第五章

贪心算法

提要

5.1 贪心算法的基本原理

5.2 活动选择问题

5.3 Huffman 编码

5.4 最小生成树问题

5.5 Minimum Makespan Scheduling

参考资料

Introduction to Algorithms

Chapter 16 Pages 370-405

Chapter 23 Pages 561-579

5.1 贪心算法基本原理

- Greedy算法的基本概念
- Greedy算法与动态规划方法的比较
- Greedy算法的设计步骤

Greedy算法的基本概念

- 顾名思义，贪心算法总是作出在当前看来最好的选择
- 也就是说贪心算法并不从整体最优考虑，它所作出的选择只是在某种意义上的局部最优选择
- 当然，希望贪心算法得到的最终结果也是整体最优的

  – 兑换硬币问题

Greedy算法的基本概念

- 应用实例1
  - 兑换硬币问题

已知有5种不同面值的硬币:1元、2角5分、1角、5分、1分

欲兑换钱数：6角7分

目标：用于兑换的硬币个数最少

贪心策略
每次尽可能选择面额最大的硬币
即：当前看来最优的选择

如何兑换?

1. 穷举所有可能性： 代价高!
2. 贪心策略：按照面值从大到小选择硬币兑换

2角5分	：	2枚
1角	：	1枚
5分	：	1枚
1分	：	2枚

得到的兑换结果是最优解么?

是否总能得到最优解呢?

Greedy算法的基本概念

- 应用实例1
  - 兑换硬币问题

若不同面值的硬币为:1角1分、5分、1分
欲兑换钱数：1角5分
目标：用于兑换的硬币个数最少

贪心策略：每次尽可能选择面额最大的硬币
即：当前看来最优的选择

1角1分 ：1枚
1分 ：4枚

得到的兑换结果是最优解么？ No!

Greedy算法的基本概念

- 贪心算法的用途
  - 求解最优化问题
- 贪心算法的基本思想
  - 求解最优化问题的算法包含一系列步骤
  - 每一步都有一组选择
  - 作出在当前看来最好的选择
  - 希望通过作出局部优化选择达到全局优化选择

最终不一定得到全局最优解!

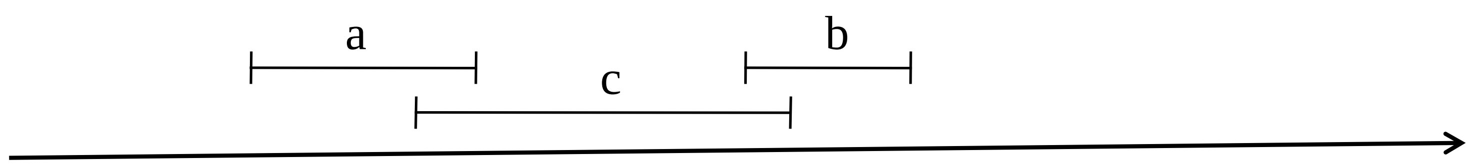
可能存在多种贪心策略!

Greedy算法的基本概念

- 应用实例2
  - 区间调度(活动选择)问题

输入：n个活动区间的集合$\{[s_1, f_1],[s_2, f_2],\ldots[s_n, f_n]\}$，
s_i是区间i的起始时间，f_i是终止时间，

输出：具有最多相容区间(活动)的调度

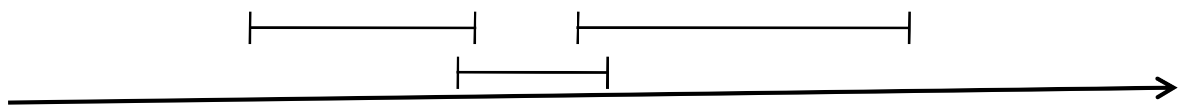


HITWH
SE

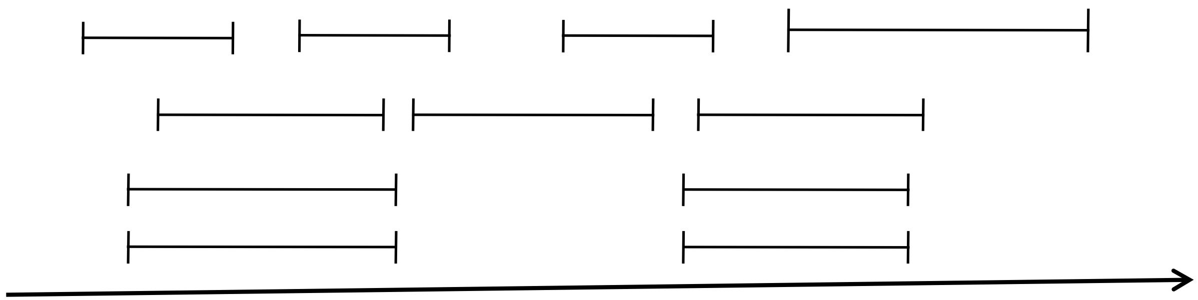
Greedy算法的基本概念

- Greedy算法的实例
  - 如何贪心选择?
    - 选择最有最小开始时间s_i的区间?

    - 选择具有最短时长$f_i - s_i$的区间?



    - 具有最少冲突的区间?



Greedy算法不一定产生最优解

HITWH
SE

Greedy算法的基本概念

- 贪心算法不能对所有问题都得到整体最优解，但对许多问题它能产生整体最优解，如：单源最短路经问题、最小生成树问题等
- 在一些情况下，即使贪心算法不能得到整体最优解，其最终结果却是最优解的很好近似

什么情况下可以产生最优解呢？？

- Greedy算法产生优化解的条件
  - 优化子结构
    - 若一个优化问题的优化解包含它的(剩余)子问题的优化解，则称其具有优化子结构
  - Greedy选择性(Greedy-choice property)
    - 一个优化问题的全局优化解可以通过局部优化选择得到

- Greedy选择性的证明
  - 归纳法
    - 对算法步数归纳或问题规模归纳
      - 证明在每一步做得都比其它算法好，从而最终产生了一个最优解
  - 交换论证法
    - 在保证最优性不变前提下，从一个最优解逐步替换，最终得到贪心算法的解
      - 证明贪心算法一定能够找到一个至少与其它最优解一样优化的解
      - 贪心选择性做出的选择至少包含于一个优化解中

HITWH
SE

与动态规划方法的比较

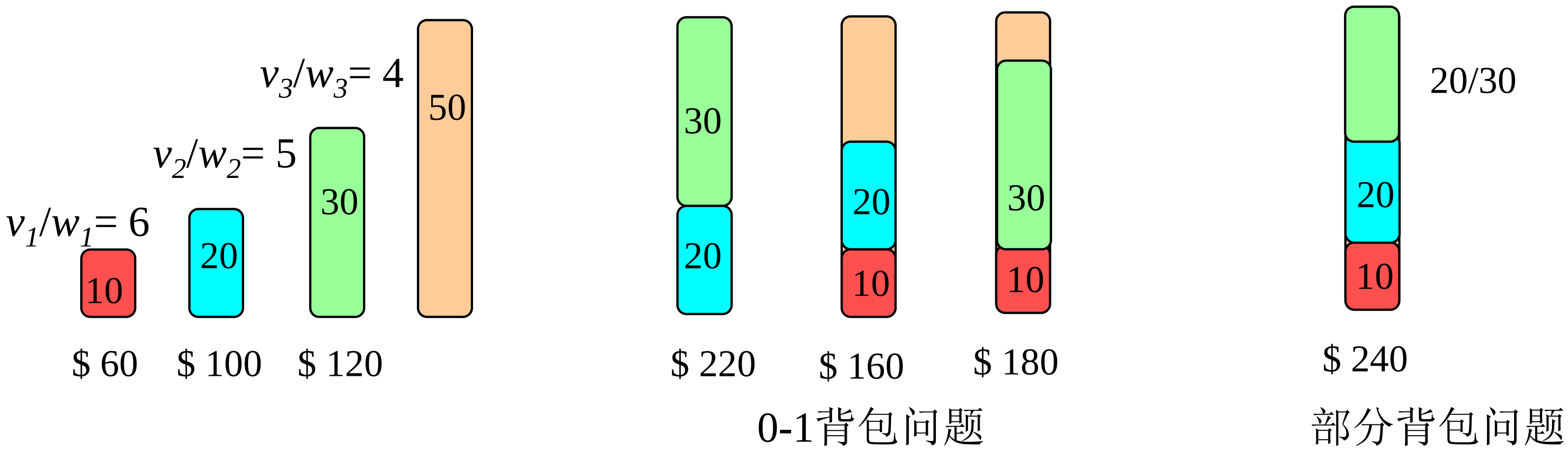
- 动态规划方法
  - 以自底向上方式，先解小子问题，再求解大子问题
  - 在每一步所做的选择通常依赖于子问题的解
- Greedy方法
  - 以自顶向下方式，逐步进行贪心选择，不断减少子问题规模
  - 在每一步先做出当前看起来最好的选择
  - 然后再求解本次选择后产生的剩余子问题
  - 每次选择既不依赖于子问题的解，也不依赖于未来的选择

与动态规划方法的比较

- 动态规划方法可用的条件
  - 优化子结构
  - 子问题重叠性
- Greedy方法可用的条件
  - 优化子结构
  - Greedy选择性
- 可用Greedy方法时，动态规划方法可能不适用
- 可用动态规划方法时，Greedy方法可能不适用

与动态规划方法的比较

- 例如：0-1背包问题与部分背包问题
  - 都具有优化子结构
  - 但是，部分背包问题可用贪心策略解决，而0-1背包问题却不行！
    - 计算每个物品每磅价值v_i/w_i，并按照每磅价值由大到小顺序取物品



准确Greedy算法的设计步骤

1. 设计贪心选择方法：
   - 贪心选择方法
   - 剩余子问题

很重要！
决定能否得到
全局最优解

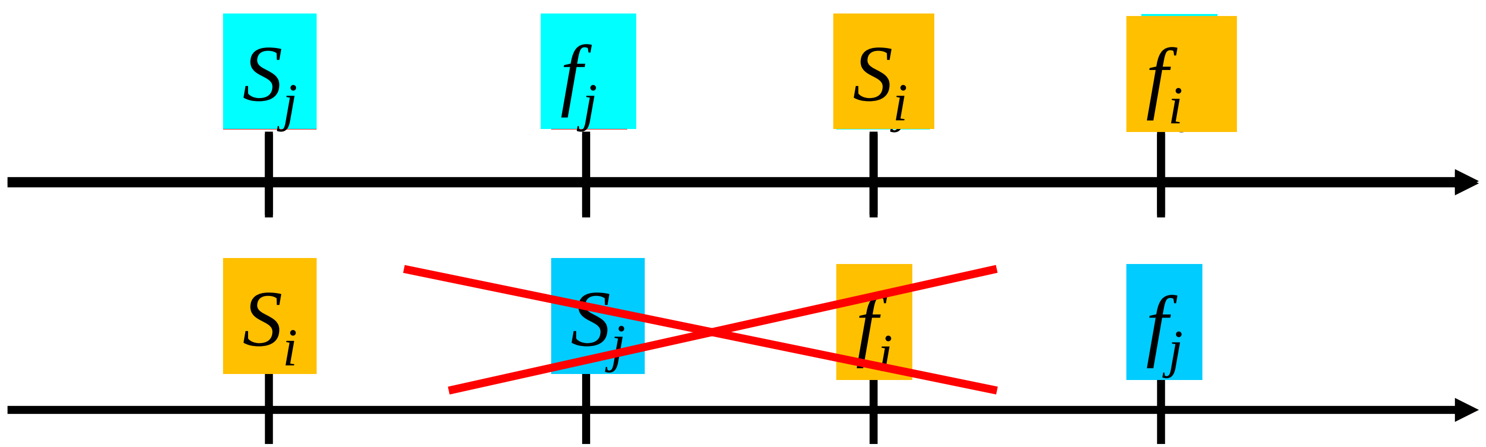
2. 证明：对于1中贪心选择来说，所求解的问题具有优化子结构
3. 证明：对于1中贪心选择算法来说，所求解的问题具有Greedy选择性
4. 按照1中设计的贪心选择方法设计算法

5.2 An activity-selection problem

- 问题定义
- 问题求解
  - 设计贪心选择方法
  - 优化解的结构分析
  - Greedy选择性证明
  - 算法设计
  - 算法复杂性分析

问题的定义

- 活动
  - 设$S=\{1,2,\ldots,n\}$是n个活动的集合，所有活动共享一个资源，该资源同时只能为一个活动使用
  - 每个活动i有起始时间s_i，终止时间f_i，$s_i \le f_i$
- 相容活动
  - 活动i和j是相容的，若$s_j \ge f_i$或$s_i \ge f_j$，即



问题的定义

- 活动选择问题
  - 输入：$S=\{1, 2, \ldots, n\}$,
    $F=\{\ [s_{i,}\ f_i]\ \}$，$n \geq i \geq 1$
  - 输出：S中的最大相容活动集合

- 动态规划方法
  - 活动按结束时间f_i递增排序
  - 假定M[i, t]为活动[i:n] 在时间t之后的最大相容活动数
  - 代价的递归方程

$$M[i, t] = \max(M[i+1, t],\ M[i+1, f_i] + 1)$$

HITWH
SE

- 贪心思想

为了选择最多的相容活动，每次选f_i最小的活动，使我们能够选更多的活动

剩余子问题：

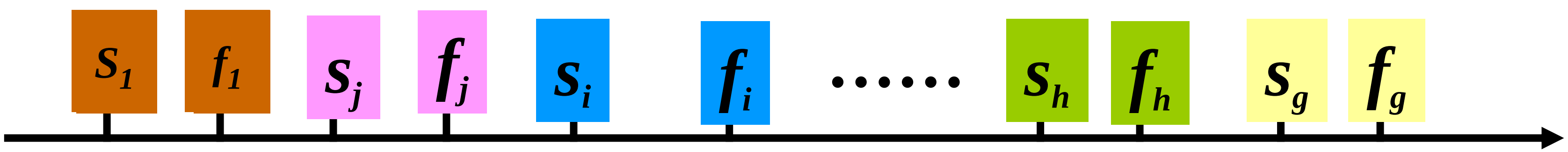
$$S_i = \{ j \in S \mid s_j \geq f_i \}$$

引理1说明活动选择问题具有贪心选择性

引理1 设$S=\{1,2,\ldots,n\}$是n个活动集合，$[s_i, f_i]$是活动i的起始终止时间，且$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$。

则S的活动选择问题的某个优化解包括活动1.

证 设A是一个优化解，按结束时间排序A中活动，设其第一个活动为k，第二个活动为j. ……



如果$k=1$，引理成立.

如果$k \neq 1$，令$B=A-\{k\} \cup \{1\}$,

由于A中活动相容，$f_1 \leq f_k \leq s_j$，B中活动相容.

因为$|B|=|A|$，所以B是一个优化解，且包括活动1.

引理2. 设$S=\{1, 2, ..., n\}$是n个活动集合，$[s_i, f_i]$是活动i的起始终止时间，且$f_1 \le f_2 \le ... \le f_n$，设$A$是$S$的调度问题的一个优化解且包括活动1，则$A'=A-\{1\}$是$S'=\{i \in S | s_i \ge f_1\}$的调度问题的优化解.

证. 显然，A'中的活动是相容的.

我们仅需要证明A'是最大的.

设不然，存在一个S'的活动选择问题的优化解B'，$|B'|>|A'|$.

令$B=\{1\} \cup B'$. 对于$\forall i \in S'$, $s_i \ge f_1$, B中活动相容.

B是S的一个解.

由于$|A|=|A'|+1$, $|B|=|B'|+1>|A'|+1=|A|$, 与A最大矛盾.

引理2说明活动选择问题具有优化子结构

引理3. 设 $S=\{1, 2, ..., n\}$ 是 n 个活动集合, $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n$, $f_{l_0}=0$, l_i 是 $S_i=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_{i-1}}\}$ 中具有最小结束时间 f_{l_i} 的活动, 令 $k=\min\{i \mid S_{i+1}=\emptyset\}$. 则 $A=\cup_{i=1}^{k}\{l_i\}$ 是 S 的优化解

$S_1=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $l_0=0$	$l_1=1$
$S_2=\{4, 6,7,8,9,11\}$, $l_1=1$	$l_2=4$
$S_3=\{8,9,11\}$, $l_2=4$	$l_3=8$
$S_4=\{11\}$, $l_3=8$	$l_4=11$
$S_5=\emptyset$, $l_4=11$	

$S_1=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_0}=0\}$

$S_2=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_1}=f_1\}$

$S_3=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_2}\}$

……

$S_k=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_{k-1}}\}$

$S_{k+1}=\{ j \in S \mid s_j \geq f_{l_k}\}=\emptyset$

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
s_i	1	3	3	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

引理3.设 $S=\{1, 2, ..., n\}$ 是 n 个活动集合, $f_1\leq f_2\leq ...\leq f_n$, $f_{l_0}=0$, l_i 是 $S_i=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_{i-1}}\}$ 中具有最小结束时间 f_{l_i} 的活动, 令 $k=\min\{i|S_{i+1}=\emptyset\}$. 则 $A=\cup_{i=1}^{k}\{l_i\}$ 是 S 的优化解

证. 思路: 证明存在一个优化解 A 等于 $\cup_{i=1}^{k}\{l_i\}$

对 $|A|$ 作归纳法.

当 $|A|=1$ 时, 由引理1,命题成立.

设 $|A|\leq k-1$ 时, 命题成立.

当 $|A|=k$ 时,由引理2, $A=\{l_1=1\}\cup A_1$.

A_1 是 $S_2=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_1}=f_1\}$ 的优化解.

由归纳假设, 存在优化解 $A_1=\cup_{i=2}^{k}\{l_i\}$.

于是, $A=\cup_{i=1}^{k}\{l_i\}$ 是 S 的优化解.

$S_1=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_0}=0\}$

$S_2=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_1}=f_1\}$

$S_3=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_2}\}$

……

$S_k=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_{k-1}}\}$

$S_{k+1}=\{ j\in S \mid s_j\geq f_{l_k}\}=\emptyset$

- 贪心选择方法
  - 选择：
    - 每次选择具有最小结束时间的活动f_i
  - 剩余子问题：
    - $S_i = \{ j \in S \mid s_j \geq f_i \}$

- 算法

（设$f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n$已排序）

Greedy-Activity-Selector(S, F)

$n \leftarrow$ length(S);

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

For $i \leftarrow 2$ To n Do

If $s_i \ge f_j$

Then $A \leftarrow A \cup \{i\}$；$j \leftarrow i$；

Return A

- 如果结束时间已排序

$T(n)=\theta(n)$

- 如果 结束时间未排序

$T(n)=\theta(n)+\theta(nlogn)$

$=\theta(nlogn)$

算法正确性分析

定理1. Greedy-Activity-Selector算法能够产生最优解.

证.

(1) 由引理2可知活动选择问题具有优化子结构

(2) 由引理3知贪心选择方法具有Greedy选择性

(3) Greedy-Activity-Selector算法确实按照引理3的Greedy选择性进行局部优化选择.

5.3 Huffman codes

- 问题定义
- 问题求解
  - 设计贪心选择方法
  - 优化解的结构分析
  - Greedy选择性证明
  - 算法设计
  - 算法复杂性分析

问题的定义

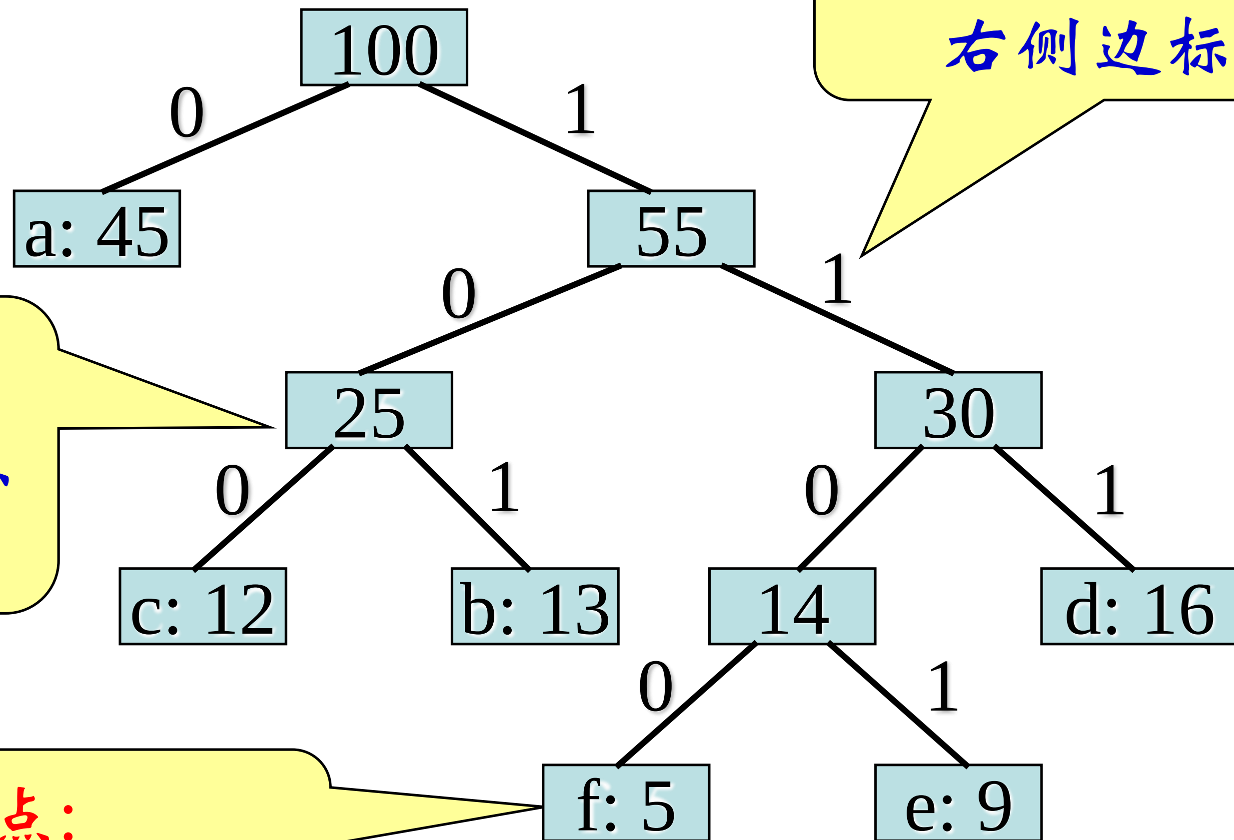
- 二进制字符编码
  - 每个字符用一个二进制0、1串来表示.
- 固定长编码
  - 每个字符都用相同长度的0、1串表示.
- 可变长编码
  - 经常出现的字符用短码，不经常出现的用长码
- 前缀编码
  - 无任何字符的编码是另一个字符编码的前缀

HITWH SE

一颗编码树对应一个编码方案

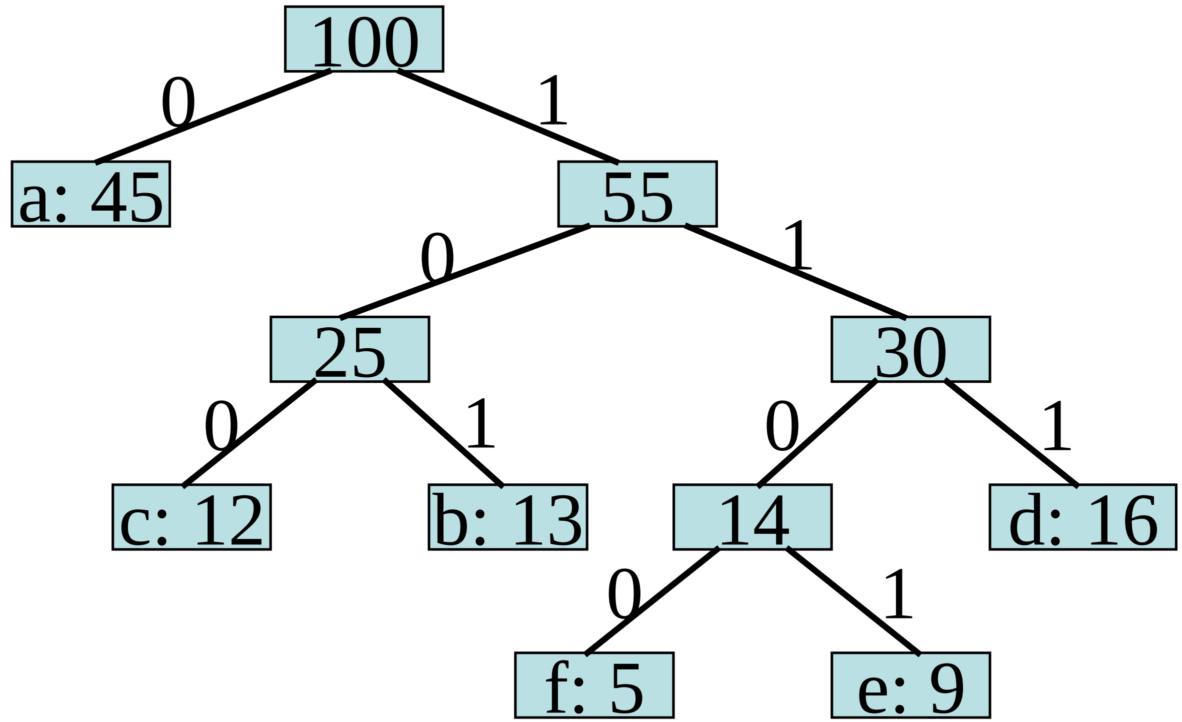
- 编码树

边标记：左边标记0，右侧边标记1



内结点：子树的叶结点的频数和

叶结点：字符及其出现的频数



- 编码树T的代价
  - 设C是字母表(给定文件中的字母集合),$\forall c \in C$
  - $f(c)$是c在文件中出现的频数
  - $d_T(c)$是叶子c在树T中的深度，即c的编码长度
  - T的代价是编码一个文件的所有字符的代码长度(位数):

$$B(T)=\sum_{c \in C} f(c) d_T(c)$$

- 优化编码树问题

输入：字母表 $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$，

频数表 $F = \{f(c_1), f(c_2), ..., f(c_n)\}$

输出：具有最小 $B(T)$ 的 C 的前缀编码树

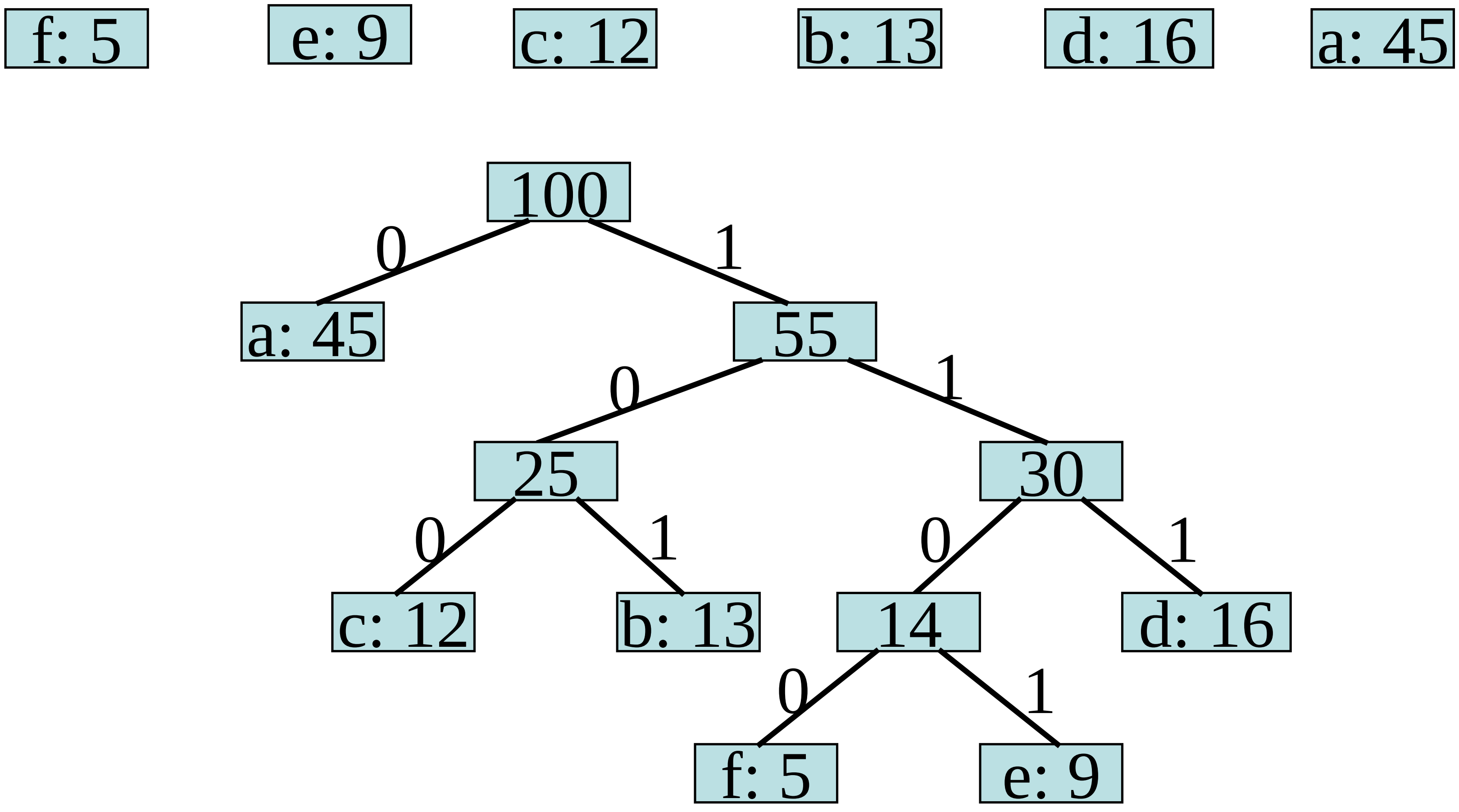
贪心思想：

循环地选择具有最低频数的两个结点，生成一棵子树，直至形成树

剩余子问题：？？？

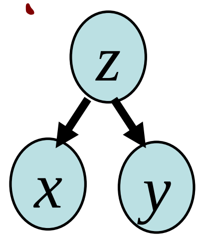
贪心思想：

循环地选择具有最低频数的两个结点，生成一棵子树，直至形成树



设计贪心选择方法

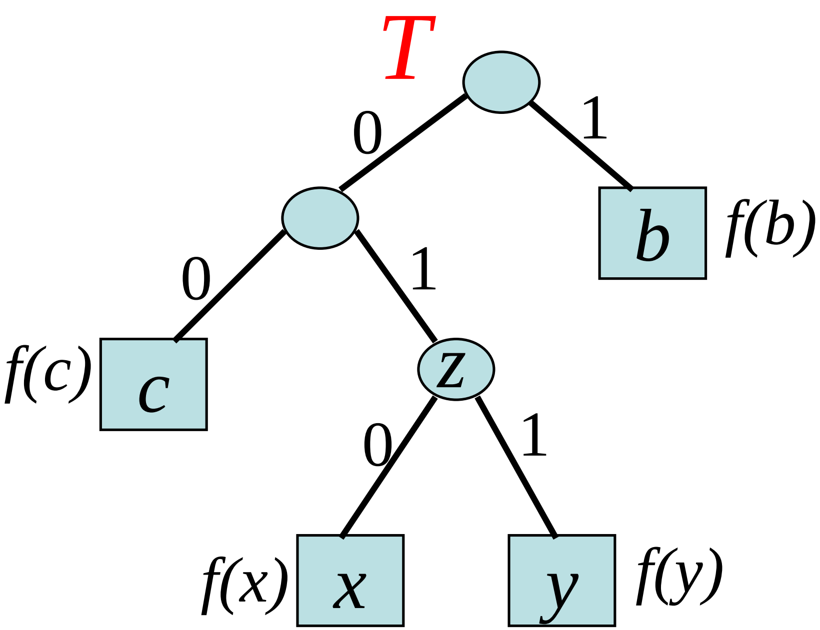
- 贪心选择方法
  - 选择方法：
    - 每次选择具有最低频数的两个节点x和y，构造一个子树：

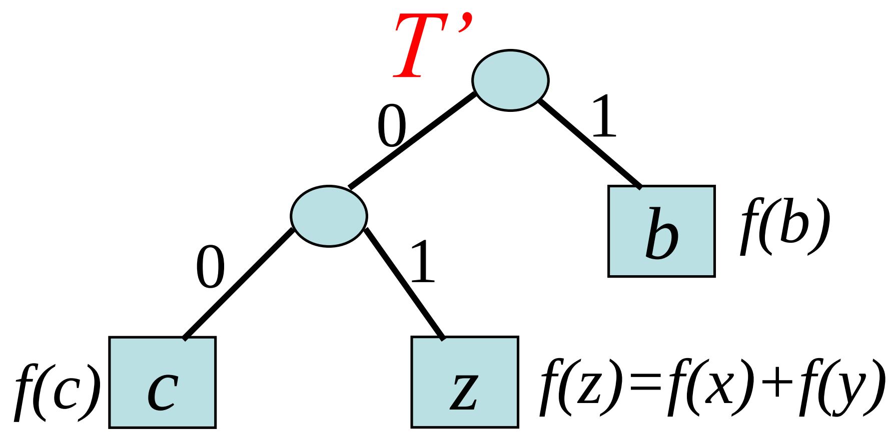


  - 剩余子问题的结构：
    - $C' = C - \{ x, y \} \cup \{ z \}$
    - $F' = F - \{f(x), f(y)\} \cup \{f(z)\},\ f(z) = f(x) + f(y)$

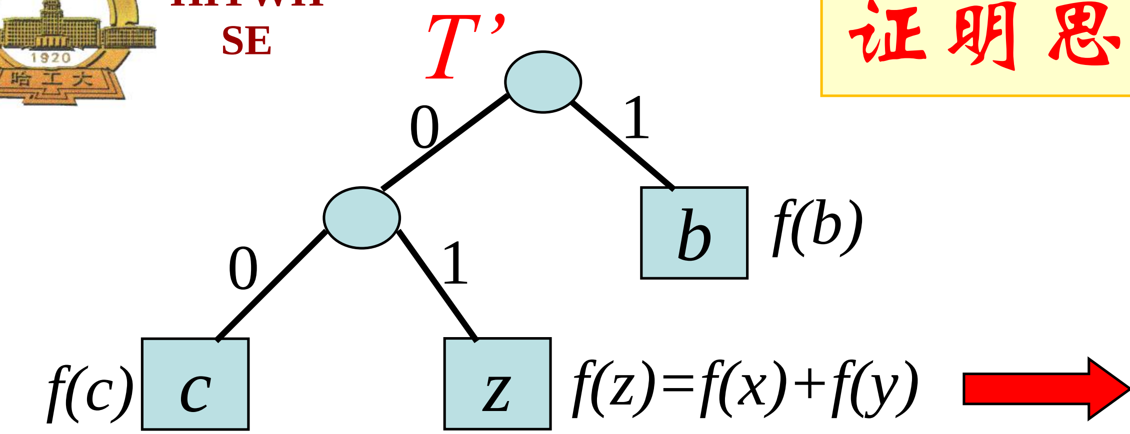
优化解的结构分析

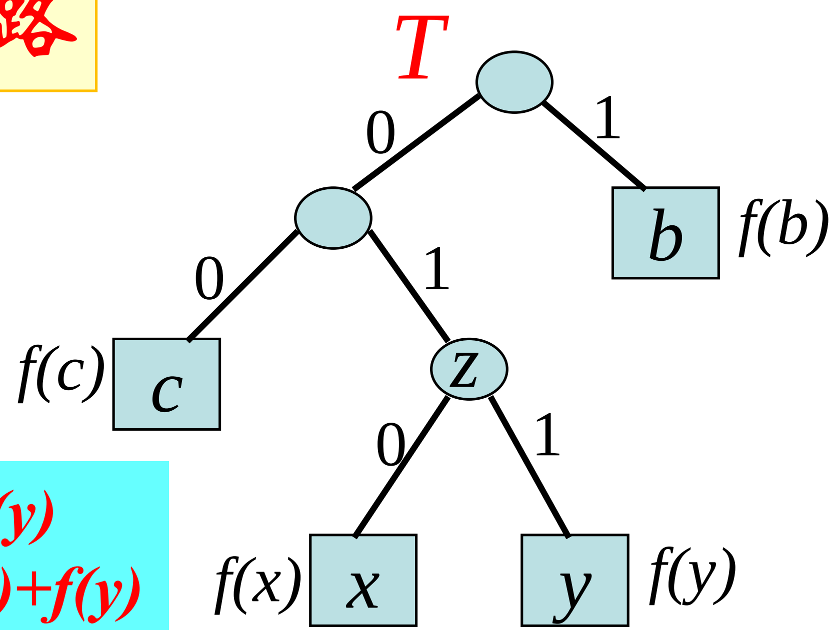
引理1. 设T是字母表C的优化前缀树，$\forall c \in C$，$f(c)$是c在文件中出现的频数.设x、y是T中任意两个相邻叶结点，z是它们的父结点，则z作为频数是$f(z)=f(x)+f(y)$的字符，$T'=T-\{x,y\}$是字母表$C'=C-\{x,y\}\cup\{z\}$的优化前缀编码树.





证明思路



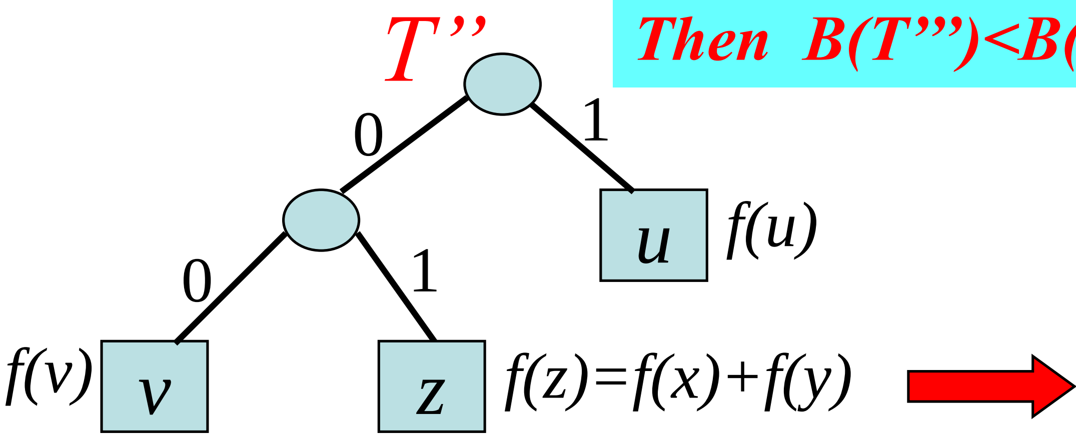


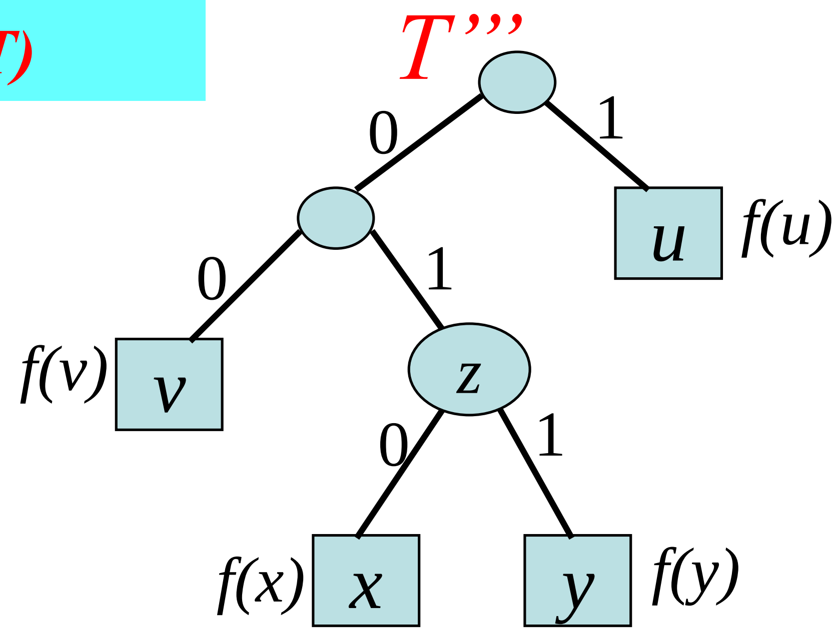
$B(T)=B(T')+f(x)+f(y)$

$B(T''')=B(T'')+f(x)+f(y)$

If $B(T'')<B(T')$

Then $B(T''')<B(T)$



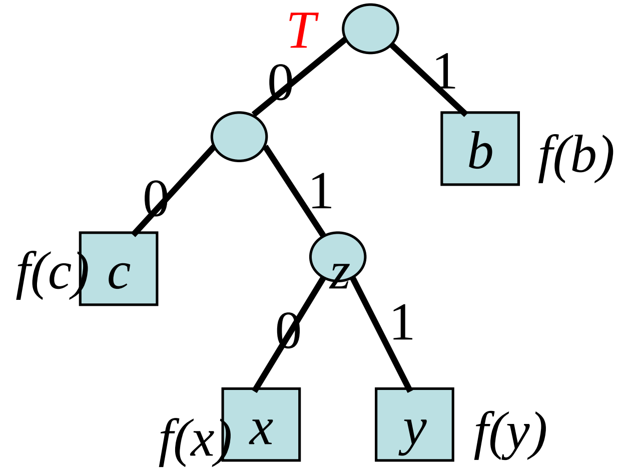


H

证．往证$B(T)=B(T')+f(x)+f(y)$.

$$B(T)=f(x)d_T(x)+f(y)d_T(y)+\underline{\sum_{k\in C-\{x,y\}} f(k)d_T(k)}$$

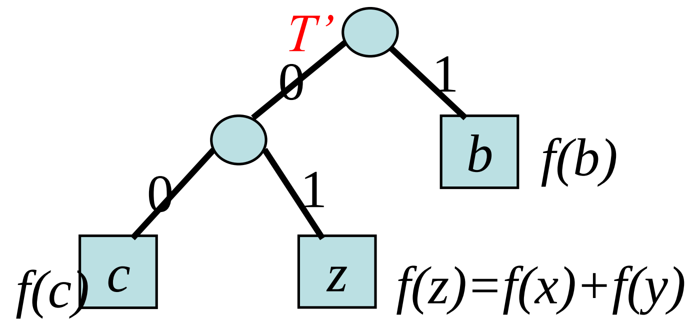
$$B(T')= f(z)d_{T'}(z) +\underline{\sum_{k\in C'-\{z\}} f(k)d_{T'}(k)}$$



$$B(T)-B(T') = (f(x)d_T(x)+f(y)d_T(y)) - f(z)d_{T'}(z)$$

由于$f(z) =f(x)+f(y)$, $d_T(x)=d_T(y)=d_{T'}(z)+1$

$$B(T)-B(T') = (f(x)+f(y))(d_{T'}(z)+1) - (f(x)+f(y))d_{T'}(z) =f(x)+f(y).$$



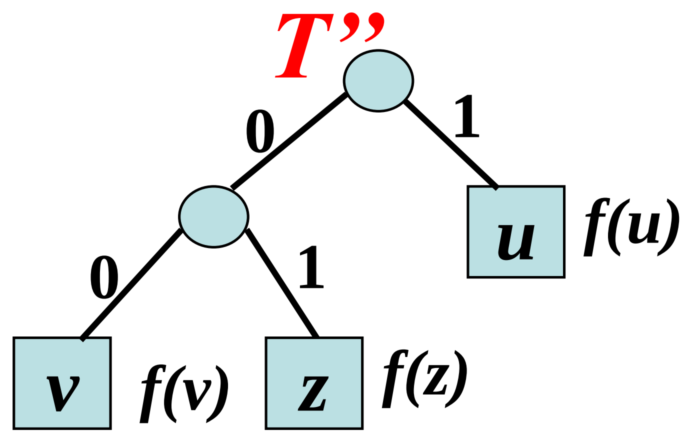
若T'不是C'的优化前缀码树，

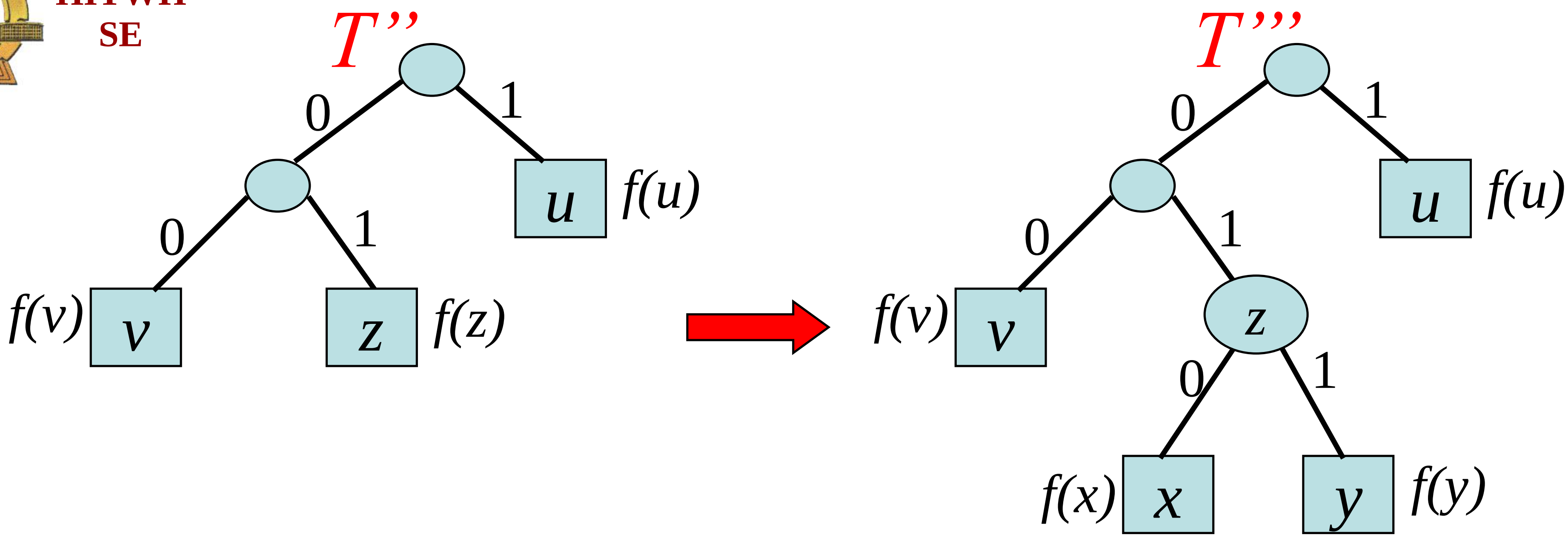
则必存在T''，使$B(T'')<B(T')$.

因为z是C'中字符,它必为T''中的叶子.

把结点x与y加入T''，作为z的子结点，

则得到C的一个如下前缀编码树T'''：





如上可证：

$B(T''') = B(T'')+f(x)+f(y)$。

由于$B(T'')<B(T')$，

$B(T''') = B(T'')+f(x)+f(y) < B(T')+f(x)+f(y)=B(T)$

与T是优化的矛盾，故T'是C'的优化编码树.

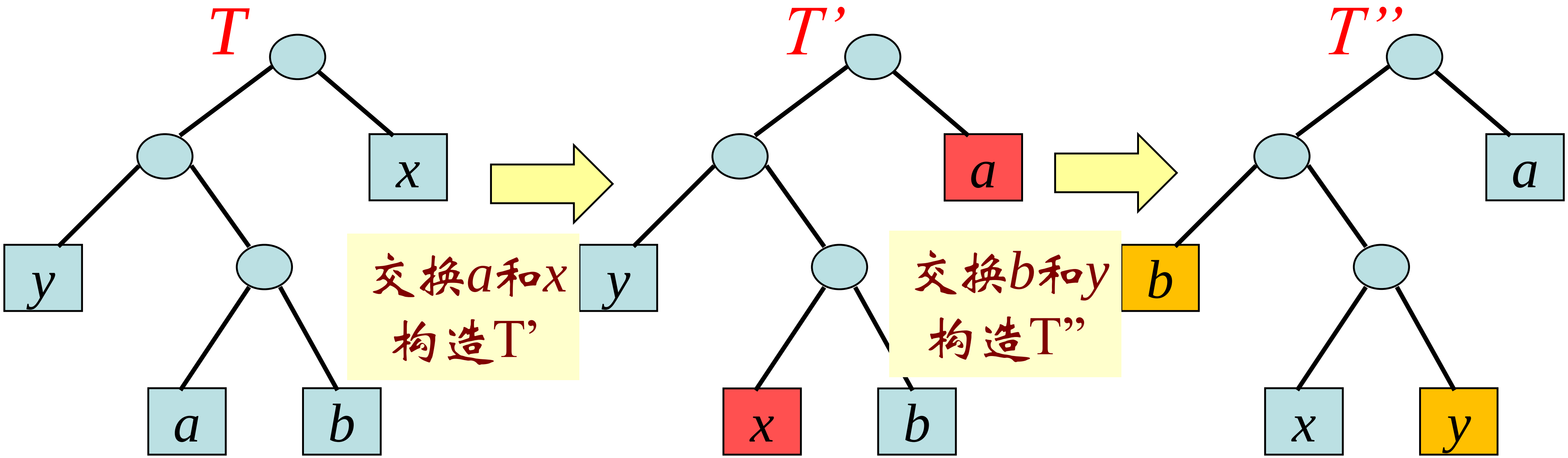
Greedy选择性

引理2. 设C是字母表，$\forall c \in C$，c具有频数$f(c)$, x、y是C中具有最小频数的两个字符，则存在一个C的优化前缀树，x与y的编码具有相同最大长度，且仅在最末一位不同.

优化前缀树问题具有Greedy选择性.

证：若T是C的优化前缀树，如果x和y是具有最大深度的两个兄弟字符，则命题得证。

若不然，设a和b是具有最大深度的两个兄弟字符：



不失一般性，设$f(a)\leq f(b)$, $f(x)\leq f(y)$.

因x与y是具有最低频数的字符，$f(x)\leq f(y)\leq f(a)\leq f(b)$.

交换T的a和x，从T构造T'；

交换T'的b和y，从T'构造T''

往证T''是最优化前缀树.

$B(T)-B(T')$

$$= \sum_{c\in C} f(c)d_T(c) - \sum_{c\in C} f(c)d_{T'}(c)$$

$$= f(x)d_T(x) + f(a)d_T(a) - f(x)d_{T'}(x) - f(a)d_{T'}(a)$$

$$= f(x)d_T(x) + f(a)d_T(a) - f(x)d_T(a) - f(a)d_T(x)$$

$$= (f(a)-f(x))(d_T(a)-d_T(x)).$$

$\because f(a)\geq f(x),\ d_T(a)\geq d_T(x)$ (因为a的深度最大)

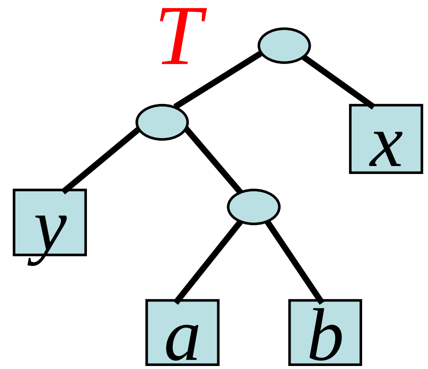
$\therefore B(T)-B(T')\geq 0,\ B(T)\geq B(T')$

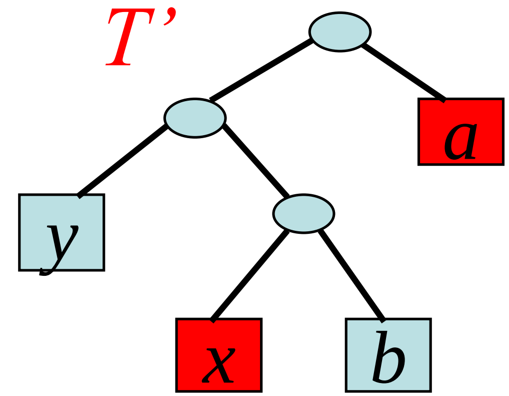
同理可证$B(T')\geq B(T'')$. 于是$B(T)\geq B(T'')$.

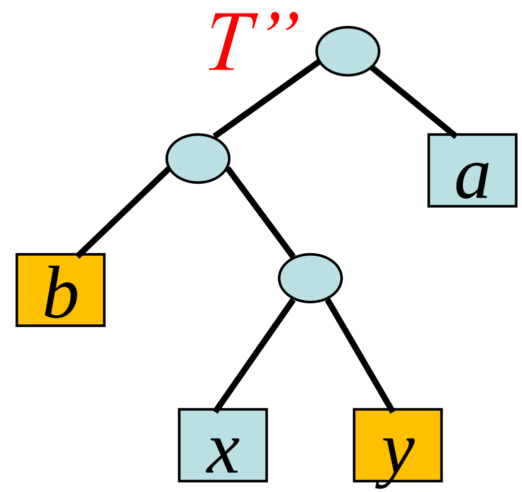
由于T是最优化的，所以$B(T)\leq B(T'')$.

于是, $B(T)=B(T'')$, T''是C的最优化前缀编码树.

在T''中, x和y具有相同最大长度编码,且仅最后位不同.







- 基本思想
  - 循环地选择具有最低频数的两个结点，生成一棵子树，直至形成树

- Greedy算法 (*Q*是min-heap)

Huffman(*C*，*F*)

1. $n \leftarrow |C|$; $Q \leftarrow$ 根据*F*排序*C*; *T*为一个空树； 第1步：建堆*O*(*n*)
2. FOR $i \leftarrow 1$ To $n-1$ Do
3. $z \leftarrow$ Allocate-Node( );
4. $left[z] \leftarrow x \leftarrow$ Extract-min(*Q*) /*从*Q*删除*x**/;   *O*(log*n*)
5. $right[z] \leftarrow y \leftarrow$ Extract-min(*Q*) /*从*Q*删除*y* */;   *O*(log*n*)
6. $f(z) \leftarrow f(x)+f(y)$;
7.   Insert(*Q*, *z*, *f*(*z*));   *O*(log*n*)
8. Return Extract-min(*Q*) /* 返回树的根 */

循环*n*-1次，故：

$T(n)=O(n\log n)$

关于算法行为

引理2. 设C是字母表，$\forall c\in C$，c具有频数$f(c)$，x、y是C中具有最小频数的两个字符，则存在一个C的优化前缀树，x与y的编码具有相同最大长度，且仅在最末一位不同.

引理3. 设C是字母表，x、y是C中具有最小频数的两个字符，则Huffman算法将x、y作为相邻叶子结点，设z是它们的父结点，Huffman算法求解剩余子问题的结果$T'=T-\{x,y\}$中，有：

$$d_{T'}(z) \geq \max\{d_{T'}(a)\} - 1.$$

结点x和y在T中具有最大的深度

正确性证明

定理3. Huffman算法产生一个优化前缀编码树

证. 由于引理1、引理2成立，

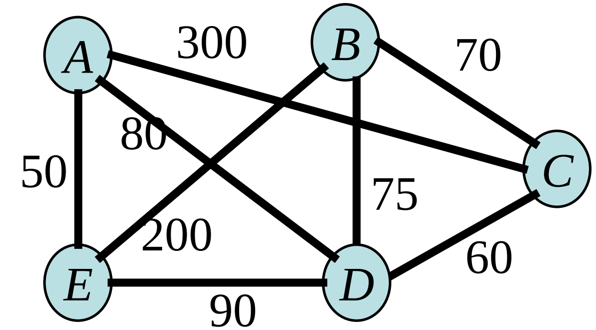
根据引理3，Huffman算法按照引理2的Greedy选择性确定的规则进行局部优化选择，所以Huffman算法产生一个优化前缀编码树。

5.4 Minimal spanning tree problem

- 问题定义
- Kruskal算法
- Prim算法
- Generic算法

问题的定义

- 生成树
  - 设$G=(V, E)$是一个边加权无向连通图. G的生成树是无向树$T=(V, E_T)$, $E_T \subseteq E$.
  - 如果 $W: E \rightarrow \{实数\}$ 是G的权函数, T的权值定义为$W(T)=\sum_{(u,v)\in T} W(u,v)$.

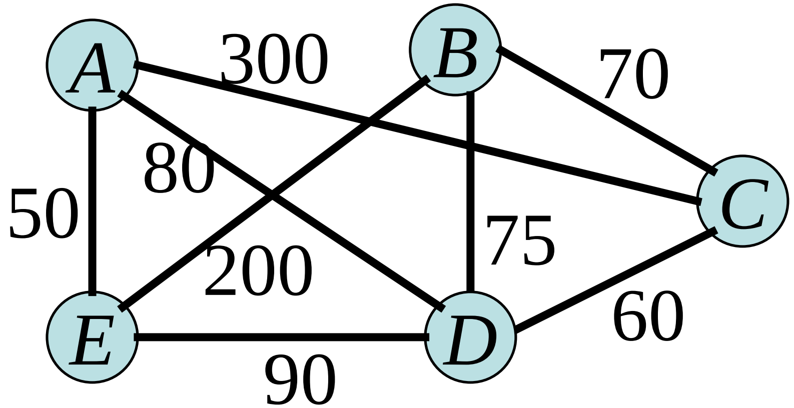


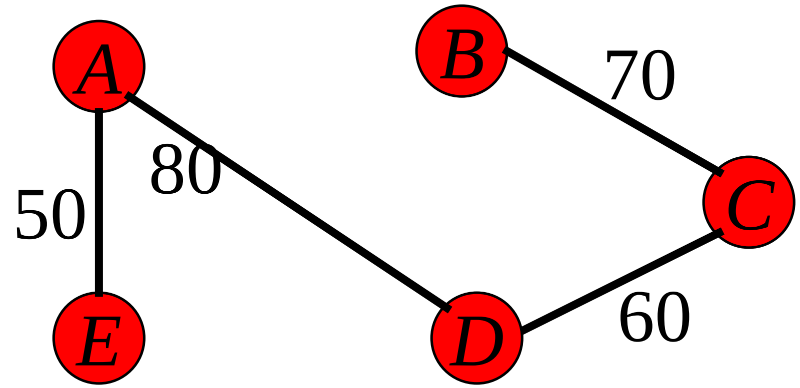
- 最小生成树
  - G的最小生成树是$W(T)$最小的G之生成树.
- 问题的定义

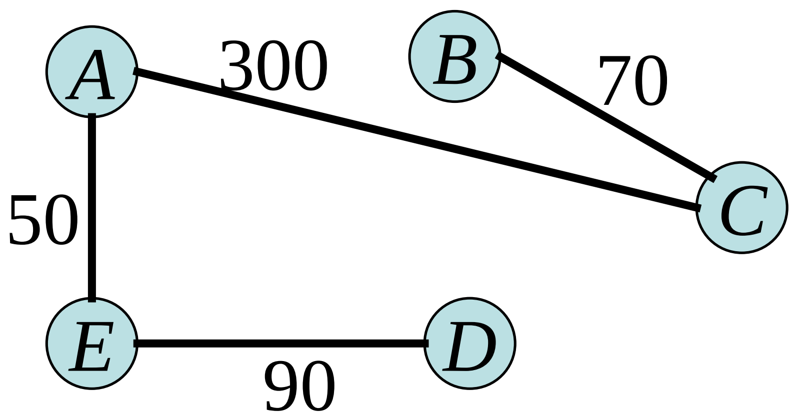
  输入: 无向连通图$G=(V, E)$, 权函数W

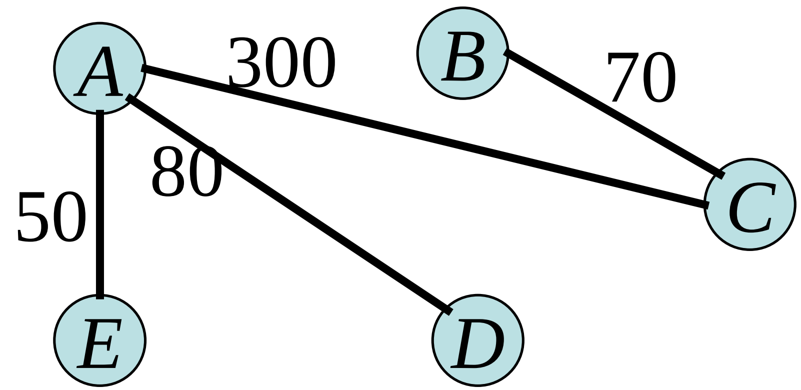
  输出: G的最小生成树

- 实例


A
300
B
70
80
C
50
200
75
E
D
60
90


A
B
70
80
C
50
E
D
60

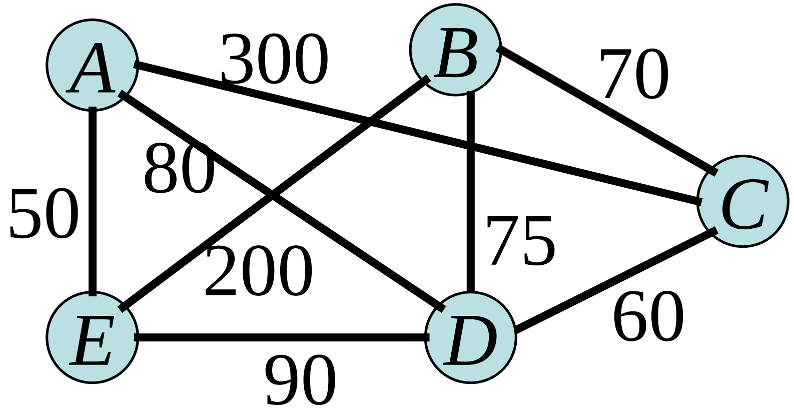

A
300
B
70
C
50
E
D
90


A
300
B
70
80
C
50
E
D

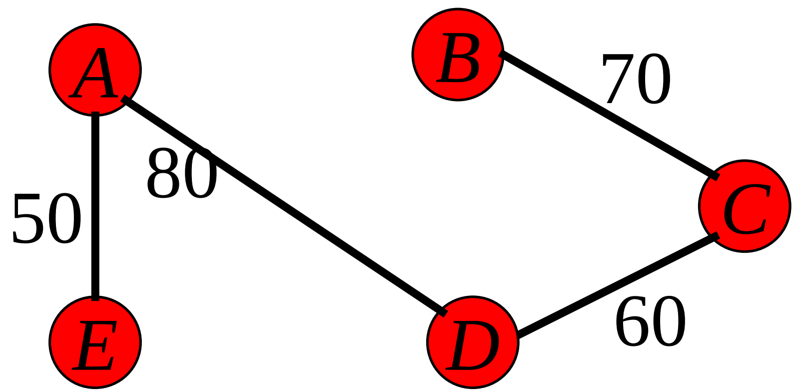
- Kruskal算法
  - 设计贪心选择方法
  - 优化解结构分析
  - Greedy选择性证明
  - 算法复杂性

设计贪心选择方法

- 基本思想



- 初始：*A*=空；构造森林$G_A=(V, A)$;

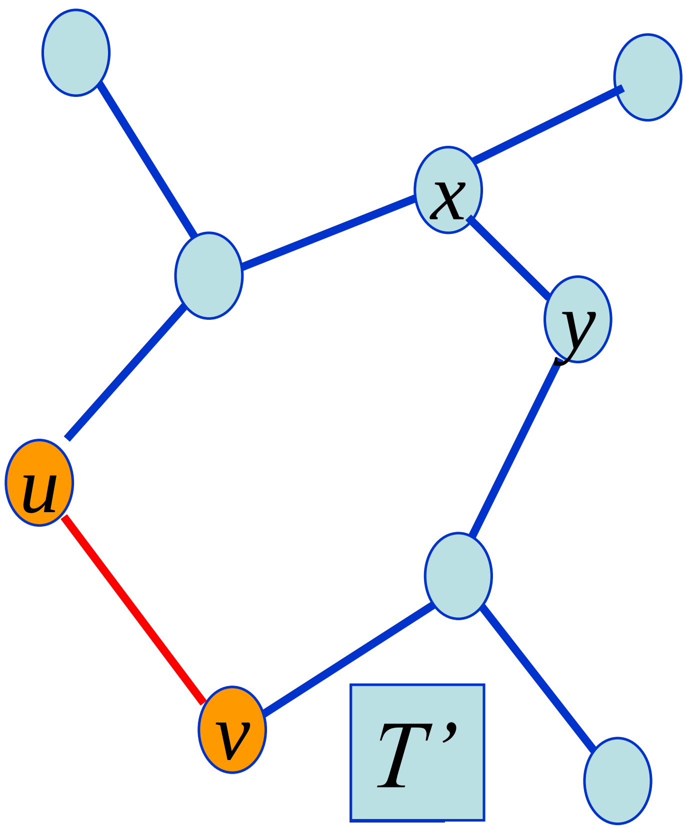


剩余子问题？

- 贪心策略：选择连接G_A中两棵树的具有最小权值的边加入A.

Greedy选择性

定理1. 设(u,v)是G中权值最小的边，则必有一棵最小生成树包含边(u,v).



证明：设T是G的一棵MST

若$(u,v)\in T$, 结论成立；

否则，如左图所示

在T中添加(u,v)边，必产生环

删除环中不同于(u,v)的权值最小的边，设为(x,y)，得到T'.

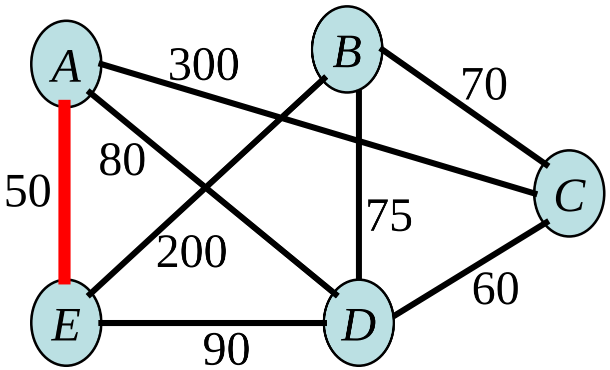
$$w(T')=w(T)-w(x,y)+w(u,v)\le w(T)$$

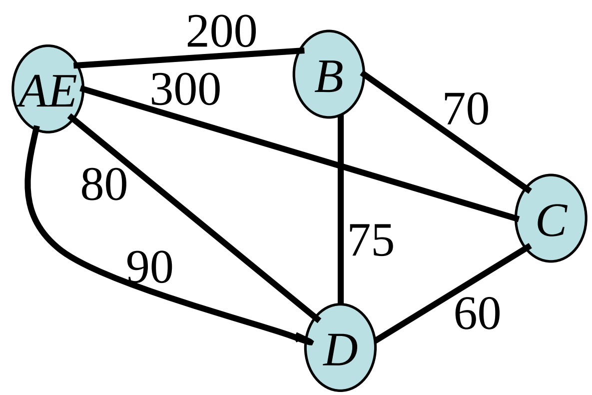
又T是最小生成树, $w(T)\le w(T')$

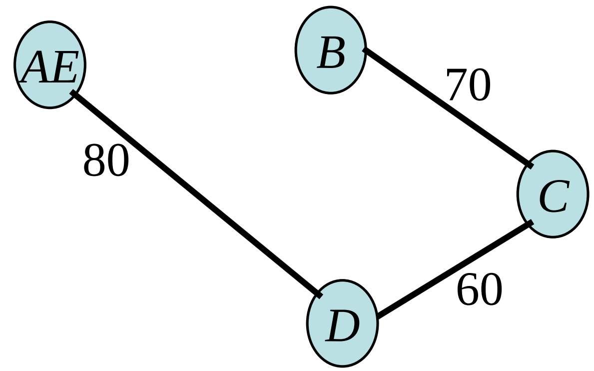
则T'也是一棵MST,且包含边(u,v).

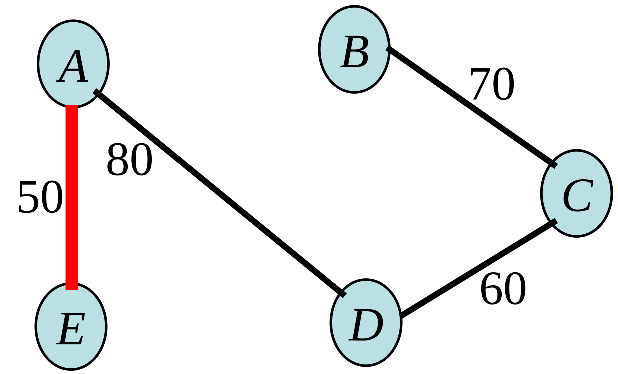
剩余子问题?

优化解的结构分析









- 图G的边(x,y)的收缩： $G/(x,y)$
  - 用新顶点z代替边(x,y)
  - $\forall v \in V$，用边(z, v)代替边(x, v)或(y, v)
  - 删除z到其自身的边
  - G的其余部分保持不变
- 收缩操作的逆操作称为扩张，表示为$G|_z^{(x,y)}$

优化解的结构分析

定理2.给定加权无向连通图$G=(V,E)$,权值函数为 $W:E\to R$, $(u,v)\in E$是G中权值最小的边。设T是G的包含(u,v)的一棵最小生成树，则$T/(u,v)$是$G/(u,v)$的一棵最小生成树.

证明.

由于$T/(u,v)$是不含回路的连通图且包含了$G/(u,v)$的所有顶点，因此，$T/(u,v)$是$G/(u,v)$的一棵生成树。

下面证明$T/(u,v)$是$G/(u,v)$的代价最小的生成树。

若不然，存在$G/(u,v)$的生成树T'使得$W(T')<W(T/(u,v))$。

显然，T'中包含顶点$z=(u,v)$且是连通的，因此$T''=T'|_{z}^{(u,v)}$包含G的所有顶点且不含回路，故T''是G的一棵生成树。

但,$W(T'')= W(T')+W(u,v) <W(T/(u,v))+W(u,v)=W(T)$,这与$T$是$G$的最小生成树矛盾。

Kruskal算法

```
MST-Kruskal(G(V, E), W)
A=Φ;
For ∀v∈V  Do
      Make-Set(v);  /* 建立只有v的集合 */
按照W值的递增顺序排序E中的边;
For ∀(u, v)∈E (按W值的递增顺序)  Do
      If  Find-Set(u)≠Find-Set(v) (判断是否出现回路)
      Then  A=A∪{(u, v)};  Union(u, v); (合并u,v集合)
Return  A
```

MST-Kruskal($G(V,E)$, W)
1. A=Φ;
2. For $\forall v \in V$ Do
3. Make-Set(v); /* 建立只有v的集合 */
4. 按照W值的递增顺序排序E;
5. For $\forall(u, v) \in E$ (按W值的递增顺序) Do
6. If Find-Set(u)$\neq$Find-Set(v)
7. Then $A=A\cup\{(u, v)\}$; Union(u, v);
8. Return A

- 令$n=|V|$, $m=|E|$
- 第2-3步执行$O(n)$个Make-Set操作
- 第4步需要时间: $O(m\log m)$
- 第5-7步执行$O(m)$个Find-Set和Union操作

第2-3步和5-7步需要的时间为:

$O((n+m)\alpha(n))$

- $m \geq n-1$(因为G连通), 由$\alpha(n)<\log n<\log m$
- 总时间复杂性: $O(m\log m)$

集合操作的复杂性见Intro. To Algo. 第21章（498-509）

后续章节中将介绍这部分内容

定理2. MST-Kruskal(G, W)算法能够产生图G的最小生成树.

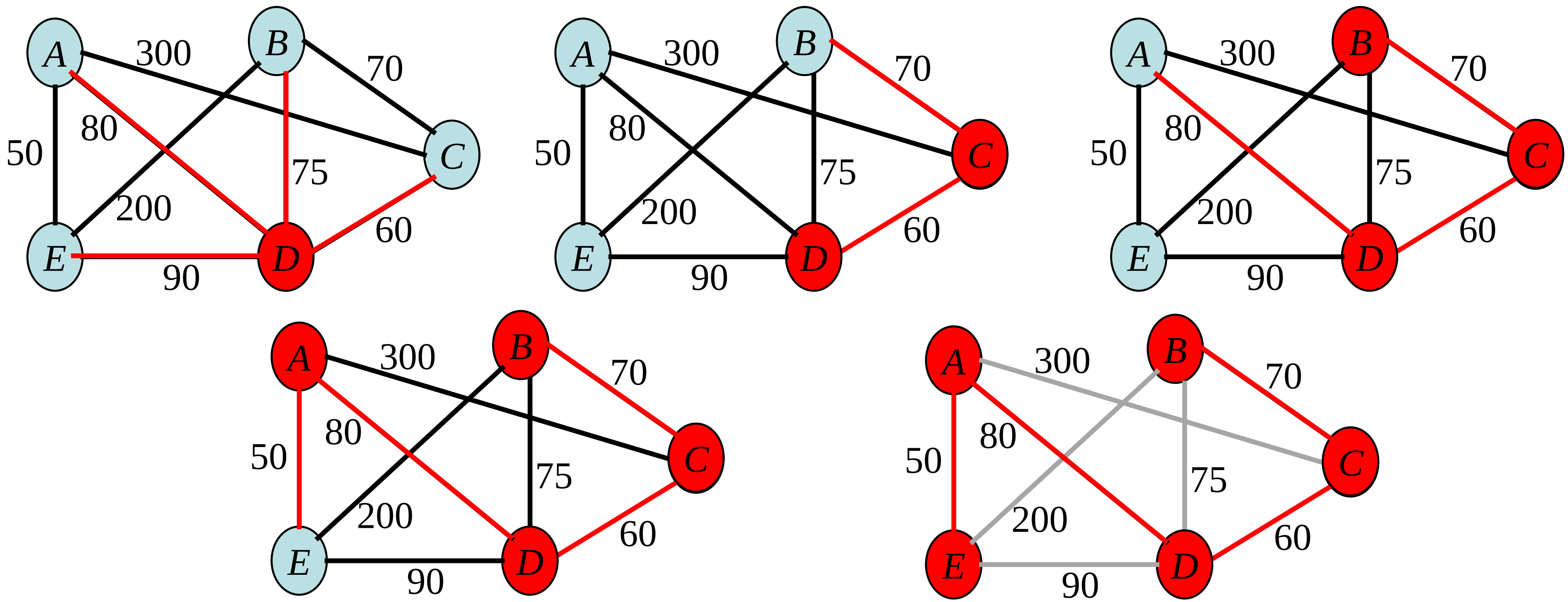
证.

因为算法按照Greedy选择性进行局部优化选择，并且每次选择的都是权值最小的边.

- **Prim算法**
  - 设计贪心选择方法
  - 优化解结构分析
  - Greedy选择性证明
  - 算法复杂性

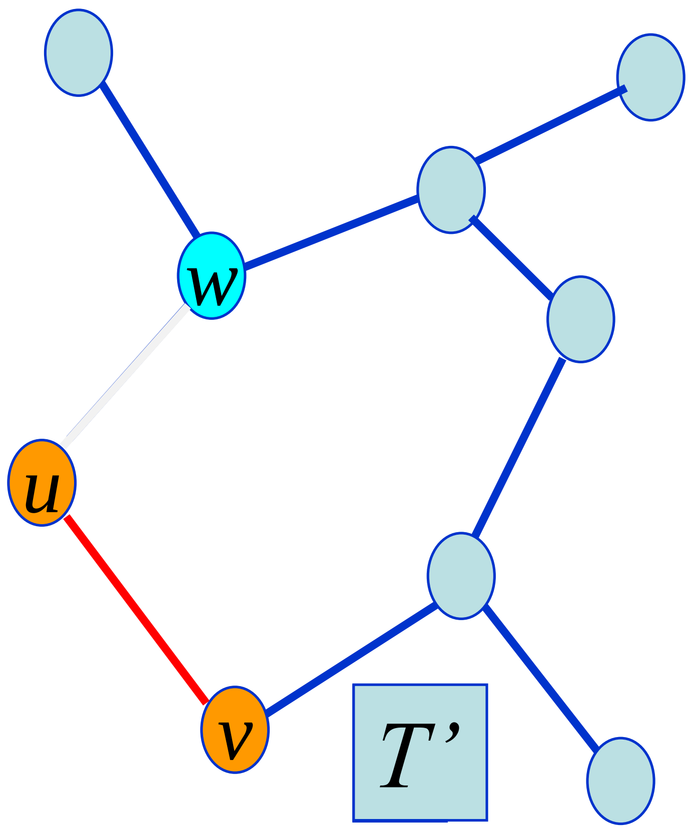
设计贪心选择方法

- 贪心策略
  - 以任意顶点v_r作为树根，初始$C=\{v_r\}$
  - 选择C和V-C之间权值最小的边(x,y), $x \in C$, $y \in V$-C
  - $C= C \cup \{y\}$



Greedy选择性

定理1. 设(u,v)是G中与节点u相关联的权值最小的边，则必有一棵最小生成树包含边(u,v).



证明：设T是G的一棵MST

若$(u,v) \in T$, 结论成立；

否则，如左图所示

在T中添加(u,v)边，必产生环

删除环中与u相关联的边(u,w)，

得到T'.

$w(T')=w(T)-w(u,w)+w(u,v) \leq w(T)$

又T是最小生成树, $w(T) \leq w(T')$

则T'也是一棵MST,且包含边(u,v).

定理2.给定加权无向连通图$G=(V,E)$,权值函数为 $W:E\rightarrow R$, $(u,v)\in E$是G中与节点u相关联的权值最小的边。设T是G的包含(u,v)的一棵最小生成树，则$T/(u,v)$是$G/(u,v)$的一棵最小生成树.

证明. 略

与Kruskal算法类似

Prim算法

MST-Prim(G, W, r)

Input　连通图G，权值函数W，树根r

Output　G的一棵以r为根的生成树

1. For $\forall\ v \in V[G]$　Do
2. 　　key[v]$\leftarrow +\infty$　　//所有与v邻接的边的最小权值
3. 　　$\pi[v] \leftarrow$null　　//与v邻接的具有最小权值的边
4. key[r] $\leftarrow 0$
5. $Q \leftarrow V[G]$
6. While $Q \neq \varnothing$ do
7. 　　$u \leftarrow$Extract_Min(Q)
8. 　　for $\forall v \in$Adj[u]　do
9. 　　　if $v \in Q$ 且 $w(u,v)<$key[v]　then
10. 　　　　$\pi[v] \leftarrow u$
11. 　　　　key[v] $\leftarrow$w(u,v)　　//更新信息
12. Return $A=\{(v, \pi[v]) \mid v \in V[G] - r\}$

Line 1-5: $O(|V|)$

Line 6循环$O(|V|)$次

Line 7: 每次$O(\log |V|)$

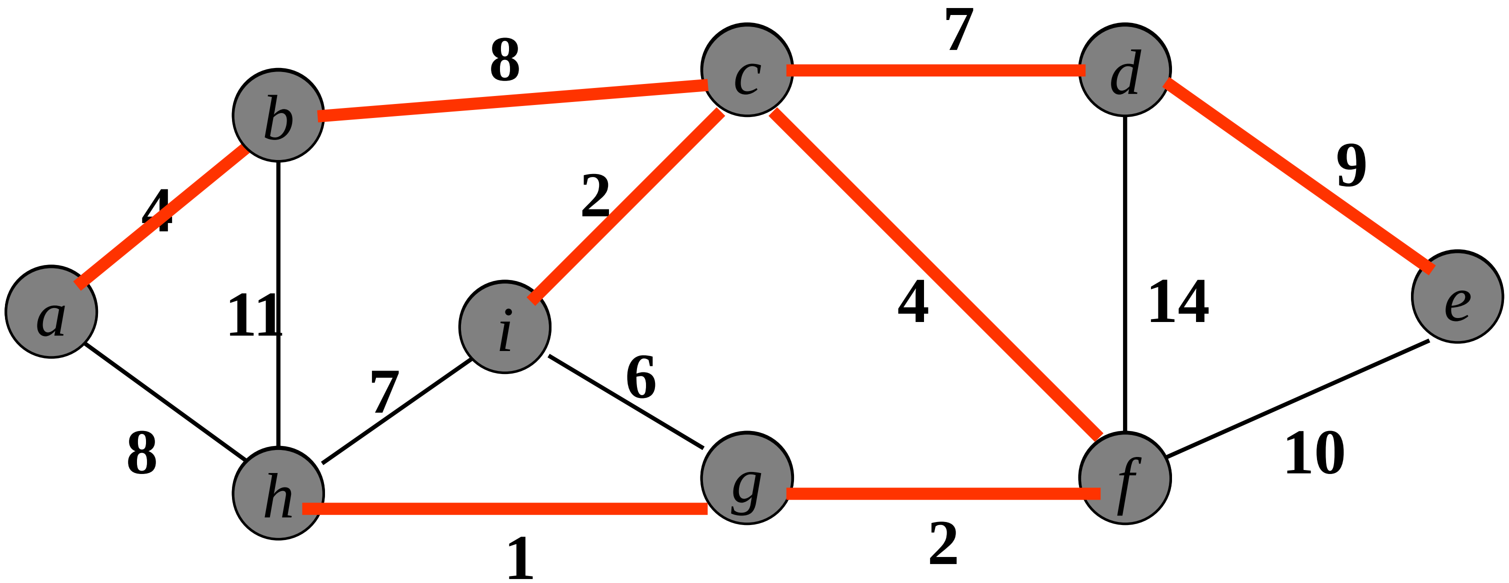
Line 8循环$O(|E|)$次

Line 10:每次常数时间

Line 11: 每次$O(\log |V|)$

共计: $O(|E|\log|V|)$

Prim算法实例



	π[v]	key[v]
a	null	0
b	a	4
c	b	8
d	c	7
e	d	9
f	c	4
g	f	2
h	g	1
i	c	2

- Generic算法
  - 基本思想
  - 算法描述
  - 贪心选择性
  - 回顾Kruskal和Prim算法

Generic算法基本思想

- 扩展出一颗最小生成树
  - A从空集开始，每次向A中添加一条边
  - 添加|V|-1条边后，算法终止，A为最小生成树的边集
  - 在添加边的过程中，维护如下循环不变量

每一轮添加边之前，A是某个最小生成树的子集

  - 每一轮迭代中，选择一条边(u, v)，$A = A \cup \{(u, v)\}$

安全边：如果边集合A包含于某个最小生成树，而且$A \cup \{(u, v)\}$也包含于某个最小生成树，则称边(u, v)对A是安全的，即(u, v)是A的安全边.

Generic算法描述

Generic-MST(G(V, E), W)

1. A=Φ;
2. While A 没有形成G的生成树
3. $\boxed{\text{选择一条A的安全边}(u, v);}$
4. A= A∪{(u, v)};
5. Return A;

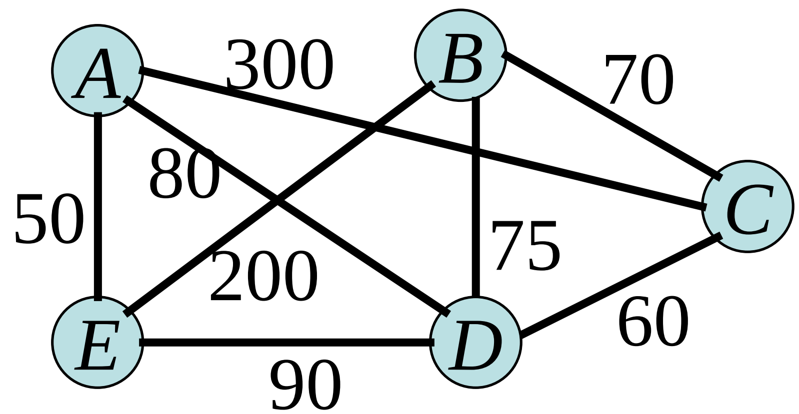
循环不变量：每一轮添加边之前，A是某个最小生成树的子集.

初始化：执行第1行之后，A为空集满足循环不变量.

维　护：第2-4行添加A的安全边，添加之后能维护循环不变量.

终　止：A中的边形成G的生成树，且包含于一个最小生成树，因此A即为G的一个最小生成树.

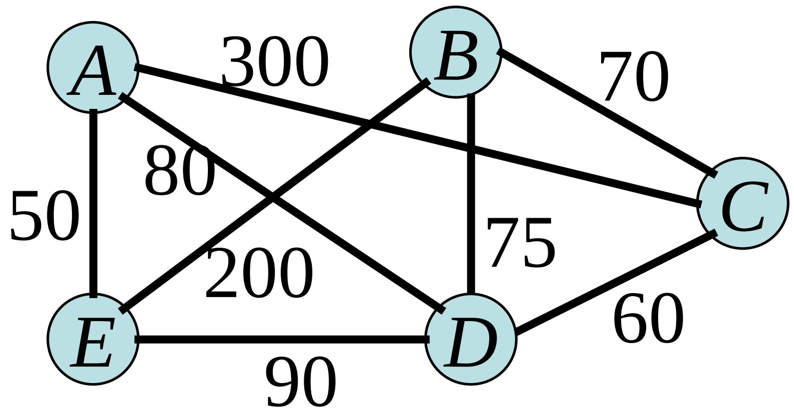
- Cut (S, V-S)
  - (S, V-S)是无向图G=(V, E)的顶点集合V的一个划分



例如S={A, B, E}, V-S={C, D}, (S, V-S)是一个Cut.

贪心选择性

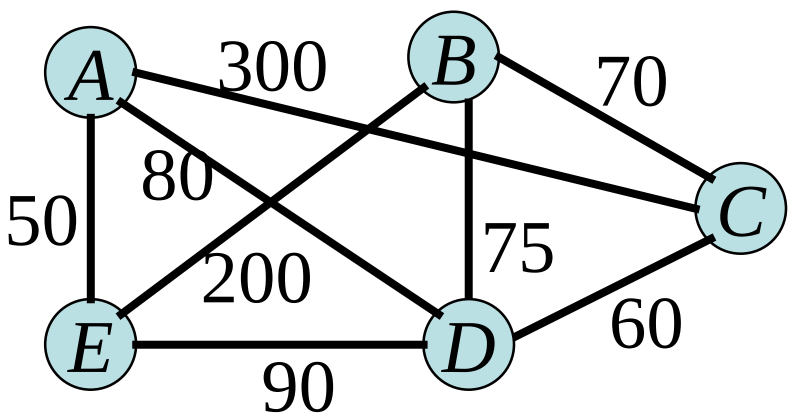
- 跨Cut $(S, V\text{-}S)$的边
  - $(S, V\text{-}S)$是无向图$G=(V, E)$的顶点集合V的一个划分，如果边(u, v)的顶点满足$u \in S$, $v \in V - S$, 则称边(u, v)跨Cut $(S, V\text{-}S)$.



例如$S=\{A, B, E\}$, $V\text{-}S=\{C, D\}$, $(S, V\text{-}S)$是一个Cut.
边(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)和(E, D)跨 $(S, V\text{-}S)$.

贪心选择性

- 遵守边集A的Cut $(S, V\text{-}S)$
  - 如果边集A中没有跨$(S, V\text{-}S)$的边，则称$(S, V\text{-}S)$遵守边集A.
- 跨$(S, V\text{-}S)$的轻边
  - 如果边(u, v)在所有跨$(S, V\text{-}S)$的边中具有最小权值，则称边(u, v)是跨$(S, V\text{-}S)$的轻边.

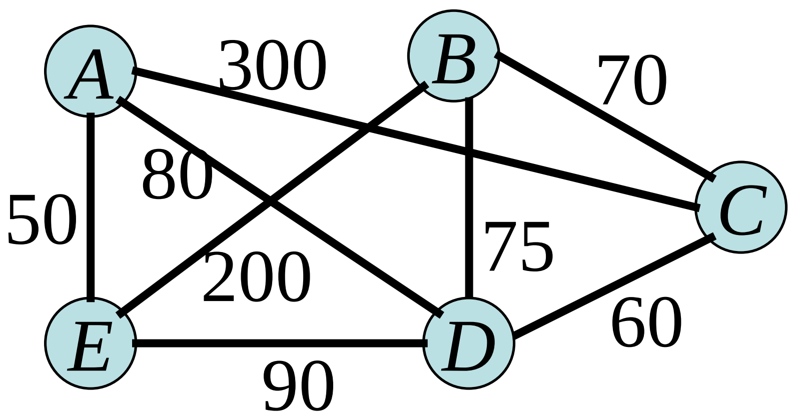


- 例如$S=\{A, B, E\}$, $V\text{-}S=\{C, D\}$, $(S, V\text{-}S)$是一个Cut.
- 边(B, C)是跨$(S, V\text{-}S)$的轻边.
- 跨同一个Cut的轻边可能不唯一.

贪心选择性

- **定理1**

设$G=(V, E)$是一个边加权无向连通图. $W: E\to\{$实数$\}$是G中边的权函数 令A是E的子集并包含于G的某个最小生成树中, $(S, V\text{-}S)$为G中**任意**遵守A的Cut. 如果边(u, v)是跨$(S, V\text{-}S)$的轻边，则(u, v)必为A的安全边.



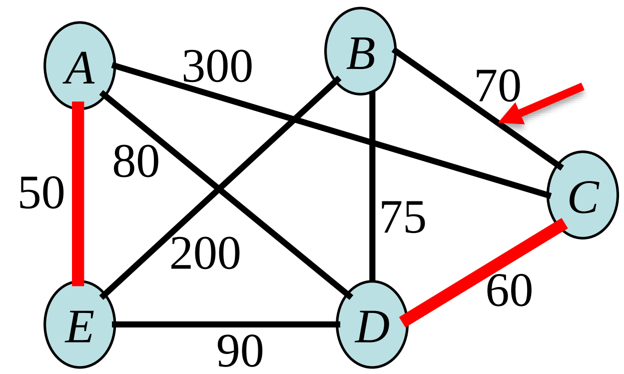
- 例如$S=\{A, B, E\}$, $V\text{-}S=\{C, D\}$
- $(S, V\text{-}S)$是一个Cut.
- $A=\{(A, E), (C, D)\}$
- $(S, V\text{-}S)$遵守A
- 边(B, C)是跨$(S, V\text{-}S)$的轻边.
- 边(B, C)是A的安全边.

回顾Kruskal算法

- 扩展出一颗最小生成树
  - A为已选择的边集
  - 安全边的选择：
    - A在中包含一些列连通分量
    - Kruskal算法选择连通分量之间权值最小的边(u, v)
    - (u, v)连接的连通分量为(V_1, E_1)和(V_2, E_2)
    - Cut $(V_1, V- V_1)$ 遵守A
    - (u, v)是跨Cut $(V_1, V- V_1)$ 的轻边
    - (u, v)是A的安全边

Generic-MST($G(V, E)$, W)
1. A=Φ;
2. While A 没有形成G的生成树
3. 选择一条A的安全边(u, v);
4. A= A∪{(u, v)};
5. Return A;

Kruskal算法使用遵守{(A, E), (C, D)}的Cut ({B}, {A, C, D, E})寻找{(A, E), (C, D)}的安全边.



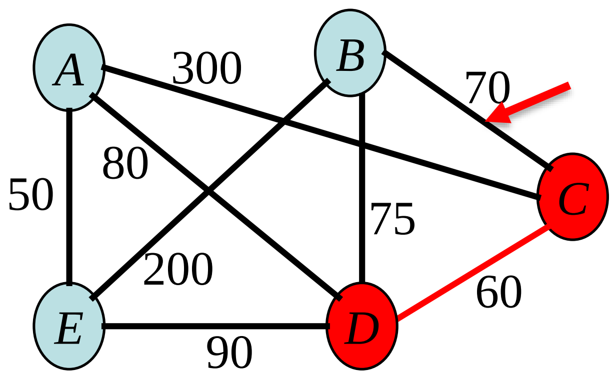
回顾Prim算法

Generic-MST(G(V, E), W)

```
A=Φ;
While A 没有形成G的生成树
        选择一条A的安全边(u, v);
        A= A∪{(u, v)};
  Return  A;
```

- 扩展出一颗最小生成树
  - $\text{A}=\{(v, v.\pi) | v \in V - \{r\} - Q\}$
  - 安全边的选择：

- 使用Cut (V(A), V-V(A))



- A={(C, D)}
- 使用 ({C, D}, {A, B, E})
- 找到轻边(B, C)

MST-Prim(G, W, r)

Input　连通图G，权值函数W，树根r

Output　G的一棵以r为根的生成树

```
For ∀ v∈V[G]  Do
      key[v]←+∞       //所有与v邻接的边的最小权值
      π[v] ←null      //与v邻接的具有最小权值的边
key[r] ←0
Q ←V[G]
While Q≠∅ do
      u ←Extract_Min(Q)
      for ∀v∈Adj[u]  do
          if v∈Q 且 w(u,v)<key[v]  then
                    π[v]    ←u
                    key[v] ←w(u,v)        //更新信息
Return  A={(v, π[v])| v ∈V[G] -r}
```

5.5 Minimum Makespan Scheduling

- 问题的定义
- 近似算法的设计
- 算法的性能分析

问题的定义

- **输入**

  计算时间分别为$t_1,\ldots,t_n$的n个任务；
  m台完全一样的机器

- **输出**

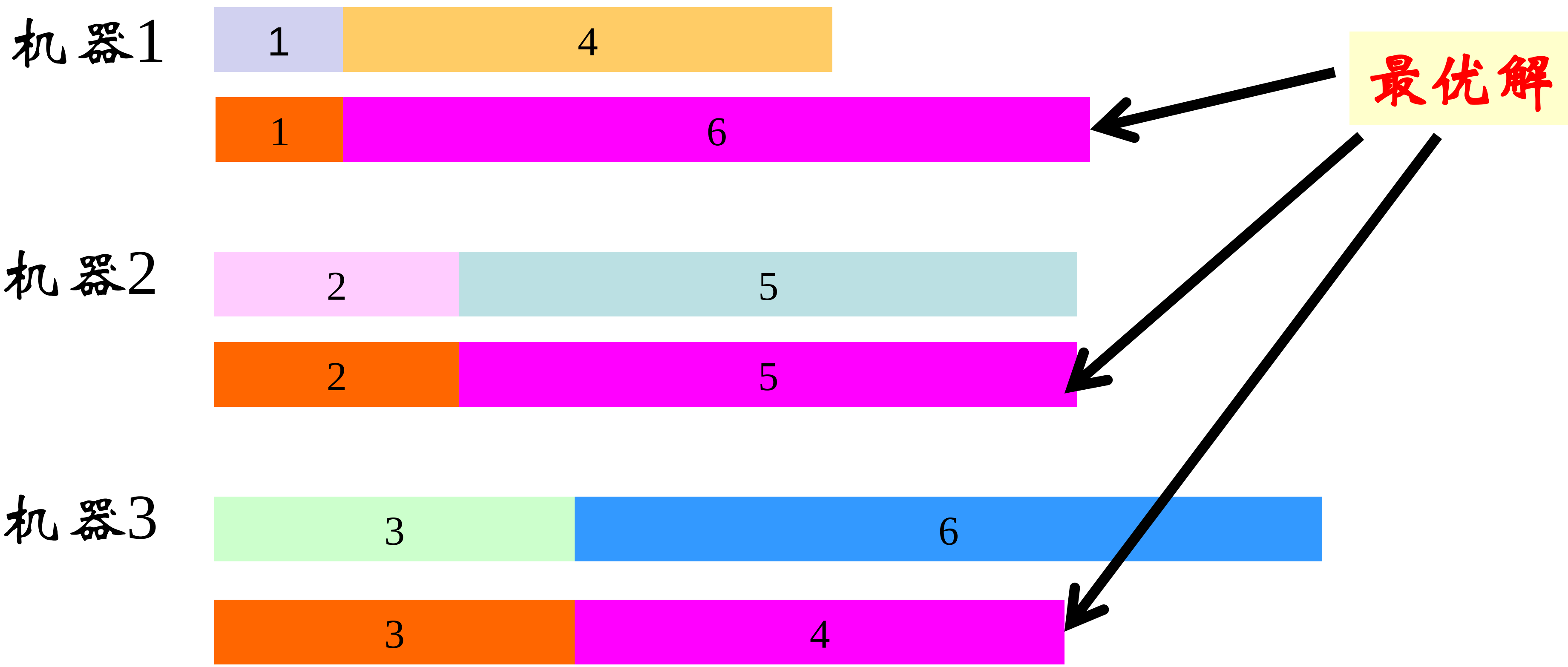
  计算任务在m台机器上的一个调度策略
  使并行执行时间最短

Minimum makespan scheduling on identical machines 是一个NP完全问题.

近似算法的设计

- 基本思想
  - 贪心选择:选择具有最短任务队列的机器

例如：m=3, t_1~t_6=1,2,3,4,5,6（不限定任务序）



- **算法**

MakeSpanScheduling ()

1. 任意排定所有任务的一个顺序$t_1,\ldots,t_n$
2. For $k\leftarrow 1$ To m Do
3. $\quad T_k\leftarrow 0,\quad M_k\leftarrow\varnothing$
4. For $i=1$ to n Do
5. $\qquad$找出j使得$T_j=\min_{1\leq k\leq m}\{T_k\}$
6. $\qquad T_j\leftarrow T_j+t_i;\quad M_j\leftarrow M_j\cup\{i\}$
7. 输出$M_1,\ldots,M_m$

时间复杂性$O(nm)$ 用最小堆$O(n\log m)$

定理:MakeSpanScheduling算法的近似比为2

证明： 令 T^* 为最优解代价(并行时间)

有： $T^* \geq (\sum_{1\leq i\leq n} t_i)/m$ 且 $T^* \geq t_i$ $(1\leq i\leq n)$

令 T 为近似解的代价，

且近似解中最后处理任务为 t_h，其在第 j 台机器上执行，

则有 $T=T_{start}+t_h$ （T_{start} 为第 h 个任务开始执行的时间）

因 $T_{start} \leq ((\sum_{1\leq i\leq n} t_i)-t_h)/m$

则 $T \leq ((\sum_{1\leq i\leq n} t_i)-t_h)/m + t_h$

$= (\sum_{1\leq i\leq n} t_i)/m + (1-1/m)t_h$

$\leq T^* + (1-1/m)\, T^*$

$= (2-1/m)\, T^* \leq 2T^*$