线性代数与空间解析几何

8.3 正定二次型

一、实二次型的惯性定律

二、正定二次型

一、实二次型的惯性定律

定理8.2(惯性定理) 设n元实二次型$f = X^{\mathrm{T}}AX$，经实可逆变换$X = C_1Y$ 及 $X = C_2Z$ 化成标准形

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \quad (k_i \neq 0),$$

$$f = l_1z_1^2 + l_2z_2^2 + \cdots + l_rz_r^2 \quad (l_i \neq 0),$$

则$k_1, k_2, \cdots, k_r$中正数的个数与$l_1, l_2, \cdots, l_r$中正数的个数相等.$k_1, k_2, \cdots, k_r$中负数的个数与$l_1, l_2, \cdots, l_r$中负数的个数也相等.

正数的个数(正惯性指数), 负数的个数(负惯性指数)

$$f = X^T AX$$

$$\begin{cases} X = CY(C\text{可逆})k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 \\ X = PY(P\text{正交})\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2 \\ \text{规范形}y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_{p+q}^2 \end{cases}$$

$R(A) = f$ 的正惯性指数+f 的负惯性指数

定理8.2(惯性定理) 秩为r的实二次型f 的标准形中,正平方项的项数p (f 的正惯性指数) 是唯一确定的,而负平方项的项数恰好为$q = r - p$ (负惯性指数)也是唯一的. $p - q$ 称为**符号差**.

小结论

1. 任一实二次型$f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 可经实可逆变换化为规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_{p+q}^2,$$

换句话说对于任意n阶实对称矩阵A, 存在可逆矩阵C,

$$使得C^{\mathrm{T}}AC = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

2. A与B是两个n阶实对称矩阵

(1) A与B合同, 则$R(A) = R(B)$; 反之不成立.

(2) 实对称矩阵A与B合同$\Leftrightarrow$

$X^{\mathrm{T}}AX$ 与$X^{\mathrm{T}}BX$有相同的正负惯性指数

总结一下等价,相似,合同的关系

$$\text{矩阵}A\text{与}B\text{等价}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)A\text{与}B\text{同型},R(A)=R(B)\\(2)\text{存在可逆矩阵}P\text{与}Q\text{,使得}\end{cases}$$

$$PAQ=B.$$

对于同型矩阵而言,秩是矩阵等价的不变量

矩阵A与B相似$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P ,使得

$$P^{-1}AP=B.$$

实对称矩阵A与B相似$\Leftrightarrow A$与B有相同的特征值

矩阵A与B合同$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P ,使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=B.$$

归纳总结

矩阵A与B等价$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

$$
A\text{与}B\text{相似}\begin{cases} A\text{与}B\text{均可对角化}\begin{cases}\lambda_A=\lambda_B,\text{ 则相似}\\ \lambda_A\neq\lambda_B,\text{则不相似}\end{cases}\\ A\text{可对角化},B\text{不可对角化, 则不相似}\\ A\text{与}B\text{均不可对角化,则不能直接判断}\end{cases}
$$

$$A\text{与}B\text{合同}\begin{cases} A\text{与}B\text{均为对称阵}\begin{cases} A\text{与}B\text{正负惯性指数相同则合同} \\ \text{否则不合同} \end{cases} \\ A\text{对称},B\text{不对称，则不合同} \\ A\text{与}B\text{均不对称},\text{则不能直接判断} \end{cases}$$

实二次型的惯性定律

例1： 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$ 的负惯性指数?

例2：

若$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&2\\0&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&1&1\end{pmatrix}$

则下列错误的是 C

(A) A 与B 相似，B 与C 等价

(B) A 与B合同，A 与C 相似

(C) A 与C合同，B 与C 等价

(D) A 与B 合同，B 与C 相似

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda + 2 & -2 \\ & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda + 2 & -4 \\ & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

练习1 若$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 D

(A) A与B 等价而不合同

(B)A与B合同而不相似

(C)A与C相似而不合同

(D)A与B 合同而且相似

练习2 若$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **B**

则(A) A与B不合同也不相似

(B)A与B合同而不相似

(C)A与C相似而不合同

(D)A与B合同而且相似

例3：

下列二次型的矩阵中，与$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$的矩阵合同的是

（A）$3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　（B）$-3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$

（C）$-2y_1^2+y_2^2$　（D）$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$

例4：

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$经正交线性变换化为标准形 $y_1^2+2y_3^2$ ，则$a=(\quad)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 0\\ 1 & 0 & c\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

二、正定二次型

1. 定义

设有实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$,如果对任何列向量$X \neq 0$,都有$f = X^{\mathrm{T}}AX > 0$,则称f 为正定二次型,对应的对称矩阵A 是正定的;

$$\text{证明矩阵}A\text{是正定的}\begin{cases}(1)A\text{是对称的};\\ \\ (2)\text{所确定的二次型是正定的}.\end{cases}$$

2. 正定二次型的判定定理

定理一 A 为 n 阶实对称矩阵, 则下列命题等价

(1) $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 是正定二次型(矩阵 A 是正定的);

(2) f 的正惯性指数为 n; (A 与单位矩阵 E_n 合同)

(3)存在可逆矩阵 P ,使得 $A = P^{\mathrm{T}}P$;

(4) A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于0.

定理二　若二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 正定(A正定)

(1)　A 的主对角元 $a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$;

(2)　$|A| > 0$.

注意定理二是判定矩阵正定的必要条件，不是充分条件

判定下列矩阵是否正定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

顺序主子式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为矩阵A的顺序主子式

定理三 矩阵A正定$\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式$P_i > 0$

正定二次型

例1： 判定二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正定性

法1： $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ A的各阶顺序主子式$P_i>0$

$$2>0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5>0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

法2： $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$

法3：配方法求标准形

$$f = 2(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_2 - \frac{x_3}{3})^2 + \frac{4}{3}x_3^2$$

例2： P237 6

求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 中的参数t，使得二次型是正定的

法1：$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix}$ A的各阶顺序主子式$P_i>0$

$5>0$ $\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0$ $\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix}=t-2>0$

法2： $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = t - 2 > 0$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = t + 6 > 0$$

例3 P237 10 $f = X^{\mathrm{T}}AX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$

(1) 写出f在正交变换下的标准形

(2) 判定f是否正定

(3) $n=2$ 时，求正定矩阵B，使得$A=B^2$

(1) f 的矩阵$A=$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{n+1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})^{n-}$$

因此 f 在正交变换下的标准形为

$$f = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2) + \frac{n+1}{2} y_n^2$$

例4 设 A,B是n阶正定矩阵,$k>0,l>0,$

证明 $kA+lB$ 是正定的

证明矩阵A是正定的 $\begin{cases}(1)A\text{ 是对称的;}\\ (2)\text{所确定的二次型是正定的.}\end{cases}$

证明 (1)A,B是n阶正定矩阵,A,B一定是对称矩阵,

$$A^T=A,B^T=B$$

$$(kA+lB)^T=kA^T+lB^T=kA+lB$$

(2)$\forall X\neq 0,\ X^T(kA+lB)X=kX^TAX+lX^TBX$

A, B是n阶正定矩阵,

故$\forall X \neq 0, X^T AX > 0, X^T BX > 0, k > 0, l > 0$

$$X^T(kA+lB)X = kX^T AX + lX^T BX > 0$$

故 $kA+lB$ 是正定的

例5 设A是n阶正定矩阵，证明 A^{-1} 及A^{*} 是正定的

(1)A是n阶正定矩阵, A一定是对称矩阵

$$A^T = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},\quad A^{-1}\text{是对称矩阵}$$

(2)设A的所有特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

A是n阶正定矩阵, A的所有特征值$\lambda_i>0$

A的所有特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

则A^{-1}的所有特征值为$\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$， A^{-1} 是正定的

例6 设A,B是n阶正定矩阵,证明AB正定的充要条件是$AB=BA$

1.必要性 A,B是n阶正定矩阵, AB正定$\Rightarrow AB=BA$

A,B是n阶正定矩阵,A,B一定是对称矩阵,

$$A^T=A, B^T=B$$

$$(AB)^T=B^TA^T=BA$$

$\because AB$是n阶正定矩阵,AB一定是对称矩阵,

$$(AB)^T=AB$$

$$AB=BA$$

2.充分性 A,B 是n阶正定矩阵, $AB=BA \Rightarrow AB$ 正定

法一　(1)A,B是n阶正定矩阵,A,B一定是对称矩阵,

$$A^T = A, B^T = B$$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

$$\because AB = BA$$

$$\therefore (AB)^T = BA = AB \quad \therefore AB \text{ 是对称阵}$$

(2)A,B是n阶正定矩阵,

故存在可逆矩阵P,Q,使得

$$A = P^T P, B = Q^T Q$$

$$AB = P^T P Q^T Q$$

$$= Q^{-1} Q (P^T P Q^T Q)$$

$$= Q^{-1} (Q P^T P Q^T) Q$$

$$= Q^{-1} [(P Q^T)^T P Q^T] Q$$

令$C = (PQ^T)^T PQ^T$，故C是正定的

$$AB = Q^{-1}[(PQ^T)^T PQ^T]Q = Q^{-1} C Q$$

故AB与C 是相似的, 故AB与C 有相同的特征值

C是正定的,故C 的所有特征值都大于0

因此AB也是正定的

法二

(2)设λ是AB的任一特征值,对应的特征向量为$X\neq 0$

则有$ABX=\lambda X$, $X\neq 0$

A是正定矩阵,A可逆,

$$A^{-1}ABX=\lambda A^{-1}X,$$

$$BX=\lambda A^{-1}X,$$

两边同时左乘X^T,$X^TBX=\lambda X^TA^{-1}X$,

A是正定矩阵,A^{-1}正定, B是正定矩阵

$X^TBX>0, X^TA^{-1}X>0$, $\lambda>0$ $\therefore AB$是正定的

例7 设A是m阶正定矩阵，B是$m\times n$阶实矩阵

证明 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定 $\Leftrightarrow R(B)=n$

1.必要性 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定 $\Rightarrow R(B)=n$

法一 $B^{T}AB$是n阶正定矩阵，$R(B^{T}AB)=n$

$$R(B^{T}AB)=n\le R(B)\le n$$

$$R(B)=n$$

必要性 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定 $\Rightarrow R(B)=n$

法二

B^TAB是n阶正定矩阵，$\forall X\neq 0, X^T(B^TAB)X>0$

$$X^T(B^TAB)X=(BX)^TA(BX)>0$$

由于A是正定的，$BX\neq 0$

即$\forall X\neq 0,$有$BX\neq 0,$

也就是齐次线性方程组$BX=0$只有零解

所以$R(B)=n$

2.充分性 A 正定矩阵，$R(B)=n \Rightarrow B^{\mathrm{T}}AB$ 正定

(1) A是n阶正定矩阵, A一定是对称矩阵,

$$A^T = A$$

$$(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$$

$\therefore B^T AB$ 是对称阵

(2) $\forall X \neq 0, X^T(B^T AB)X = (BX)^T A(BX)$

$R(B)=n$, 齐次线性方程组$BX=0$ 只有零解

故$\forall X \neq 0, BX \neq 0$, A是n正定矩阵,

$$(BX)^T A(BX) > 0$$

即$\forall X \neq 0, X^T(B^T AB)X = (BX)^T A(BX) > 0$

$\therefore B^{\mathrm{T}}AB$ 正定

P237 13 设A 是$m \times n$阶实矩阵

证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定 $\Leftrightarrow R(A) = n$

例8 设A是n阶实对称矩阵，有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$；

(1) a满足什么条件，$aE+A$ 正定？

(2) 正数ε满足什么条件，$E+\varepsilon A$ 正定？

(1) 设A是n阶实对称矩阵，有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$；

$aE+A$ 的特征值为$a+\lambda_1, a+\lambda_2, \cdots, a+\lambda_n$

$aE+A$ 正定的充分必要条件是所有特征值大于0

即$a+\lambda_1 > 0, a+\lambda_2 > 0, \cdots, a+\lambda_n > 0$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$，故$a+\lambda_1 < a+\lambda_2 < \cdots < a+\lambda_n$

即只要$a+\lambda_1 > 0$即可

(2) 设A是n阶实对称矩阵, 有特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$;

$E+\varepsilon A$ 的特征值为$1+\varepsilon\lambda_1, 1+\varepsilon\lambda_2, \cdots, 1+\varepsilon\lambda_n$

$E+\varepsilon A$ 正定的充分必要条件是所有特征值大于0

即$1+\varepsilon\lambda_1 > 0, 1+\varepsilon\lambda_2 > 0, \cdots, 1+\varepsilon\lambda_n > 0$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, 故$1+\varepsilon\lambda_1 < 1+\varepsilon\lambda_2 < \cdots < 1+\varepsilon\lambda_n$

即只要$1+\varepsilon\lambda_1 > 0$即可

例9

$$已知A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}是正定矩阵，$$

$$证明\Delta=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

证明

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}$$

A 是正定矩阵，故 $\forall X \neq 0,\ X^T AX > 0.$

$$取X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \neq 0, Y=(x_2, x_3)^T, Y \neq 0$$

$$\text{则有} X_1^T A X_1 = (0, Y^T)\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= (0, Y^T)\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= Y^T B Y$$

A 是正定矩阵, 则有 $X_1^T A X_1 = Y^T B Y > 0$

因此 B 是正定的, $|B| = \Delta > 0$

练习题

1.设A是n阶实对称矩阵, B是正定矩阵,若BA的特征值都大于0 ,证明A正定.

2.设A是m阶矩阵, B是n阶矩阵 ,若$P=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$是正定阵,证明$B$正定.

3. 设A是n阶实对称矩阵, $AB+B^{T}A$是正定矩阵 ,证明A可逆.

4. 设A,B分别为m阶,n阶正定矩阵,试判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

解 C是正定的.

设$z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$为$m+n$维向量,其中$x,y$分别是$m$维和$n$维列向量,若$z\neq 0$,则$x,y$不同时为零向量,于是

$$z^T Cz=(x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=x^T Ax+y^T By>0,$$

且C是实对称阵,故C为正定矩阵.

5. 设$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 在满足$X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时的最大值和最小值.

(1) f 的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

即 f 可经正交线性变换$X=PY$(P是正交矩阵)化为

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

$$=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$$

当$X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时,

有$Y^{\mathrm{T}}Y=y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$

此时 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

最大值为5,最小值为-1

练习 设$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 在满足$X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时的最大值和最小值.

思考 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX$在$X^{\mathrm{T}}X=a$ 时的最大值和最小值.

已知实二次型

$$f=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2$$
$$+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2$$ 正定,矩阵 $A=(a_{ij})$,则(**(B)**)

(A) A 是正定矩阵;

(B) A 是可逆矩阵;

(C) A 是不可逆矩阵;

(D) 以上结论都不正确.

二次曲面的一般方程面

$$令 f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$
$$+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c$$

有$f(x_1,x_2,x_3)=0$表示二次曲面

研究判定一般方程给出的二次曲面的类型. 借助于二次型的理论，研究如何把二次曲面的一般方程化为标准方程，即在R^3中适当选取新直角坐标系，使得上面的曲面在该坐标系下是标准方程

1、作正交变换消去交叉项

令$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$

$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

$+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c$

有$f(x_1,x_2,x_3)=0$表示二次曲面

令$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f = X^T AX + b^T X + c$$

在正交变换$X = PY$下，如果$P^T AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \Lambda$

$b^T P = (b_1', b_2', b_3')$，二次曲面方程化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + b_3' y_3 + c = 0$$

以上相当于作正交变换消去了交叉项，使得曲线的主轴平行与新坐标轴；再用配方法作平移变换使得曲线的主轴与新坐标重合.

例　试用直角坐标变换化简下列二次曲面方程

$$x^2+y^2+z^2-2xz+4x+2y-4z-5=0$$

解： $x^2+y^2+z^2-2xz+4x+2y-4z-5=0$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

特征值为1，2，0

对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

将它们单位化后得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y=x' \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2+2y'^2+2x'-4\sqrt{2}y'-5=0$$

$$(x'+1)^2+2(y'-\sqrt{2})^2=10$$

$$\begin{cases} x''=x'+1 \\ y''=y'-\sqrt{2} \\ z''=z' \end{cases} \text{或} \begin{cases} x'=x''-1 \\ y'=y''-\sqrt{2} \\ z'=z'' \end{cases}$$

$$x''^2+2y''^2=10$$

此为椭圆柱面，所用坐标变换为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y'' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} z'' - 1 \\ y = x'' - 1 \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y'' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} z'' + 1 \end{cases}$$

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$

（1）用正交线性变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并求所做的正交变换

（2）方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 所表示的空间图形的名称

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

（1）用正交线性变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并求所做的正交变换

（2）方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 所表示的空间图形的名称

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$

(1)求a,b的值

(2)用正交线性变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，

并求所做的正交变换

(3)方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 所表示的空间图形的名称