概率论与数理统计

第二节 方 差

一、随机变量方差的概念及性质

二、重要概率分布的方差

三、例题讲解

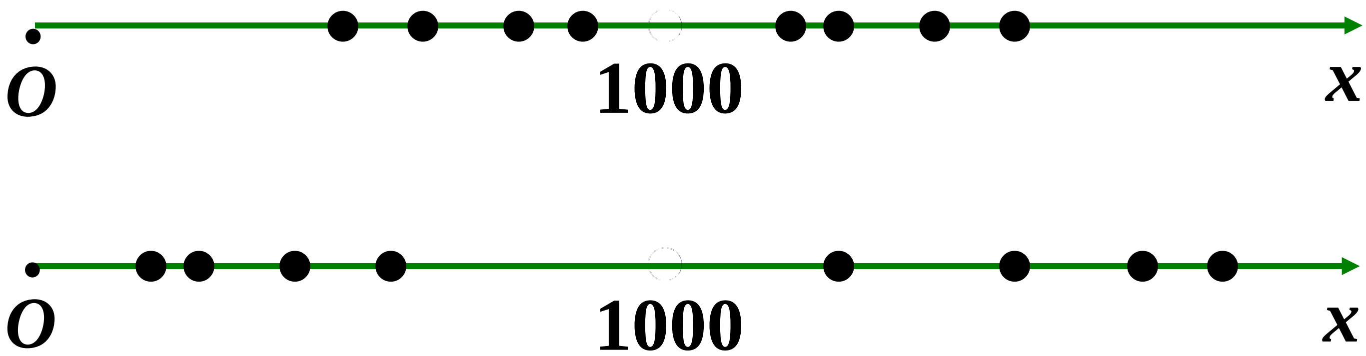
四、小结

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)=1000$小时.



2. 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若$E(X-EX)^2$存在,则称 $E(X-EX)^2$为 X 的方差,记为 $D(X)$或 DX ,即

$$DX = E(X-EX)^2.$$

称 $\sqrt{DX}$ 为标准差或均方差,记为 σ_X

3. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 的代表性好.

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$DX = \sum_{k=1}^{+\infty}(x_k - EX)^2 p_k,$$

其中 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - EX)^2 p(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $p(x)$ 为 X 的概率密度.

(2) 利用公式计算 $DX = EX^2 - (EX)^2.$

二、重要概率分布的方差

(1). 两点分布

已知随机变量 X 的分布列为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $EX = 1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$

$$EX^2 = 1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)=p$$

$$DX = EX^2-(EX)^2 = p-p^2 = pq$$

(2) 二项分布

$X \sim B(n, p)$, 其分布列为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$EX = np$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$DX = EX^2-(EX)^2 = npq$$

(3) 泊松分布

设 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, 且分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda(\lambda+1)$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda$$

(4) 均匀分布

设 $X \sim U[a,b]$, 其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $EX=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{2}(a+b).$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2$$

$$=\frac{(b\text{-}a)^2}{12}$$

(5) 指数分布

设 $X \sim E(\beta)$, 且概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\beta>0$.

则有 $$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\beta e^{-\beta x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot\beta e^{-\beta x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\beta^2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{\beta^2}$$

(6) 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

则有

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$=\sigma^2$$

例 X 服从几何分布

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$$

求EX,DX.

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=(\sum_{k=0}^{\infty}x^k)'=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1+1)x^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-1}=x\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2x}{(1-x)^3},\quad |x|<1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=(\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1})'=[\frac{1}{(1-x)^2}]'=\frac{2}{(1-x)^3},\quad |x|<1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1,$ $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	β	$1/\beta$	$1/\beta^2$
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2
几何分布	$0<p<1$	$1/p$	$\frac{1-p}{p^2}$

三、方差的性质

(1) 若C是常数，则 $DC = EC^2 - (EC)^2 = 0$

(2) 若C是常数，则 $D(CX + b) = C^2 DX$

(3) 若$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是n 个相互独立随机变量,

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n$$

若X_1, X_2, 是两 个随机变量,

则 $D(X_1 \pm X_2) = DX_1 + DX_2 \pm 2(EX_1X_2 - EX_1EX_2)$

推广

若$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是n个独立的随机变量,$C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是常数,

则 $D\left(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{\,2} DX_i$

(4) $D(X) = 0 \Leftrightarrow X$ 取某个常数C 的概率为1,即

$$P\{X = C\} = 1.$$

例1 4.22 设(X,Y)服从A上的均匀分布,其中A为由x轴,

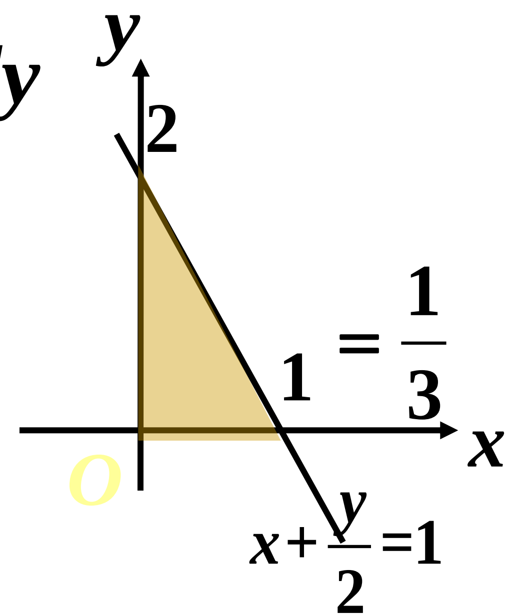
y轴及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$围成的三角形区域

求 DX , DY , $D(2X+1)$

解

$$(1)\ EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x} x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$



$$=\frac{1}{3}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-2x} x^2 \mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

例2 4.16

设某人写了n封寄往不同地址的信,再写了n 个标有这n个地址的信封,然后再在每个信封里随意装入一封信,若一封装入标有该信地址信封称为一个配对,试求信与信封能够配对个数X 的数学期望与方差

解：设X 表示配对的个数, X_i 定义为:

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{封信配对}\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \qquad i=1,2,...,n$$

则$X=X_1+X_2+...+X_n$

$$P(X_i=1)=\frac{1}{n},\ P(X_i=0)=1-\frac{1}{n},\ EX_i=\frac{1}{n},$$

$$EX = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n = 1$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n},$$

$$EX^2 = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$$

$$P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} E(X_i X_j)$$

$$EX_i^2 = 1^2 \times \frac{1}{n} + 0^2 \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

$$P(X_i X_j = 1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1},$$

$$P(X_i X_j = 0) = 1 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1},$$

$$E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

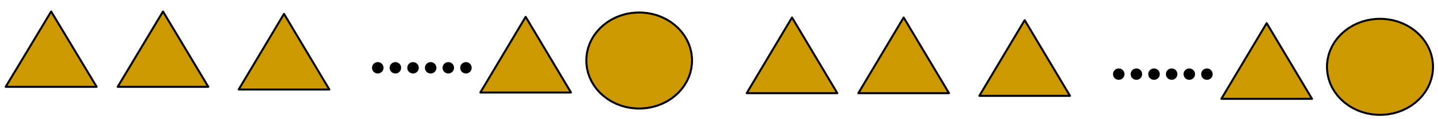
$$EX^2=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)$$

$$=n\times\frac{1}{n}+2C_n^2\times\frac{1}{n(n-1)}=2$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=2-1^2=1$$

例3某流水作业线上生产出的每个产品不合格的概率为p，当生产出n 个不合格品时，立即停工修检一次，试求两次检修之间所生产的产品总数的数学期望和方差

解：设X 表示两次检修之间生产的产品数，



X_i 表示生产出第$i-1$个不合格品后到出现第i 个不合格品时所生产的产品数　　$i=1,2,\dots,n$

$$EX_i=\frac{1}{p}$$

则$X=X_1+X_2+\dots+X_n$

$$P(X_i=k)=(1-p)^{k-1}p,$$

$$DX_i=\frac{1-p}{p^2}$$

$$EX = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n$$

$$= \frac{n}{p}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立

$$DX = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n$$

$$= \frac{n(1-p)}{p^2}$$

例4 例4.20

X与Y 独立,且$X\sim N(1,2), Y\sim N(0,1)$

求 $Z=2X-Y+3$的概率密度.

解:因为X与Y 独立, 故$Z\sim N(EZ,DZ)$.

$$EZ=E(2X-Y+3)=2EX-EY+3$$

$$=2\times1-0+3=5$$

$$DZ=D(2X-Y+3)\ =4DX+DY=9$$

$$Z\sim N(5,3^2).$$

作业题

八．设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1;\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求EX,EY,DX,EXY。

一个袋子中有 n 个小球，编号分别为 1， 2， …， n ，从中有放回地抽取 k 个球，以 X 表示所得号码之和，求 EX

设 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 n 件进行检查，求查得的次品数 X 的数学期望.

设 $X \sim U[a,b]$，且 $EX=2,\ DX=1/3$，则 $a=$______；$b=$______.（要求 $b>a$）

设随机变量（X,Y）的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 EX，EY，EXY。

五、若事件 A 在第 i 次试验中出现的概率为 p_i，设 X 为事件 A 在 n 次试验中出现的次数，求数学期望 EX。（本题 3 分）

六．设每次试验成功的概率是 $\frac{2}{3}$，重复独立的做下去，X 表示直到试验成功 3 次为止所做的试验次数，求 DX.（本题 3 分）