概率论与数理统计

§8.2 正态总体的参数检验

一个正态总体

（1）关于μ 的检验　　拒绝域的推导

给定显著性水平α及其样本值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$已知，需要检验

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

构造统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

所以本检验的拒绝域为 $|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$　$\boxed{U\text{ 检验法}}$

检验步骤

（1）提出统计假设 $H_0: \mu = \mu_0$

(2) 选择统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, 从样本值计算出 U.

(3) 对于给定的显著性水平 α, 从附表中查出

在 H_0 成立的条件下满足等式

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$$ 的临界值

(4) 判断: 若 $|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$, 则拒绝

例1 某测距仪在500米范围内，测距精度$\sigma=10m$，测距仪一次测量的距离为X设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现对距离500m的目标测量9次，得到平均距离$\bar{X}=510m$，问该测距仪是否存在系统误差α=0.05

一个正态总体

(1) 关于μ 的检验 拒绝域的推导

给定显著性水平α及其样本值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$已知，需要检验

$$H_0 : \mu \le \mu_0$$

构造统计量 $$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

所以本检验的拒绝域为 $U \ge u_\alpha$

$\boxed{U\text{ 检验法}}$

U检验法(σ^2 已知)

原假设 H_0	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$u = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$\lvert u \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \leq \mu_0$		$u \geq u_{\alpha}$
$\mu \geq \mu_0$		$u \leq -u_{\alpha}$

t 检验法(σ^2 未知)

原假设 H_0	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$		$T \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$		$T \geq t_{\alpha}$

例 某厂生产小型马达, 说明书上写着: 这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8 安培.

现随机抽取16台马达试验, 求得平均消耗电流为0.92安培, 消耗电流的标准差为0.32安培.

假设马达所消耗的电流服从正态分布, 取显著性水平为$\alpha = 0.05$, 问根据这个样本, 能否否定厂方的断言?

解 根据题意待检假设可设为

$H_0: \mu \leq 0.8$

σ未知, 故选检验统计量:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{16}}$$

查表得 $t_{0.05}(15) = 1.753$, 故拒绝域为

$$T > 1.753$$

现将样本值带入 $t = \dfrac{0.92\text{-}0.8}{0.32} \times 4 = 1.5 < 1.753$

故接受原假设, 即不能否定厂方断言.

(2) 关于σ^2的检验(χ^2检验法)

原假设 H_0	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$

两个正态总体

设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X与Y相互独立,

样本: $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}), (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$;

样本值$(x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}), (y_1, y_2, \cdots, y_{n_2})$

显著性水平α

(1) 关于平均值$\mu_1-\mu_2$的检验

原假设 H_0	检验统计量的分布	拒绝域
$\mu_1=\mu_2$	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}S_w}$	$\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1\ge\mu_2$		$T\le -t_{\alpha}$
$\mu_1\le\mu_2$		$T\ge t_{\alpha}$

(2) 关于方差比 σ_1^2/σ_2^2 的检验

原假设 H_0	检验统计量	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

例题设某次考试学生的成绩服从正态分布，从中随机抽取36位考生的成绩，算的平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著水平0.05下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？并给出检验的过程。

6. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，且$X_1,X_2,\dots,X_n$为其简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，

S^2是样本方差，则对于假设$H_0:\mu\geq\mu_0$，应选取检验统计量为（　　）.

（A）$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$；　　（B）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$；

（C）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$；　　（D）$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.