

# 1. Introducción

## 1.1. Introducción a la Teoría de Control

Lo que conocemos hoy como Teoría de Control es el resultado de la sinergia de algunas nociones que nos resultan familiares, términos tales como “*feedback*”, *optimización* y *cibernética* nos plantean teorías matemáticas como tecnológicas necesarias para abordar problemas complejos que requieran una estrategia de control en algún sistema.

Se trata de una disciplina con interesantes aplicaciones, basta simplemente observar la cisterna de nuestro cuarto de aseo, lectores de discos, apertura y cierre de la puerta de un garaje, calefacción de un edificio u otras más sorprendentes en la industria como los procesos de líneas de ensamblaje de vehículos, “perforaciones mineras”, redes de generación y suministro eléctrico, reacciones químicas en la industria papelera, aeronáutica, medicina, mecatrónica con enorme trascendencia, etcétera.

El desafío está entonces en comprender la base de la pirámide de los sistemas de control el cual hace referencia a la Teoría Matemática para así de manera general aventurarnos en esta fascinante disciplina.



*La Ingeniería de Control  
está presente en  
virtualmente todos los  
sistemas modernos de*



*ingeniería.*



*Planta Industrial Moderna*

El estudio de los Sistemas de Control puede ser de gran ayuda para establecer lazos de unión entre los diferentes campos de estudio, haciendo que los distintos conceptos se unan en un problema común de control. En este sentido, la Ingeniería de Control no es sino una pequeña parte de una teoría más genérica denominada Ingeniería de Sistemas, que estudia el comportamiento de un sistema dinámico, esto es, de un sistema que evoluciona en el tiempo y que puede incluir un proceso de cualquier tipo: biológico, económico, de ingeniería, etc. Desde un punto de vista, la Teoría de Control proporciona una comprensión básica de todos los sistemas dinámicos, así como una mejor apreciación y utilización de las leyes fundamentales de la Naturaleza.

## **1.2. Conceptos Básicos**

**Sistema.-** Conjunto de medios tales como: personas, materiales, equipos, software, instalaciones, datos, etc. integrados de tal forma que puedan desarrollar una determinada función en respuesta a una necesidad concreta.

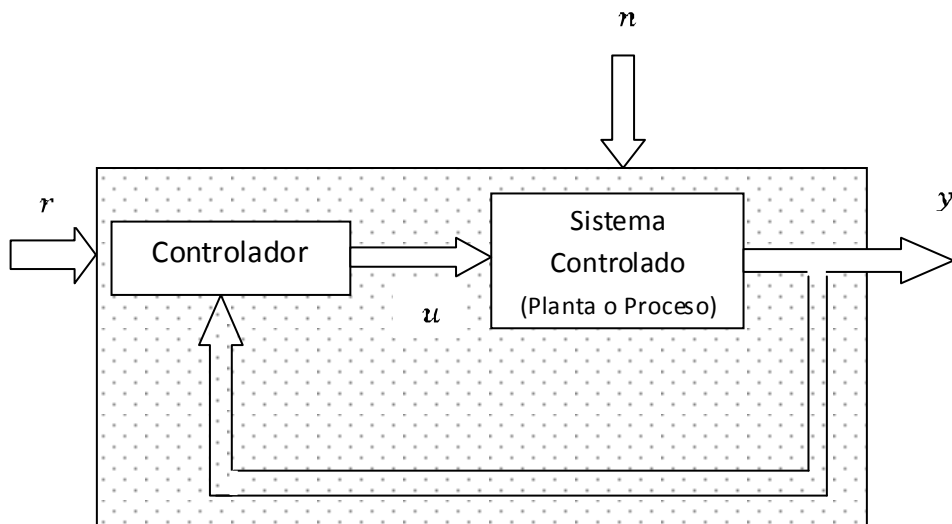
**Control.-** Manipulación de un conjunto de las magnitudes o acciones para obtener una respuesta deseada.

**Teoría de Control.-** Estudia el desempeño de los sistemas dinámicos. Cuando una o más variables de salida del sistema deben seguir una salida deseada (referencia).

**Sistema de Control.-** Conjunto de dispositivos que actúan juntos para lograr un objetivo de control.

**Proceso.-** Grupo de elementos en interacción que le dan al conjunto (o sistema) determinadas cualidades dinámicas o temporales.Ç

**Proceso y sistema.-** proceso es un sistema, pero en el que sus elementos pueden ser solo materia, energía o información.



*Fig.1.1 .Estructura general de un Sistema de Control*

Donde:

**$r$ :** Comandos de referencia, fijación o de régimen.-Es el valor deseado de la salida del sistema.

**$u$ :** Variable de entrada

**$n$ :** Perturbaciones.- Estas variables pueden tener un impacto significativo en el rendimiento del sistema pues hacen que la variable controlada se desvíe del régimen establecido.

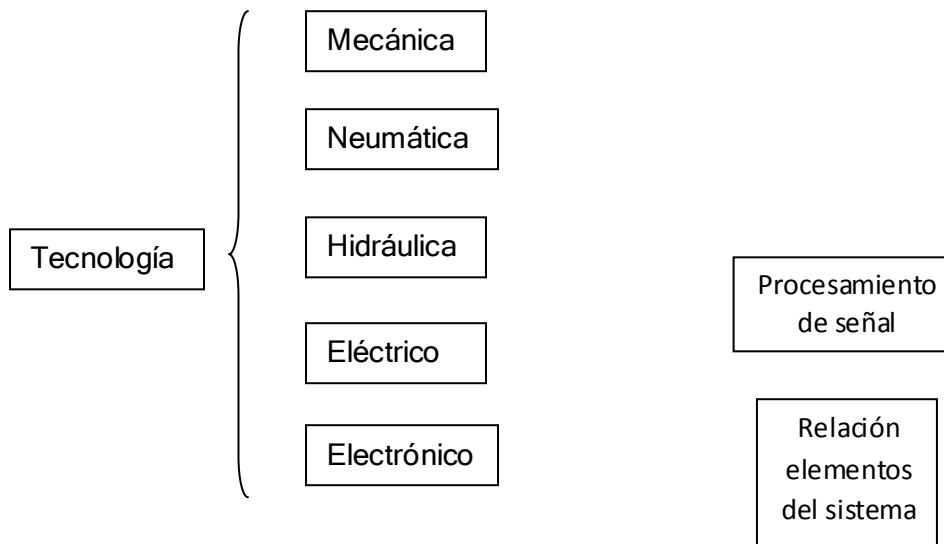
**$y$ :** Salidas.-Es una variable del sistema cuya magnitud o condición se mantiene o controla dentro de algún valor deseado.

**controlador:** Dispositivo que compara la referencia con la variable controlada y determina la acción correctiva.

Conforme los sistemas se hacen más complejos, deben considerarse en la estructura las interrelaciones de muchas variables controladas (sistema de control multivariable).

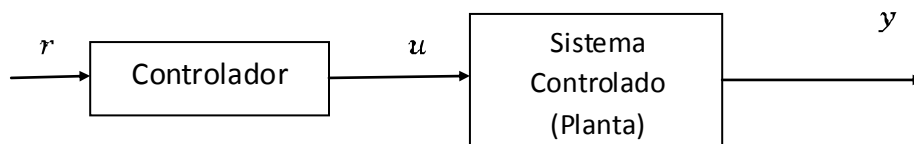
### 1.3. Tipos de Sistemas de Control

Varios son los criterios que pueden seguirse para clasificar los sistemas de control: en función de que el estado de la salida intervenga o no en la acción de control (lazo abierto o lazo cerrado); según las tecnologías puestas en juego (mecánicos, neumáticos, hidráulicos, eléctricos y electrónicos); atendiendo a las técnicas de procesamiento de la señal (analógicos y digitales); según la forma de establecer la relación entre los elementos del sistema (cableados y programados), etc. Sin embargo considerando dos topologías de control generales:



**Sistemas en lazo abierto.-** También llamados sistemas no realimentados, En este tipo de sistema la variable de salida (variable controlada) no tiene efecto sobre la acción de control (variable de control).

Los elementos de un sistema de control en lazo abierto se pueden dividir en dos partes: el controlador y el sistema controlado (planta). Una señal de comando o referencia  $r$  se aplica al controlador, cuya salida actúa como señal actuante  $u$ ; la señal actuante controla la planta de tal forma que la variable de salida  $y$  (variable controlada) se desempeñe de acuerdo con estándares establecidos. En presencia de perturbaciones estos sistemas de control no cumplen su función adecuadamente.



*Fig.1.2.Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto*

### Ejemplos:

- Lavadora:
  - Funciona sobre una base de tiempos
  - Variable de salida “limpieza de la ropa” no afecta al funcionamiento de la lavadora.
- Semáforos de una ciudad
  - Funcionan sobre una base de tiempo
  - Variable de salida “estado del tráfico” no afecta el funcionamiento del sistema.

**Sistemas en lazo cerrado.-** En este tipo de sistema la variable de salida (variable controlada) tiene efecto sobre la acción de control (variable de control).

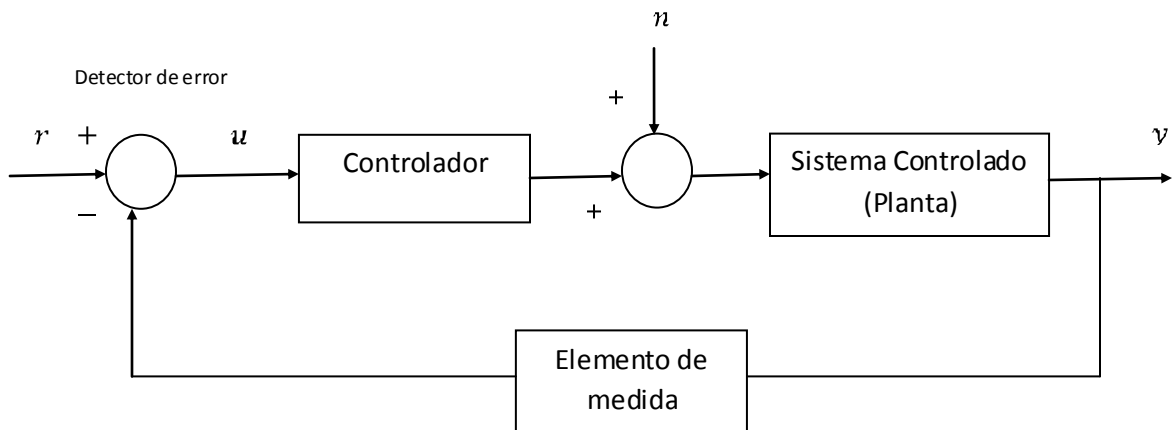


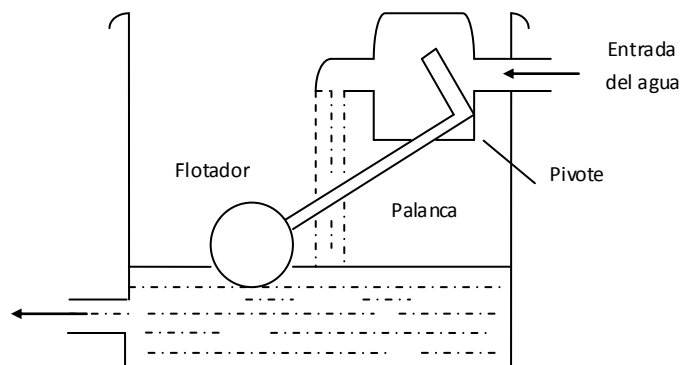
Fig.1.3. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado (con realimentación)

La entrada de referencia  $r$ , proporciona la salida deseada, la salida  $y$  debe estar de acuerdo con el valor de referencia  $r$ , y cualquier diferencia tal como la producida por  $n$ , es detectada por el Elemento de medida y el Detector de error (o elemento de comparación). El controlador operará sobre la diferencia y producirá una señal para corregir el error.

### Ejemplos:

- **Control automático del nivel del agua**

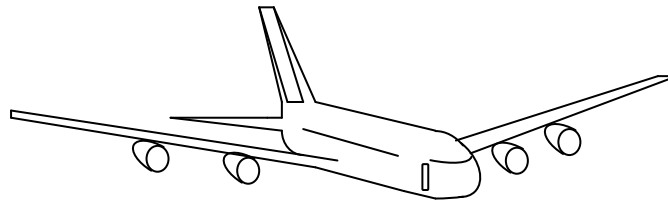
- Variable controlada: nivel del agua en el tanque
- Valor de referencia: ajuste inicial del flotador y posición de la palanca
- Elemento de Comparación: la palanca
- Señal de error: diferencia entre el valor real y la posición inicial de la palanca
- Controlador: palanca con pivote y la tapadera con la que abre o cierra el paso del agua.
- Planta: nivel del agua en el tanque
- Dispositivo de medición: flotador y palanca



*Fig.1.4.Control automático del nivel del agua*

- **El mecanismo de un piloto automático**

La entrada es la dirección especificada, la cual se puede ajustar con un marcador u otro instrumento en el tablero de control del avión, y la salida es la dirección real, la cual se determina mediante los instrumentos de navegación automática. Un dispositivo de comparación supervisa continuamente la entrada y la salida. Cuando hay correspondencia entre la dos, no se requiere ninguna acción de control. Cuando existe una diferencia entre la entrada y la salida, el dispositivo de comparación envía una señal de acción de control al controlador, el mecanismo de piloto automático. El controlador suministra las señales apropiadas a los mecanismos de control del avión para reducir la diferencia entrada-salida. La retroalimentación se puede efectuar mediante conexiones eléctricas o mecánicas de los instrumentos de navegación, que determinan la dirección, al dispositivo de comparación. En la práctica, el dispositivo de comparación puede integrarse dentro del dispositivo del piloto automático.



*Fig.1.5.Piloto automático*

#### **1.4. Lazo cerrado VS Lazo abierto**

Las ventajas de tener una trayectoria de realimentación y, por lo tanto, un sistema en lazo cerrado en lugar de un sistema en lazo abierto se pueden resumir de la manera siguiente:

- Más exacto en la igualación de los valores real y requerido para la variable.
- Menos sensible a las perturbaciones
- Menos sensible a cambios en las características de los componentes.
- La velocidad de respuesta se incrementa y, por lo tanto, el ancho de banda es mayor, es decir, el intervalo de frecuencias en los que el sistema responderá.

Pero hay algunas desventajas:

- Existe una gran posibilidad de inestabilidad.
- El sistema es más complejo y, por lo tanto, no sólo más caro, sino más propenso a descomposturas.

### 1.5. Historia del Control Automático

Desarrollo histórico	
1769	Máquina de vapor y controlador desarrollado por James Watt. La máquina de vapor de Watt se utiliza con frecuencia para marcar el comienzo de la Revolución Industrial en Gran Bretaña. Durante la Revolución Industrial, se produjeron grandes logros en el desarrollo de la mecanización una tecnología que precede a la automatización.
1800	El concepto de Eli Whitney de fabricación de piezas intercambiables se demostró en la producción de fusiles. El desarrollo de Whitney se considera a menudo como el comienzo de la producción en masa.
1868	J.C. Maxwell formula un modelo matemático para el controlador de la máquina de vapor.
1913	Introducción de la máquina de ensamblaje mecanizado de Henry Ford para la producción de automóviles.
1927	H.W. Bode analiza los amplificadores realimentados.
1932	H. Nyquist desarrolla un método para analizar la estabilidad de sistemas.
1952	Control numérico desarrollado en el Massachusetts Institute of Technology para el control de ejes de máquinas herramientas.
1954	George Devol desarrolla el concepto de “transferencia de artículos programados” considerado como el primer diseño de robot industrial.
1960	Introducido el primer robot Unimate, basado en los diseños de Devol. Unimate se instaló en 1961 para atender máquinas de fundición.
1970	Desarrollados los modelos de variables de estado y el control óptimo.
1980	Estudios amplios sobre el diseño de sistemas de control robusto.
1990	Empresas de fabricación orientadas a la exportación apuestan por la automatización.
1994	Uso generalizado de los sistemas de control con realimentación en los automóviles. En los procesos de fabricación se demandan sistemas fiables y robustos.
1997	El primer vehículo de exploración autónoma, conocido como <i>Sojourner</i> , explora la superficie marciana.
1998-2003	Avances en micro y nanotecnología. Se desarrollan las primeras micromáquinas inteligentes y se crean nanomáquinas que funcionan.

Fuente: Dorf, R.C., and Bishop, R.H., *Modern Control Systems*

# 2. La Transformada de Laplace

## 1.1. Introducción

En el estudio de los sistemas de control es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo, esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales para representar matemáticamente el comportamiento de los sistemas en el tiempo.

Para facilitar y sistematizar la resolución de tales ecuaciones se emplea extensamente el método de la Transformada de Laplace. Esencialmente, la transformación de Laplace elimina la variable independiente (generalmente el tiempo) de las ecuaciones diferenciales, sustituyendo en su lugar el operador " $s$ ". Entonces es posible manipular la ecuación diferencial mediante reglas algebraicas simples para obtener la solución en el dominio de  $s$ . La solución final se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace.

La transformada de Laplace se presenta en dos variedades, 1) unilateral o de un lado y 2) bilateral o de dos lados. La transformada de Laplace unilateral es una herramienta conveniente en la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. La bilateral ofrece conocimiento respecto a características del sistema tales como estabilidad, causalidad y respuesta en frecuencia. El papel fundamental de la transformada de Laplace en la ingeniería es el análisis transitorio y de estabilidad de sistemas LIT causales descritos mediante ecuaciones diferenciales.

## 1.2. Definición.-

La transformada de Laplace de  $f(t)$  es:



$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

y la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  es:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión  $F(s)$  (dominio de Laplace) a partir de  $f(t)$  (dominio del tiempo) y viceversa

### 1.3. Transformada de Laplace unilateral.-

Se basa sólo en porciones de tiempo positivo ( $t > 0$ ), en esta se elimina la ambigüedad de la transformada bilateral. Asimismo, es posible utilizar la propiedad de diferenciación de la transformada de Laplace unilateral para analizar el comportamiento de un sistema causal descrito por una ecuación diferencial con condiciones iniciales. Éste es el uso más común para la transformada unilateral en aplicaciones de ingeniería.

#### Definición

Sea  $f(t)$  una función definida para  $t > 0$ , su transformada de Laplace unilateral se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Donde  $s$  es una variable compleja  $s = \sigma + j\omega$ . Se dice que la Transformada de Laplace de  $f(t)$  existe si la integral converge.

### 1.4. Transformadas de funciones típicas

- Funciones Exponenciales

Forma general:  $f(t) = ke^{at}$

Donde:

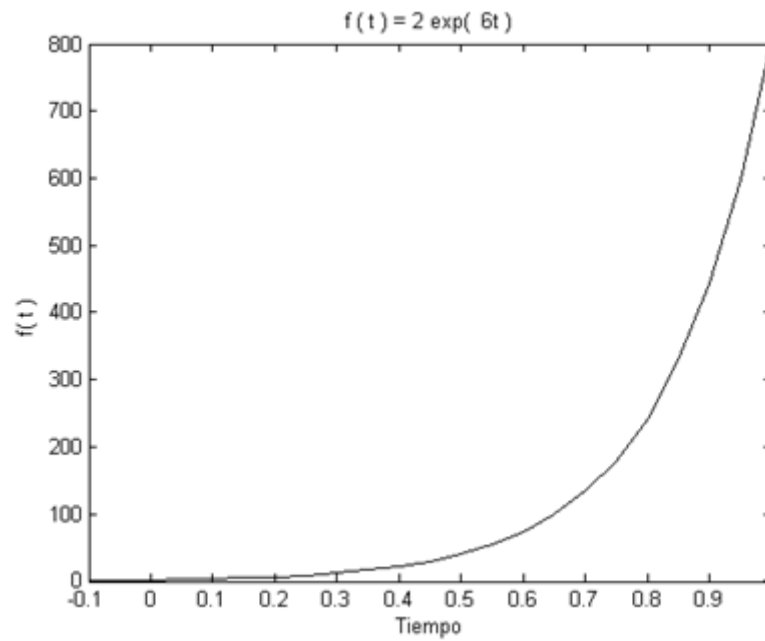
$k$  : Representa la amplitud de la función exponencial medida en el tiempo  $t = 0$  s

$a$  : Parámetro real, se presentan dos casos

1º Crecimiento exponencial,  $a > 0$

2º Decaimiento exponencial,  $a < 0$

➤ Si:  $f(t) = ke^{at}$



*Crecimiento exponencial en tiempo continuo*

Por definición se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} k e^{at} e^{-st} dt$$

$$= k \int_{0+}^{\infty} e^{at-st} dt = k \int_{0+}^{\infty} e^{t(a-s)} dt$$

$$= \frac{k}{a-s} \int_{0+}^{\infty} e^{t(a-s)} (a-s) dt$$

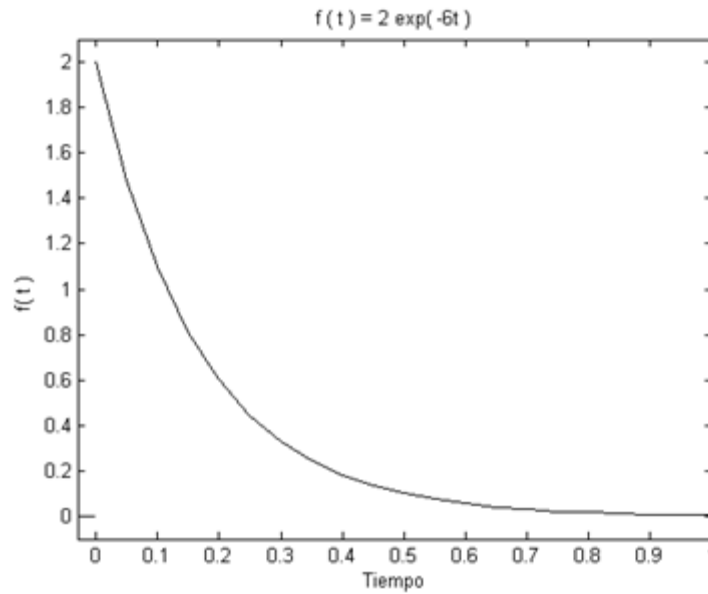
$$= \frac{k}{a-s} [e^{t(a-s)}]_0^{\infty}$$

$$= \frac{k}{a-s} [e^{\infty(a-s)} - e^{0(a-s)}]$$

$$= \frac{k}{a-s} [0 - 1]$$

$$\mathcal{L}[ke^{at}] = k \frac{1}{s-a}$$

➤ Si:  $f(t) = k e^{-at}$



*Decaimiento exponencial en tiempo continuo*

Por definición se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} k e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= k \int_{0+}^{\infty} e^{-at-st} dt = k \int_{0+}^{\infty} e^{-t(a+s)} dt$$

$$= \frac{k}{-(a+s)} \int_{0+}^{\infty} -e^{-t(a+s)} (a+s) dt$$

$$= \frac{k}{-(a+s)} [e^{-t(a+s)}]_0^{\infty}$$

$$= \frac{k}{-(a+s)} [e^{-\infty(a+s)} - e^{-0(a+s)}]$$

$$= \frac{k}{-(a+s)} [0 - 1]$$

$$\mathcal{L}[k e^{-at}] = k \frac{1}{s+a}$$

- Función Senoidal

Forma General:  $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

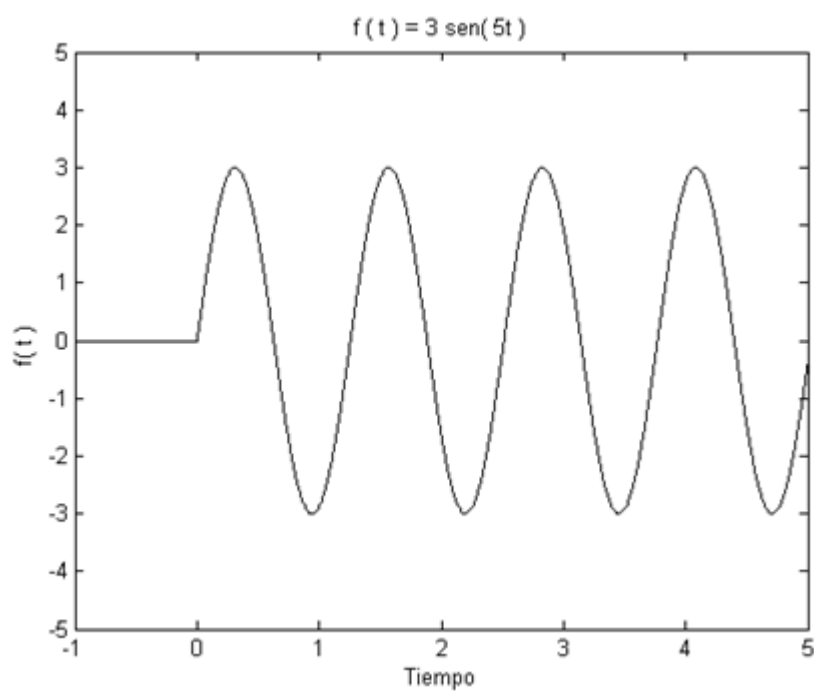
Donde:

$A$ : Amplitud

$\omega$ : Frecuencia en  $\text{rad/s}$

$\phi$ : Angulo de fase en *radianes*

➤ Si:  $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$ , con  $\phi = 0$



Por definición se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} A \operatorname{sen}(\omega t) e^{-st} dt$$

$$\text{asignamos } I = \int_{0+}^{\infty} A \operatorname{sen}(\omega t) e^{-st} dt$$

resolviendo por partes:

$$u = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$du = A \cos(\omega t) \omega dt$$

$$dv = e^{-st} dt$$

$$\int dv = \int e^{-st} dt$$

$$v = \frac{1}{-s} e^{-st}$$

$$I = A \operatorname{sen}(\omega t) \frac{1}{-s} e^{-st} - \int \frac{1}{-s} e^{-st} A \cos(\omega t) \omega dt$$

$$I = -A \operatorname{sen}(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} + \underbrace{\frac{A\omega}{s} \int e^{-st} \cos(\omega t) \omega dt}_{I_1} \dots (*)$$

$$\text{En } I_1 = \int e^{-st} \cos(\omega t) \omega dt$$

resolviendo por partes:

$$u = \cos(\omega t)$$

$$dv = e^{-st} dt$$

$$du = -\operatorname{sen}(\omega t) \omega dt$$

$$\int dv = \int e^{-st} dt$$

$$v = \frac{1}{-s} e^{-st}$$

$$I_1 = \cos(\omega t) \frac{1}{-s} e^{-st} - \int -\frac{1}{-s} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) \omega dt$$

$$I_1 = -\cos(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{s} \int e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

$$I_1 = -\cos(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \underbrace{\frac{\omega}{As} \int A e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt}_I \dots (**)$$

(\*\*) en (\*)

$$I = -A \operatorname{sen}(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} + \frac{A\omega}{s} \left[ -\cos(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \frac{\omega}{As} I \right]$$

$$I = -Asen(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \frac{A\omega}{s^2} \cos(\omega t) e^{-st} - \frac{A\omega^2}{As^2} I]$$

$$I(1 + \frac{\omega^2}{s^2}) = -Asen(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \frac{A\omega}{s^2} \cos(\omega t) e^{-st}$$

$$I\left(\frac{s^2 + \omega^2}{s^2}\right) = -Asen(\omega t) \frac{1}{s} e^{-st} - \frac{A\omega}{s^2} \cos(\omega t) e^{-st}$$

$$I(s^2 + \omega^2) = -As sen(\omega t)e^{-st} - A\omega \cos(\omega t) e^{-st}$$

$$I = \left[ \frac{-As sen(\omega t)e^{-st} - A\omega \cos(\omega t) e^{-st}}{s^2 + \omega^2} \right]_0^\infty$$

$$I = \frac{-As sen(\omega, \infty)e^{-s, \infty} - A\omega \cos(\omega, \infty) e^{-s, \infty}}{s^2 + \omega^2} - \left( \frac{-As sen(\omega, 0)e^{-s, 0} - A\omega \cos(\omega, 0) e^{-s, 0}}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$I = 0 - \left( \frac{-A\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

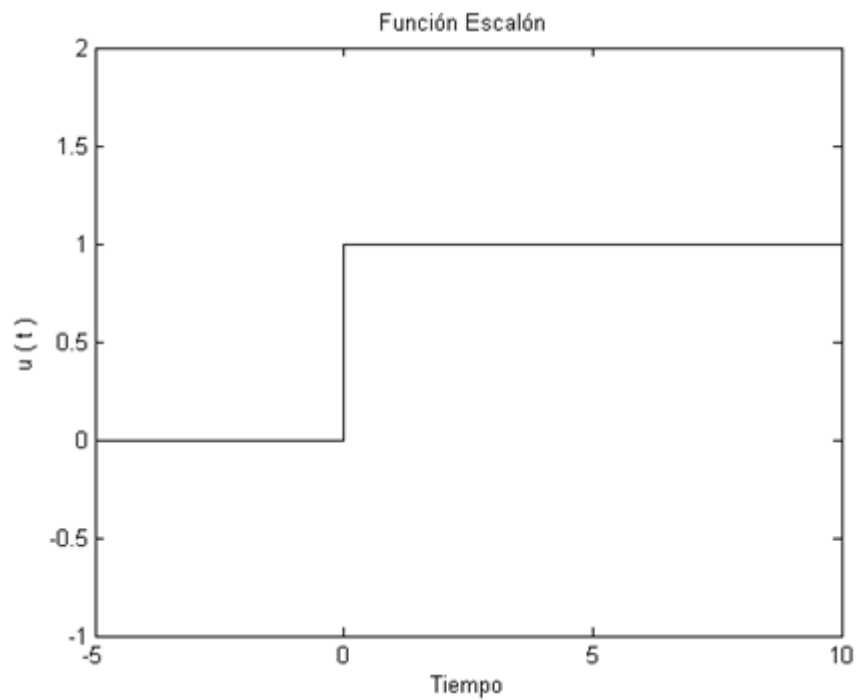
$$I = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[Asen(\omega t)] = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Función Escalón:

Denotada comúnmente por:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Por definición se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} u(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{0+}^{\infty} 1 e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{-s} \int_{0+}^{\infty} -e^{-st} s dt \\
 &= \left[ \frac{1}{-s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{-s} e^{-s \cdot \infty} - \left( \frac{1}{-s} e^{-s \cdot 0} \right) = 0 - \left( \frac{1}{-s} \right) = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

- Función Impulso:

Denotada comúnmente por:

$$\delta(t) = 0, \quad \text{para } t \neq 0$$

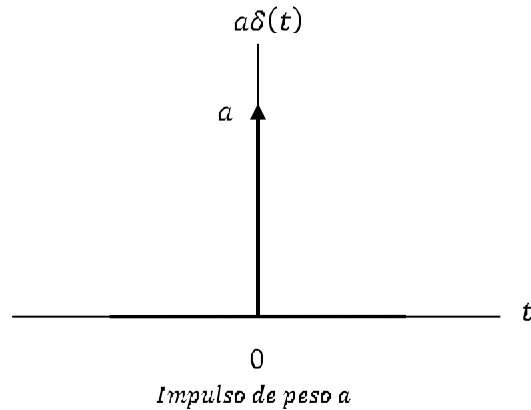
y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

El símbolo grafico para un impulso se describe:



Nótese que el impulso  $\delta(t)$  es la derivada de la función escalón  $u(t)$  con respecto al tiempo. Inversamente, la función escalón  $u(t)$  es la integral del impulso  $\delta(t)$  con respecto al tiempo. Hay una cuestión mas que debe atenderse: No podemos generar una función de impulso físico, ya que correspondería a una de amplitud infinita en  $t = 0$  y que es cero en cualquier otro lado. Sin embargo, la función de impulso sirve a un propósito matemático brindando una aproximación a una función física de extremadamente corta duración y alta amplitud.

Por definición se tiene:

$$\triangleright f'(t) = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = [e^{-st}]_{t=0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

- Función Rampa

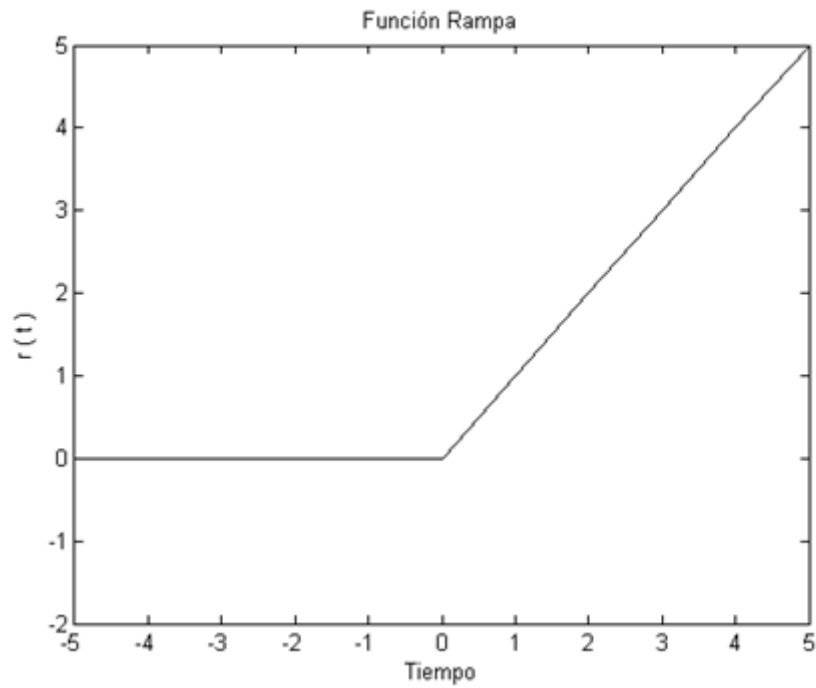
Denotada comúnmente por:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ó

$$r(t) = t u(t)$$





Note que la integral de la función escalón  $u(t)$  es una función rampa de pendiente unitaria.

$$\triangleright f(t) = r(t)$$

Por definición se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$\text{asignamos: } I = \int_{0+}^{\infty} t e^{-st} dt$$

resolviendo por partes:

$$u = t$$

$$du = dt$$

$$dv = e^{-st} dt$$

$$\int dv = \int e^{-st} dt$$

$$v = \frac{1}{-s} e^{-st}$$

$$I = \frac{t}{-s} e^{-st} - \int \frac{1}{-s} e^{-st} dt$$

$$I = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} \int -s e^{-st} dt$$

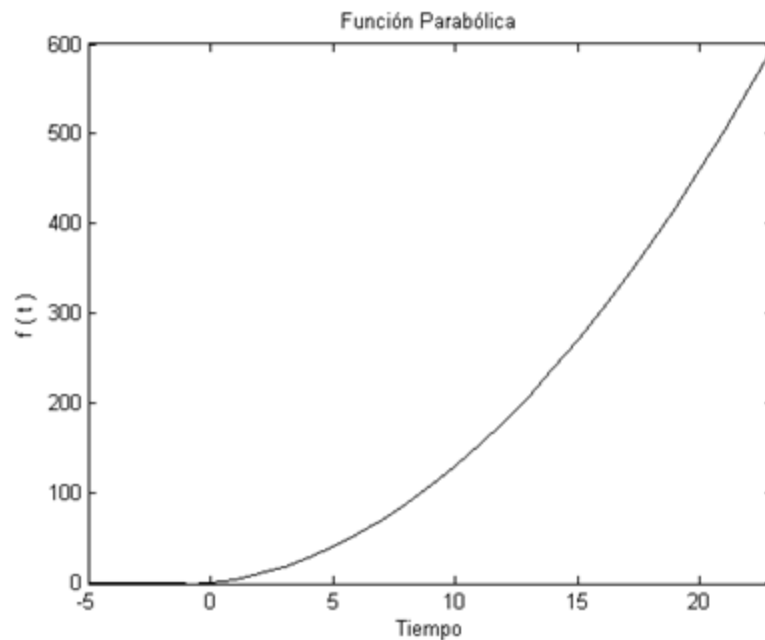
$$I = \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{\infty}{s} e^{-s \cdot \infty} - \frac{e^{-s \cdot \infty}}{s^2} - \left( -\frac{0}{s} e^{-s \cdot 0} - \frac{e^{-s \cdot 0}}{s^2} \right)$$

$$I = 0 - \left( -\frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

- Funciones Parabólicas

$$f(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{➤ } f(t) = t^n$$

Por definición se tiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

$$\text{asignamos: } I = \int_{0+}^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

resolviendo por partes:

$$u = t^n$$

$$dv = e^{-st} dt$$

$$du = n t^{n-1} dt$$

$$\int dv = \int e^{-st} dt$$

$$v = \frac{1}{-s} e^{-st}$$

$$I = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

$$I = -\frac{1}{s} e^{-s \cdot \infty} \infty^n - \left( -\frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} 0^n \right) + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$I = 0 + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$I = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

Nótese que resulta una expresión recursiva, entonces:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

## 1.5. Propiedades

Las aplicaciones de la transformada de Laplace, en muchos casos se simplifican al emplear las propiedades de la transformada.

Si:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$$

Tabla: Propiedades de la Transformada de Laplace

$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s), \quad k = cte$
$\mathcal{L}[f(t) \pm g(t)] = F(s) \pm G(s)$
$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0+), \quad \text{donde: } f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
$\mathcal{L}\left[\int \dots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[ \int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0-}$
$\mathcal{L}[f(t-\alpha)u(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s), \quad \alpha \geq 0$

$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s), \text{ si } \int_0^{\infty} f(t)dt \text{ existe}$
$\mathcal{L}[e^{\mp \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha)$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$
$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n > 0)$
$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

Tabla: Transformada de Laplace comunes

Función del tiempo	Transformada de Laplace
<i>Impulso Unitario</i> $\delta(t)$	1
<i>Escalón Unitario</i> $u(t)$	$1/s$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n > 0$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n e^{-at}, \quad n > 0$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\text{senh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$

$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right), \quad 0 < \xi < 1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$
$- \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \left( \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t - \phi \right),$ $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$ $0 < \xi < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \left( \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t + \phi \right),$ $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$ $0 < \xi < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$
$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)), \quad \omega_1^2 \neq \omega_2^2$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$

Fuente: Ogata, K., *Modern Control Engineering*

### Ejemplo 01

#### 1.6. Transformada inversa de Laplace mediante la expansión en fracciones parciales.

En el estudio de los sistemas LIT, encontramos con frecuencia transformadas de Laplace que son un cociente de polinomios de  $s$ . Para funciones simples, la operación de la transformada inversa de Laplace se puede llevar a cabo simplemente refiriéndose a la tabla de transformadas de Laplace, sin embargo para funciones un tanto complicadas primero se debe realizar una expansión en fracciones parciales para luego utilizar directamente las tablas.

Si:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}, \quad m > n$$

Los métodos serán dados para los casos asociados a la raíces del denominador  $D(s)$  o polos de  $F(s)$ :

#### Caso I: Polos reales simples

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{(s - k_1)(s - k_2) \dots (s - k_m)}$$

$$k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m$$

Es posible representar  $F(s)$  como una suma de términos sencillos utilizando una expresión en fracciones parciales del siguiente modo:

$$F(s) = \frac{A}{s - k_1} + \frac{B}{s - k_2} + \dots + \frac{Z}{s - k_m}$$

Los coeficientes  $A, B, \dots, Z$  se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

#### Caso II: Polos reales múltiples

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{(s - k)^r}$$

Es posible representar  $F(s)$  como una suma de términos sencillos utilizando una expresión en fracciones parciales del siguiente modo:

$$F(s) = \frac{A}{s - k} + \frac{B}{(s - k)^2} + \frac{C}{(s - k)^3} + \dots + \frac{Z}{(s - k)^r}$$

#### Caso III: Polos complejos conjugados simples

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{(s - \alpha - j\omega)(s - \alpha + j\omega)}$$

Los dos términos asociados en una expansión en fracciones parciales son:

$$F(s) = \frac{A}{s - \alpha - j\omega} + \frac{Bs + C}{s - \alpha + j\omega}$$

## 1.7. Solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

Los métodos clásicos para encontrar la ecuación completa de una ecuación diferencial requieren la evaluación de las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales. Sin embargo, en el caso del método de la transformada de Laplace, no existe este requerimiento, porque las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en la transformada de Laplace de la ecuación diferencial.

Los sistemas que se van a considerar están descritos por modelos lineales, estacionarios, en tiempo continuo. Estos pueden representarse por una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$$n \geq m$$

(\*) Ecuación diferencial de un sistema de  $n$ -ésimo orden

Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial obtenemos:

$$\begin{aligned} & a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \left. \frac{d^l}{dt^l} y(t) \right|_{t=0^+} \\ &= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-1} b_k s^{k-1-l} \left. \frac{d^l}{dt^l} u(t) \right|_{t=0^+} \end{aligned}$$

6

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)U(s) - D(s)$$

Note que  $C(s) = 0$  si todas las condiciones iniciales son cero, y  $B(s)U(s) - D(s) = 0$  si la entrada es cero. Luego, resolviendo para  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{B(s)U(s) - D(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)}$$

$$Y(s) = Y_{(f)}(s) + Y_{(n)}(s)$$

El primer término  $Y_{(f)}(s)$ , representa la componente de la respuesta asociada a la entrada (respuesta forzada del sistema). El segundo término  $Y_{(n)}(s)$ , representa la componente de la salida debida a las condiciones iniciales (respuesta natural del sistema).

### 1.8. La Función de Transferencia y las Ecuaciones Diferenciales

Ecuación diferencial de un sistema de n-ésimo orden (\*) presentado anteriormente relaciona la señal de salida  $y(t)$  de un sistema con la señal de entrada cualquiera  $u(t)$  al mismo, y permite conocer la respuesta de dicho sistema a una señal de entrada determinada mediante su resolución. Sin embargo, el tratamiento analítico del sistema a través de la ecuación característica es en general complejo. Es por ello que se introduce el concepto de Función de Transferencia.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo se obtiene realizando la transformada de Laplace de la ecuación característica del sistema, con condiciones iniciales nulas.

Es decir:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

que puede expresarse alternativamente como:

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

$$Y(s)A(s) = U(s)B(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

La función  $G(s)$  es la función de transferencia del sistema, el cual representa el comportamiento dinámico del sistema mediante ecuaciones algebraicas en  $s$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Respuesta del sistema}}{\text{Funcion forzante}} = \frac{\text{"efecto"}}{\text{"causa"}}$$



## Consideraciones

- Considera la manera de relacionar las variables de salida y entrada de sistemas que se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo.
- Muy útil para elaborar predicciones asociados al sistema.
- Define completamente la respuesta total del sistema (características de estado estacionario y dinámico)
- Es una propiedad del sistema y es independiente de la entrada al sistema.
- Ceros del sistema: son las raíces de  $B(s) = 0$
- Polos del sistema: son las raíces del denominador *polinomio característico*  $A(s) = 0$

### 1.9. Las ecuaciones de Estado de la Función de Transferencia

Considere de manera conveniente la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) \\ = b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t) + \dots + b_1\frac{d}{dt}u(t) + b_0u(t)\end{aligned}$$

El cual puede ser representada por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Luego definimos las variables de estado:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u$$

y la señal de salida como una combinación lineal de los estados del sistema:

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + b_{n-1}x_n$$

Definiendo en forma matricial estos sistemas se obtiene la representación espacio estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ó

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Donde

*A: Matriz de evolución*

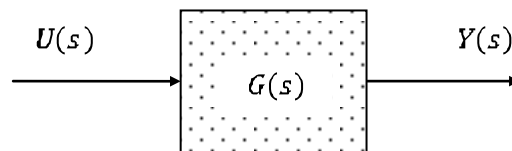
*B: Matriz de entrada*

*C: Matriz de salida*

*D: Matriz de ganancia directa = 0*

### 1.10. Representación Gráfica de las Funciones de Transferencia

Se representa por medio de los conocidos diagramas de bloques, ésta es una representación gráfica y abreviada de la relación de causa y efecto entre la entrada y salida de un sistema:



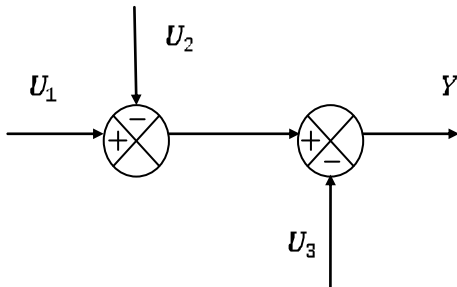
*Forma más simple de un diagrama de bloques*

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

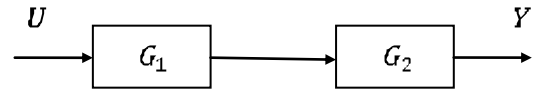
Donde, las flechas representan el flujo de las variables o señales de control y el interior del rectángulo la función de transferencia de un componente del sistema. Combinar o conectar los bloques de cada componente del sistema hace posible evaluar la interacción de todos esos componentes en el desempeño total del sistema.

Los diagramas de bloques se pueden tratar mediante ciertas reglas algebraicas:

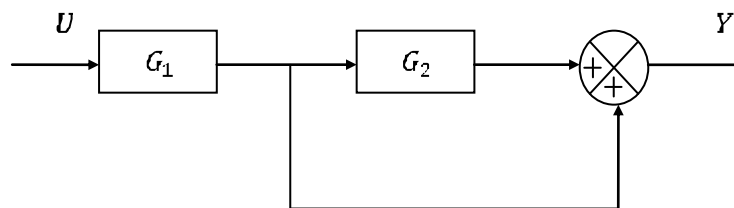
$$Y = U_1 - U_2 - U_3$$



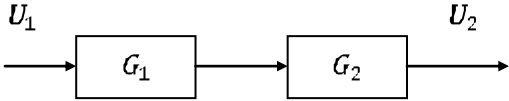
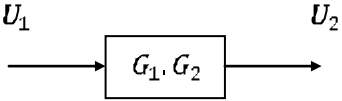
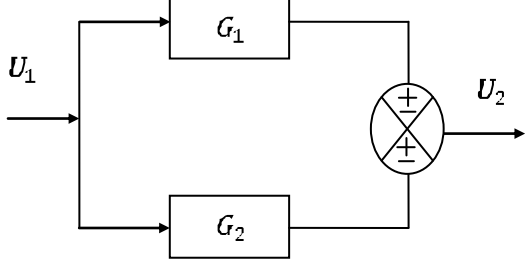
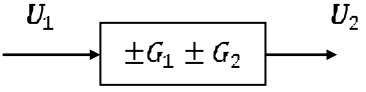
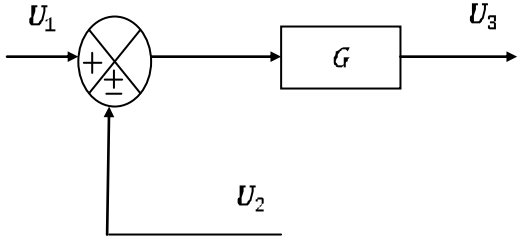
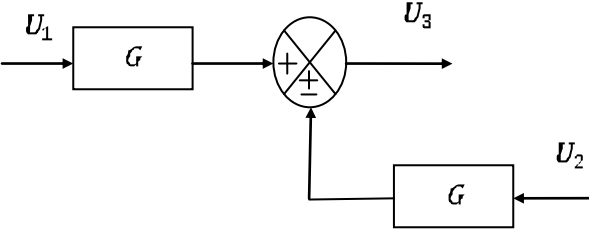
$$Y = G_2(G_1U)$$

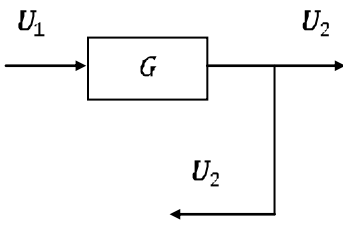
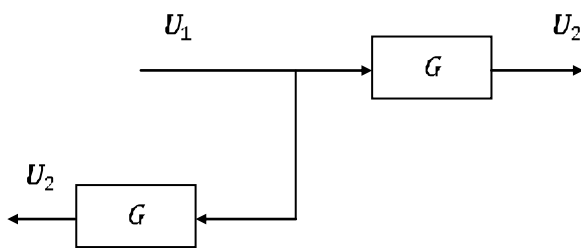
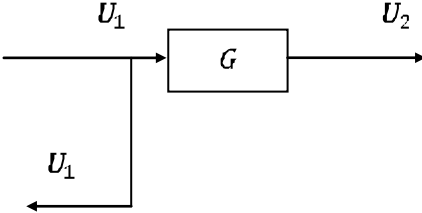
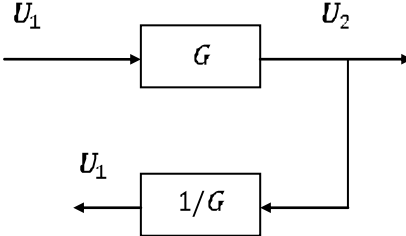
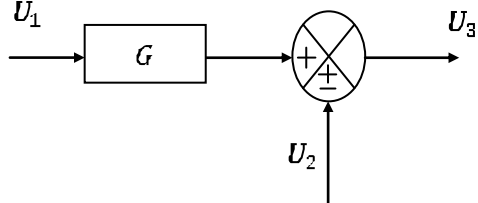
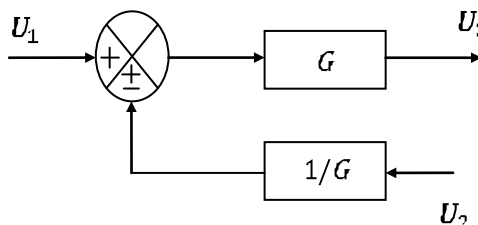
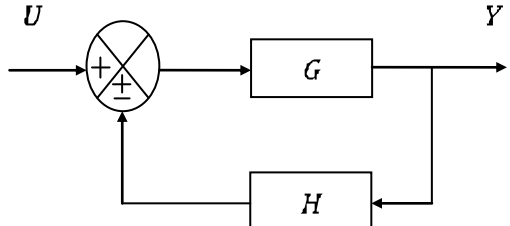
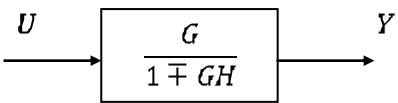


$$Y = G_2(G_1U) + G_1U$$



Los círculos son los *puntos de sumatoria*, en ésta se genera una salida unidireccional el cual es la suma algebraica de las flechas que ingresan asociados con sus respectivos signos. Generalmente resulta útil tener un bloque simple que represente la complejidad completa de todo el sistema, para ello se presenta algunas equivalencias para facilitar tal reducción.

Combinación de bloques en cascada	
	
Combinación de bloques en paralelo	
	
Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque	
	
Movimiento de un punto separación posterior a un bloque	

	
Movimiento de un punto separación anterior a un bloque	
	
Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque	
	
Eliminación de un lazo de realimentación	
	

Cordialmente,  
**Jimmy Osorez Ramos**  
Estudiante de Pre Grado FIS-UNCP  
[jimmy\\_030\\_56@hotmail.com](mailto:jimmy_030_56@hotmail.com)  
Huancayo, Diciembre 2009