

线性代数与空间解析几何

3.1 几何向量的概念及其线性运算

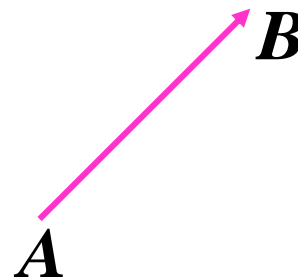
- 一 几何向量的概念
- 二 几何向量的线性运算

一 几何向量的概念

向量：既有大小又有方向的有向线段.

向量表示： \vec{a} 或者 \overrightarrow{AB}

以 A 为起点， B 为终点的有向线段



向量的模：有向线段的长度 $|\vec{a}|$ 或者 $|\overrightarrow{AB}|$

单位向量：长度为1的向量. \vec{a}^0

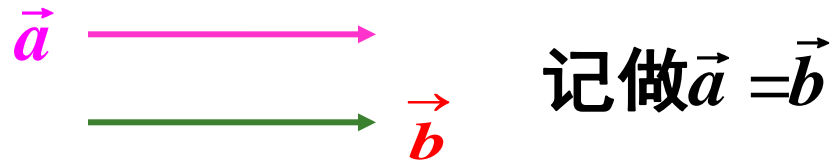
零向量：起点和终点重合的向量. $\vec{0}$

规定：零向量方向是任意的.

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$$

自由向量：与起点无关的向量.

向量相等：大小相等且方向相同的向量.



即经过平行移动能够完全重合的向量.

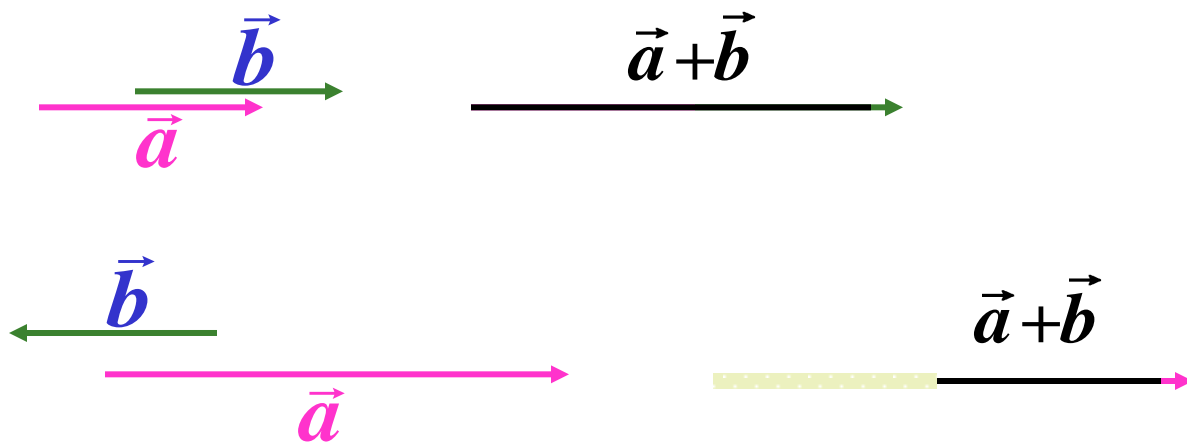
平行：两个向量方向相同或者相反 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

共线：若将两个平行向量的起点放在同一个点上，它们的终点和公共起点都在一条直线上

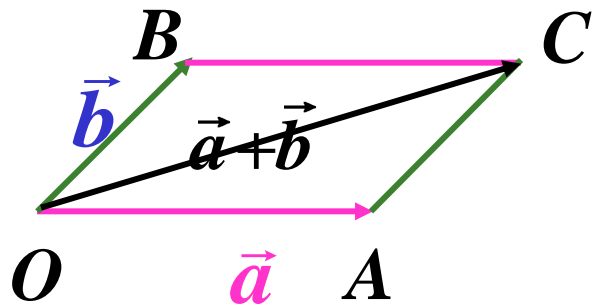
二 几何向量的线性运算

1 加法: 设 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, 定义 $\vec{a} + \vec{b}$ 是个向量

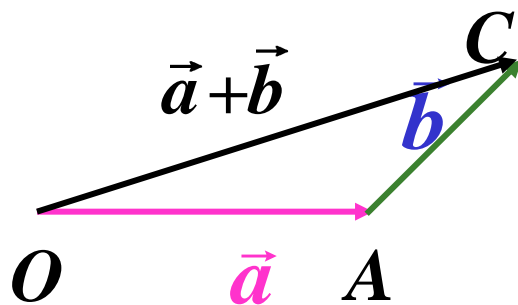
(1) 当 \vec{a} 与 \vec{b} 共线时 $\begin{cases} \text{同向: } |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|, \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \text{反向: } |\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||, \\ \text{方向与长度长的向量同向} \end{cases}$
即 $\vec{a} \parallel \vec{b}$



(2) 当 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线时,首先将 \vec{a} 与 \vec{b} 的起点重合



平行四边形法则



三角形法则

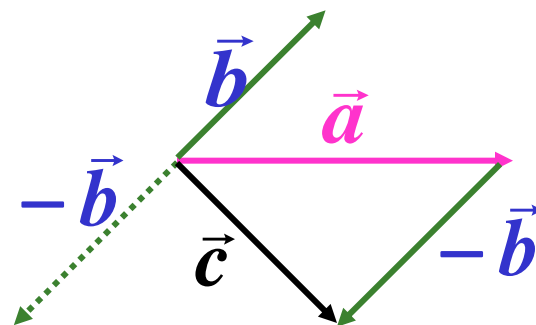
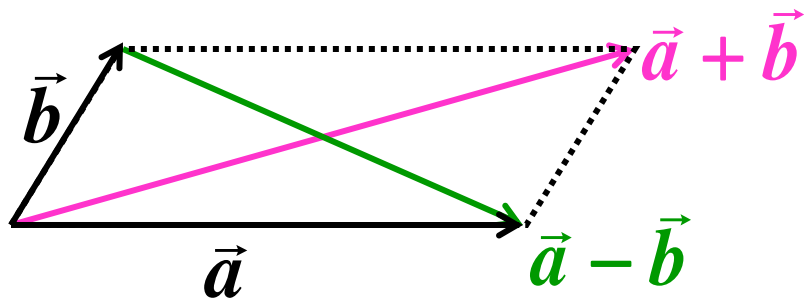
向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

(2) 结合律： $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

(3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

2 减法 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

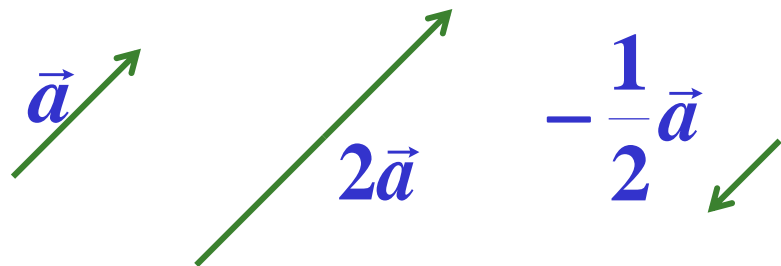
3 数乘

设 k 为实数, \vec{a} 为向量, 定义 $k\vec{a}$ 为向量

(1) 当 \vec{a} 为零向量时, $k\vec{a} = \vec{0}$

(2) 当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, 定义 $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

方向 $\begin{cases} k > 0 \text{ 时, } k\vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向;} \\ k < 0 \text{ 时, } k\vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向;} \\ k = 0 \text{ 时, } k\vec{a} = \vec{0}, \text{ 方向任意.} \end{cases}$



数与向量的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律： $k(l\vec{a}) = l(k\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

(2) 分配律： $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

两个向量的平行关系

定理 向量 \vec{a} 与向量 \vec{b} 的充分必要条件是：

存在数 k ,使 $\vec{b} = k\vec{a}$ 或 $\vec{a} = k\vec{b}$.

小结果

设 \vec{a}^0 表示与非零向量 \vec{a} 同方向的单位向量,

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0 \longrightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^0 .$$

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.