线性代数与空间解析几何

4.1　*n*维向量的概念及线性运算

一　　*n*维向量的概念

二　　*n*维向量的线性运算

一　n维向量的概念

1. 定义 由数域F 上n 个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 组成的有序数组，称为数域F上的n 维向量　a_i 称为第i 个分量

2. 表示 向量通常用希腊字母α, β, γ 等来表示

例如上述向量可表示为 $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

n维向量写成一行,称为行向量,也就是行矩阵

或者$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$　n维向量写成一列，称为列向量,也就是列矩阵

3. 运算

n维向量的运算按照矩阵的运算规则进行

4. 零向量 $O=(0, 0, ..., 0)$

5. 负向量 $-\alpha=(-a_1, -a_2, ..., -a_n)$

6. 数乘 $\alpha=(a_1, a_2, ..., a_n)$为数域$F$ 上的n 维向量,

k 为数域F 上的数

$k\alpha=(ka_1, ka_2, ..., ka_n)$,叫做$k$ 与向量α 的数乘

向量的加法与数乘统称为向量的**线性运算**,n 维向量的线性运算满足下列八条性质

对任意的n维向量α,β,γ和数k及l

$(1)\alpha+\beta=\beta+\alpha$

$(2)(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

$(3)\alpha+0=\alpha$

$(4)\alpha+(-\alpha)=0$

$(5)1\alpha=\alpha,(-1)\alpha=-\alpha,0\alpha=0$

$(6)k(l\alpha)=(kl)\alpha$

$(7)k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

$(8)(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

向量与矩阵

例如 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$有n个m维列向量

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}\alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为矩阵A 的列向量组.

类似地,矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$又有m个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_i \\ \\ \beta_m \end{array}$$

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 称为矩阵A的行向量组.

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

m个n维列向量所组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，构成一个$n\times m$矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

m个n维行向量所组成的向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$，构成一个$m\times n$矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$