习 题 课

例 1 令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，问：

(1)有多少不同的由 X 到 Y 的关系？(2)有多少不同的由 X 到 Y 的映射？

(3)有多少不同的由 X 到 Y 的双射？(4)有多少不同的从 X 到 Y 的单射？

答案：（1） $2^{|X\times Y|}=2^{m\cdot n}$。（2） n^m。

（3）只有 m＝n 时，才存在 X 到 Y 的双射，共有 $m!$ 否则不存在。

（4）若 m＝n，则单射的个数为 m!。

若 m＞n，则单射的个数为 0。

若 m＜n，则单射的个数为$C_n^m\cdot m!$。

例 2 设 $f:X\to Y,\ A,B\subseteq \mathrm{X}$，证明

(1) $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$;(2) $f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$;

(3) $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$;(4) $f(A\Delta B)\supseteq f(A)\Delta f(B)$。

分析：本例题是书上的定理，但定理的结果和证明的方法很重要，因此在此处列出来。证明这样的问题主要利用“$\subseteq$”的定义及映射的定义，采用按定义证明方法来证明。

证：（1）设 $y\in f(A\bigcup B)$，则 $\exists x\in A\bigcup B$,使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$或$x\in B$。因此，$y\in f(A)$或$y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\bigcup f(B)$，故

$$f(A\bigcup B)\subseteq f(A)\bigcup f(B)$$

反之，设 $y\in f(A)\bigcup f(B)$，则 $y\in f(A)$或$y\in f(B)$。于是 $\exists x\in A$ 或 $x\in B$，使得 $f(x)=y$。因此不论何种情况都 $\exists x\in A\bigcup B$，使得 $f(x)=y$。因此 $y\in f(A\bigcup B)$，故

$$f(A)\bigcup f(B)\subseteq f(A\bigcup B)$$

因此，$f(A)\bigcup f(B)=f(A)\bigcup f(B)$。

（2）设 $y\in f(A\bigcap B)$，则 $\exists x\in A\bigcap B$，使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$ 且 $x\in B$。

从而，$y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\bigcap f(B)$，故

$$f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)\text{。}$$

（3）设 $y\in f(A)\setminus f(B)$，则 $y\in f(A)$ 但 $y\notin f(B)$。于是 $\exists x\in A$，使得 $f(x)=y$ 且 $x\notin B$，从而 $\exists x\in A\setminus B$，使得 $f(x)=y$。故 $y=f(x)\in f(A\setminus B)$，即

$$f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)\text{。}$$

（4）$f(A\Delta B)=f((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))=f(A\setminus B)\bigcup f(B\setminus A)$

$$\supseteq(f(A)\setminus f(B))\bigcup(f(B)\setminus f(A))=f(A)\Delta f(B)\text{。}$$

说明：（1）注意，两个集合的交、差、对称差的象不一定与它们的象的交、差、对称差相重合。

（2）例：设 $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$，$f:X\to Y, f(a)=1, f(b)=f(c)=2$。令 $A=\{a,b\},B=\{c\}$。于是 $A\bigcap B=\varnothing, f(A\bigcap B)=\varnothing$。但是

$f(A)\bigcap f(B)=\{1,2\}\bigcap\{2\}=\{2\}\neq\varnothing$。这表明 $f(A\bigcap B)\subset f(A)\bigcap f(B)$。

又 $f(A\setminus B)=\{1,2\}, f(A)\setminus f(B)=\{1,2\}\setminus\{2\}=\{1\}$，于是 $f(A\setminus B)\supset f(A)\setminus f(B)$。

又 $f(A\Delta B)=f((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))=f(\{a,b,c\})=\{1,2\}$，而

$f(A)\Delta f(B)=\{1,2\}\Delta\{2\}=\{1\}$。于是，$f(A\Delta B)\supset f(A)\Delta f(B)$。

（3）定理 1 和定理 2 可以推广到有穷或无穷多个集合的并与交集的情况。

例 3(P_{39}^2) 设 X 是一个有限集合，从 X 到 X 的部分映射有多少？

解：设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则

$\phi\to X, C_{|X|}^0$

$\{x_i\}\to X, C_{|X|}^1\left|X\right|, i=1,2,\cdots,n$。

$\{x_i,x_j\}\to X, C_{|X|}^2\left|X\right|^2, i,j=1,2,\cdots,n$。

$\{x_i, x_j, x_k\} \to X, C_{|X|}^3 |X|^3, i, j, k = 1, 2, \cdots, n$。

$\vdots$

$X \to X, C_{|X|}^{|X|} |X|^{|X|}$

于是共有：

$$C_{|X|}^0 + C_{|X|}^1 |X| + C_{|X|}^2 |X|^2 + \cdots + C_{|X|}^{|X|} |X|^{|X|} = (1+|X|)^{|X|}$$

例 4 (P_{39}^3) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_{mn+1}$ 是一个两两不相同的整数构成的数列，则必有长至少为 $n+1$ 的递增子序列或有长至少为 $m+1$ 的递减子序列。

证： 令 $A = \{u_1, u_2, \cdots u_{mn+1}\}$，则 $|A| = mn+1$。

设以 u_i 为首项的最长递增子序列的长度为 ℓ_i^+，

设以 u_i 为首项的最长递减子序列的长度为 ℓ_i^-。

反证法： 假设题中结论不成立，则 $\ell_i^+ \le n, \ell_i^- \le m, i = 1, 2, 3, \cdots, mn+1$。

令 $\varphi: A \to \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, m\}, \forall u_i \in A$，$\varphi(u_i) = (\ell_i^+, \ell_i^-)$，则 φ 是单射。

实际上，$\forall u_i, u_j \in A$ 且 $u_i \ne u_j (i < j)$，则

若 $u_i > u_j$，则 $\ell_i^- > \ell_j^-$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi(u_j)$。

若 $u_i < u_j$，则 $\ell_i^+ > \ell_j^+$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi(u_j)$。

故 φ 为单射，从而就有 $mn+1 \le mn$ 矛盾。

例 5 (P_{43}^2) 已知 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots a_m$，试证：存在两个整数 $k, \ell, 0 \le k < \ell \le m$，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_\ell$ 能被 m 整除。

证： 考察下式：

a_1
a_1+a_2
$a_1+a_2+a_3$
$\vdots$
$a_1+a_2+\cdots+a_m$

若第 i 式能被 m 整除，则显然成立，此时 $k=0,\ell=i$；

若任一式都不能被 m 整除，则考察各式被 m 整除后的余数，如下式：

$a_1=q_1m+r_1$
$a_1+a_2=q_2m+r_2$
$a_1+a_2+a_3=q_3m+r_3$
$\vdots$
$a_1+a_2+\cdots+a_m=q_mm+r_m$

由于每一个都不能被 m 整除，故共有 m 个余数—相当于 m 个物体。而任意整数被 m 除后，只有 m －1 个余数——相当于 m －1 抽屉，于是由抽屉原理可知必有两个余数相等。设这两个余数为 $r_i,r_j,i\neq j(i<j)$，对应两式相减便有：

$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$ 可被 m 整除，此时 $k=i,\ell=j$。

例 6 设 X 是一个无穷集合，$f:X\to X$。证明：存在 X 的一个真子集 E，使得 $f(E)\subseteq E$。

证：取 $x_0\in X$，令 $x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$。

若到某一位与前面有重复项，设为第 k 项，即 $f(x_k)=x_i(i<k)$。则

令 $E=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset X$，则 $f(E)\subseteq E$；

若 x_i 互不相同，则令 $E=X\setminus\{x_0\}\subset X$，则 $f(E)\subseteq E$。

例 7 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g：$N\to N$，使得 $gf=I_N$，但 $fg\neq I_N$。

例 8 (P_{55}^2) 设 $f:X\to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $gf=I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$，使得 $fg=I_Y$，则 f 是可逆的吗？

答案：（1） f 不一定可逆。

当$|X|=1$时，f不一定可逆。

当$|X|\geq 2$时，f可逆。

（2）f一定可逆。

证： 由$fg=I_Y$，得f是满射。假设f不是单射，则g不唯一，矛盾。

例 9(P_{55}^3)设$f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

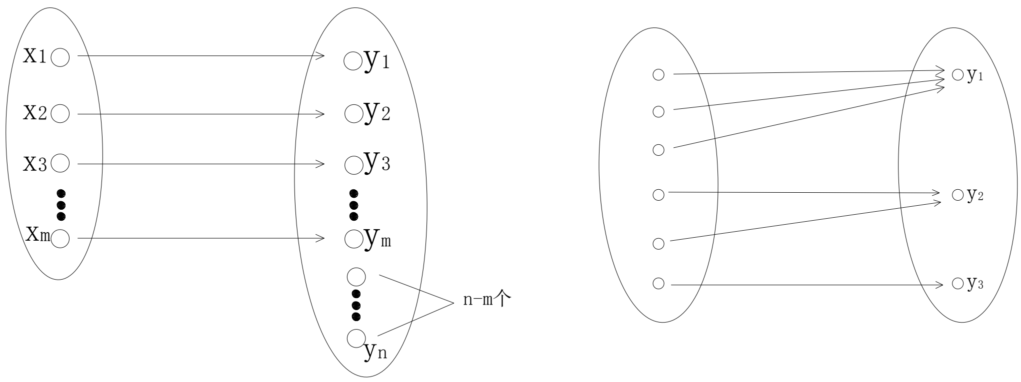
（1）若f是左可逆的，则f有多少个左逆映射？

（2）若f是右可逆的，则f有多少个右逆映射？

解： 令$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则

（1）如图 1(a)所示：有m^{n-m}；（2）如图 1(b)所示：有

$$\left|f^{-1}(y_1)\right|\cdot\left|f^{-1}(y_2)\right|\cdots\left|f^{-1}(y_n)\right|。$$



（a）　　　　　　　　　　(b)

图 1

例 10(1)设$X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。$(2^5-2=30)$

(2)设$X=\{1,2,\cdots,m\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。(2^m-2)

(3)设$X=\{1,2,\cdots,m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$m\geq n$，若$f:X\to Y$，求 X 到 Y 的满射的个数。

证： 在Y上的定义 n 个性质$P_1,P_2,\cdots,P_n$，满足各性质的Y^X中映射之集分别记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$。若$f\in Y^X(f:X\to Y),\forall x\in X,f(x)\neq y_i$，则称$f$不具有性质，于是令$A_i$为$X$中每个元素在$f$下的象都不等于$y_i$，即

$A_i=\{f\mid f:X\to Y,\forall x\in X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$。于是

$A_i^C=\{f\mid f:X\to Y,x\exists X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$\left|A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C\right|=\left|Y^X\right|-\left|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right|=$$
$$=\left|Y^X\right|-\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|+\cdots+(-1)^n\bigcap_{i=1}^{n}\left|A_i\right|$$
$$=n^m-C_n^1(n-1)^m+C_n^2(n-2)^m-C_n^3(n-3)^m+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m+C_n^n0^m$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^k(n-k)^m(k=0\text{就是}n^m)$$

在这里A_i不以y_i为函数值，则$\left|A_i\right|=(n-1)^m$

$A_i\cap A_j$不以y_i与y_j为函数值，则$\left|A_i\cap A_j\right|=(n-2)^m$。

例 11 (P_{51}^2) 设 X, Y, Z 是三个非空集合，$|Z|\geq 2$。证明：$f:X\to Y$是满射当且仅当不存在从 Y 到 Z 的映射g_1和g_2，使得$g_1\neq g_2$，但$g_1\circ f=g_2\circ f$。

证： $\Rightarrow$因$f:X\to Y$且f为满射，故$\forall y\in Y,\exists x\in X$，使得$f(x)=y$。

假设存在$g_1,g_2,g_1\neq g_2$，所以$\exists y_0\in Y$，使得$g_1(y_0)\neq g_2(y_0)$，因为$|Z|\geq 2$，因此必存在这样的g_1和g_2。对于上面的y_0，$\exists x_0\in X$（f是满射），使得$f(x_0)=y_0,g_1(f(x_0))\neq g_2(f(x_0))$。

$[g_1(y_0)\neq g_2(y_0)]$，即$g_1f(x_0)\neq g_2f(x_0)$。故$g_1\circ f\neq g_2\circ f$与$g_1\circ f=g_2\circ f$，矛盾。所以假设不成立。

<u>**也可以用如下方法：**</u>

f满射$\Leftrightarrow f$右可逆$\Leftrightarrow\exists h:Y\to X$，使得$f\circ h=I_Y\Leftrightarrow$假设$g_1\circ f=g_2\circ f$得到$g_1=g_2$，命题得证。

$\Leftarrow f:X\to Y$，假设f不是满射，则$\exists y_0\in Y$，使得$\forall x\in X,f(x)\neq y_0$。构造

两个映射 $g_1, g_2 : Y \to Z$，

当 $y = y_0$ 时， $g_1(y_0) \neq g_2(y_0)$；

当 $y \neq y_0$ 时， $g_1(y) = g_2(y)$。

因为 $|Z| \geq 2$，故此时 $g_1 \neq g_2$，但

$\forall x \in X, g_1 \circ f(x) = g_1(y \neq y_0) = g_2(y \neq y_0) = g_2 \circ f(x)$

即 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$，与题设不存在 $g_1 \neq g_2$，但 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ 矛盾，故假设不成立，即 f 一定是满射。

习 题 课

例 1 (P_{47}^{3}) 设 $f : X \to Y$， $A \subseteq X, B \subseteq Y$，证明：

$$f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)。$$

证： 设 $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$，则 $\exists x \in f^{-1}(B) \cap A$，使得 $f(x) = y$。于是 $x \in f^{-1}(B)$ 且 $x \in A$，因此 $y = f(x) \in B$ 且 $y \in f(A)$，即 $y \in B \cap f(A)$，从而

$$f(f^{-1}(B) \cap A) \subseteq B \cap f(A)。$$

反之，设 $y \in B \cap f(A)$，则 $y \in B$ 且 $y \in f(A)$。于是 $\exists x \in A$ 且 $x \in f^{-1}(B)$，使得 $f(x) = y$。从而 $\exists x \in f^{-1}(B) \cap A$，使得 $f(x) = y$，因此 $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$。从而

$$B \cap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B) \cap A)。$$

所以 $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$。

例 2 (P_{47}^{8}) 设 $f : A \to B$，证明：$\forall T \in 2^B$，有 $f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$。

证： 若 $T = \varnothing$，则 $f(f^{-1}(T)) = \varnothing, T \cap f(A) = \varnothing$，从而 $f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$。

若 $T \neq \varnothing$，设 $y \in f(f^{-1}(T))$，则 $\exists x \in f^{-1}(T)$，使得 $f(x) = y$ 且 $x \in A$，于是 $y = f(x) \in T$ 且 $y = f(x) \in f(A)$，因此 $y \in T \cap f(A)$。故

$$f(f^{-1}(T)) \subseteq T \cap f(A)$$

反之，设 $y \in T \bigcap f(A)$，则 $y \in T$ 且 $y \in f(A)$。于是 $\exists x \in A$ 且 $x \in f^{-1}(T)$，使得 $f(x) = y$。因此 $\exists x \in A \bigcap f^{-1}(T)$，使得 $y = f(x) \in f(f^{-1}(T) \bigcap A)$。而 $f^{-1}(T) \subseteq A$，所以 $y \in f(f^{-1}(T))$，故 $T \bigcap f(A) \subseteq f(f^{-1}(T))$

从而 $T \bigcap f(A) = f(f^{-1}(T))$

例 3 $(P_{47}^{5,6})$ 设 $f: X \to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

证： $\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x) \in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x) = f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x = x_1$。即 $x \in F$，所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来，$\forall x \in F, f(x) \in f(F)$，从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$，所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F)) = F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x$，但 $f(x_1) = f(x_2) = y$。令 $F = \{x_1\} \in 2^X$，于是

$$f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\},$$

故有 $\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$，矛盾。

即 f 一定为单射。

例 4 (P_{47}^{7}) 设有映射 $f: A \to B, H \subseteq A$，令 H 在 A 中的余集 $H^c = A \setminus H$，当 f 分别是单射和满射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。

解：由定理知，$(f(H^c)) = f(A \setminus H) \supseteq f(A) \setminus f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A) = B$，有 $f(H^c) \supseteq B \setminus f(H) = (f(H))^c$。

举例说明：

设 $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}, f(1) = f(2) = a, f(3) = b$，则 f 为满射。

令 $\mathrm{H} = \{1,3\}$，则 $H^c = \{2\}, f(H^c) = \{a\}$，而 $(f(H))^c = B \setminus f(H) = \varnothing$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c) \subseteq (f(H))^c$。

$\forall y \in f(H^c)$，存在 $x \in H^c$，即 $x \notin H$，使得 $y = f(x)$；由 f 是单射，有

$y=f(x)\notin f(H)$ 且 $y=f(x)\in B$（否则存在 $x_1\in H$，使 $f(x_1)=f(x)$，与 f 是单设矛盾），故 $y=B\setminus f(H)\in(f(H))^c$。于是 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

举例说明：

设 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c,d\}, f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, H=\{1,2\}$，则

$f(H^c)=f(\{3\})=\{c\}$，而 $(f(H))^c=B\setminus f(H)=\{d,c\}$。

例 5（1）若 $f:T\to U$, f 是单射，$g,h:S\to T$，满足 $f\circ g=f\circ h$，证明：$g=h$。

（2）给出映射 f,g,h 的实例，$f:T\to U, g,h:S\to T$，$f\circ g=f\circ h$，但 $g\neq h$。

（3） $f:A\to B$，$g,h:B\to C$。给出 f 的条件，使得由 $g\circ f=h\circ f$ 可以得出 $g=h$。

证：（1） $\forall s\in S$，由条件知，$(f\circ g)(s)=(f\circ h)(s)$，即 $f(g(s))=f(h(s))$。因为 f 为单射，所以有 $g(s)=h(s)$，且 g,h 都是 S 到 T 映射，从而 $g=h$。

（2） f 不为单射时不成立。

例：S＝{1}，$T=\{a,b\}, U=\{0\}, f(x)=0; g(1)=a; h(1)=b$。则

$f\circ g(x)=f(g(x))=0, f\circ h(x)=f(h(x))=0$，但 $\mathrm{g}\neq\mathrm{h}$。

（3） f 为满射时，结论成立。

$\forall b\in B$，因为 f 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$。由 $g\circ f=h\circ f$，

得 $g(f(a))=h(f(a))$，即 $g(b)=h(b)$，从而 $g=h$。

例 6 设 $f:N\times N\to N, f((x,y))=xy$。求 $f(N\times\{1\})$, $f(\{0\})$，并说明是否是单射、满射或双射？（在此处 N 必包含 0）

解： 容易说明 f 不是单射：$f((1,4))=f((2,2))$，但 $(1,4)\neq(2,2)$。

f 是满射：$\forall y\in N$, 有 $f((1,y))=1\cdot y=y$，任一元素都存在有原象。

$f(N\times\{1\})=\{n\cdot 1 \mid n\in N\}=N$；

$f^{-1}(\{0\})=\{(x,y)\mid xy=0\}=(N\times\{0\})\cup(\{0\}\times N)$。

例 7 设 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 是两个映射，$g \circ f$ 是一个满射，若 g 是单射，证明 f 是满射。

证： 假设 f 不是满射，则有 $f(X) \neq Y$。即存在 $y_0 \in Y$，使得 $\forall x \in X, f(x) \neq y_0$。

又由 g 是映射，则有 $g(y_0) = z_0 \in Z$；

因 $g \circ f$ 是满射，故对上面 $z_0 \in Z$，必存在 $x \in X$，使得 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z_0$，取 $f(x) = y_1$，有 $g(y_1) = z_0$，而 $y_1 \neq y_0$，但 $g(y_1) = g(y_0) = z_0$，故 g 不是单射，与题设矛盾。于是假设不成立，即 f 是满射。

例 8 一个人步行了十小时，共走 45 公里，已知他第一个小时走了 6 公里，而最后一小时只走了 3 公里，证明：一定存在连续的两个小时，在这两个小时之内至少走了 9 公里。

证： 设 a_i 为第 i 小时步行的路程，连续两小时一共有 9 种：

$a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_8 + a_9, a_9 + a_{10}$。即相当于有 9 个抽屉，而

$\sum_{i=1}^{9}(a_i + a_{i+1}) = 2\sum_{i=1}^{10} a_i - a_1 - a_{10} = 2 \times 45 - 6 - 3 = 81$。即相当于有 81 个物体，于是把 81 个物体放入 9 个抽屉里，必有一个抽屉里至少有 9 个物体，所以至少存在一个 k，使得 $a_k + a_{k+1} \geq 9$。此题解法可推广到连续 n 个小时的情况。

对本题还可简单证明如下：$a_1 = 6, a_{10} = 3, a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = 36$。

8 个小时路程分四段，$a_2 + a_3, a_4 + a_5, a_6 + a_7, a_8 + a_9$，但

$(a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + (a_8 + a_9) = 36$，由抽屉原理可知，必存在某一段的路程至少为 9 公里。