第6节 一阶逻辑基本概念

主要内容:

- 一阶逻辑命题符号化
  - 个体词、谓词、量词
  - 一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释
  - 一阶语言
  - 合式公式(谓词公式)
  - 合式公式的解释
  - 永真式、矛盾式、可满足式

6.1 一阶逻辑命题符号化

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：表示具体或特定的客体的个体词，一般用a, b, c表示

个体变项：表示抽象或泛指的客体的个体词，一般用x, y, z表示

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如: $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如: $N, Z, R, \ldots$

全总个体域——由宇宙间一切事物组成

注意：以后如没有指明个体域，均指全总个体域.

谓词

谓词——表示个体词性质或个体词相互之间关系的词

谓词常项: 表示具体性质或关系的谓词,

如: $F(a)$: a是人

谓词变项: 表示抽象或泛指性质或关系的谓词,

如: $F(x)$: x具有性质F

n元谓词—— 含n ($n\geq1$) 个个体变项的谓词

一元谓词(n=1)——表示个体的性质

多元谓词($n\geq2$)——表示个体之间的关系

如: $L(x,y)$: x与 y 有关系 L, $L(x,y)$: $x\geq y$, …

0元谓词——不含个体变项的谓词

量词

量词——表示数量的词

全称量词$\forall$: 表示所有的.

$\forall x$: 对个体域中所有的x

如：$\forall x F(x)$表示:

个体域中所有的x具有性质F

$\forall x \forall y G(x,y)$表示:

个体域中所有的x和y有关系G

量词

量词——表示数量的词

存在量词∃: 表示存在, 有一个.

$\exists x$: 个体域中有一个x

如: $\exists xF(x)$表示: 个体域中有一个x具有性质F

$\exists x\exists yG(x,y)$表示: 个体域中存在x和y有关系G

$\forall x\exists yG(x,y)$表示: 对个体域中每一个x都存在一个y使得x和y有关系G

$\exists x\forall yG(x,y)$表示: 个体域中存在一个x使得对每一个y, x和y有关系G

实例

例1 用0元谓词将命题符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

解：在命题逻辑中：

(1) p, 其中，p：墨西哥位于南美洲.（真命题）

(2) $p \to q$, 其中，p: $\sqrt{2}$是无理数，q: $\sqrt{3}$ 是有理数.（假命题）

(3) $p \to q$, 其中，p：2>3，q：3<4.（真命题）

实例

例1 用0元谓词将命题符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

(2) $F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，

其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

实例

注意:

(1) 不含个体变项的谓词称为0元谓词.

(2) 当谓词为谓词常项时， 0元谓词为命题.

(3) 任何命题均可以表示成0元谓词，因而可将命题看成特殊的谓词.

实例

例2 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 人都爱美. (2) 有人用左手写字.

个体域分别为:

(a) D为人类集合. (b) D为全总个体域.

解: (a) (1) $\forall x G(x)$，$G(x)$： x爱美

(2) $\exists x G(x)$，$G(x)$： x用左手写字

(b) $F(x)$： x为人，$G(x)$： x爱美

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

1. 引入特性谓词$F(x)$；
2. (1),(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式.

实例

例3 在分别取个体域为

(a) D_1=N (b) D_2=R (c) D_3为全总个体域

的条件下, 将下面命题符号化，并讨论真值.

存在数x，使得 $x+7=5$.

解： 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$ 假

(b) $\exists xH(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：x为实数

$\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）.

实例

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域.

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 正数都大于负数.

解:

(1) 令 $F(x)$：x为正数，

$G(y)$：y为负数,

$L(x,y)$：$x>y$，

则有

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

实例

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域.

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(2) 有的无理数大于有的有理数.

解:

(2) 令 $F(x)$：x是无理数，

$G(y)$：y是有理数，

$L(x,y)$：$x>y$，

则有

$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y))$$

实例

例5 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 没有不呼吸的人.

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖.

解: (1) $F(x)$: x是人, $G(x)$: x呼吸

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) $F(x)$: x是人, $G(x)$: x喜欢吃糖

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

实例

例6 设个体域为实数域, 将下面命题符号化.

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$.

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$.

解: $L(x,y)$: $x<y$

(1) $\forall x \exists y L(x,y)$

(2) $\exists x \forall y L(x,y)$

注意: $\forall$与$\exists$不能随意交换.

显然(1)是真命题, (2)是假命题.

前面的问题

凡是偶数都能被2整除。

8是偶数。

所以，8都能被2整除。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是偶数,

$G(x)$: x能被2整除。

则有

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(8) \rightarrow G(8)$$

6.2 一阶逻辑公式及解释

定义1 设L是一个非逻辑符集合, 由L生成的一阶语言L 的字母表包括下述符号:

非逻辑符号:

(1) 个体常项符号: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号:

(4) 个体变项符号: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号: $\forall, \exists$

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号: (,), ,

一阶语言L的项与原子公式

定义2 L的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是任意的n个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的.

如：$a, x, x+y, f(x), g(x,y)$等都是项.

定义3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是L的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是L的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是L的原子公式.

如：$F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式.

一阶语言L的公式

定义4 L的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

合式公式也称为谓词公式，简称公式.

如：$F(x)$, $F(x)\vee\neg G(x,y)$, $\forall x(F(x)\to G(x))$
$\exists x\forall y(F(x)\to G(y)\wedge L(x,y))$等都是合式公式.

封闭的公式

定义5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为**指导变元**，A 为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，A中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例如：考虑公式：$\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

x为指导变元，

$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，

x的两次出现均为约束出现，

y与 z 均为自由出现.

封闭的公式

又如: $\exists x(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$,

$\exists x$中的x是指导变元, 辖域为

$$(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z))).$$

$\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$.

x的3次出现都是约束出现,

y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现,

z的2次出现都是自由出现.

封闭的公式

定义6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如: $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 为闭式，

而 $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 不是闭式.

公式的解释

定义7 设L是L生成的一阶语言, L的解释I由4部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$, 有一个 $\bar{a}\in D_I$, 称 $\bar{a}$ 为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$, 有一个D_I上的n元函数 $\bar{f}: D_I^n \to D_I$, 称 $\bar{f}$ 为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$, 有一个D_I上的n元谓词常项$\bar{F}$, 称 $\bar{F}$ 为F在I中的解释.

设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释 $\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$, 称所得到的公式A'为A在I下的解释, 或A在I下被解释成A'.

实例

例7 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a} = 0$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y$, $\bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists xF(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\to F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\to x=y)$ 假

(3) $\forall xF(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不定, 不是命题

公式的类型

定理1 闭式在任何解释下都是命题.

注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题.

定义8 若公式A在任何解释下均为真, 则称A为永真式(逻辑有效式).

若A在任何解释下均为假, 则称A为矛盾式(永假式).

若至少有一个解释使A为真, 则称A为可满足式.

说明:

(1)永真式为可满足式，但反之不真.

(2)判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的，即不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式是可满足的(永真式, 矛盾式).

代换实例

定义9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i\,(1\le i\le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如：$F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$等都是$p\to q$的代换实例.

定理2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例8 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

(1) $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

重言式 $p\to(q\to p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\to q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>5, $G(x)$: x>4, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:x<5, $G(x)$:x<4, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

总 结

主要内容:

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言L

  项、原子公式、合式公式
- 公式的解释

  量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型

  永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

总 结

基本要求:

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型