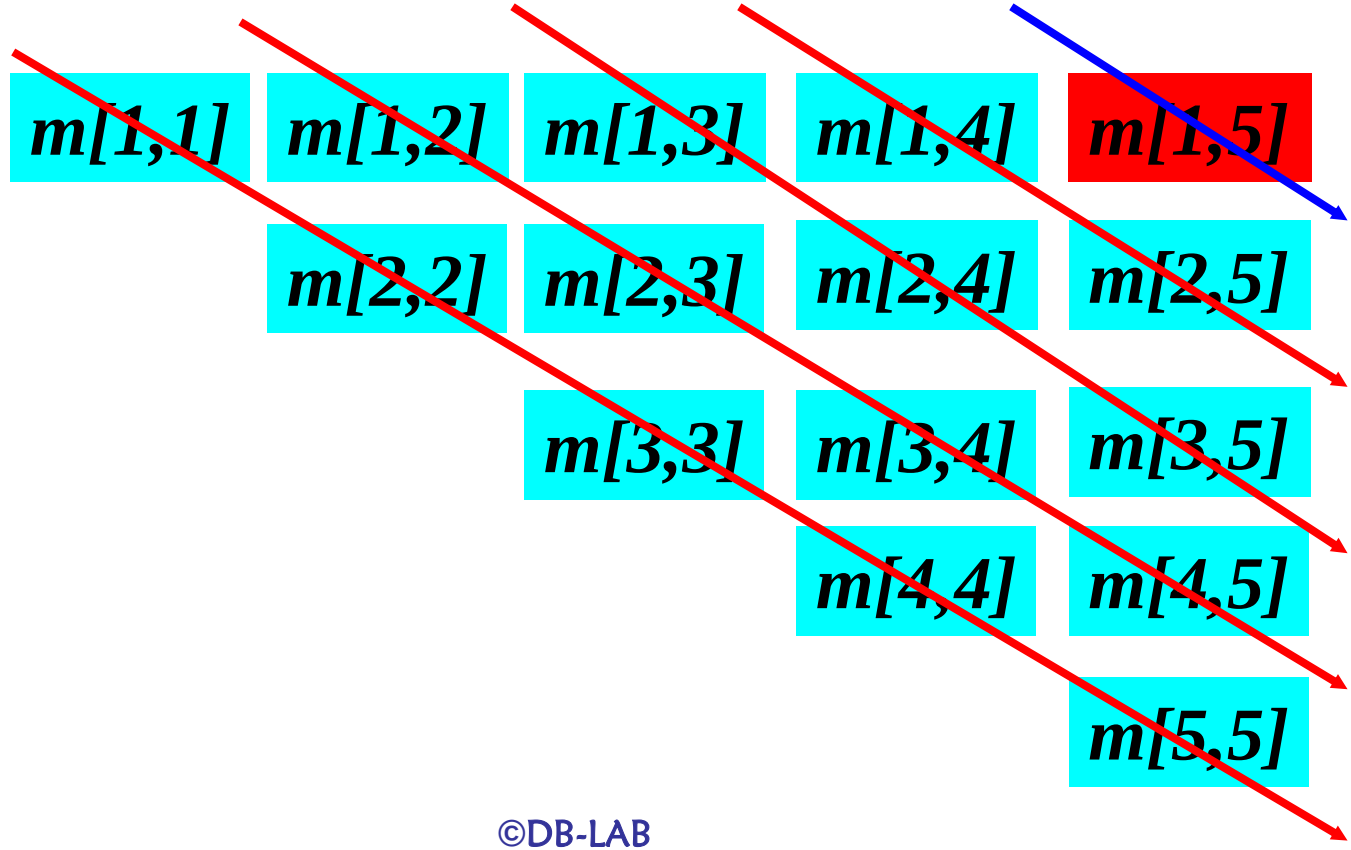
$$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| m[1,1] | m[1,2] | m[1,3] | m[1,4] | m[1,5] |
| | m[2,2] | m[2,3] | m[2,4] | m[2,5] |
| | | m[3,3] | m[3,4] | m[3,5] |
| | | | m[4,4] | m[4,5] |
| | | | | m[5,5] |

# 自底向上计算优化解的代价

$$m[i, j] = 0 \qquad if \quad i=j$$

$$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$$



# 算法描述

$m[i, j]= 0 \quad \text{if} \quad i=j$

$m[i, j]= \min_{i \le k < j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$

**Matrix-Chain-Order(*p*)**

***n*=length(*p*)-1;**

**FOR *i=1* TO *n* DO**

***m[i, i]=0*;**

**FOR *l=2* TO *n* DO** /* 计算对角线 */

**FOR *i=1* TO *n-l+1* DO**

***j=i+l-1*;**

***m[i, j]*=∞;**

**FOR *k*←*i* To *j-1* DO** /* 计算*m[i,j]* */

$q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}\times p_k\times p_j$

**IF *q*<*m[i, j]* THEN *m[i,j]=q*;**

**Return *m*.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *m[1,1]* | *m[1,2]* | *m[1,3]* | *m[1,4]* | *m[1,5]* |
| | *m[2,2]* | *m[2,3]* | *m[2,4]* | *m[2,5]* |
| | | *m[3,3]* | *m[3,4]* | *m[3,5]* |
| | | | *m[4,4]* | *m[4,5]* |
| | | | | *m[5,5]* |

# 获取构造最优解的信息

$m[i, j]= 0$ if $i=j$

$m[i, j]= \min_{i\le k<j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_k p_j \}$

**Matrix-Chain-Order(*p*)**

***n*=length(*p*)-1;**

**FOR *i=1* TO *n* DO**

***m[i, i]=0*;**

**FOR *l=2* TO *n* DO** /* 计算对角线 */

**FOR *i=1* TO *n-l+1* DO**

***j=i+l-1*;**

***m[i, j]*=∞;**

**FOR *k*←*i* To *j-1* DO** /* 计算*m[i,j]* */

***q* = *m[i, k]*+*m[k+1, j]*+$p_{i-1}\times p_k\times p_j$**

**IF *q*<*m[i, j]* THEN *m[i,j]=q*;** ***s[i,j]=k*;**

**Return *m* and *s*.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *m[1,1]* | *m[1,2]* | *m[1,3]* | *m[1,4]* | *m[1,5]* |
| | *m[2,2]* | *m[2,3]* | *m[2,4]* | *m[2,5]* |
| | | *m[3,3]* | *m[3,4]* | *m[3,5]* |
| | | | *m[4,4]* | *m[4,5]* |
| | | | | *m[5,5]* |

*S[i,j]=k*记录$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优划分处是在$A_k$与$A_{k+1}$之间

# 获取构造最优解的信息

$$m[i, j]= \min_{i\le k<j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_k p_j \}$$

- **Matrix-Chain-Order(*p*)**
- ***n*=length(*p*)-1;**
- **FOR *i=1* TO *n* DO**
- ***m[i, i]=0*;**
- **FOR *l=2* TO *n* DO**
- **FOR *i=1* TO *n-l+1* DO**
- ***j=i+l-1*;**
- ***m[i, j]*=∞;**
- **FOR *k*←*i* To *j-1* DO**
- ***q* = *m[i, k]*+*m[k+1, j]*+$p_{i-1}\times p_k\times p_j$**
- **IF *q*<*m[i, j]* THEN *m[i,j]*=*q*， *s[i,j]=k*;**
- **Return *m* and *s*.**

时间复杂性：$O(n^3)$

# 构造最优解

$S[i, j]$记录$A_i \ldots A_j$的最优划分处；
$S[i, S[i,j]]$记录$A_i \ldots A_{s[i,j]}$的最优划分处；
$S[S[i,j]+1, j]$记录$A_{s[i,j]+1} \ldots A_j$的最优划分处.

```
Print-Optimal-Parens(s, i, j)
 IF j=i
 THEN  Print "A"_i;
 ELSE   Print "("
        Print-Optimal-Parens(s, i, s[i, j])
        Print-Optimal-Parens(s, s[i, j]+1, j)
        Print  ")"
```

调用Print-Optimal-Parens(*s*, *1*, *n*)
即可输出$A_{1\sim n}$的优化计算顺序

# 算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - $(l, i, k)$三层循环，每层至多$n-1$步
    - $O(n^3)$
  - 构造最优解的时间：$O(n)$
  - 总时间复杂性为：$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 使用数组$m$和$S$
  - 需要空间$O(n^2)$

*Hu, TC; Shing, MT (1982). "Computation of Matrix Chain Products, Part I"*
*Hu, TC; Shing, MT (1984). "Computation of Matrix Chain Products, Part II"*

# 4.3 Longest Common Susequence

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解的代价递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

# 问题的定义

$X=<x_1, x_2, \ldots, x_m>$

任意严格递增序列$<i_1, i_2, \ldots, i_k>$, $1 \le i_1, i_k \le m$,

$Z=<z_1, z_2, \ldots, z_k>=<x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}>$是$X$的子序列

- 子序列
  - $X=(A, B, C, B, D, B)$
  - $W=(B, D, A)$是$X$的子序列？
  - $Z=(B, C, D, B)$是$X$的子序列？
- 公共子序列
  - $Z$是序列$X$与$Y$的公共子序列如果$Z$是$X$的子序列也是$Y$的子序列。

# 最长公共子序列（LCS）问题

输入：$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$，$Y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$

输出：$X$与$Y$的最长公共子序列

$Z=(z_1, z_2, \ldots, z_k)$

# 优化子结构分析

- 第$i$前缀
  - 设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一个序列
    则$X_i=(x_1, \ldots, x_i)$是$X$的第$i$前缀

例. $X=(A, B, D, C, A)$, $X_1=(A)$, $X_2=(A, B)$, $X_3=(A, B, D)$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$
$Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$

- 优化子结构的猜想

$X$和$Y$的$LCS$为$LCS_{XY}=(z_1, \ldots, z_k)$

If $x_m=y_n$ 则 $z_k=x_m=y_n$

$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+ <x_m=y_n>$

If $x_m \neq y_n$,

$z_k \neq x_m$ $LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y}$

$z_k \neq y_n$ $LCS_{XY}=LCS_{XY_{n-1}}$

$\Rightarrow LCS_{XY}=\max\{LCS_{X_{m-1}Y}, LCS_{XY_{n-1}}\}$

- 优化子结构

定理1（优化子结构）设$X=(x_1, ..., x_m)$、$Y=(y_1, ..., y_n)$是两个序列，$LCS_{XY}=(z_1, ..., z_k)$是$X$与$Y$的$LCS$，我们有：

(1) 如果$x_m=y_n$，则$z_k=x_m=y_n$，$LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>$，$LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}$是$X_{m-1}$和$Y_{n-1}$的$LCS$.

(2) 如果$x_m \neq y_n$，且$z_k \neq x_m$，则$LCS_{XY}$是$X_{m-1}$和$Y$的$LCS$，即

$$LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y}$$

(3) 如果$x_m \neq y_n$，且$z_k \neq y_n$，则$LCS_{XY}$是$X$与$Y_{n-1}$的$LCS$，即

$$LCS_{XY} = LCS_{XY_{n-1}}$$

证明：

(1). $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, x_m>$， 则

$z_k=x_m=y_n$ 且 $LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>$.

设$z_k \neq x_m$，则可加$x_m=y_n$到$Z$，得到一个长为$k+1$的$X$与$Y$的公共序列，与$Z$是$X$和$Y$的$LCS$矛盾。于是，$z_k=x_m=y_n$。

设存在$X_{m-1}$与$Y_{n-1}$的非最长公共子序列$Z_{k-1}$，使得

$$LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>,$$

则由于$|Z_{k-1}|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}|$,

$$|LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>|,$$

与$LCS_{XY}$是$LCS$矛盾。

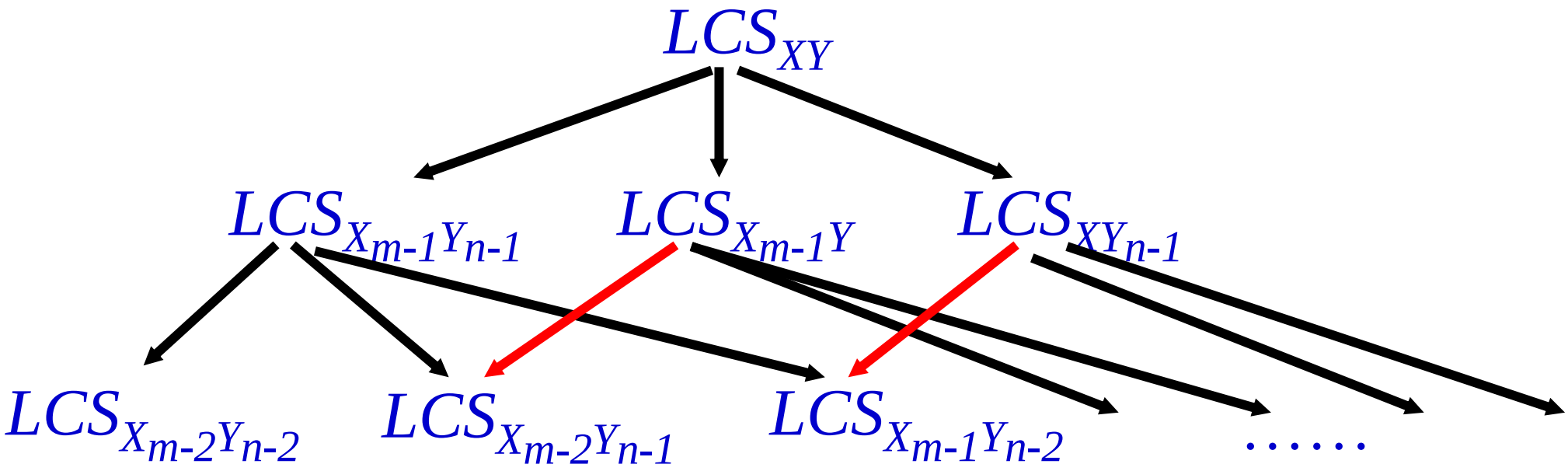
(2) $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n>$，

$x_m \neq y_n$， $z_k \neq x_m$， 则 $LCS_{XY}= LCS_{X_{m-1}Y}$

由于$z_k \neq x_m$， $Z=LCS_{XY}$是$X_{m-1}$与$Y$的公共子序列。我们来证$Z$是$X_{m-1}$与$Y$的$LCS$。设$X_{m-1}$与$Y$有一个公共子序列$W$，$W$的长大于$k$, 则$W$也是$X$与$Y$的公共子序列，与$Z$是$LCS$矛盾。

(3) 证明同(2)。

- 子问题重叠性




*LCS*问题具有子问题重叠性

递归方式需要处理多少个子问题？

# 建立LCS长度的递归方程

- $C[i, j] = X_i$与$Y_j$的$LCS$的长度
- $LCS$长度的递归方程

$$C[i, j] = 0 \quad \text{if } i=0 \text{ 或 } j=0$$

$$C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \quad \text{if } i, j>0 \text{ and } x_i = y_j$$

$$C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]) \quad \text{if } i, j>0 \text{ and } x_i \neq y_j$$

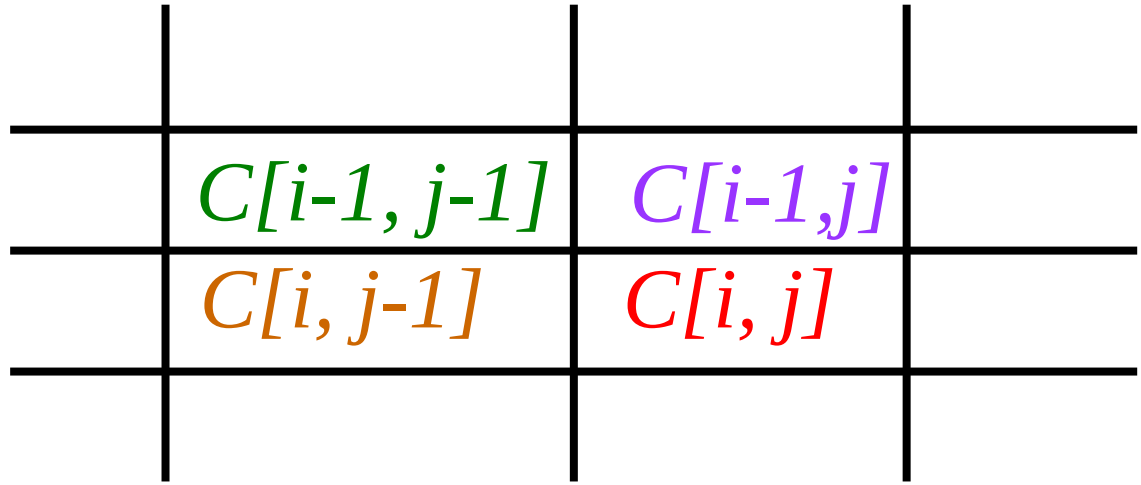
# 递归划分与自底向上求解

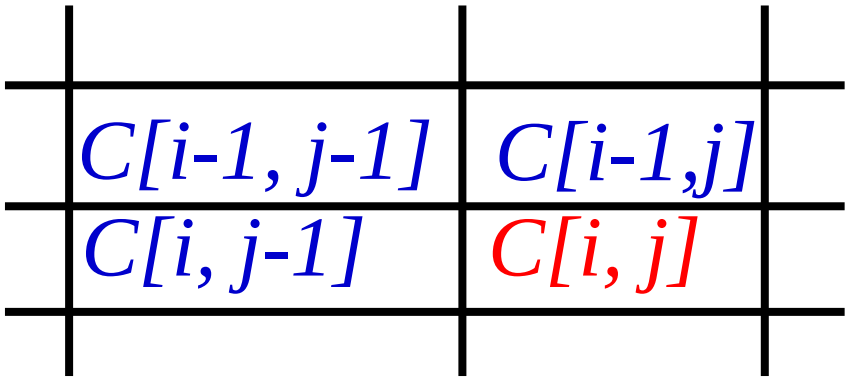
- 基本思想

$C[i, j] = 0$ , if $i=0$ 或 $j=0$

$C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$ if $i, j>0$ and $x_i = y_j$

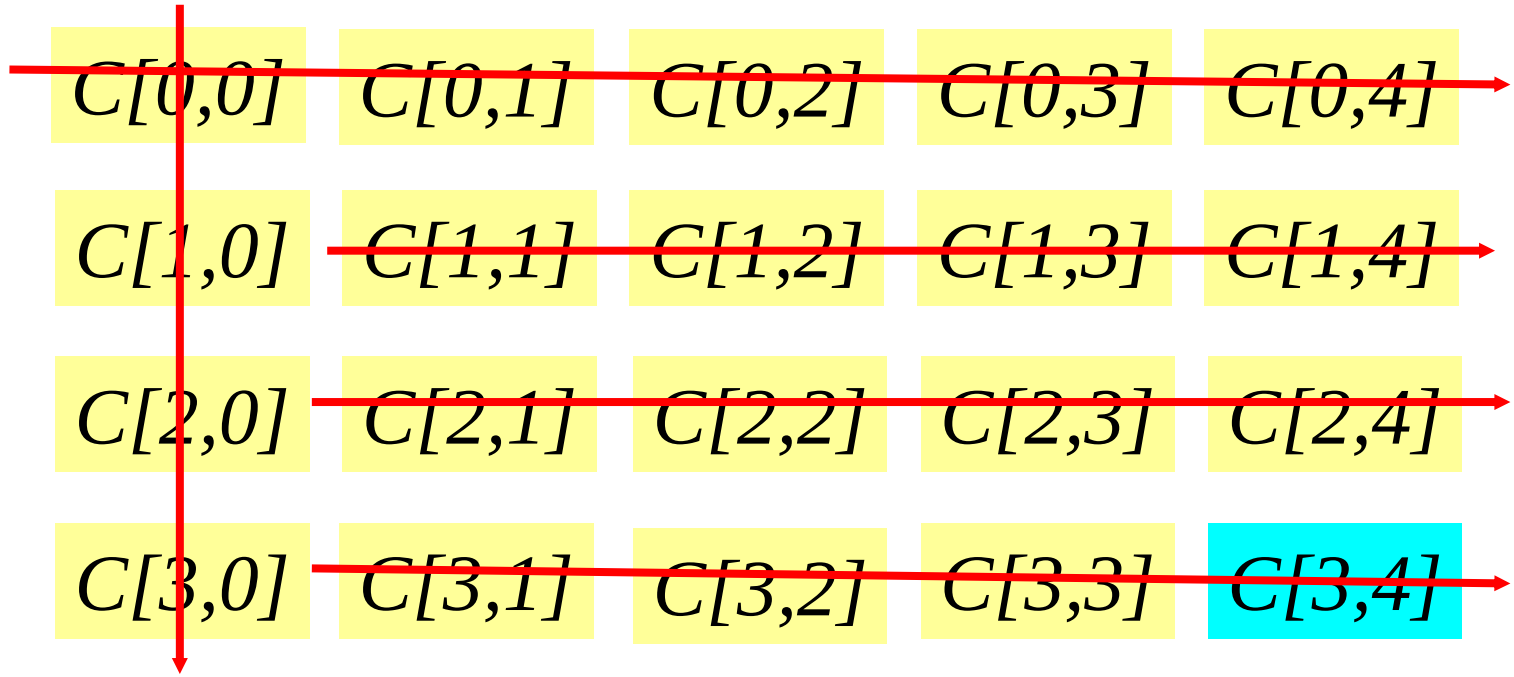
$C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$ if $i, j>0$ and $x_i \neq y_j$






# 自底向上计算优化解代价

- 递归划分子问题与自底向上求解过程



- $C[i, j] = 0,\ i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1,\ x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]),\ x_i \neq y_j$

| | | $y_j$ | **B** | **D** | **C** | **A** | **B** | **A** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | $x_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | **A** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | **B** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| | **C** | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | **B** | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| | **D** | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| | **A** | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| | **B** | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |

$j=0$

- 计算*LCS*长度的算法
  - 数据结构

    *C[0:m,0:n]*: *C[i,j]*是$X_i$与$Y_j$的*LCS*的长度

    *B[1:m,1:n]*: *B[i,j]*记录优化解的信息

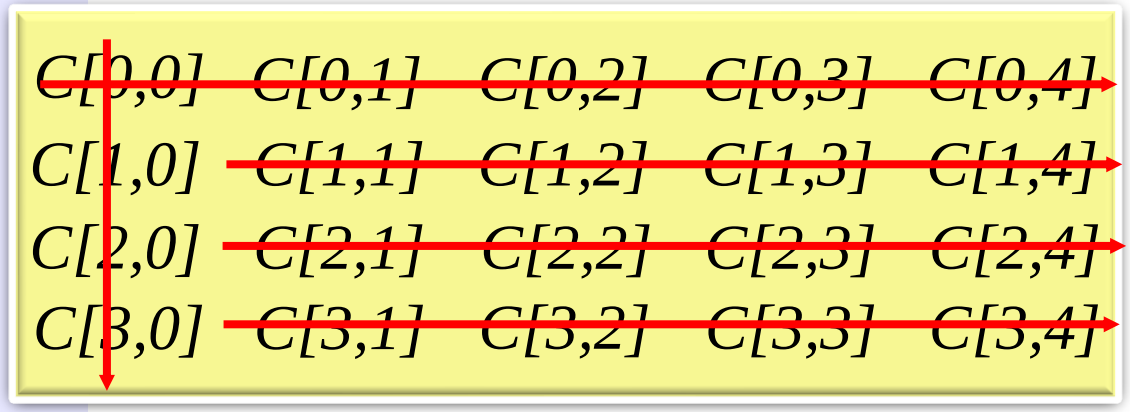
# 记录优化解信息

- $C[i, j] = 0,\ i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1,\ x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]),\ x_i \neq y_j$

| | | $y_j$ | B | D | C | A | B | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | $x_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | A | 0 | ↑ 0 | ↑ 0 | ↑ 0 | ↖ 1 | ← 1 | ↖ 1 |
| | B | 0 | ↖ 1 | ← 1 | ← 1 | ↑ 1 | ↖ 2 | ← 2 |
| | C | 0 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↖ 2 | ← 2 | ↑ 2 | ↑ 2 |
| | B | 0 | ↖ 1 | ↑ 1 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↖ 3 | ← 3 |
| | D | 0 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 3 | ↑ 3 |
| | A | 0 | ↑ 1 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↖ 3 | ↑ 3 | ↖ 4 |
| | B | 0 | ↖ 1 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 3 | ↖ 4 | ↑ 4 |
| | | $j=0$ | | | | | | |

```
LCS-length(X, Y)
m←length(X);  n←length(Y);
For  i←0  To  m  Do
        C[i,0]←0;
For  j←1  To  n  Do
        C[0,j]←0;
For  i←1  To  m  Do
    For  j←1  To  n  Do
        If  x_i = y_j
        Then C[i,j]←C[i-1,j-1]+1;
                B[i,j]←"↖";
        Else If C[i-1,j]≥C[i,j-1]
                Then C[i,j]←C[i-1,j];
                        B[i,j]←"↑";
                Else C[i,j]←C[i,j-1];
                        B[i,j]←"←";
    Return C and B.
```

- $C[i, j] = 0$, $i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$, $x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$, $x_i \neq y_j$




| | $y_j$ | B | D | C | A | B | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | ↑0 | ↑0 | ↑0 | ↖1 | ←1 | ↖1 |
| B | 0 | ↖1 | ←1 | ←1 | ↑1 | ↖2 | ←2 |
| C | 0 | ↑1 | ↑1 | ↖2 | ←2 | ↑2 | ↑2 |
| B | 0 | ↖1 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ←3 |
| D | 0 | ↑1 | ↖2 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↑3 |
| A | 0 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ↑3 | ↖4 |
| B | 0 | ↖1 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↖4 | ↑4 |

AB

# 构造优化解

- 基本思想
  - 从$B[m, n]$开始按指针搜索
  - 若$B[i, j]$="↖"，则$x_i=y_j$是$LCS$的一个元素
  - 如此找到的"$LCS$"是$X$与$Y$的$LCS$的$Inverse$

| | $y_j$ | B | D | C | A | B | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | ↑0 | ↑0 | ↑0 | ↖1 | ←1 | ↖1 |
| B | 0 | ↖1 | ←1 | ←1 | ↑1 | ↖2 | ←2 |
| C | 0 | ↑1 | ↑1 | ↖2 | ←2 | ↑2 | ↑2 |
| B | 0 | ↖1 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ←3 |
| D | 0 | ↑1 | ↖2 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↑3 |
| A | 0 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ↑3 | ↖4 |
| B | 0 | ↖1 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↖4 | ↑4 |

**Print-LCS(*B*, *X*, *i*, *j*)**
**If** *i=0* or *j=0* **Then Return;**
**If** *B[i, j]*="↖"
**Then** Print-LCS(*B*, *X*, *i-1*, *j-1*); Print $x_i$;
**Else**
  **If** *B[i, j]*="↑"
  **Then Print-LCS(*B*, *X*, *i-1*, *j*);**
  **Else Print-LCS(*B*, *X*, *i*, *j-1*).**

Print-LCS(*B*, *X*, *n*, *m*)
可打印出*X*与*Y*的*LCS*
*n*=length(*X*)
*m*=length(*Y*)

```
LCS-length(X, Y)
m←length(X);  n←length(Y);
For  i←0  To  m  Do
        C[i,0]←0;
For  j←1  To  n  Do
        C[0,j]←0;
For  i←1  To  m  Do
    For  j←1  To  n  Do
        If  x_i = y_j
        Then C[i,j]←C[i-1,j-1]+1;
                B[i,j]←"↖";
        Else If C[i-1,j]≥C[i,j-1]
                Then C[i,j]←C[i-1,j];
                        B[i,j]←"↑";
                Else C[i,j]←C[i,j-1];
                        B[i,j]←"←";
     Return C and B.
```

| $x_i$ \ $y_j$ | | B | D | C | A | B | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | ↑0 | ↑0 | ↑0 | ↖1 | ←1 | ↖1 |
| B | 0 | ↖1 | ←1 | ←1 | ↑1 | ↖2 | ←2 |
| C | 0 | ↑1 | ↑1 | ↖2 | ←2 | ↑2 | ↑2 |
| B | 0 | ↖1 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ←3 |
| D | 0 | ↑1 | ↖2 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↑3 |
| A | 0 | ↑1 | ↑2 | ↑2 | ↖3 | ↑3 | ↖4 |
| B | 0 | ↖1 | ↑2 | ↑2 | ↑3 | ↖4 | ↑4 |

# 算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - $(i, j)$两层循环
    - $O(mn)$
  - 构造最优解的时间：$O(m+n)$
  - 总时间复杂性为：$O(mn)$
- 空间复杂性
  - 使用数组$C$和$B$
  - 需要空间$O(mn)$
- 空间优化策略

# 4.4 0/1 Knapsack Problem

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

# 问题的定义

给定$n$种物品和一个背包，物品$i$的重量是$w_i$，价值$v_i$，背包承重为$C$，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

# 问题的定义

- 输入：$C>0, w_i>0, v_i>0, 1\leq i \leq n$
- 输出：$(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i\in\{0, 1\}$，满足

  $\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i x_i \leq C$，$\Sigma_{1\leq i\leq n} v_i x_i$ 最大

Naïve方法：

每个物品有两种选择：1(装)或0(不装)

$n$个物品共$2^n$个装取方案

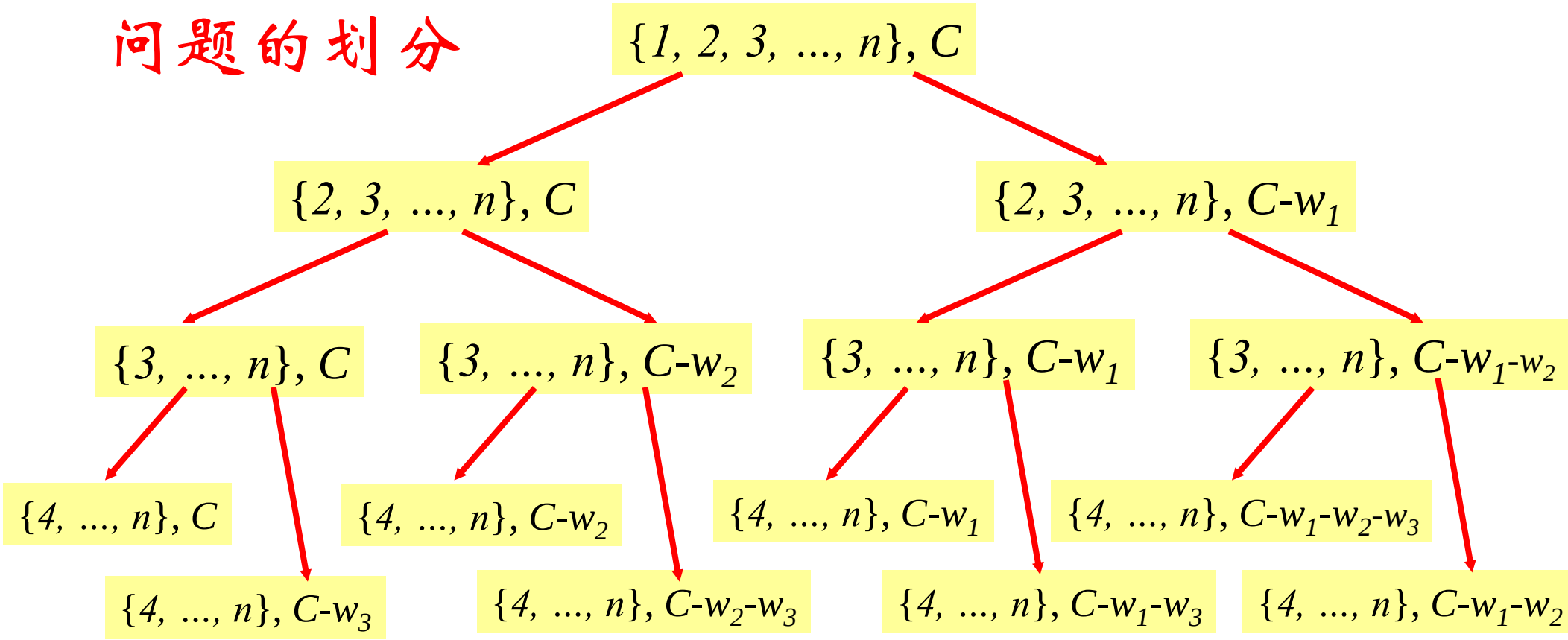
每个装取方案的计算代价为n

总计算代价为$O(n2^n)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

# 子问题重叠性

## 问题的划分

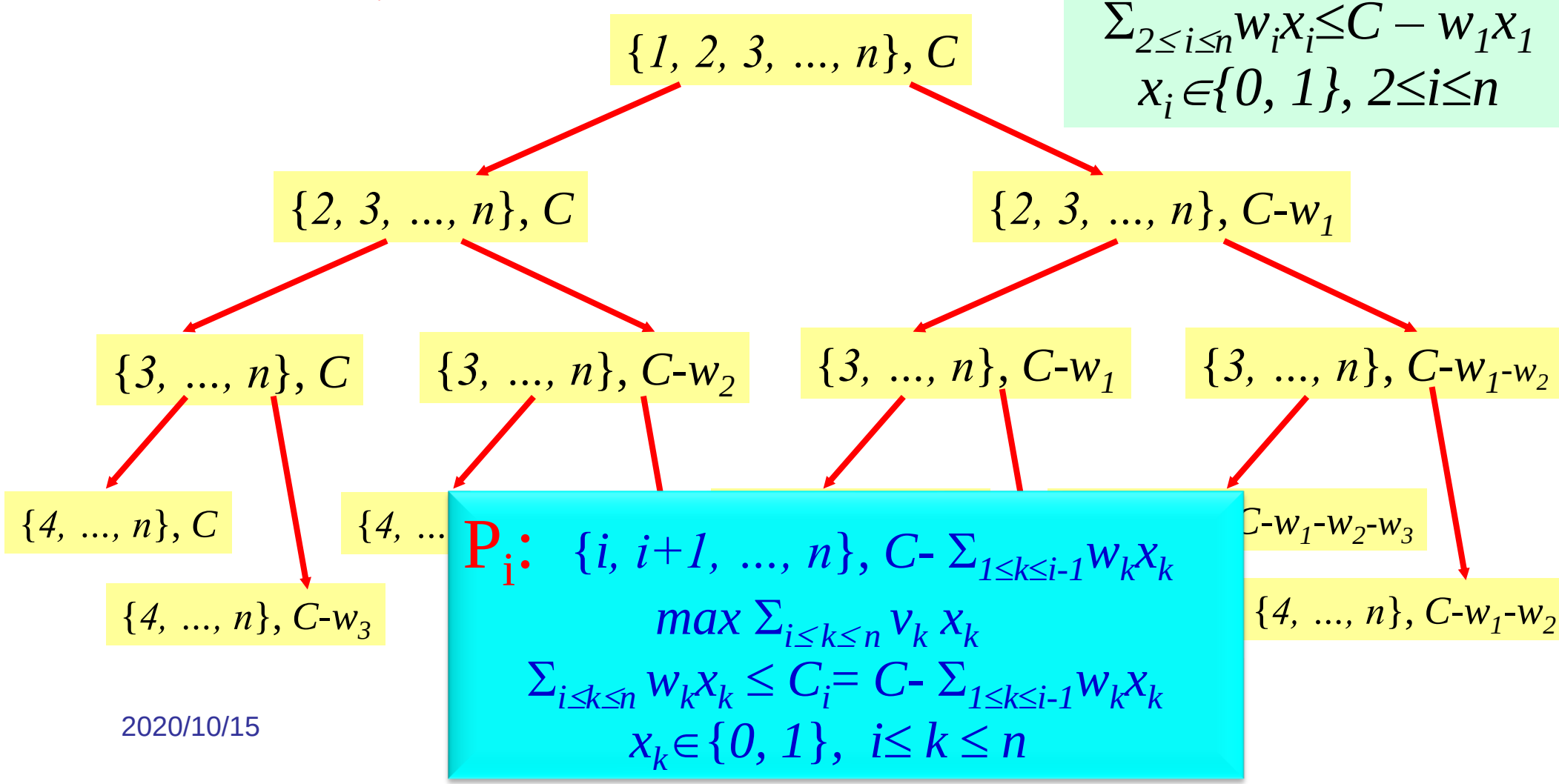



当$w_i$皆为1时，存在大量重叠子问题

# 问题优化子结构

## 问题的划分

$P_2$: $max \Sigma_{2\le i\le n} v_i x_i$
$\Sigma_{2\le i\le n} w_i x_i \le C - w_1 x_1$
$x_i \in \{0, 1\}, 2\le i\le n$




$P_i$: $\{i, i+1, ..., n\}, C- \Sigma_{1\le k\le i-1} w_k x_k$
$max \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k$
$\Sigma_{i\le k\le n} w_k x_k \le C_i = C- \Sigma_{1\le k\le i-1} w_k x_k$
$x_k \in \{0, 1\}, \ i\le k\le n$

# 优化解结构的分析

**定理** 如果$S_i=(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$是0-1背包子问题$P_i=[\{i, i+1, \ldots, n\}, C_i=C-\sum_{1\le k\le i-1} w_k y_k]$的优化解，则$(y_{i+1}, \ldots, y_n)$是如下子问题$P_{i+1}$的优化解：

$$\max \sum_{i+1\le k\le n} v_k x_k$$

$$\sum_{i+1\le k\le n} w_k x_k \le C_i - w_i y_i$$

$$x_k \in \{0, 1\},\ i+1 \le k \le n$$

**证明：** 如果$S_{i+1}=(y_{i+1}, \ldots, y_n)$不是子问题$P_{i+1}$的优化解，则存在$S'_{i+1}=(z_{i+1}, \ldots, z_n)$是$P_{i+1}$的更优解。$S'_i=(y_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$是问题$P_i$之比$S_i$更优的解，与$S_i$优化矛盾。

- 优化解的结构分析
- **建立优化解代价的递归方程**
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

- 定义代价矩阵**m**

  矩阵元素$m(i, j)$表示子问题$[(i, i+1, \ldots, n), j]$的优化解$(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$的代价，**$m(i, j)= \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k$**

- 形式地

  问题 $max \sum_{i\le k\le n} v_k x_k$

  $\sum_{i\le k\le n} w_k x_k \le j$

  $x_k \in \{0, 1\}, \ i \le k \le n$

  的最优解代价为$m(i, j)=\sum_{i\le k\le n} v_k x_k$.

- 递归方程：

总结：

$$m(n, j) = 0, \quad 0 \le j < w_n$$

$$m(n, j) = v_n, \quad j \ge w_n$$

$$m(i, j) = m(i+1, j), \ 0 \le j < w_i$$

$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\}, \quad j \ge w_i$$

$j \ge w_n$,

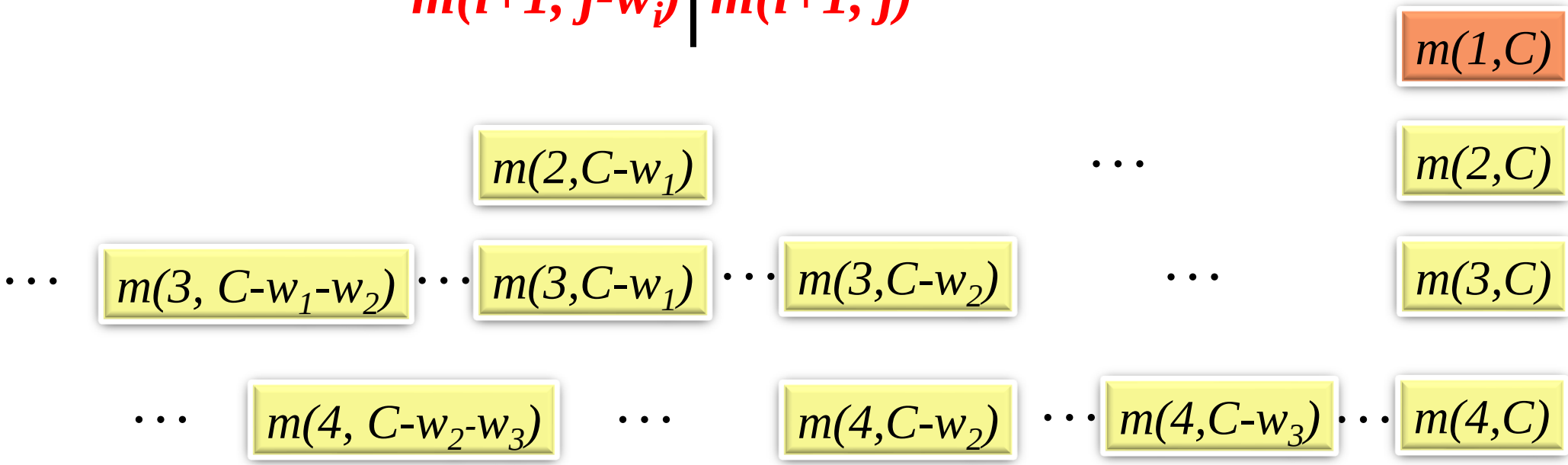
$$m(n, j) = v_n$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

| | $m(i, j)$ |
|---|---|
| $m(i+1, j-w_i)$ | $m(i+1, j)$ |

令$n=4$，$w_i$= 整数



$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$

$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$

$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$

$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$

| | $m(i, j)$ |
|---|---|
| $m(i+1, j-w_i)$ | $m(i+1, j)$ |

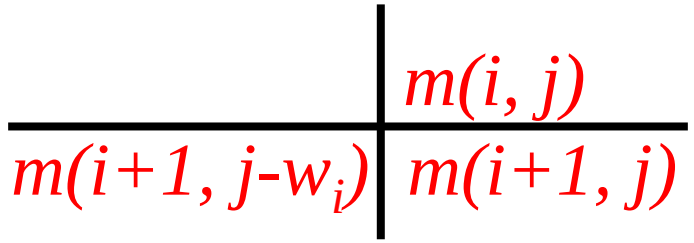
令$n=4$，$w_i$= 整数

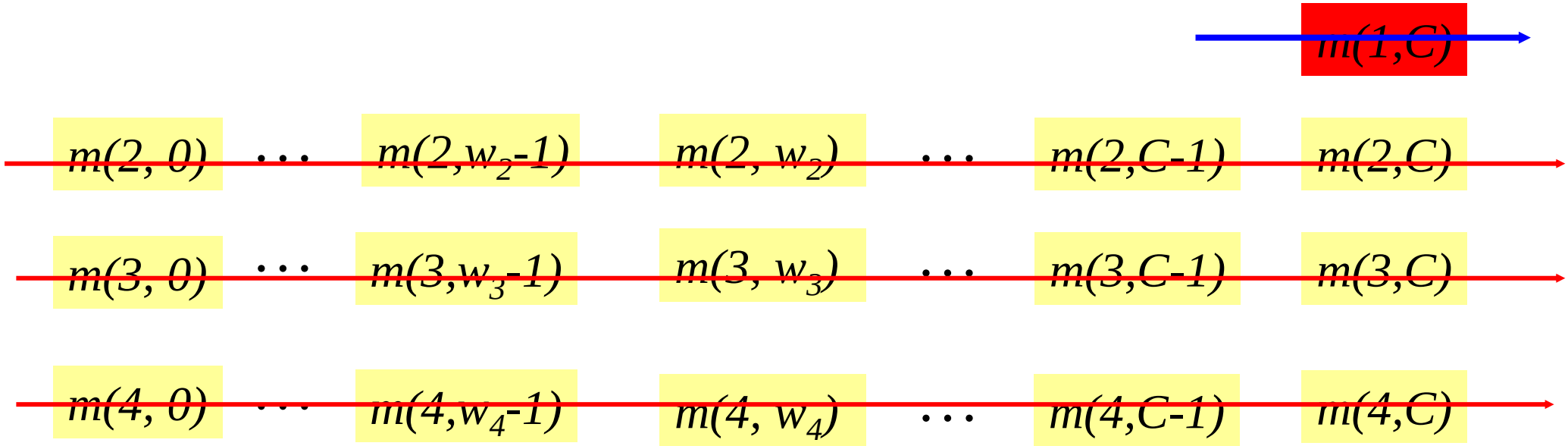
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $m(1,C)$ |
| $m(2, 0)$ | … | $m(2,w_2-1)$ | | $m(2, w_2)$ | … | $m(2,C-1)$ | $m(2,C)$ |
| $m(3, 0)$ | … | $m(3,w_3-1)$ | | $m(3, w_3)$ | … | $m(3,C-1)$ | $m(3,C)$ |
| $m(4, 0)$ | … | $m(4,w_4-1)$ | | $m(4, w_4)$ | … | $m(4,C-1)$ | $m(4,C)$ |

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

令$w_i$= 整 数, $n$=4

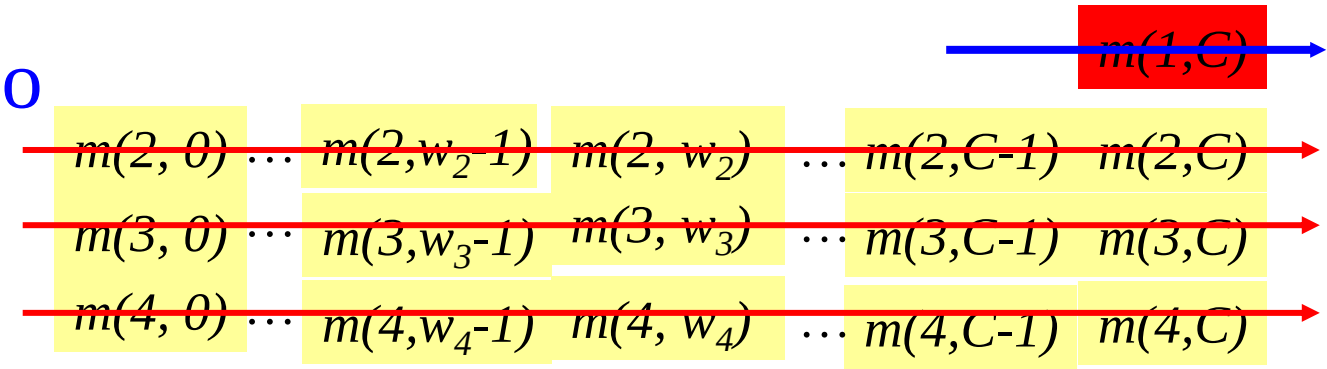


• 算法

(设 $w_i-1<C$)

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$$




For $j=0$ To $w_n-1$ Do
    $m[n, j] = 0$;
For $j=w_n$ To $C$ Do
    $m[n, j] = v_n$;
For $i=n-1$ To $2$ Do
    For $j=0$ To $w_i-1$ Do
        $m[i, j] = m[i+1, j]$;
    For $j=w_i$ To $C$ Do
        $m[i, j]=\max\{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i\}$;
If $C<w_1$ Then $m[1, C]=m[2, C]$;
    Else $m[1, C]=\max\{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1\}$;

For $j=0$ To $\min(w_n-1, C)$ Do
    $m[n, j] = 0$;
For $j=w_n$ To $C$ Do
    $m[n, j] = v_n$;
For $i=n-1$ To $2$ Do
    For $j=0$ To $\min(w_i-1, C)$ Do
        $m[i, j] = m[i+1, j]$;
    For $j=w_i$ To $C$ Do
        $m[i, j]=\max\{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i\}$;
If $C<w_1$ Then $m[1, C]=m[2, C]$;
    Else $m[1, C]=\max\{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1\}$;

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- **构造优化解**

# 构造优化解

1. $m(1, C)$是最优解代价值，相应解计算如下：

If $m(1, C) = m(2, C)$

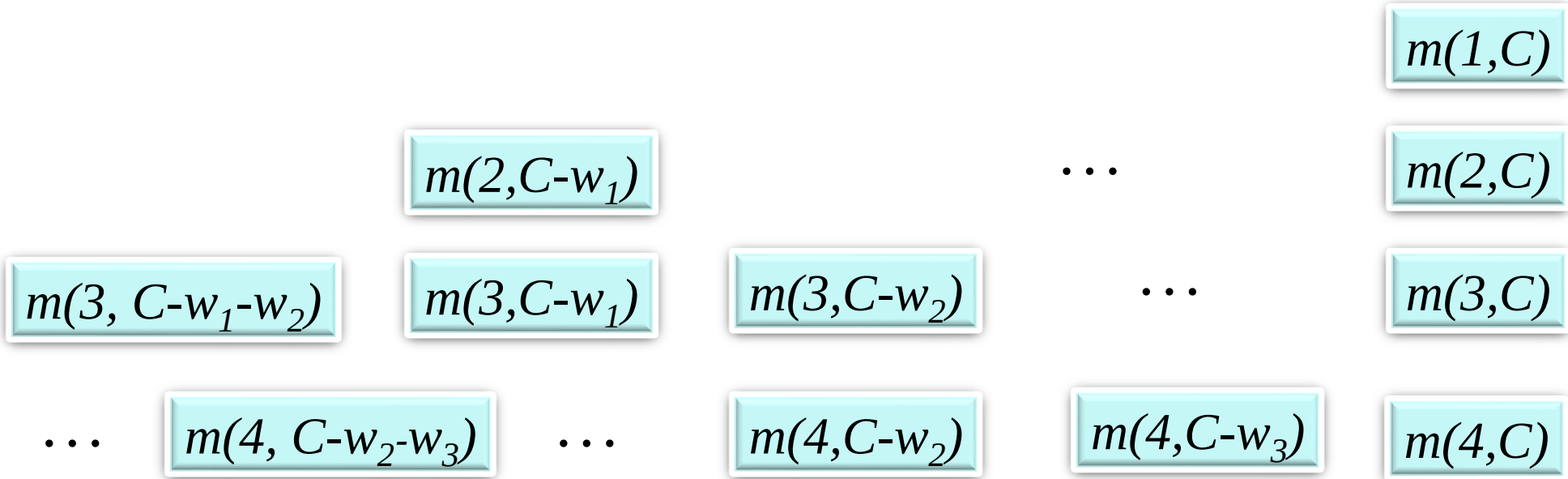
Then $x_1 = 0$;

Else $x_1 = 1$;

| | |
|---|---|
| | $m(i, j)$ |
| $m(i+1, j-w_i)$ | $m(i+1, j)$ |

2. 如果 $x_1=0$，由$m(2, C)$继续构造最优解；

3. 如果 $x_1=1$，由$m(2, C-w_1)$继续构造最优解.



# 算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价时间
    - $O(Cn)$
  - 构造最优解时间：

    $O(n)$
  - 总时间复杂性为：

    $O(Cn)$
- 空间复杂性
  - 使用数组$m$
  - 需要空间$O(Cn)$

```
For  j=0  To  min(w_n-1, C)  Do
        m[n, j] = 0;
For  j=w_n  To  C  Do
        m[n, j] = v_n;
For  i=n-1  To  2  Do
     For  j=0  To  min(w_i-1, C)  Do
        m[i, j] = m[i+1, j];
```

这是一个伪多项式算法！

当$C=2^n$时：

$$T(n)=O(n2^n)$$

当$w_i$不限定为正整数时：

$$T(n)=O(2^n)$$

3. If $x_1=1$, 由$m(2, C-w_1)$继续构造$x_2$;

……

部分背包问题？

# 4.5 The Optimal Binary Search Trees

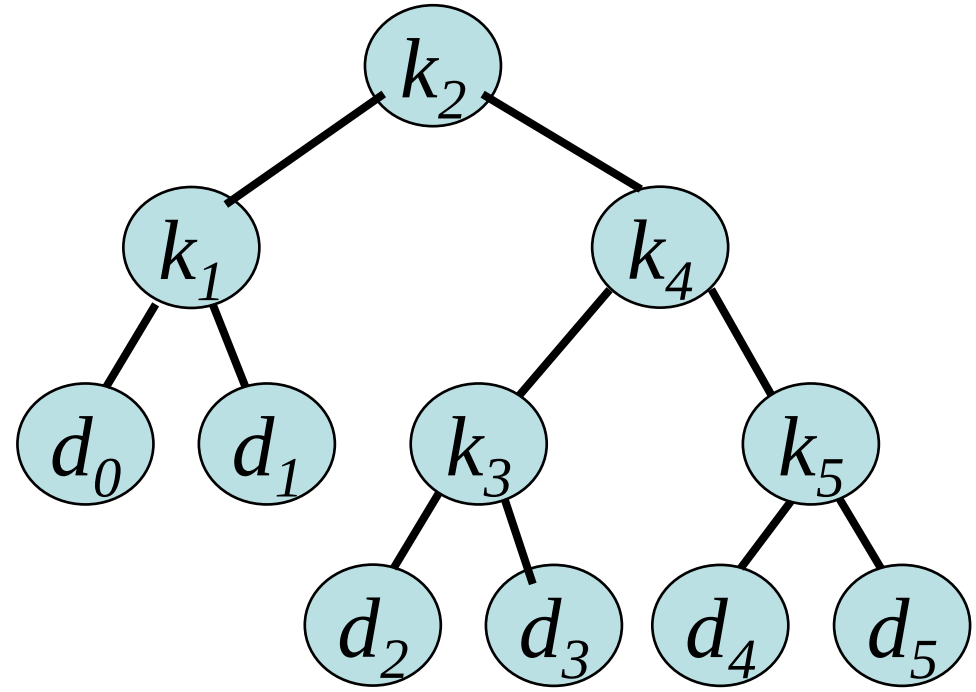
- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

# 问题的定义

- 二叉搜索树$T$
  - 结点
    - $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$
    - $D=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$
    - $d_i$对应区间$(k_i, k_{i+1})$

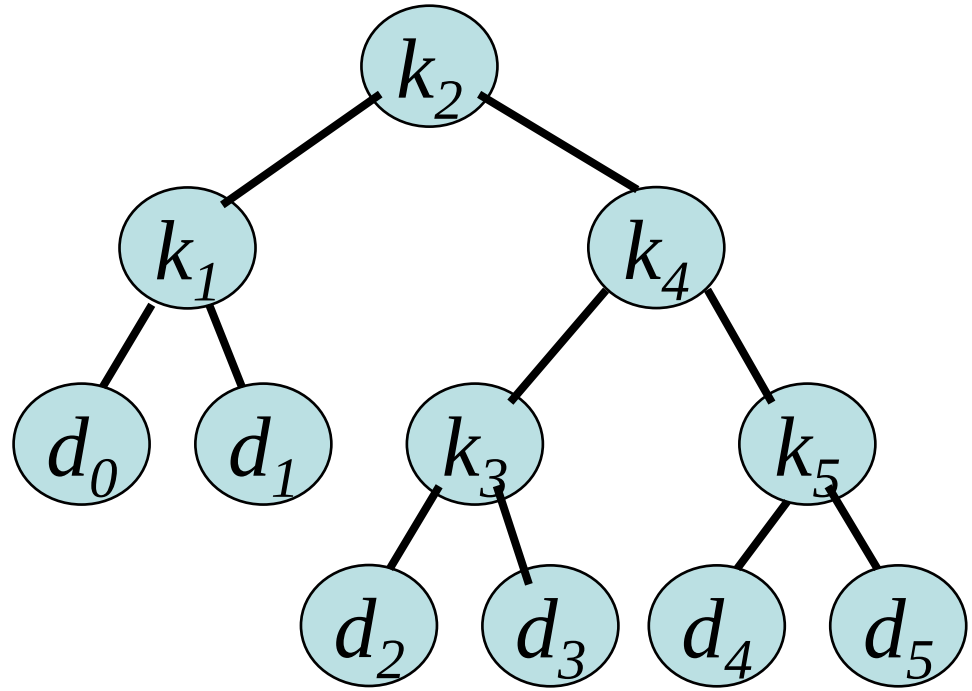
      $d_0$对应区间$(-\infty, k_1)$

      $d_n$对应区间$(k_n, +\infty)$
  - 附加信息
    - 搜索$k_i$的概率为$p_i$
    - 搜索$d_i$的概率为$q_i$




$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=0}^{n} q_j = 1$$

- 搜索树的期望代价(用检查树顶点的个数衡量)




$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

- 问题的定义

输入：$K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$,

$P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $p_i$为搜索$k_i$的概率

$Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, $q_i$为搜索值$d_i$的概率

输出：构造$K$的二叉搜索树$T$, 最小化

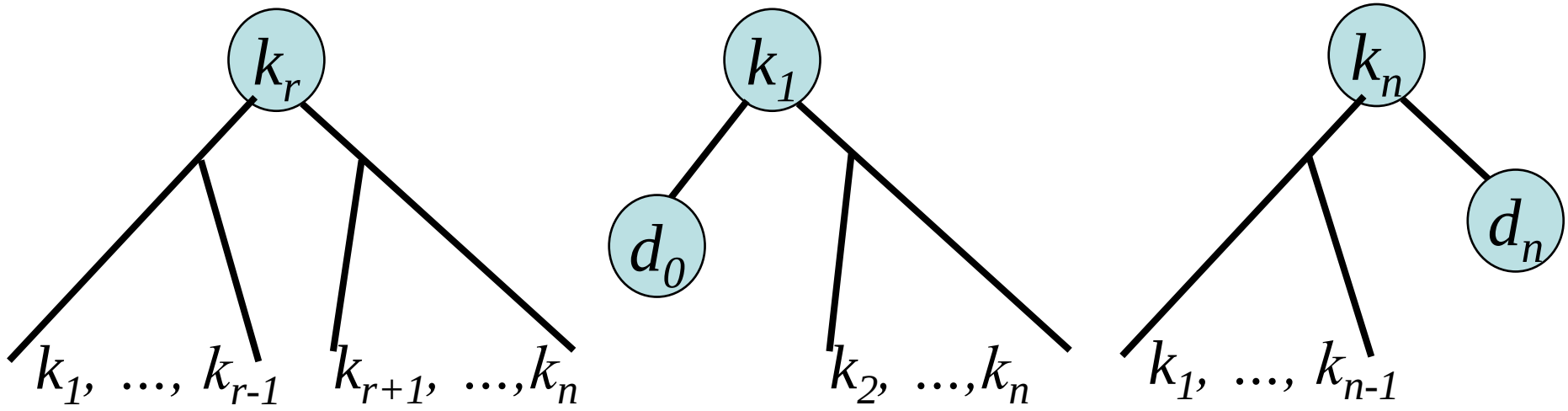
$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

# 优化二叉搜索树结构的分析

- 优化解的结构观察

  $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$的优化解的根必为$K$中某个$k_r$




如果$r=1$, 左子树仅包含$d_0$

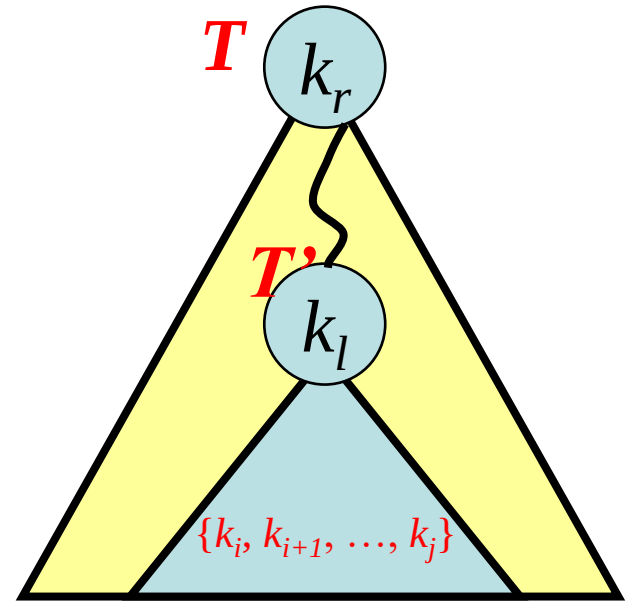
如果$r=n$, 右子树仅包含$d_n$

- 优化子结构

**定理.** 如果优化二叉搜索树$T$具有包含关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子树$T'$，则$T'$是关于关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子问题的优化解.

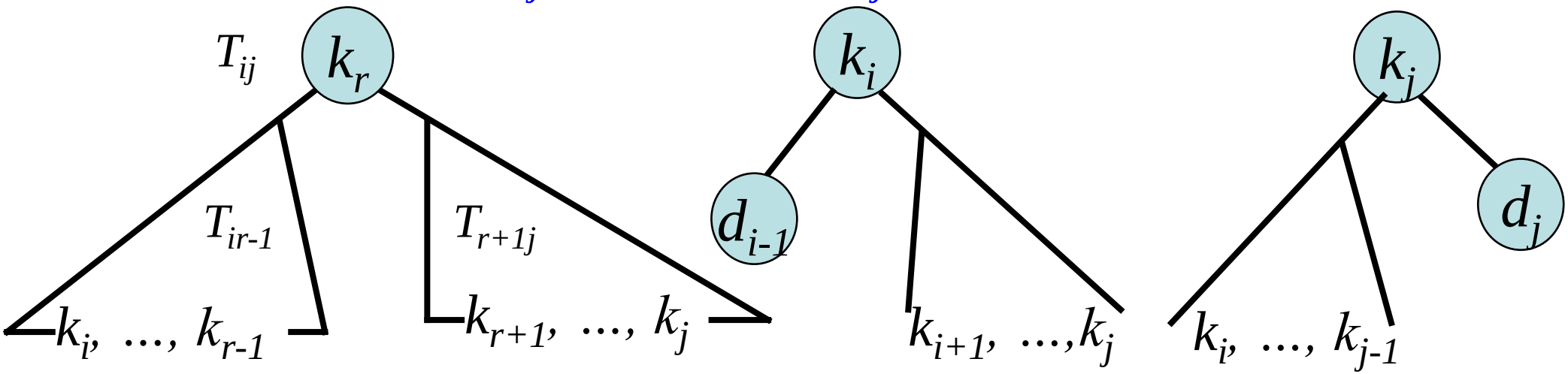
**证明：** 若不然，必有关键字集$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$子树$T''$，$T''$的期望搜索代价低于$T'$.

用$T''$替换$T$中的$T'$，可以得到一个期望搜索代价比$T$小的原始问题的二叉搜索树。与$T$是最优解矛盾.



- 用优化子结构从子问题优化解构造优化解

$K=\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的优化解$T_{ij}$的根必为$K$中某个$k_r$

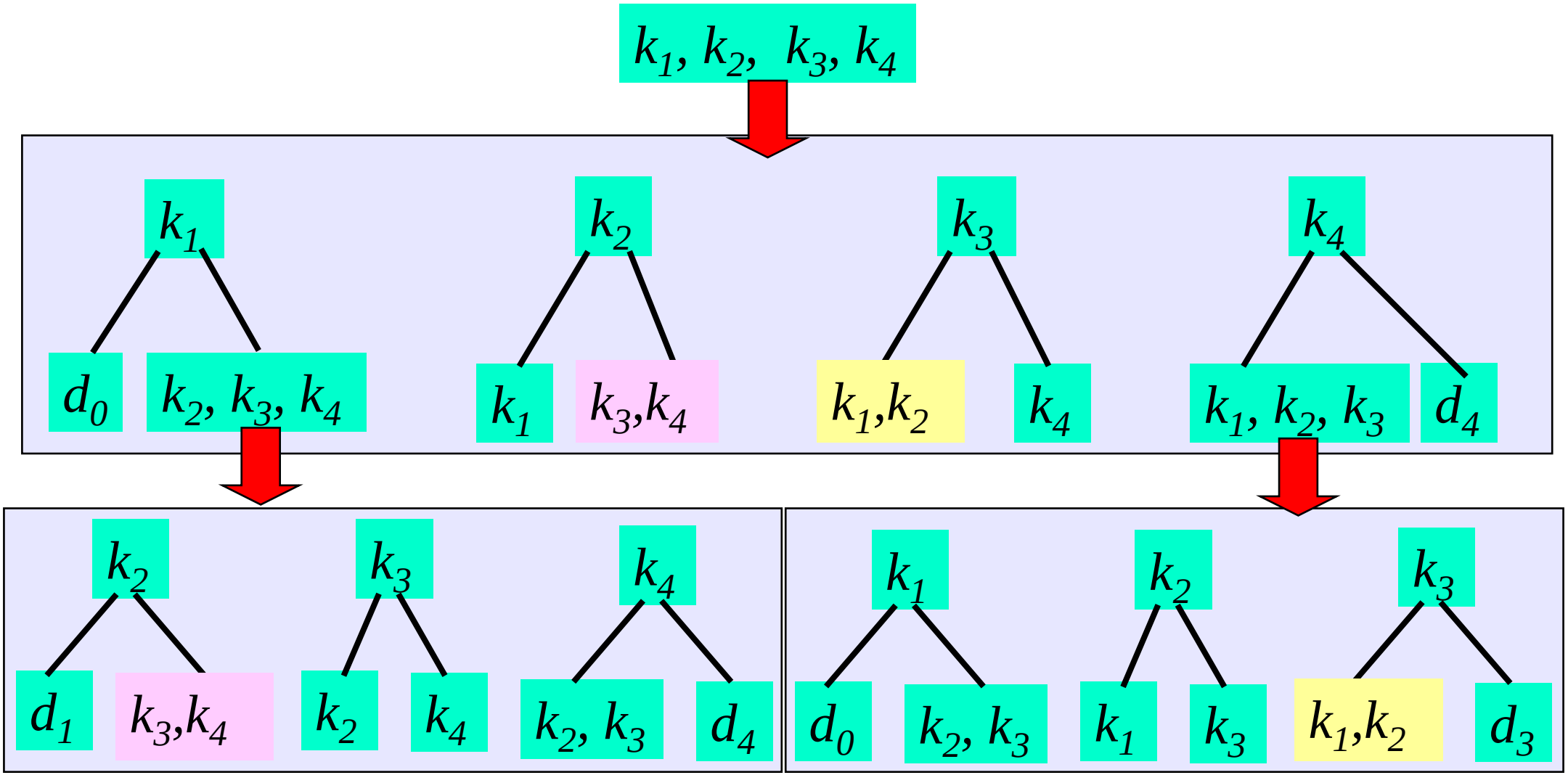



只要对于每个$k_r \in K$, 确定$\{k_i, \ldots, k_{r-1}\}$和 $\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$的优化解, 我们就可以求出$K$的优化解.

如果$r=i$, 左子树$T_{ii-1}=\{k_i, \ldots, k_{i-1}\}$仅包含$d_{i-1}$

如果$r=j$, 右子树$T_{j+1j}=\{k_{j+1}, \ldots, k_j\}$仅包含$d_j$

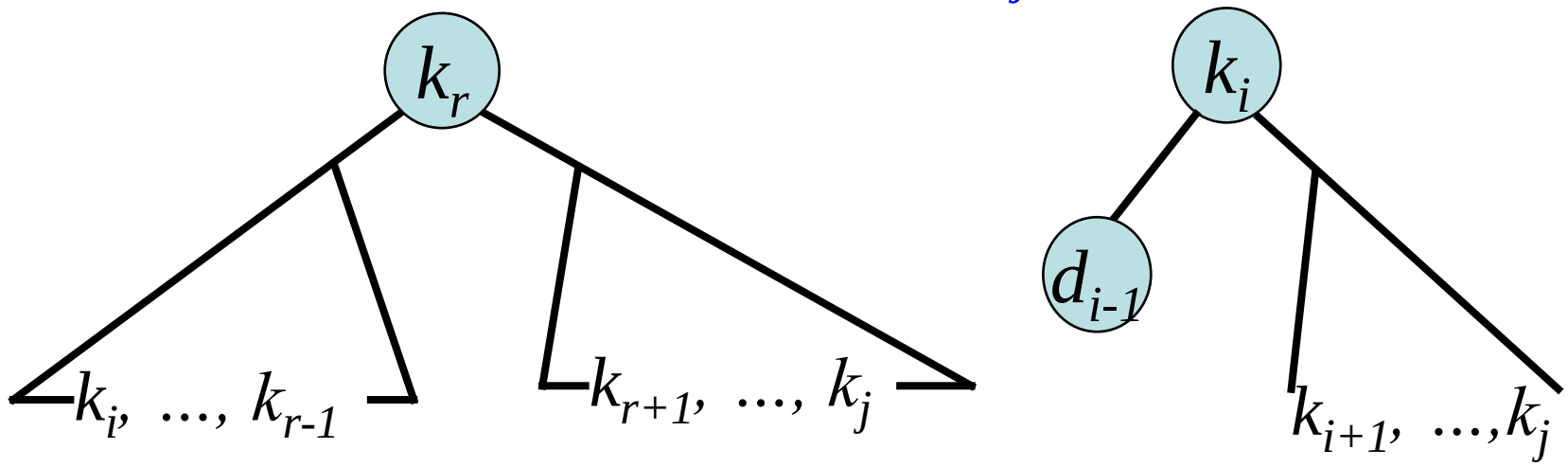
# 子问题重叠性


$k_1, k_2, k_3, k_4$
$k_1$
$d_0$
$k_2, k_3, k_4$
$k_2$
$k_1$
$k_3,k_4$
$k_3$
$k_1,k_2$
$k_4$
$k_4$
$k_1, k_2, k_3$
$d_4$
$k_2$
$d_1$
$k_3,k_4$
$k_3$
$k_2$
$k_4$
$k_4$
$k_2, k_3$
$d_4$
$k_1$
$d_0$
$k_2, k_3$
$k_2$
$k_1$
$k_3$
$k_3$
$k_1,k_2$
$d_3$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

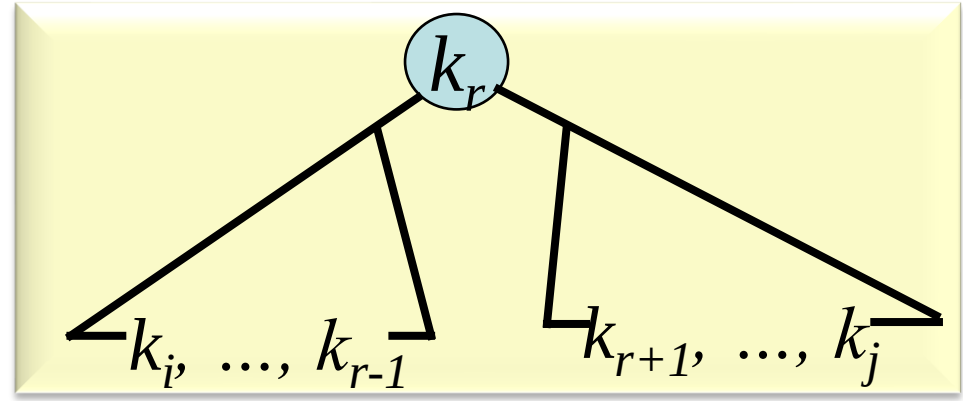
# 建立优化解的搜索代价递归方程

- 令$E(i, j)$为$\{k_i, \ldots, k_j\}$的优化解$T_{ij}$的期望搜索代价
  - 当$j=i-1$时，$T_{ij}$中只有叶结点$d_{i-1}$, $E(i, i-1)=q_{i-1}$
  - 当$j \geq i$时，选择一个$k_r \in \{k_i, \ldots, k_j\}$:




当把左右优化子树放进$T_{ij}$时，每个结点的深度增加1

$$E(i, j)=P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$$




- 计算$W(i, r-1)$和$W(r+1, j)$

由 $E(LT+1)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+2)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+2)q_l$

$E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+1)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+1)q_l$

知 $W(i,r-1)=E(LT+1)-E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$

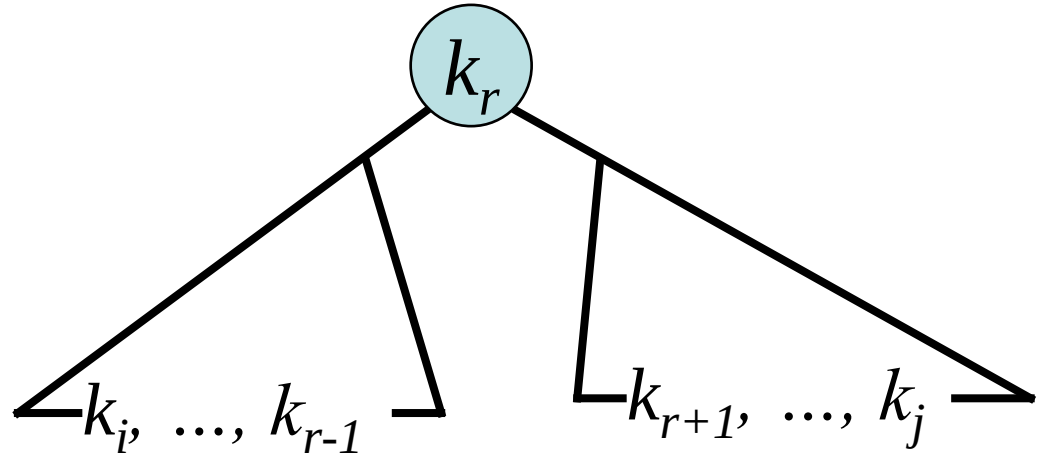
同理, $W(r+1,j)=\sum_{l=r+1}^{j}p_l+\sum_{l=r}^{j}q_l$

令 $W(i, j)=W(i, r-1)+W(r+1, j)+p_r=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l=W(i, j-1)+p_j+q_j$

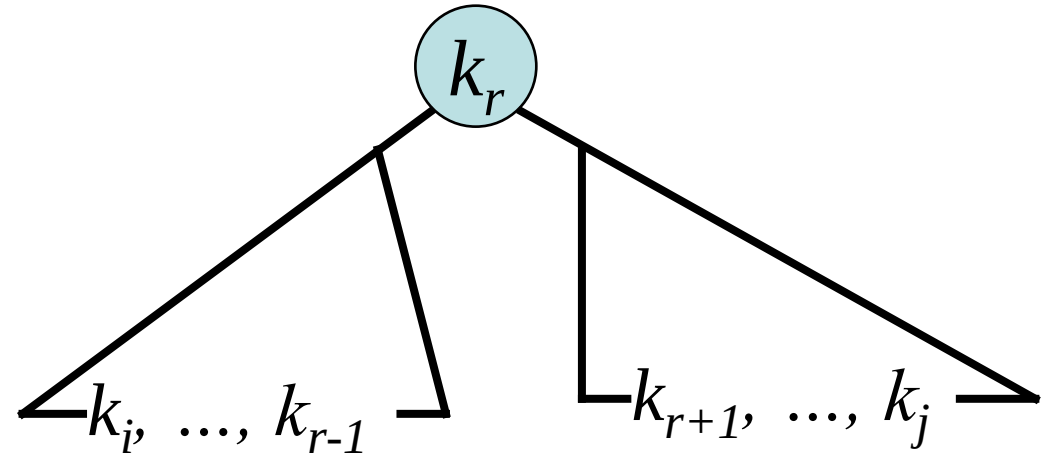
由$W(i,r-1)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$ ， $W(i, i-1)=q_{i-1}$

$$W(i, i-1) = q_{i-1}$$
$$W(i, j) = W(i, r-1) + W(r+1, j) + p_r = W(i, j-1) + p_j + q_j$$

$$E(i, i-1) = q_{i-1}$$
$$E(i, j) = P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$$




$$E(i, j) = E(i, r-1) + E(r+1, j) + W(i, j)$$




总之

$$W(i, i\text{-}1) = q_{i-1},$$
$$W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$$

$$E(i, i\text{-}1) = q_{i-1}$$
$$E(i, j) = \min_{i \le r \le j}\{E(i, r\text{-}1) + E(r+1, j) + W(i, j)\} \quad If\ j \ge i$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

# 递归划分子问题

$E(i, j)=q_{i-1}$ If $j=i-1$

$E(i, j)=min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ If $j\ge i$

| $E(i,i-1)$ | $E(i,i)$ | …… | $E(i,j-1)$ | $E(i, j)$ |
|---|---|---|---|---|

$E(i+1, j)$

$E(i+2, j)$

……

$E(j+1, j)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

# 自下而上计算优化解的代价

$E(i, j)=q_{i-1}$ If $j=i-1$

$E(i, j)=min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ If $j\ge i$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0=$ | $E(1,0)$ | $E(1,1)$ | $E(1,2)$ | $E(1,3)$ | $E(1,4)$ |
| $q_1=$ | $E(2,1)$ | $E(2,2)$ | $E(2,3)$ | $E(2,4)$ | |
| $q_2=$ | $E(3,2)$ | $E(3,3)$ | $E(3,4)$ | | |
| $q_3=$ | $E(4,3)$ | $E(4,4)$ | | | |
| $q_4=$ | $E(5,4)$ | | | | |

- $W(i, i-1) = q_{i-1}$, $W(i, j) = W(i, j-1) + p_j + q_j$

| $W(i, j-1)$ | $W(i, j)$ |
|---|---|

$q_0 =$ $W(1,0)$ $W(1,1)$ $W(1,2)$ $W(1,3)$ $W(1,4)$

$q_1 =$ $W(2,1)$ $W(2,2)$ $W(2,3)$ $W(2,4)$

$q_2 =$ $W(3,2)$ $W(3,3)$ $W(3,4)$

$q_3 =$ $W(4,3)$ $W(4,4)$

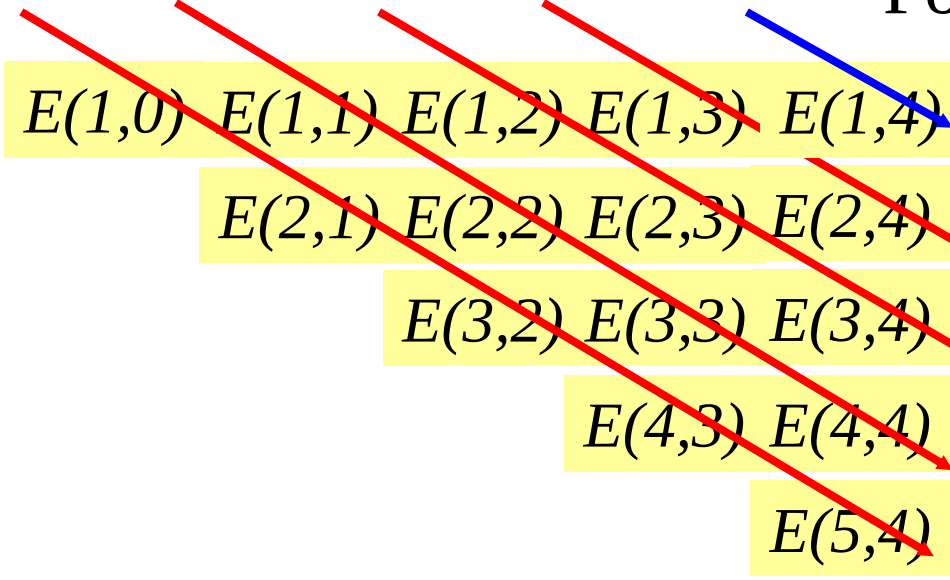
$q_4 =$ $W(5,4)$

- 算法
  - 数据结构
    - *E[1:n+1; 0:n]*: 存储优化解搜索代价
    - *W[1: n+1; 0:n]*: 存储代价增量
    - *Root[1:n; 1:n]*: *Root(i, j)*记录子问题 $\{k_i, \ldots, k_j\}$优化解的根

$E(i, j)=q_{i-1}$ If $j=i-1$

$E(i, j)=min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ If $j\ge i$

$W(i, i-1) = q_{i-1}$, $W(i, j) = W(i, j-1) + p_j + q_j$




Optimal-BST($p$, $q$, $n$)

For $i=1$ To $n+1$ Do

$E(i, i-1) = q_{i-1}$; $W(i, i-1) = q_{i-1}$;

For $l=1$ To $n$ Do

For $i=1$ To $n-l+1$ Do

$j=i+l-1$;

$E(i, j)=\infty$;

$W(i, j)=W(i, j-1)+p_j+q_j$;

For $r=i$ To $j$ Do

$t=E(i, r-1)+E(r+1, j)+W(i, j)$;

If $t<E(i, j)$

Then $E(i, j)=t$; $Root(i, j)=r$;

Return $E$ and $Root$

# 算法的复杂性

- 时间复杂性
  - $(l, i, r)$三层循环，每层循环至多$n$步
  - 时间复杂性为$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 二个$(n+1)\times(n+1)$数组，一个$n\times n$数组
  - $O(n^2)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- **构造优化解**

# 思考：完成优化解的构造算法

Optimal-BST($p$, $q$, $n$)

For $i=1$ To $n+1$ Do

$E(i, i-1) = q_{i-1}$; $W(i, i-1) = q_{i-1}$;

For $l=1$ To $n$ Do

For $i=1$ To $n-l+1$ Do

$j=i+l-1$;

$E(i, j)=\infty$;

$W(i, j)=W(i, j-1)+p_j+q_j$;

For $r=i$ To $j$ Do

$t=E(i, r-1)+E(r+1, j)+W(i, j)$;

If $t<E(i, j)$

Then $E(i, j)=t$; $Root(i, j)=r$;

Return $E$ and $Root$

```
Node{
range;     // range of keys
label;     // k_i or d_j
leftChild;
rightChild; }
```

# 使用递归

**Extend**(Root, n)
(i, j) ← n.range;
**If** i > j
    n.label ← $d_j$;
    **Return**;
n.Label ← $k_{Root[i,j]}$;
L ← Root[i, j];
Initiate node lc;
lc.range ← (i, L-1);
n.leftChild ← lc;
Initiate node rc;
rc.range ← (L+1, j);
n.rightChild ← rc;
Extend(Root, lc);
Extend(Root, rc);

**Construct-BST**(Root)
Initiate an empty Tree T;
# ← Root.size;
Initiate node r;
r.range ← (1, #);
T.Root ← r;
Extend(Root, r);
**Return** T;

```
Node{
range;     // range of keys
label;     // k_i or d_j
leftChild;
rightChild; }
```

# 使用栈

```
Construct-BST(Root)
# ← Root.size;
Initiate node r;
r.range ← (1, #);
Stack S ← ∅;
S.push(r);
While S ≠ ∅
    n = S.pop();
    (i, j) ← n.range;
    If i > j
        n.label ← d_j;
        continue;
    L ← Root[i, j];
    n.Label ← k_L;
    Initiate node lc;
    lc.range ← (i, L-1);
    n.leftChild ← lc;
    Initiate node rc;
    rc.range ← (L+1, j);
    n.rightChild ← rc;
    S.push(lc);
    S.push(rc);
Initiate an empty Tree T;
T.root ← r;
Return T;
```

# 打印T

**Print-BST**(Root, i, j)
**If** i > j
    Print $d_j$;
    **Return**;
L ← Root[i, j];
Print ( ;
Print-BST(Root, i, L-1);
Print ) ;
Print $k_{Root[i,j]}$;
Print ( ;
Print-BST(Root, L+1, j);
Print ) ;

打印BST的语句：

Print-BST(Root, 1, Root.size);

# 4.6 The Minimum Edit Distance

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

# 问题的定义

- 最小编辑距离

  输入：两个字符串$x[1..m]$和$y[1..n]$

  输出：将$x[1..m]$转换为$y[1..n]$所需要的最少操作数.

  操作：插入一个符号，或者
  删除一个符号，或者
  替换一个符号

  例如：$x$="snowy", $y$="sunny"

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | — | N | O | W | | Y |
| S | U | N | N | — | | Y |

Cost: 3

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — | S | N | O | W | — | Y |
| S | U | N | — | — | N | Y |

Cost: 5

# 优化解结构分析

- 寻找优化解拆分成子问题解的方式

$ED[i,j]$：字符串x[1:i]和y[1:j]的编辑距离

$$ED[i,j]=\begin{cases}?\\ \dots\\ ?\end{cases}$$

*不能遗漏拆分方式*

# 优化解结构分析

- 观察将SNOWY转变为SUNNY的编辑操作

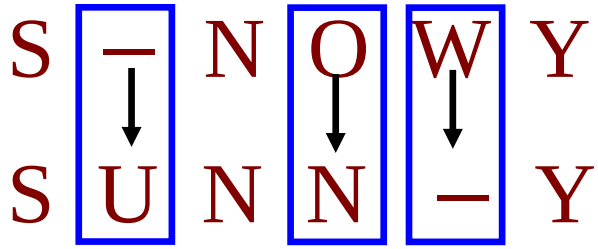
编辑操作1：插入U (S和N之间) $\longrightarrow U$

编辑操作2：将O修改为N $\Rightarrow$ $O \rightarrow N$

编辑操作3：删除W $W \rightarrow -$

只包含修改的编辑序列，引入空字符“–”

上述编辑序列的示例图




同一字符发生多次编辑操作，则需要多层示例图，才能表示编辑过程。

# 优化解结构分析

- 最小编辑距离对应编辑序列的性质

  不重叠性：任一字符只执行一次编辑操作（插入、修改、删除之一）

  顺序无关性：将编辑序列中的操作顺序任意重排列，不改变编辑结果

  对称性：将$s$编辑为$t$的最短序列与将$t$编辑为$s$的最短序列等长

- 满足不重叠性的编辑序列

提问：具有不重叠性的编辑序列一定生成最小编辑距离吗？

例子：删除$x$中所有字符，在插入$y$中所有字符，编辑距离不一定最小。

满足不重叠性的编辑序列（$x \to y$）如下图示

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_K \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_K \end{array}$$

$x$是$x_1x_2 \dots x_i \dots x_K$的子序列，后者除$x$以外的元素都是“—”

$y$是$y_1y_2 \dots y_i \dots y_K$的子序列，后者除$y$以外的元素都是“—”

$x_i$和$y_i$不能同时等于“—”，$1 \le i \le K$

$x_1x_2 \dots x_i \dots x_K$称为$x$的空扩展字符串

- 满足不重叠性的编辑序列

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_K \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_K \end{array}$$

$x$是$x_1x_2\ldots x_i\ldots x_K$的子序列，后者除$x$以外的元素都是“–”

$y$是$y_1y_2\ldots y_i\ldots y_K$的子序列，后者除$y$以外的元素都是“–”

$x_i$和$y_i$不能同时等于“–”，$1\le i\le K$

$x_i=y_i$：字符$x_i$原样保留

$x_i=$“–”：插入字符$y_i$

$y_i=$“–”：删除字符$x_i$

否则：字符$x_i$修改为字符$y_i$

字符匹配：满足不重叠性的编辑序列图示中，字符$x_i$和字符$y_i$匹配，$1\le i\le K$

起点和终点不相同的“↓”的数量即为相应的编辑距离

# 优化解结构分析

- 寻找优化解拆分成子问题解的方式

$ED[i, j]$：字符串x[1:i]和y[1:j]的编辑距离

$$ED[m,n] = \begin{cases} ? \\ \dots \\ ? \end{cases}$$

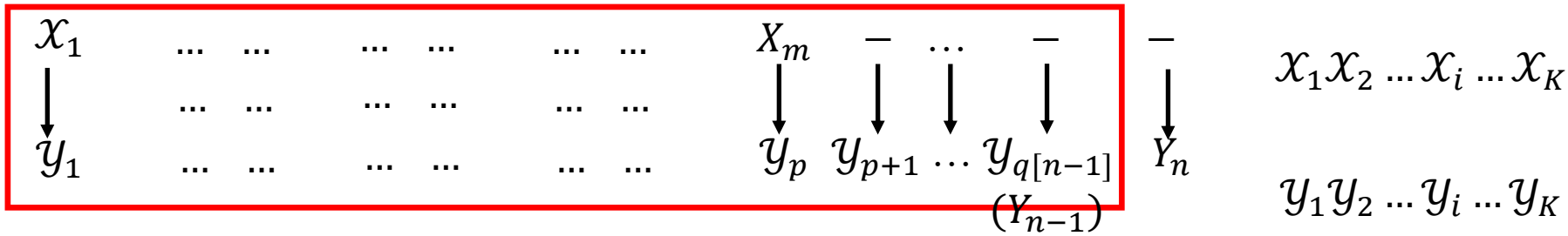
根据$x[m]$的匹配位置分情况讨论

*不能遗漏拆分方式*

- 在$Y_1\,Y_2\,\ldots Y_i\,\ldots Y_K$中，$x[m]$匹配$Y_p$，$y[j]$对应$Y_{q[j]}$，数组$q[j]$存储$y[1:n]$在$Y$中的位置

Case 1：$p \le q[n-1]$

$ED[m,n-1]$



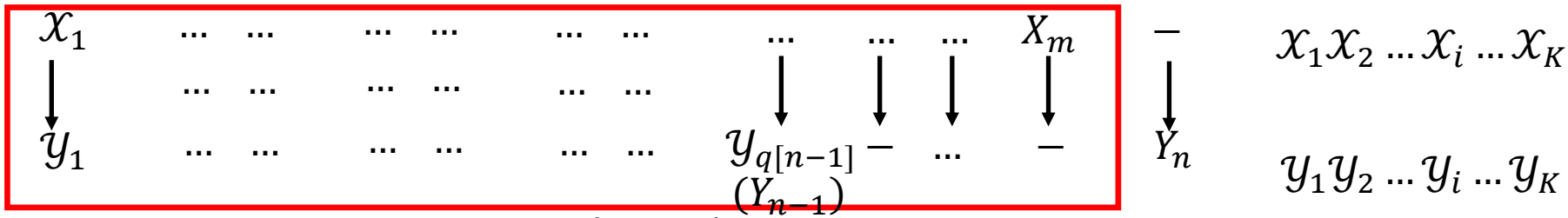

将$x[1:m]$转换成$y[1:n]$的编辑序列示例图

$$ED[m,n] = ED[m,n-1] + 1$$

- 在$Y_1\ Y_2\ \ldots Y_i\ \ldots Y_K$中，$x[m]$匹配$Y_p$，$y[j]$对应$Y_{q[j]}$，数组$q[j]$存储$y[1:n]$在$Y$中的位置

Case 2：$q[n-1] < p < q[n]$

$ED[m, n-1]$

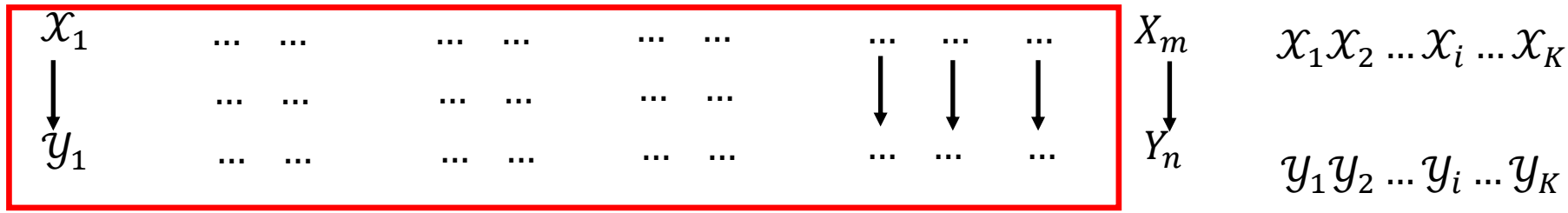



将$x[1:m]$转换成$y[1:n]$的编辑序列示例图

$$ED[m,n] = ED[m,n-1] + 1$$

- 在$Y_1\ Y_2\ \ldots Y_i\ \ldots Y_K$中，$x[m]$匹配$Y_p$，$y[j]$对应$Y_{q[j]}$，数组$q[j]$存储$y[1:n]$在$Y$中的位置

Case 3：$p = q[n]$



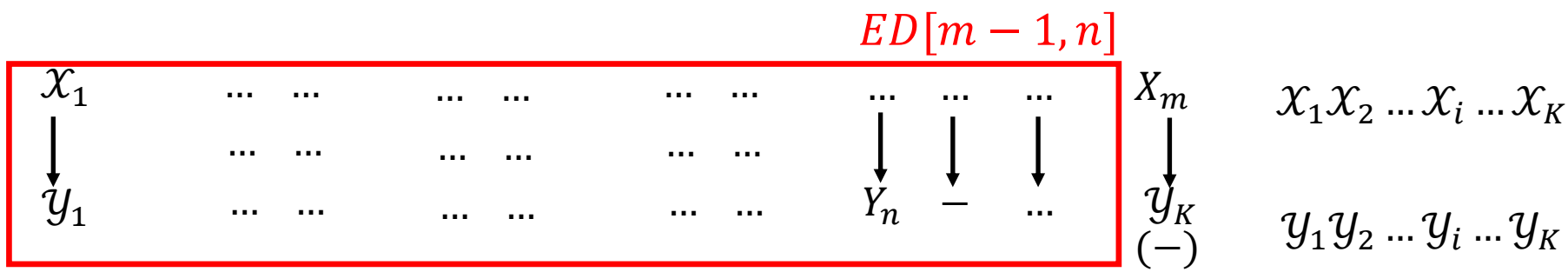

将$x[1:m]$转换成$y[1:n]$的编辑序列示例图

$$ED[m,n] = ED[m-1,n-1] + diff(X_m, Y_n)$$

$$diff(x,y) = \begin{cases} 0 & if\ x = y \\ 1 & if\ x \neq y \end{cases}$$

- 在$Y_1\,Y_2\,\ldots Y_i\,\ldots Y_K$中，$x[m]$匹配$Y_p$，$y[j]$对应$Y_{q[j]}$，数组$q[j]$存储$y[1:n]$在$Y$中的位置

Case 4：$p > q[n]$ (隐含$p = K$)




将$x[1:m]$转换成$y[1:n]$的编辑序列示例图

$$ED[m,n] = ED[m-1,n] + 1$$

- 总结上述情况

如果$X[m]$匹配$Y[n]$之前的字符：

$$ED[m,n] = ED[m,n-1] + 1$$

如果$X[m]$匹配$Y[n]$：

$$ED[m,n] = ED[m-1,n-1] + diff(X[m],Y[n])$$

如果$X[m]$匹配$Y[n]$之后的字符：

$$ED[m,n] = ED[m-1,n] + 1$$

上述三种情况涵盖所有无重叠操作的编辑序列

# 优化子结构证明

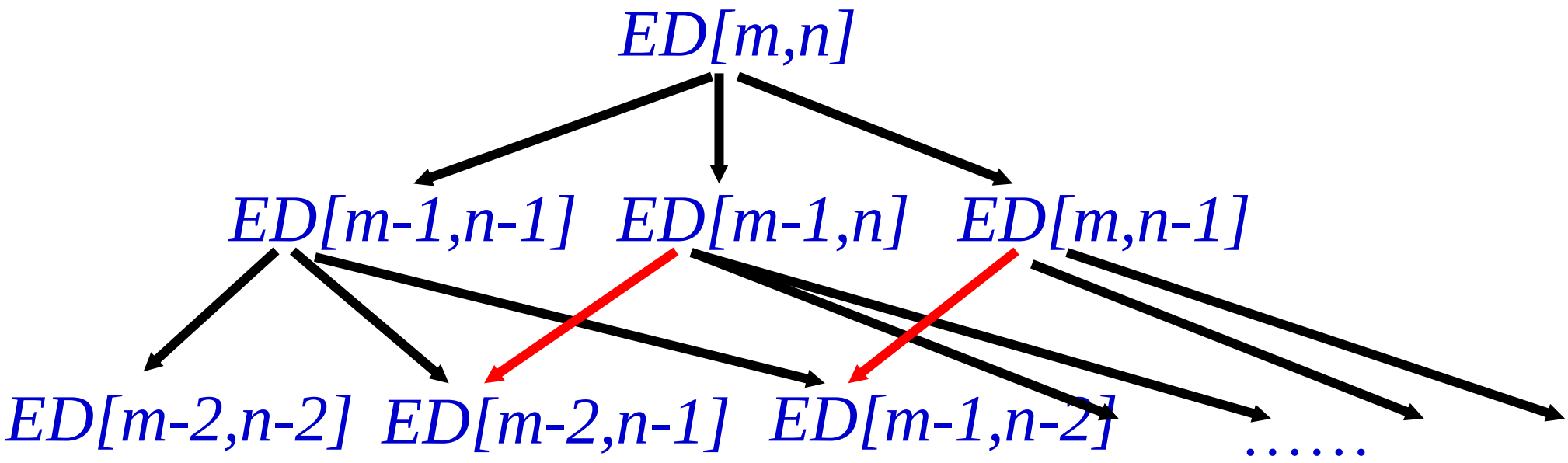
$$ED[m,n]=min\begin{cases}ED[m-1,n]+1\\ED[m-1,n-1]+diff(X[m],Y[n])\\ED[m,n-1]+1\end{cases}$$

证明：

情况一：$ED[m,n]=ED[m-1,n]+1$并取得优化解，则$ED[m-1,n]$必为$x[1:m-1]$和$y[1:n]$的最小编辑距离。否则，将存在一组编辑操作将$x[1:m-1]$在$k$步转换为$y[1:n]$，且$k<ED[m-1,n]$。如此，找到$k+1$次编辑操作将$x$转换为$y$，$k+1<ED[m,n]$，与$ED[m,n]$为优化解矛盾！

情况二、情况三的证明过程与情况一类似

# 子问题重叠性




**最小编辑距离问题具有子问题重叠性**

# 最小编辑距离的递归方程

- 计算$X[1:i]$和$Y[1:j]$的最小编辑距离$ED[i,j]$

$$ED[i,0] = i \qquad 1 \le i \le m$$

$$ED[0,j] = j \qquad 1 \le j \le n$$

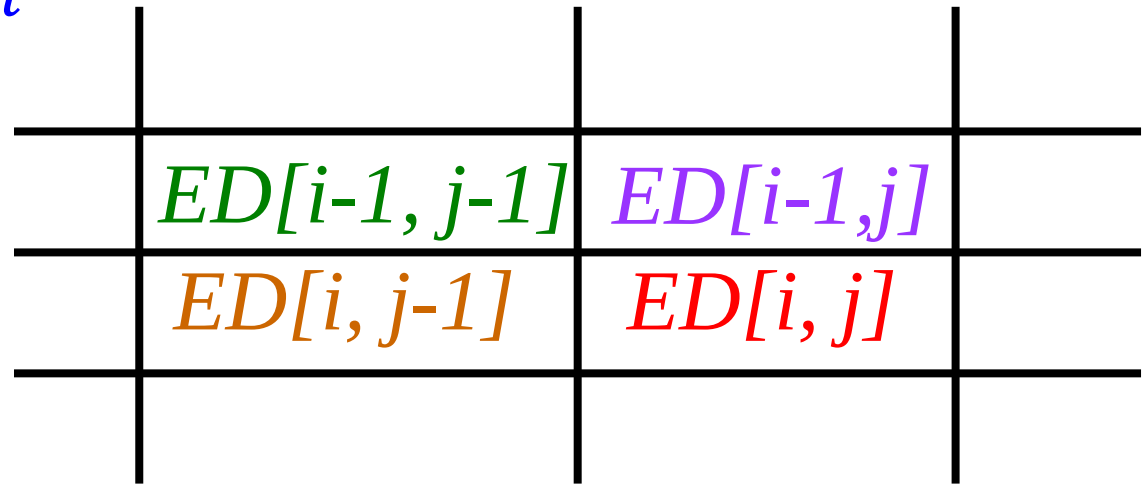
$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$

# 递归划分与自底向上求解

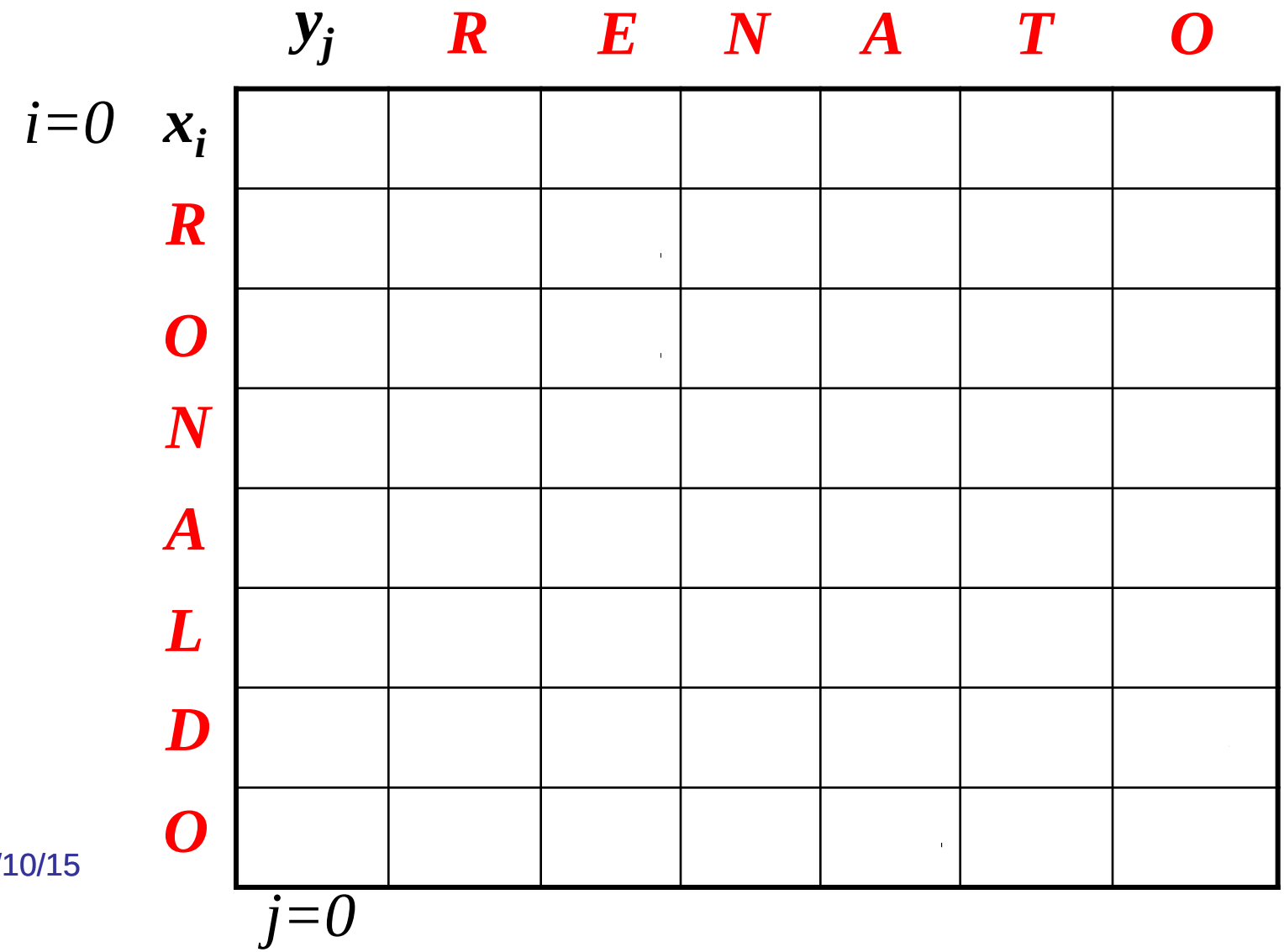
$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$

$$ED[i,0] = i \qquad 1 \le i \le m$$

$$ED[0,j] = j \qquad 1 \le j \le n$$



$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$



# 记录优化解信息

$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$

| | | $y_j$ | R | E | N | A | T | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| R | | 1 | ↖ 0 | ←1 | ←2 | ←3 | ←4 | ← 5 |
| O | | 2 | ↑ 1 | ↖1 | ↖2 | ↖3 | ↖4 | ↖ 4 |
| N | | 3 | ↑ 2 | ↖2 | ↖1 | ←2 | ←3 | ←4 |
| A | | 4 | ↑ 3 | ↖3 | ↑2 | ↖1 | ←2 | ←3 |
| L | | 5 | ↑ 4 | ↖4 | ↑3 | ↑2 | ↖2 | ↖3 |
| D | | 6 | ↑ 5 | ↖5 | ↑4 | ↑3 | ↖3 | ↖3 |
| O | | 7 | ↑ 6 | ↖6 | ↑5 | ↑4 | ↖4 | ↖3 |
| | | $j=0$ | | | | | | |

# 记录优化解信息

$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$

| | $y_j$ | R | E | N | A | T | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| R | | 1 | ↖ 0 | ←1 | ←2 | ←3 | ←4 | ← 5 |
| O | | 2 | ↑ 1 | ↖1 | ↖2 | ↖3 | ↖4 | ↖ 4 |
| N | | 3 | ↑ 2 | ↖2 | ↖1 | ←2 | ←3 | ←4 |
| A | | 4 | ↑ 3 | ↖3 | ↑2 | ↖1 | ←2 | ←3 |
| L | | 5 | ↑ 4 | ↖4 | ↑3 | ↑2 | ↖2 | ↖3 |
| D | | 6 | ↑ 5 | ↖5 | ↑4 | ↑3 | ↖3 | ↖3 |
| O | | 7 | ↑ 6 | ↖6 | ↑5 | ↑4 | ↖4 | ↖3 |

$j=0$

```
MinimumED(X, Y)
M←length(X); n←length(Y);
For i←0 To m Do
        E[i,0]←i;
For j←1 To n Do
        E [0,j]←j;
For i←1 To m Do
    For j←1 To n Do
        If x_i = y_j
            Then E[i,j]←E[i-1,j-1];
        Else
            E[i,j]←E[i-1,j-1]+1;
        B[i,j]←"↖";
        If E[i,j]>E[i-1,j]+1
            Then E[i,j]=E[i-1,j]+1;
            B[i,j]←"↑";
        If E[i,j]>E[i,j-1]+1
            Then E[i,j]=E[i,j-1]+1;
            B[i,j]←"←";
Return E and B.
```

# 算法和算法复杂性

- 时间复杂性
  - $(i, j)$两层层循环，每层循环至多$m$和$n$步
  - 时间复杂性为$O(mn)$
- 空间复杂性
  - 一个$(m+1)\times(n+1)$数组，一个$m\times n$数组
  - $O(mn)$
  - $B$可以省去

# 构造优化编辑序列

$$ED[i,j]=min\begin{cases}ED[i-1,j]+1\\ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j])\\ED[i,j-1]+1\end{cases}$$

| | | $y_j$ | R | E | N | A | T | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=0 | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| R | | 1 | ↖0 | ←1 | ←2 | ←3 | ←4 | ←5 |
| O | | 2 | ↑1 | ↖1 | ←2 | ←3 | ←4 | ↖4 |
| N | | 3 | ↑2 | ↑2 | ↖1 | ←2 | ←3 | ←4 |
| A | | 4 | ↑3 | ↑3 | ↑2 | ↖1 | ←2 | ←3 |
| L | | 5 | ↑4 | ↑4 | ↑3 | ↑2 | ↖2 | ↖3 |
| D | | 6 | ↑5 | ↑5 | ↑4 | ↑3 | ↖3 | ↖3 |
| O | | 7 | ↑6 | ↑6 | ↑5 | ↑4 | ↖4 | ↖4 |

j=0

边界条件$E[i,0]$：删除$x[1:i]$

边界条件$E[0,j]$：在$x[1]$前插入$y[1:j]$

↖ 将$x[1:i-1]$修改为$y[1:j-1]$后，将$x[i]$按需修改为$y[j]$

← 将$x[1:i]$修改为$y[1:j-1]$后，在末尾插入$y[j]$

↑ 将$x[1:i-1]$修改为$y[1:j]$后，删除末尾符号（原$x[i]$）

作业1：输入为CRONALDO和RENATO，填写矩阵$E$和$B$；

作业2：完成优化解的构造算法，输入$x$和$y$，输出基本操作序列，将$x$转换为$y$

基本操作：

(1) Insert(pos, a)

(2) Modify(pos, b)

(3) Delete(pos)

（伪代码、时间复杂性、空间复杂性）

# 问题的定义

- 最小编辑距离判别问题

  输入：两个字符串$x[1..m]$和$y[1..n]$，整数$t$

  输出：$True$，如果$x$和$y$的最小编辑距离不大于t

  $False$，如果$x$和$y$的最小编辑距离大于t

输入：RONALDO, RENATO, 4, 输出：$True$

输入：RONALDO, RENATO, 2, 输出：$False$

# 问题的定义

- 最小编辑距离判别问题

  Step 1. 计算输入字符串的最小编辑距离

  Step 2. 与阈值比较

在$E$中计算大量不必要的元素！

- 改进算法的两点启发

$$ED[i,j] = min\begin{cases} ED[i-1,j]+1 \\ ED[i-1,j-1]+diff(X[i],Y[j]) \\ ED[i,j-1]+1 \end{cases}$$

$$ED[i,0] = i \qquad 1 \le i \le m$$

$$ED[0,j] = j \qquad 1 \le j \le n$$

字符串x和y的最小编辑距离不小于二者长度之差的绝对值

$x$="RONALDO", $y$="RENATO",

编辑距离阈值$t = 2$

| $i=0$ | $x_i$ | | *R* | *E* | *N* | *A* | *T* | *O* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | *R* | | | | | | | |
| | *O* | | | | | | | |
| | *N* | | | | | | | |
| | *A* | | | | | | | |
| | *L* | | | | | | | |
| | *D* | | | | | | | |
| | *O* | | | | | | | |

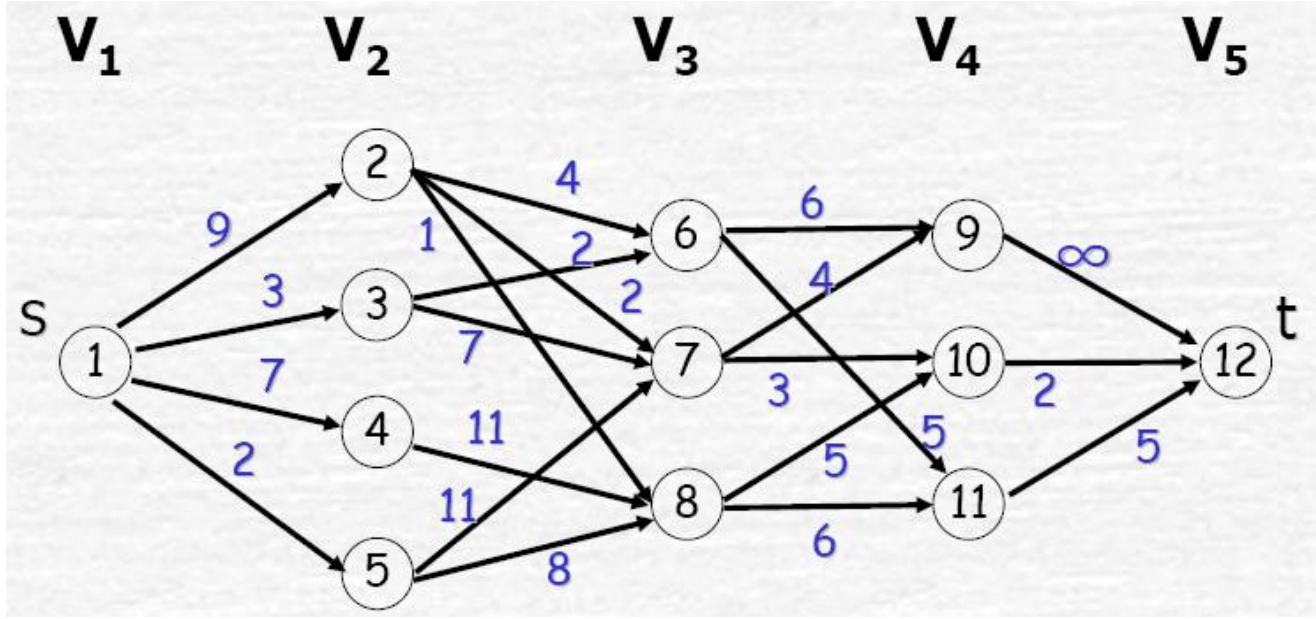
# 算法的复杂性

$x$="RONALDO",
$y$="RENATO",
编辑距离阈值$t = 2$

| | | | R | E | N | A | T | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$=0 | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | | | | |
| R | | 1 | 0 | 1 | 2 | | | |
| O | | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | | |
| N | | | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | |
| A | | | | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| L | | | | | 3 | 2 | 2 | 3 |
| D | | | | | | 3 | 3 | 3 |
| O | | | | | | | | |

- 时间复杂性
  - 每行、列最多计算$2t+1$
  - 时间复杂性为$O(min\{m,n\}t)$
- 空间复杂性
  - $O(min\{m,n\}t)$
  - 可优化为$O(t)$

# 多段图规划




求从s到t的最短路径.

# 多段图规划

- 优化解的结构分析

设$s,\ldots,v_{ij},\ldots,v_{ik},\ldots,t$是一条由$s$到$t$的最短路径，则$v_{ij},\ldots,v_{ik},\ldots,t$也是由$v_{ij}$到$t$的最短路径

# 子集求和

- 问题定义

  输入：集合$S=\{n$个正整数$\}$，正整数$P$

  输出：True，若存在子集合$S'$，使得$P=S'$中所有数之和

  False，否则

# 子集求和

- 优化解结构分析

$M(i, j)$ ：$=True$，当且仅当在$S$的前$i$个数中，存在一个子集合，使其数据之和为$j$.

$M(n, P)$即为原始问题

$$M(i, j) = M(i-1, j-S[i]) \vee M(i-1, j)$$

$$M(i, 0) = True$$
$$M(0, j) = False \qquad for\ j>0$$

# 思考题

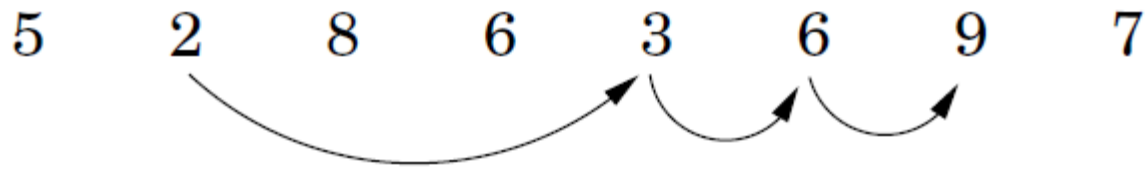
- 最长增长子序列问题

  输入：由$n$个数组成的一个序列$S$：$a_1,a_2,\ldots,a_n$

  输出：子序列$S'=b_1,b_2,\ldots,b_k$，满足：

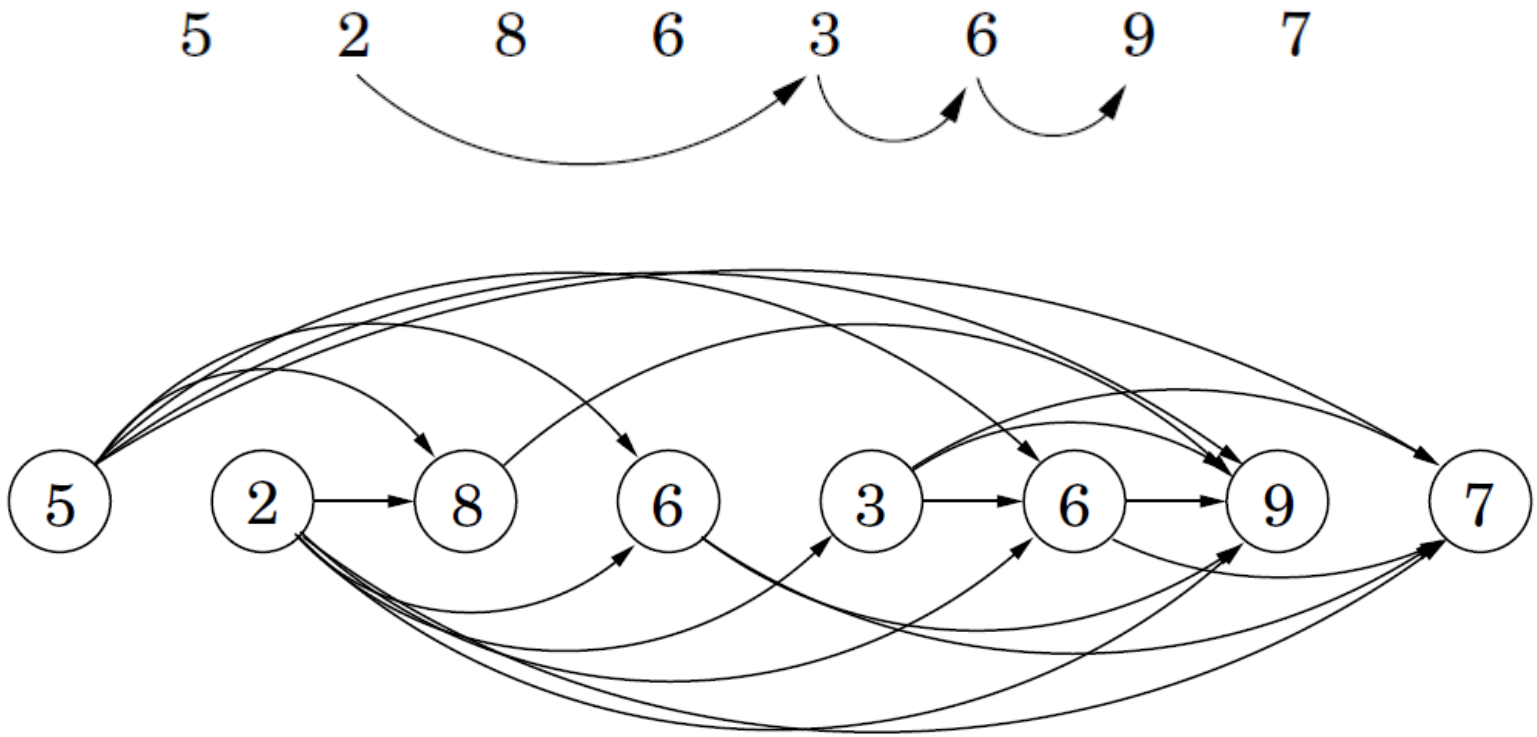
  (1) $b_{i1}\leq b_{i2}\leq\ldots\leq b_{ik}$，

  (2) $|S'|$最大



# 思考题

- 最长增长子序列问题



# 总结

- 原始问题可以划分成一系列子问题，子问题之间不是相互独立的
- 不同子问题的数目常常只有多项式量级
- 优化子结构

# 总结

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解