概率论与数理统计

第四章 随机变量的数字特征

§1 数学期望

一、离散型随机变量数学期望

二、连续型随机变量数学期望

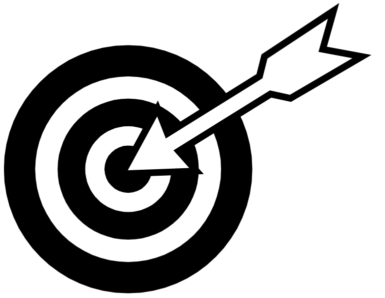
三、随机变量函数的数学期望

四、数学期望的性质

一. 离散型随机变量的数学期望

引例　射击问题

设某射击手在同样的条件下, 瞄准靶子相继射击90次, (命中的环数是一个随机变量). 射中次数记录如下



命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{2}{90}$	$\dfrac{13}{90}$	$\dfrac{15}{90}$	$\dfrac{10}{90}$	$\dfrac{20}{90}$	$\dfrac{30}{90}$

试问: 该射手每次射击平均命中靶多少环?

解　$$\text{平均射中环数}=\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$$\sum_{k=0}^{5} k\cdot\frac{n_k}{n} \xrightarrow{\quad n\to\infty \quad} \sum_{k=0}^{5} k\cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

$\boxed{\text{射中环数的可能值与其概率之积的累加}}$

1.定义

设离散型随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k.$$

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量。

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

2. 重要的概率分布的数学期望

(1). 两点分布

已知随机变量 X 的分布列为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$

(2) 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布,其分布列为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$
$$0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=np$$

(3) 泊松分布

设 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, 且分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有 $$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}$$

$$=\lambda$$

二.连续型随机变量数学期望

1.定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}\,x$ 绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}\,x$

的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 EX .

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

2. 重要的概率分布的数学期望

(1) 均匀分布

设 $X \sim U[a,b]$, 其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}\,x\,\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

(2) 指数分布

设随机变量 X 服从参数为β 的指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\beta>0.$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\beta e^{-\beta x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{\beta}$$

(3) 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu$$

三、随机变量函数的数学期望

定理1 设 $Y = f(X)$, $f(x)$是连续函数

(1) 若X 是一维离散型随机变量，其分布列

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \text{ 且} \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| p_k < +\infty,$$

$$\text{则 } EY = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) p_k .$$

例1 设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

若 $Y=X^2$,求 $E(Y)$.

$$E(Y)=(-2)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+2^2\times 0.3=2.8$$

定理1 设 $Y=f(X)$, $f(x)$是连续函数

(2) 若X 是一维连续型随机变量，其概率密度函数

为$p(x)$, 且$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|p(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$,

则 $EY=Ef(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\,\mathrm{d}x.$

例2 设随机变量 X服从参数为1的指数分布，则$E(e^{-2X})$

$$Ee^{-2X}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

定理2 设 $Z=f(X,Y)$, $f(x,y)$是连续函数

(1) 若(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布列

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

且$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|f(x_i,y_j)|p_{ij}<+\infty$,

则 $$EZ=Ef(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}.$$

特别地 $$EX=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij};$$

$$EY=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}.$$

例3 设 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E[(X-Y)^2]$.

得 $E(X)=2, E(Y)=0, E[(X-Y)^2]=5$

定理2 设 $Z=f(X,Y)$, $f(x,y)$是连续函数

(2) 若(X,Y)是二维连续型随机变量，其概率密度函数为$p(x,y)$, 且$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<+\infty$

则 $EZ=E[f(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

特别地 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例4 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 \quad , 其他 \end{cases}$$

试求 XY 的数学期望

解 $$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

例5 设(X,Y)服从A上的均匀分布，其中A为由x轴，y轴

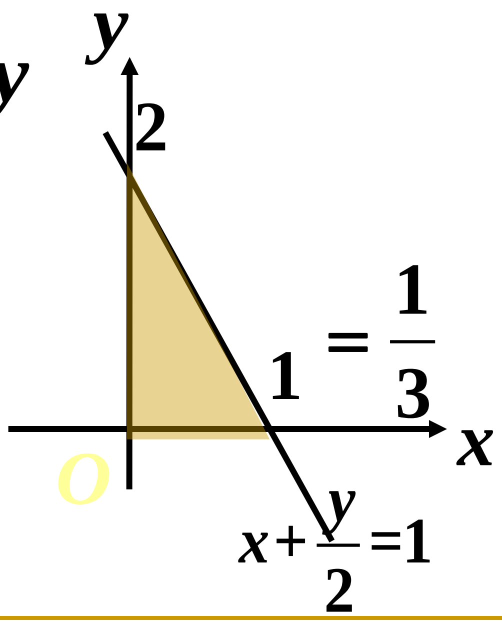
及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$围成的三角形区域

求 $E\left(X\right),E\left(Y\right),E(X+Y),E(XY)$

解

$$(1)\ EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$



$$(2)\quad EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x} y\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}$$

$$(3)E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x}(x+y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x} xy\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

三、数学期望的性质

(1) 若C是常数，则 $EC=C$

(2) 若C是常数，则 $ECX=CEX$

(3) $E\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)=EX_1+EX_2+\ldots+EX_n$

线性性

若$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是n个随机变量, $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 是常数,

则 $E\left(C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n\right)=$

$$C_1EX_1+C_2EX_2+\ldots+C_nEX_n$$

(4) 设 X,Y 是相互独立的随机变量，则有

$$EXY=EXEY.$$

反之不成立

例1 $X \sim B(n,p)$, 求EX

设X 表示n 重贝努利试验中成功恰好出现的次数

X_i 第i 次试验成功的次数, $i=1,2,\ldots,n$

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{ 次成功}\\ 0, & \text{第}i\text{ 次失败}\end{cases}$$

则$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

则$EX=E(X_1+X_2+\ldots+X_n)$

$=EX_1+EX_2+\ldots+EX_n=np$

例2 r 个人在楼的底层进入电梯，楼上有n 层，每个乘客在任一层下电梯的概率是相同的，如果到某一层无乘客下电梯，电梯不停，求直到乘客都下完时，电梯停止次数 X 的数学期望 EX

(设每位乘客客在各层下电梯是等可能的,并设各乘客是否下电梯相互独立).

解 设X_i 表示电梯在第i 层停止的次数, $i=1,2,\ldots,n$

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{ 层停止}\\ 0, & \text{第}i\text{ 层不停}\end{cases}$$

则$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

$P(X_i=1)=P(\text{第}i\text{层有人下电梯})=1-(1-\frac{1}{n})^r$

$P(X_i=0)=P(\text{第}i\text{层都不下电梯})=(1-\frac{1}{n})^r$

则 $EX=E(X_1+X_2+\ldots+X_n)$

$=EX_1+EX_2+\ldots+EX_n$

$=n[1-(1-\frac{1}{n})^r]$

第十二次课结束