线性代数与空间解析几何

相似矩阵习题课

一、简单的归纳总结

矩阵	A	kA	A^n	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^n	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\dfrac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$\lambda^{-1}+f(\lambda)$
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

例1 设A是n阶方阵，且满足$A^2=A$

(1)求A 的特征值的范围

(2)证明 $E+A$ 是可逆的

例2 设四阶方阵A 满足条件$|3E+A|=0$, $AA^T=2E$, $|A|<0$,其中E是4阶单位阵,求矩阵A 的伴随矩阵A^*的一个特征值.

例3 P179 例9

设n 阶实对称矩阵A的特征值都大于0，证明$|E+A|>1$.

例:已知-2是$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & x & -2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$的特征值,则$x=($ $)$

例4 若三维列向量α,β 满足$\alpha^T\beta=2$,则矩阵$\alpha\beta^T$的非零特征值为(　　)

设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)^T$都是非零向量,且满足$\alpha^T\beta=0$,记矩阵$A=\alpha\beta^T$

求(1)A^2　(2)矩阵A的特征值和特征向量

二 两个矩阵有相同特征值的证明

例1 (1)A 与A^T有相同的特征值;

(2) 设A,B 都是n阶方阵,$|A|\neq 0$, P184 3

证明AB 与BA 相似(AB 与BA 有相同的特征值);

(3)A,B 均是对称阵,证明AB 与BA 有相同的特征值.

$X=(1,0)$ 是$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的特征向量;

$X=(1,0)$ 不是$A^T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征向量;

三 关于特征向量

例1 设n阶矩阵A有特征值λ_0，对应的特征向量为ξ

(1)证明ξ是A^2的对应于λ_0^2的特征向量

(2) 反之，A^2有特征向量ξ，问A是否有特征向量ξ？

(3)设A是n阶可逆矩阵，$A^3\xi=\lambda\xi$，$A^5\xi=\mu\xi$，

证明：ξ也是A的特征向量

(2) 例$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A^2有特征值$\lambda=0$，对应的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ξ_2不是A的特征向量

例2 设λ_1,λ_2是A 的两个不同的特征值,ξ 是对应于λ_1的特征向量,证明：ξ 不是λ_2 的特征向量

作业题P184.8

例3.1 设$\alpha=(1,k,1)^T$是$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$的逆$A^{-1}$的特征向量

则k=(　　)

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3+k=\lambda\\2+2k=\lambda k\\3+k=\lambda\end{cases}\qquad k=-2\text{或}k=1$$

例3.2 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$可逆,向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是矩阵$A^*$的特征向量,求$a,b$ 的值.

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3+b=\lambda\\2+2b=\lambda b\\1+a+b=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\text{或}b=1\end{cases}$$

$b=-2$时,$\alpha=(1,-2,1)^T$,此时$\lambda=1$

$b=1$时,$\alpha=(1,1,1)^T$,此时$\lambda=4$

四、矩阵的相似对角化问题

例1 判断下列矩阵是否可以对角化，若可以求P使$P^{-1}AP=D$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

例2 设n阶矩阵$A\neq 0$，但$A^k=0$（k为整数），问A能否相似于对角阵？并说明理由

设n阶矩阵$A\neq 0$，但$A^2=0$，证明A不能否相似对角化

例3 设A 为三阶方阵, 且已知A-E , A+E , A-2E 均不可逆, 问A 能否相似于对角阵? 并说明理由

例4 $$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

问C是否可以相似对角化，说明理由

因 $$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

C 的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$

$$0E - C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$n - R(0E - C) = n - (n-1) = 1 \neq$ 特征值0的代数重数

于是 C 不可以相似对角化

习题1 设$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$是主对角线为1的上三角阵,且存在$a_{ij}\neq 0\,(i<j)$, 问$A$ 是否可以相似于对角阵,说明理由

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \\ & 1 & * & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

因 $$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & & \cdots & \\ & \lambda-1 & * & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^n$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1.$

$$1E-A=\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$n-R(1E-A)\leq\ n-1\neq$ 特征值1的代数重数n

于是 A 不可以相似对角化

习题2 设n阶方阵A满足$A^2=E$

(1) A的特征值只能为1或者-1;

(2) A是否可以相似对角化. **P260 3**

判定矩阵是否能与对角阵相似

(1) 观察A 是否为实对称矩阵，实对称矩阵必定与对角阵相似；

(2) 求A 的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$，若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$互异，则$A$ 与对角阵相似；

(3) 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 中互异的为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$，每个$\lambda_i$的重数为$r_i$，若$\lambda_i$ 的几何重数$n-R(\lambda_i E-A)=r_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$，则A 与对角阵相似;

否则A 与对角阵不相似.

五、矩阵的相似

例1：已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$且$A$与$B$相似

(1) 求a,b的值;

(2) 求正交矩阵P,使$P^{-1}AP=B$

作业 P184 习题9

练习 设$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & l \end{pmatrix}$且$A$与$B$相似

(1) 求a,b,l 的值

(2) 求正交矩阵P,使$P^{-1}AP=B$

例2 设$\alpha=(1,1,1)^T, \beta=(1,0,k)^T$,若矩阵$\alpha\beta^T$相似于

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{则} k=(\quad 2 \quad)$$

例3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$则((B))

(A) A与C相似, B与C相似;

(B) A与C相似, B与C不相似;

(C) A与C不相似, B与C相似;

(D) A与C不相似, B与C不相似.

归纳总结

同型矩阵A与B等价$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

$$A\text{与}B\text{相似}\begin{cases} A\text{与}B\text{均可以对角化}\begin{cases}\lambda_A=\lambda_B,\ \text{则相似}\\ \lambda_A\neq\lambda_B,\text{则不相似}\end{cases}\\ A\text{可对角化},B\text{不可对角化},\ \text{则不相似}\\ A\text{与}B\text{均不可对角化},\text{则不能直接判断}\end{cases}$$

判断下列两矩阵A,B是否相似.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

A是实对称矩阵, A 一定可以相似对角化

因 $$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

A的特征值为$\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$

因此 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & n \end{pmatrix}$

因 $\det(\lambda E - B) = \begin{vmatrix} \lambda - n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$

B 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$

$$0E-B=\begin{pmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$n-R(0E-B)=n-1=$ 特征值0的代数重数

于是B一定可以相似对角化

并且 B 相似于对角阵$\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & n \end{pmatrix}$

因此矩阵A,B相似.

练习

1. 设A为n 阶可逆矩阵，且$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a, i = 1, 2, \cdots, n$

求A 的一个特征值和对应的特征向量

2. 矩阵$A_{3\times3}$的特征值为：$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3.$

对应的特征向量分别是$\xi_1=(2,2,-1)^T, \xi_2=(-1,2,2)^T,$

$\xi_3=(2,-1,2)^T, \beta=(1,2,3)^T$ 计算$A^n\xi_1, A^n\beta$ P257 4

$$A^n\xi_1=\lambda_1^n\xi_1 = \xi_1$$

2. 设$\beta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$

$$k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = 1, k_3 = \frac{2}{3} \quad \text{故} \beta = \frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$$

$$A^n\beta = A^n\left(\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3\right)$$

$$= \frac{1}{3}A^n\xi_1 + A^n\xi_2 + \frac{2}{3}A^n\xi_3$$

$$= \frac{1}{3}\lambda_1^n\xi_1 + \lambda_2^n\xi_2 + \frac{2}{3}\lambda_2^n\xi_3$$

$$= \frac{1}{3}\xi_1 + 2^n\xi_2 + \frac{2}{3}3^n\xi_3$$

第23次结束

3.　设3阶实对称矩阵A的每一列元素之和为3，

且$R(A)=1$，求正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵

4.　已知3阶矩阵A与3维列向量x，使得向量组x, Ax, A^2x

线性无关，且满足$A^3x=3Ax-2A^2x$

(1)记$P=(x, Ax, A^2x)$，求三阶矩阵B，使得$A=PBP^{-1}$

(2) 计算行列式$|A+E|$

5.设A 为n 阶实对称矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是其特征值, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是A 的对应于$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 的 n 个两两正交的单位特征向量,试证A 可表示为

$$A = \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T + \cdots + \lambda_n x_n x_n^T.$$

6.设A 为实对称矩阵，且A 的所有特征值$\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,证明:存在实对称矩阵B, 使$A = B^2$.

7.设A 为实对称矩阵，证明:存在实对称矩阵B, 使$A = B^3$.

1. n阶方阵A与某对角阵相似,则((D))

(A) $R(A)=n$;

(B) A有n个不同的特征根;

(C) A一定是实对称阵;

(D) 方阵A有n个线性无关的特征向量.

2. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的(　　) **(B)**

(A) 充分必要条件;

(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;

(D) 既非充分也非必要条件.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则$A$的特征值是((C))

(A) 1, 0, 1;　　(B) 1, 1, 2;

(C) -1, 1, 2;　　(D) -1, 1, 1.

4. 设$\lambda=2$为非奇异阵A的一个特征值,且$|A|=2$,则矩阵$E+(\frac{1}{2}A^*)^{-1}$,有一个特征根等于((C))

(A) $\frac{1}{4}$;　　(B) $\frac{5}{4}$;　　(C) 3;　　(D) $\frac{4}{5}$.

5. 设n阶方阵A满足$A^2=E$,则((C))

(A) $|A|=1$； (B) A的特征值为1；

(C) $R(A)=n$； (D) A一定为对称阵 .

6. 如果((D)),则矩阵A与B相似

(A) $|A|=|B|$；

(B) $R(A)=R(B)$；

(C) A与B有相同的特征多项式;

(D) n阶方阵A与B有相同的特征值且n个特征值各不相同.

7. 设A是n阶实方阵,则下列命题中错误的为((D))

(A) 若$|A| = 0$,则0为A的一个特征值;

(B) 若$A^2 = A$,则A的特征值只能为0 ,1;

(C) 若$A^2 + A + E = 0$,则A没有实特征根;

(D) 若$|A(E - A)| = 0$,则1是A的一个特征值.

8. 若A, B均为n阶方阵,且A与B相似,则下列结论错误的是((D))

(A) $|A| = |B|$; (B) $R(A) = R(B)$;

(C) $tr(A) = tr(B)$; (D) $A^* = B^*$.

9. 已知3阶方阵A的特征值为$1,-1,2$,且$B=A^3-2A^2$,则$|B|=($ (C) $)$

(A) 1； (B) 2； (C) 0； (D) -1 .

10. 若A,B均为n阶可逆阵,且A与B相似,则下列结论错误的是 (C)

(A) A^T与B^T相似;

(B) A^{-1}与B^{-1}相似;

(C) $A+A^T$与$B+B^T$相似;

(D) $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似.

11. 已知三阶方阵A的特征值为1,-1,2,且A与三阶方阵B具有相同的特征值,则下列描述不正确的为((C))

(A) A与B相似;　　(B) A与B等价;

(C) A与B都是正交矩阵;　　(D) A与B均可逆.

12. 设X是n阶方阵A的特征向量,P是n阶可逆阵,则(　)

(B)

(A) X是$P^{-1}AP$的特征向量;

(B) $P^{-1}X$是$P^{-1}AP$的特征向量;

(C) $P^{-1}XP$是$P^{-1}AP$的特征向量;

(D) PX是$P^{-1}AP$的特征向量.

13.设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为α_1,α_2,则$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是((B))

(A) $\lambda_1 \neq 0$;　(B) $\lambda_2 \neq 0$;　(C) $\lambda_1 = 0$;　(D) $\lambda_2 = 0$.

14. 矩阵$A_{3\times 3}$的特征值为：$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1.$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是矩阵$A$的对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

特征向量，令$P=(3\alpha_2,3\alpha_3,-\alpha_1)$

求矩阵$P^{-1}(A^*+E)P$

15.设A是三阶方阵,$\xi_1=(1,1,-1)^T,\xi_2=(1,t+1,0)^T$分别为$A$的属于特征值2,3的特征向量,已知$\beta=(2,t+2,1)^T$可由$\xi_1,\xi_2$线性表示

（1）求t

（2）求$A^{n}\beta$

16.设三阶是对称阵A的特征值为6,3,3,与特征值6对应的特征向量为$P_1=(1,1,1)^T$,求A.