离散习题课

第四章一阶逻辑基本概念，第五章一阶逻辑等值演算与推理，第十一章格与布尔代数

分享人：张文静

第四章

一阶逻辑基本概念

目录

一阶逻辑命题符号化

1. 设个体域为自然数集 N，$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$：x 是素数，用 0 元谓词将下列命题符号化，并讨论它们的真假.

(1) 2 是偶素数.

(2) 若 2 是素数，则 4 不是素数.

(3) 只有 2 是素数，6 才能是素数.

(4) 除非 6 是素数，否则 4 是素数.

(5) 5 是素数当且仅当 6 是素数.

(6) 5 不是素数当且仅当 6 是素数.

只有才

只要就

1. 在本题中，F 与 G 均为谓词常项，而 x 是个体变项，因而 $F(x)$ 与 $G(x)$ 是命题变项，在用个体常项取代 x 后，得出 0 元谓词，都变成了命题常项.

(1) $F(2)\land G(2)$，由于 $F(2)$ 与 $G(2)$ 均为真命题，故此复合命题为真命题.

(2) $G(2)\rightarrow\neg G(4)$，由于蕴涵式前件、后件均为真，故复合命题 $G(2)\rightarrow\neg G(4)$ 为真命题.

(3) $G(6)\rightarrow G(2)$，由于 $G(6)$ 为假，所以复合命题 $G(6)\rightarrow G(2)$ 为真命题.

(4) $\neg G(6)\rightarrow G(4)$（或 $\neg G(4)\rightarrow G(6)$），由于蕴涵式的前件为真，后件为假，故复合命题 $\neg G(6)\rightarrow G(4)$ 为假命题.

(5) $G(5)\leftrightarrow G(6)$，假命题.

(6) $\neg G(5)\leftrightarrow G(6)$，真命题.

一阶逻辑命题符号化

2. 设个体域 $D=\{0,1,2,\cdots,10\}$，将下列命题符号化.

(1) D 中所有元素都是整数.

(2) D 中有的元素是偶数.

(3) D 中所有的偶数都能被 2 整除.

(4) D 中有的偶数是 4 的倍数.

2. 本题(1)、(2)不引入特性谓词，而(3)、(4)要引入特性谓词.

(1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：x 是整数.

(2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：x 是偶数.

(3) $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$，其中 $G(x)$：x 是偶数，$H(x)$：x 能被 2 整除，$G(x)$ 在这里是特性谓词.

(4) $\exists x(G(x)\wedge R(x))$，其中 $G(x)$：x 是偶数，$R(x)$：x 是 4 的倍数，这里 $G(x)$ 是特性谓词.

本题(1)与(2)正是内容提要中给出的公式(1)与(2)的具体解释，而(3)与(4)正是两个基本公式的应用.

一阶逻辑命题符号化

3. 设个体域为 $D=\{x \mid x$ 为人$\}$，将下列命题符号化.

(1) 人都生活在地球上.

(2) 有的人长着黑头发.

(3) 中国人都用筷子吃饭.

(4) 有的美国人不住在美国.

4. 将下列命题符号化.

(1) 人都生活在地球上.

(2) 有的人长着黑头发.

(3) 并不是所有的实数都能表示成分数.

(4) 没有能表示成分数的无理数.

3. (1)与(2)不用引入特性谓词，而(3)与(4)要引入特性谓词.

(1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：x 生活在地球上.

(2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：x 长着黑头发.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 为中国人，$G(x)$：x 用筷子吃饭.

(4) $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 是美国人，$G(x)$：x 住在美国.

4. 在本题中没有指明个体域，因而使用全总个体域. 在使用全总个体域时，第 3 题(1)与(2)中的命题在本题中也要使用特性谓词，将人从宇宙间的所有事物中分离出来.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 生活在地球上.

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$，其中 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 长着黑头发.

(3) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 为实数，$G(x)$：x 能表示成分数.

(4) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 是无理数，$G(x)$：x 能表示成分数.

学完第 5 章之后，可以验证(3)、(4) 中两种符号化形式是等值的.

一阶逻辑命题符号化

5. 将下列命题符号化.

(1) 任意的偶数 x 与 y 都有大于 1 的公约数.

(2) 存在奇数 x 与 y 没有大于 1 的公约数.

(3) 说所有火车比所有汽车都快是不对的.

(4) 说有的火车比所有汽车都快是正确的.

5. 本题中仍然应该使用全总个体域.

(1) $\forall x \forall y(F(x) \land F(y) \to H(x,y))$,其中 $F(x)$:x 是偶数,$H(x,y)$:x 与 y 有大于 1 的公约数.

(2) $\exists x \exists y(G(x) \land G(y) \land \neg H(x,y))$,其中 $G(x)$:x 是奇数,$H(x,y)$:x 与 y 有大于 1 的公约数.

(3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \land G(y) \to H(x,y))$ 或 $\exists x \exists y(F(x) \land G(y) \land \neg H(x,y))$,其中 $F(x)$:x 是火车,$G(y)$:y 是汽车,$H(x,y)$:x 比 y 快.

(4) $\exists x(F(x) \land \forall y(G(y) \to H(x,y)))$,其中,$F(x)$:$x$ 为火车,$G(y)$:y 为汽车,$H(x,y)$:x 比 y 快.

一阶逻辑中简单数学命题符号化

1. 设个体域为整数集 $\mathbf{Z}$，将下列问题符号化.

(1) 对于任意的 x 和 y，存在 z，使得 $x+y=z$.

(2) "存在 x，对于任意的 y 和 z，均有 $y-z=x$"是不成立的.

1. (1) $\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$

(2) $\neg(\exists x \forall y \forall z(y-z=x))$ 或 $\forall x \exists y \exists z(y-z \neq x)$

2. 设个体域为非 0 有理数集 $\mathbf{Q}^*$，将下列命题符号化.

(1) 对于任意的 x，存在 y，使得 $x \cdot y=1$.

(2) "对于任意的 x 和 y，存在 z，使得 $x^2+y^2=z^2$"不为真.

2. (1) $\forall x \exists y(x \cdot y=1)$

(2) $\neg(\forall x \forall y \exists z(x^2+y^2=z^2))$ 或 $\exists x \exists y \forall z(x^2+y^2 \neq z^2)$

一阶逻辑中简单数学命题符号化

3. 设个体域为实数集 **R**，将下列命题符号化.

（1）对于任意的 x 和 y，存在 z，使得 $x^2+y^2=z^2$.

（2）任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，均有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

3.（1）$\forall x \forall y \exists z(x^2+y^2=z^2)$

（2）$\forall \varepsilon(\varepsilon>0 \rightarrow (\exists \delta(\delta>0 \wedge (|x-x_0|<\delta \rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))))$

此命题是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的定义.

给定解释和赋值，解释给定的公式

1. 设解释 I 为：

(a) 个体域为自然数集 N.

(b) N 中特定元素 $\bar{a}=0$.

(c) N 上特定函数 $\bar{f}(x,y)=x+y,\bar{g}(x,y)=x\cdot y$.

(d) N 上特定谓词 $\bar{F}(x,y):x=y$.

I 下的赋值 $\sigma:\sigma(x)=1,\sigma(y)=0$.

讨论下列各式在 I 和 σ 下的真值.

(1) $\forall xF(f(x,a),y)$

(2) $\forall xF(g(x,a),y)$

(3) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x,y),g(x,y)))$

(4) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

(5) $\exists xF(f(x,y),g(x,y))$

1. 先给出各式在 I 和 σ 下的解释,然后讨论其真值.各式的解释如下,其中 x,y 的取值范围均为自然数集 N.

(1) $\forall x(x+0=0)$

(2) $\forall x(x\cdot 0=0)$

(3) $\forall x\forall y((x=y)\rightarrow(x+y=x\cdot y))$

(4) $\forall x\forall y((x+0=y)\rightarrow(y+0=x))$

(5) $\exists x(x+0=x\cdot 0)$

以上各式均为命题,其中(2)、(4)、(5)为真命题,(1)、(3)为假命题.

给定解释和赋值，解释给定的公式

2. 设解释 I 为：

(a) 个体域为实数集 $\mathbf{R}$.

(b) $\mathbf{R}$ 上特定元素 $\bar{a}=0$.

(c) $\mathbf{R}$ 上特定函数 $\bar{f}(x,y)=x-y$, $\bar{g}(x,y)=x+y$.

(d) $\mathbf{R}$ 上特定谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$, $\bar{G}(x,y): x<y$.

I 下的赋值 $\sigma: \sigma(x)=1, \sigma(y)=-1$.

讨论下列各式在 I 和 σ 下的真值.

(1) $\forall x \forall y(G(x,y) \rightarrow F(x,y))$

(2) $\forall x \forall y(G(x,y) \rightarrow \neg F(x,y))$

(3) $\forall x(F(f(x,y),a) \rightarrow \forall y G(x,y))$

(4) $\exists x F(x,y) \wedge \exists y G(x,y)$

(5) $\forall x(G(x,y) \rightarrow \neg F(f(x,y),a))$

(6) $\forall x(G(g(x,y),a) \rightarrow F(x,y))$

2. 各式在 I 和 σ 下的解释如下，其中 x,y 的取值范围均为实数集 $\mathbf{R}$.

(1) $\forall x \forall y((x<y) \rightarrow (x=y))$

(2) $\forall x \forall y((x<y) \rightarrow (x \neq y))$

(3) $\forall x((x+1=0) \rightarrow \forall y(x<y))$

(4) $\exists x(x=-1) \wedge \exists y(1<y)$

(5) $\forall x((x<-1) \rightarrow (x+1 \neq 0))$

(6) $\forall x((x-1<0) \rightarrow (x=-1))$

不难看出，(1)、(3)、(5)、(6)为假命题，而(2)、(4)为真命题.

证明公式既不是永真式又不是矛盾式

1. 证明公式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 既不是永真式，也不是矛盾式.

1. 取解释 I_1 为：个体域 D 为实数集 $\mathbf{R}$，$F(x)$：x 为有理数，$G(x)$：x 能表示成分数. 在 I_1 下，公式被解释为："对于任意的实数 x，若 x 是有理数，则 x 能表示成分数"，这是真命题，这说明 A 不是矛盾式.

取解释 I_2 为：个体域 D 为全总个体域，$F(x)$：x 为人，$G(x)$：x 用右手写字. 在 I_2 下 A 被解释为"对于宇宙间的一切事物 x 而言，如果 x 是人，则 x 用右手写字"，简言之，"人都用右手写字"，这是假命题，因而 A 不是永真式.

证明公式既不是永真式又不是矛盾式

2. 证明公式 $B=\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 既不是永真式，也不是矛盾式.

2. 取解释 I_1 为：个体域为全总个体域，$F(x)$：x 为人，$G(x)$：x 到过月球. B 被解释为“有的人到过月球”这是真命题，所以 B 不是矛盾式.

取解释 I_2 为：个体域仍为全总个体域，$F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 去过火星. B 被解释为“有人去过火星”，到目前为止，这个命题还是假命题，因而 B 不是永真式.

证明永真式或矛盾式

1. 证明下列各式均为永真式.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

(2) $((\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x))\rightarrow\exists yG(y)$

这 4 个公式都是闭式,只需考虑解释.

1. (1) 设 I 为任意的解释,D 为 I 的个体域,对 D 中任意的 x,若 $F(x)$ 为假,则蕴涵式 $F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$ 为真;若 $F(x)$ 为真,则 $F(x)\vee G(x)$ 为真,$F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$ 也为真.于是,该式在任何解释下均为真,故为永真式.

(2) 方法一　用(1)中使用的方法证明.设 I 为任意的解释,D 为 I 的个体域,若 $\forall xF(x)$ 为假,则显然该式的解释为真.若 $\forall xF(x)$ 为真,当 $\exists yG(y)$ 为真时,该式解释的前件、后件均为真,故为真;当 $\exists yG(y)$ 为假时,该式解释的前件、后件均为假,故也为真.因此,该式在任何解释下均为真,故为永真式.

方法二　取 $A=\forall xF(x)$,$B=\exists yG(y)$,则该式是假言推理定律 $(A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$ 的代换实例.由主教材中的定理 4.1 可知,该式为永真式.

证明永真式或矛盾式

2. 证明下列各式均为矛盾式.

(1) $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$

(2) $\forall x((F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow (G(y) \wedge \neg G$

2. (1) 可类似上题(2),用两种方法证明.

(2) 该式中的蕴涵式在任何解释下,总是前件

式为假.

p	q	p->q	-(p->q)	-(p->q)/\q
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

1）设I为任意地解释，D为个体域，若任意xF（x）为假，则合取符号前面括号内为真，则整个式子取非操作后为为假，若任意yG（y）为真，经过合区后还是为假，若任意yG（y）为假，则合取后结果也还是为假。

若任意xF（x）为真，若任意yG（y）也为真则括号内为真，取非操作后为假，合取后为假，若任意yG（y）为假，则式子合取后必为假，综上为矛盾式

代换 ¬(p->q)∧ q ，真值表发现为矛盾式

证明永真式或矛盾式

p	q	p->q	q->(p->q)
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

11. 判断下列各式的类型.

(1) $F(x,y)\to(G(x,y)\to F(x,y))$

(2) $\forall x(F(x)\to F(x))\to\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$

(3) $\forall x\exists yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$

(4) $\exists x\forall yF(x,y)\to\forall y\exists xF(x,y)$

(5) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(y,x))$

(6) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

11. (1)、(4)为永真式;(2)、(6)为矛盾式;(3)、(5)为可满足式,但不是永真式.

这里对(3)、(4)、(6)给出证明.

(3) 取解释 I_1 为:个体域为自然数集 $\mathbf{N}$,$F(x,y):x\leqslant y$,在 I_1 下,$\forall x\exists yF(x,y)$ 为真,而 $\exists x\forall yF(x,y)$ 也为真(只需取 $x=0$ 即可),因而该公式为真.

取解释 I_2 为:个体域仍为自然数集 $\mathbf{N}$,而 $F(x,y):x=y$.在 I_2 下,$\forall x\exists yF(x,y)$ 为真,而 $\exists x\forall yF(x,y)$ 为假,因而该公式为假.这说明该公式为可满足式,但不是永真式.

(4) 设 I 任意一个解释,若在 I 下,蕴涵式前件 $\exists x\forall yF(x,y)$ 为假,则 $\exists x\forall yF(x,y)\to\forall y\exists xF(x,y)$ 为真.若前件 $\exists x\forall yF(x,y)$ 为真,则必存在 I 的个体域 D_I 中的个体常项 x_0,使 $\forall yF(x_0,y)$ 为真,即对任意的 $y\in D_I$,$F(x_0,y)$ 为真.由于有 $x_0\in D_I$ 使得 $F(x_0,y)$ 为真,所以 $\exists xF(x,y)$ 为真.而其中 y 是任意个体变项,所以 $\forall y\exists xF(x,y)$ 为真.故蕴涵式 $\exists x\forall yF(x,y)\to\forall y\exists xF(x,y)$ 为真.由于 I 的任意性,所以该公式为永真式.

(6) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$ 是 $\neg(A\to B)\wedge B$ 的代换实例,而

$$\neg(A\to B)\wedge B\Leftrightarrow A\wedge\neg B\wedge B\Leftrightarrow 0$$

根据主教材中的定理 4.1,$\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$ 是矛盾式.

证明永真式或矛盾式

12. 判断下列各式的类型.

(1) $F(x)\to\forall xF(x)$

(2) $\exists xF(x)\to F(x)$

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))$

(4) $(\forall xF(x)\to\forall xG(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$

12. (1) 取解释 I: 个体域为自然数集 $\mathbf{N}$, $\bar{F}(x)$:x 是偶数. 取 I 下的赋值 $\sigma_1(x)=1$, $\sigma_2(x)=2$. $F(x)\to\forall xF(x)$ 在 I 和 σ_1 下为真命题, 而在 I 和 σ_2 下为假命题, 故公式是非永真式的可满足式.

(2) 取解释 I 和赋值 σ_1, σ_2 与(1)相同. $\exists xF(x)\to F(x)$ 在 I 和 σ_1 下为假命题, 而在 I 和 σ_2 下为真命题, 故公式是非永真式的可满足式.

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))$ 是闭式, 只需考虑解释. 在任何解释下, 如果前件 $\forall x(F(x)\to G(x))$ 为真, 即对所有的 x 都有 $F(x)\to G(x)$, 那么在后件中, 当 $\forall xF(x)$ 为真时, 必有 $\forall xG(x)$ 为真, 从而后件为真, 进而整个公式为真. 因此, 公式为永真式.

(4) $(\forall xF(x)\to\forall xG(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$ 是闭式, 只需考虑解释. 取解释 I_1: 个体域为自然数集 $\mathbf{N}$, $\bar{F}(x)$:x 是奇数, $\bar{G}(x)$:$x\geqslant 1$. 在 I_1 下公式是真命题. 把 $\bar{G}(x)$ 改为 $x\geqslant 2$ 作为解释 I_2, 在 I_2 下公式是假命题. 因此, 公式是非永真式的可满足式.

证明永真式或矛盾式

13. 给出下列公式一个成真解释和一个成假解释.

(1) $\forall x(F(x) \lor G(x))$

(2) $\exists x(F(x) \land G(x) \land H(x))$

(3) $\exists x(F(x) \land \forall y(G(y) \land H(x,y)))$

13. (1) 取解释 I_1 为:个体域为自然数集 $\mathbf{N}$, $F(x)$: x 为奇数, $G(x)$: x 为偶数, 在 I_1 下, $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真命题.

取解释 I_2:个体域为整数集 $\mathbf{Z}$, $F(x)$: x 为正整数, $G(x)$: x 为负整数, 在 I_2 下, $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为假命题.

(2)与(3)请读者自己给出解答.

证明永真式或矛盾式

14. 证明下列公式既不是永真式也不是矛盾式.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

(2) $\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))$

14. 提示:对每个公式分别找一个成真的解释、一个成假的解释.

第五章

一阶逻辑等值演算与推理

目录

由已知等值式证明新的等值式

1. 已知

(a) $\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\lor B$，$B$ 中不含 x 的自由出现.

(b) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$.

证明：$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$，$B$ 同(a)中.

1. 本题要求在证明的演算过程中，除命题逻辑中等值式的代换实例外，只使用给定的已知等值式.

$$
\begin{aligned}
&\forall x(A(x)\to B) & \\
\Leftrightarrow\ &\forall x(\neg A(x)\lor B) & \text{（蕴涵等值式）}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\neg A(x)\lor B & \text{(a)}\\
\Leftrightarrow\ &\neg\exists xA(x)\lor B & \text{(b)}\\
\Leftrightarrow\ &\exists xA(x)\to B & \text{（蕴涵等值式）}
\end{aligned}
$$

由已知等值式证明新的等值式

2. 已知

(a) $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$，$B$ 中不含 x 的自由出现.

(b) $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$.

证明：$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$，$B$ 同(a)中.

2.

$$
\begin{aligned}
& \forall x A(x) \rightarrow B \\
\Leftrightarrow & \neg \forall x A(x) \vee B && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow & \exists x \neg A(x) \vee B && \text{(b)} \\
\Leftrightarrow & \exists x(\neg A(x) \vee B) && \text{(a)} \\
\Leftrightarrow & \exists x(A(x) \rightarrow B) && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}
$$

在有限个体域中消去公式中的量词

1. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去下列公式中的量词.

(1) $\exists xF(x)\to\forall yG(y)$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\to G(y))$

(3) $(\forall xF(x)\wedge\exists yG(y))\to H(y)$

1. (1) $\exists xF(x)\to\forall yG(y)\Leftrightarrow(F(a)\vee F(b)\vee F(c))\to(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$

(2) 方法一　对公式不做变化，直接消量词.

$$
\begin{aligned}
&\forall x\forall y(F(x)\to G(y))\\
\Leftrightarrow&\forall x((F(x)\to G(a))\wedge(F(x)\to G(b))\wedge(F(x)\to G(c)))\\
\Leftrightarrow&((F(a)\to G(a))\wedge(F(a)\to G(b))\wedge(F(a)\to G(c)))\wedge\\
&((F(b)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(b)\to G(c)))\wedge\\
&((F(c)\to G(a))\wedge(F(c)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c)))
\end{aligned}
$$

方法二　先缩小量词辖域，然后再消量词.

$$
\begin{aligned}
&\forall x\forall y(F(x)\to G(y))\\
\Leftrightarrow&\forall x\ (F(x)\to\forall yG(y))\\
\Leftrightarrow&\exists x\ F(x)\to\forall yG(y)\\
\Leftrightarrow&(F(a)\vee F(b)\vee F(c))\to(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))
\end{aligned}
$$

可见，方法二要好得多. 因此，当能够缩小量词辖域时，应先缩小量词辖域，然后再消量词.

(3)
$$
\begin{aligned}
&(\forall xF(x)\wedge\exists yG(y))\to H(y)\\
\Leftrightarrow&(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))\to H(y)
\end{aligned}
$$

注意，消去量词后，仍然含自由出现的个体变项 y，因为 $H(y)$ 不在任何量词的辖域中.

在有限个体域中消去公式中的量词

2. 设个体域 $D=\{a,b\}$，消去下列公式中的量词.

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

(2) $\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$

2. (1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\,(F(x)\rightarrow\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow\exists xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow(F(a)\vee F(b))\rightarrow(G(a)\vee G(b))$

(2) $\forall x\exists y(F(x,y))\rightarrow G(x,y))$

$\Leftrightarrow\forall x\,((F(x,a)\rightarrow G(x,a))\vee(F(x,b)\rightarrow G(x,b)))$

$\Leftrightarrow((F(a,a)\rightarrow G(a,a))\vee(F(a,b)\rightarrow G(a,b)))\wedge$

$((F(b,a)\rightarrow G(b,a))\vee(F(b,b)\rightarrow G(b,b)))$

在(1)中，量词辖域可以缩小，因而先缩小量词辖域，再消量词. 但在(2)中，因为全称量词与存在量词均约束 F 与 G 中的个体变量 x 和 y，因而它们的辖域不能缩小，消去量词后所得公式也不易化得更简单.

在有限个体域中消去公式中的量词

3. 设个体域 $=\{1,2,3,4\}$，$F(x)$：x 是 2 的倍数. $G(x)$：x 是奇数，将命题 $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$ 中的量词消去，并讨论命题的真值.

3.

$$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow(F(1)\rightarrow\neg G(1))\wedge(F(2)\rightarrow\neg G(2))\wedge$$

$$(F(3)\rightarrow\neg G(3))\wedge(F(4)\rightarrow\neg G(4))$$

因为，在 $(F(1)\rightarrow\neg G(1))$ 与 $(F(3)\rightarrow\neg G(3))$ 中，前件与后件均为假，所以这两个蕴涵式均为真. 在 $(F(2)\rightarrow\neg G(2))$ 与 $(F(4)\rightarrow\neg G(4))$ 中，前件与后件均为真，因而蕴涵式也均为真，故此命题在以上解释下是真命题.

求给定公式的前束范式

1. 求下列否定式的前束范式.

(1) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

1. (1) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

其实，在以上演算中后 3 个公式都是原公式的前束范式，这正说明公式的前束范式不是唯一的.

(2) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\forall x(\neg F(x)\vee\neg G(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$

同样地，后 3 个公式都是原公式的前束范式.

求给定公式的前束范式

2. 求下列公式的前束范式.

(1) $\forall xF(x) \wedge \forall yG(y)$

(2) $\exists xF(x) \vee \exists yG(y)$

2. (1) $\forall xF(x) \wedge \forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G(x))$ （量词分配等值式）

也可以不用量词分配等值式,见下面演算:

$\forall xF(x) \wedge \forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y))$

在这个演算过程中,用的是量词辖域收缩与扩张等值式，其结果是在前束范式中含两个量词，显然前者更好些.

当然，这两个结果是等值的, $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y))$.

(2) $\exists xF(x) \vee \exists yG(y)$

$\Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G(x))$ （量词分配等值式）

也可以不用量词分配等值式，

$\exists xF(x) \vee \exists yG(y)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \vee G(y))$ （量词辖域收缩扩张等值式）

本题表明，当可以使用全称量词 $\forall$ 对 $\wedge$ 和存在量词 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律时，经过换名后用量词分配等值式，有可能减少前束范式中的量词数.

求给定公式的前束范式

3. 求下列公式的前束范式.

(1) $\forall xF(x) \vee \forall yG(y)$

(2) $\exists xF(x) \wedge \exists yG(y)$

3. 注意全称量词$\forall$对$\vee$和存在量词$\exists$对$\wedge$都不适合分配律，所以本题的两个小题均不能利用量词分配等值式.

(1)
$$
\begin{aligned}
&\forall xF(x) \vee \forall yG(y)\\
\Leftrightarrow &\forall x(F(x) \vee \forall yG(y))\\
\Leftrightarrow &\forall x\forall y(F(x) \vee G(y))
\end{aligned}
$$

在演算过程中两次使用量词辖域收缩与扩张等值式.

(2)
$$
\begin{aligned}
&\exists xF(x) \wedge \exists yG(y)\\
\Leftrightarrow &\exists x(F(x) \wedge \exists yG(y))\\
\Leftrightarrow &\exists x\exists y(F(x) \wedge G(y))
\end{aligned}
$$

求给定公式的前束范式

4. 求下列公式的前束范式.

(1) $\exists yF(x,y) \wedge \forall xG(x,y,z)$

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,y))$

(3) $\exists xF(x,y) \wedge \forall x(G(x) \rightarrow H(x,y))$

4. (1) 公式中 x,y 既有约束出现,又有自由出现,因此需要使用换名规则.

$$\exists yF(x,y) \wedge \forall xG(x,y,z)$$
$$\Leftrightarrow \exists vF(x,v) \wedge \forall uG(u,y,z) \qquad \text{(换名规则)}$$
$$\Leftrightarrow \exists v \forall u\ (F(x,v) \wedge G(u,y,z))$$

(2)
$$\forall xF(x) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall zF(z) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \exists z(F(z) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \exists z \exists y(F(z) \rightarrow (G(x,y) \wedge H(x,y)))$$

(3) 在这个公式中量词 $\exists$ 与 $\forall$ 的指导变元相同,必须使用换名规则.

$$\exists xF(x,y) \wedge \forall x(G(x) \rightarrow H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \exists zF(z,y) \wedge \forall x(G(x) \rightarrow H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \exists z(F(z,y) \wedge \forall x(G(x) \rightarrow H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \exists z \forall x(F(z,y) \wedge (G(x) \rightarrow H(x,y)))$$

在自然推理系统N中构造推理的证明

1. 构造下列推理的证明.

(1) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\forall xF(x)$

结论：$\forall xG(x)$

(2) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists xG(x)$

(3) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\neg G(a)$，a 为个体常项

结论：$F(a)$

1. (1) 证明：

① $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引

② $F(y)\to G(y)$ ①$\forall-$

③ $\forall xF(x)$ 前提引

④ $F(y)$ ③$\forall-$

⑤ $G(y)$ ②④假言推理

⑥ $\forall yG(y)$ ⑤$\forall+$

⑦ $\forall xG(x)$ ⑥置换

证明中要特别注意使用$\forall-$和$\forall+$的条件. 由于 $F(x)\to G(x)$ 中没有量词，自然 x 也就不在$\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域中自由出现，因而在步骤②可以对①使用$\forall-$规则. 在步骤⑥，由于 y 不在前提中自由出现，因而可以对⑤使用$\forall+$规则.

(2) 证明：

① $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

② $F(y)\to G(y)$ ①$\forall-$

③ $F(y)\to\exists xG(x)$ ②$\exists+$

④ $\exists yF(y)\to\exists xG(x)$ ③$\exists-$

⑤ $\exists xF(x)$ 前提引入

⑥ $\exists yF(y)$ 置换

⑦ $\exists xG(x)$ ④⑥假言推理

同样地，在使用$\forall-$，$\exists+$，$\exists-$规则时要特别注意所要求满足的条件.

(3) 证明：

① $\forall x(F(x)\vee G(x))$ 前提引入

② $F(a)\vee G(a)$ ①$\forall-$

③ $\neg G(a)$ 前提引入

④ $F(a)$ ②③析取三段论

为了能使用前提$\neg G(a)$和析取三段论，在步骤②使用$\forall-$规则时应引入个体常项

以上 3 个推理都很简单，但它们包含了构造推理证明中的典型注意事项.

在自然推理系统N中构造推理的证明

2. 用归谬法构造下列推理的证明.

(1) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

(2) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(\neg H(x)\rightarrow G(x))$

(1) 证明：

①	$\neg\exists xF(x)$	结论否定引入
②	$\forall x\neg F(x)$	①置换
③	$\neg\exists xG(x)$	前提引入
④	$\forall x\neg G(x)$	③置换
⑤	$\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
⑥	$\neg F(c)$	②$\forall$-
⑦	$\neg G(c)$	④$\forall$-
⑧	$F(c)\vee G(c)$	⑤$\forall$-
⑨	$G(c)$	⑥⑧析取三段
⑩	$\neg G(c)\wedge G(c)$	⑦⑨合取引入

(2) 证明：

①	$\neg\forall x(\neg H(x)\rightarrow G(x))$	结论否定
②	$\exists x\neg(H(x)\vee G(x))$	①置换
③	$\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
④	$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑤	$F(y)\vee G(y)$	③$\forall$-
⑥	$F(y)\vee G(y)\vee H(y)$	⑤附加
⑦	$F(y)\rightarrow H(y)$	④$\forall$-
⑧	$\neg F(y)\vee H(y)$	⑦置换
⑨	$\neg F(y)\vee H(y)\vee G(y)$	⑧附加
⑩	$(F(y)\vee H(y)\vee G(y))\wedge(\neg F(y)\vee H(y)\vee G(y))$	⑥⑨合取
⑪	$(H(y)\vee G(y))\vee(F(y)\wedge(\neg F(y))$	⑩置换
⑫	$\neg(H(y)\vee G(y))\rightarrow 0$	⑪置换
⑬	$\exists y\neg(H(y)\vee G(y))\rightarrow 0$	⑫$\exists$-
⑭	$\exists y\neg(H(y)\vee G(y))$	②置换
⑮	0	⑬⑭假言

在步骤⑫把$\neg(H(y)\vee G(y))\rightarrow(F(y)\wedge(\neg F(y))$改写成$\neg(H(y)\vee G($

在步骤⑬明显地看出满足使用$\exists$-规则的条件——个体变项y不在后件中自由出

在自然推理系统N中构造推理的证明

3. 用附加前提证明法构造下列推理的证明.

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall xF(x)\rightarrow \forall xH(x)$

3. 证明：

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $F(x)$	①$\forall-$
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④ $F(x)\rightarrow G(x)$	③$\forall-$
⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑥ $G(x)\rightarrow H(x)$	⑤$\forall-$
⑦ $F(x)\rightarrow H(x)$	④⑥假言三段论
⑧ $H(x)$	②⑦假言推理
⑨ $\forall xH(x)$	⑧$\forall+$

在自然推理系统N中构造推理的证明

4. 说明下列推理不能用附加前提证明法证明.

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

4. 本题的结论不是蕴涵式，并且 $\forall xF(x)\rightarrow\forall xG(x)\nRightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，因而不能用附加前提证明法证明.用直接证明法证明如下.

①	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
②	$F(y)\rightarrow G(y)$	①$\forall-$
③	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
④	$G(y)\rightarrow H(y)$	③$\forall-$
⑤	$F(y)\rightarrow H(y)$	②④假言三段论
⑥	$\forall y(F(y)\rightarrow H(y))$	⑤$\forall+$
⑦	$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	⑥置换

在自然推理系统N中构造用自然语言描述的推理与证明

1. 实数不是有理数就是无理数. 无理数都不是分数. 所以,若有分数,则必有有理数(个体域为实数集 **R**).

1. 设 $F(x)$:x 是有理数,$G(x)$:x 是无理数,$H(x)$:x 是分数.

前提:$\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\forall x(G(x) \to \neg H(x))$

结论:$\exists xH(x) \to \exists xF(x)$

证明:

① $\forall x(F(x) \vee G(x))$	前提引入
② $F(y) \vee G(y)$	① $\forall$-
③ $\neg F(y) \to G(y)$	②置换
④ $\forall x(G(x) \to \neg H(x))$	前提引入
⑤ $G(y) \to \neg H(y)$	④ $\forall$-
⑥ $\neg F(y) \to \neg H(y)$	③⑤假言三段论
⑦ $H(y) \to F(y)$	⑥置换
⑧ $H(y) \to \exists xF(x)$	⑦ $\exists$+
⑨ $\exists yH(y) \to \exists xF(x)$	⑧ $\exists$-
⑩ $\exists xH(x) \to \exists xF(x)$	⑨置换

在自然推理系统N中构造用自然语言描述的推理与证明

2. 人都喜欢吃蔬菜.但不是所有的人都喜欢吃鱼.所以，存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

2. 因为本题没指明个体域,因而使用全总个体域.

令 $F(x)$:x 为人,$G(x)$:x 喜欢吃蔬菜,$H(x)$:x 喜欢吃鱼.

前提:$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

结论:$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明:用归谬法.

① $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	结论否定引入
② $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	①置换
③ $\neg(F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y))$	②$\forall$-
④ $G(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	③置换
⑤ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
⑥ $F(y)\rightarrow G(y)$	⑤$\forall$-
⑦ $F(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	④⑥假言三段论
⑧ $F(y)\rightarrow H(y)$	⑦置换
⑨ $\forall y(F(y)\rightarrow H(y))$	⑧$\forall$+
⑩ $\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	⑨置换
⑪ $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑫ $\forall x(F(x)\rightarrow H(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	⑩⑪合取

注意,先将$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$开头的$\neg$内移化成前束范式后，才能消量词.

6. 甲使用量词辖域收缩与扩张等值式进行如下演算.

$$\forall x(F(x) \to G(x,y)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \to G(x,y)$$

乙说甲错了. 乙说得对吗? 为什么?

6. 乙说得对,甲错了.本题中,全称量词 $\forall$ 的指导变元为 x,辖域为 $(F(x) \to G(x,y))$,其中 $F(x)$ 与 $G(x,y)$ 中的 x 都是约束变元,因而不能将量词的辖域缩小.

7. 指出下面等值演算中的两处错误.

$$\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y)))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y)))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\exists y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))$$

7. 在演算的第一步中,应用量词否定等值式时丢掉了否定联结词“$\neg$”.在演算的第二步中,在原错的基础上又用错了等值式,即

$$F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y))\not\Leftrightarrow(F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y)$$

9. 设个体域 D 为实数集合，命题“有的实数既是有理数，又是无理数”．这显然是个假命题．可是某人却说这是真命题，其理由如下：设 $F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是无理数．$\exists xF(x)$ 与 $\exists xG(x)$ 都是真命题，因此 $\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$ 是真命题．又

$$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

故 $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 也是真命题，即有的实数既是有理数，又是无理数．试问错误出在哪里．

9. 提示：存在量词对 $\wedge$ 无分配律．

11. 有人说无法求公式

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow \exists xG(x,y)$$

的前束范式，因为公式中的两个量词的指导变元相同.他的理由对吗？为什么？

11. 提示：用换名规则可使两个指导变元不相同.

14. 试给出实例说明，在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中使用 $\exists$+和 $\exists$−规则时，如果不符合规则要求的条件将可能“证明”错误的推理.

14. 取个体域为整数集 $\mathbf{Z}$，$B(x,y)$：$x>y$，$A(y)=\exists xB(x,y)$. 显然，$A(y)$ 为真. 如果应用 $\exists$+,得到 $\exists x\,A(x)=\exists x\exists x\,B(x,x)\Leftrightarrow\exists x\,B(x,x)$，它的意思是：存在 x，使得 $x>x$，它的值为假. 产生错误的原因是 y 在 $A(y)=\exists xB(x,y)$ 中 $\exists x$ 的辖域内自由出现，不满足使用 $\exists$+规则的条件.

对 $A(y)\rightarrow A(y)$ 应用 $\exists$−规则，得到 $\exists yA(y)\rightarrow A(y)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow A(y)$，显然这个推理是错误的. 例如，取个体域为整数集 $\mathbf{Z}$，$A(y)$：$y>5$，$A(y)\rightarrow A(y)$ 为真(实际上它是永真式)，而 $\exists xA(x)\rightarrow A(y)$ 的真值不定，当取赋值 $\sigma(y)=4$ 时为假. 产生错误的原因是 y 在蕴涵式的后件中自由出现.

又如，前提：$F(x)$，$G(x,y)\rightarrow H(y)$，$\exists zG(z,y)$；结论：$H(y)$. 这个推理也是无效的. 例如，取解释：个体域为整数集 $\mathbf{Z}$，$F(x)$：$x\geqslant 0$，$G(x,y)$：$y\geqslant x$，$H(y)$：$y\geqslant 0$. 取赋值 σ：$\sigma(x)=1$，$\sigma(y)=-1$，$\exists zG(z,y)$，$F(x)$，$G(x,y)\rightarrow H(y)$ 均为真，而 $H(y)$ 为假.

错误证明

① $G(x,y)\rightarrow H(y)$	前提引入
② $\exists zG(z,y)$	前提引入
③ $H(y)$	①② $\exists$ −

错误出在步骤③使用 $\exists$−规则时，x 在前提中自由出现.

15. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

(1) 前提：$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists xR(x)$

(2) 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow(G(a)\wedge R(x)))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))$

(3) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

(4) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x))$，$\forall xR(x)$

结论：$\forall xF(x)$

15. (1) 证明：

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	前提引入
③ $\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	①②假言推理
④ $(F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y)$	③$\forall-$
⑤ $(\neg F(y)\vee R(y))\wedge(\neg G(y)\vee R(y))$	④置换
⑥ $\neg F(y)\vee R(y)$	⑤化简
⑦ $F(y)\rightarrow R(y)$	⑥置换
⑧ $F(y)\rightarrow\exists xR(x)$	⑦$\exists+$
⑨ $\exists xR(x)$	①⑧$\exists-$

(2) 证明：

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $\forall x(F(x)\rightarrow(G(a)\wedge R(x)))$	前提引入
③ $F(y)\rightarrow(G(a)\wedge R(y))$	②$\forall-$
④ $F(y)\rightarrow R(y)$	③化简
⑤ $F(y)\rightarrow F(y)\wedge R(y)$	④置换
⑥ $F(y)\rightarrow\exists x(F(x)\wedge R(x))$	⑤$\exists+$
⑦ $\exists x(F(x)\wedge R(x))$	①⑥$\exists-$

(3) 证明：

① $\neg\exists xG(x)$	前提引入
② $\forall x\neg G(x)$	①置换
③ $\neg G(c)$	②$\forall-$
④ $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
⑤ $F(c)\vee G(c)$	④$\forall-$
⑥ $F(c)$	③⑤析取三段论
⑦ $\exists xF(x)$	⑥$\exists+$

(4) 证明：

① $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
② $F(y)\vee G(y)$	①$\forall-$
③ $\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x))$	前提引入
④ $\neg G(y)\vee\neg R(y)$	③$\forall-$
⑤ $\forall xR(x)$	前提引入
⑥ $R(y)$	⑤$\forall-$
⑦ $\neg G(y)$	④⑥析取三段论
⑧ $F(y)$	②⑦析取三段论
⑨ $\forall xF(x)$	⑧$\forall+$

17. 有些人给出下述推理的证明如下.

前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x))$，$\forall x(H(x)\to G(x))$

结论：$\forall x(H(x)\to\neg F(x))$

证明：

① $\forall xH(x)$	附加前提引入
② $H(x)$	①$\forall-$
③ $\forall x(H(x)\to G(x))$	前提引入
④ $H(x)\to G(x)$	③$\forall-$
⑤ $G(x)$	②④假言推理
⑥ $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$	前提引入
⑦ $F(x)\to\neg G(x)$	⑥$\forall-$
⑧ $\neg F(x)$	⑤⑦拒取式
⑨ $\forall x\neg F(x)$	⑧$\forall+$

试指出上述证明中的错误.

17. 本题不能用附加前提证明法. 这个证明证明的结论是 $\forall xH(x)\to\forall x\neg F(x)$，而不是 $\forall x(H(x)\to\neg F(x))$. 前者不能推出后者(见第 16 题).

18. 证明：

① $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$	前提引入
② $\forall x(H(x)\to G(x))$	前提引入
③ $F(y)\to\neg G(y)$	①$\forall-$
④ $H(y)\to G(y)$	②$\forall-$
⑤ $G(y)\to\neg F(y)$	③置换
⑥ $H(y)\to\neg F(y)$	④⑤假言三段论
⑦ $\forall x(H(x)\to\neg F(x))$	⑥$\forall+$

19. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中，构造下列推理的证明.

前提：$\exists xF(x)\rightarrow\forall xG(x)$

结论：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

19. 证明：

① $\exists xF(x)\rightarrow\forall xG(x)$	前提引入
② $\forall x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$	①置换
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	② $\forall-$

说明：(1) 关键是先将前提化成前束范式.

(2) 步骤③是对 $\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$ 使用 $\forall-$ 规则.

20. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中,构造下列推理的证明(可以使用附加前提证明法).

(1) 前提:$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

结论:$\forall xF(x)\rightarrow\forall xG(x)$

(2) 前提:$\forall x(F(x)\vee G(x))$

结论:$\neg\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)$

①	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
②	$F(y)\rightarrow G(y)$	①$\forall-$
③	$\forall xF(x)$	附加前提引入
④	$F(y)$	③$\forall-$
⑤	$G(y)$	③④假言推理
⑥	$\forall xG(x)$	⑤$\forall+$

①	$\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
②	$F(y)\vee G(y)$	①$\forall-$
③	$\neg F(y)\rightarrow G(y)$	②置换
④	$\neg F(y)\rightarrow\exists xG(x)$	③$\exists+$
⑤	$\exists x\neg F(x)\rightarrow\exists xG(x)$	④$\exists-$
⑥	$\neg\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)$	⑤置换

(1) 每个有理数都是实数.有的有理数是整数.因此,有的实数是整数.

(2) 有理数和无理数都是实数.虚数不是实数.因此,虚数既不是有理数,也不是无理数.

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车.每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车.有的人不喜欢乘汽车. 所以,有的人不喜欢步行.(个体域为人类集合)

每个科学工作者都是刻苦钻研的,每个刻苦钻研而又聪明的人在他的事业中都将获得成功.王大海是科学工作者,并且是聪明的. 所以,王大海在他的事业中将获得成功.(个体域为人类集合)

23. (1) 设 $F(x)$:x 是有理数,$G(x)$:x 是实数,$H(x)$:x 是整数.

前提:$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\exists x(F(x)\land H(x))$

结论:$\exists x(G(x)\land H(x))$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(y)\rightarrow G(y)$	①$\forall$-
③ $\neg F(y)\lor G(y)$	②置换
④ $\neg F(y)\lor(G(y)\land(\neg H(y)\lor H(y)))$	③置换
⑤ $\neg F(y)\lor(G(y)\land\neg H(y))\lor(G(y)\land H(y))$	④置换
⑥ $(\neg F(y)\lor\neg H(y))\lor(G(y)\land H(y))$	⑤化简
⑦ $F(y)\land H(y)\rightarrow G(y)\land H(y)$	⑥置换
⑧ $F(y)\land H(y)\rightarrow\exists x(G(x)\land H(x))$	⑦$\exists$+
⑨ $\exists x(F(x)\land H(x))$	前提引入
⑩ $\exists x(G(x)\land H(x))$	⑧⑨$\exists$-

(2) 设 $F(x)$:x 是有理数,$G(x)$:x 是无理数,$H(x)$:x 是实数,$I(x$

前提:$\forall x((F(x)\lor G(x))\rightarrow H(x))$, $\forall x(I(x)\rightarrow\neg H(x))$

结论:$\forall x(I(x)\rightarrow(\neg F(x)\land\neg G(x)))$

证明:

① $\forall x(I(x)\rightarrow\neg H(x))$	前提引入
② $I(y)\rightarrow\neg H(y)$	①$\forall$-

⑩ ¬

⑪ ∃

也可

25. 设

获得成功

前提

结论

证明

① F

② ∀

③ F

④ G

⑤ H

③ $\forall x((F(x)\lor G(x))\rightarrow H(x))$	前提引入
④ $(F(y)\lor G(y))\rightarrow H(y)$	③$\forall$-
⑤ $\neg H(y)\rightarrow(\neg F(y)\land\neg G(y))$	④置换
⑥ $I(y)\rightarrow(\neg F(y)\land\neg G(y))$	②⑤假言三段论
⑦ $\forall x(I(x)\rightarrow(\neg F(x)\land\neg G(x)))$	⑥$\forall$+

24. 设 $F(x)$:x 喜欢步行,$G(x)$:x 喜欢骑自行车,$H(x)$:x 喜欢乘汽车.

前提:$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$, $\forall x(G(x)\lor H(x))$, $\exists x\neg H(x)$

结论:$\exists x\neg F(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$	前提引入
② $F(y)\rightarrow\neg G(y)$	①$\forall$-
③ $\forall x(G(x)\lor H(x))$	前提引入

25. 设 $F(x)$:x 是科学工作者,$G(x)$:x 是刻苦钻研的,$H(x)$:x 是聪明的,$I($

获得成功,a:王大海.

前提:$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x((G(x)\land H(x))\rightarrow I(x))$, $F(a)$, $H(a)$

结论:$I(a)$

证明:

① $F(a)$	前提引入
② $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
③ $F(a)\rightarrow G(a)$	②$\forall$-
④ $G(a)$	①③假言推理
⑤ $H(a)$	前提引入
⑥ $\forall x((G(x)\land H(x))\rightarrow I(x))$	前提引入
⑦ $(G(a)\land H(a))\rightarrow I(a)$	⑥$\forall$-
⑧ $G(a)\land H(a)$	④⑤合取

第十一章

格与布尔代数

目录

格及其运算性质的判断

表 11.1

	a	b	c	d	e	f
a		a	a	e	e	a
b			a	d	e	b
c				e	e	c
d					e	d
e						e
f						

表 11.2

	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	e	e	a
b	a	b	a	d	e	b
c	a	a	c	e	e	c
d	e	d	e	d	e	d
e	e	e	e	e	e	e
f	a	b	c	d	e	f

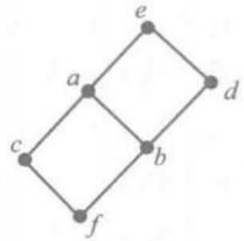


图 11.1

1. 考虑实数集 $\mathbf{R}$ 和通常的小于等于关系 $\leqslant$.

(1) 说明 $<\mathbf{R},\leqslant>$ 是否构成格.

(2) $\forall x,y\in\mathbf{R}$, 求 $x\vee y, x\wedge y$.

1. (1) 构成格.

(2) $x\vee y=\max(x,y)$, $x\wedge y=\min(x,y)$.

2. 表 11.1 是一个关于格 $L=\{a,b,c,d,e,f\}$ 中 $\vee$ 运算的运算表, 如果 $\vee$ 运算是可交换和幂等的.

(1) 完成该运算表.

(2) 画出 L 的哈斯图.

2. (1) 由于 $\vee$ 运算是可交换的、幂等的, 因此运算表是对称的, 并且主对角线元素排列为 a, b,c,d,e,f, 从而得到运算表如表 11.2 所示.

(2) 由运算表不难看出 e 是最大元, f 是最小元. a 是被 e 覆盖的元素 (因为除了 e 和 d 以外, 其他元素与 a 运算都等于 a, a 小于 e, a 与 d 不可比, 但是 a 大于其他元素). 类似地, 可以知道 d 也是被 e 覆盖的元素. 对于其他元素之间的关系也可以作出分析, 最终得到的哈斯图如图 11.1 所示.

有关格中等式或不等式的判断

证明：(1) $(a \wedge b) \vee b = b$.

(2) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$.

解答与分析

(1) $(a \wedge b) \vee b$ 是 $a \wedge b$ 与 b 的最小上界，根据最小上界的定义有 $(a \wedge b) \vee b \succcurlyeq b$. 类似地，$b$ 是 $a \wedge b$ 与 b 的上界，故有 $(a \wedge b) \vee b \preccurlyeq b$. 由于偏序的反对称性，等式得证.

(2) 由 $a \wedge b \preccurlyeq a \preccurlyeq a \vee c$ 与 $a \wedge b \preccurlyeq b \preccurlyeq b \vee d$ 得到

$$(a \wedge b) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

同理得到

$$(c \wedge d) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

因此有

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

证明格中等式的基本方法就是证明等式的左边“小于等于”右边，同时等式的右边也“小于等于”左边.然后利用偏序关系的反对称性，由这两个不等式得到需要的等式.因此等式的证明可以归结为两个不等式的证明.

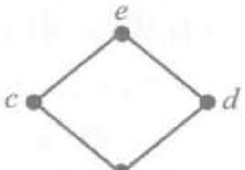
为证明格中的不等式可以使用如下结果：

$a \preccurlyeq a$（偏序关系的自反性）.

$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$（偏序关系的传递性）.

$a \wedge b \preccurlyeq a, a \wedge b \preccurlyeq b, a \preccurlyeq a \vee b, b \preccurlyeq a \vee b$（下界定义与上界定义）.

$a \preccurlyeq b$ 且 $a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c, b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a \Rightarrow b \vee c \preccurlyeq a$（最大下界定义与最小上界定义）.



$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$ 且 $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$（保序性）.

题型三　子格判定

求图 11.2 中格 L 的所有子格.

1 元子格：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{e\}$.

2 元子格：$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{a,e\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$，$\{b,e\}$，$\{c,e\}$，$\{d,e\}$.

3 元子格：$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,c,e\}$，$\{a,d,e\}$，$\{b,c,e\}$，$\{b,d,e\}$.

4 元子格：$\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{b,c,d,e\}$.

5 元子格：$\{a,b,c,d,e\}$.

子格的判定主要依据定义，就是判别给定子集关于原来格中的求最小上界、求最大下界运算是否封闭.对于图 11.2 中的格，$\{a,c,d,e\}$ 不构成子格.因为在原来的格里，$\{c,d\}$ 的最大下界是 b，而 b 不属于 $\{a,c,d,e\}$.

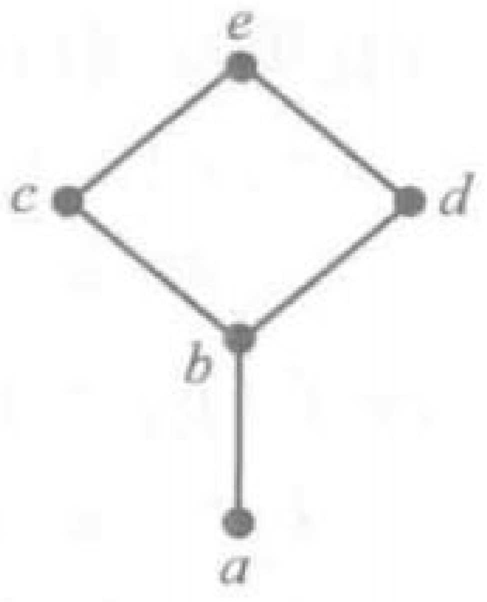


图 11.2

特殊的格

1.（1）判断图 11.3 中的格是否为分配格.

（2）针对图 11.3 中的格求出每个格的补元,并说明它们是否为有补格.

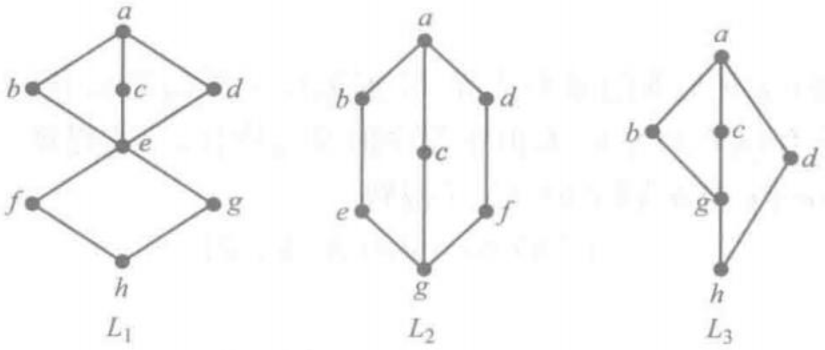


图 11.3

1.（1）L_1 不是分配格,因为它含有与钻石格同构的子格.L_2 和 L_3 不是分配格,因为它们含有与五角格同构的子格.

（2）L_1 中,a 与 h 互为补元,其他元素没有补元.

L_2 中,a 与 g 互为补元;b 的补元为 c,d,f;c 的补元为 b,d,e,f;d 的补元为 b,c,e;e 的补元为 c,d,f;f 的补元为 b,c,e.

L_3 中,a 与 h 互为补元;b 的补元为 d;c 的补元为 d;d 的补元为 b,c,g;g 的补元为 d.

L_2 与 L_3 是有补格.

2. 判断下述代数系统是否为格，是否为布尔代数.

(1) $S=\{1,3,4,12\}$，任给 $x,y\in S$,

$$x\circ y=\mathrm{lcm}(x,y),\ x*y=\gcd(x,y)$$

其中，lcm 是求最小公倍数，gcd 是求最大公约数.

(2) $S=\{0,1,2\}$，$\circ$是模 3 加法，$*$ 是模 3 乘法.

(3) $S=\{0,\cdots,n\}$，其中 $n\geqslant 2$，任给 $x,y\in S$，$x\circ y=\max(x,y)$，$x*y=\min(x,y)$.

2. (1) 是布尔代数.

(2) 不是格.

(3) 是格，但不是布尔代数.

设<$B,\wedge,\vee,',0,1$>是布尔代数，$a,b,c\in B$，化简下列公式.

(1) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a'\vee b)$

(2) $(a\wedge b)\vee(a\wedge(b\wedge c)')\vee c$

解答与分析

(1) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a'\vee b)$

$=(a\wedge(b\vee b'))\vee(a'\vee b)$　　（分配律）

$=(a\wedge 1)\vee(a'\vee b)$

$=a\vee(a'\vee b)=(a\vee a')\vee b$

$=1\vee b=1$

(2) $(a\wedge b)\vee(a\wedge(b\wedge c)')\vee c$

$=(a\wedge b)\vee(a\wedge(b'\vee c'))\vee c$

$=(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a\wedge c')\vee c$

$=a\wedge(b\vee b')\vee(a\wedge c')\vee c$　　（分配律）

$=(a\wedge 1)\vee((a\vee c)\wedge(c\vee c'))$

$=a\vee(a\vee c)=a\vee c$

布尔代数的化简或者证明题的解答主要应用布尔代数中的算律，如结合律、交换律、幂等律、吸收律、分配律、德摩根律，还有关于单位元和补元的算律.

1. 图 11.4 中给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 说明理由.

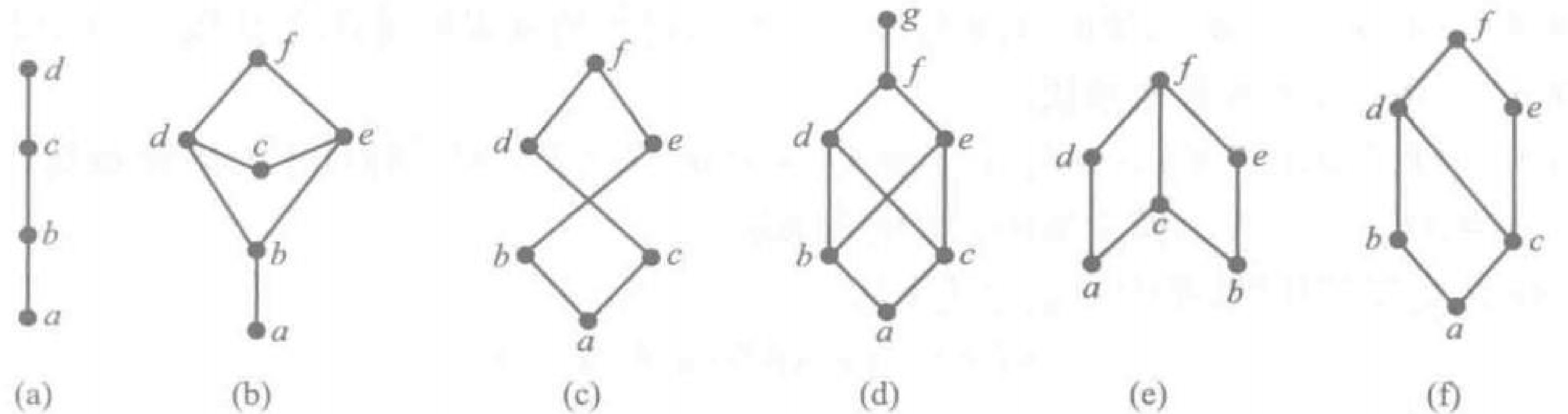


图 11.4

1. 图 11.4 中, (b)、(d)、(e)不是格. 在(b)中$\{d,e\}$没有最大下界. 在(d)中$\{d,e\}$没有最大下界. 在(e)中$\{a,b\}$没有最大下界.

2. 下列集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

(1) $L=\{1,2,3,4,5\}$

(2) $L=\{1,2,3,6,12\}$

(3) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

(4) $L=\{1,2,2^2,\cdots\}$

2. (1) 不是格，其他都是格.

3.（1）画出$<\mathbf{Z}_{16},\oplus>$的子群格.

3.（1）、(2)的哈斯图分别如图 11.6、

图 11.6

4. 设 L 是格，求下列公式的对偶式.

(1) $a \wedge (a \vee b) \preccurlyeq a$

(2) $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(3) $b \vee (c \wedge a) \preccurlyeq (b \vee c) \wedge a$

4. (1) $a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a$

(2) $a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(3) $b \wedge (c \vee a) \succcurlyeq (b \wedge c) \vee a$

5. 设 L 为格，$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in L$，如果 $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$，证明：$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

5. $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in L$，有

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n \leqslant a_i \leqslant a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$. 由于 $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$，所以有 $a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$，于是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

6. 设 L 是格，$a,b,c\in L$，且 $a\preccurlyeq b\preccurlyeq c$，证明：$a\vee b=b\wedge c$.

6. 由 $a\preccurlyeq b$ 得 $a\vee b=b$. 由 $b\preccurlyeq c$ 得 $b=b\wedge c$. 因此 $a\vee b=b\wedge c$.

7. 针对图 11.5 中的格 L_1，求出 L_1 的所有子格.

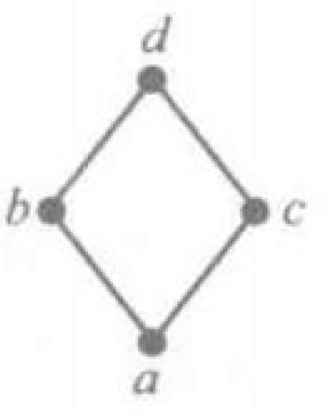


图 11.5

7. $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}$.

8. 设$<L,\preccurlyeq>$是格，任取 $a\in L$，令

$$S=\{x\mid x\in L\wedge x\preccurlyeq a\}$$

证明：$<S,\preccurlyeq>$是 L 的子格.

8. $a\in S$，S 非空.任取 $x,y\in S$，则 $x\preccurlyeq a$，$y\preccurlyeq a$，从而得到

$$x\wedge y\preccurlyeq x\preccurlyeq a,\quad x\vee y\preccurlyeq a\vee a\preccurlyeq a$$

S 对 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭.$<S,\preccurlyeq>$是 L 的子格.

9. 针对图 11.4 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元.

9. (a) a 与 d 互为补元，其他元素没有补元.

(c) a 与 f 互为补元，b 的补元是 c 和 d，c 的补元是 b 和 e，d 的补元是 b 和 e，e 的补元是 c 和 d.

(f) a 与 f 互为补元，b 与 e 互为补元，c 与 d 没有补元.

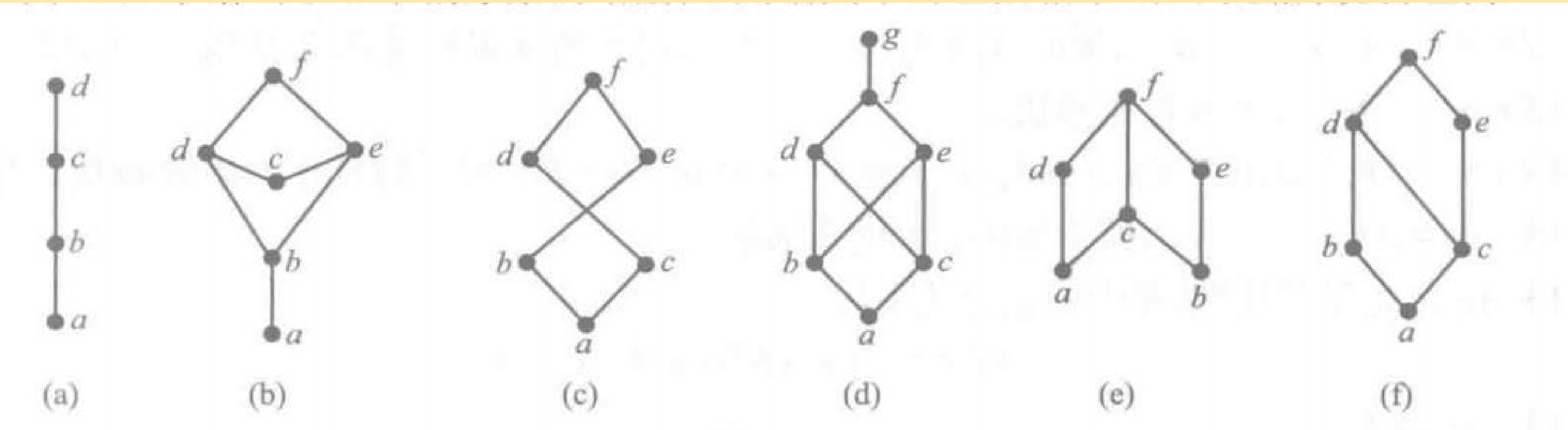


图 11.4

10. 说明图 11.4 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由.

10. (a) 是分配格，因为任何链都是分配格. 不是有补格和布尔格，因为 b 与 c 没有补元.

(c) 不是分配格，因为含有 5 元子格与五角格同构. 是有补格，每个元素都有补元，不是布尔格，因为不是分配格.

(f) 是分配格，因为不含与钻石格和五角格同构的子格. 不是有补格和布尔格，因为 c 与 d 没有补元.

11. 设$\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$是有界格，证明$\forall a\in L$有

$$a\wedge 0=0,a\vee 0=a,a\wedge 1=a,a\vee 1=1$$

11. $a\wedge 0\preccurlyeq 0$，$0\preccurlyeq 0$ 且 $0\preccurlyeq a\Rightarrow 0\preccurlyeq a\wedge 0$，根据反对称性 $a\wedge 0=0$.

$a\preccurlyeq a\vee 0$，$0\preccurlyeq a$ 且 $a\preccurlyeq a\Rightarrow a\vee 0\preccurlyeq a$，根据反对称性 $a\vee 0=a$.

$a\wedge 1\preccurlyeq a$，$a\preccurlyeq a$ 且 $a\preccurlyeq 1\Rightarrow a\preccurlyeq a\wedge 1$，根据反对称性 $a\wedge 1=a$.

$1\preccurlyeq a\vee 1$，$1\preccurlyeq 1$ 且 $a\preccurlyeq 1\Rightarrow a\vee 1\preccurlyeq 1$，根据反对称性 $a\vee 1=1$.

12. 对以下各小题给定的集合和运算判断它们是哪一类代数系统（半群、独异点、群、环、域、格、布尔代数），并说明理由.

（1）$S_1=\left\{1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4\right\}$，$*$ 为普通乘法.

（2）$S_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\forall a_i,a_j\in S_2,a_i*a_j=a_i$，这里的 n 是给定的正整数，且 $n\geq 2$.

（3）$S_3=\{0,1\}$，$*$ 为普通乘法.

（4）$S_4=\{1,2,3,6\}$，$\forall x,y\in S_4,x\circ y$ 和 $x*y$ 分别表示求 x 和 y 的最小公倍数和最大公约数.

（5）$S_5=\{0,1\}$，$*$ 表示模 2 加法，$\circ$为模 2 乘法.

12.（1）不是代数系统，因为乘法不封闭，如 $4*4=16$.

（2）是半群但不是独异点，因为 $*$ 运算满足结合律，但是没有单位元.

（3）是独异点但不是群. 因为 $*$ 运算满足结合律，单位元是 1，可是 0 没有乘法逆元.

（4）是格，也是布尔代数. 因为这两个运算满足交换律和分配律；求最小公倍数运算的单位元是 1，求最大公约数运算的单位元是 6，满足同一律；两个运算满足补元律.

（5）是域. 对于模 n 的环 $\mathbf{Z}_n$，当 n 为素数时构成域.

13. 设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

（1）化简 f.

（2）求 f 的对偶式 f^*.

13.（1）$(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge c)) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$

（2）$b \vee (a \wedge c)$

14. 设 B 是布尔代数，$\forall a, b \in B$，证明：$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$.

14. (1) 证明 $a \leqslant b \Rightarrow a \wedge b' = 0$，

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Rightarrow a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$$

(2) 证明 $a \wedge b' = 0 \Rightarrow a' \vee b = 1$，

$$a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow (a \wedge b')' = 1 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$$

(3) 证明 $a' \vee b = 1 \Rightarrow a \leqslant b$，

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \Leftrightarrow a \leqslant b$$

15. 对于 $n=1,2,3,4,5$，给出所有不同构的 n 元格，并说明其中哪些是分配格、有补格和布尔格.

15. 如图 11.8 所示，$n=1$，只有 1 个格，是分配格、有补格和布尔格（其中 $0=1$）. $n=2$，只有一个格，是分配格、有补格和布尔格. $n=3$，只有一个格，是分配格，不是有补格和布尔格. $n=4$，有 2 个格，一个是链，是分配格，不是有补格和布尔格；另一个是菱形格，是分配格、有补格和布尔格. $n=5$，有 5 个格，都不是布尔格，其中的链是分配格，不是有补格. 钻石格和五角格是有补格，不是分配格. 剩下的两个格是分配格，不是有补格.

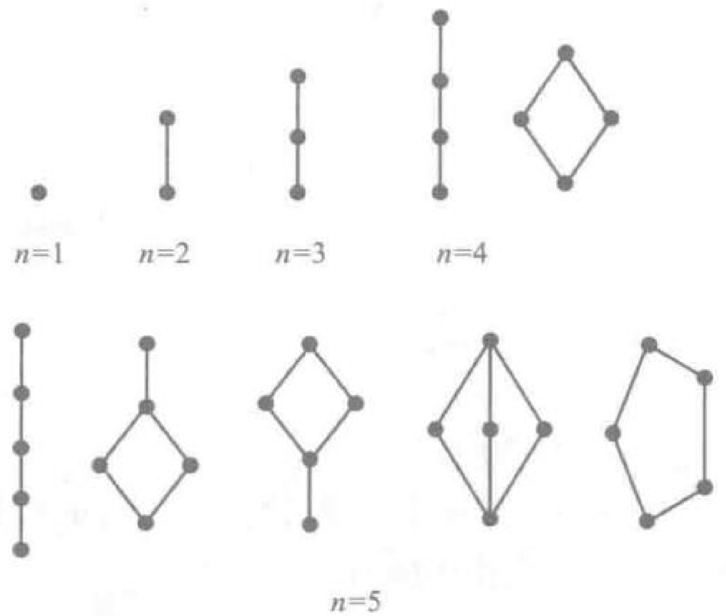


图 11.8

16. 设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数，在 B 上定义二元运算$\oplus$，$\forall x,y\in B$ 有

$$x\oplus y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$$

问：$<B,\oplus>$能否构成代数系统？如果能，指出是哪一种代数系统，为什么？

16. 构成群. 易见$\oplus$运算是封闭的. 下面证明结合律. $\forall x,y,z\in B$,

$$\begin{aligned}(x\oplus y)\oplus z&=((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\oplus z\\&=(((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z')\vee(((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))'\wedge z)\\&=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee((x\wedge y')'\wedge(x'\wedge y)'\wedge z)\\&=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee((x'\vee y)\wedge(x\vee y')\wedge z)\\&=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(((x'\wedge x)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y)\vee(y\wedge y'))\wedge z)\\&=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)\end{aligned}$$

同理有

$$x\oplus(y\oplus z)=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)$$

0 是单位元，任意 x 的逆元就是 x 自身. 因此$<B,\oplus>$构成群.

17. 设 B 是布尔代数，$\forall a, b, c \in B$，若 $a \preccurlyeq c$，则有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

称这个等式为**模律**，证明：布尔代数适合模律.

17. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$

18. 设 B 是布尔代数，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$，证明：

(1) $(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)'=a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_n'$

(2) $(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n)'=a_1'\vee a_2'\vee\cdots\vee a_n'$

18. (1) 对 n 进行归纳. 当 $n=2$ 时是德摩根律.

假设对于 $n=k$ 命题为真，则

$$(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{k+1})'=((a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)\vee a_{k+1})'=(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)'\wedge a_{k+1}'$$

$$=(a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_k')\wedge a_{k+1}'=a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_k'\wedge a_{k+1}'$$

(2)与(1)类似.

19. 设 B_1, B_2, B_3 是布尔代数，证明：若 $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$，则 $B_1 \cong B_3$.

19. 由 $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$，存在同构映射 $f: B_1 \to B_2, g: B_2 \to B_3$，因此 $f \circ g: B_1 \to B_3$ 也是双射. 下面证明 $f \circ g$ 是同态映射. $\forall x, y \in B_1$，

$$f \circ g(x \wedge y) = g(f(x \wedge y)) = g(f(x) \wedge f(y))$$

$$= g(f(x)) \wedge g(f(y)) = f \circ g(x) \wedge f \circ g(y)$$

$$f \circ g(x') = g(f(x')) = g(f(x)') = g(f(x))' = f \circ g(x)'$$

因此 $f \circ g$ 是 B_1 到 B_3 的同态映射，从而证明了 $B_1 \cong B_3$.

THANKS!