# 线性代数与空间解析几何

# 4.4 向量空间

一　　向量空间的概念

二　　向量空间的基,维数与坐标

三　　坐标变换

# 一　向量空间的概念

## 1. 向量空间的定义

设$V$是数域$F(R)$上的$n$维向量构成的非空集合

(1) 若$\alpha \in V, \beta \in V$, 则$\alpha+\beta \in V$;

(2) 若$\alpha \in V, k \in F(R)$,则$k\alpha \in V$.

则称集合$V$是数域$F(R)$上的向量空间.

即$V$对向量的加法和数乘满足**封闭性**.

# 例. 下列集合是否构成向量空间

(1) $R^3=\{\alpha=(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3\in R\}$ √

(2) $R^n=\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in R,i=1,2,...,n\}$ √

(3) $V_1=\{\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in R,i=2,...,n\}$ √

(4) $V_2=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\,|\,k_i\in R,i=2,...,m\}$ √

(5) $V_3=\{\alpha=(1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in R,i=2,...,n\}$ ×

定义$V_2=\{\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_i \in R, i = 2,\ldots,m\}$

为由数域$R$上的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$生成的向量空间,

记为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) = span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$

## 2. 子空间

设$V_1, V_2$ 都是数域$F$ 上的向量空间，若$V_1 \subseteq V_2$，则称$V_1$ 是$V_2$ 的子空间.

**练习**

$V_1 = \{\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 2, \ldots, n\}$是谁的子空间？

$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 是谁的子空间？

# 二　　向量空间的基,维数与坐标

## 1. 基底(基)

设$V$是数域$F(R)$上的向量空间, 若$V$中向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) $V$中任意向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示;

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的基底.

## 2. 维数

向量空间$V$的基底中所包含的向量的个数称为向量空间$V$的维数.

向量空间$V$的维数为$r$, 则称$V$为$r$维向量空间.

只含有一个零向量的向量空间$\{0\}$的维数规定为0

$r$维和0维向量空间统称为**有限维向量空间**.

**思考：基与维数的定义和前面哪个的定义类似?**

向量组的极大无关组和秩的定义

## 4.1 例2.

设$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,问$\alpha$是否可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示?

设$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k_1=a_1,k_2=a_2,k_n=a_n$

即$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$　　当做结论记住

**结论1** $n$ 维标准单位向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 构成$R^n$ 的一组基，称为**自然基**.

**结论2**

$n$ 个$n$ 维向量构成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是$R^n$ 的一组基

$\Leftrightarrow$ $n$ 个$n$ 维向量构成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

**例2** $V_1=\{\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in R,i=2,\ldots,n\}$的维数.

## 结论3 向量空间

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$
$$=\{\alpha|\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_i\in R, i=2,...,m\}$$

空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的基底即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩为$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的维数.

**例3** $\alpha_1=(1,1,0,-1),\alpha_2=(2,1,1,-1),\alpha_3=(0,1,1,-1)$

求$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一组基及维数.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

## 结论4 向量空间

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间$V$ 的一组基底，则

$$V = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$$

**结论5** 若$V \subseteq R^n$,则$V$的维数不超过$n$;

若$V \subseteq R^n$,且$V$的维数$=n$, $V=R^n$.

**例4 P137 16**

试证由向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

所生成的空间就是$R^3$.

**例5** 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价,

记 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

试证 $V_1=V_2$

**例6 P137 17**

由 $\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(1,0,1,0)$ 所生成的空间记为 $V_1$

由 $\beta_1=(0,1,0,0),\beta_2=(3,0,3,0)$ 所生成的空间记为 $V_2$

证明 $V_1=V_2$ **只需证明两个向量组等价**

## 3. 坐标向量

设$V$ 是$r$ 维向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是$V$的一组基底，则对任意的$\alpha\in V$，若有$x_i\in F,i=1,2,\ldots,r$ 使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$$

则称$(x_1,x_2,\cdots x_r)$或者$(x_1,x_2,\cdots x_r)^T$是向量$\alpha$ 关于基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的坐标向量，简称坐标

或者称为是向量$\alpha$ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标向量，简称坐标.

**注：**(1) 向量在一组确定基下的坐标是唯一的

(2) 向量空间的基不唯一，因此向量在不同基下的坐标也不一样

**问：如何求向量在一组基下的坐标？**

**例7**

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$

验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基, 并求$\beta$在这组基下的坐标.

# 三　坐标变换

## 1. 过渡矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间$V$ 的两个基,且有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases},$$

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases},$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

称此公式为基变换公式.

$$\Rightarrow \boxed{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P}$$

**基变换公式**

在基变换公式$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$中矩阵$P$称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的**过渡矩阵**

过渡矩阵$P$是可逆的.

## 2. 坐标变换公式

设$n$维向量空间$V$的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$P$,$V$中的向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$ 则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

## 例8　课本P125 例12

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$R^4$的一组基,$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4$,基向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$在基底$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标依次为

$(1,3,-5,7),(0,1,2,-3),(0,0,1,2),(0,0,0,1)$

求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标

## 例9　课本P126 例13

在$R^4$中取两个基底

$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,-1,1,1)^T,$

$\alpha_3=(-1,2,1,1)^T,\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$

和

$\beta_1=(2,1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,2,2)^T,$

$\beta_3=(-2,1,1,2)^T,\beta_4=(1,3,1,2)^T$

求前一个基底到后一个基底的基变换公式和坐标变换公式.

# 作业

**P137 19(2)(3)**

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维向量空间$R^3$的一组基,则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

数一(5)

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

## 数一(13)

设$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,a)^T$

若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数为2,则$a=$ ____

## 数三(13)

设$A,B$为3阶矩阵,且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$,

则$|A+B^{-1}|=$

**(20)** 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$R^3$的一个基底,$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$,

$\beta_2=2\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$

(1)证明向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为$R^3$的一个基底;

(2)当$k$为何值时,存在非0向量$\xi$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标相同,并求所有的$\xi$.