线性代数与空间解析几何

4.3　向量组的秩

一　　极大无关组

二　　向量组的秩

三　　矩阵的秩与向量组的秩的关系

一　极大无关组

1. 向量组的等价

设有两个向量组 (1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若(1)中每个向量都可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,

则称向量组(1)可由向量组(2)线性表示.

若向量组(1)与向量组(2)可以互相线性表示, 则称(1)与(2)**等价**.

例1 P138 23.

设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$n$维向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示$\Leftrightarrow$存在矩阵$C$,使得$A=BC$

作为结论记住

2. 极大无关组

设S 是n 维向量构成的向量组, 在S 中选取r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,若满足:

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) $\forall \alpha \in S$,向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关.

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是S 的 极大无关组.

例. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$

定理4.2 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，并且表示法唯一.

设S是n维向量构成的向量组，在S中选取r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，若满足：

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

(2) $\forall\alpha\in S$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关.

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$S$的极大无关组.

定理4.2说明： 向量组S中任一个向量α可由极大无关组线性表示.

注:(1) 向量组与极大无关组是等价的;

(2) 向量组的极大无关组不唯一,但是相互等价;

(3) 线性无关的向量组的极大无关组即本身.

二　向量组的秩

定理4.3　设有两个向量组 (1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若(1) 线性无关,且(1) 可由(2) 线性表示, 则$r \le s$.

逆否命题 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,且$r > s$, 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

推论1 设有两个向量组 (1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,

若(1) 与(2) 均线性无关,且(1) 与 (2) 等价, 则$r=s$.

同一个向量组的极大无关组等价,故所含向量个数相等

3. 向量组的秩

向量组的极大无关组所含向量个数

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

向量组的秩等于m(向量的个数)

推论2 若向量组(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为r_1,

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩为r_2,

若(1) 可由 (2) 线性表示, 则$r_1 \le r_2$.

等价的向量组含有相同的秩　　　等价 $\Rightarrow$ 等秩

反之,秩相同的向量组不一定等价.

反例向量组(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ (2) $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

等秩+(?) $\Leftrightarrow$ 等价

三　矩阵的秩与向量组的秩的关系

定理4.4　A 为$n\times m$ 矩阵,则A 的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩等于矩阵A 的秩.

注:　$R(A)=R(A^T)=A^T$ 的列向量组的秩

=A 的行向量组的秩

$R(A)=A$ 的列向量组的秩 =A 的行向量组的秩

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩为$r$,则该向量组中任意$r$个线性无关的向量构成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组.

极大无关组求法

例2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\\6\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-1\\7\end{pmatrix}$

求该(1)向量组的秩

(2)向量组的一个极大无关组

(3) 将其余向量用极大无关组线性表示

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$$

$$\begin{array}{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=R(A)=2$$

α_1,α_2是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个极大无关组

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{array} \end{array}
$$

行最简形

$$
\begin{cases} \beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_4 = \beta_1 + 3\beta_2 \\ \beta_5 = -2\beta_1 - \beta_2 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}
$$

例3

a 取何值时,下列向量组线性相关,求其秩及极大无关组.

$$\alpha_1=(1,0,0,3),\qquad \alpha_2=(1,1,-1,2),$$

$$\alpha_3=(1,2,a-3,a),\quad \alpha_4=(0,1,a,-2)$$

列摆行变换

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

$$=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & a+1 \\ 3 & 2 & a & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

例4 P138 21.

设向量组(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和向量组(2)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 秩相等

且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 证明:

两向量组等价.

证: 只需要证明向量组(2)可以由向量组(1) 线性表示即可

设向量组(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为t, 极大无关组为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$.

观察向量组(3)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 因此,

向量组(3)可由向量组(2) 线性表示,

向量组(2)可由向量组(3) 的部分组, 因此向量组(2)可由向量组(3) 线性表示,

故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价.

故$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=t$

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$,线性无关,

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的极大无关组

例4 P138 21.

设向量组(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和向量组(2)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 秩相等且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 证明: 两向量组等价.

证: 只需要证明向量组(2)可以由向量组(1) 线性表示即可

设向量组(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为t, 极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$.

设向量组(2)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩为t, 极大无关组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，

故存在矩阵$C_{t\times t}$，使得 $A=BC_{t\times t}$

$$t=R(A)=R(BC_{t\times t})\le R(C)\le t$$

$$\therefore R(C)=t$$

故矩阵$C_{t\times t}$ 是可逆的

$$A=BC_{t\times t} \Rightarrow B=AC_{t\times t}^{-1}$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

例4 P138 21.

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$秩相等且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，证明：两向量组等价.

等秩+(?) $\Leftrightarrow$ 等价

等秩+(其中一个向量组可由另一个向量组线性表示) $\Leftrightarrow$ 等价

第十五次课结束

例5 P136 10.

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性表示,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, 证明:

(1) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关;

(2)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$等价.

例6 P136 12.

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$秩相等, 证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$等价.

例7 P138 25.

设列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 和列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K$, K为$s\times r$ 矩阵

且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 证明:

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关$\Leftrightarrow R(K)=r$

特别地.

设列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 和列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足

$\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)K$，$K$为$n$阶方阵

且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，证明：

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关$\Leftrightarrow R(K)=n$，即K 为满秩矩阵

作为结论记住

例. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$,证明β_1,β_2,β_3线性无关

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$R\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=3$$

因此β_1,β_2,β_3线性无关

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是______

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1;$

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1;$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1;$

(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1;$

P117 例4.

设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

令$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1;$

$\gamma_1=\alpha_1+\alpha_2,\gamma_2=\alpha_2+\alpha_3,\gamma_3=\alpha_3+\alpha_1$

证明(1)$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关

(2)$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$线性无关

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \text{ 线性相关}$$

4.2 例7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$

证明$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$ 线性无关

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m)$

$$B=(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0$$

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$ 线性无关.

例8 P138 24.

设$m \times n$矩阵A经过初等列变换化成矩阵B，证明A的列向量组与B的列向量组等价.

例9 P138 26.

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是一组$n$维向量，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充要条件是任一$n$维向量都可由它们线性表示.

例10　P138 22

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$的秩为$s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩为$t$，证明：$t \geq r+s-m$

例11　P137 13

确定数a使得向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$$ 使得向量组的秩为n

作业

P136　10,12

P137　13,15，20

P138　21,22,23,25

2006

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量,$A$是$m\times n$矩阵则下列选项正确的是______

(A)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(B)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

(C)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(D)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

数三(20)

设4维向量$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T$
$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$ 问

(1) 当a为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

(2) 当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时，求出其一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示

数三(5)

设向量组I$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

可由向量组II$:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示。

下列命题正确的是_____

(A) 若向量组I 线性无关，则$r \le s$

(B) 若向量组I 线性相关，则$r > s$

(C) 若向量组II 线性无关，则$r \le s$

(D) 若向量组II 线性相关，则$r > s$

2012年

数一(5), 数三(5)

设$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix},c_1,c_2,c_3,c_4$

为任意常数, 则下列向量线性相关的是______

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

2013年

(5) 设A,B,C均为n阶矩阵，若$AB=C$，且B可逆，则

(A) 矩阵C的行向量与矩阵A 的行向量组等价

(B) 矩阵C的列向量与矩阵A的列向量组等价

(C) 矩阵C的行向量与矩阵B的行向量组等价

(D) 矩阵C的列向量与矩阵B的列向量组等价