线性代数与空间解析几何

4.5 欧式空间

一　　内积的概念

二　　规范正交基

三　　施密特正交化方法

四　　正交矩阵

一　内积的概念

1. 内积

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$

令　$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\alpha\beta^T$$

称(α,β)为向量α与β的内积.

2. 欧式空间

定义了线性运算和内积运算的R^n 称为欧式空间.

以后仍用R^n 表示欧式空间

说明

$n(n \geq 4)$维向量的内积是3维向量数量积的推广,但是没有3维向量直观的几何意义.

3. 内积的运算性质

$\forall \alpha,\beta,\gamma \in R^n, k,l \in R$

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 且$(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

(5) $(\alpha,k\beta+l\gamma)=k(\alpha,\beta)+l(\alpha,\gamma)$

4. 向量的长度

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，令

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},$$

称$|\alpha|$为向量α 的长度.

若$|\alpha|=1$,则称向量α 为单位向量.

$\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$是单位向量,也称为向量的单位化.

5. 模(向量长度)的性质

$$\forall \alpha,\beta \in R^n, k \in R$$

(1) 非负性：$|\alpha| \geq 0$，且$|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha = 0$；

(2) 齐次性：$|k\alpha| = |k||\alpha|$；

(3) 三角不等式：$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

6. 夹角

$$\forall \alpha,\beta \in R^n, \alpha \neq 0, \beta \neq 0,\ \cos\langle \alpha,\beta \rangle = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$$

$\varphi = \arccos \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$, 称为$\alpha$与$\beta$的夹角. $\varphi \in [0,\pi]$

7. 正交

若$(\alpha,\beta)=0$, 则称α与β正交, 记为$\alpha \perp \beta$.

显然, 若$\alpha = 0$, 则α与R^n中任何向量都正交.

二　规范正交基

1. 正交向量组

两两正交的非零向量构成的向量组称为正交向量组.

若 n 维非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交, 即满足 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j)$,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为正交向量组.

n 维标准单位向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

2. 规范正交向量组

由**单位向量**构成的正交向量组称为规范正交向量组.

n维标准单位向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

3. 性质 例14(记住)

证明:正交向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$一定线性无关.

问题: (1) 线性无关的向量组是否一定正交?

$$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(0,0,1)$$

(2) 线性无关的向量组是否可以化为正交向量组?

4. 正交基，规范正交基

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间V 的一组基,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间V 的正交基.

设n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间 $V(V \subset R^n)$ 的一个基,如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交且都是单位向量,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V的一个规范正交基.

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

是R^n 的一个规范正交基

结论 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^n$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是R^n 的

规范正交基$\Leftrightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

性质 **例15 P129**

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间V 的一个规范正交基,$\alpha\in V$,

$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$,试证:$k_i=(\alpha_i,\alpha),i=1,2,\cdots,m$

三　施密特正交化方法

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间V的一个基,求V的一个规范正交基,就是要找一组两两正交的单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_m$,使$e_1,e_2,\cdots,e_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价,这样一个问题,称为 把$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 这个基**规范正交化.**

(1)求与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价的正交向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

(2)求与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价的规范正交向量组$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为向量空间V 的一个基底,

(1) 正交化 令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$$

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为正交向量组

(2) 单位化　令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\quad \cdots\cdots,\gamma_m=\frac{\beta_m}{|\beta_m|}$$

$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 即为 V 的规范正交基

上述线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构造正交向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 的过程称为**施密特正交化过程**

例 利用施密特正交化方法将向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(1,-1,0,4),\alpha_3=(3,5,1,-1)$$

规范正交化

解 正交化，

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$=(1,-1,0,4)-\frac{1-1+4}{1+1+1+1}(1,1,1,1)$$

$$=(0,-2,-1,3)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(3,5,1,-1)-\frac{8}{4}(1,1,1,1)-\frac{-14}{14}(0,-2,-1,3)$$

$$=(1,1,-2,0)$$

单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(0,-2,-1,3)=\left(0,\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},0\right)$$

练习 利用施密特正交化方法将向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$$

规范正交化

四　正交矩阵

1. 定义 若n阶方阵A满足 $A^T A = E$,则称A为**正交矩阵**.

2. 性质　n阶正交阵A有如下性质

(1)A可逆, 并且$A^{-1}=A^T$;

(2)A^T也是正交矩阵；(A^{-1}也是正交矩阵);

(3)对于n维列向量x, Ax保持向量x的长度

即$|Ax|=|x|$;

(4)对于任意n维列向量x和y, Ax和Ay保持向量

x和y的内积, 即$(Ax, Ay)=(x, y)$;

(5)$|A|=\pm 1$.

3. 正交矩阵的判定

定理 n 阶实矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 R^n 的规范正交基.

作业

P138　27, 30

第十七次课结束