



HITWH
SE

第七章

Tree Searching Strategies



HITWH
SE

参考资料

R.C.T.Lee, S.S.Tseng, R.C.Chang, and Y.T.Tsai,

*Introduction to
the Design and Analysis of Algorithms*

Chapter 5

Page 157~219



- 7.1 Motivation of Tree Searching
- 7.2 Optimal Tree Searching Strategies
- 7.3 Personnel Assignment Problem
- 7.4 Traveling Salesperson Problem
- 7.5 0/1 Knapsack Problem
- 7.6 The A* Algorithm



7.1 Motivation of Tree Searching

很多问题的解可以表示成为树.

解为树的节点或路径.

求解这些问题可以转化为树搜索问题



布尔表达式可满足性问题

- 问题的定义

- 输入: n 个布尔变量 x_1, x_2, \dots, x_n

- 关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的 k 个析取式

- 输出: 是否存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一种赋值
使得所有 k 个析取式皆为真

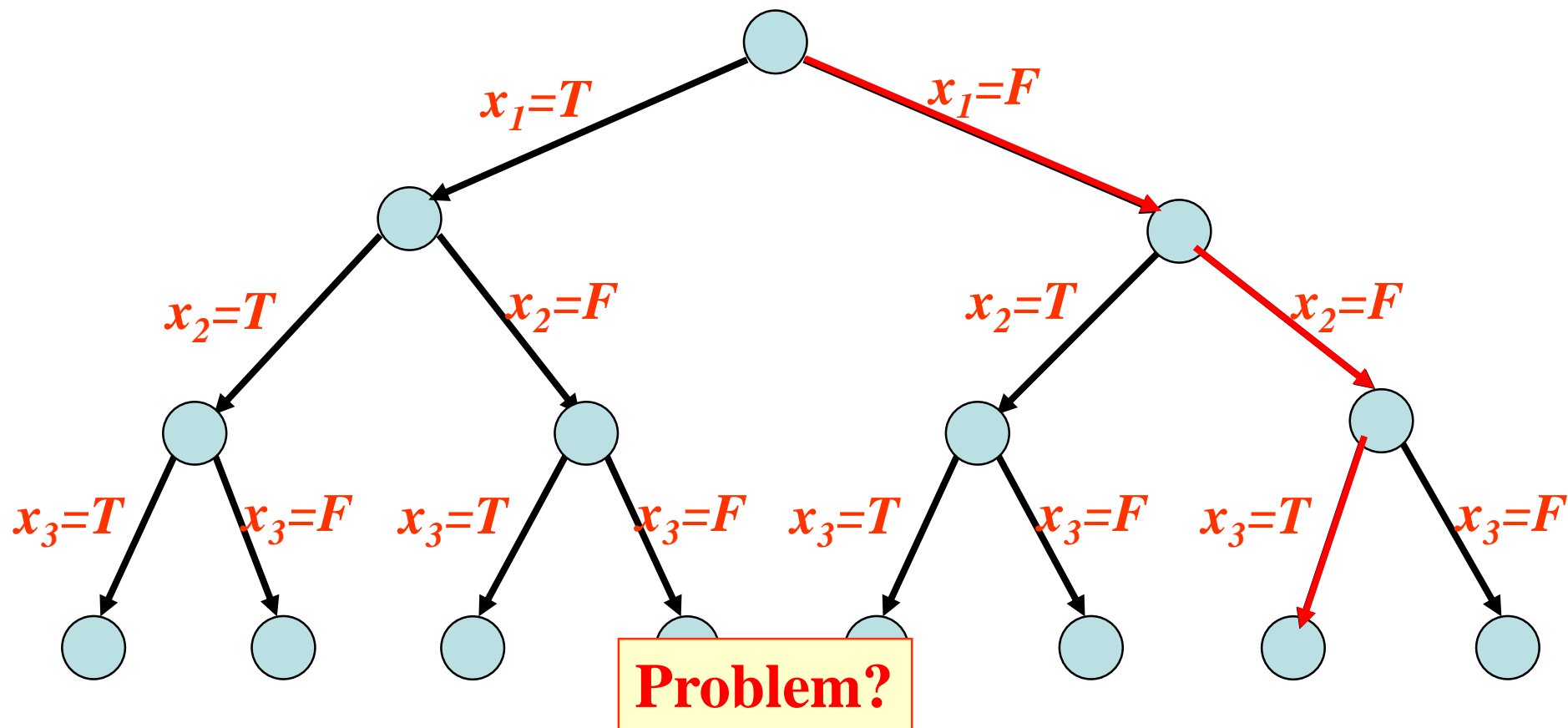
例如: $\neg x_1, x_2 \vee x_3, x_3, \neg x_2$

- 把问题的解表示为树

- 通过不断地为赋值集合分类来建立树

(以 x_1, x_2, x_3 为例)

对于: $\neg x_1, x_2 \vee x_3, x_3, \neg x_2$



问题的解是由根到叶的一条路径



- 问题的定义

- 输入：具有8个编号小方块的魔方

2	3	
5	1	4
6	8	7

- 输出：移动系列，经过这些移动，魔方到达如下状态

1	2	3
8		4
7	6	5

如何构造树？



- 转换为树搜索问题

2	3	
5	1	4
6	8	7

问题的解是
树上的一个节点

2		3
5	1	4
6	8	7

2	3	4
5	1	
6	8	7



7.2 Optimal Tree Searching Strategies

- Hill Climbing
- Best-First Search Strategy
- Branch-and-Bound Strategy



- 基本思想

- 在深度优先搜索过程中，我们经常遇到多个节点可以扩展的情况，首先扩展哪个？
- 爬山策略使用贪心方法确定搜索的方向，是优化的深度优先搜索策略
- 爬山策略使用启发式测度来排序节点扩展的顺序
 - 使用什么启发式测度与问题本身相关



1	2	3
8		4
7	6	5

- 用8-Puzzle问题来说明爬山策略的思想

- 启发式测度函数:

- $f(n)=W(n)$, $W(n)$ 是节点 n 中处于错误位置的方块数.

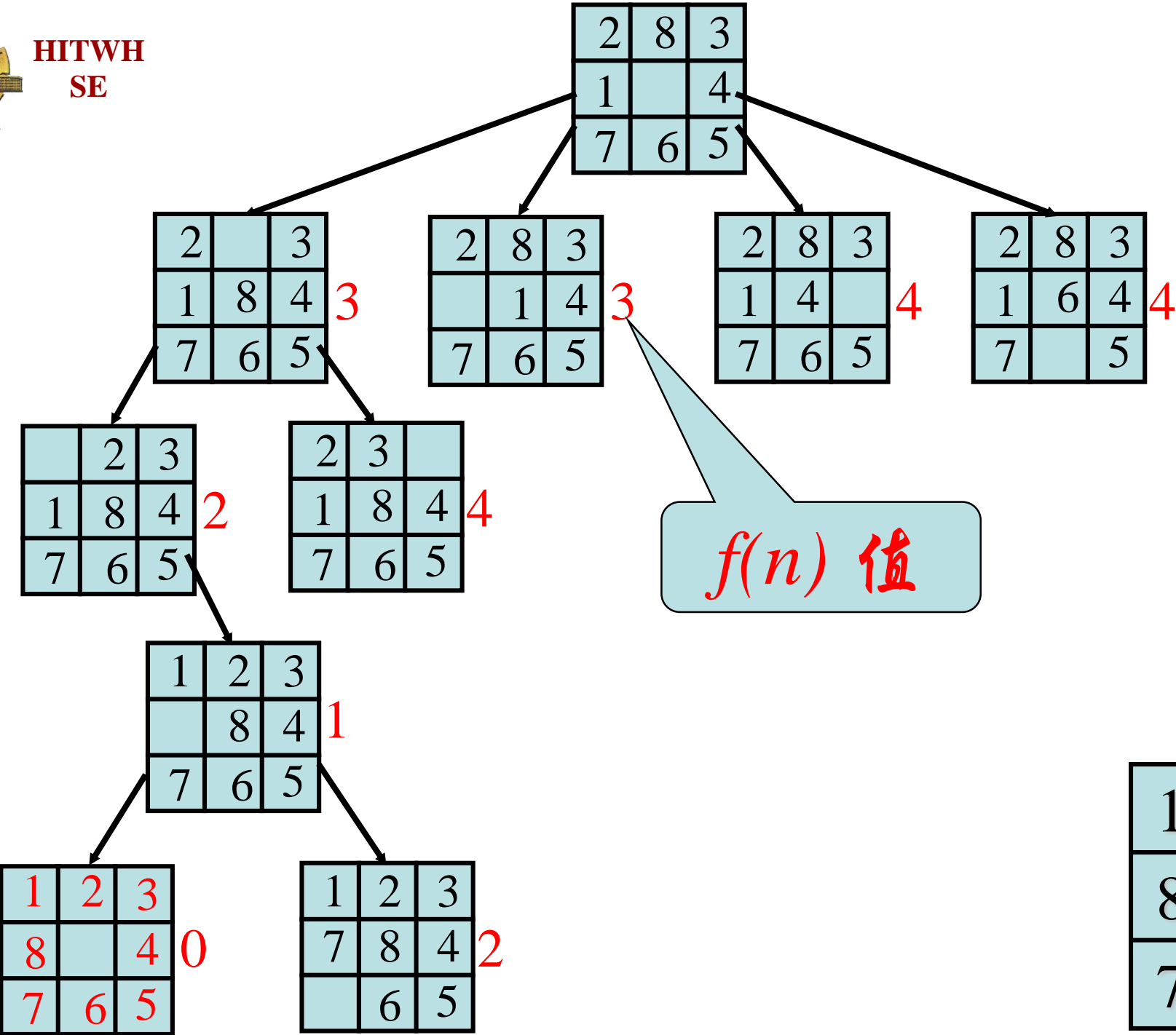
- 例如, 如果节点 n 如下:

2	8	3
1		4
7	6	5

- 则 $f(n)=3$, 因为方块1、2、8处于错误位置.



HITWH
SE



1	2	3
8		4
7	6	5



- Hill Climbing 算法

1. 构造由根组成的单元素栈 S ;
2. If $Top(S)$ 是目标节点 Then 停止;
3. Pop(S);
4. S 的子节点按照其启发测度由大到小的顺序压入 S ;
5. If S 空 Then 失败 Else goto 2.



Best-First Search Strategy

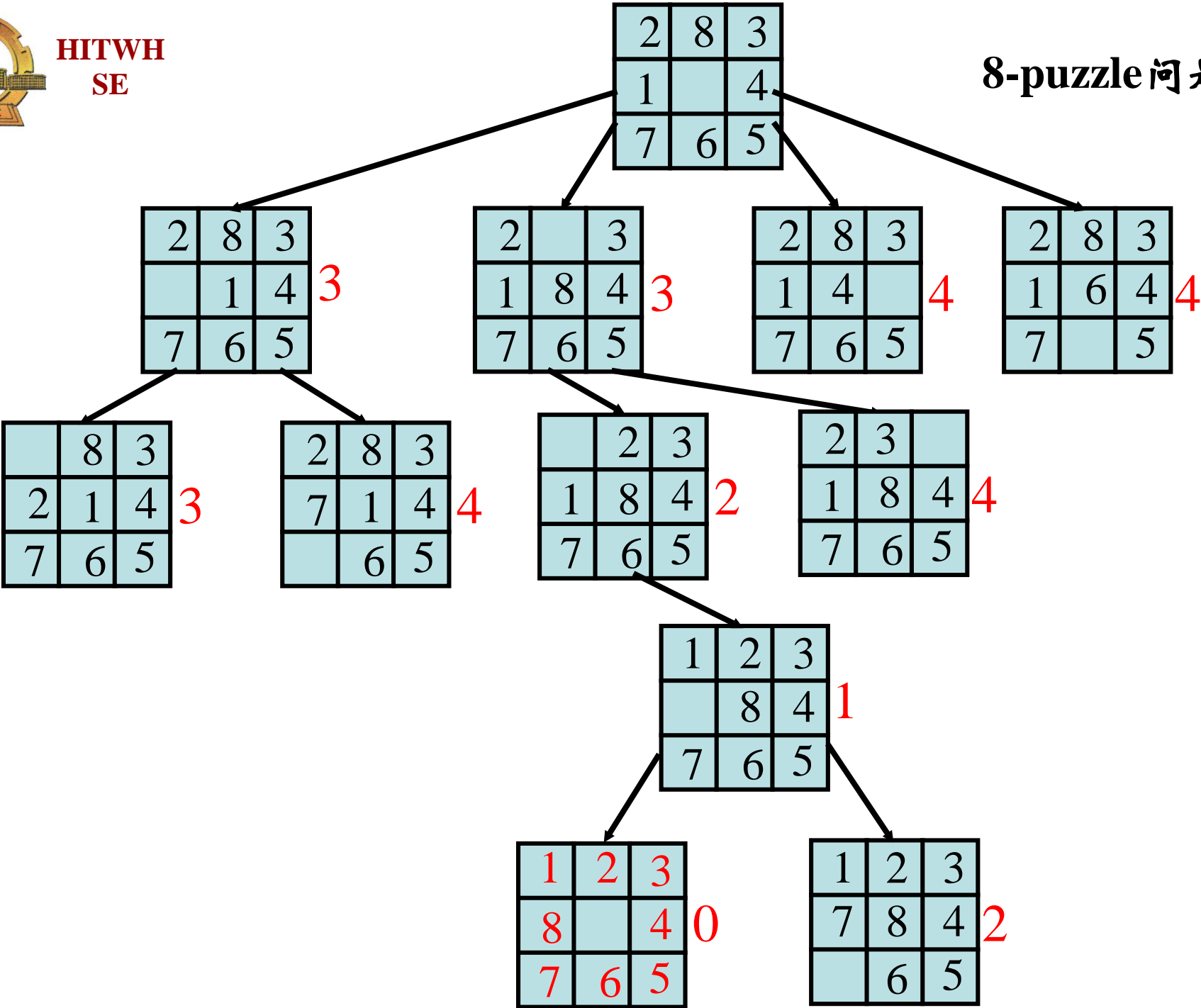
- **基本思想(也称最少代价优先, Least-cost-first)**
 - 结合深度优先和广度优先的优点于一个方法
 - 根据一个评价函数,在目前产生的所有节点中选择具有最小评价函数值的节点进行扩展.
 - 具有全局优化观念,而爬山策略仅具有局部优化观念.



• Best-First Search 算法

1. 使用评价函数构造一个堆 H , 首先构造由根组成的单元素堆;
2. If H 的根 r 是目标节点 Then 停止;
3. 从 H 中删除 r , 把 r 的子节点插入 H ;
4. If H 空 Then 失败 Else goto 2.

Heapsort方法见Intro. to Algo. 第II部分 第6章





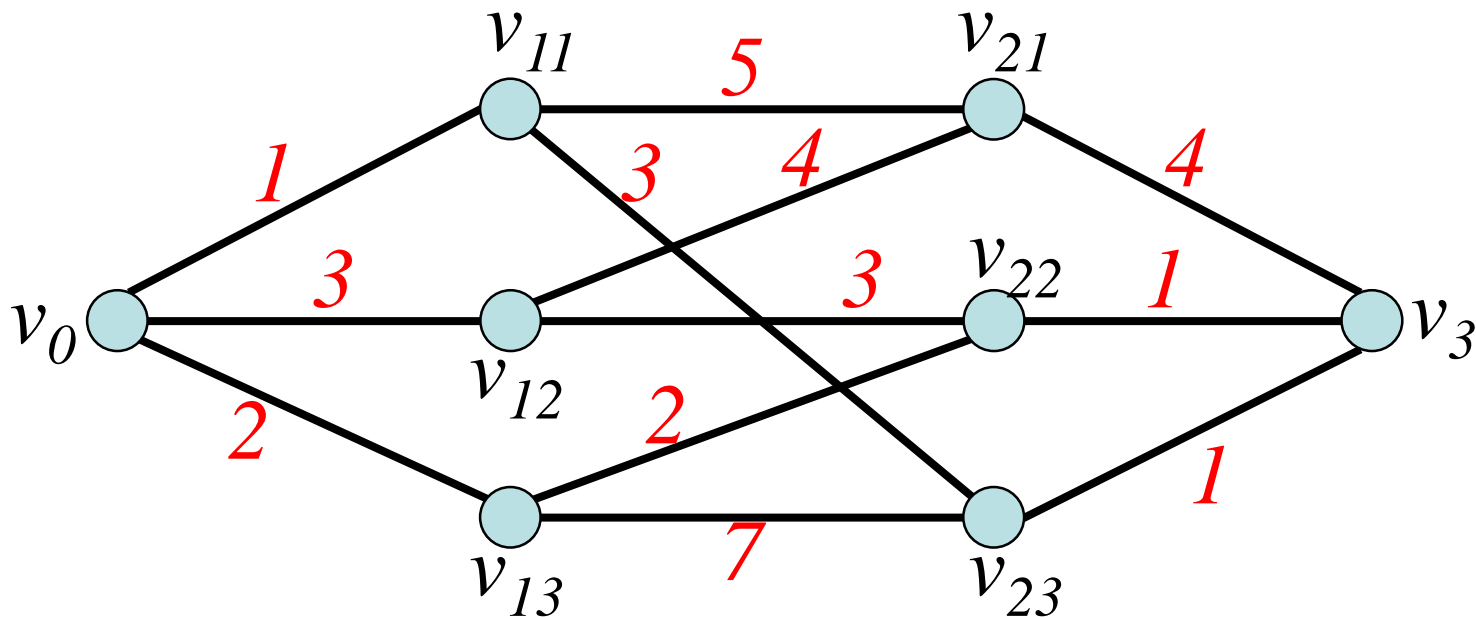
Branch-and-Bound Strategy

- 上述方法很难用于求解优化问题
- 分支界限策略可以有效地求解组合优化问题
- 分支界限基本思想
 - 迅速找到一个可行解
 - 将该可行解作为优化解的一个界限
 - 利用界限裁剪解空间, 提高求解的效率



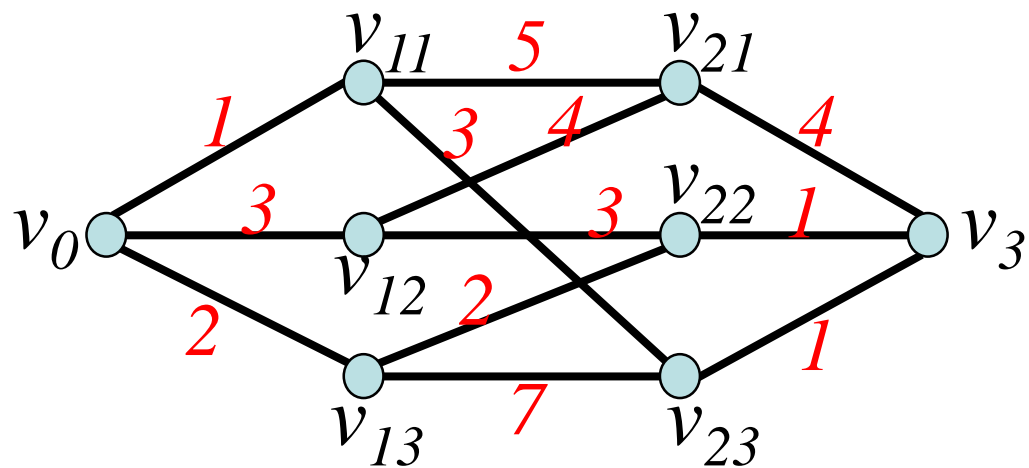
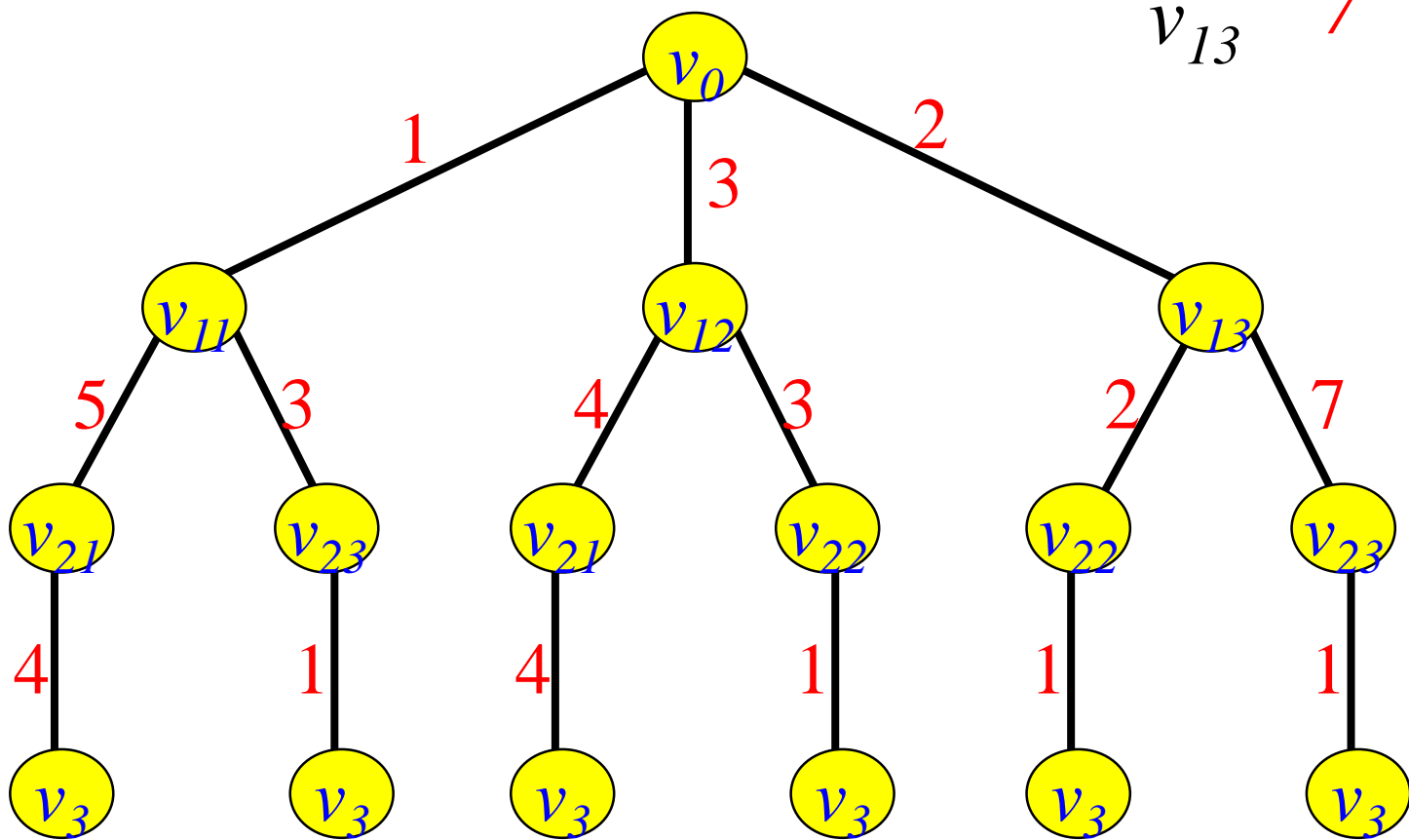
• 多阶段图搜索问题

— 输入：多阶段图



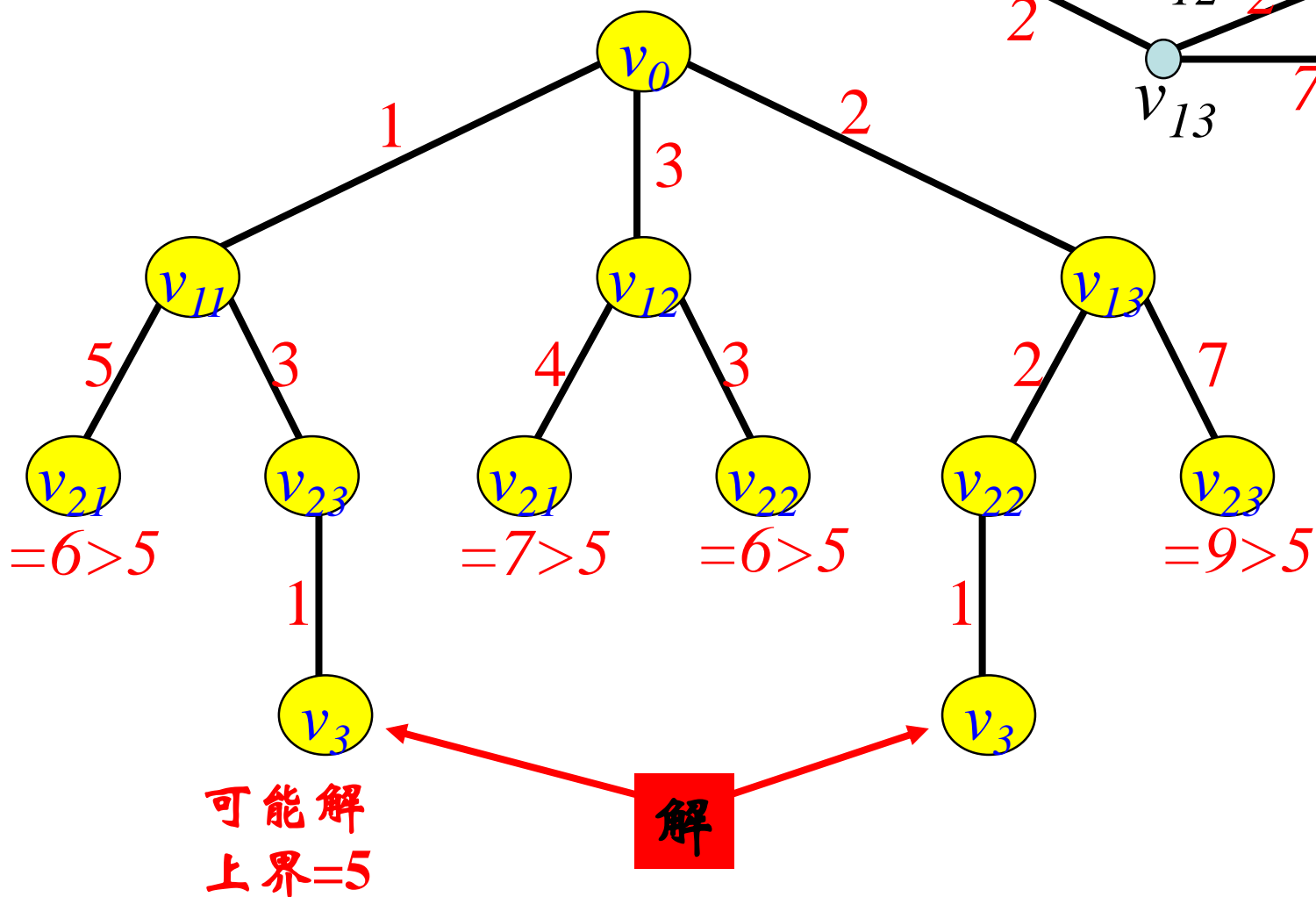
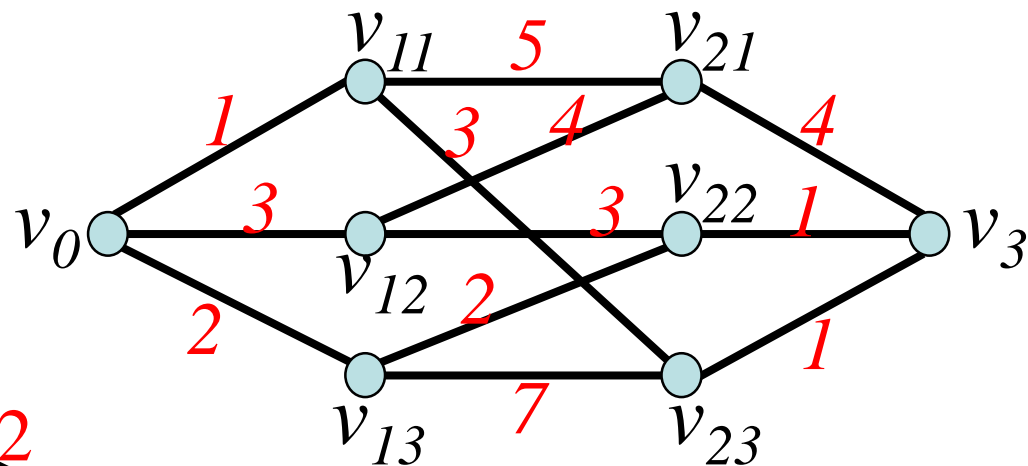
— 输出：从 v_0 到 v_3 的最短路径

- 问题的树表示



- 使用爬山策略进行分支界限搜索

评价函数：路径和





- 分支界限策略的原理
 - 产生分支的机制(使用前面的任意一种策略)
 - 爬山法
 - Best-First
 - 产生一个界限(可以通过发现可能解)
 - 进行分支界限搜索,即剪除不可能产生优化解的分支.



7.3 Personnel Assignment Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 求解问题的分支界限搜索算法



问题的定义

• 输入

- 人的有序集合 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, $P_1 < P_2 < \dots < P_n$
- 工作的集合 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, J 是偏序集合
- 矩阵 $[C_{ij}]$, C_{ij} 是 P_i 被分配工作 J_j 的代价

• 输出

- 矩阵 $[X_{ij}]$, $X_{ij} = 1$ 表示 P_i 被分配 J_j , $\sum_{i,j} C_{ij} X_{ij}$ 最小
 - 不同人分配不同工作
 - 每个人被分配一种工作,
 - $f: P \rightarrow J$ 是工作分配函数, 满足:
 - 如果 $f(P_i) \leq f(P_j)$, 则 $P_i \leq P_j$,
 - 如果 $i \neq j$, $f(P_i) \neq f(P_j)$.



问题的定义

例. 给定 $P=\{P_1, P_2, P_3\}$, $J=\{J_1, J_2, J_3\}$, $J_1 \leq J_3, J_2 \leq J_3$.
 $P_1 \rightarrow J_1$ 、 $P_2 \rightarrow J_2$ 、 $P_3 \rightarrow J_3$ 是否为可能的解?

$P_1 \rightarrow J_1$ 、 $P_2 \rightarrow J_3$ 、 $P_3 \rightarrow J_2$ 是否为可能的解?



- 问题转化为树搜索问题
 - $J=\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 的每个拓扑序列对应一个解
 - 用一个拓扑序列树把所有拓扑序列安排在一个树中，每个路径对应一个拓扑序列
 - 问题成为在树中搜索最小路径问题
- 构造拓扑序列树
- 使用分支界限法搜索拓扑序列树求解问题
- 改拓扑序列树构造算法为分支界限求解算法

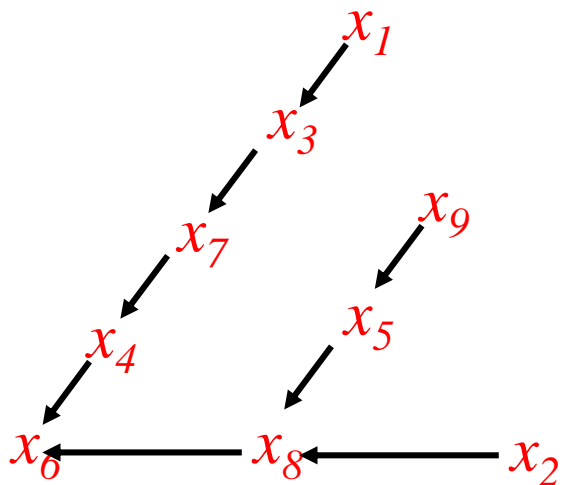


转换为树搜索问题

- 拓扑排序

- 输入: 偏序集合(S, \leq)
- 输出: S 的拓扑序列是 $\langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$,
满足: 如果 $s_i \leq s_j$, 则 s_i 排在 s_j 的前面.

- 例



$x \rightarrow y$ 表示 $x \leq y$

拓扑排序:

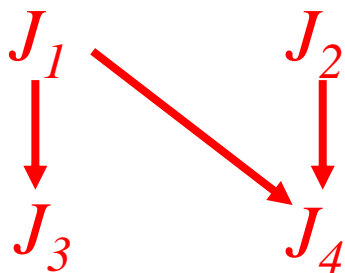
$x_1 \ x_3 \ x_7 \ x_4 \ x_9 \ x_5 \ x_2 \ x_8 \ x_6$

$x_2 \ x_9 \ x_5 \ x_1 \ x_3 \ x_7 \ x_4 \ x_8 \ x_6$

- 问题的解空间

命题1. $P_1 \rightarrow J_{k1}, P_2 \rightarrow J_{k2}, \dots, P_n \rightarrow J_{kn}$ 是一个可能解, 当且仅当 $J_{k1}, J_{k2}, \dots, J_{kn}$ 是一个拓扑排序的序列.

例. $P=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J$ 的偏序如下



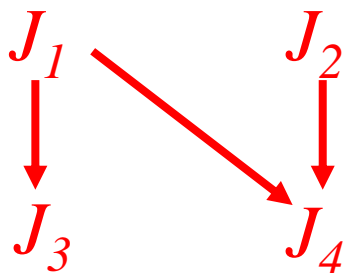
则 J 所有的拓扑排序序列有: $(J_1, J_2, J_3, J_4), (J_1, J_2, J_4, J_3), (J_1, J_3, J_2, J_4), (J_2, J_1, J_3, J_4), (J_2, J_1, J_4, J_3).$

(J_1, J_2, J_4, J_3) 对应于 $P_1 \rightarrow J_1, P_2 \rightarrow J_2, P_3 \rightarrow J_4, P_4 \rightarrow J_3$

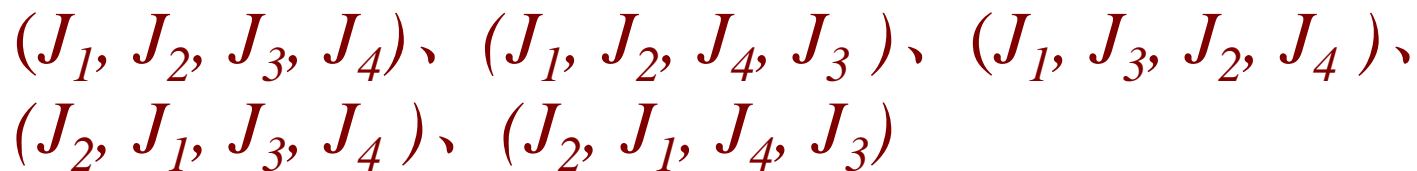
- 问题的解空间

命题1. $P_1 \rightarrow J_{k1}, P_2 \rightarrow J_{k2}, \dots, P_n \rightarrow J_{kn}$ 是一个可能解, 当且仅当 $J_{k1}, J_{k2}, \dots, J_{kn}$ 是一个拓扑排序的序列.

例. $P=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J$ 的偏序如下



解空间是工作集合所有拓扑排序的序列集合,
每个序列对应于一个可能的解



-
- ```

graph TD
 0((0)) --> 1L((1))
 0 --> 2R((2))
 1L --> 2L((2))
 1L --> 3L((3))
 2L --> 3LL((3))
 2L --> 4L((4))
 3L --> 2LL((2))
 3LL --> 4LLL((4))
 4L --> 3LLL((3))
 2R --> 1R((1))
 1R --> 4RR((4))
 1R --> 3RR((3))
 4RR --> 3RRR((3))
 3RR --> 4RRR((4))

```

$P_1$

P<sub>2</sub>

$P_3$

P<sub>4</sub>

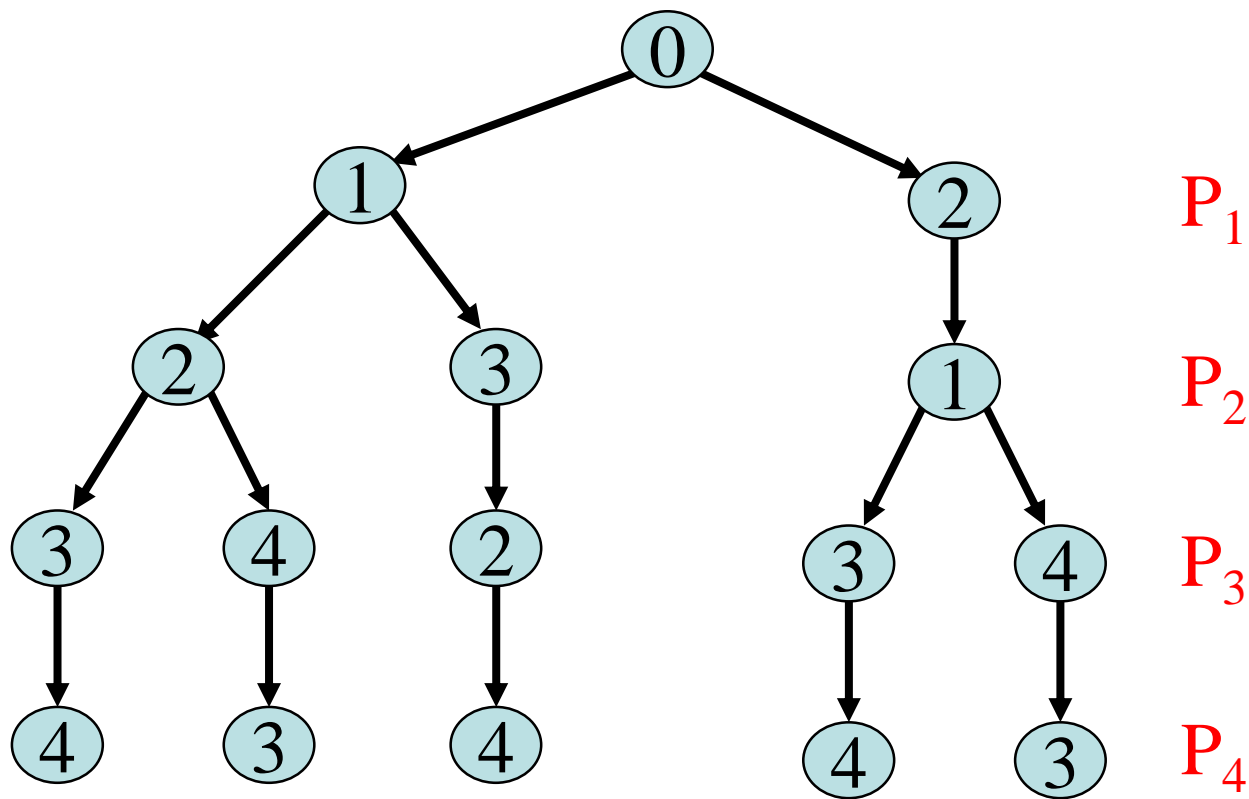
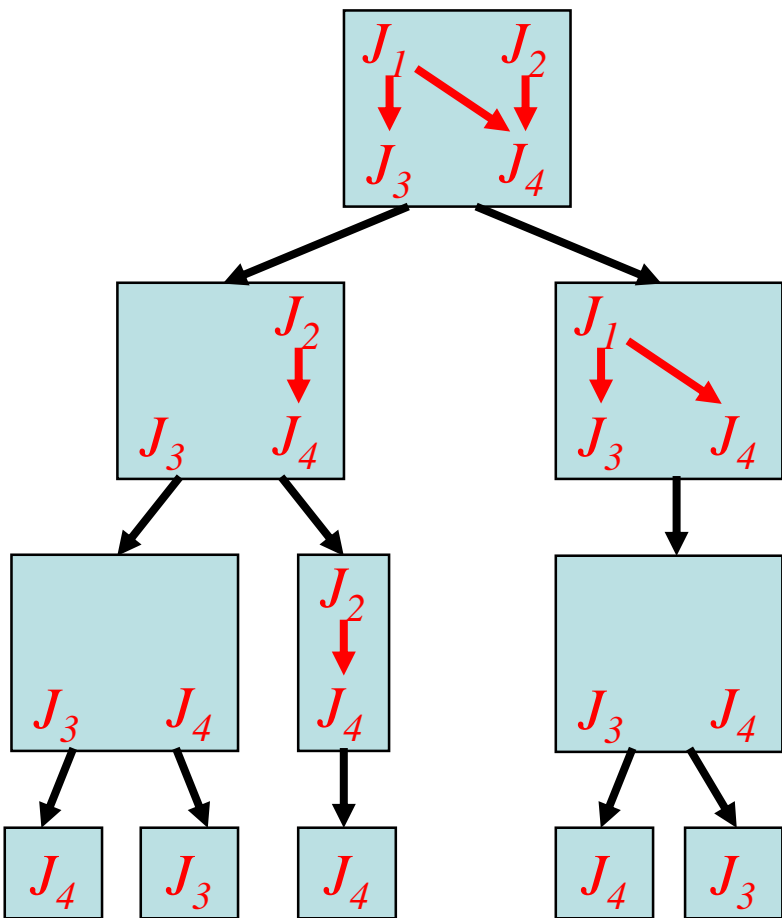
## 如何由偏序关系直接生成拓扑序列树呢



HITWH  
SE

$(J_1, J_2, J_3, J_4)$ 、 $(J_1, J_2, J_4, J_3)$ 、 $(J_1, J_3, J_2, J_4)$ 、  
 $(J_2, J_1, J_3, J_4)$ 、 $(J_2, J_1, J_4, J_3)$

## • 拓扑序列树的生成算法的基本思想





## ● 拓扑序列树的生成算法

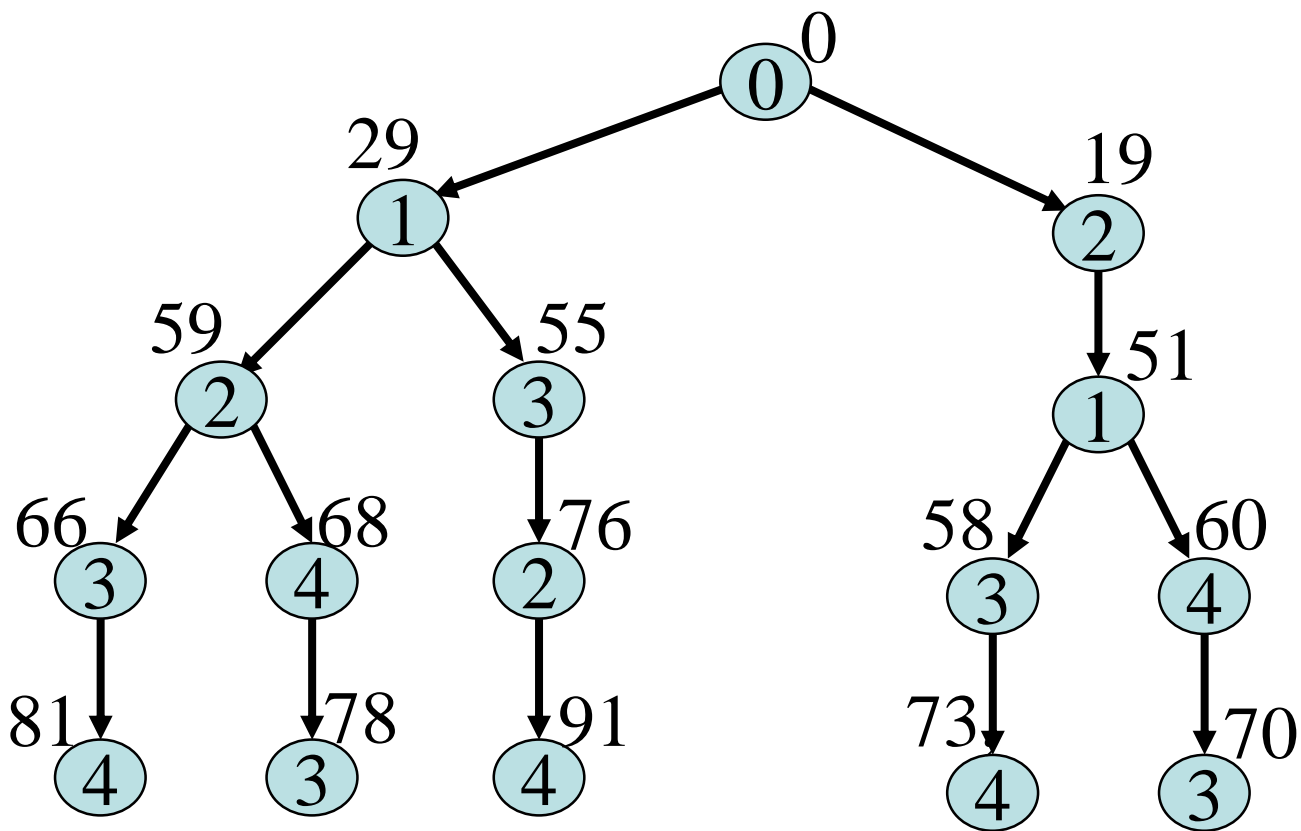
输入：偏序集合 $S$ , 树根 $root$ .

输出：由 $S$ 的所有拓扑排序序列构成的树.

1. 生成树根 $root$ ;
2. 选择偏序集中**没有前序元素的所有元素**, 作为 $root$ 的子结点;
3. For  $root$ 的每个子结点 $v$  Do
4.      $S = S - \{v\}$ ;
5.     把 $v$ 作为根, 递归地处理 $S$ .



## •解空间的加权树表示



|       | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_1$ | 29    | 19    | 17    | 12    |
| $P_2$ | 32    | 30    | 26    | 28    |
| $P_3$ | 3     | 21    | 7     | 9     |
| $P_4$ | 18    | 13    | 10    | 15    |

被分配  
的人员

1

2

3

4

裁剪效果不好，  
搜索代价高！！

如何改进？

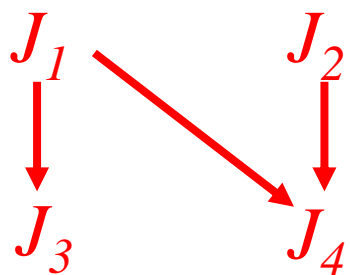




# 求解问题的分支界限搜索算法

## • 计算解的代价的下界

例. 
$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{array} \begin{bmatrix} 29 & 19 & 17 & 12 \\ 32 & 30 & 26 & 28 \\ 3 & 21 & 7 & 9 \\ 18 & 13 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -12 \\ -26 \\ -3 \\ -10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{array} \begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{array} \begin{bmatrix} 17 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$



得到一个具有最小代价  $12+26+3+10+3=54$  的任务分配方案：

$$P_1 \rightarrow J_4, P_2 \rightarrow J_3, P_3 \rightarrow J_1, P_4 \rightarrow J_2$$

它不满足偏序约束，故不是可行解

由此得到可行解的代价下界=54



# 求解问题的分支界限搜索算法

- 计算解的代价的下界

**命题2:** 把代价矩阵每行(列)各元素减去同一个数, 不影响优化解的求解.

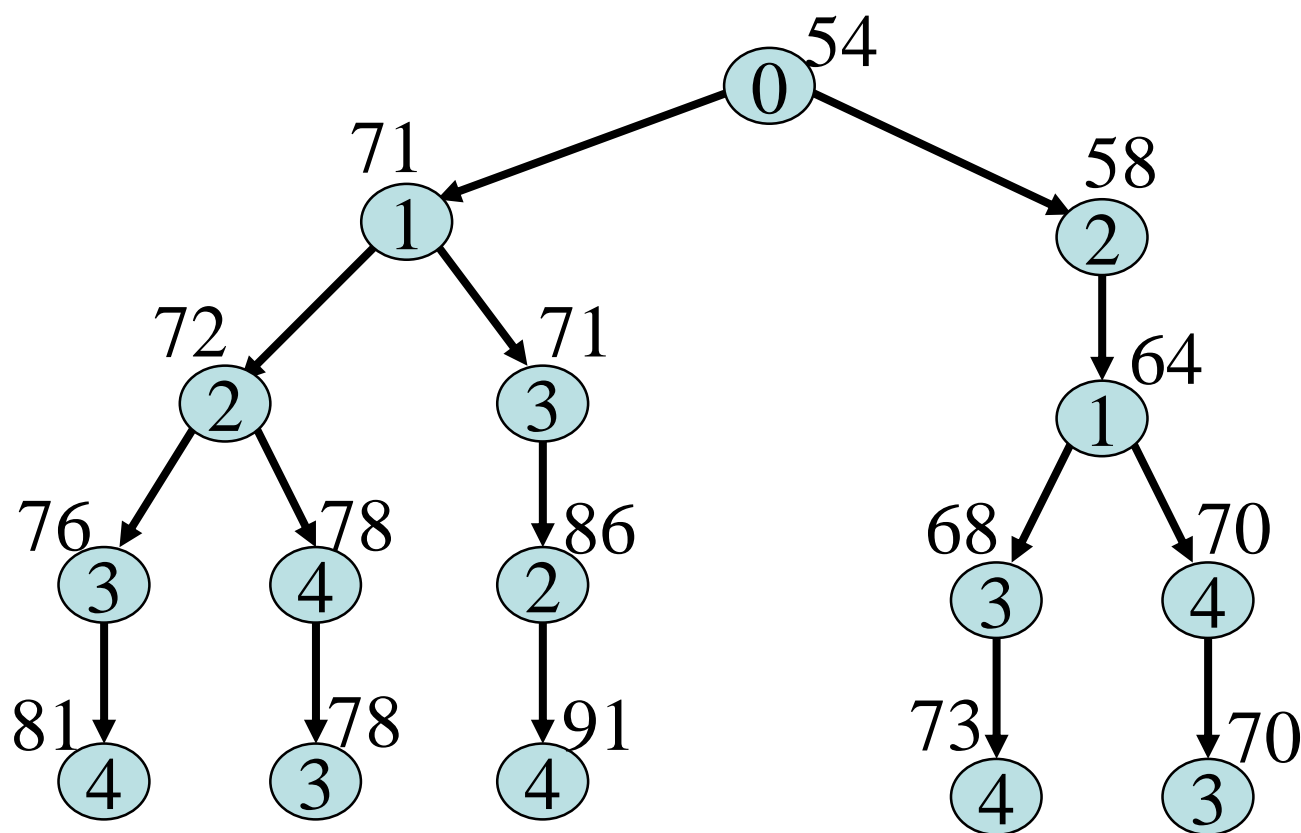
- 代价矩阵每行(列)减去该行(列)的最小数, 使得每行和每列至少有一个零, 其余各元素非零
- 如此简化代价矩阵对解无影响  
(因为每个解代价都减去了一个相同的数)
- 每行和列减去的数的总和是解的下界.



HITWH  
SE

## •改进后解空间的加权树表示

|       | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_1$ | 17    | 4     | 5     | 0     |
| $P_2$ | 6     | 1     | 0     | 2     |
| $P_3$ | 0     | 15    | 4     | 6     |
| $P_4$ | 8     | 0     | 0     | 5     |



被分配  
的人员

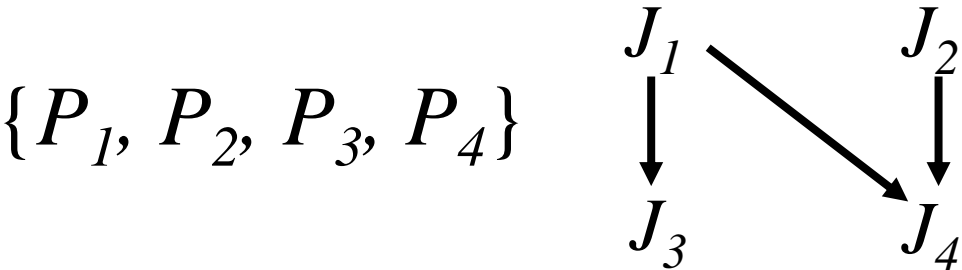
1

2

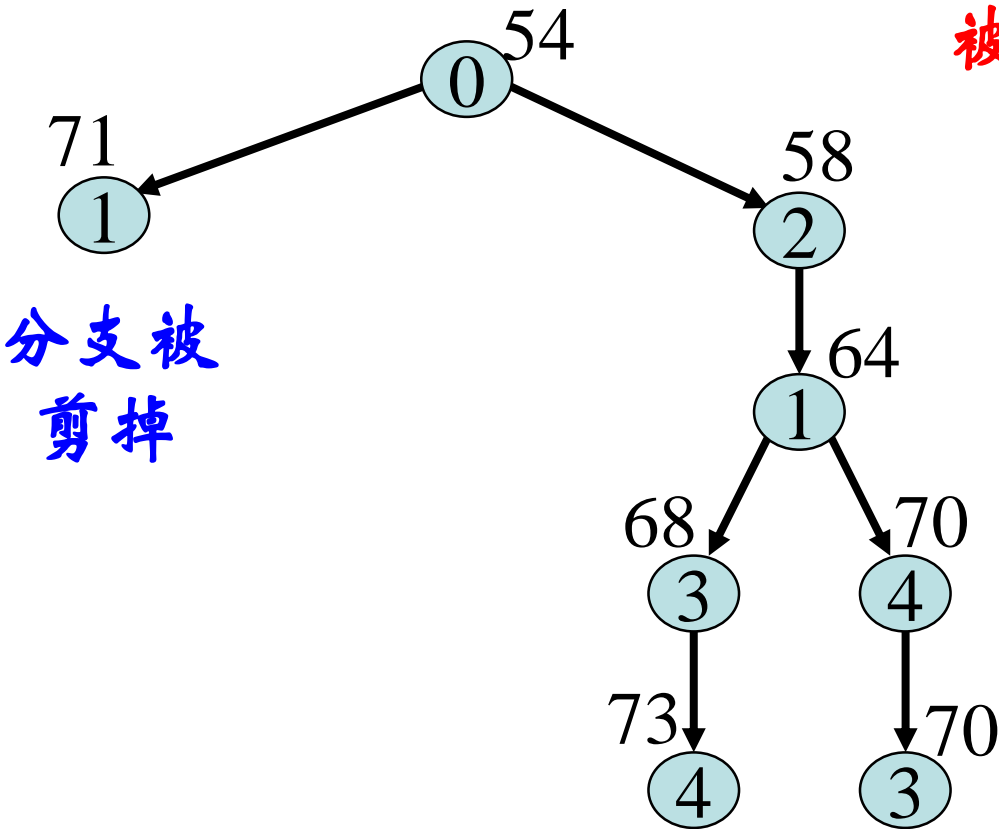
3

4

算法的思想(用爬山法)



|       | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_1$ | 17    | 4     | 5     | 0     |
| $P_2$ | 6     | 1     | 0     | 2     |
| $P_3$ | 0     | 15    | 4     | 6     |
| $P_4$ | 8     | 0     | 0     | 5     |



被分配到的人

1

2

3

4



- 分支界限搜索(使用爬山法)算法

1. 建立根结点,其权值为解代价下界;
2. 使用爬山法,类似于拓扑排序序列树生成算法求解问题,每产生一个结点,其权值为加工后的代价矩阵对应元素加其父结点权值;
3. 一旦发现一个可能解,将其代价作为界限,循环地进行分支界限搜索:剪掉不能导致优化解的子解,使用爬山法继续扩展新增节点,直至发现优化解.

修改拓扑排序算法, 可以写出严格的分支界限搜索算法



## 7.4 Traveling Salesperson Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法



**输入：**无向连通图 $G=(V, E)$ ,

- 每个结点都没有到自身的边,
- 每对结点间都有一条非负加权边(由代价矩阵表示)

**输出：**一条由任意一个结点开始,

经过每个结点一次,

最后返回开始结点的路径,

该路径的代价(即权值之和)最小.



- 所有解集合作为树根，由代价矩阵计算所有解的代价的下界；
- 用爬山法**递归地**划分解空间，得到二叉树
- 划分过程：
  - 选择图上的边 $(i, j)$ ，满足
    - 所有包含 $(i, j)$ 的解集合作为左子树
    - 所有不包含 $(i, j)$ 的解集合作为右子树
    - 使左子树代价下界不变，
    - 使右子树代价下界增加最大
  - 计算出左右子树的代价下界





- 在上述二叉树建立算法中增加如下策略:
  - 发现优化解的上界 $\alpha$ ;
  - 如果一个子节点的代价下界大于 $\alpha$ , 则终止该节点的扩展.
- 下边我们用一个例子来说明算法

- 设代价矩阵如下

|         | $j = 1$  | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        |      |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------|
| $i = 1$ | $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 6        | 50       | - 3  |
| 2       | 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 12       | 26       | - 4  |
| 3       | 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 12       | 5        | - 16 |
| 4       | 32       | 83       | 66       | $\infty$ | 49       | 0        | 80       | - 7  |
| 5       | 3        | 21       | 56       | 7        | $\infty$ | 0        | 28       | - 25 |
| 6       | 0        | 85       | 8        | 42       | 89       | $\infty$ | 0        | - 3  |
| 7       | 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | 13       | $\infty$ | - 26 |
|         |          |          |          | -7       | -1       |          |          | -4   |

- 构造根节点

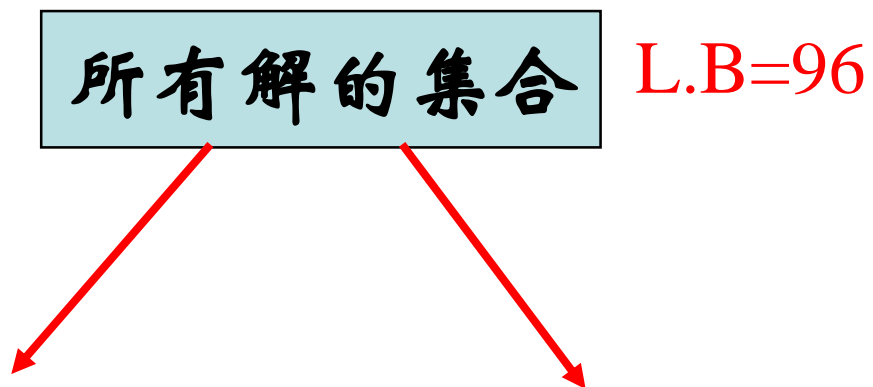
- 根结点为所有解的集合
- 计算根结点的代价下界

$$= 3 + 4 + 16 + 7 + 25 + 3 + 26 + 7 + 1 + 4 = 96$$

为什么？



➤ 得到如下根结点及其代价下界



划分边  $(i, j)$  满足:

•  $Cost(i, j) = 0$

• 右子树代价下界增加最大

• 构造根结点的两个子结点

➤ 选择使右子树代价下界

增加最大的划分边  $(4, 6)$

➤ 建立根结点的子结点:

✓ 左子结点为包括边  $(4, 6)$  的所有解集合

✓ 右子结点为不包括边  $(4, 6)$  的所有解集合

|          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 6        | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 12       | 26       |
| 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 12       | 5        |
| 32       | 83       | 66       | $\infty$ | 49       | 0        | 80       |
| 3        | 21       | 56       | 7        | $\infty$ | 0        | 28       |
| 0        | 85       | 8        | 42       | 89       | $\infty$ | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | 13       | $\infty$ |

$$Cost-R(1,2)=6+0=6$$

$$Cost-R(2,1)=12+0=12$$

$$Cost-R(3,5)=1+17=18$$

$$Cost-R(4,6)=32+0=32$$

$$Cost-R(5,6)=3+0=3$$

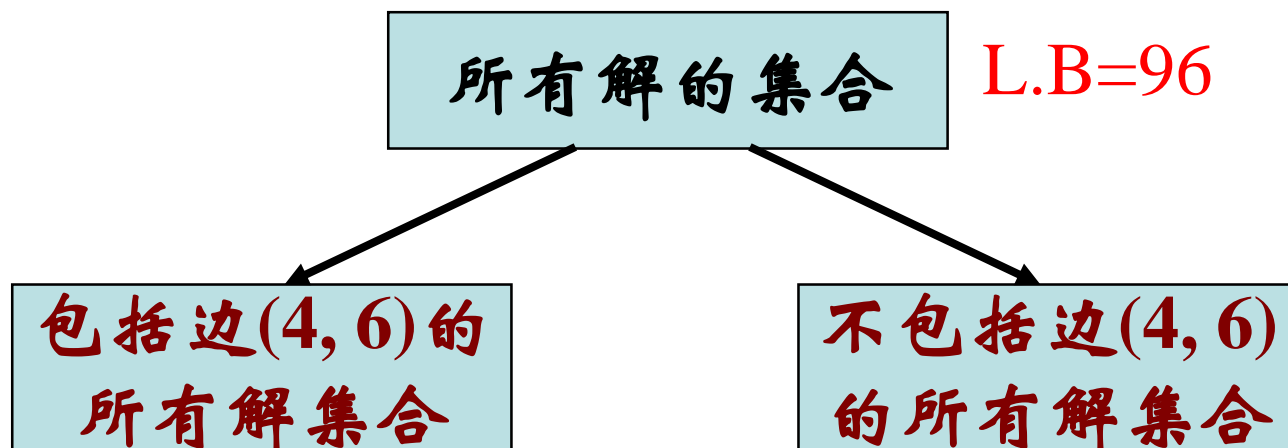
$$Cost-R(6,1)=0+0=0$$

$$Cost-R(6,7)=0+5=5$$

$$Cost-R(7,2)=0+0=0$$

$$Cost-R(7,3)=0+8=8$$

$$Cost-R(7,4)=0+7=7$$





|          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 6        | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 12       | 26       |
| 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 12       | 5        |
| 32       | 83       | 66       | $\infty$ | 49       | 0        | 80       |
| 3        | 21       | 56       | 7        | $\infty$ | 0        | 28       |
| 0        | 85       | 8        | 42       | 89       | $\infty$ | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | 13       | $\infty$ |

## ► 计算左右子结点的代价下界

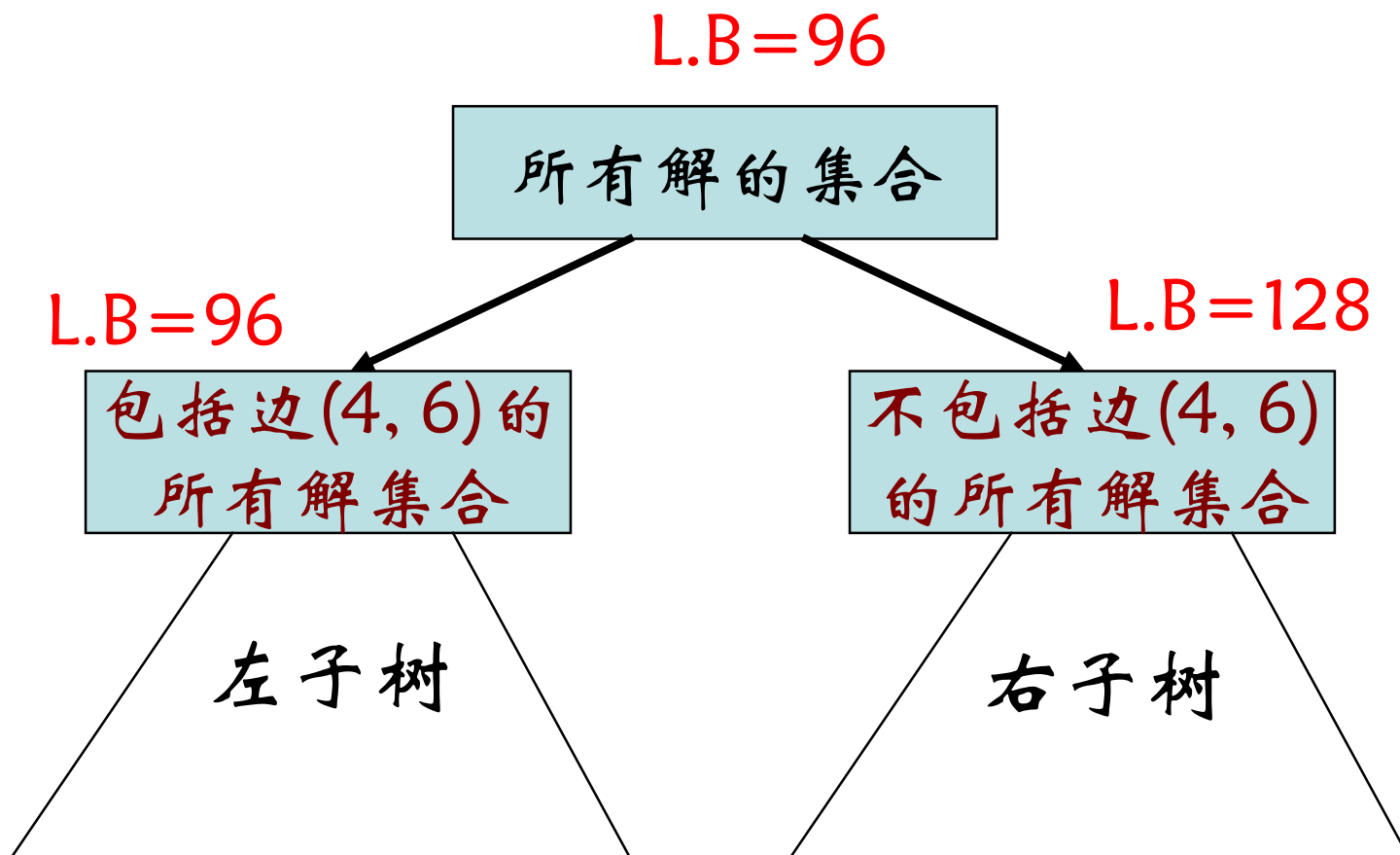
✓ (4, 6)的代价为0, 所以左结点代价下界仍为**96**.

✓ 我们来计算右结点的代价下界:

- 如果一个解不包含(4, 6), 它必包含一条从4出发的边和 进入结点6的边.
- 由变换后的代价矩阵可知, 具有最小代价由4出发的边为(4, 1), 代价为32.
- 由变换后的代价矩阵可知, 具有最小代价进入6的边为(5, 6), 代价为0.
- 于是, 右结点代价下界为: **96+32+0=128**.



## ➤ 目前的树为



## • 递归地构造左右子树根的代价矩阵

### ➤ 构造左子树根对应的代价矩阵

- ✓ 左子结点为包括边(4, 6)的所有解集合, 所以矩阵的第4行和第6列应该被删除
- ✓ 由于边(4, 6)被使用, 边(6, 4)不能再使用, 所以代价矩阵的元素  $C[6, 4]$  应该设置为  $\infty$ .

| $j =$   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 7        |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $i = 1$ | $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 50       |
| 2       | 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 26       |
| 3       | 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 5        |
| 4       |          |          |          |          |          |          |
| 5       | 3        | 21       | 56       | 7        | $\infty$ | 28       |
| 6       | 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 89       | 0        |
| 7       | 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | $\infty$ |

➤ 修改左子树根的代价下界

- ✓ 矩阵的第5行不包含0
- ✓ 第5行元素减3
- ✓ 左子树根代价下界为:  $96+3=99$

| $j =$   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 7        |     |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $i = 1$ | $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 50       |     |
| 2       | 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 26       |     |
| 3       | 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 5        |     |
| 4       |          |          |          |          |          |          |     |
| 5       | 0        | 18       | 53       | 4        | $\infty$ | 25       | - 3 |
| 6       | 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 89       | 0        |     |
| 7       | 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | $\infty$ |     |





## ➤ 构造右子树根对应的代价矩阵

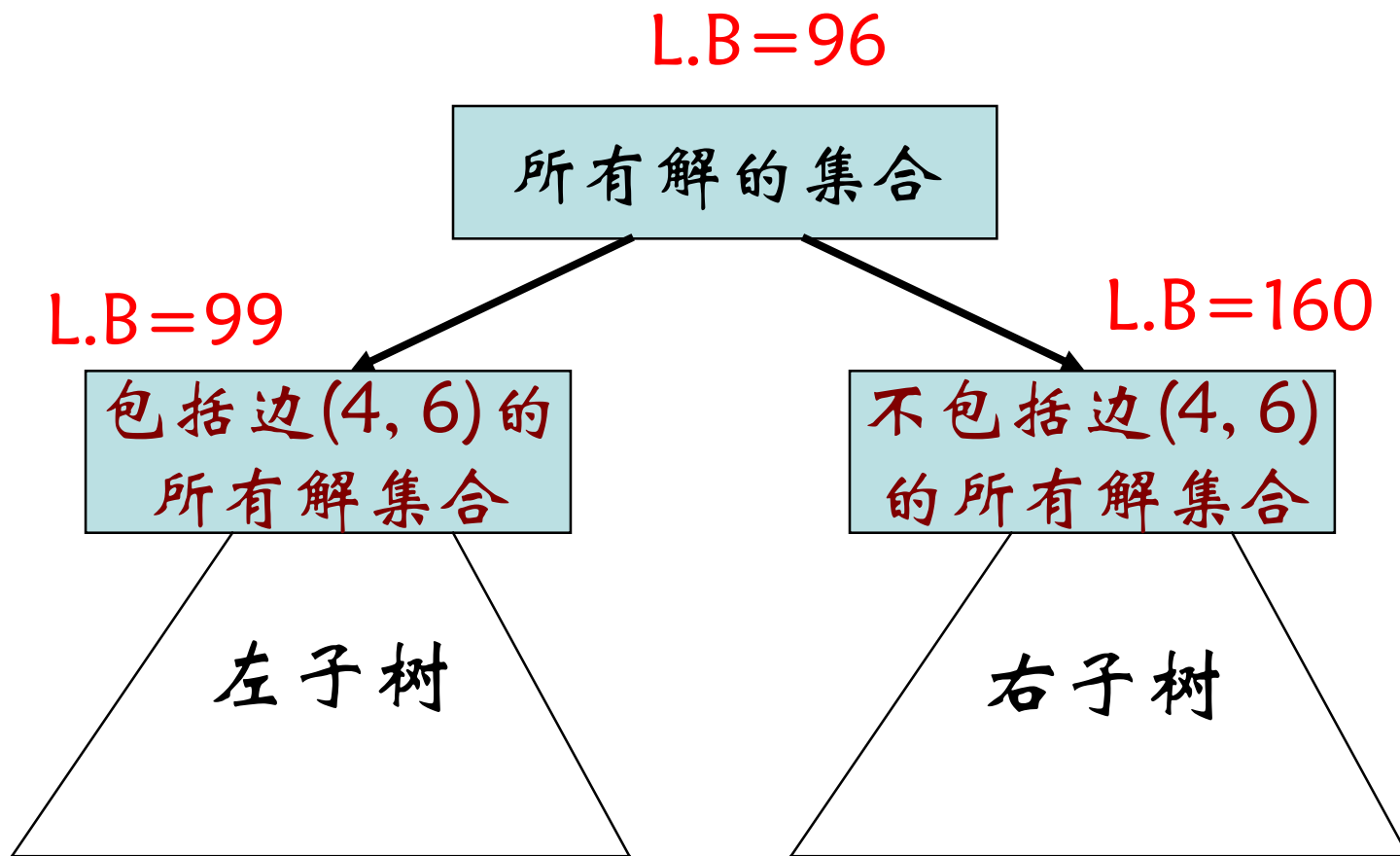
- ✓ 右子结点为不包括边(4, 6)的所有解集合, 只需要把  $C[4, 6]$  设置为  $\infty$
- ✓ 结果矩阵如下 右子树根代价下界为:  $128+32=160$

| $j =$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        |     |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $i=1$ | $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 6        | 50       |     |
| 2     | 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 12       | 26       |     |
| 3     | 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 12       | 5        |     |
| 4     | 0        | 51       | 34       | $\infty$ | 17       | $\infty$ | 48       | -32 |
| 5     | 3        | 21       | 56       | 7        | $\infty$ | 0        | 28       |     |
| 6     | 0        | 85       | 8        | 42       | 89       | $\infty$ | 0        |     |
| 7     | 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | 13       | $\infty$ |     |



HITWH  
SE

## ➤ 目前的树为





HITWH  
SE

左子树根的代价矩阵

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 26       |
| 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 5        |
| 0        | 18       | 53       | 4        | $\infty$ | 25       |
| 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 89       | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | $\infty$ |

选哪条边?

➤ 使用爬山策略扩展左子树根(因为其代价下界小)

- ✓ 选择 (3, 5) 作为划分边, 因其右子结点代价的下界增加最大
- ✓ 左子结点为包括边 (3, 5) 的所有解集合
- ✓ 右子结点为不包括边 (3, 5) 的所有解集合
- ✓ 计算左、右子结点的代价下界: 99 和 117 (99+1+17)

➤ 目前树扩展为:



L.B=96

所有解的集合

L.B=99

包括边(4, 6)的  
所有解集合

L.B=160

不包括边(4, 6)  
的所有解集合

L.B=99

包括边(3, 5)的  
所有解集合

L.B=117

不包括边(3, 5)的  
所有解集合

右子树

左子树

右子树



HITWH  
SE

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 30       | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 17       | 26       |
| 29       | 1        | $\infty$ | 19       | 0        | 5        |
|          |          |          |          |          |          |
| 0        | 18       | 53       | 4        | $\infty$ | 25       |
| 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 89       | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | 58       | $\infty$ |

左子结点代价矩阵

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 26       |
|          |          |          |          |          |
|          |          |          |          |          |
| 0        | 18       | $\infty$ | 4        | 25       |
| 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | $\infty$ |

右子结点代价矩阵

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\infty$ | 0        | 83       | 9        | 13       | 50       |
| 0        | $\infty$ | 66       | 37       | 0        | 26       |
| 28       | 0        | $\infty$ | 18       | $\infty$ | 4        |
|          |          |          |          |          |          |
| 0        | 18       | 53       | 4        | $\infty$ | 25       |
| 0        | 85       | 8        | $\infty$ | 72       | 0        |
| 18       | 0        | 0        | 0        | 41       | $\infty$ |

$L.B=117+1+17=135$



HITWH  
SE

L.B=96 所有解集合

L.B=99 包括边(4, 6)

不包括边(4, 6) L.B=160

L.B=99 包括边(3, 5)

不包括边(3, 5) L.B=135

L.B=112 包括边(2, 1)

不包括边(2, 1) L.B=125

L.B=126 包括边(1, 4)

不包括边(1, 4) L.B=153

优化解代  
价的上界

停止  
扩展

解:  
1-4-6-7-3-5-2-1  
代价: 126

L.B=126 包括边(6, 7)

不包括边(6, 7) L.B=134

L.B=126 包括边(5, 2)

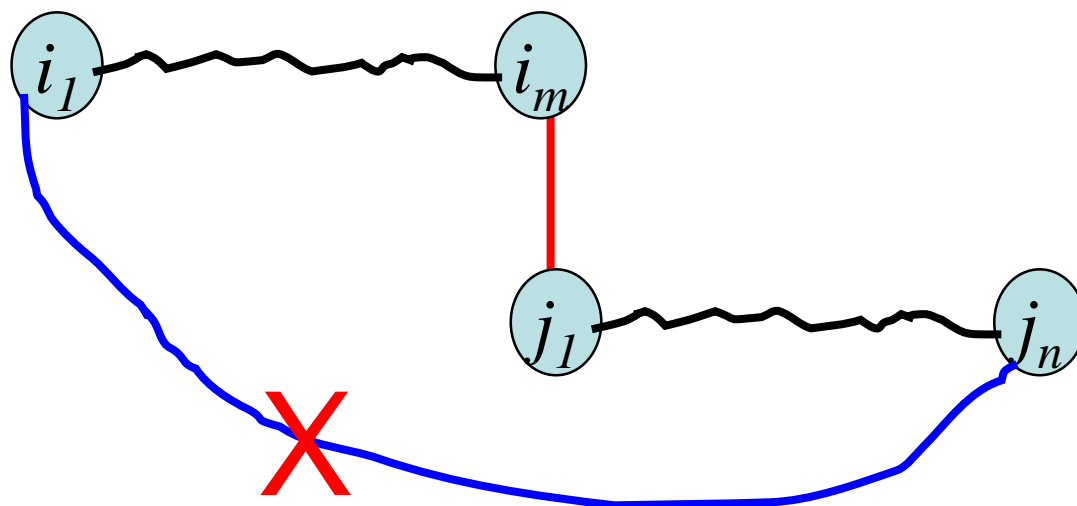
不包括边(5, 2) L.B=XXX

L.B=126 包括边(7, 3)

不包括边(7, 3) 不包含解

## 注意

如果 $i_1-i_2-\dots-i_m$ 和 $j_1-j_2-\dots-j_n$ 已被包含在一个正在构造的路径中,  $(i_m, j_1)$ 被加入, 则必须避免 $j_n$ 到 $i_1$ 的路径被加入. 否则出现环.





- 算法概要

1. 根节点为所有解集合;
2. 使用代价矩阵, 计算根节点表示的解集合的代价下界;
3. 使用爬山策略扩展当前的树节点 $\alpha$ 直至找到一个解:
  - 选择满足下列条件的边 $(x,y)$ :
    - 使右子树代价下界增加最大,
    - 使左子树代价下界不变.
  - 构造 $\alpha$ 的左右子树:
    - 左子树为包括边 $(x,y)$ 的所有解集合;
    - 右子树为不包括边 $(x,y)$ 的所有解集合;
    - 计算左右子树解代价下界;
    - 构造左右子树的代价矩阵, 修改其解代价下界;
4. 用找到解的代价进行剪枝爬山搜索, 直到找到最优解.





## 7.5 0/1 Knapsack

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法



给定 $n$ 种物品和一个背包，物品 $i$ 的重量是 $w_i$ ，价值 $v_i$ ，背包承重为 $C$ ，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

输入：  $C > 0, w_i > 0, v_i > 0, 1 \leq i \leq n$

输出：  $(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}$ , 满足：

$$(1) \sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i \leq C,$$

$$(2) \sum_{1 \leq i \leq n} v_i x_i \text{ 最大.}$$



- 按照“价值重量比”降序排列 $n$ 个物品
- 空包为根;
- 用爬山法或Best-First递归地划分解空间, 得到二叉树
  - 树中第 $i$ 层的每个节点都代表了 $n$ 个物品中所有符合以下特征的子集:
    - 每个子集对应于序列中前 $i$ 个物品的一个特定选择
    - 这个特定选择是根据从根到该节点的一条路径确定的
      - 向左的分支表示包含下一个物品
      - 向右的分支表示不包含下一个物品
  - 每个节点中记录如下信息
    - 当前装入背包物品的总重量 $w$ 及总价值 $v$
    - 此时背包能够容纳的物品价值上界 $UB$



- 计算节点代价的上界 $UB$ :
  - $UB = v + (C - w) \times (v_{i+1} / w_{i+1})$ , 或者
  - $UB = v + UB'$ 
    - $UB'$ 是部分背包算法在子问题 $(\{i+1, i+2, \dots, n\}, C - w)$ 上的最优解代价
- 0/1背包问题的优化解与部分背包问题优化解之间的关系?
  - 0/1背包问题的优化解是部分背包问题的可行解
  - 部分背包问题的优化解是0/1背包问题优化解上界



HITWH  
SE

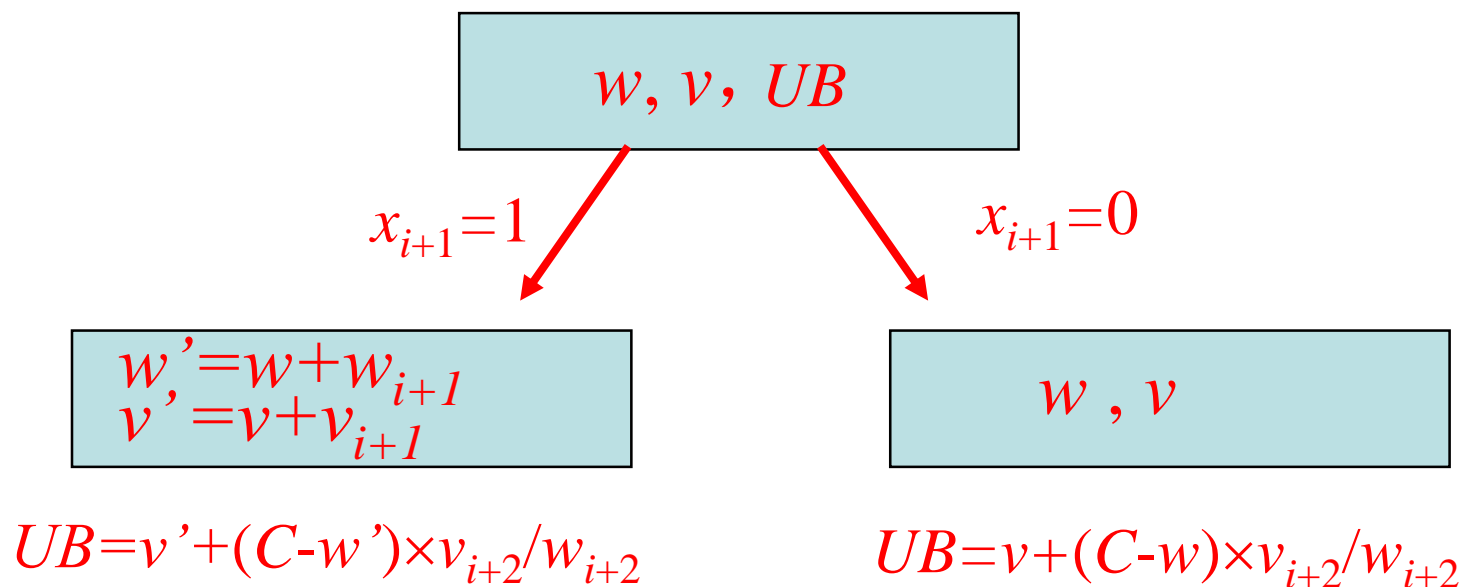
- 根节点及其代价上界

$$w=0, v=0$$

$$\begin{aligned} UB &= v + (C - w) \times v_1 / w_1 \\ &= C \times v_1 / w_1 \end{aligned}$$



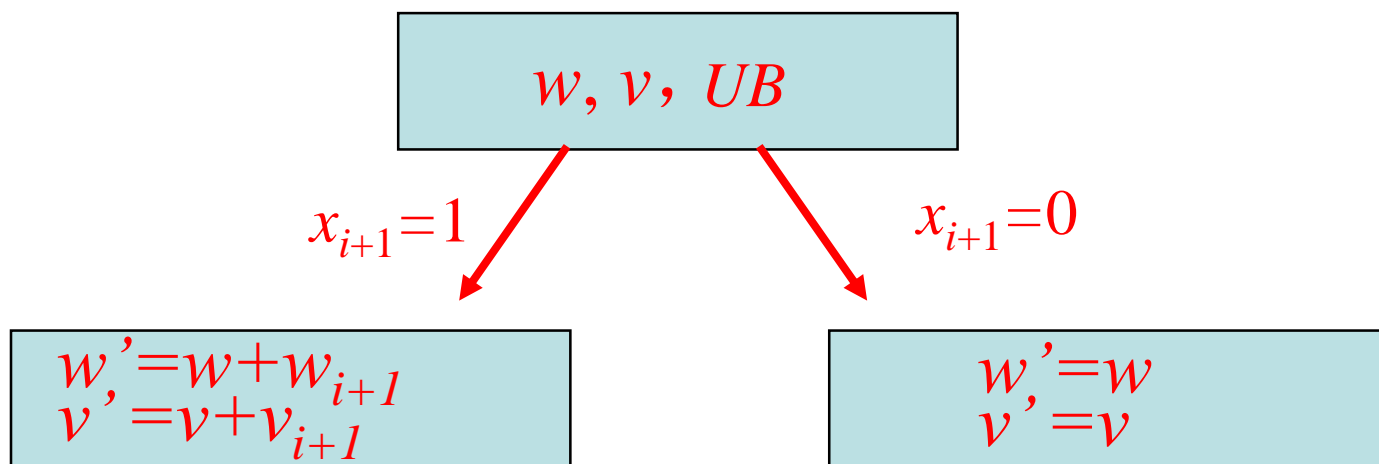
- 第 $i$ 层节点的搜索及其代价上界



根据左右儿子节点的代价的上界，确定下一次待搜索的节点



## • 第 $i$ 层节点的搜索及其代价上界



$$UB = v' + (C - w') \times v_{i+2} / w_{i+2}$$

$$UB = v + (C - w) \times v_{i+2} / w_{i+2}$$

## • 对于 $i+1$ 层节点:

- 若  $w' > C$ , 停止搜索, 由根到该节点对应路径不是可行解一部分
- 若其  $UB$  小于当前优化解下界, 则由根到该节点对应的路径一定不会产生最优解, 停止搜索
- 否则, 优先选择  $UB$  较大的节点, 继续爬山法搜索

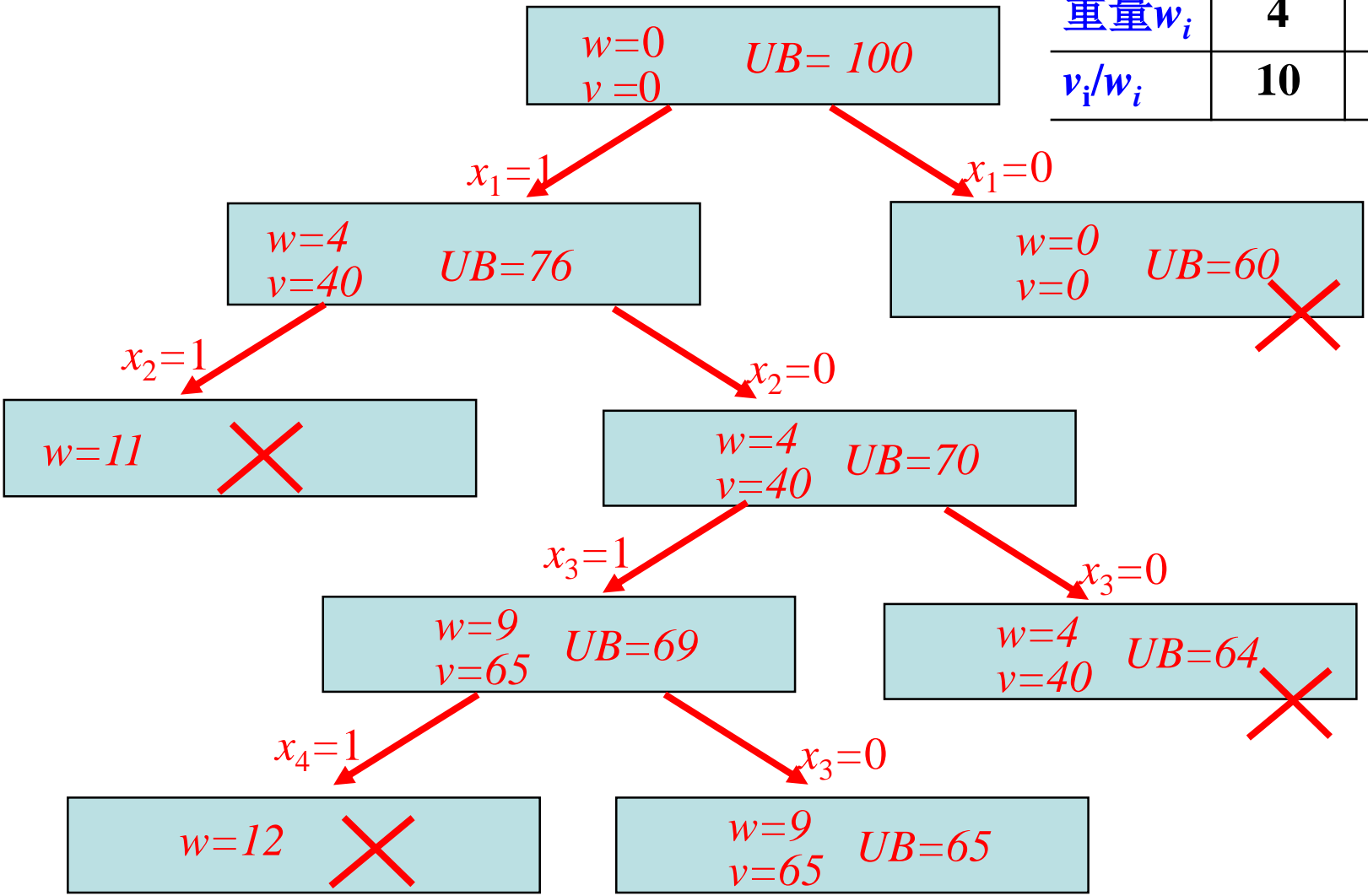


HITWH  
SE

● 举例

$C=10$

| 编号 $i$    | 1  | 2  | 3  | 4  |
|-----------|----|----|----|----|
| 价值 $v_i$  | 40 | 42 | 25 | 12 |
| 重量 $w_i$  | 4  | 7  | 5  | 3  |
| $v_i/w_i$ | 10 | 6  | 5  | 4  |







## 7.6 The A\* Algorithm

- A\*算法的基本思想
- A\*算法的规则
- 应用A\*算法求解最短路径问题



# A\*算法的基本思想

- 基本思想

- A\*算法使用Best-first策略进行搜索
- 在某些情况下,我们一旦得到了一个解,它一定是优化解,于是算法可以停止
- 无需搜索整个解空间

- 与分支界限策略的不同

- 分支界限策略是为了剪掉不能达到优化解的分支
- 分支界限策略的关键是“界限”

# • A\*算法关键——代价函数

## — 对于任意节点 $n$

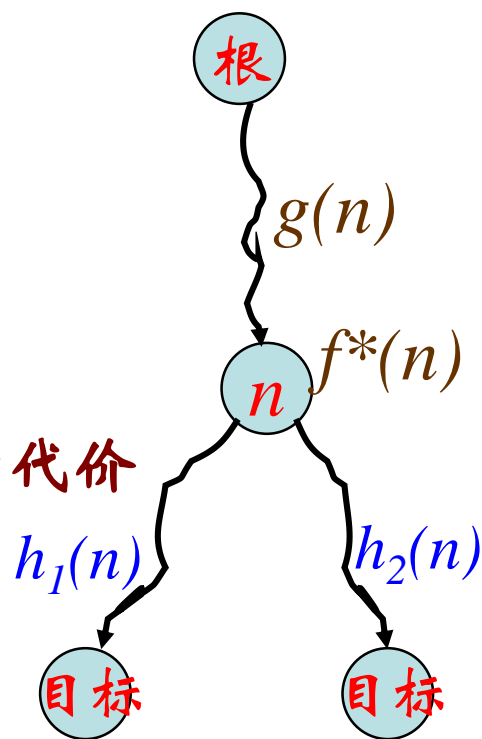
- $g(n)$  = 从树根到 $n$ 的代价
- $h^*(n)$  = 从 $n$ 到目标结点的优化路径的代价
- $f^*(n) = g(n) + h^*(n)$  是经过结点 $n$ 到达目标结点的代价

## — $h^*(n) = ?$

- 不知道!
- 于是,  $f^*(n)$  也不知道

## — 估计 $h^*(n)$

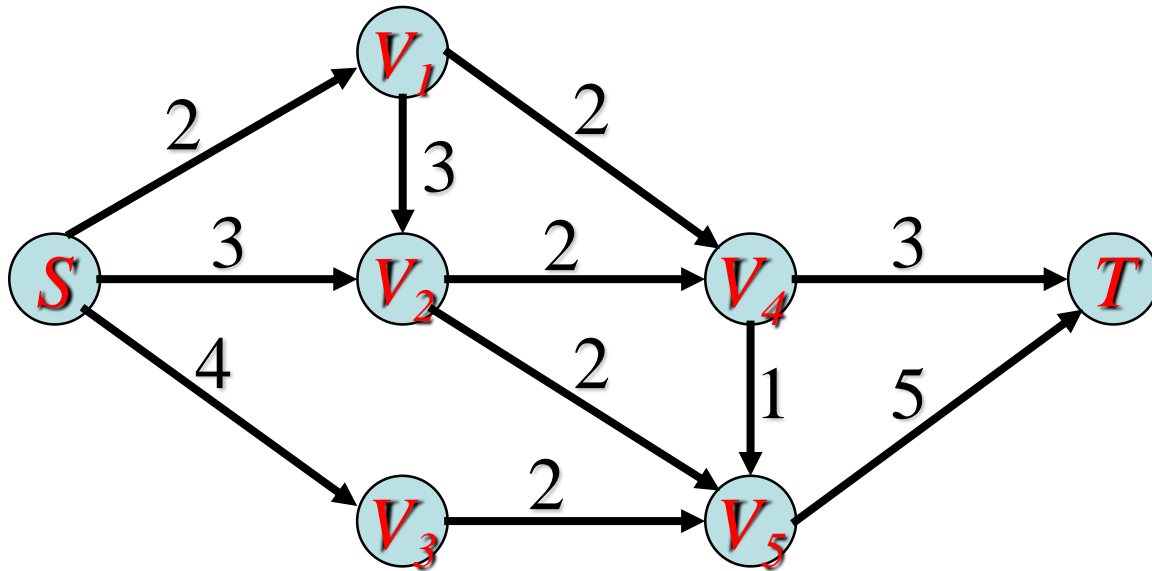
- 使用任何方法去估计 $h^*(n)$ , 用 $h(n)$ 表示 $h^*(n)$ 的估计
- $h(n) \leq h^*(n)$  总为真
- $f(n) = g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n) = f^*(n)$  定义为 $n$ 的代价



$$h^*(n) = \min\{h_1(n), h_2(n)\}$$

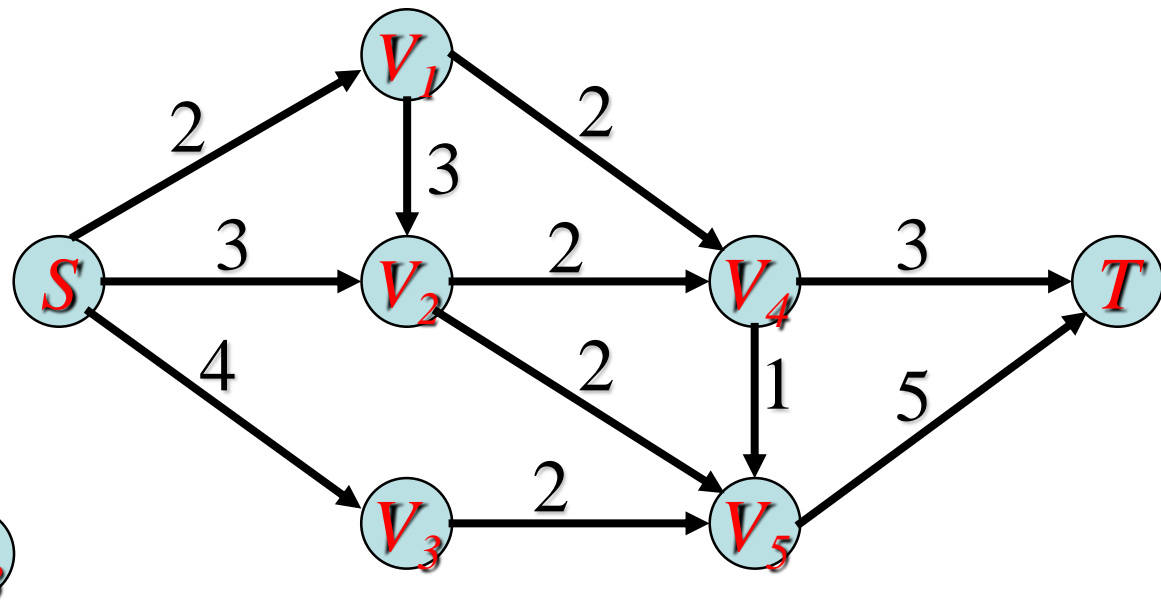
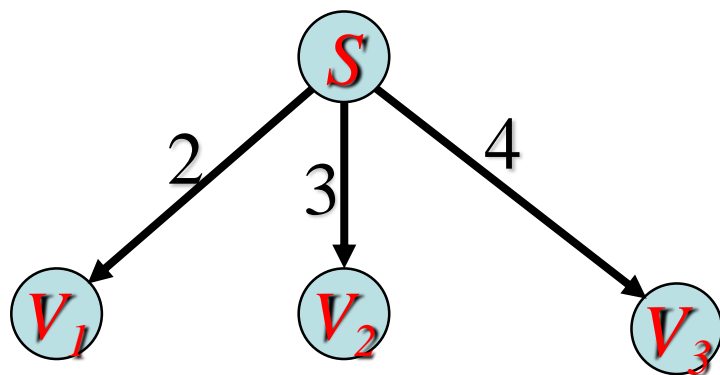
## 例1. 最短路径问题:

— 输入:



— 输出: 发现一个从S到T的最短路径

## — 求解树的第一阶段



$$g(V_1)=2, \quad g(V_2)=3, \quad g(V_3)=4$$

~~$$h^*(V_1)=5, \quad f^*(V_1)=g(V_1)+h^*(V_1)=7$$~~

## — 估计 $h^*(V_1)$

- 从 $V_1$ 出发有两种可能：代价分别为2和3，最小者为2
- $2 \leq h^*(V_1)$ , 选择 $h(V_1)=2$ 为 $h^*(V_1)$ 的估计值，满足
  - $h(V_1) \leq h^*(V_1)$
- $f(V_1)=g(V_1)+h(V_1)=4$ 为 $V_1$ 的代价

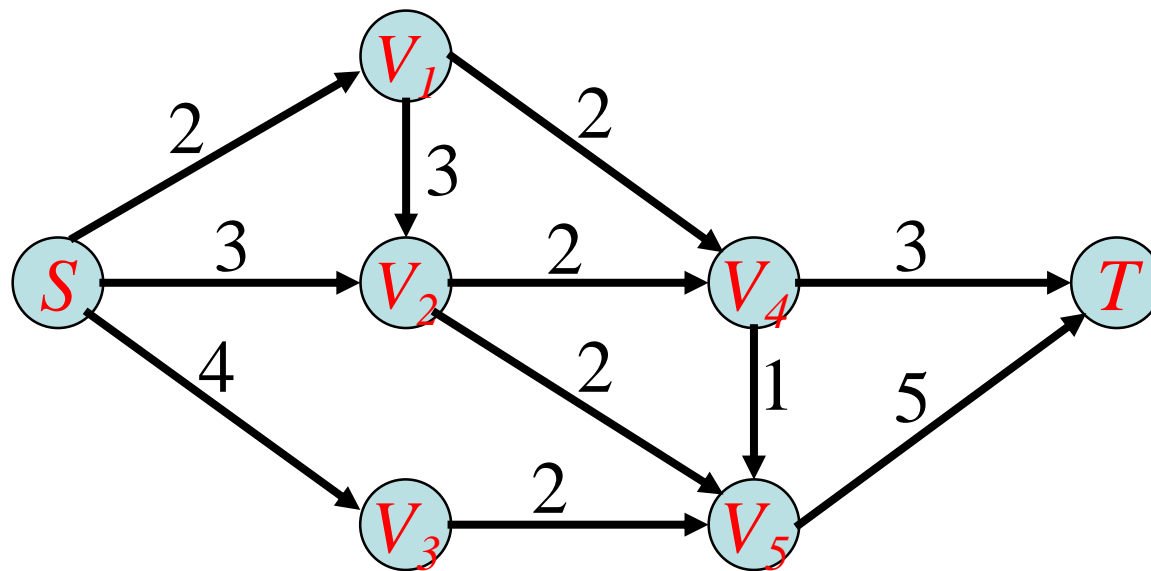


- (1). 使用**Best-first**搜索策略;
- (2). 算法中代价函数 $f(n)$ 定义为 $g(n)+h(n)$ ,  $g(n)$ 是从根到 $n$ 的路径代价,  $h(n)$ 是 $h^*(n)$ 的估计值, 且**对于所有 $n$ ,  $h(n) \leq h^*(n)$** ;
- (3). 当**选择到的结点是目标结点**时, 算法停止, 该目标结点即为优化解.

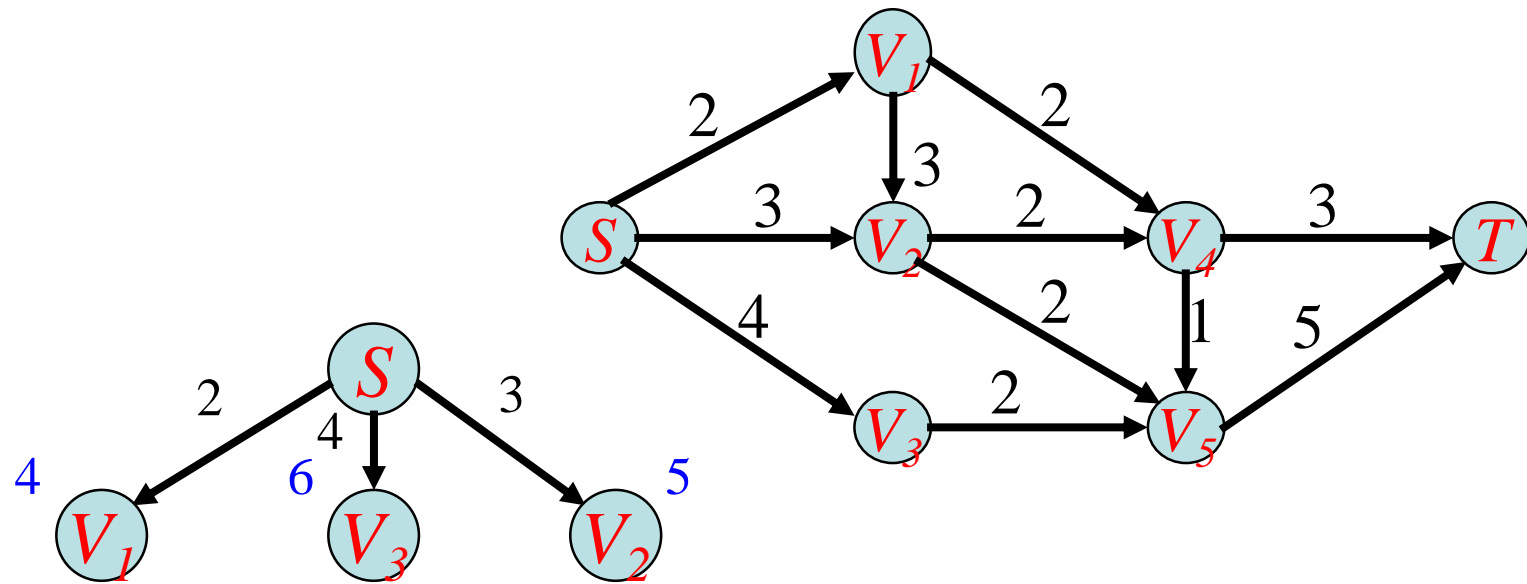


# 应用A\*算法求解最短路径问题

- 问题的输入:



Step 1



$$g(V_1)=2$$

$$g(V_3)=4$$

$$g(V_2)=3$$

$$h(V_1)=\min\{2,3\}=2$$

$$h(V_3)=\min\{2\}=2$$

$$h(V_2)=\min\{2,2\}=2$$

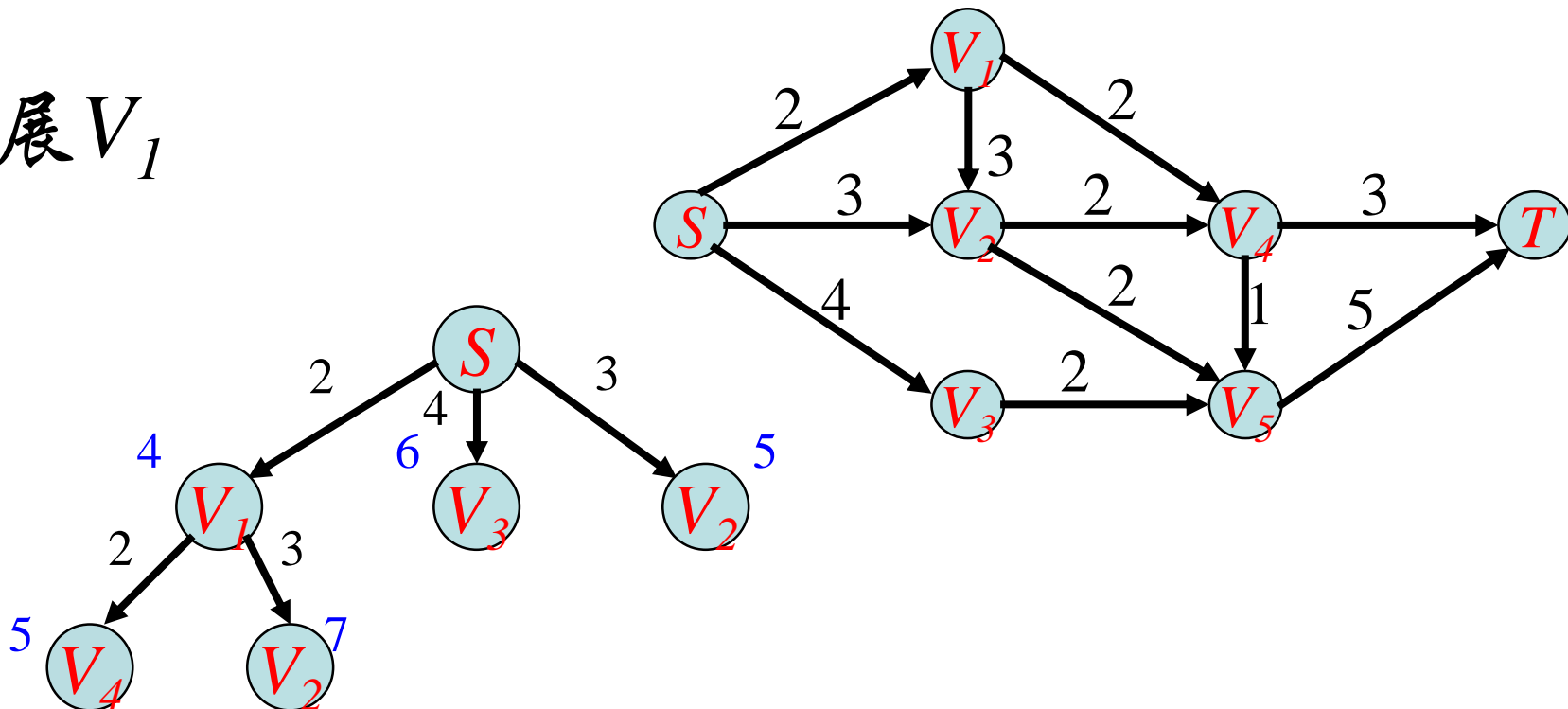
$$f(V_1)=2+2=4$$

$$f(V_3)=4+2=6$$

$$f(V_2)=2+2=5$$

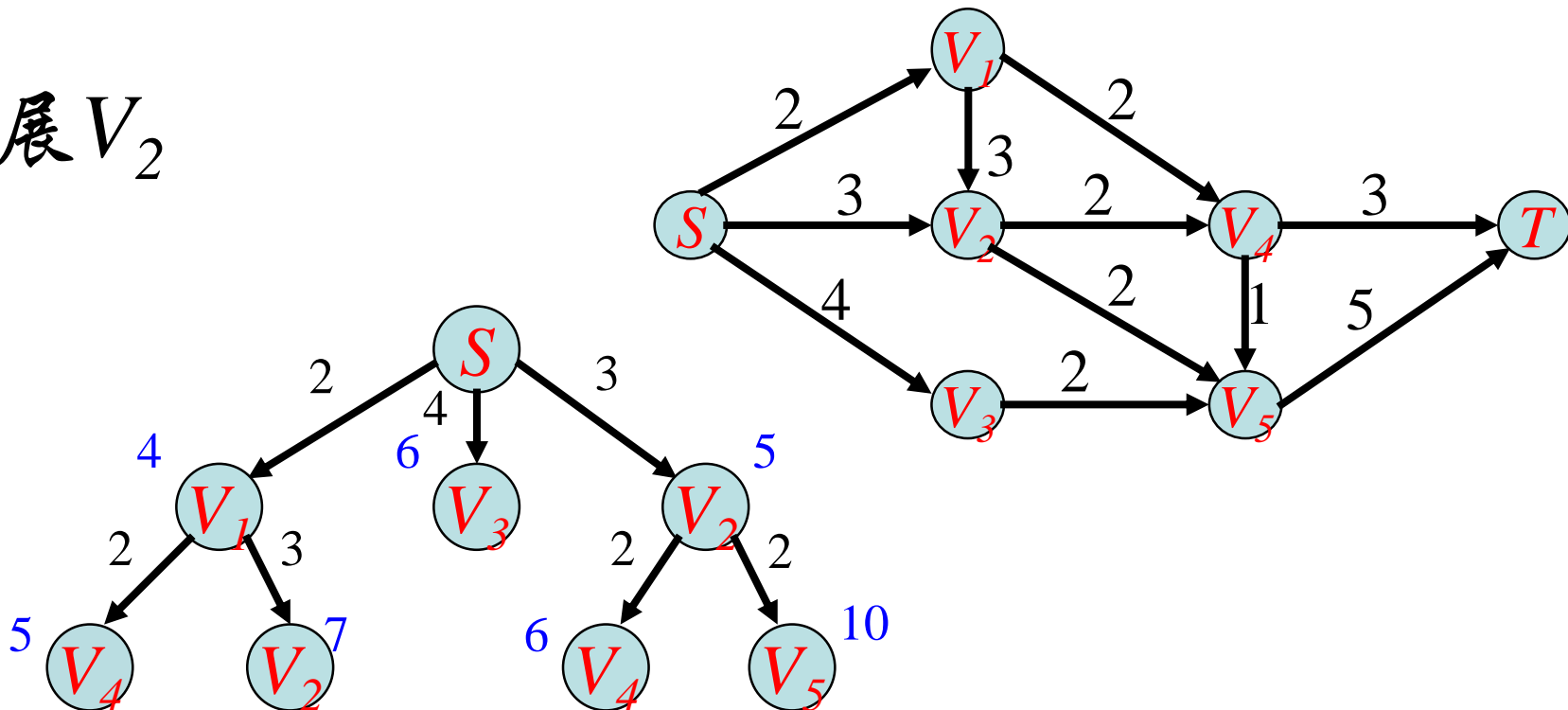


Step 2. 扩展  $V_1$



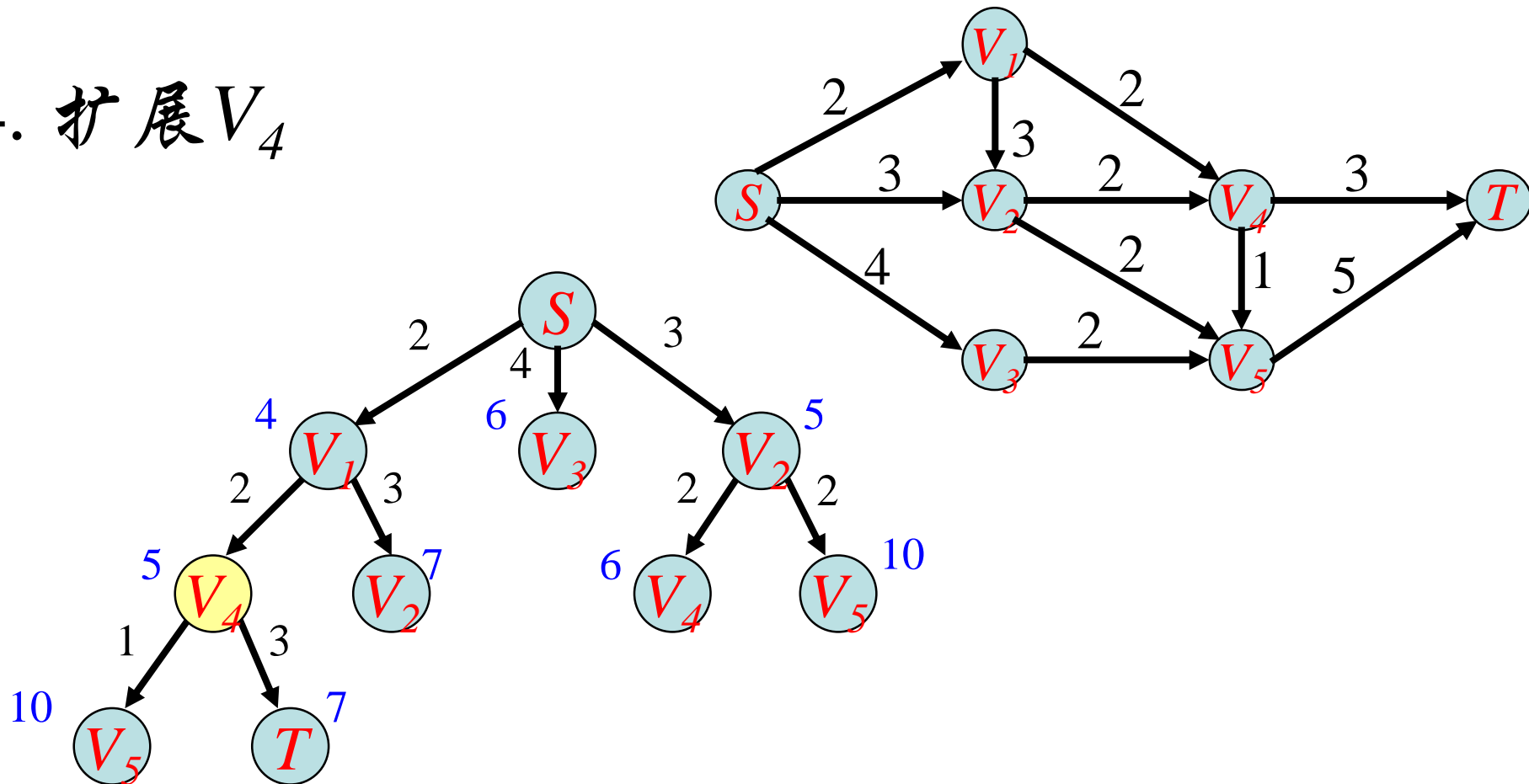
$$\begin{aligned}
 g(V_4) &= 2 + 2 = 4 & h(V_4) &= \min\{3, 1\} = 1 & f(V_4) &= 4 + 1 = 5 \\
 g(V_2) &= 2 + 3 = 5 & h(V_2) &= \min\{2, 2\} = 2 & f(V_2) &= 5 + 2 = 7
 \end{aligned}$$

Step 3. 扩展  $V_2$



$$\begin{array}{lll}
 g(V_4) = 3 + 2 = 5 & h(V_4) = \min\{3, 1\} = 1 & f(V_4) = 5 + 1 = 6 \\
 g(V_5) = 3 + 2 = 5 & h(V_5) = \min\{5\} = 5 & f(V_5) = 5 + 5 = 10
 \end{array}$$

Step 4. 扩展  $V_4$



$$g(V_5) = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$g(T) = 2 + 2 + 3 = 7$$

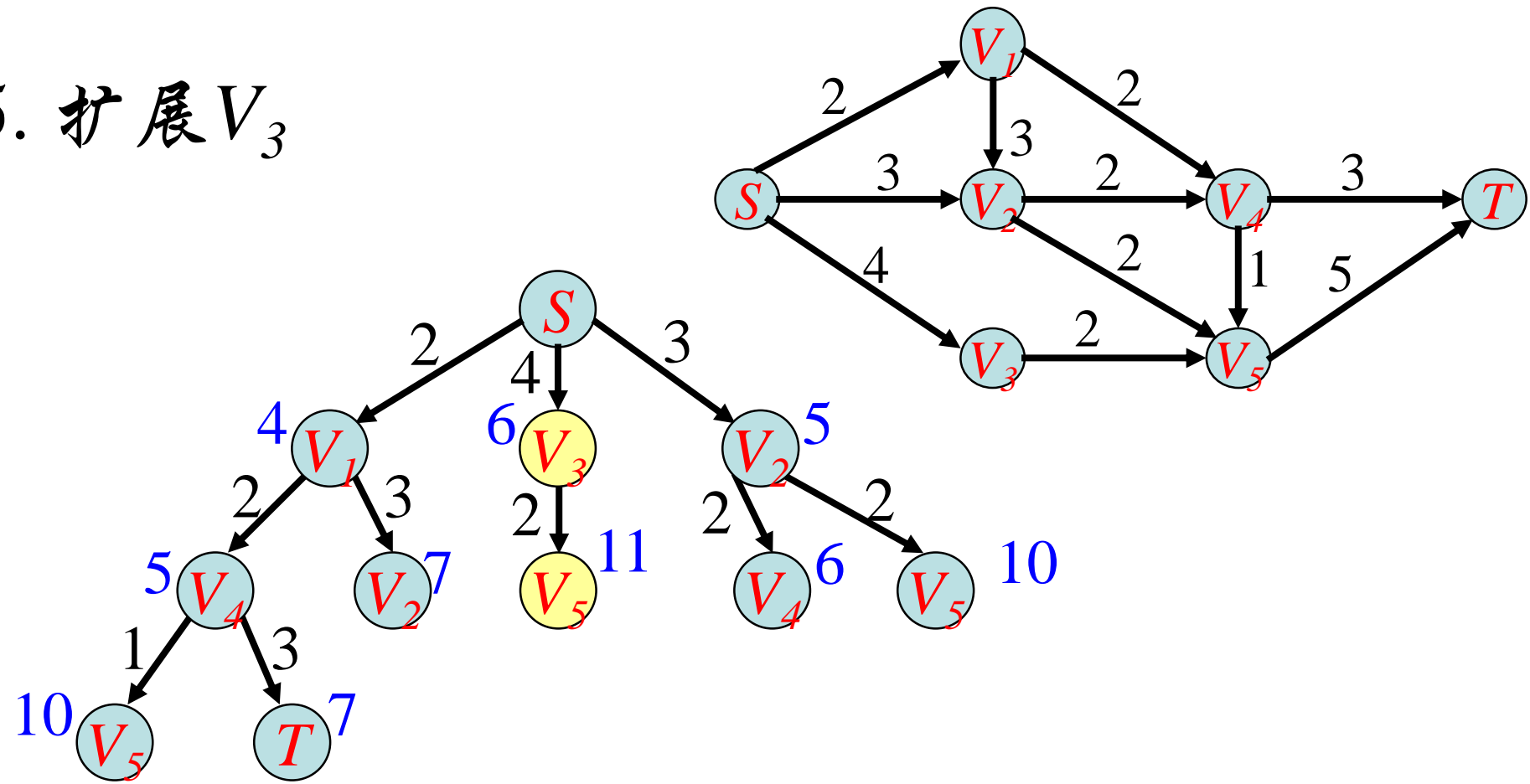
$$h(V_5) = \min\{5\} = 5$$

$$h(T) = 0$$

$$f(V_5) = 5 + 5 = 10$$

$$f(T) = 7 + 0 = 7$$

Step 5. 扩展  $V_3$

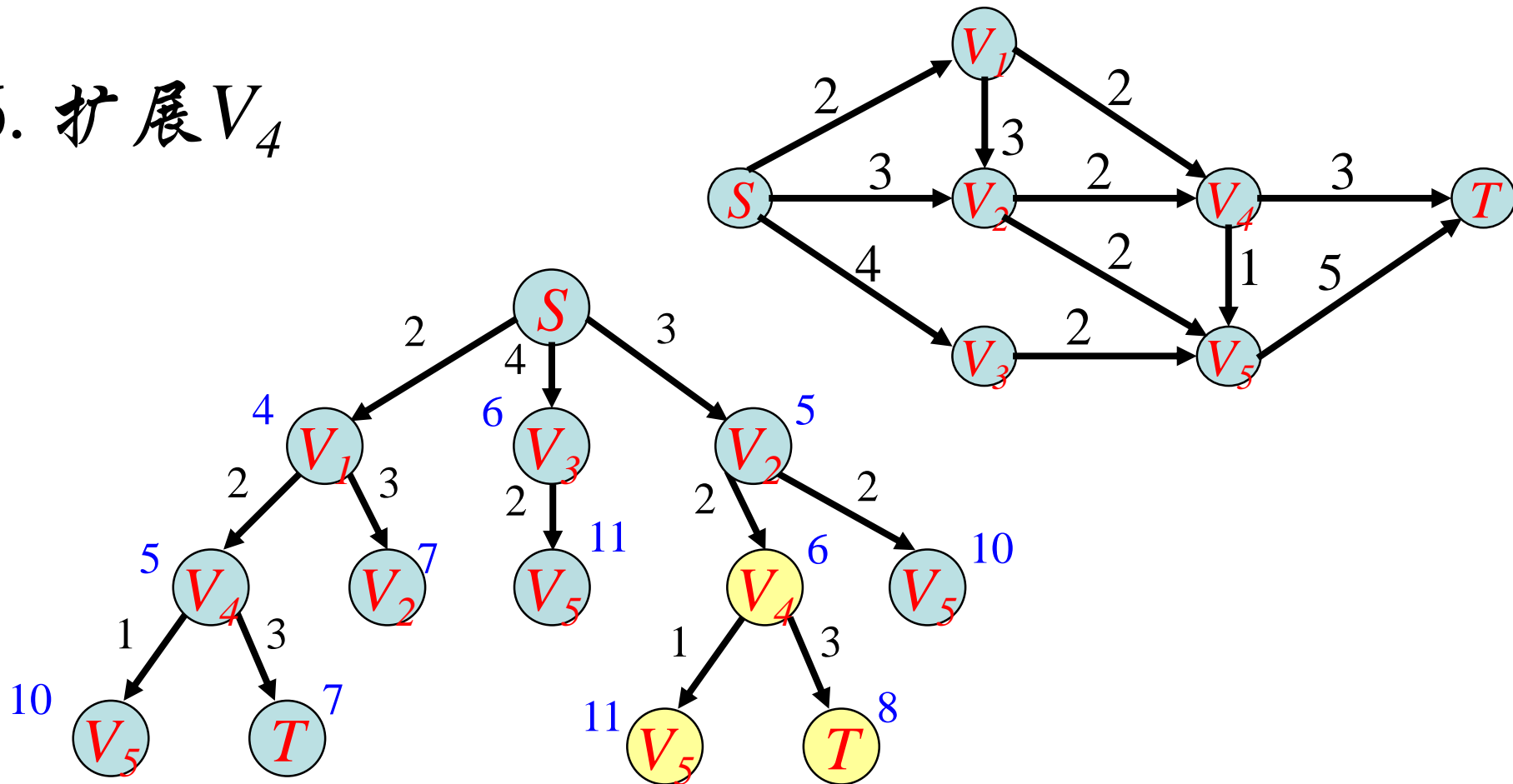


$$g(V_5)=4+2=6$$

$$h(V_5)=\min\{5\}=5$$

$$f(V_5)=6+5=11$$

Step 6. 扩展  $V_4$



$$g(V_5)=3+2+1=6$$

$$g(T)=3+2+3=8$$

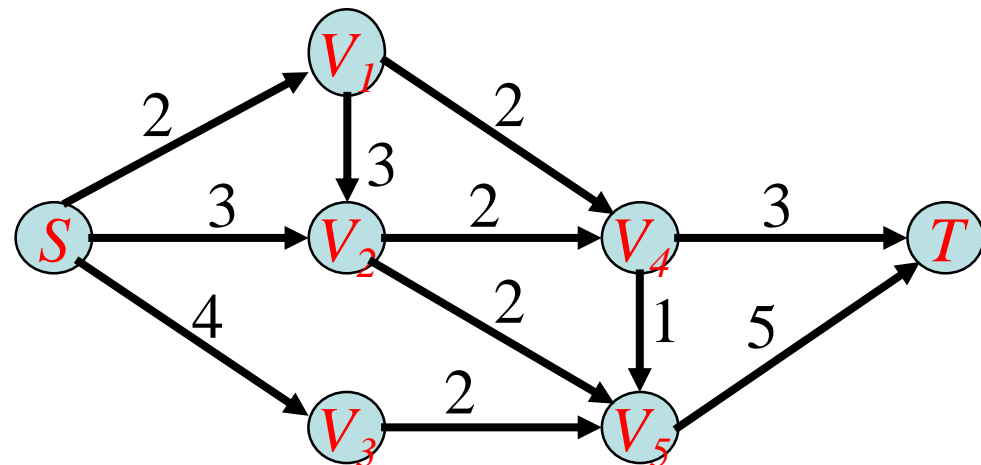
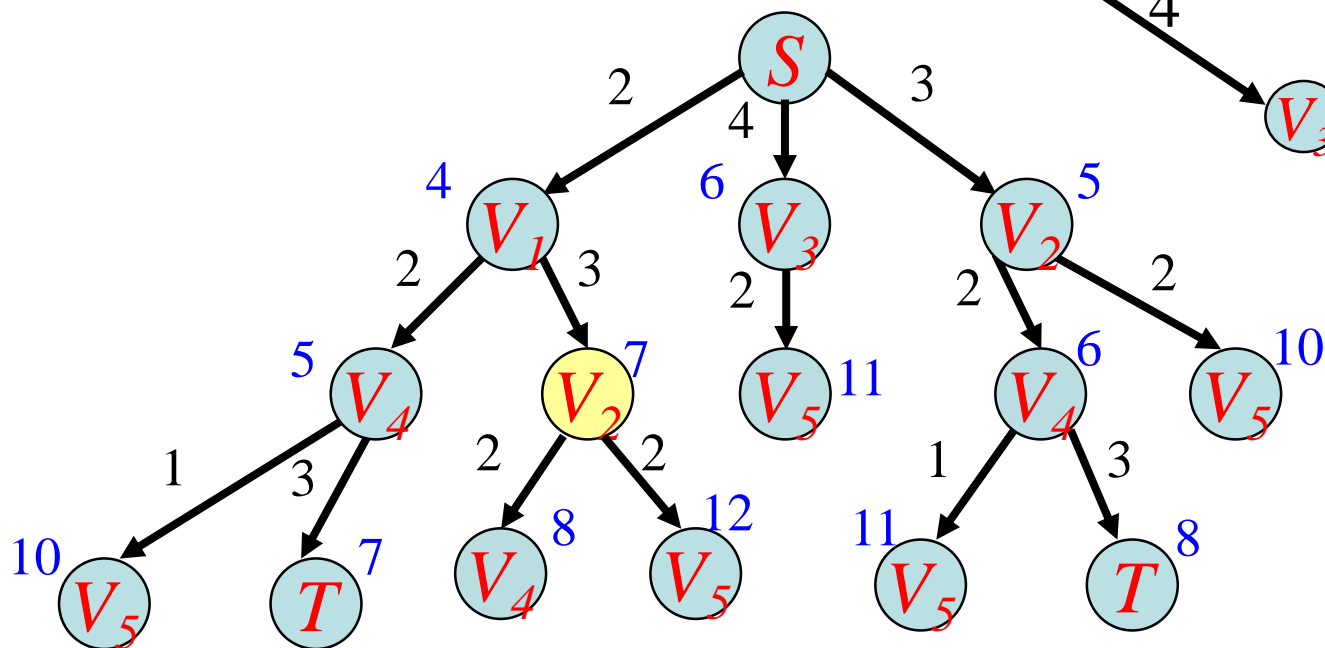
$$h(V_5)=\min\{5\}=5$$

$$h(T)=0$$

$$f(V_5)=6+5=11$$

$$f(T)=8+0=8$$

# Step 7. 扩展 $V_2$



$$g(V_4) = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$h(V_4) = \min\{3, 1\} = 1$$

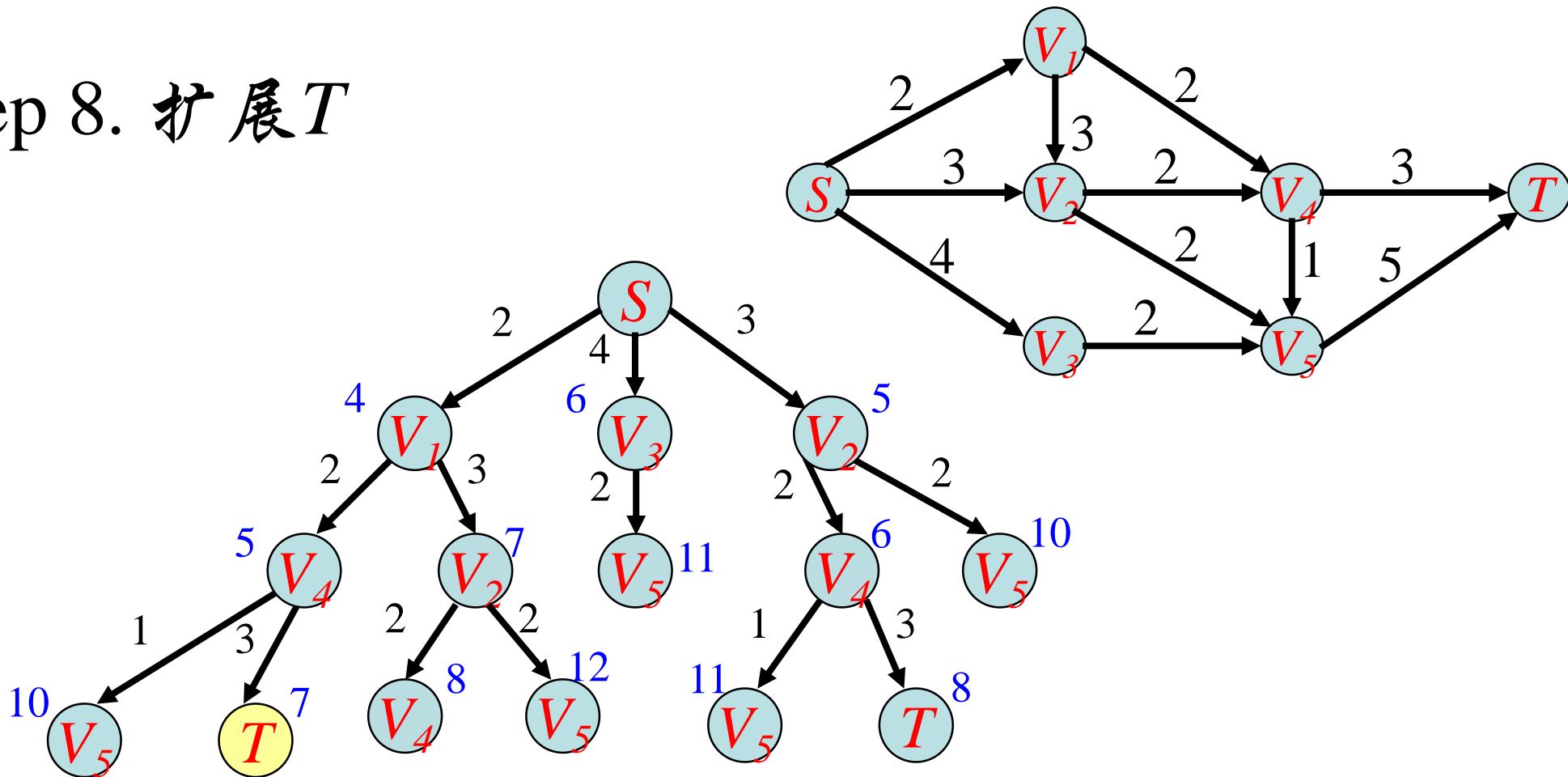
$$f(V_4) = 7 + 1 = 8$$

$$g(V_5) = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$h(V_5) = \min\{5\} = 5$$

$$f(V_5) = 7 + 5 = 12$$

## Step 8. 扩展 $T$



因为 $T$ 是目标结点, 所以我们得到解:

$$S \rightarrow V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow T$$

该解即为最优解

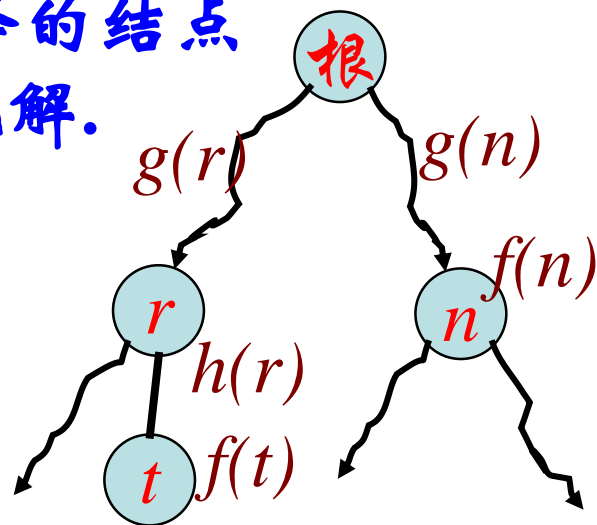
## • A\*算法的正确性

**定理1.** 使用Best-first策略搜索树, 如果A\*选择的结点是目标结点, 则该结点表示的解是优化解。

**证明.**

令 $t$ 是选中的目标结点,  $r$ 是 $t$ 父结点  
 $n$ 是任意已扩展到的结点.

往证 $f(t)=g(t)=g(r)+h(r)$ 是优化解代价.



(1). A\*算法使用Best-first策略,  $f(t) \leq f(n)$ . 目标点

(2). A\*算法使用 $h(n) \leq h^*(n)$ 估计规则,  $f(t) \leq f(n) \leq f^*(n)$ .

(3).  $\{f^*(n)$  (包括 $f^*(t)$ ) $\}$ 中必有一个为优化解的代价, 令其为 $f^*(s)$ . 我们有 $f(t) \leq f^*(s)$ .

( $f^*(n)=g(n)+h^*(n)$ 是经过 $n$ 的可能解的最小代价).

(4).  $t$ 是目标节点,  $h(t)=0$ , 所以 $f(t)=g(t)+h(t)=f^*(t)$ 是 $t$ 对应可能解的代价,  $f(t) \geq f^*(s)$ , 即 $f(t)=f^*(s)$ .