线性代数与空间解析几何

3.2 向量的数量积、向量积和混合积

一　　向量在轴上的投影

二　　向量的数量积

三　　向量的向量积

四　　向量的混合积

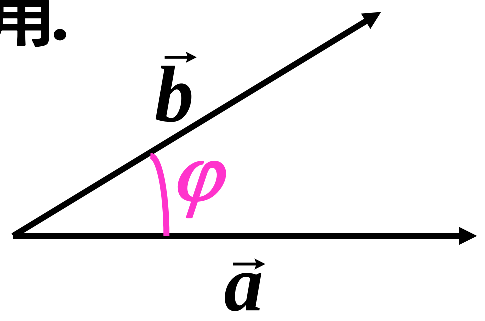
五　　空间直角坐标系

一　向量在轴上的投影

1. 空间两非零向量的夹角的概念

任取两个非零向量$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, 让两个向量起点重合,

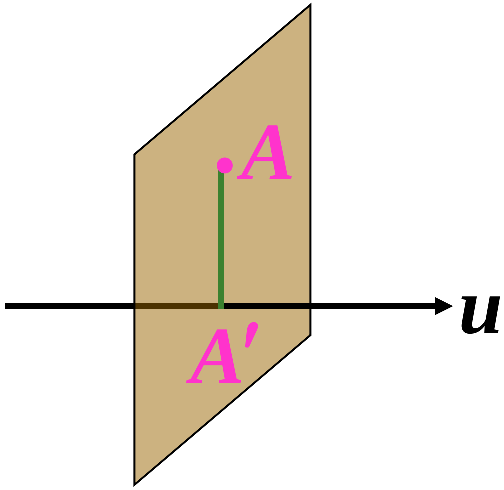
称不超过π的角φ为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.



记做$\varphi = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$

2. 投影

点在轴上的投影



过点A 做轴u 的垂直平面,

交点A' 即为点A 在轴u 上的投影

向量在轴上的投影

定义1 有向线段的值

设有一轴 u, $\overrightarrow{AB}$ 是轴 u 上的有向线段.

如果数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$

且 $\begin{cases} \lambda > 0, & \text{当 } \overrightarrow{AB} \text{ 与 } u \text{ 轴同向时} \\ \lambda < 0, & \text{当 } \overrightarrow{AB} \text{ 与 } u \text{ 轴反向时} \end{cases}$

那末数 λ 叫做轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值,

记作AB，即 $\lambda = AB$.

设 $\vec{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量，

$$\overrightarrow{AB} = (AB)\vec{e}.$$

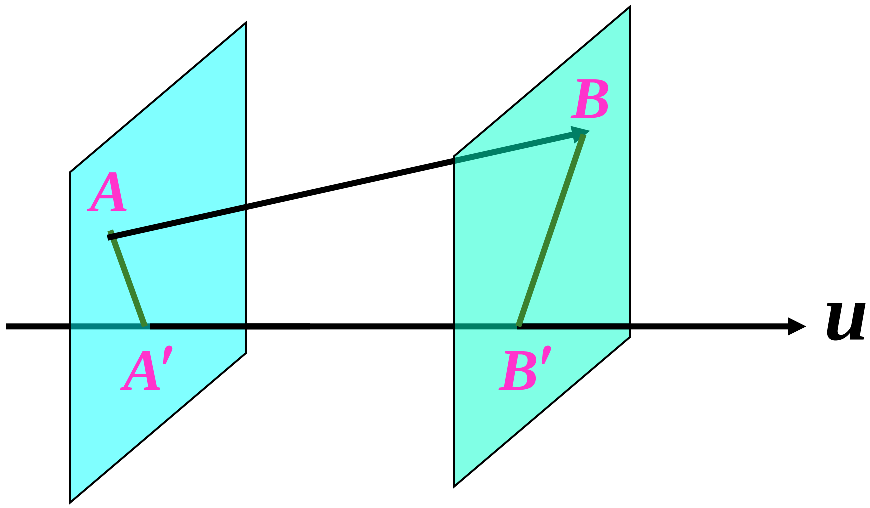
设 A, B, C 是 u 轴上任意三点，不论这三点的相互位置如何，

$$\because \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

即 $(AC)\vec{e} = (AB)\vec{e} + (BC)\vec{e} = (AB + BC)\vec{e},$

$$\therefore \quad AC = AB + BC.$$

定义2 向量在轴u上的投影



已知向量的起点A和终点B在轴上的投影分别为A'和B',那么轴上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值$A'B'$,称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影.

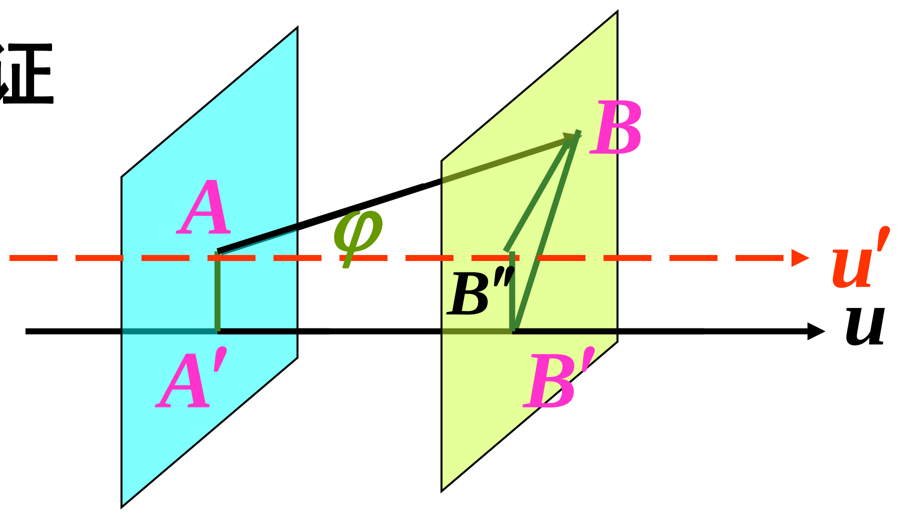
向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影记做 $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} = A'B'$.

3. 投影的性质

(1) 向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影等于向量的长度乘以轴与向量的夹角的余弦.

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle\vec{u},\overrightarrow{AB}\rangle$$

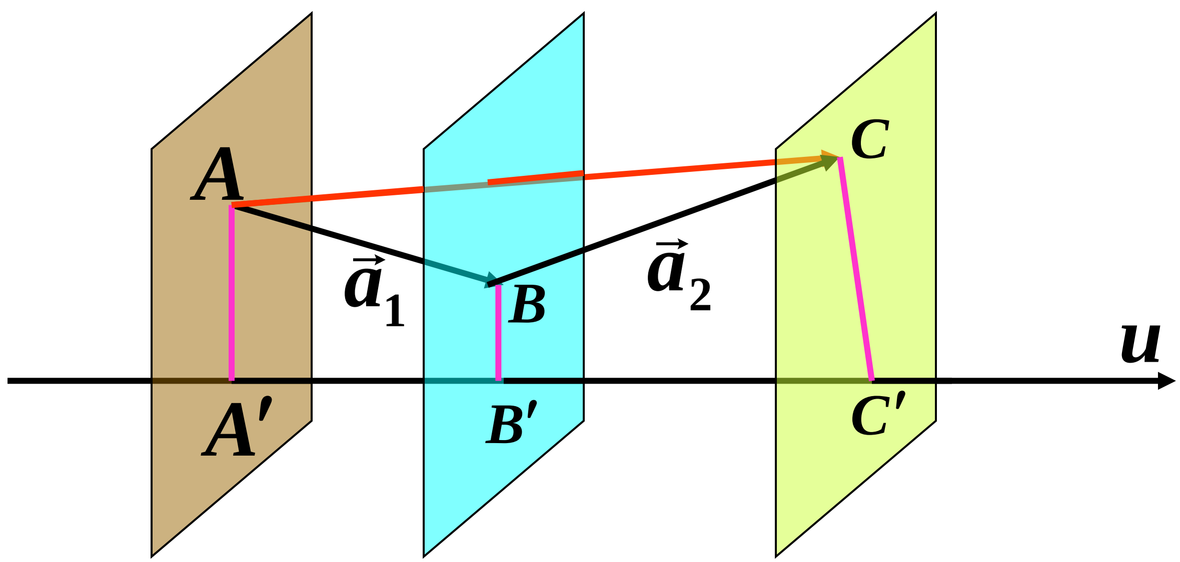
证



$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{\vec{u}'}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

(2) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和 （可推广到有限多个）

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\vec{a}_2.$$

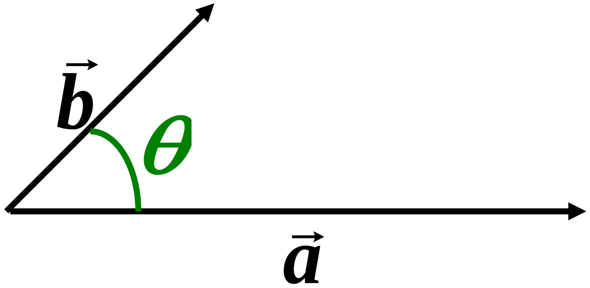


二　向量的数量积

1. 定义 设$\vec{a},\vec{b}$是两个向量, 定义$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**为$\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 其中$\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ “点积” “内积”.

几何意义



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

结论　两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量上的投影的乘积.

2. 数量积的性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

(2) 若λ为数, $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

问题: $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{a}=\vec{b}$?是否正确

数量积乘法不满足消去律

两个小结果 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$;

(2) $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

例1 利用向量的数量积证明恒等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

例2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直

三　向量的向量积

1. 定义

设$\vec{a},\vec{b}$是两个向量,定义向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积为$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$

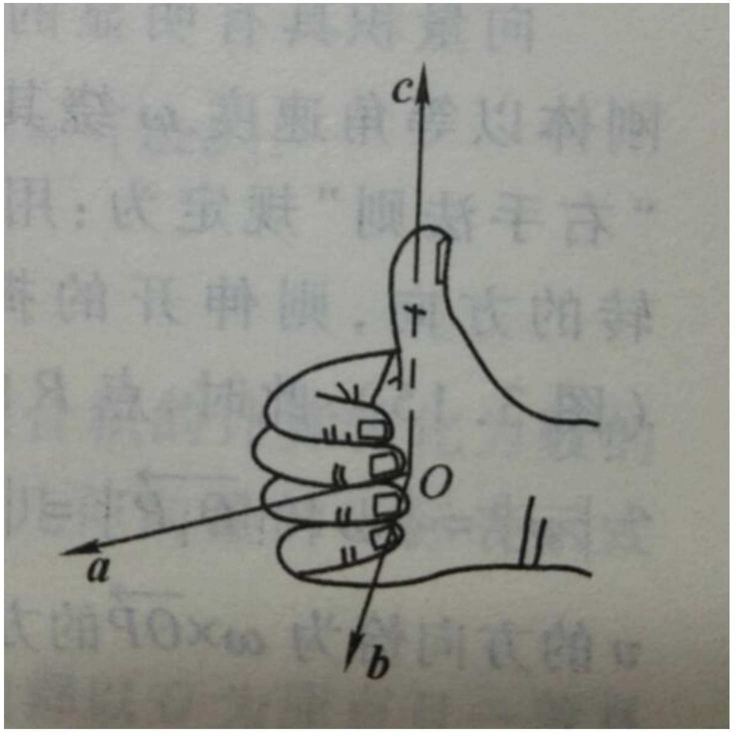
(1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$; 定义向量的长度

(2) $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$; 即$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$构成的平面;

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成右手系.　(2)和(3)定义向量的方向

右手系

将 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 起点放在一起,握住向量$\vec{c}$,将右手的四指(不含拇指),由$\vec{a}$ 转向$\vec{b}$(转过的角度小于π)时，此时伸开的拇指指向$\vec{c}$ 的方向，则称 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成右手系



已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成右手系,问:

$\vec{b},\vec{c},\vec{a}$

$\vec{c},\vec{a},\vec{b}$

$\vec{a},\vec{c},\vec{b}$

$\vec{c},\vec{b},\vec{a}$

$\vec{b},\vec{a},\vec{c}$ 是否构成右手系

几何意义

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

即$\vec{a}\times\vec{b}$的模是以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,//\,\vec{b}$.

2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

(3) $(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b}).$

注意： (1)向量的向量积不满足交换律；

(2)向量的向量积不满足消去律.

例3 已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共线.证明

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

四　向量的混合积

1. 定义

设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是三个向量, 定义三个向量的混合积为$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

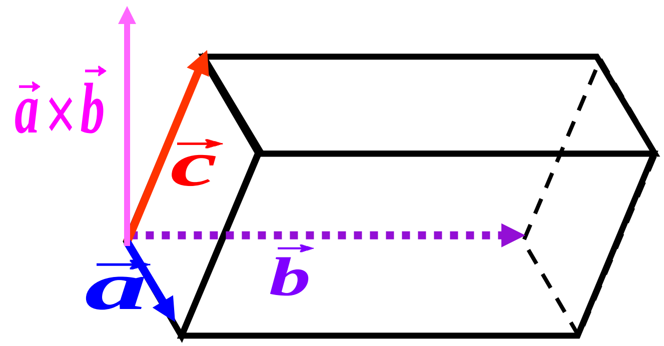
$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

注意: 混合积中$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$顺序不能颠倒

关于混合积的说明：

(1) 向量混合积的几何意义：

向量的混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.



且：若三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成右手系,则 $V=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

若三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不构成右手系,则 $V=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(2)三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0.$

(3) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

$$=-[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$$

例4 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$,证明$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

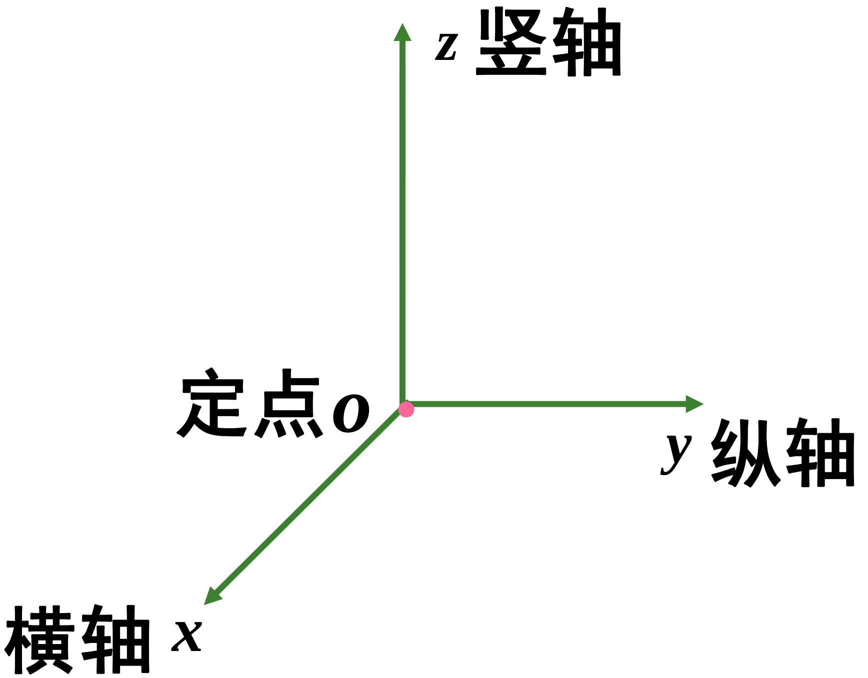
例5 已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$,求$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

五　空间直角坐标系

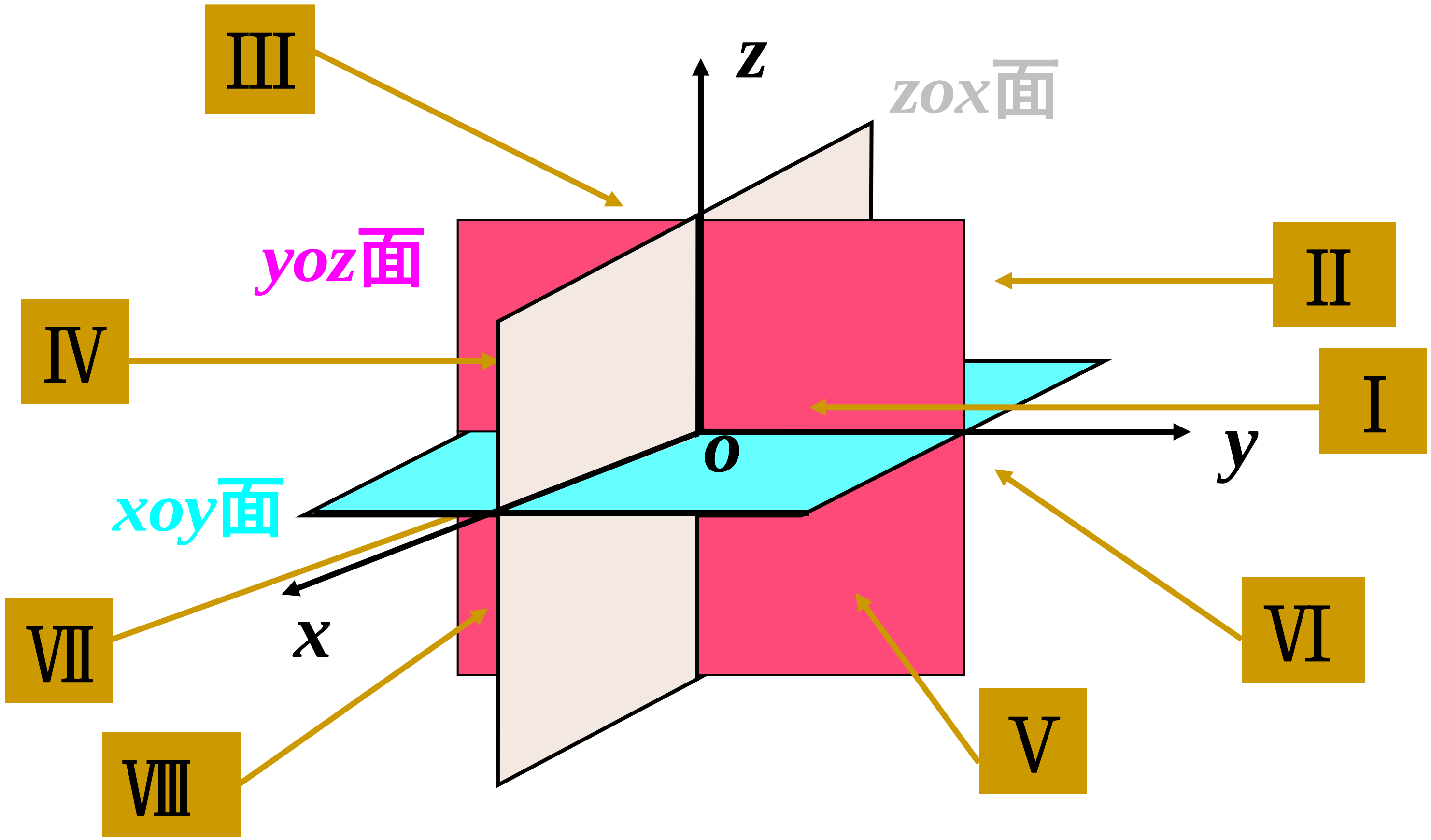
1. 定义

过空间中一个定点O,做三条相互垂直的数轴,都以O为原点,且具有相同的长度单位,这三条相互垂直的轴分别叫做x轴(横轴),y轴(纵轴),z轴(竖轴)统称**坐标轴**.

通常把x轴(横轴)和y轴(纵轴)配置在水平面上,而z轴(竖轴)则是铅垂线,它们的正方向构成右手系.



空间直角坐标系



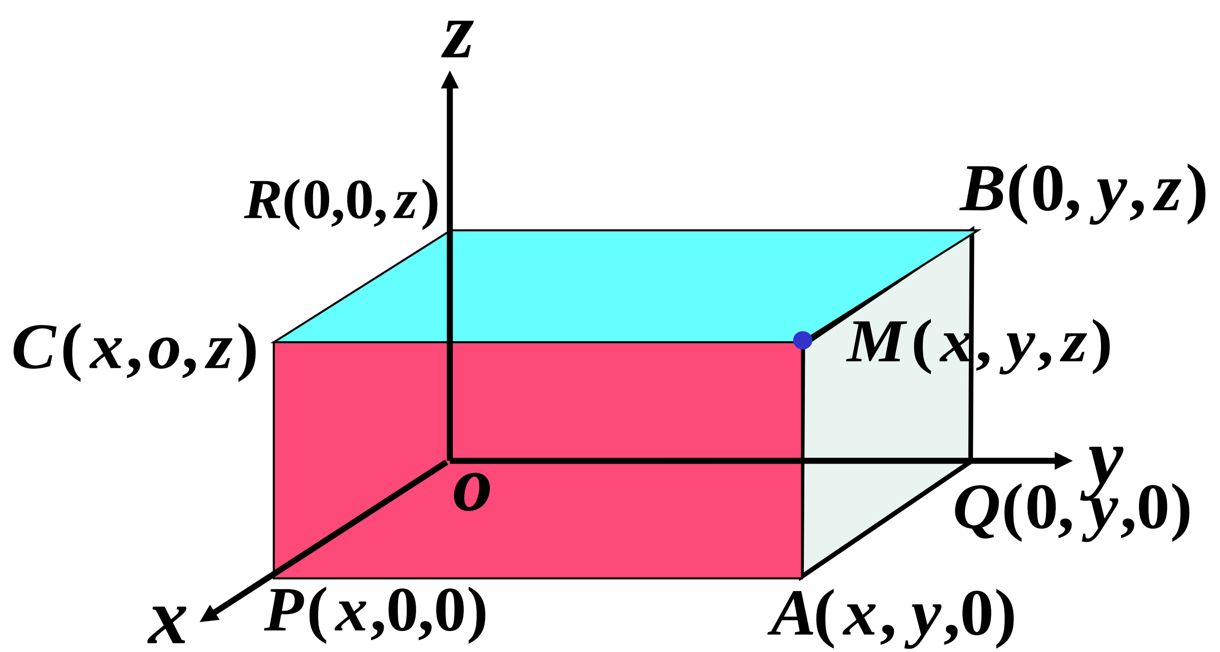
空间直角坐标系共有**八个卦限**

2. 坐标 (1) 点M 的坐标$M(x,y,z)$

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x,y,z)

特殊点的表示: 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

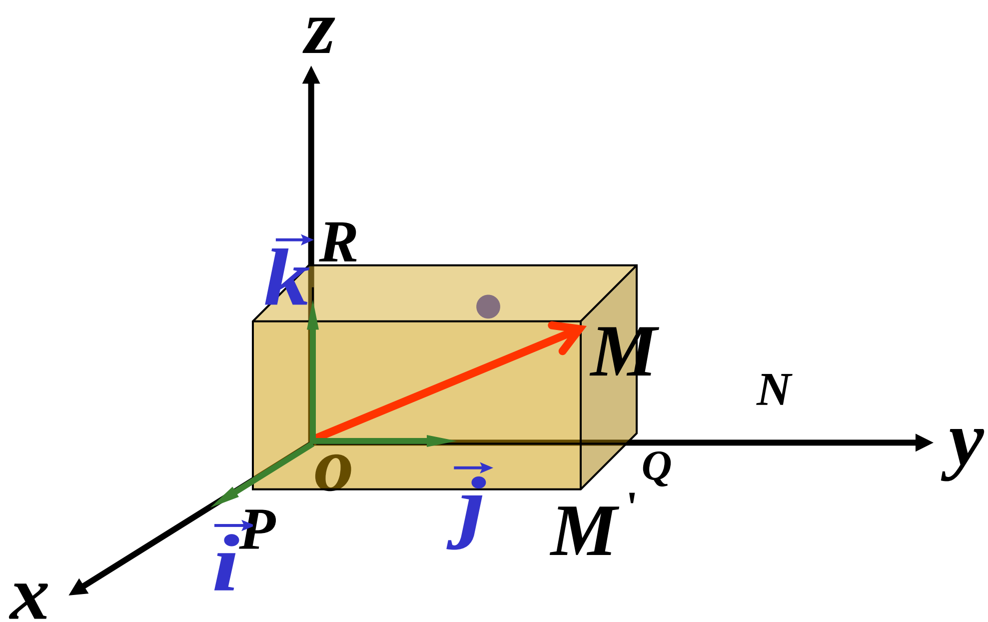
坐标面上的点 $A, B, C,$ $O(0,0,0)$



在空间直角坐标系$Oxyz$的三条坐标轴上

依次取三个单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,称其为基本单位向量.

(2)向量的坐标$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z)$

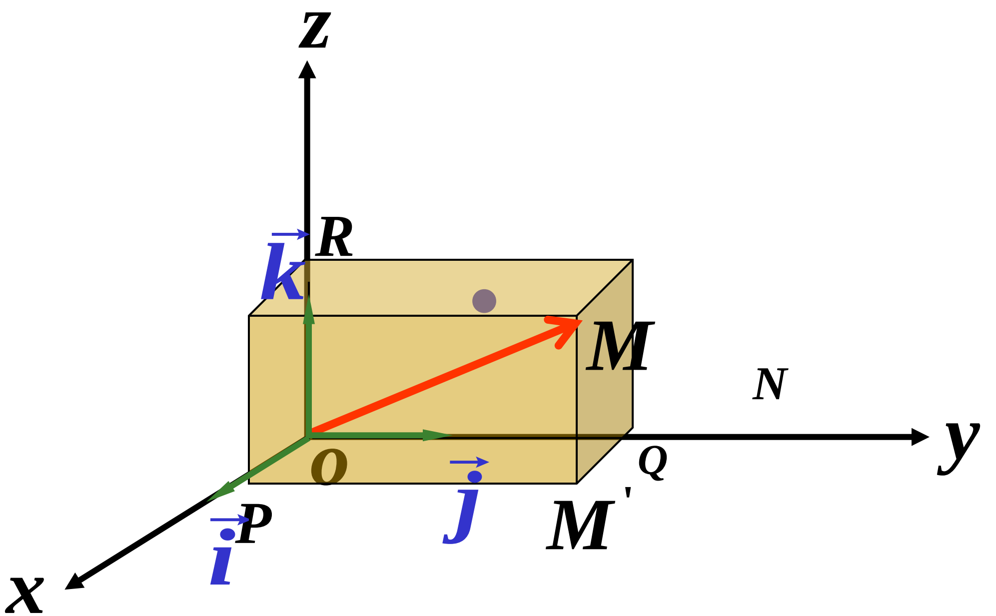


$M(x,y,z)$

$\overrightarrow{OM}=\vec{a}$

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

(2)向量的坐标$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z)$



$$M(x,y,z)$$

$$\overrightarrow{OM}=\vec{a}$$

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

六　向量的坐标运算

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z)$

$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=(b_x,b_y,b_z)$

$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}=(c_x,c_y,c_z)$

则(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$;

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$;

(3) $k\vec{a}=(ka_x,ka_y,ka_z)$;

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

数量积的坐标表达式

方向角，方向余弦

若$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\vec{a}$与Ox,Oy,Oz 正半轴的夹角为

α,β,γ

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{(a_x,a_y,a_z)}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$(5)\ \vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow x\text{ 轴}, y\text{ 轴}, z\text{ 轴上的单位向量} \\ \leftarrow \vec{a}\text{ 的坐标} \\ \leftarrow \vec{b}\text{ 的坐标} \end{array}$$

向量积的坐标表达式

$$(6)\ [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \vec{a}\text{ 的坐标} \\ \leftarrow \vec{b}\text{ 的坐标} \\ \leftarrow \vec{c}\text{ 的坐标} \end{array}$$

混合积的坐标表达式

小结和例题

$1.\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

$2.\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \ \vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$

或 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$

$3.\ [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

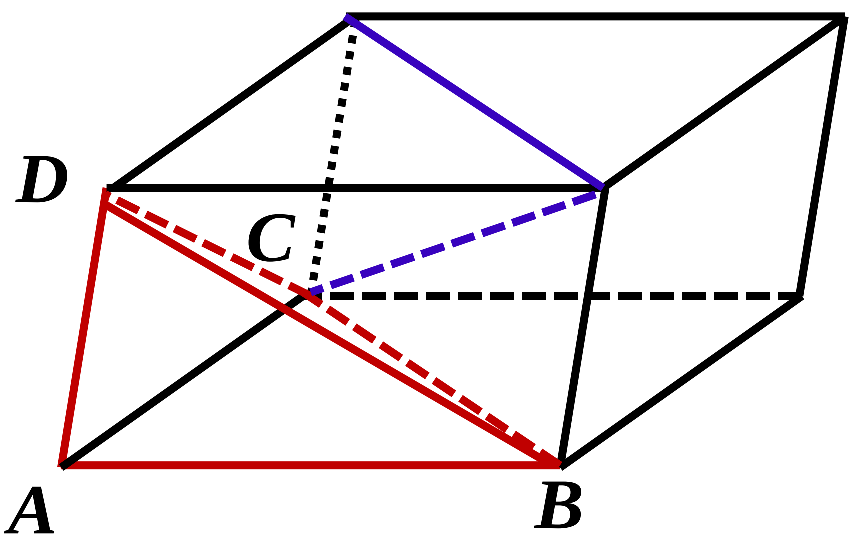
$4.\ |\vec{a}\times\vec{b}|=S_{\vec{a}\times\vec{b}},\ \ |[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|=V_{\text{六面体}}$

例6 已知$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b},\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,1,1)$

且$\vec{c}\cdot(1,-2,1)=8$,求向量$\vec{c}$.

例7 已知空间中四点$A(1,1,1),B(4,4,4),C(3,5,5),D(2,4,7)$

求V_{ABCD}



$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}V_6$$

作业

P105　8, 10

P106　13, 15