习 题 课

例 1 设 X 是一个集合，$|X|$＝n，求：

1. X 上的二元关系有多少？$\left(2^{n^2}\right)$

2. X 上的自反的二元关系有多少？

3. X 上的反自反的二元关系有多少？

解：因为把所有的反自反的二元关系的每个都加上对角线上的序对，就变成了自反的关系，因此，自反的与反自反的个数一样多。即 2^{n^2-n}

4. X 上的对称的二元关系有多少？

$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$，故共有 $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ 个对称的关系。

5. X 上的反对称的二元关系有多少？$(3^{\frac{n^2-n}{2}}\bullet 2^n)$

6. X 上既是自反的也是反自反的二元关系的个数；(0个)

7. X 上既不是自反的也不是反自反的二元关系有多少？$(2^{n^2-n}\cdot(2^n-2))$

解：解：可用容斥原理来计算

设 B 表示所有自反关系构成的集合，C 表示所有反自反关系构成的集合，则 $|B|=|C|=2^{n^2-n}$。而 $B\cap C=\phi$，故 $|B\cup C|=|B|+|C|$，从而

$$\left|B^C\cap C^C\right|=|S|-|B\cup C|=|S|-|B|-|C|$$

$$=2^{n^2}-2^{n^2-n}-2^{n^2-n}=2^{n^2}-2\cdot 2^{n^2-n}=2^{n^2-n}\cdot(2^n-2)$$

于是，既不是自反的，也不是反自反关系共有 $2^{n^2-n}\cdot(2^n-2)$ 个。

8. 自反的且对称的关系有多少？[此结果与"反自反的且对称的关系有多少？"是一样多]即有 $2^{\frac{n^2-n}{2}}$（对角线上全去掉）

9. 自反的或对称的关系有多少？

解：设 B 表示自反关系的集合，C 表示对称关系的集合，则自反或对称关系的集合为：$|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$。

10. X 上既是反自反的也是反对称的二元关系的个数为：$3^{\frac{n^2-n}{2}}$；

11. X 上既是对称的也是反对称的关系个数；

解： X 上既是对称的也是反对称的关系 $R \subseteq I_X$，故有 2^n。

12. X 上既不是对称的也不是反对称的关系个数；$(2^{n^2} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}} + 2^n)$

解： 设 A 表示对称、B 表示反对称，则

既不是对称的也不是反对称的二元关系为：

$$|A^C \cap B^C| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 2^{n^2} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}} + 2^n$$

例 2 设有集合 A，$|A| = 3$，求 A 上具有反自反且反对称性的二元关系的数目，并写出计算过程。

解： 不妨设 $A = \{a, b, c\}$，将 (a,b)，(b,a) 看作一个抽屉，(b,c)，(c,b) 看作一个抽屉，(a,c)，(c,a) 看作一个抽屉。若要获得具有反对称性且反自反性的关系，其中的元素只能在三个抽屉中取且每个抽屉中至多取一个元素，分几种情况：

（1）一个也不取，有 $C_3^0 = 1$ 种取法。

（2）只取一个元素，有 $C_3^1 \cdot 2 = 6$ 种取法。

（3）取二个元素，有 $C_3^2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ 种取法。

（4）取三个元素，有 $C_3^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ 种取法。

故具有反自反性且反对称性的二元关系数目共有 1＋6＋12＋8＝27 个。

若 $|A| = n$，结果又为多少？

抽屉数：$|A| = \dfrac{n^2 - n}{2}$，每个抽屉有 3 种选择，故共有 $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ 个。

例 3 设 $A = \{1,2,3\}$，R 是 A 的幂集 $2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ 上的二元关系且 $R = \{(a,b) \mid a \cap b \neq \phi\}$，则 R 不满足下列哪些性质？为什么？

（1）自反性；（2）反自反性；（3）对称性；（4）反对称性；（5）传递性。

$R = \{(a,b) \mid a \cap b \neq \phi\}$ 等价于 $aRb \Leftrightarrow a \cap b \neq \phi \Leftrightarrow (a,b) \in R = a \cap b \neq \phi$。

解： (1) 自反性。

因为 $\phi \in 2^A$，但 $\phi \cap \phi = \phi$，所以 $(\phi, \phi) \notin R$，故 R 不是自反的。

（2）反自反性。

因为$\{1\}\in 2^A$， $\{1\}\cap\{1\}=\{1\}\neq\phi$，故$(\{1\},\{1\})\in R$，故$R$不是反自反的。

（3）对称性。

$\forall x,y\in 2^A$，若$(x,y)\in R$，则$x\cap y\neq\phi$，所以$y\cap x\neq\phi$，故$(y,x)\in R$，从而R是对称的。

（4）反对称性。

令$x=\{1,2\}$， $y=\{1,3\}$，则$x\cap y=y\cap x=\{1\}\neq\phi$，故$(x,y)\in R$且$(y,x)\in R$，但$x\neq y$，所以$(x,y)\neq(y,x)$，从而$R$不是反对称的。

（5）传递性。

令 $x=\{1\}$， $y=\{1,2\}$， $z=\{2\}$，则有 $x\cap y=\{1\}\neq\phi$ 且 $y\cap z=\{2\}\neq\phi$，故$(x,y)\in R$且$(y,z)\in R$，但$x\cap z=\phi$，故$(x,z)\notin R$，所以R不是传递的。

习题课

例 1 证明：$R\circ R^*=R^*\circ R=R^+$，其中$R^*=R^0\cup R^1\cup R^2\cup\cdots=\bigcup_{i=0}^{\infty}R^i$

证： $R\circ R^*=R\circ(R^0\cup R^1\cup R^2\cup\cdots)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=t(R)=R^+$；

同理可证$R^*\circ R=R^+$

例 2 ［书上做为定理出现］设 R、S 是X上的二元关系，则

（1）$\phi^+=\phi$，ϕ是空关系。

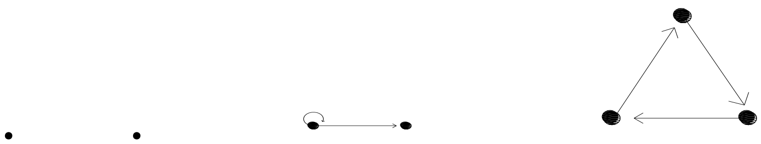
（2）$(R^+)^+=R^+$

证：因为R^+是传递的，故$(R^+)^+=R^+$。

（3）$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

证：因为$R\cup S\supseteq R$且$R\cup S\supseteq S$，故$(R\cup S)^+\supseteq R^+$，且$(R\cup S)^+\supseteq S^+$，从而$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

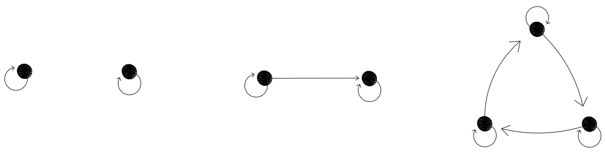
例 3 如图 5 所示给出下图中每个关系的自反、对称和传递闭包。



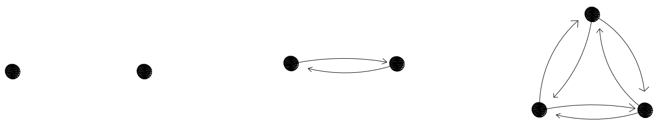
（a）　　　　　　　　（b）　　　　　　　　（c）

图 5

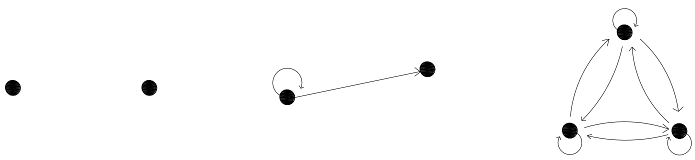
（1）自反闭包



（2）对称闭包



（3）传递闭包



例 4 设 R 是集合 A 上的反对称关系，则 t(R)一定是反对称的吗？

证： t(R)在 A 上不一定是反对称的。

例： $A=\{a,b,c,d\}$， $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$ 则 R 的传递闭包为：

$t(R)=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a),(a,c),$

$(a,d),(d,c),(d,d),(c,a),(b,d),(d,b),(b,a),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}$

t(R)是全关系，故 t(R)不是反对称的而是对称的。

例 5 举例说明 $s(t(R))$ 与 $t(s(R))$ 确实不相等。

解： 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，在 N 上定义小于关系“$<$”，则

$s(t(<))=s(<)=$“不等关系$\neq$”；

而 $t(s(<))=t(\neq)=$“全关系”。

因此的确不相等。

例 7（P_{98}^{8}）是否存在 X （$|X|=n$）上的一个二元关系 R，使得 $R,R^2,\cdots,R^n$ 两两不相等。

解：存在。令 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$， $R=\{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\}$ 即可。

例 8 证明：如果 R 是对称的，则 R^+ 也是对称的。

证：证 1 $\forall(x,y)\in R^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，则 $\exists m\in N$，使得 $(x,y)\in R^m$。于是存在 m－1 个元素 $y_1,y_2,\cdots,y_{m-1}$，使得 $(x_1,y_1)\in R,(y_1,y_2)\in R,\cdots,(y_{m-2},y_{m-1})\in R,(y_{m-1},y)\in R$。由 R 的对称性有：$(y,y_{m-1})\in R,(y_{m-1},y_{m-2})\in R,\cdots,(y_2,y_1)\in R,(y_1,x)\in R$。于是 $(y,x)\in R^m$，从而 $(y,x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R^+$，即 $R^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 是对称的。

习 题 课

例 1 设 R 是整数集 I 上的关系，mRn 定义为 $m^2=n^2$，则

（1）证明：R 是等价关系；

（2）确定 R 的等价类。

证：（1）因为 $\forall m\in I$，有 $m^2=m^2$，故 mRm，即 R 是自反的。

$\forall m,n\in I$，若 mRn，即 $m^2=n^2$，则 $n^2=m^2$，因此 nRm，即 R 是对称的。

$\forall m,n,k\in I$，若 mRn，nRk，即 $m^2=n^2$ 且 $n^2=k^2$，故 $m^2=k^2$，即 mRk，所以 R 是传递的。

由此可知：R 是 I 上的等价关系。

（2）因为 $\forall i\in I$，$[i]_R=\{i,-i\}$，所以 R 的等价类有：$\{[0]_R,[1]_R,[2]_R,\cdots\}$。

例 2 设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，则 $(b,c)\in R$。[书上习题]

证：$\Rightarrow$ R 是 A 上的等价关系。

若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$，由R的对称性有：$(b,a)\in R$且$(a,c)\in R$，再由R的传递性有：$(b,c)\in R$

$\Leftarrow$R是自反的，故$\forall a\in A$有$(a,a)\in R$。

若$(a,b)\in R$，由$(a,a)\in R$，有$(b,a)\in R$，所以R是对称的。

若$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，由R的对称性有：

$(b,a)\in R$且$(b,c)\in R$，故由题意得$(a,c)\in R$，所以R是传递。

因此，R是A上的等价关系。

例 3. 令$A=\{1,2,3\}$，A上的两个关系如图3所示，它们是否是等价关系？

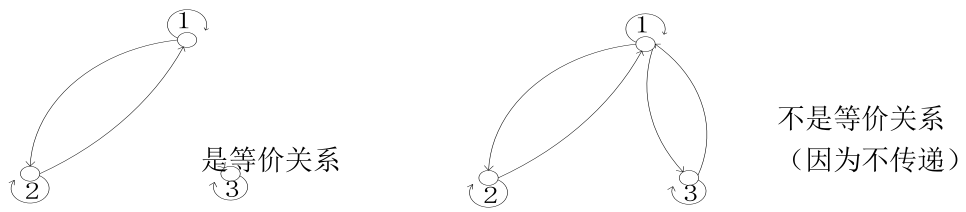


图3

例 4 设R_1，R_2是A上的等价关系，则$R_1\cup R_2$也是A上的等价关系吗？

解：$R_1\cup R_2$不一定是A的等价关系。因为$R_1\cup R_2$不一定具有传递性。

举例：设$A=\{a,b,c\}$，$R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$，

$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$，则

$R_1\cup R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$

因为$(a,b)\in R_1\cup R_2$且$(b,c)\in R_1\cup R_2$，但$(a,c)\notin R_1\cup R_2$，故$R_1\cup R_2$不满足传递性，即$R_1\cup R_2$不一定是A上的等价关系。

例 5 设$X=\{1,2,\cdots,n\},S\subseteq X\times X$。“$\cong$”是S上如下的二元关系：$\forall (i,j),(k,l)\in S$，

$$(i,j)\cong(k,l)\text{ 当且仅当 } i+j=k+l。$$

证明：(1) $\cong$等价关系；(2)求等价类数。

证：(1)等价关系显然；

(2)等价类数为：$2n-1$。

$i+j$ 只能取 2，3，…，2n，故等价类数有 $2n-1$ 个。

例 6 设 R 是 A 上的对称和传递的关系。若对 A 中每个 a，$\exists b \in A$，使得 $(a,b) \in R$，证明：R 是 A 上的等价关系。

证： $\forall a \in A$，$\exists b \in A$，使得 $(a,b) \in R$。由 R 的对称性有：$(b,a) \in R$。再由 R 的传递性有：$(a,a) \in R$。由 a 的任意性可知，R 是 A 上的自反关系，故 R 是 A 上的等价关系。

例 7 设 R 是集合 A 上的一个自反的和传递的关系；T 是 A 上的一个关系，使得 $(a,b) \in T \Leftrightarrow (a,b) \in R$ 且 $(b,a) \in R$。证明：T 是 A 上的等价关系。

证：（1）因为 R 是 A 上的自反关系，所以 $\forall a \in A$，有 $(a,a) \in R$，故由 T 的定义有：$(a,a) \in T$，即 T 是 A 上的自反关系。

（2）若 $(a,b) \in T$，由题设：$(a,b) \in R$ 且 $(b,a) \in R$。显然，$(b,a) \in T$，即 T 是 A 上的对称关系。

（3）若 $(a,b) \in T$ 且 $(b,c) \in T$，由题设可知：$(a,b) \in R$，$(b,a) \in R$ 且 $(b,c) \in R$，$(c,b) \in R$。由 R 传递性得：$(a,c) \in R$ 且 $(c,a) \in R$，故 $(a,c) \in T$，所以 T 是 A 上的传递关系。

由（1），（2），（3）即得 T 是 A 上的等价关系。

例 8 设 R 是 A 上的一个二元关系，设 $S=\{(a,b) \mid \exists c \in A$，使得 $(a,c) \in R$ 且 $(c,b) \in R\}$。证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系；

证： 证明若 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

（1）自反性

因为 R 是自反的，所以 $\forall a \in A$，有 $(a,a) \in R$。根据 S 的定义，有 $(a,a) \in S$，所以 S 是自反的；

（2）对称性：

若 $(a,b) \in S$，则 $\exists c \in A$，使得 $\left(a,c\right) \in R$ 且 $\left(c,b\right) \in R$。因为 R 是对称的，所以 $\left(b,c\right) \in R$ 且 $\left(c,a\right) \in R$，根据 S 的定义有 $\left(b,a\right) \in S$，所以 S 是对称的；

（3）传递性：

若$(a,b)\in S$，$(b,c)\in S$，则$\exists d\in A$，使得$(a,d)\in R$且$(d,b)\in R$。因为R是传递的，所以$(a,b)\in R$。

且$\exists e\in A$，使得$(b,e)\in R$且$(e,c)\in R$。因为R是传递的，所以$(b,c)\in R$。

根据S的定义有$(a,c)\in S$。

所以S是传递的。

由（1），（2），（3）可知：S是等价关系。

例 9 设$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分，若$A_i\cap B\neq\phi$，1≤i≤n，

证明：$\{A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是集合$A\cap B$的划分。

证：因为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分，故$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A_i\cap A_j\neq\phi$，i≠j。但

$$A\cap B=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B),$$

当 i≠j 时，$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\phi$。

当 i＝j 时，$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=A_i\cap B$。

所以$\{A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是$A\cap B$的划分。

例 10 设R_1和R_2是集合X上的等价关系，C_1和C_2是由R_1和R_2所诱导产生的划分，证明：当且仅当C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中，$R_1\subseteq R_2$。

分析：只要理解等价关系和划分的概念以及它们之间的一一对应关系，就很容易证明。

证：令划分$C_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots\}$，$C_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_e,\cdots\}$。

充分性。

若$R_1\subseteq R_2$，则C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中。于是

$\forall A_k\in C_1$，即A_k为C_1中任一划分块，所以$A_k\neq\varnothing$。在A_k中任取一个元素$a\in A_k$。因为C_2是X的划分且$a\in X$，所以存在$B_e\in C_2$，使得$a\in B_e$。于是$\forall b\in A_k$，有$(a,b)\in R_1$，又因为$R_1\subseteq R_2$，所以$(a,b)\in R_2$。

根据划分的定义有$b\in Be$，所以$A_k\subseteq Be$。

由A_k的任意性知，C_1的每一划分块都包含在C_2的某一划分块中。

必要性

若C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中，则$R_1\subseteq R_2$。

$\forall(a,b)\in R_1$，则a,b在C_1的同一划分块中。根据题设，必有a,b在C_2的同一划分块中，故$(a,b)\in R_2$。因此$R_1\subseteq R_2$。

例 11$\left(P_{113}^{1,2,3}\right)$设$X=\{1,2,3\},Y=\{1,2\},S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$是 S 上的二元关系，若$\forall f,g\in S, f\cong g\Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)$，证明：$\cong$是$S$上的等价关系；求等价类。

证：因为$f:X\to Y$，所以X到Y的映射共有 8 个，如图 2 所示。

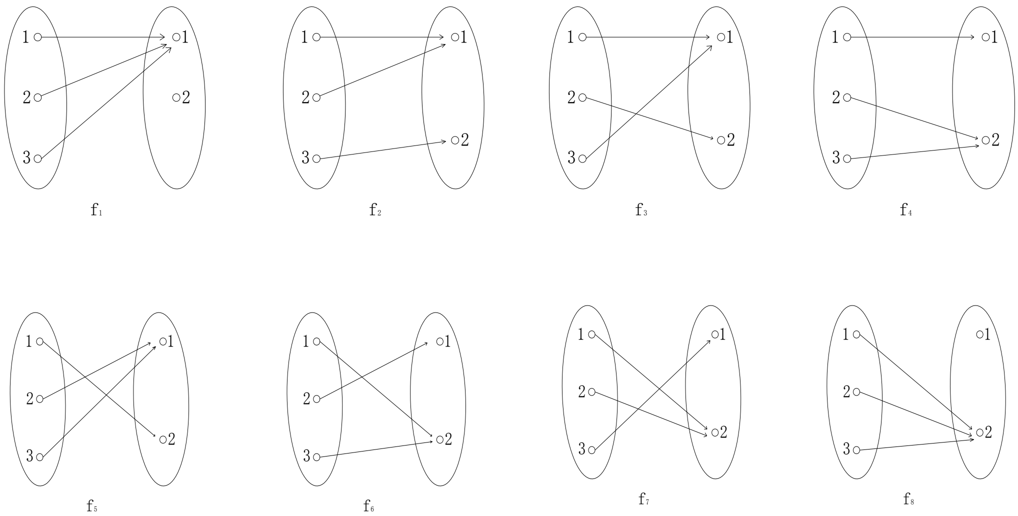


图 2

（1）等价关系显然。

（2）$\forall f\in S$，$[f]_R=\{g\mid I_m(f)=I_m(g)\}$，故

$[f_1]_R=\{f_1\}$，$[f_2]_R=\{f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$，$[f_3]_R=\{f_8\}$。

所以等价类集合为$\{[f_1]_R,[f_2]_R,[f_3]_R\}$。

例 12 设$S=\{1,2,3,4\}$，并设$A=S\times S$，在A上定义关系R为：

$$(a,b)R(c,d)\in R\Leftrightarrow a+b=c+d\text{。}$$

证明：(1)R 是等价关系；(2)计算出 A/R。

证：I(1)自反性。$\forall(a,b)\in A$，有$a+b=a+b$，所以$(a,b)R(a,b)$，即R是A上的自反关系。

(2)对称性。$\forall(a,b)$，$(c,d)\in A$，若$(a,b)R(c,d)$，则$a+b=c+d$，故$c+d=a+b$，所以$(c,d)R(a,b)$，即R是A上的对称关系。

(3)传递性。$\forall(a,b)$，(c,d)，$(e,f)\in A$，若$(a,b)R(c,d)$且$(c,d)R(e,f)$，则$a+b=c+d$且$c+d=e+f$，即$a+b=e+f$，所以$(a,b)R(e,f)$，故R是A上的传递关系。

由(1)，(2)，(3)可知，R是A上的等价关系。

II 首先求出A=S×S的全部元素，然后找出所有元素对应的等价类即可。在求等价类时，记住以下几条性质：

(1) $a\in[a]_R$；(2)若$(a,b)\in R$，则$[a]_R=[b]_R$。

因为$A=S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$

$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

$[(1,1)]_R=\{(1,1)\},[(1,2)]_R=\{(2,1),(1,2)\}=[(2,1)]_R$

$[(1,3)]_R=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}=[(3,1)]_R=[(2,2)]_R$

$[(1,4)]_R=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}=[(4,1)]_R=[(2,3)]_R=[(3,2)]_R$

$[(2,4)]_R=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}=[(4,2)]_R=[(3,3)]_R$

$[(3,4)]_R=\{(4,3),(3,4)\}=[(4,3)]_R$　　$[(4,4)]_R=\{(4,4)\}$

所以，$A/R=\{[(x,y)]_R\mid x,y\in A\}=\{[(1,1)]_R,[(1,2)]_R,$

$$[(1,3)]_R,[(1,4)]_R,[(2,4)]_R,[(3,4)]_R,[(4,4)]_R\}$$

例 13 设R_1是A上的等价关系，R_2是B上的等价关系。关系R满足：

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2)\Leftrightarrow(x_1,x_2)\in R_1\text{且}(y_1,y_2)\in R_2$$

$$\left[\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)\in R\text{当且仅当}\left(x_1,x_2\right)\in R_1\text{且}\left(y_1,y_2\right)\in R_2\right]$$

证明：R是$A\times B$上的等价关系。

解：（1）自反性：$\forall\left(x,y\right)\in A\times B$，有$x\in A$，$y\in B$；因为$R_1$和$R_2$分别为$A$和$B$上的自反关系，所以$\left(x,x\right)\in R_1$，$\left(y,y\right)\in R_2$，故$\left((x,y),(x,y)\right)\in R$，因此$R$是

自反性的；

（2）对称性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\times B$，若$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in$ ，则 $(x_1,x_2)\in R_1$，$(y_1,y_2)\in R_2$；因为R_1和R_2分别为A和B上的对称关系，所以有 $(x_2,x_1)\in R_1$，$(y_2,y_1)\in R_2$，从而$((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in R$，因此$R$是对称性的；

（3）传递性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in A\times B$，若$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R$且 $((x_2,y_2),(x_3,y_3))\in R$，则有 $(x_1,x_2)\in R_1$，$(y_1,y_2)\in R_2$，$(x_2,x_3)\in R_1$，$(y_2,y_3)\in R_2$；因为R_1和R_2分别为A和B上的传递关系，所以有$(x_1,x_3)\in R_1$，$(y_1,y_3)\in R_2$，从而$((x_1,y_1),(x_3,y_3))\in R$，因此$R$是传递性的。

综上可知：R是$A\times B$上的等价关系。

例 14 设N是自然数集合，定义N上的二元关系R：

$$R=\{(x,y)|x\in N,y\in N,x+y\text{是偶数}\}\text{，则}$$

（1）证明R是一个等价关系；

（2）求关系R的等价类；

证：（1）自反性：$\forall x\in N$，$x+x$是偶数，所以有xRx。因此R是自反的；

对称性：若$(x,y)\in R$，即$x+y$是偶数，则$y+x$是偶数，所以有$(y,x)\in R$。因此R是对称的；

传递性：若$(x,y)\in R$，$(y,z)\in R$，即$x+y$是偶数，$y+z$是偶数，则$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$是偶数，所以有$(x,z)\in R$。因此R是传递的。

综上可知：R是等价关系。

（2）关系R的等价类有：$[0]_R=\{0,2,4,\cdots\},[1]_R=\{1,3,5,\cdots\}$。

（3）设$f:N\to N$，$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{为偶数；}\\ 1 & x\text{为奇数。}\end{cases}$则$f$所诱导的等价关系就是$R$。

例 15 设$A=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系 R 定义为：

$$(x,y)R(u,v)\Leftrightarrow|x-y|=|u-v|,$$

证明：1.R 是 A 上的等价关系；2.确定由 R 对集合 A 的划分。

证：1. 首先证明 R 是 A 上的等价关系。

(1)自反性。$\forall x, y \in A$，因为$|x-y|=|x-y|$，故$(x,y)R(x,y)$，即 R 是自反的。

(2) $\forall (x,y),(u,v) \in A$，若$(x,y)R(u,v)$，有$|x-y|=|u-v|$，则$|u-v|=|x-y|$，从而$(u,v)R(x,y)$，即 R 是对称的。

(3) $\forall (x,y),(u,v),(p,q) \in A$，若$(x,y)R(u,v)$，$(u,v)R(p,q)$，即$|x-y|=|u-v|$，$|u-v|=|p-q|$，得$|x-y|=|p-q|$，从而$(x,y)R(p,q)$，故 R 是传递的。

由(1)、(2)、(3)可知，R 是 A 上的等价关系。

2. 由定理知，由 R 的等价类可确定对集合 A 的划分。划分中的元素分别为元素的等价类，它们是：

$$[(1,1)]_R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\},[(1,2)]_R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$$
$$[(1,3)]_R=\{(1,3),(3,1),(4,2),(2,4)\},[(1,4)]_R=\{(1,4),(4,1)\}$$

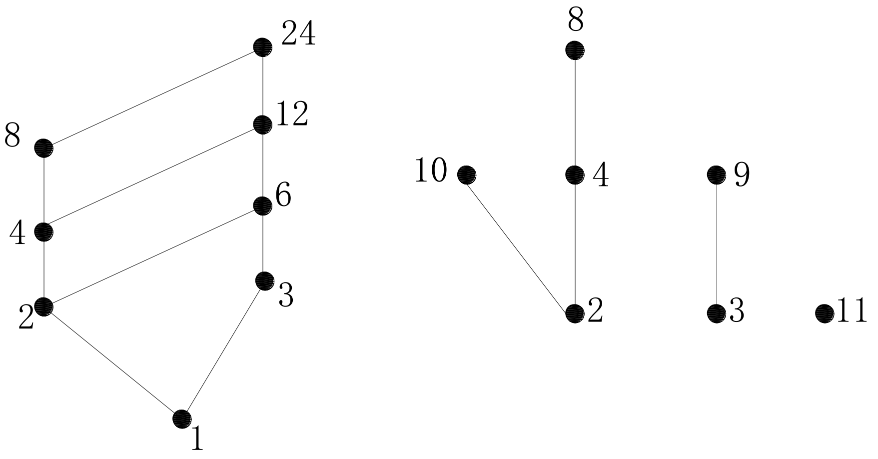
即集合 A 的划分$\pi=\{[(1,1)]_R,[(1,2)]_R,[(1,3)]_R,[(1,4)]_R\}$。

习 题 课

例 1 非空集合 A 上存在二元关系 R，使得 R 既是 A 上的等价关系又是 A 上的偏序关系吗？

解： 存在。A 上的恒等关系就满足。

例 2 在 A＝{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} 和 B＝{2, 3, 4, 8, 9, 10, 11} 上定义的整除关系“|”，画出 Hasse 图，指出最大（小）元，极大（小）元。



(a) (b)

图 1

解：如图 1(a)所示

最大元：24　最小元：1；

极大元：24　极小元：1；

如图 1(b)所示

最大元：无　极大元：8，9，10，11；

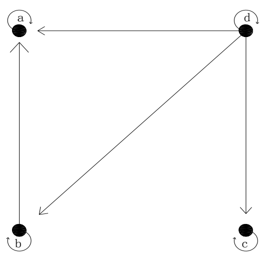
最小元：无　极大元：2，3，11

（元素 11 既是极大元又是极小元）。

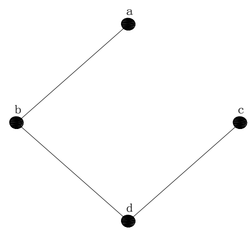
例 3 设偏序集$(A,\le)$的关系图如图 2(a)所示。

(1)画出$(A,\le)$的 Hasse 图。

(2)设 B＝{b,c}，求 B 的上界集合 C 和上确界；下界集合 D 和下确界。



(a)



(b)

图 2

解：1. $(A,\le)$的 Hasse 图如图 8(b)所示。

1. 设 B＝{b,c}，则 A 中无任意元素“大于”b，也同时“大于”c，故 C＝ϕ，此时，无上确界，而 D＝{d}，下确界：d。

例 4 设集合$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如图 9 所示。则

1.求出 A 的最大（小）元，极大（小）元。

2.求出$\{x_2,x_3,x_4\},\{x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界。

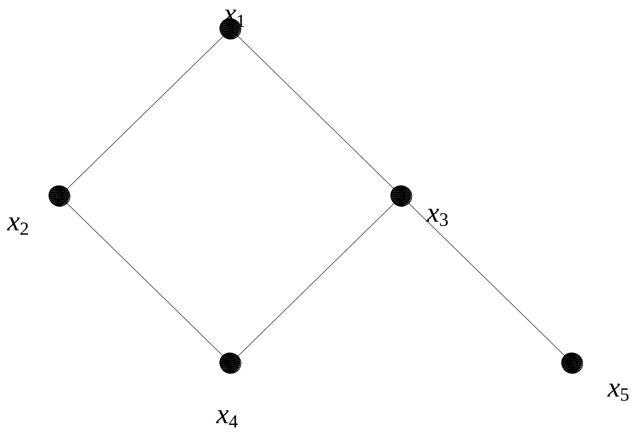


图 2

解：1. 最大元：x_1, 最小元：无

极大元：x_1, 极小元：x_4，x_5

2. 令 $A=\{x_2,x_3,x_4\}$，**则**

上界：x_1, 下界 x_4；　　上确界：x_1, 下确界：x_4

令 $B=\{x_3,x_4,x_5\}$，**则**

上界：x_1,x_3，下界：无；　上确界：x_3，下确界：无；

令 $C=\{x_1,x_2,x_3\}$，**则**

上界：x_1，下界：x_4；　上确界：x_1，下确界：x_4。

例 5 设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，A 上的关系定义如下：

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$$

$$(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$ 。则

（1）写出 R 的关系矩阵；

（2）验证 (A,R) 是偏序集；

（3）并画出 Hasse 图。

（4）若 A 上的关系如下：$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),$

$(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$，则又如何？

解：（1）R 所对应的关系矩阵为 B_R 为：

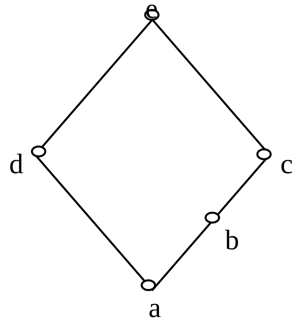


图 10

$$B_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为 1，故 R 是自反的；

$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故 R 是反对称的；

R^2 对应的关系矩阵 B_{R^2} 为：

$$B_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=B_R。$$

因此 R 是传递的。

综上可知：故 R 是 A 上的偏序关系，从而 (A,R) 是偏序集。

（3）(A,R) 对应的 Hasse 图如图 10 所示。

（4）R 的关系矩阵为：$B_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

因为 $(b,c)\in R$，$(c,d)\in R$，但 $(b,d)\notin R$，故 R 不是传递的。

因此，R 不是 A 上的偏序关系。

实际上，也可通过计算 R^2 的关系矩阵来说明：

$$B_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}>B_R，$$ 故 R 不是传递的。

因此 R 不是 A 上的偏序关系。

例 6 证明：每个由 n^2+1 个实数组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 中必有一个长至少为

$n+1$的不减子序列，或有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

证：不妨设n^2+1个数是互不相同的。于是，这n^2+1个数构成的集合 A，且$|A|=n^2+1$。在 A 上定义二元关系“$\le_1$”如下：

$$a_i \le_1 a_j \text{ 当且仅当 } a_i \le a_j \text{ 且 } i \le j \text{。}$$

其中≤是实数间的通常的小于或等于关系。

显然，二元关系$\le_1$是自反的，传递的。设$a_i \le_1 a_j$且$a_j \le_1 a_i$，则$a_i \le a_j$，$a_j \le a_i$，且$i \le j$， $j \le i$，从而$a_i = a_j$， $i = j$。所以，$\le_1$是反对称的。因此$\le_1$是 A 上的偏序关系，$(A,\le_1)$是偏序集。

由推论可知，A 中或有长至少为$n+1$的链或有长至少为$n+1$的反链。A 中长至少为$n+1$的链，就是序列$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$的长至少为$n+1$的不减（在$\le_1$下）的子序列。而 A 的长至少为$n+1$的反链，实际上就构成了$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$的不增子序列。设反链中元素按下标递增顺序排列成

$$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{n+1}}(i_1<i_2<\cdots<i_{n+1})$$

因$a_{i_k} \not\le_1 a_{i_{k+1}}$，而$i_k<i_{k+1}$，所以$a_{i_k} \not\le a_{i_{k+1}}$，故$a_{i_k}>a_{i_{k+1}}$，$k=1,2,\cdots,n$。于是便有：

$$a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}} \text{。}$$

例 7 设R是实数集，令X为$[0,1]$到R的所有映射所构成的集合。若$f,g\in X$，定义：$(f,g)\in S \Leftrightarrow \forall x\in[0,1], f(x)-g(x)\ge 0$，

证明：（1）S是偏序关系；（2）S是全序关系吗?

分析：证明S是偏序关系，首先搞清S是定义在什么集合上，S中的元素是什么形式；然后再按偏序关系的定义分别证明S的自反性，反对称性，传递性；证明这三个性质，可以直接采用按定义方法证明。显然S是定义在以映射$f:[0,1]\to R$作为元素的集合上，因此，S中的序对是以映射作为元素的。

证明：（1）证明S是偏序关系。

自反性：$\forall f\in X$，则$f:[0,1]\to R$， $\forall x\in[0,1]$，都有$f(x)-f(x)=0$， 即

$f(x)-f(x)\geq 0$，故$(f,f)\in S$，所以S是自反的。

反对称性：$\forall f,g\in X$，若$(f,g)\in S$且$(g,f)\in S$，则$\forall x\in[0,1]$，有

$f(x)-g(x)\geq 0$， $g(x)-f(x)\geq 0$，即$f(x)\geq g(x)$，$g(x)\geq f(x)$，故

$f(x)=g(x)$，即$f=g$，从而S是反对称的。

传递性：$\forall f,g,h\in X$，若$(f,g)\in S$且$(g,h)\in S$，则$\forall x\in[0,1]$，有

$f(x)-g(x)\geq 0$，$g(x)-h(x)\geq 0$，即$f(x)\geq g(x)$，$g(x)\geq h(x)$，所以$f(x)\geq h(x)$，即$f(x)-h(x)\geq 0$，因此有$(f,g)\in S$，从而S是传递的。

综上可知：S是偏序关系。

（2）S不是全序关系。

例如：设$f(x)=x, g(x)=-x+1$，则$f(0)-g(0)=-1$，$g(1)-f(1)=-1$，故f与g是不可比较的，即S不是全序关系。

例 8 设$(A,\leq)$是偏序集，$\forall a\in A$，$f(a)=\{x|x\in A,x\leq a\}$，证明：$f:A\to 2^A$是一个单射，且当$a\leq b$时，有$f(a)\subseteq f(b)$。

证：由f的定义，因$x\leq x$，有$x\in f(x)$。$\forall x,y\in A$，若$f(x)=f(y)$，则有$x\in f(x)=f(y)$，即$x\leq y$；

同理可证$y\leq x$。

由于偏序关系是反对称的，所以有$x=y$，于是f是单射。

当$a\leq b$时，$\forall x\in f(a)$，有$x\leq a$，由于偏序关系是传递的，有$x\leq b$，即$x\in f(b)$。于是$f(a)\subseteq f(b)$。

例 9 已知集合 A 和 B，其中 A$\neq\phi$，（B，≤）是偏序集，定义$B^A=\{f\mid f:A\to B\}$

上的二元关系如下：

$$fRg \Leftrightarrow f(x) \le g(x)\text{，}\quad \forall x \in A$$

1．证明：R 为 2^A 上的偏序关系。

2．给出 (B^A, R) 存在最大元的必要条件和最大元的一般形式。

证：1．（1）$\forall f \in B^A$ 及 $\forall x \in A$ 有 $f(x) \in B$，因为 $(B, \le)$ 是偏序集，所以“≤”是偏序关系，故“≤”具有自反性。所以 $f(x) \le f(x)$，即 $\forall x \in A$，$(f, f) \in R$。

（2）$\forall f, g \in B^A$，若 $(f, g) \in R$ 且 $(g, f) \in R$，则 $\forall x \in A$，有 $f(x), g(x) \in B$，并且 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le f(x)$。因为（B，≤）是偏序集，所以“≤”具有反对称性，所以 $f(x) = g(x)$。由 x 的任意性可得 $f = g$，故 R 具有反对称性。

（3）$\forall f, g, h \in B^A$，若 $(f, g) \in R$ 且 $(g, h) \in R$，则 $\forall x \in A$ 有 $f(x), g(x), h(x) \in B$，并且 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le h(x)$。因为（B，≤）是偏序集，所以“≤”具有传递性。所以 $f(x) \le h(x)$，由 x 的任意性可知 $(f, h) \in R$，所以 R 具有传递性。

由（1）（2）（3）可知，R 是 B^A 上的偏序关系。

2．由 R 是 B^A 上的偏序关系，则 (B^A, R) 就是偏序集。若 (B^A, R) 存在最大元，即 $\exists f \in B^A$，使得 $\forall g \in B^A$，都有 $(g, f) \in R,$ 则 $\forall x \in A,$ 有 $g(x) \le f(x)$。

因为 g 是任取的，所以 $f(x)$ 对任意选取的 x 都要“最大”，即 $\forall y \in B$，都要有 $y \in f(x)$，所以 (B^A, R) 存在最大元的必要条件是（B，≤）存在最大元。

假设（B，≤）存在最大元 b_o，设 (B^A, R) 的最大元为 f_o，则 $\forall a \in A$，有 $f_0(x) = b_0$。