Introducción a la Lógica Difusa

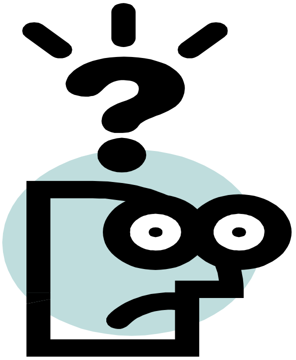
Tomás Arredondo Vidal

4/4/14

Introducción a la lógica difusa

Contenidos

- Conceptos y definiciones básicos de la lógica difusa
- Sets difusos y funciones de membresía
- Operaciones sobre sets difusos
- Inferencia usando lógica difusa



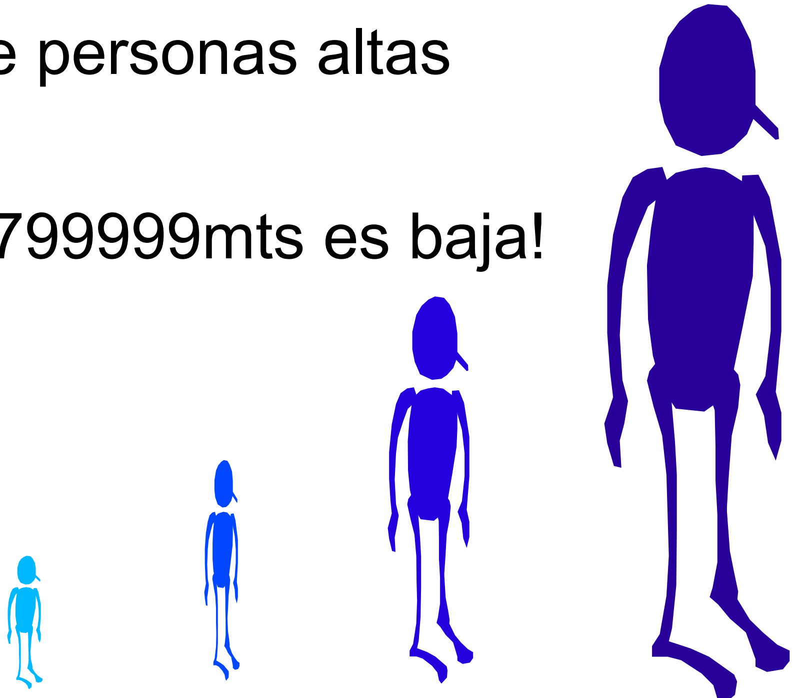
Introducción a la lógica difusa

Introducción

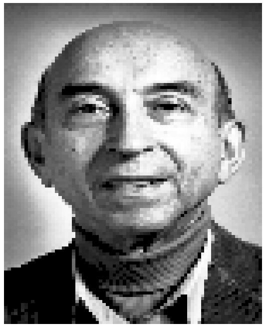
- Por ejemplo se considera a una persona como alta si mide mas de 1.80mts, pero de igual forma se considera a una persona como alta si mide 1.7999mts
- Esta consideración no existe en la logica tradicional que utiliza demarcaciones estrictas para determinar pertenencia en sets:
- Ejemplo: A es el set clásico de personas altas

  $A = \{ x \mid x > 1.8\}$

  Una persona que mide 1.799999mts es baja!



Introducción a la lógica difusa



Introducción (cont)

- La logica difusa es una extension de la logica tradicional (Booleana) que utiliza conceptos de pertenencia de sets mas parecidos a la manera de pensar humana
- El concepto de un subset difuso fue introducido por L.A. Zadeh en 1965 como una generalización de un subset exacto (crisp subset) tradicional.
- Los subsets exactos usan lógica Booleana con valores exactos como por ejemplo la lógica binaria que usa valores de 1 o 0 para sus operaciones.

Introducción a la lógica difusa

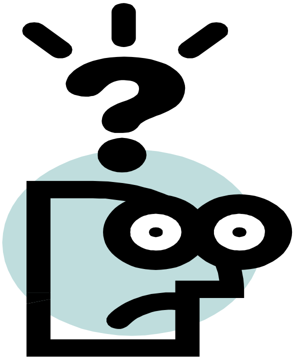
Introducción (cont)

- La lógica difusa no usa valores exactos como 1 o 0 pero usa valores entre 1 y 0 (inclusive) que pueden indican valores intermedios (Ej. 0, 0.1, 0.2, …,0.9,1.0, 1.1, …etc)
- La lógica difusa también incluye los valores 0 y 1 entonces se puede considerar como un superset o extensión de la lógica exacta.

Introducción a la lógica difusa

Contenidos

- Conceptos y definiciones básicos de la lógica difusa
- Sets difusos y funciones de membresía
- Operaciones sobre sets difusos
- Inferencia usando lógica difusa



Introducción a la lógica difusa

Set difuso

- Asumiendo que X es un set, un set difuso A en X es asociado con una función característica: $\mu_A(x)$

  $\mu_A(x)$: X -> [0, 1]

- La función característica es tipicamente denominada función de pertenencia (membership function).

Introducción a la lógica difusa

Set difuso (cont)

- Si X es una colección de objetos en el cual $x \in X$, un set difuso es un mapa $\mu_F(x) : X \text{->} [0, \alpha]$, en el cual a cada valor x la función $\mu_F(x)$ le asigna un numero entre los valores 0 a α.
- El set difuso es el set de pares ordenados:

  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Introducción a la lógica difusa

Set difuso (cont)

Ejemplos discretos y continuos:

A = {(0, 0.1), (1, 0.5), (2, 1), (3, 0.1), (4,0.8)}

B = {0.1/0, 0.5/1, 1/2, 0.1/3, 0.8/4}

C = $\{(x, \mu_C(x) | x \in X\}$, $\mu_C(x) = 1 / (1 + (x/10 - 5)^4)$

X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} es el set de hijos que puede tener una familia, entonces el set difuso D es “el numero razonable de hijos que puede tener una familia”

D = { (0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7),
(5, 0.3), (6, 0.2), (7, 0.1) }

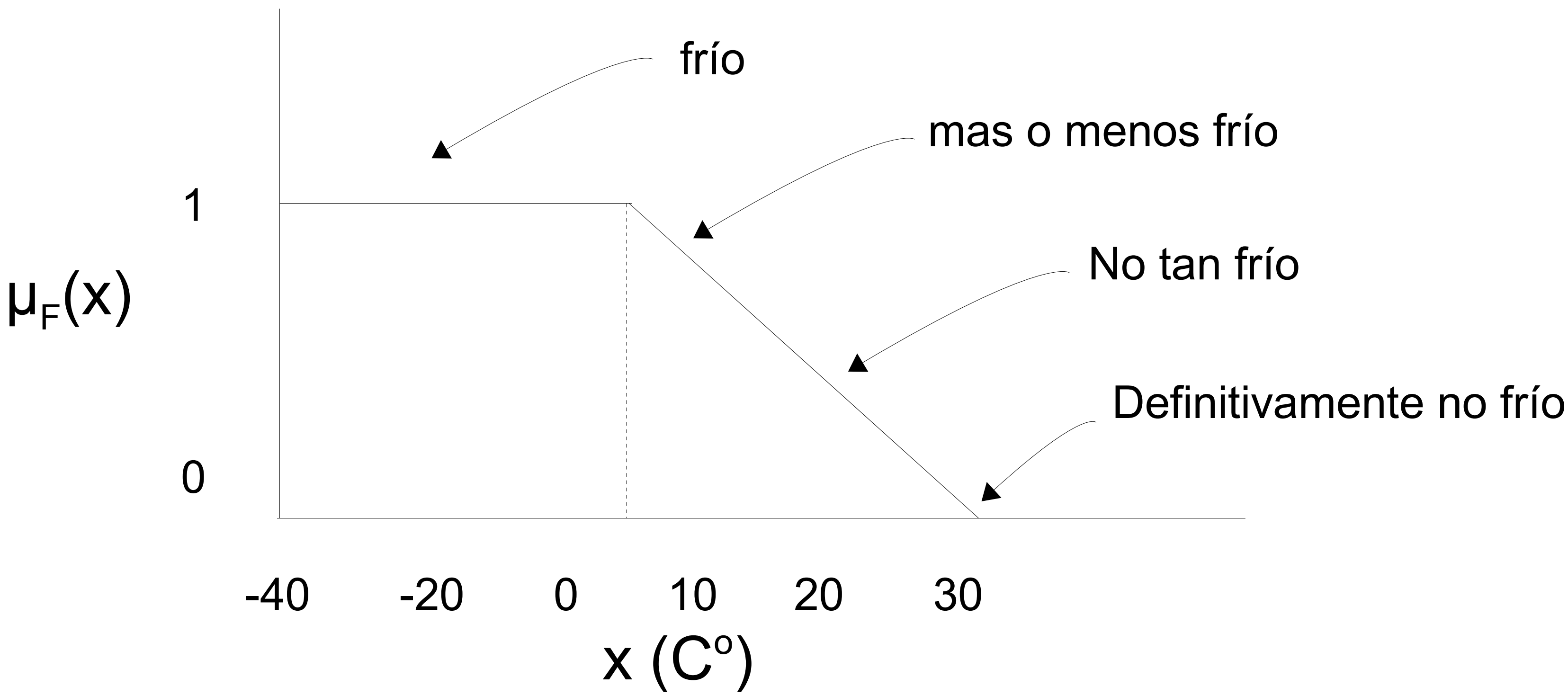
Introducción a la lógica difusa

Función de pertenencia (o membresía)

- El valor asignado por $\mu_F(x)$ corresponde al grado en el cual el valor x tiene el atributo F.
- Visto de otra manera la función $\mu_F(x)$ nos indica cual es el grado de pertenencia de x al atributo F.
- La función $\mu_F(x)$ se llama la función de pertenencia del atributo F.
- La función tiene que ver con un grado de ambigüedad sobre la característica de la variable que se esta midiendo pero no es una probabilidad

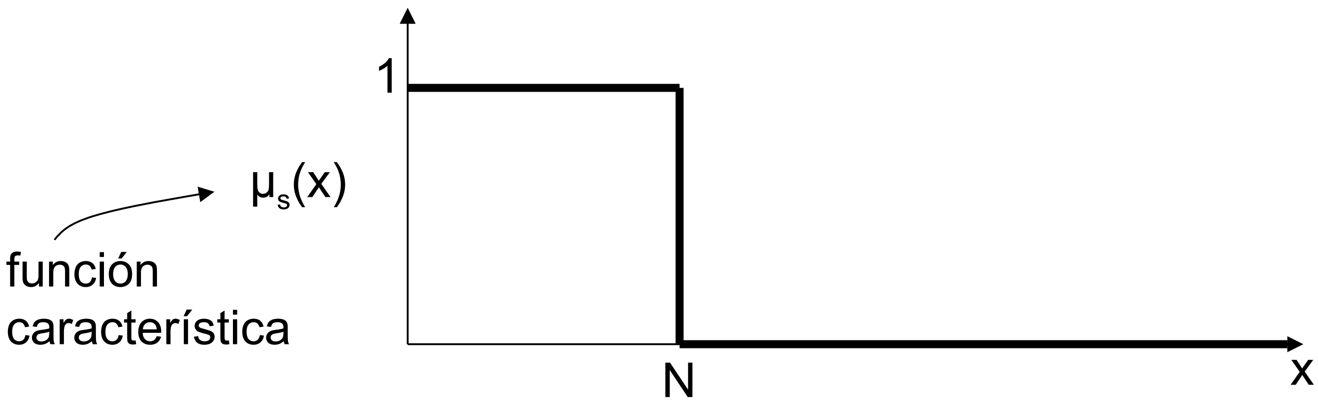
Función de pertenencia (cont)

- Ej: $\mu_F(x)$ corresponde al nivel de frío medido en la variable x



Introducción a la lógica difusa

Un set exacto (crisp set) :



$$\{S \subset X : 0 \leq S \leq N\}$$

par binario

$\mu_S : X \rightarrow \{0,1\}$

$\mu_S(x) = 1$ si x es un miembro de S

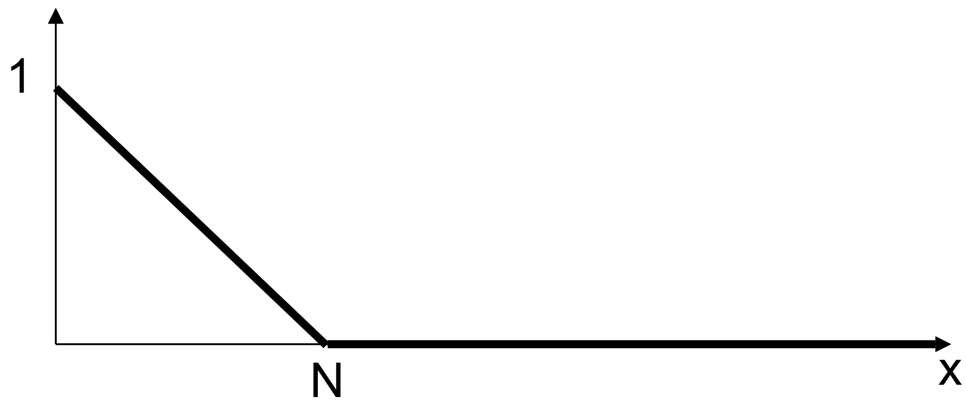
$\mu_S(x) = 0$ si x no es un miembro de S

Introducción a la lógica difusa

Un set difuso (fuzzy set):

función de
pertenencia

$\mu_s(x)$



subset

$$\{S \subset X : 0 \leq S \leq N\}$$

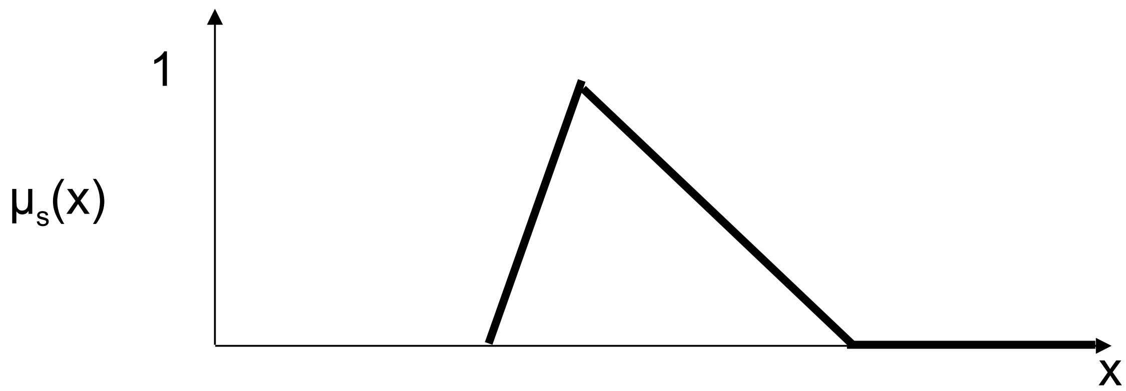
intervalo de valores entre cero y uno (inclusive)

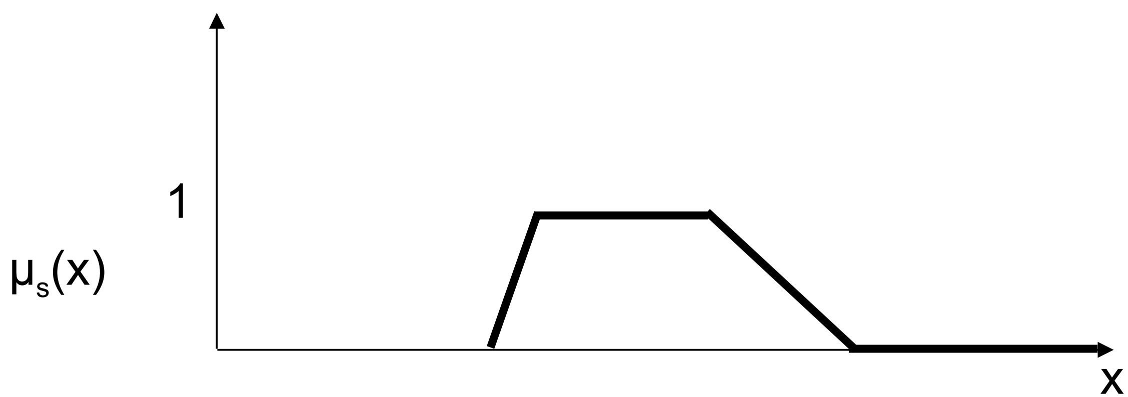
$\mu_S : X \rightarrow [0,1]$, $0 \leq \mu_S(x) \leq 1$

$\mu_S(x) = 0$ si x es 0% miembro de S,..., $\mu_S(x) = 0.10$ si x es 10% miembro de S,...,
$\mu_S(x) = 0.20$ si x es 20% miembro de S,...,$\mu_S(x) = 1$ si x es 100% miembro de S

Introducción a la lógica difusa

Otros sets difusos (cont):





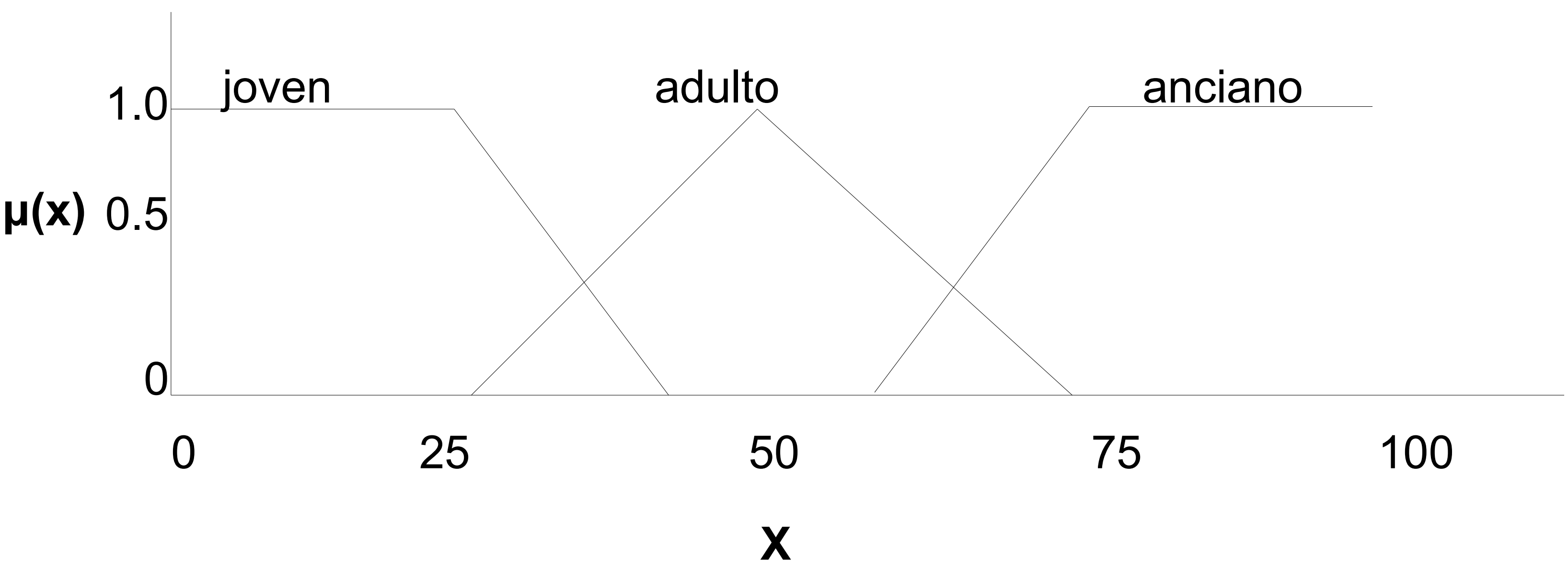
Hay muchas posibilidades de como representar un set difuso.

Introducción a la lógica difusa

Variables Lingüísticas

Se usan variables lingüísticas para analizar y modelar un sistemas:

Ej: Supongamos que X = “edad”, se pueden definir set difusos: “joven”, “adulto”, “anciano”



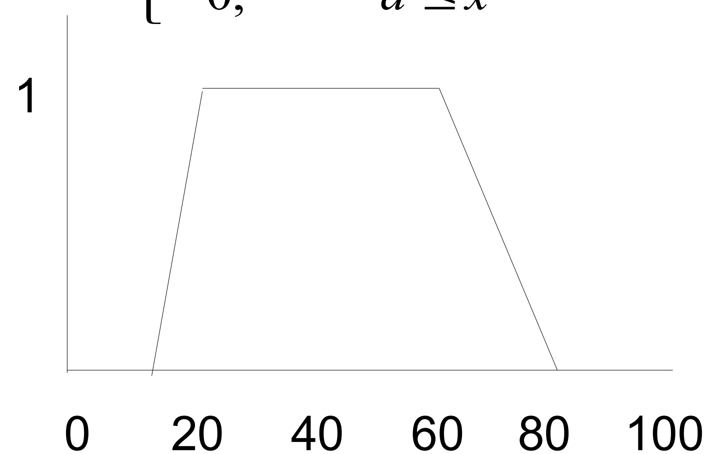
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia

- Función de pertenencia trapezoidal:

$$\mu_{trapesoidd}(x;a,b,c,d)=\begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & d \le x \end{cases}$$

Ej: $\mu_{\text{trapesoid}}$ (x; 10, 20, 60, 95)



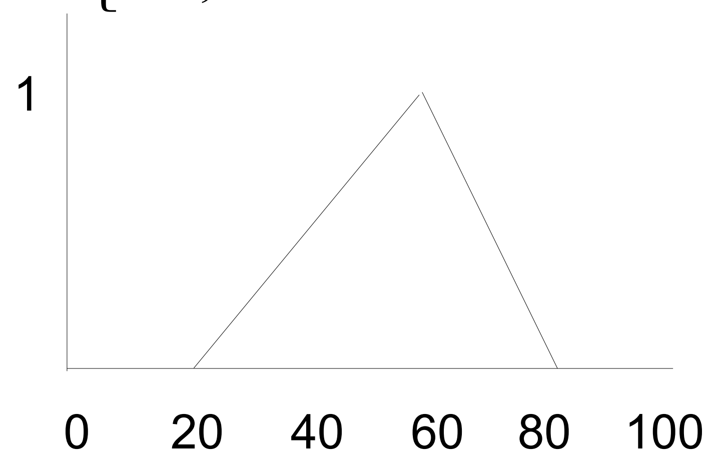
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Función de pertenencia triangular:

$$\mu_{triángulo}(x;a,b,c)=\begin{cases} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c \\ 0, & c\le x \end{cases}$$

Ej: $\mu_{triangle}$ (x; 20, 60, 80)

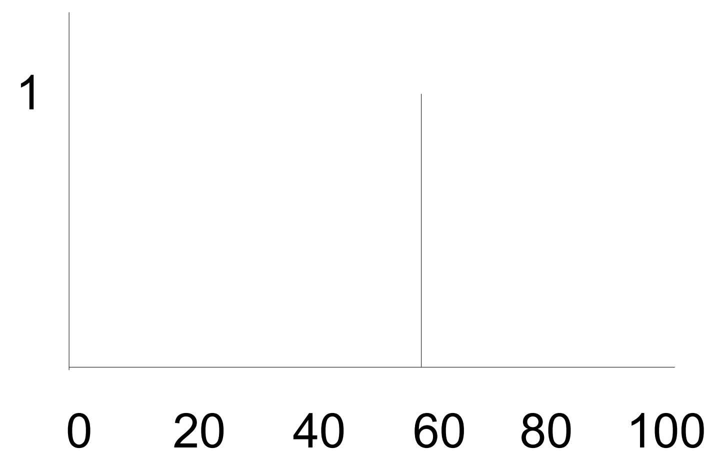


Funciones de pertenencia (cont):

- Función de pertenencia llamada un singleton, tiene un valor único cuando x = a (es como una función delta de Dirac):

$$\mu_s(x;a)=\begin{cases}0, & x=a\\ 1, & x\neq a\end{cases}$$

Ej: $\mu_{singleton}$ (x; 60)



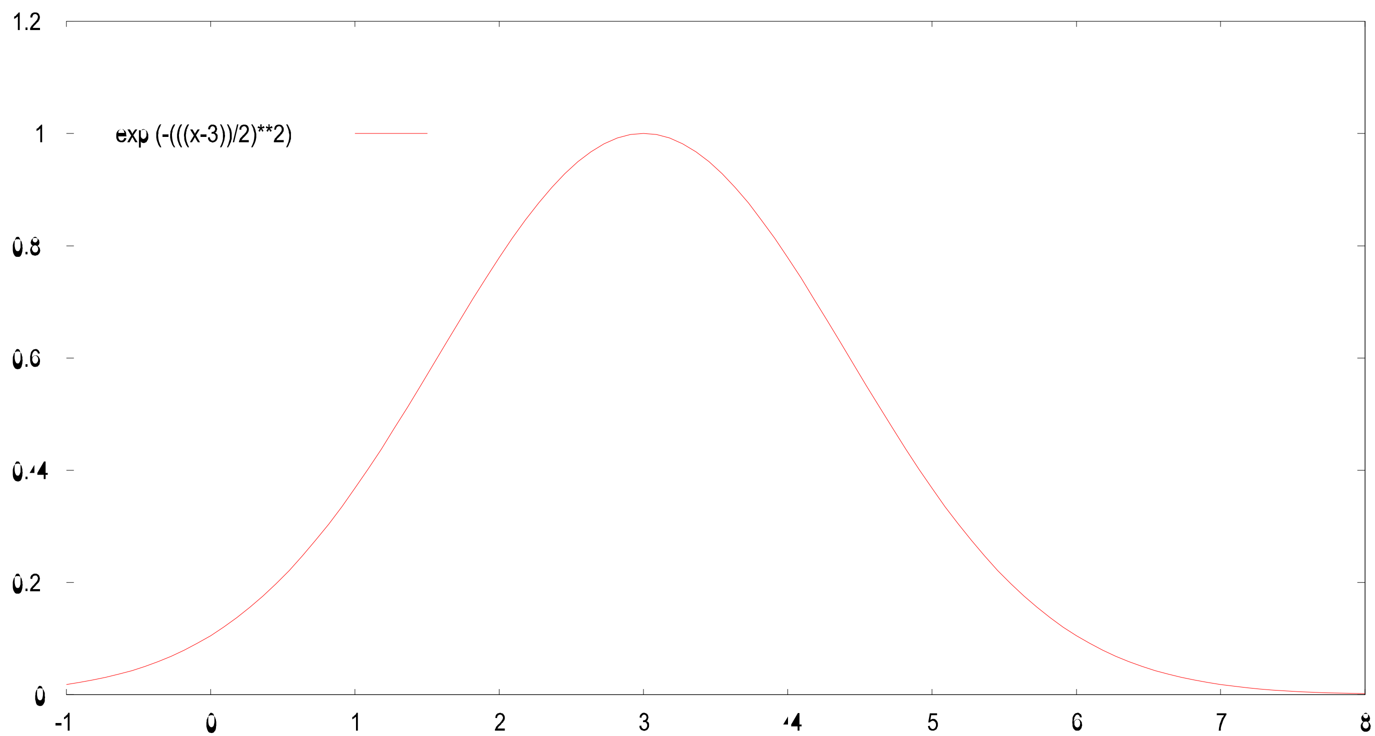
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Gausiana

$$\mu_{Gausiana}(x;c,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Ej: $\mu_{Gausiana}$ (x; 3, 1)



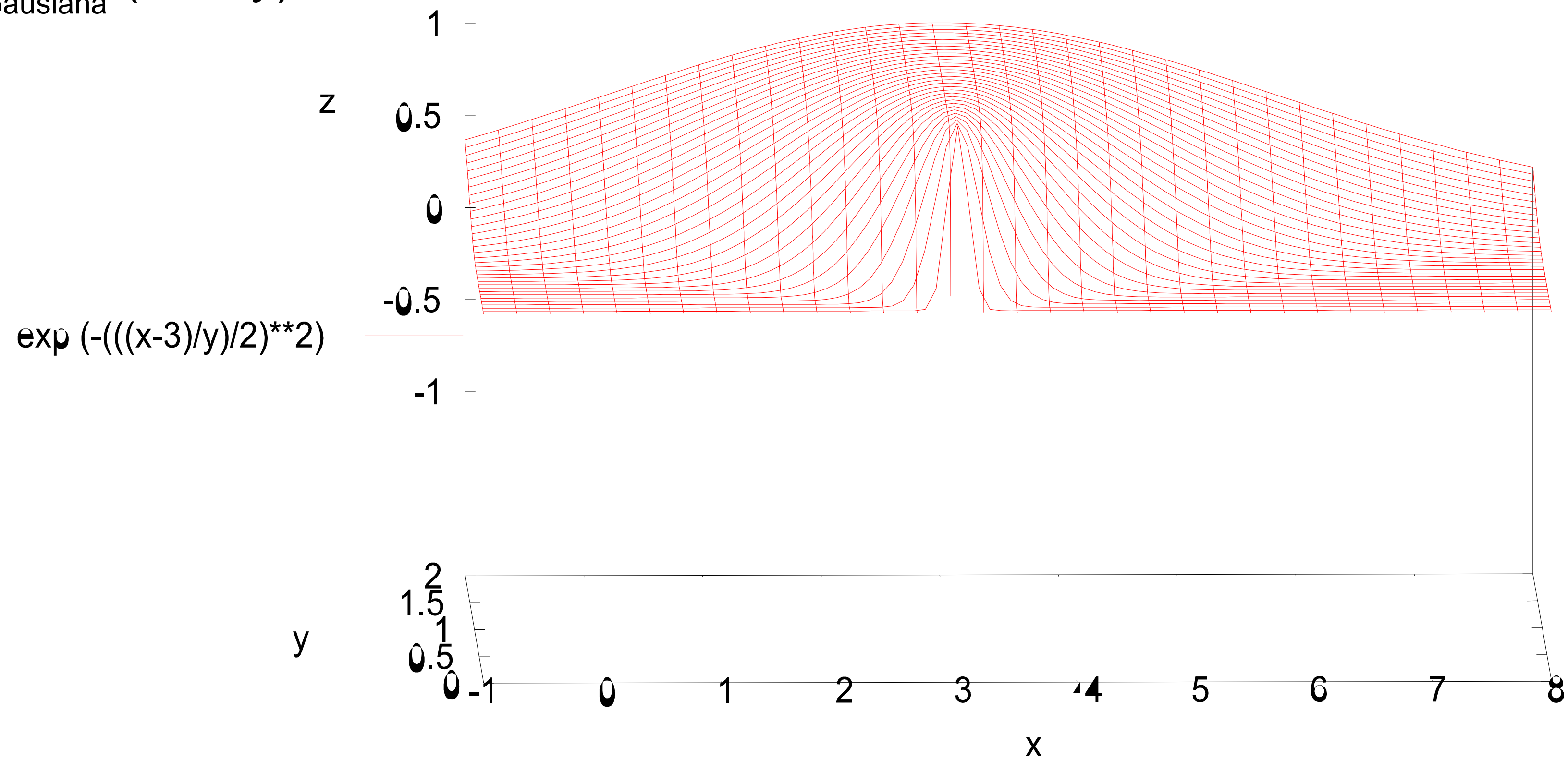
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Gausiana

$$\mu_{Gausiana}(x;c,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Ej: $\mu_{Gausiana}$ (x; 3, y)



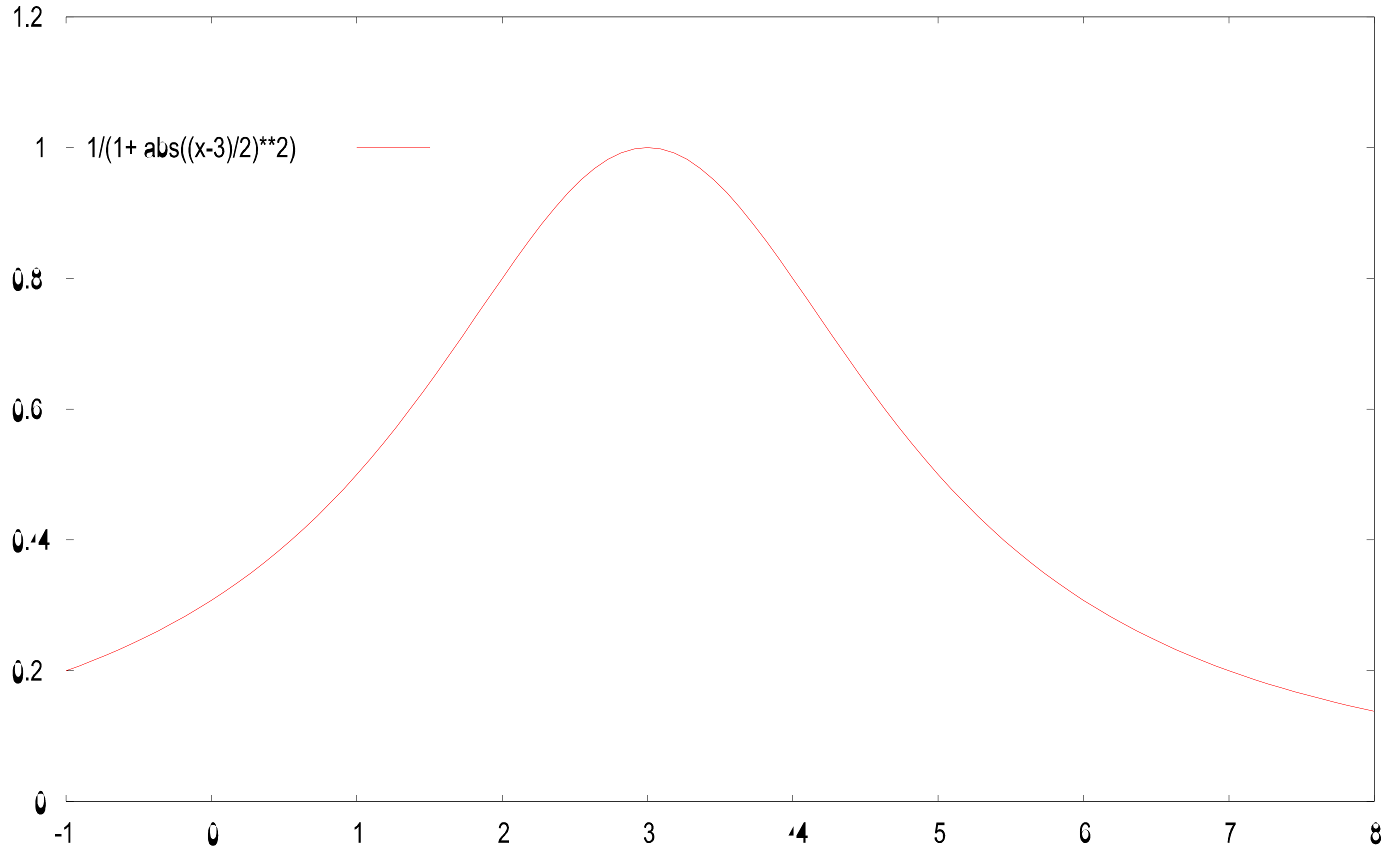
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Bell

$$\mu_{Bell}(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

Ej: μ_{Bell} (x; 2, 1, 3)



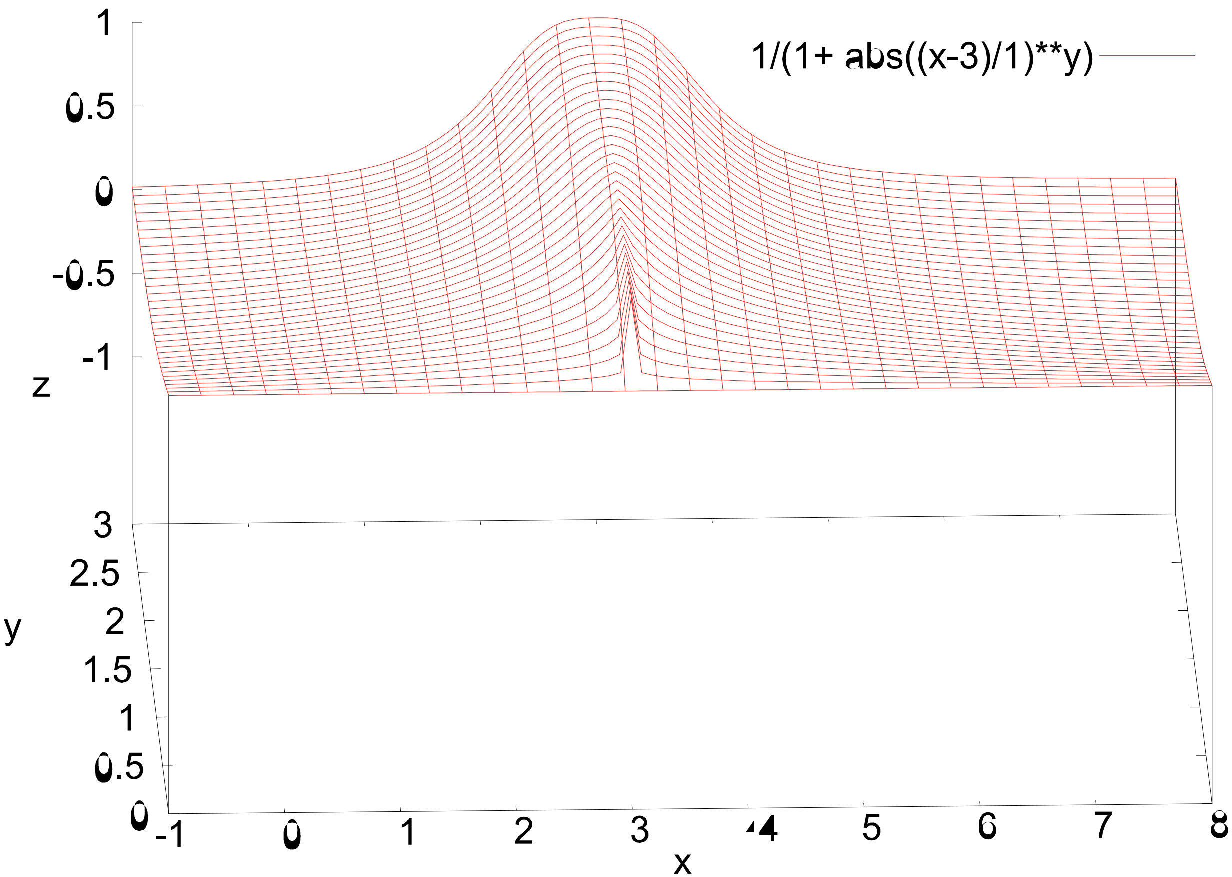
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Bell

$$\mu_{Bell}(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

Ej: μ_{Bell} (x; 1, y, 3)



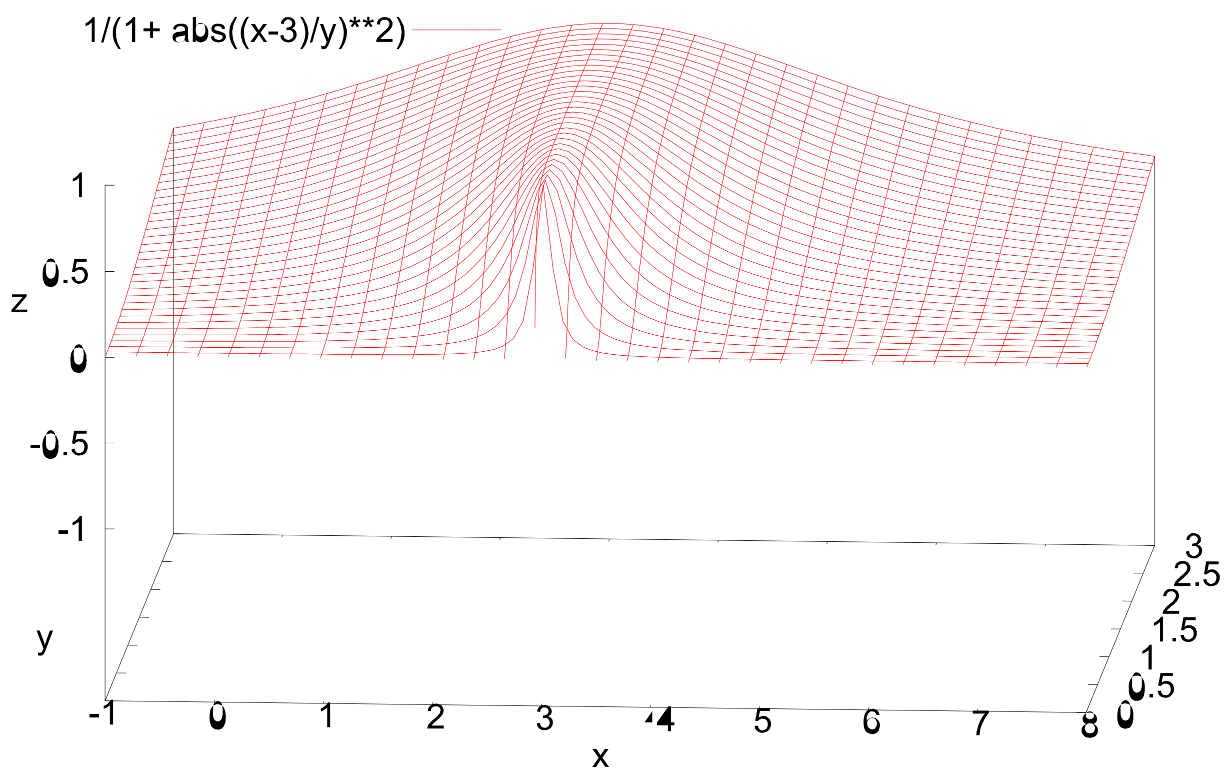
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Bell

$$\mu_{Bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$

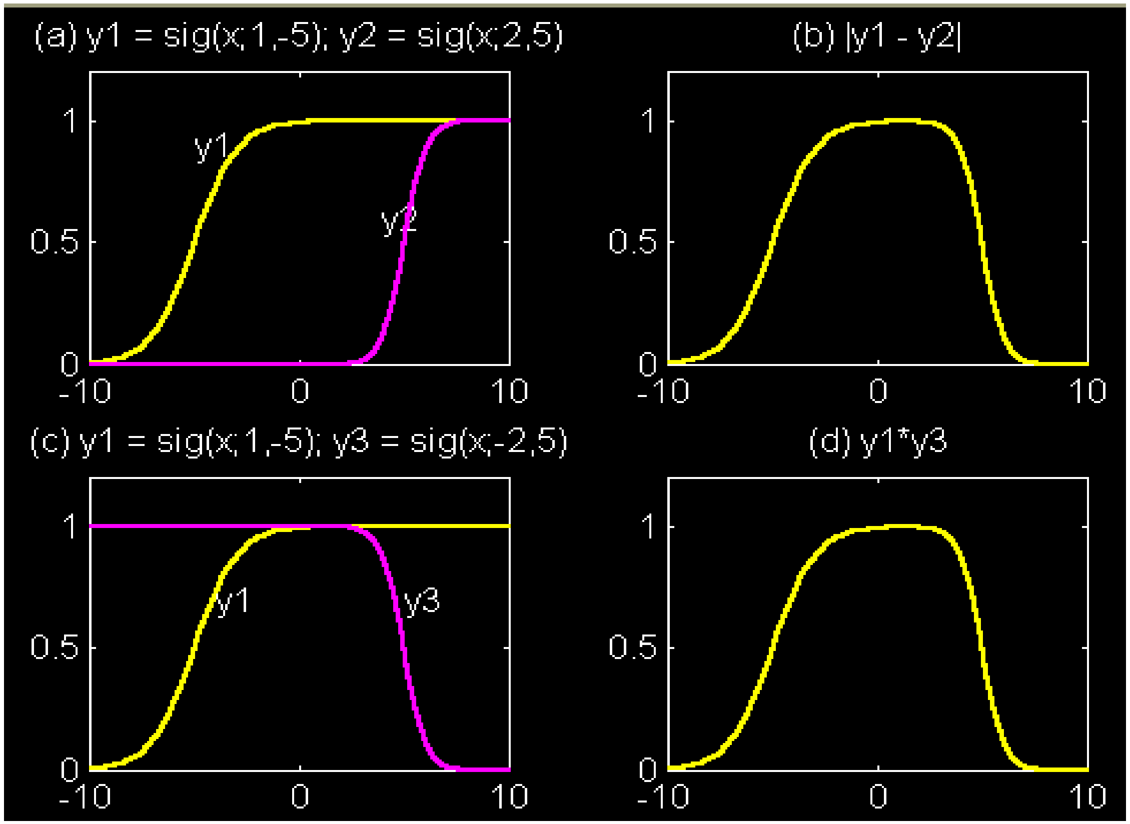
Ej: μ_{Bell} (x; y, 1, 3)



Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Sigmoide: $$sigmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$



disp_sig.m

Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- LR:

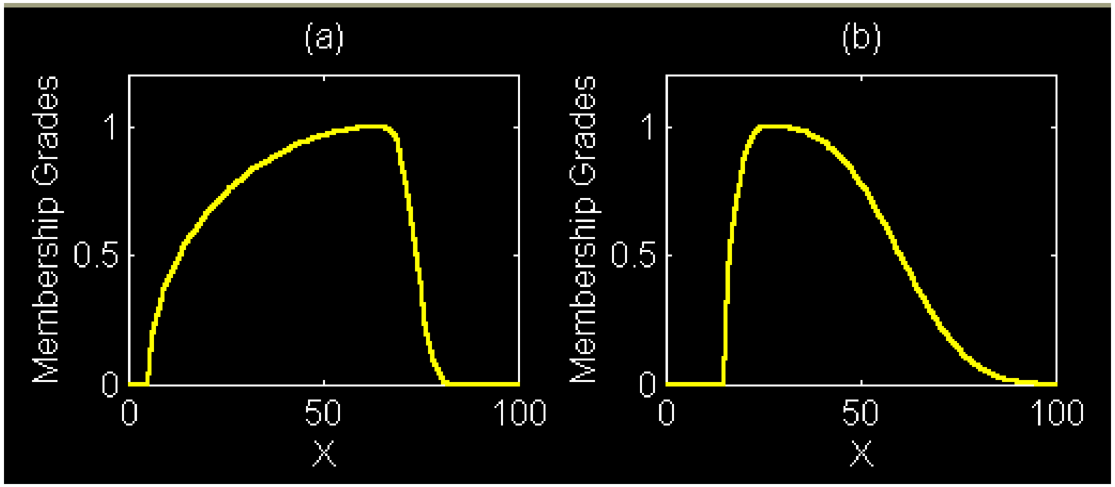
$$LR(x;c,\alpha,\beta)=\begin{cases}F_L\left(\dfrac{c-x}{\alpha}\right), & x<c\\ F_R\left(\dfrac{x-c}{\beta}\right), & x\geq c\end{cases}$$

$$F_L(x)=\sqrt{\max(0,1-x^2)} \qquad F_R(x)=\exp(-|x|^3)$$

c = 65

a = 60

b = 10



c = 25

a = 10

b = 40

difflr.m

Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia (cont):

- Para que un sistema difuso sea adaptativo es util el poder calcular los derivados de las funciones de pertenencia.
- Los derivados toman un rol central en la adaptación de un sistema difuso (ver Jang 2.4.3)

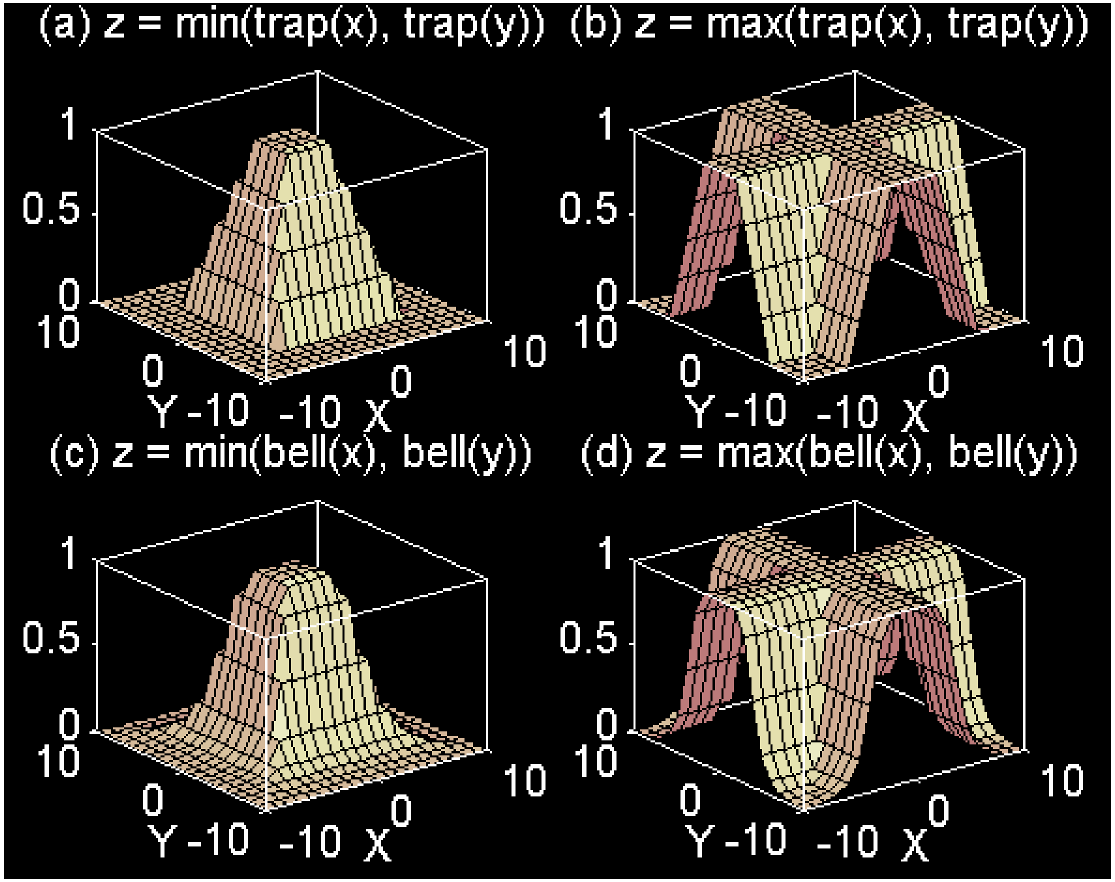
Introducción a la lógica difusa

Funciones de pertenencia en 2 o mas dimensiones:

- Las funciones de pertenencia también pueden ser de varias dimensiones
  - $C = \{(x, y, \mu_C(x, y)| x \in X, y \in Y\}$
- Esto es muchas veces necesario ya que puede que nuestra función de pertenencia tenga varios inputs

Introducción a la lógica difusa

Funciones de membresía en 2D:

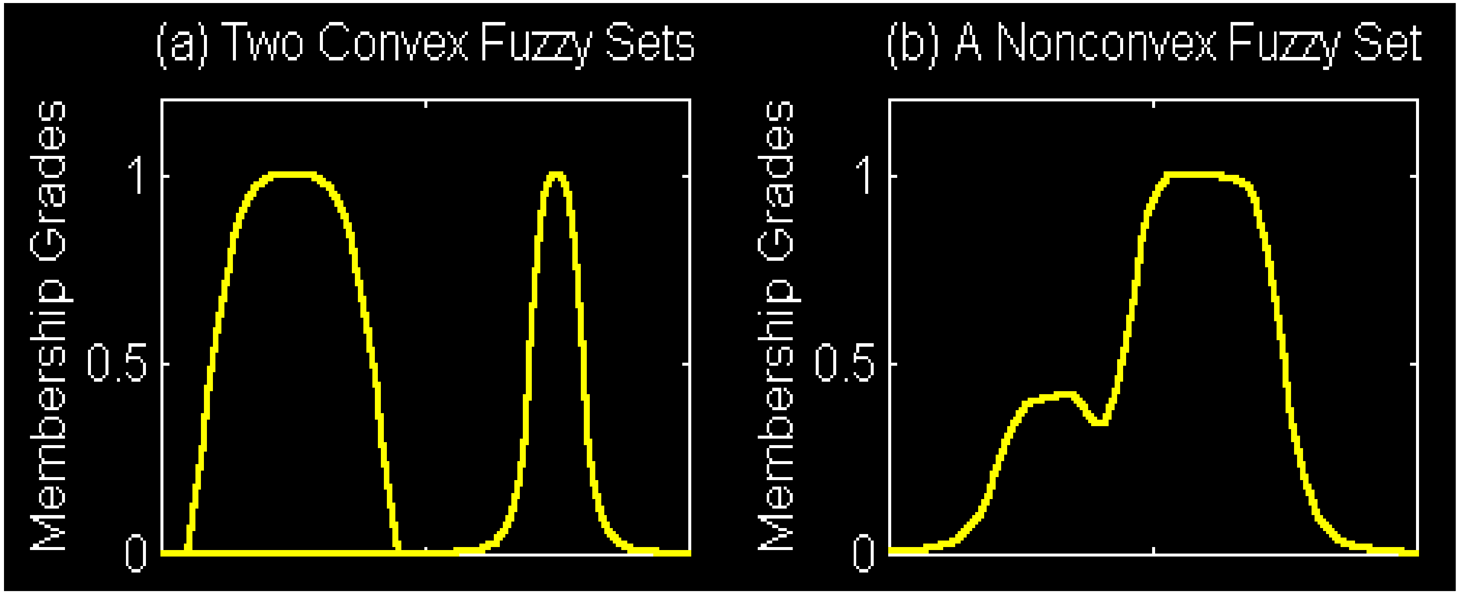


2dmf.m

Introducción a la lógica difusa

- Un set difuso *A* es **convexo** si para cualquier x1,x2 ϵ X y λ en [0, 1],

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$



convexmf.m

Introducción a la lógica difusa

Algunas definiciones de los sets difusos:

Definición: Un set difuso A en X se llama **normal** si existe por lo menos un elemento $x \in X$ en el cual $A(x) = 1$. Un set difuso que no es normal se llama **subnormal**.

Definición: La **altura** (height) de un set difuso A es el miembro mas grande en A. Entonces altura(A) = Max A(x)

Definición: El **soporte** (support) de un set difuso A es el subset exacto de X consistente de todos los miembros con valor de pertenencia > 0. $\text{Supp}(A) = \{x \mid A(x) > 0 \text{ and } x \in X\}$

Introducción a la lógica difusa

Algunas definiciones de los sets difusos (cont):

Definición: La **medula** (o core) de un set A son todos los elementos con valor de pertenencia = 1.

$$\text{medula}(A) = \{x \mid A(x) = 1 \text{ and } x \in X\}$$

Definición: Si A y B son dos fuzzy sets en X. A es un **subset** de B si $B(x) \geq A(x)$ para todos los valores $x \in X$.

Definición: Si A y B son dos fuzzy subsets de X. A **=** B si A es un subset de B y B es un subset de A.

Introducción a la lógica difusa

Definiciones de los sets difusos (cont):

Definición: El α**-level** set de A es el crisp set en X consistente de los elementos en X para el cual $A(x) \geq \alpha$

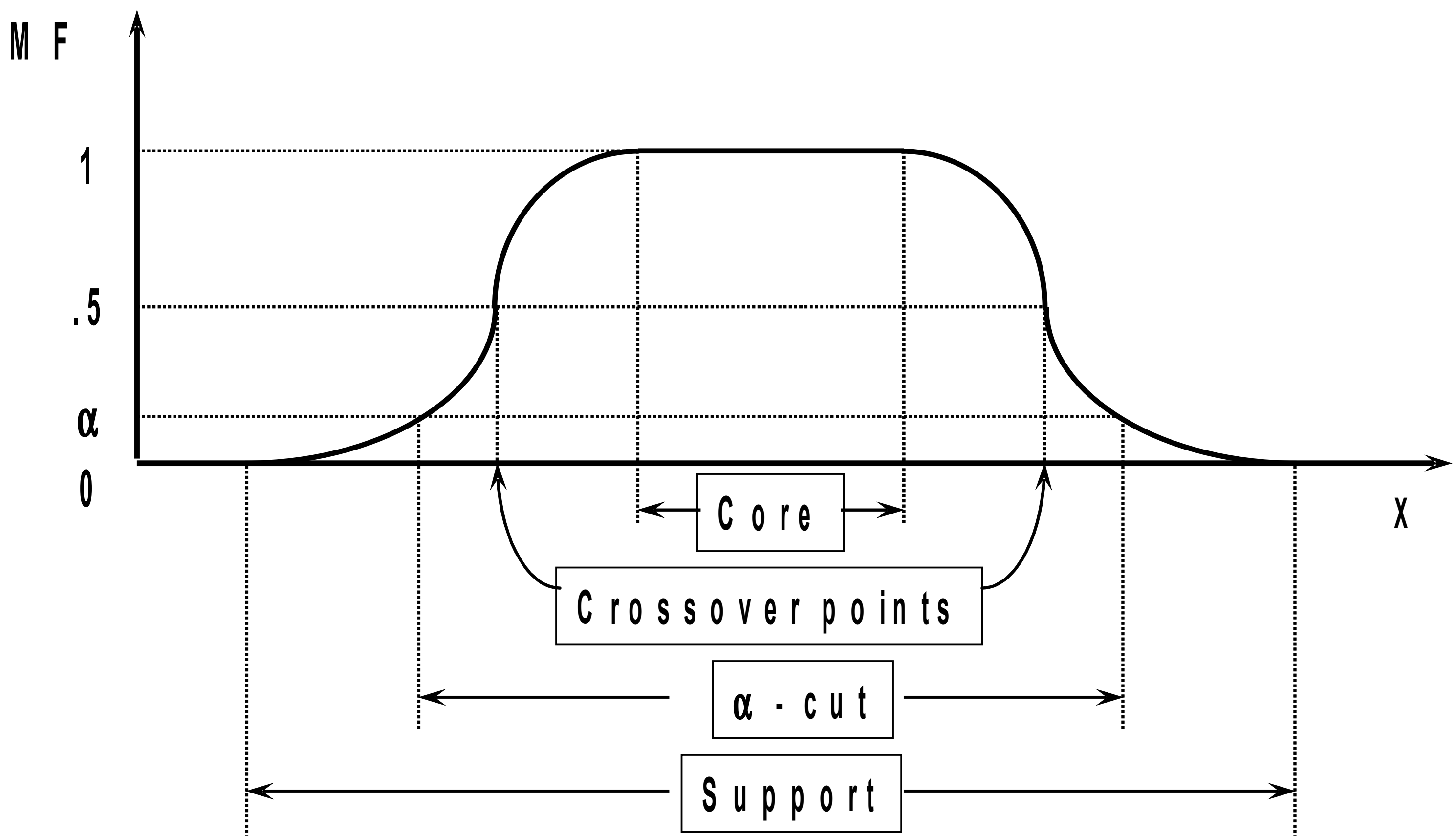
$A_\alpha = \{x \mid A(x) \geq \alpha, x \in X\}$

Exponentes: Dado que X={a, b, c, …}.

Si $A = \{x_1/a, x_2/b, ..., \}$ entonces $A^n = \{x_1^n/a, x_2^n/b, ..., \}$

Introducción a la lógica difusa

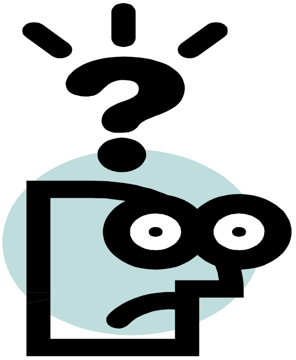
Definiciones de los sets difusos (cont):



Introducción a la lógica difusa

Contenidos

- Conceptos y definiciones básicos de la lógica difusa
- Sets difusos y funciones de membresía
- Operaciones sobre sets difusos
- Inferencia usando lógica difusa



Introducción a la lógica difusa

Operaciones en sets difusos:

Definición: Asumiendo que A y B son dos sets difusos de X, la **union** de A y B es un set difuso $C = A \cup B$, en el cual $C(x) = Max[A(x), B(x)]$

Definición: Asumiendo que A y B son dos sets difusos de X, la **intersección** de A y B es un set difuso $C = A \cap B$, en el cual $C(x) = Min[A(x), B(x)]$

Definición: El **complemento relativo** de B con respecto a A es $E = A - B$ en el cual $E(x) = Max[0, A(x) - B(x)]$

Introducción a la lógica difusa

Operaciones en sets difusos (cont):

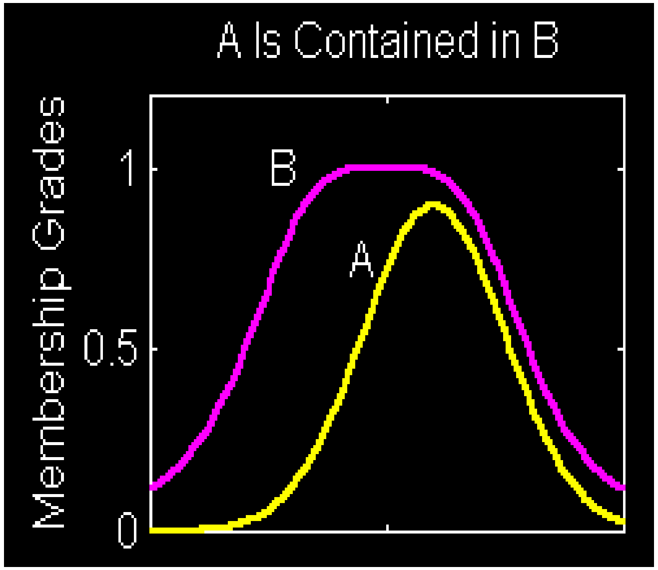
Definición: La **suma limitada** (**bounded sum**) de A y B,
$C = A \oplus B, C(x) = Min[1, A(x) + B(x)]$

Definición: El **complemento** o **negación** de A, denominado $\overline{\mathrm{A}}$ es el set $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X} - \mathrm{A}$, entonces para cualquier x en $\overline{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{A}(\mathrm{x})$

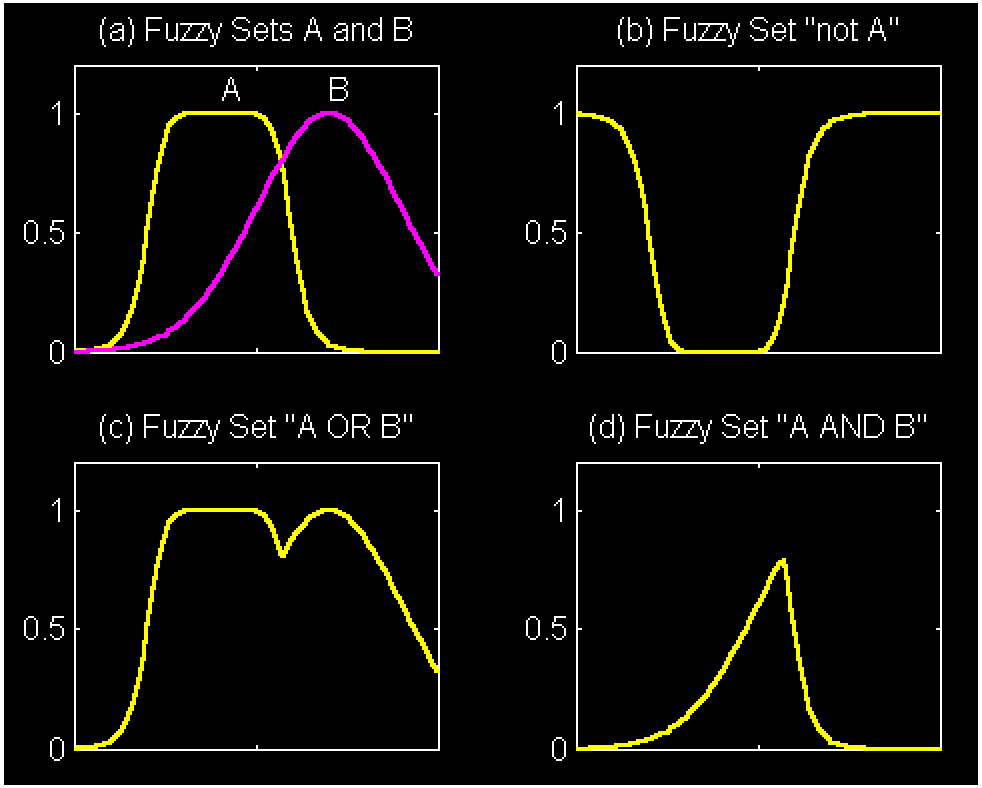
Definición: La **doble negación** de A es igual a A.

Introducción a la lógica difusa

Operaciones en sets difusos (cont):



subset.m



fuzsetop.m

Complemento

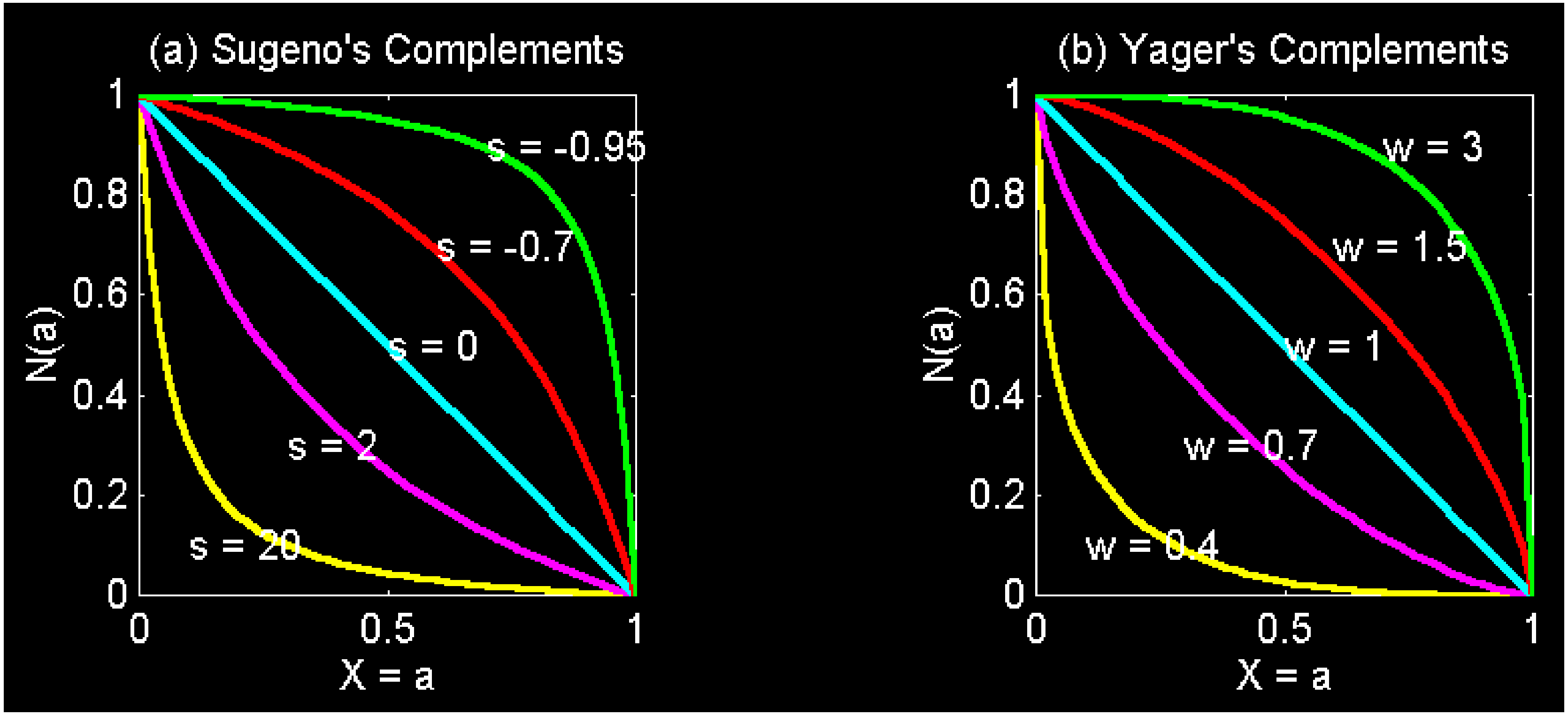
- Requerimientos:
  - Borde: N(0)=1 and N(1) = 0
  - Monotonicidad: N(a) > N(b) if a < b
  - Involución: N(N(a)) = a
- Dos tipos:
  - Sugeno's complement: $$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}$$
  - Yager's complement: $$N_w(a) = (1-a^w)^{1/w}$$

Introducción a la lógica difusa

Complemento

$$N_s(a) = \frac{1 - a}{1 + sa}$$

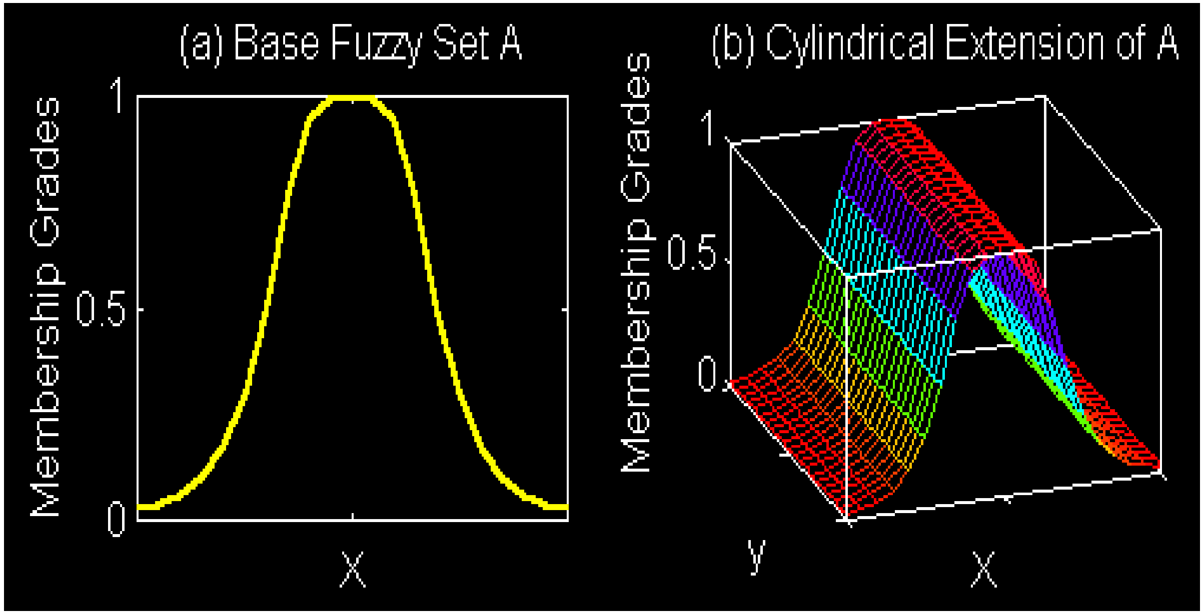
$$N_w(a) = (1 - a^w)^{1/w}$$



Introducción a la lógica difusa

Extensiones cilíndricas:

Base set A   Cylindrical Ext. of A

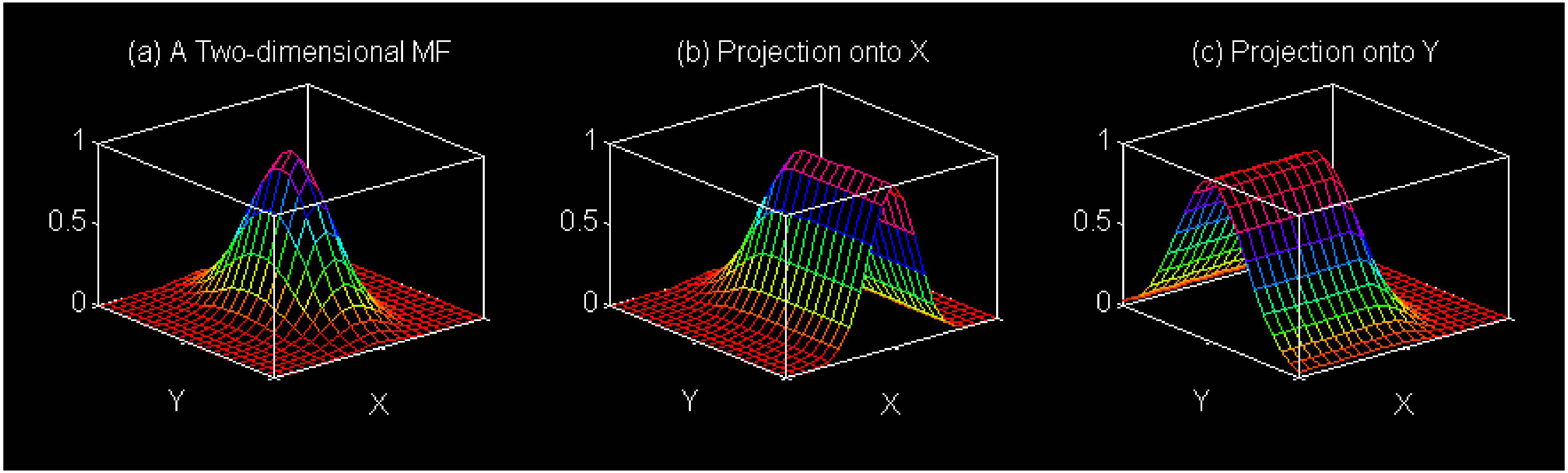


cyl_ext.m

Introducción a la lógica difusa

Proyecciones:

Two-dimensional MF | Projection onto X | Projection onto Y



$\mu_R(x,y)$

project.m

$\mu_A(x) = \max_y \mu_R(x,y)$

$\mu_B(y) = \max_x \mu_R(x,y)$

Introducción a la lógica difusa

Operaciones en sets difusos (cont):

Conmutatividad:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Ídempotencia:

$A \cup A = A$

$B \cap B = B$

Asociatividad

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

Introducción a la lógica difusa

Operaciones en sets difusos (cont):

Distribución

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nulo

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Unión e Intersección de X (A es un subset de X)

$A \cup X = X$

$A \cap X = A$

Introducción a la lógica difusa

Ejemplos:

A={.1/a,.1/b, .2/c, 0/d, 1/e}
B={.1/a, 0/b, .2/c, 0/d, .9/e}

A es un set fuzzy normal en X (a razón de el elemento 1/e)
B es un set fuzzy subnormal en X

altura(A) = 1, altura(B) = .9
supp(A) = {a, b, c, e}, supp(B) = {a, c, e}
core(a) = {e}, core(B) = {$\varnothing$}

$B \subset A$ (B es un subset de A ya que A(x) $\geq$ B(x) para x $\in$ X)

Introducción a la lógica difusa

Ejemplos (cont):

A={.1/a,.1/b, .2/c, 0/d, 1/e}

B={.1/a, 0/b, .2/c, 0/d, .9/e}

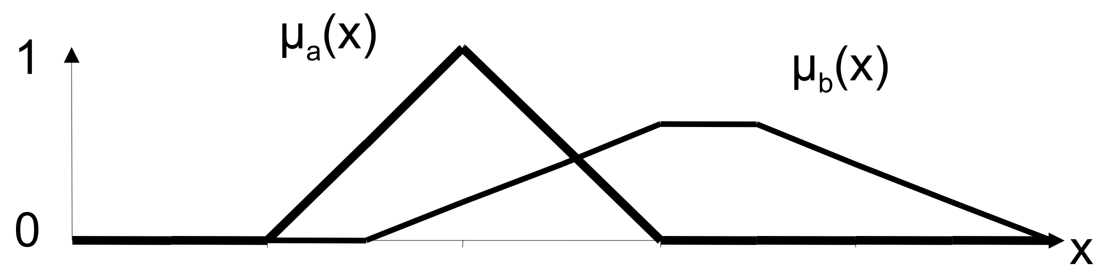
C = A $\cup$ B = Max[A(x), B(x)] = {.1/a, .1/b, .2/c, 0/d, 1/e}

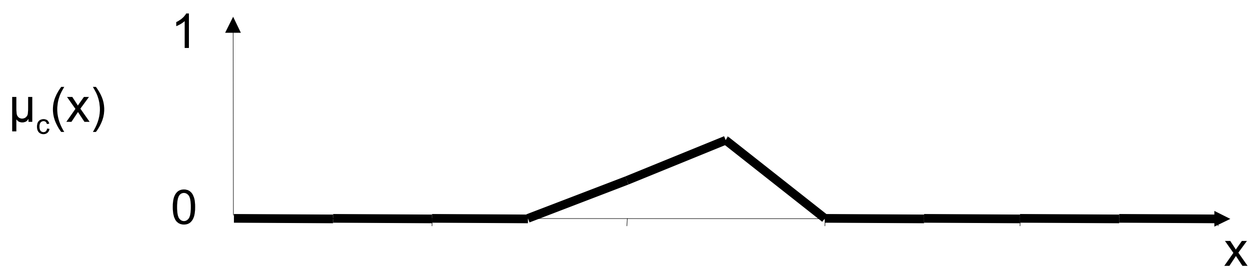
C = A $\cap$ B = Min[A(x), B(x)] = {.1/a, 0/b, .2/c, 0/d, .9/e}

$\overline{A}$ = 1 – A = {.9/a, .9/b, .8/c, 1/d, 0/e}

Ejemplos (cont):

$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

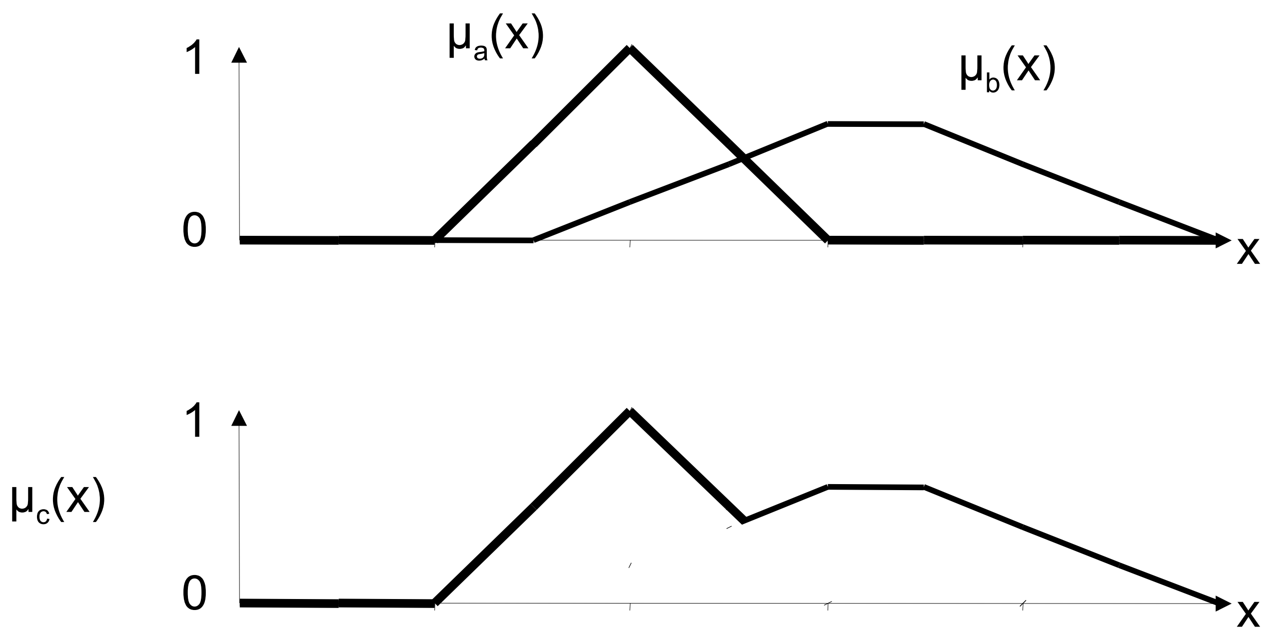




Introducción a la lógica difusa

Ejemplos (cont):

$\mu_C (x) = \mu_A (x) \cup \mu_B (x) = \max(\mu_A (x), \mu_B (x))$



Introducción a la lógica difusa

Intersección de sets difusos ($A \cap B$) :

La intersección de dos sets difusos A y B se en general se especifica por una función $T:[0,1] \times T:[0,1] \rightarrow [0,1]$.

Estas operaciones se efectúan a través de un operador que opera sobre los grados de pertenencia de los conjuntos :

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x)\ [op]\ \mu_B(x)$$

En el cual [op] es un operador binario.

Introducción a la lógica difusa

Intersección de set difusos ($A \cap B$) (cont) :

Intersección o **T-Norma** Generalizado

- Requerimientos:
  – Borde: T(0, 0) = 0, T(a, 1) = T(1, a) = a
  – Monotonicidad: T(a, b) < T(c, d) if a < c and b < d
  – Conmutatividad: T(a, b) = T(b, a)
  – Asociatividad: T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)
- Ejemplos:
  – Minimum: Tm(a, b)
  – Algebraic product: Ta(a, b)
  – Bounded product: Tb(a, b)
  – Drastic product: Td(a, b)

Introducción a la lógica difusa

Intersección de sets difusos ($A \cap B$) (cont) :

Cuatro operadores T-norm:

- $T_{min}(a,b) = \min(a, b) = A \cap B$ (minino)
- $T_{ap}(a,b) = ab$ (producto algebraico)
- $T_{bp}(a,b) = 0 \cup (a+ b-1)$ (producto limitado)
- $T_{dp}(a,b) = a$ if $b=1$, (producto drastico)

  $= b$ if $a=1$,

  $= 0$ if $a,b < 1$

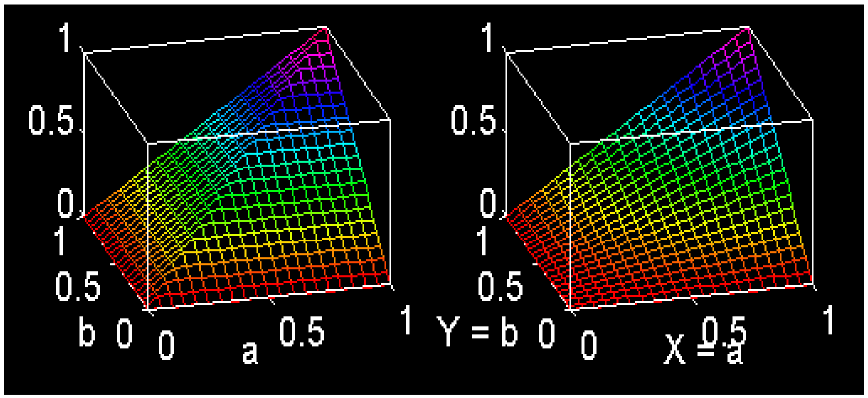
Introducción a la lógica difusa

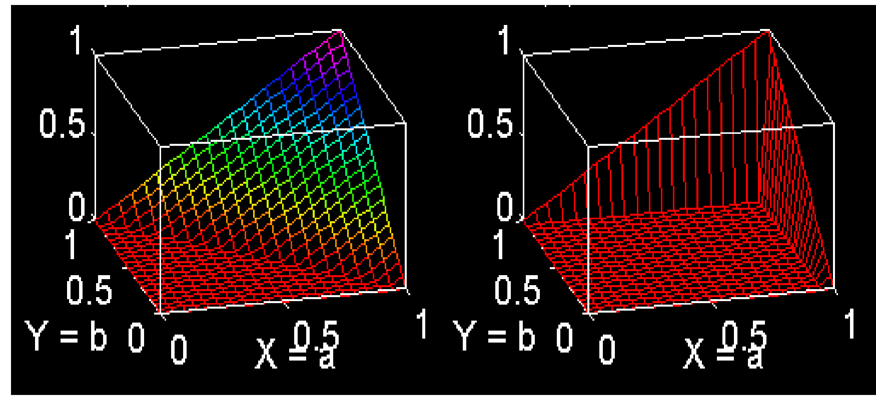
Minimum: $T_m(a, b)$

Algebraic product: $T_a(a, b)$

Bounded product: $T_b(a, b)$

Drastic product: $T_d(a, b)$





tnorm.m

Introducción a la lógica difusa

Unión de sets difusos ($A \cup B$) :

Union o **T-conorm** (S-norm) satisface S(. , .):

- Borde: $S(1,1) = 1$, $S(0,a) = S(a,0) = a$
- Monotonicidad: $S(a,b) \leq S(c,d)$ if $a \leq c$ and $b \leq d$
- Conmutatividad: $S(a,b) = S(b,a)$
- Asociatividad: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c))$

Introducción a la lógica difusa

Unión de sets difusos ($A \cup B$) (cont) :

Cuatro operadores T-conorm:

- $S(a,b) = \max(a, b) = A \cup B$ (máximo)
- $S(a,b) = a+b-ab$ (suma algebraico)
- $S(a,b) = 1 \cap (a + b)$ (suma limitada)
- $S(a,b) = a$ if $b=0$, (suma drastica)

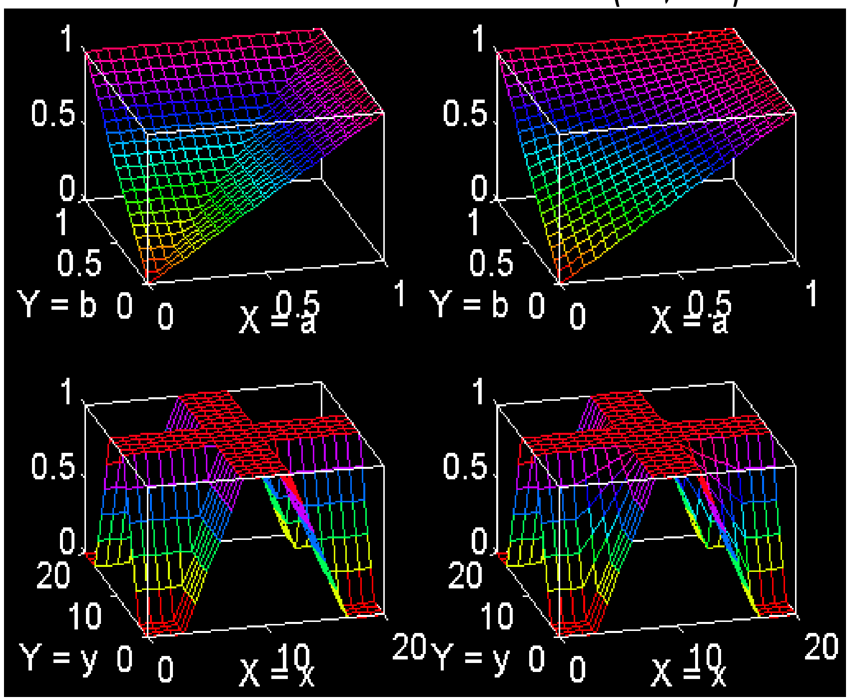
  $= b$ if $a=0$,

  $= 1$ if $a,b > 0$

Introducción a la lógica difusa

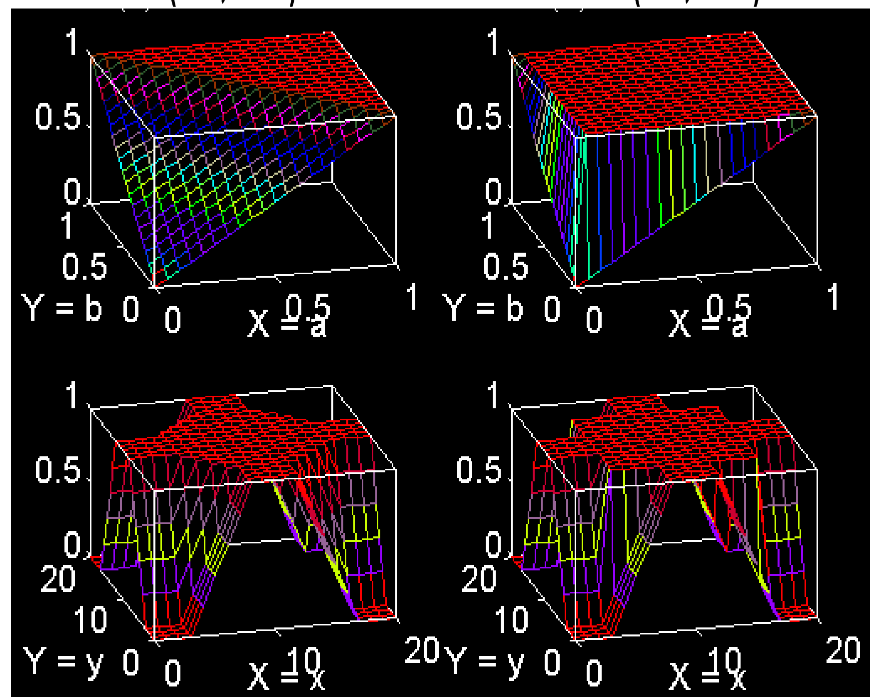
Maximum: $S_m(a, b)$

Algebraic sum: $S_a(a, b)$



Bounded sum: $S_b(a, b)$

Drastic sum: $S_d(a, b)$



tconorm.m

Introducción a la lógica difusa

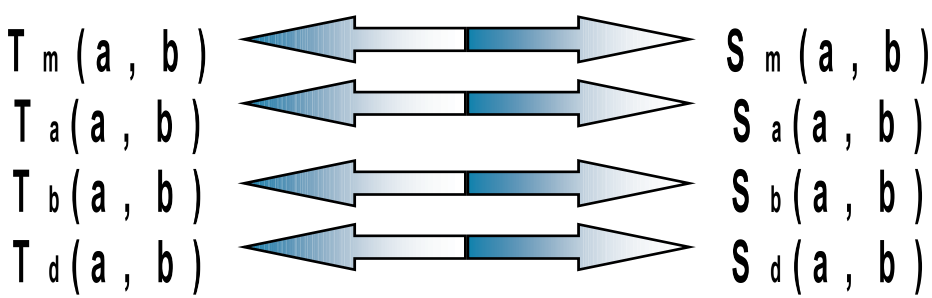
Operaciones en sets difusos (cont):

Ley de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- T(a, b) = N(S(N(a), N(b)))
- S(a, b) = N(T(N(a), N(b)))



Introducción a la lógica difusa

T-norma y T-conorma Parametrizadas

- Varios investigadores han propuesto versiones parametrizadas de T-norma y T-conorma
  - Yager
  - Schweizer and Sklar
  - Dubois and Prade
  - Hamacher
  - Frank
  - Sugeno
  - Dombi

Introducción a la lógica difusa

Principio de Extensión

- El principio de extensión nos da un mecanismo básico para extender las expresiones matemáticas de sets exactos al dominio difuso.
- Este principio generaliza la idea de un mapeo punto a punto de una función en sets tradicionales $y=f(x)$ a un mapeo entre conjuntos difusos.

Introducción a la lógica difusa

Principio de Extensión (cont)

- Si f es una función Y = f(X) y A es un set difuso sobre X definido como:

  $$A = \{\mu_A(x_1)/x_1,\ \mu_A(x_2)/x_2,\ \dots,\ \mu_A(x_n)/x_n\}$$

- Entonces el principio de extensión indica que la imagen del set A bajo la función f( ) es el set difuso B:

  $$B = f(A) = \{\mu_B(y_1)/y_1,\ \mu_B(y_2)/y_2,\ \dots,\ \mu_B(y_n)/y_i\}$$

  en el cual $y_i = f(x_i)$ y $\mu_B(y) = \max \mu_A(x)$

Introducción a la lógica difusa

Principio de Extensión (cont)

Ejemplo:

Si $A = \{0.1/-2, 0.4/-1, 0.8/0, 0.9/1, 0.3/2\}$

y $f(x) = x^2 - 3$

Entonces aplicando el principio de extensión tenemos que:

$B = \{0.1/1, 0.4/-2, 0.8/-3, 0.9/-2, 0.3/1\}$

$= \{0.8/-3, (0.4 \cup 0.9) /-2, (0.1 \cup 0.3)/1\}$

$= \{0.8/-3, 0.9/-2, 0.3/1\}$

Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas

- Relaciones difusas binarias son mapas difusos en $X \times Y$ que mapean cada elemento en $X \times Y$ a una sola función de pertenencia (entre 0 y 1 inclusive).

- Las relaciones difusas no solo pueden ser binarias si no que pueden ser generalizadas a n variables

Definición: El **producto Cartesiano** de dos sets exactos ($X \times Y$) es un set consistente de todos los pares (x, y) donde $x \in X$, $y \in Y$.

Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont)

Definición: Una **relación** difusa sobre un par X, Y se define como el set difuso del producto Cartesiano $X \times Y$:

$$R = \{ ((x , y), \mu_R(x, y)) \mid (x , y) \in X \times Y \}$$

Ejemplo: Relación difusa discreta
Si X = {a, b, c}, Y = {1, 2}, entonces

A = {0.1/(a, 1), 0.6/(a, 2), 0.9/(b, 1), 1/(b,2), 0/(c,1), 0.2/(c,2)}
es una relación difusa sobre el espacio $X \times Y$.

Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont)

Definición: Si existen un par de sets difusos A y B su **producto cruce** (cross product) Cartesiano $A \times B$ es una relación difusa T sobre el set $A \times B$, $T = A \times B$ donde

$$T(x, y) = \mathrm{Min}[A(x), B(y)]$$

Ejemplo:
Si A = {1/a, 0.6/b, 0.3/c}, B = {1/1, 0.5/2, 0/3} son dos subsets difusos, entonces,

$$A \times B = \{ 1/(a, 1), 0.5/(a, 2), 0/(a, 3), 0.6/(b,1), 0.5/(b,2), 0/(b,3), 0.3/(c,1), 0.3/(c,2), 0/(c,3)\}$$

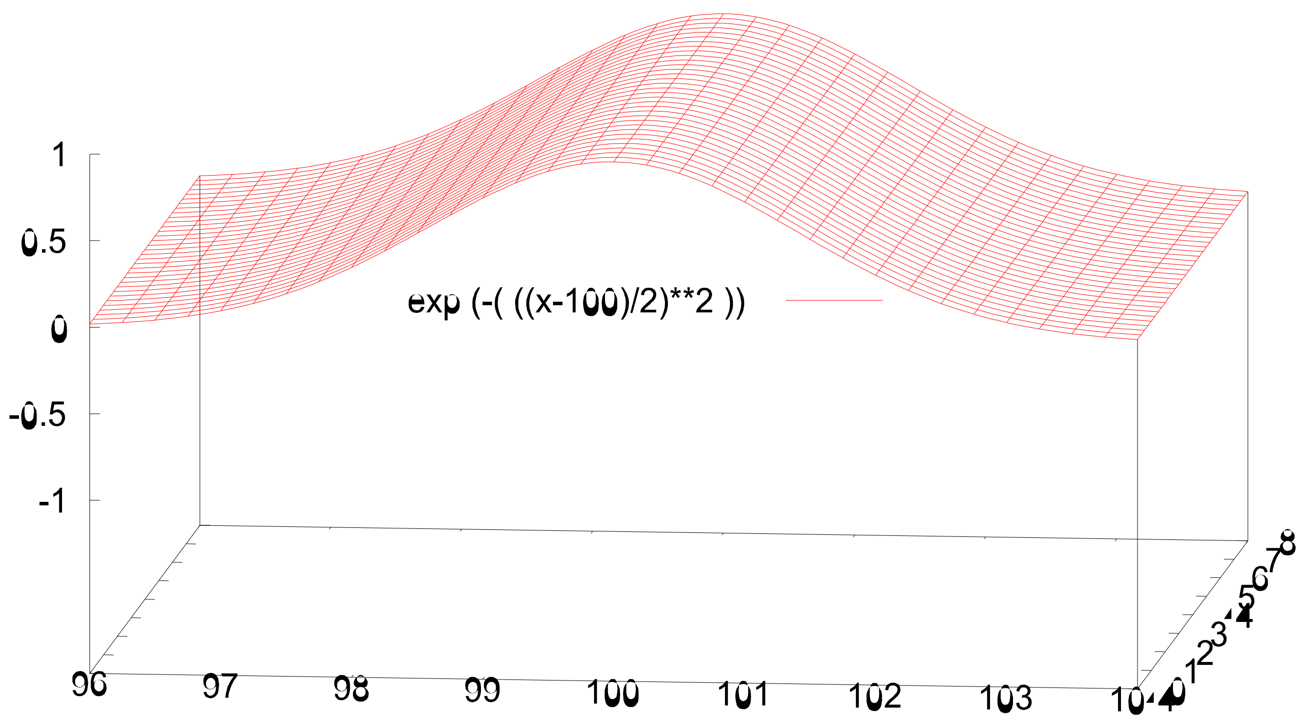
Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont):

Ej: X: variable que indica el tamaño de una casa, Y: variable que indica el precio de una casa

$\mu_{Tamaño}(x)$: tamaño atractivo para familia de cuatro personas (mts)

$\mu_{Tamaño}(x) = \mu_{Gausiana}(x; 100; 2)$



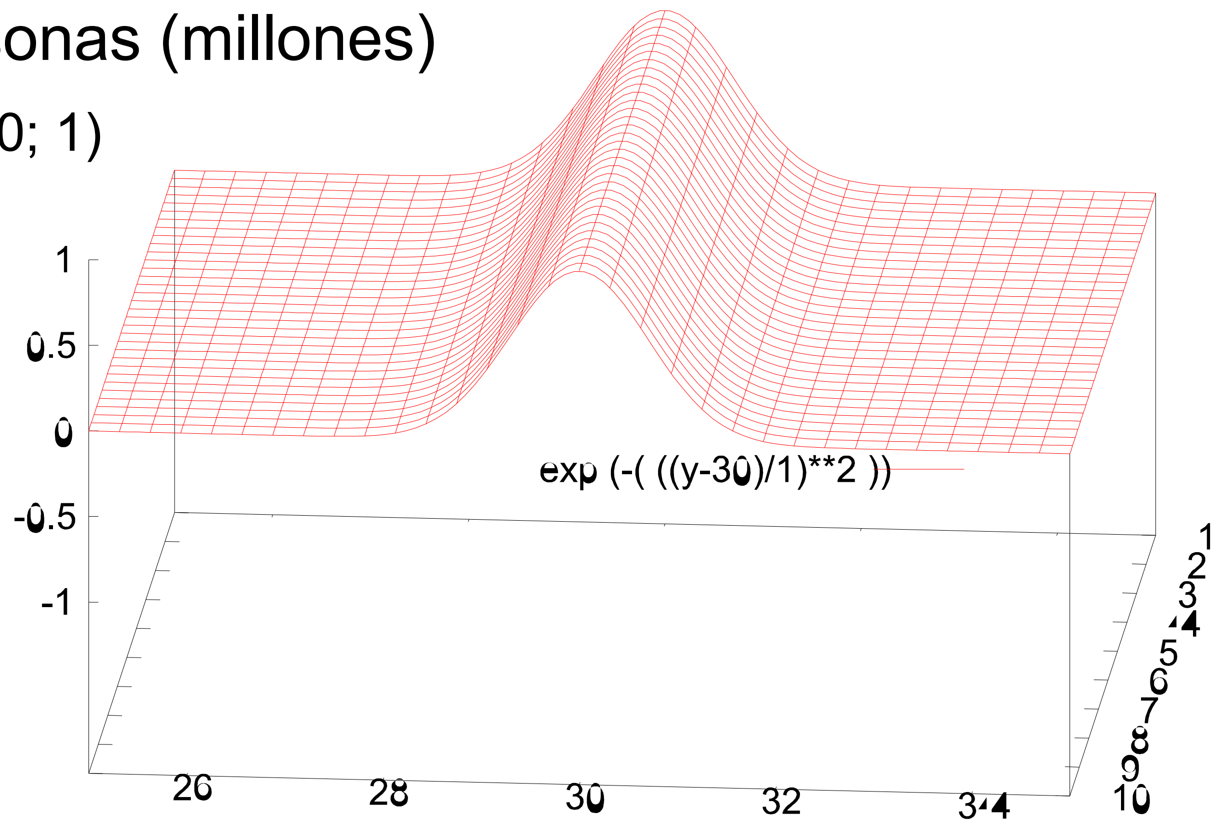
Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont):

Ej: X: variable que indica el tamaño de una casa, Y: variable que indica el precio de una casa,

$\mu_{Precio}(y)$: precio atractivo de una casa para una familia de cuatro personas (millones)

$\mu_{Precio}(y) = \mu_{Gausiana}(y; 30; 1)$

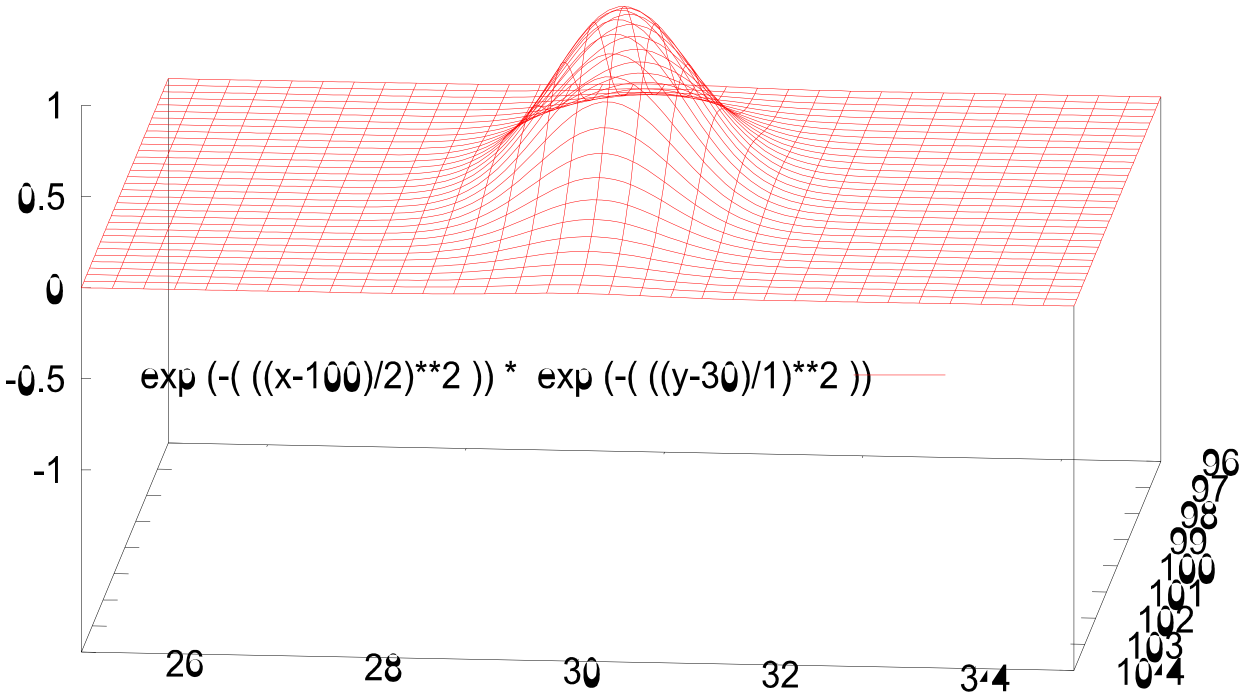


Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont):

Ej: D = $\{(x, y, \mu_D(x, y)| \, x \in X, y \in Y\}$ indica casas de "tamaño atractivo para familia de cuatro personas" AND "precio atractivo de una casa para una familia de cuatro personas"

μ_D al ser el producto de dos funciones de pertenencia se denomina "compuesta" : $\mu_D(x, y) = \mu_T(x)\, \mu_P(y)$



Introducción a la lógica difusa

Relaciones Difusas Binarias (cont)

- Es posible expresar la relación difusa en un matrix R de $\mu_R(x, y)$.

Ejemplo:

Si $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, entonces R :

$$R = \begin{bmatrix} \mu(x1, y1) & \mu(x1, y2) \\ \mu(x2, y1) & \mu(x2, y2) \\ \mu(x3, y1) & \mu(x3, y2) \end{bmatrix}$$

Introducción a la lógica difusa

Composición de Relaciones Difusas

- Las relaciones difusas se usan en sistemas de inferencia difusa (e.g. if X = A and Y= B then Z=C)
- Para combinar las relaciones difusas se usan operaciones de composición
  - max-min propuesta por Zadeh
  - max-product

Introducción a la lógica difusa

Composición de Relaciones Difusas (cont)

Definición: Si R_1 y R_2 son dos relaciones difusas definidas en $X \times Y$ e $Y \times Z$ respectivamente. La composición **max-min** de R_1 y R_2 es un set difuso definido como:

$$\mu_{R1 \circ R2}(x, z) = \max_y \min[\mu_{R1}(x, y), \mu_{R2}(y, z)]$$

Definición: Si R_1 y R_2 son dos relaciones difusas definidas en $X \times Y$ e $Y \times Z$ respectivamente. La composición **max-product** de R_1 y R_2 es un set difuso definido como:

$$\mu_{R1 \circ R2}(x, z) = \max_y [\mu_{R1}(x, y)\, \mu_{R2}(y, z)]$$

Introducción a la lógica difusa

Composición de Relaciones Difusas (cont)

En general se tiene max-* en la cual * es un operador de T-norma:

$$\mu_{R1 \circ R2}(x, z) = \max_y [\mu_{R1}(x, y) * \mu_{R2}(y, z)]$$

Introducción a la lógica difusa

Reglas IF-THEN difusas:

Una regla IF-THEN difusa es de la forma

IF x is A THEN y is B

En la cual A y B son variables lingüísticas definidas por sets difusos en los universos X e Y. La parte **IF** x is **A** es llamada el antecedente o premisa, mientras la parte **THEN** y is **B** es la consecuencia o conclusión

Ejemplos:

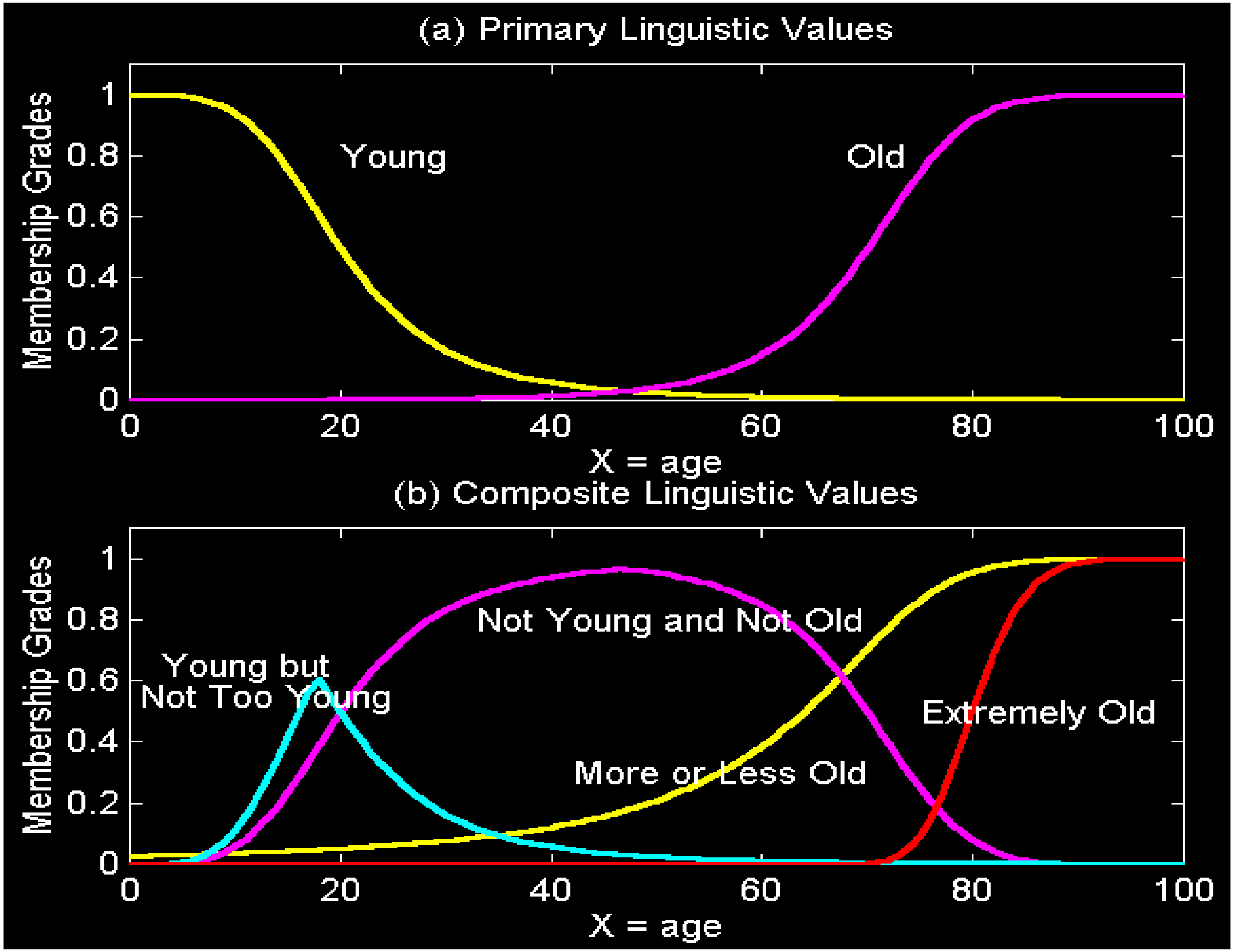
- If presión es alta, then volumen es pequeño.
- If carretera esta mojada, then manejar es peligroso.

Introducción a la lógica difusa

Reglas IF-THEN pueden usar variables difusas linguisticas

Ejemplos:

complv.m



Introducción a la lógica difusa

Reglas IF-THEN difusas (cont):

Si se quiere utilizar la regla IF x is A THEN y is B ($A \rightarrow B$) entonces se puede definir la regla como una relación binaria difusa R en el espacio $X \times Y$.

R puede ser visto como un set difuso con una función de pertenencia:

$$\mu_R(x, y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

La función de implicación difusa f convierte los grados de pertenencia individuales a grados de pertenencia de (x, y).

Introducción a la lógica difusa

Reglas IF-THEN difusas (cont):

Basado en la interpretación de ($A \rightarrow B$) "A coupled with B" o "A y B ambos están" entonces las cuatro funciones T-norm se pueden usar para resolver la relación R

- $R_{min}(a,b) = \min(a, b) = A \cap B$ (minimo)
- $R_{ap}(a,b) = ab$ (producto algebraico)
- $R_{bp}(a,b) = 0 \cup (a+ b-1)$ (producto limitado)
- $R_{dp}(a,b) = a$ if $b=1$, (producto drástico)

  $= b$ if $a=1$,

  $= 0$ if $a,b < 1$

Introducción a la lógica difusa

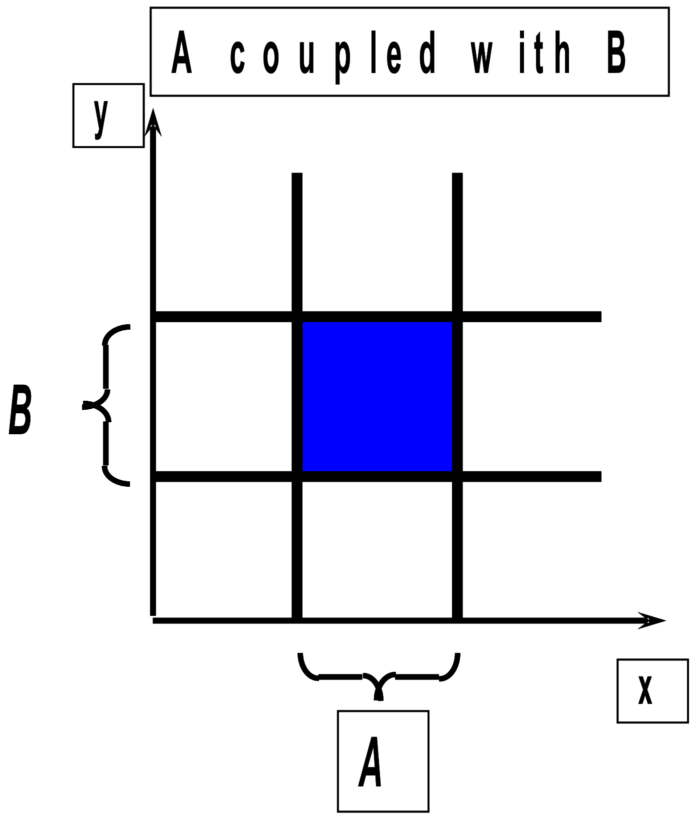
Reglas IF-THEN difusas (cont):

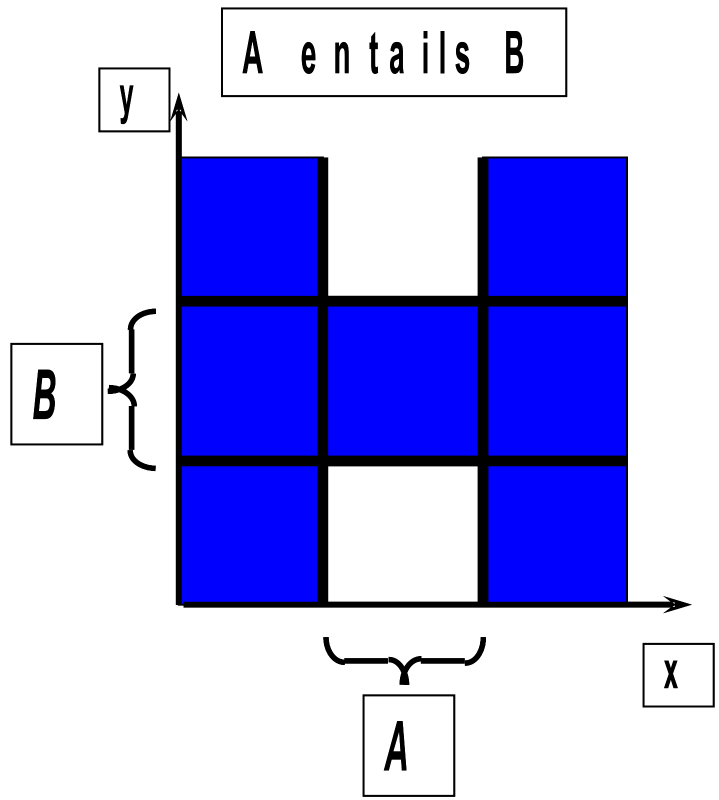
Basado en la interpretación de ($A \rightarrow B$) “A implies B” o “A implica B” (NOT A OR B) se pueden utilizar otras funciones:

- Bounded sum
- Max-min composition
- Boolean fuzzy implicación
- Gougen's fuzzy implication (Jang. p62)

Introducción a la lógica difusa

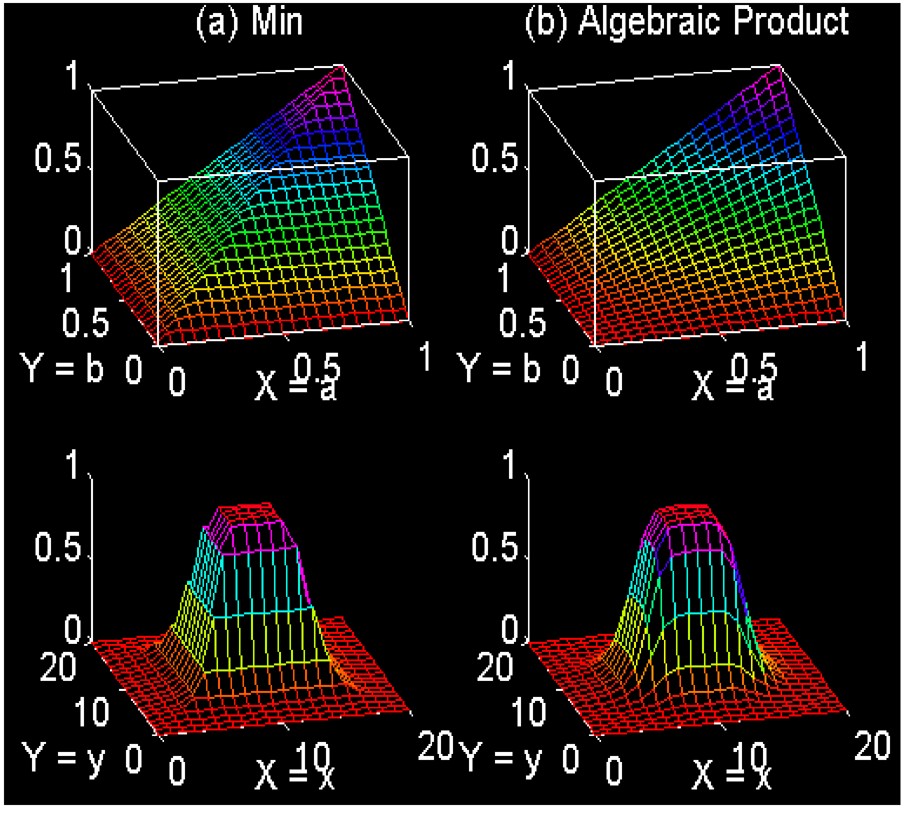
Maneras de Interpretar Reglas IF-THEN difusas:

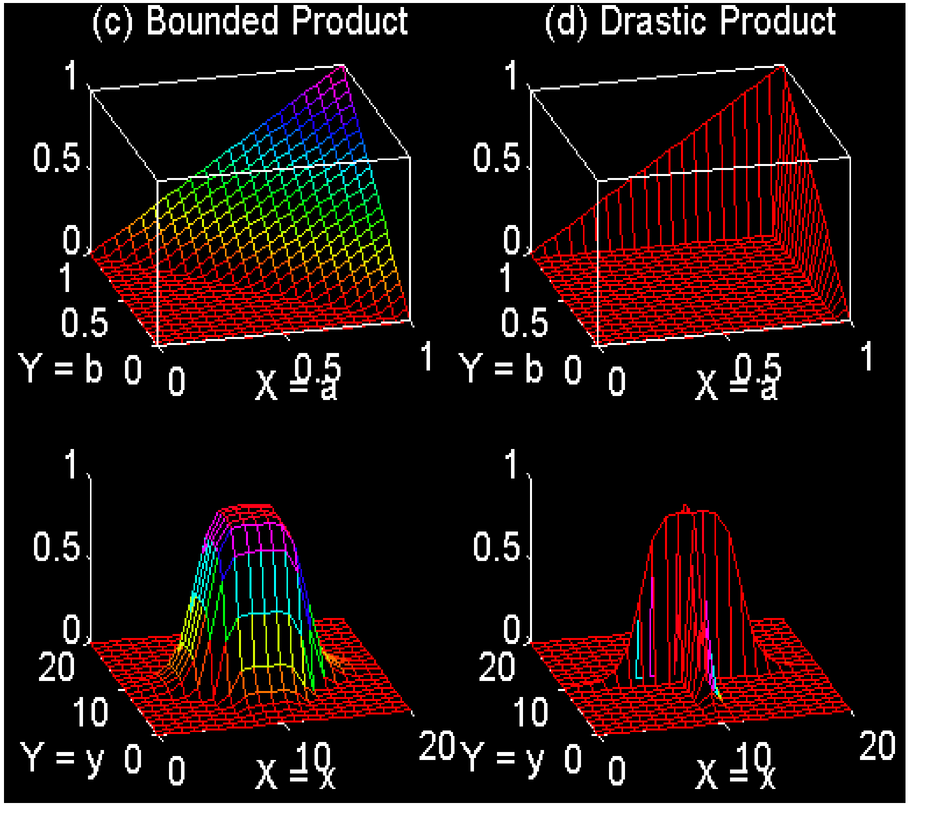




Introducción a la lógica difusa

A coupled with B: $\mu_R(x, y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y)) = f(a, b)$

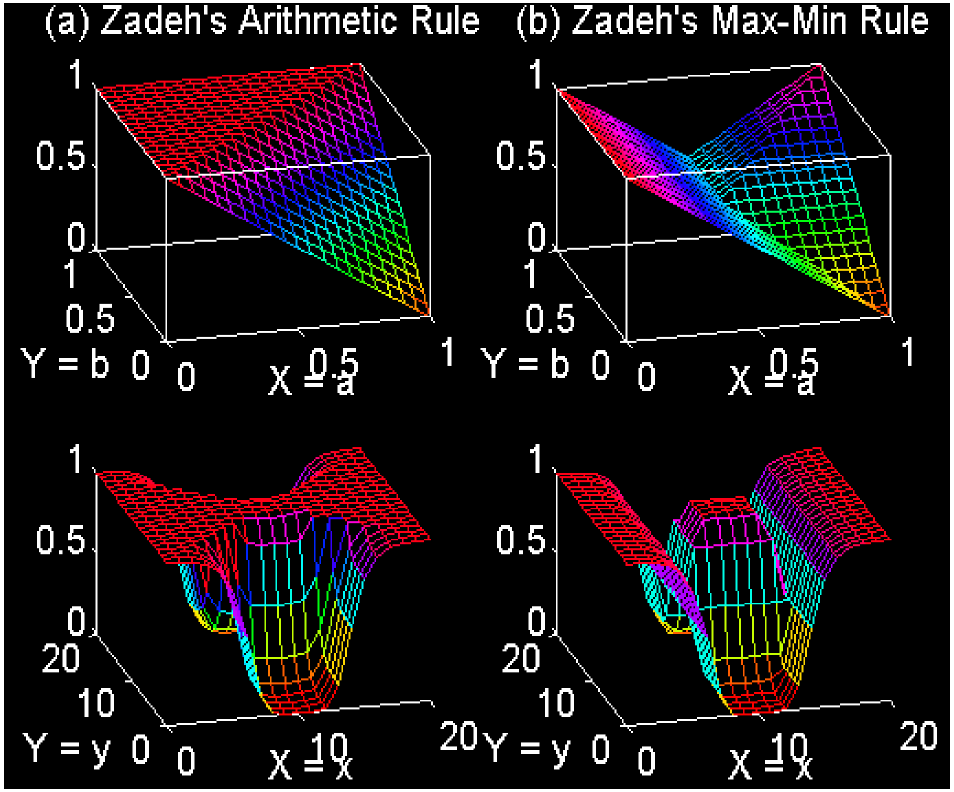


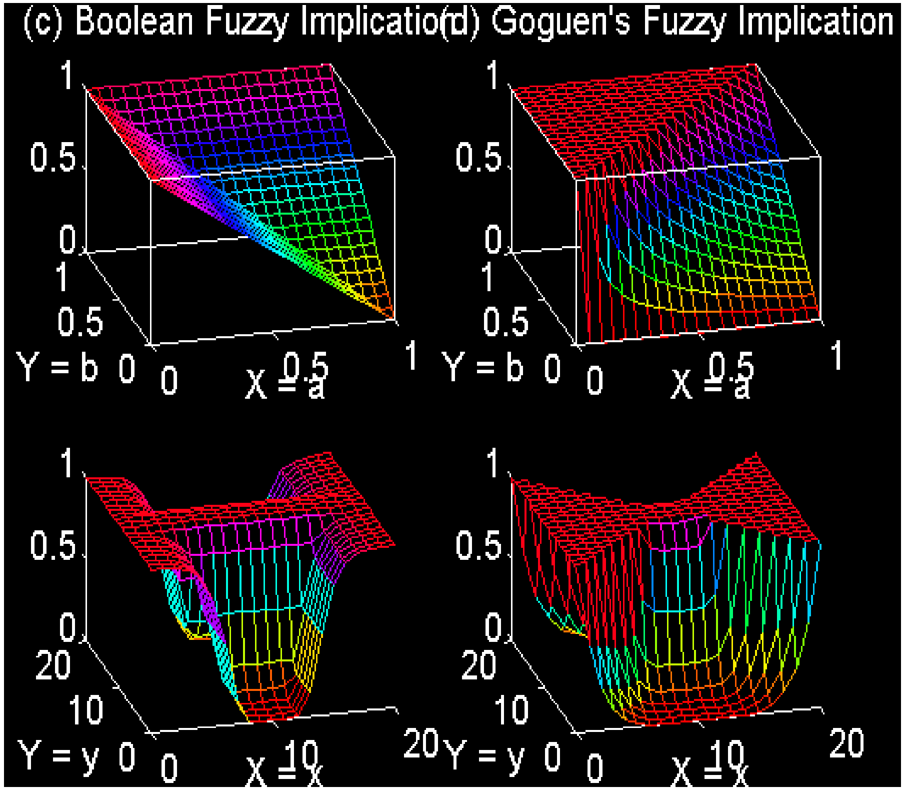


fuzimp.m

Introducción a la lógica difusa

A entails B (not A or B):



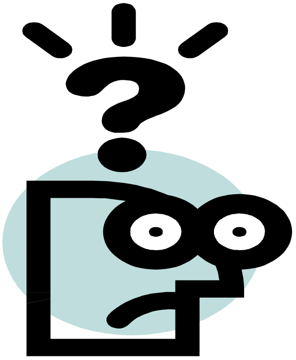


fuzimp.m

Introducción a la lógica difusa

Contenidos

- Conceptos y definiciones básicos de la lógica difusa
- Sets difusos y funciones de membresía
- Operaciones sobre sets difusos
- Inferencia usando lógica difusa



Introducción a la lógica difusa

Razonamiento difuso:

El Modus Ponens en reglas de lógica tradicional indica que podemos inferir la verdad de la proposición B basados en la verdad de A y en la implicación $A \rightarrow B$:

premisa 1 (input):	x es A
premisa 2 (regla):	if x es A then y is B,
consecuencia:	y es B

El proceso de razonamiento difuso utiliza el Modus Ponens Generalizado (GMP):

premisa 1 (input):	x es A'
premisa 2 (regla):	if x es A then y is B,
consecuencia:	y es B'

Introducción a la lógica difusa

Razonamiento difuso (cont):

Definición: **Razonamiento aproximado**, si A, A', y B son sets difusos de X, X e Y respectivamente. Asumiendo que ($A \rightarrow B$) se expresa como una relación R en $X \times Y$.

Entonces el set difuso inducido por x es A' y la regla difusa if x is A then y is B se define como:

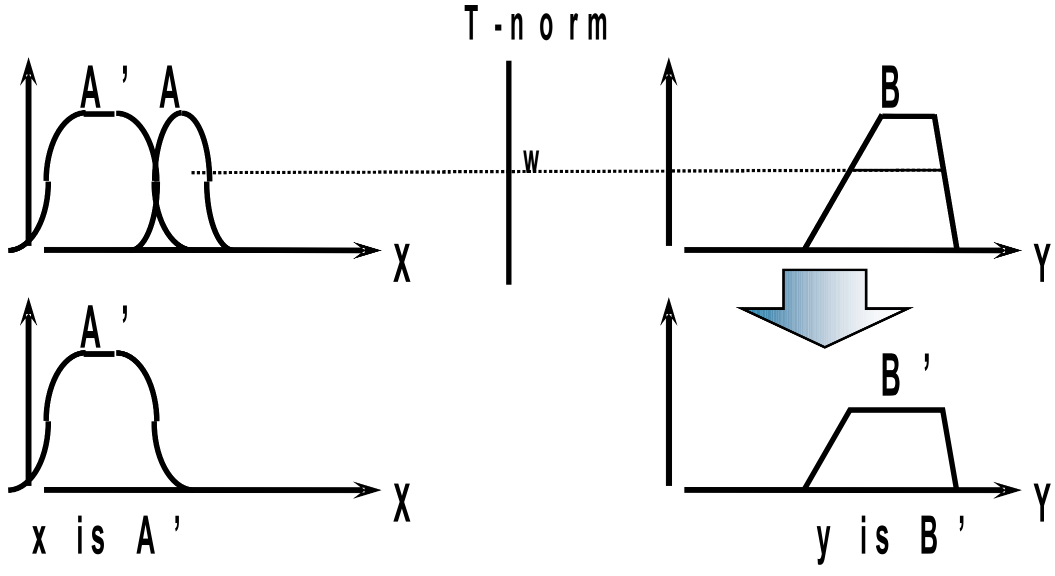
- $\mu_{B'}(y) = \max_x \min[\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)]$

Introducción a la lógica difusa

Razonamiento difuso (cont):

Si $\mu_{B'}(y)=\max_x \min[\mu_{A'}(x), \boldsymbol{\mu_R(x,y)}]$, entonces usando las funciones de implicación de Mamdani y la regla de composición max-min: $\mu_{B'}(y) = \max_x \min[\mu_{A'}(x), \boldsymbol{\mu_A(x) \cap \mu_B(y)}]$

$$= \max_x [\mu_{A'}(x) \cap \mu_A(x)] \cap \mu_B(y) = w \cap \mu_B(y)$$



Introducción a la lógica difusa

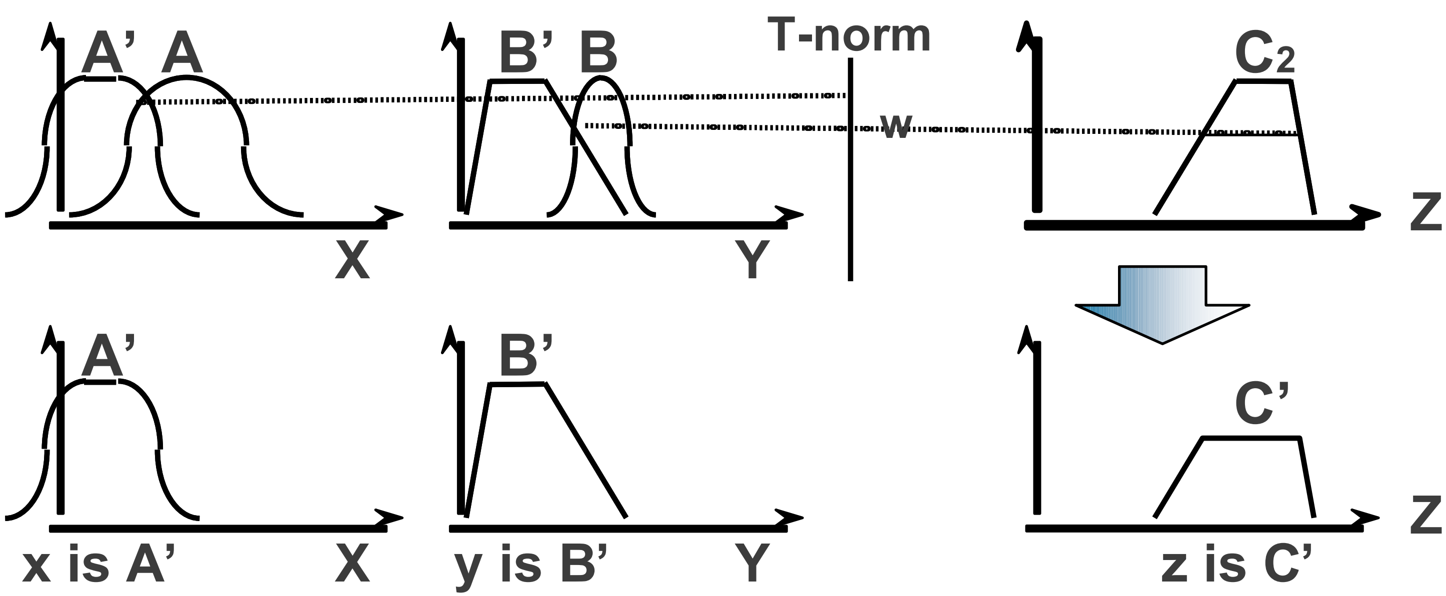
Razonamiento difuso (cont):

En casos con mas variables usando GMP:

premisa 1 (input): x is A' and y is B'

premisa 2 (regla): if x is A and y is B then z is C,

consecuencia c is C'



Introducción a la lógica difusa

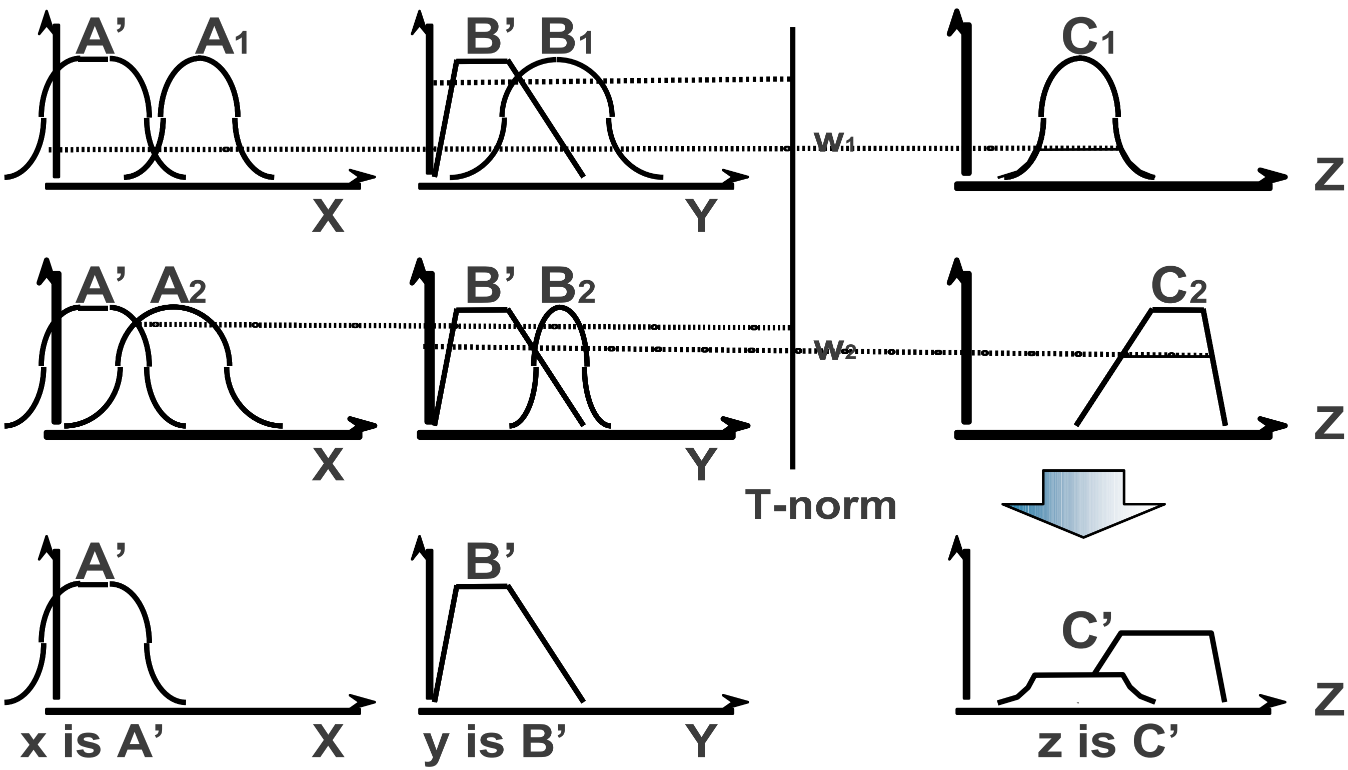
Razonamiento con dos reglas: En general se toma como la unión de las relaciones difusas correspondiente a las reglas.

Premisas: x is A’ and y is B’

Regla 1: if x is A1 and y is B1 then z is C1

Regla 2: if x is A2 and y is B2 then z is C2

Conclusión: z is C’



Introducción a la lógica difusa

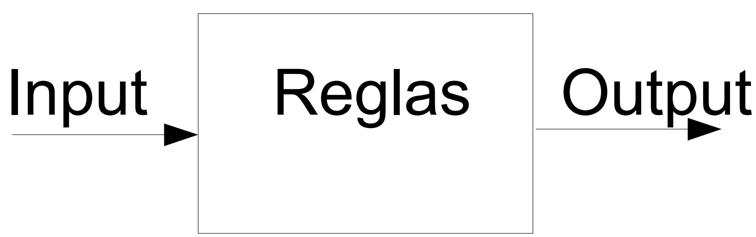
Inferencia usando lógica difusa:

- La computación usando inferencia basada en lógica difusa es un método de computo popular
- Hay muchas aplicaciones en áreas como control, clasificación, sistemas expertos, robótica y reconocimiento de patrones
- El sistema de inferencia difuso se conoce por muchos nombres como: sistema difuso de reglas, sistema experto difuso, modelo difuso, lógica asociativa difusa, controlador difuso

Introducción a la lógica difusa

Sistemas de inferencia usando lógica difusa:

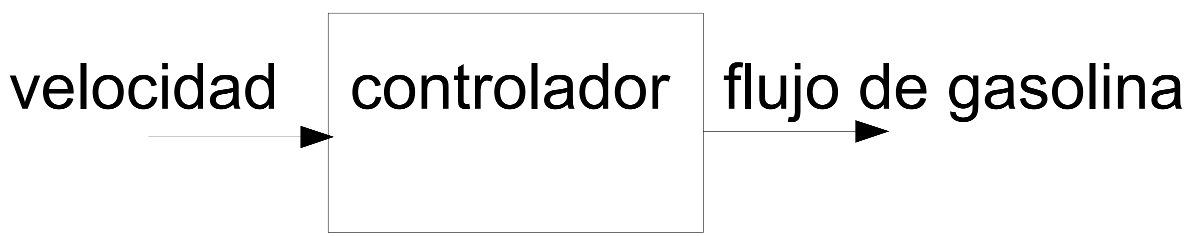
- El sistema de inferencia difuso consiste de tres componentes conceptuales:
  - reglas difusas,
  - diccionario (con funciones de pertenencia),
  - mecanismo de raciocinio



Introducción a la lógica difusa

Sistemas de inferencia usando lógica difusa (cont):

- Tipicamente los controladores se relacionan con el mundo externo a traves de valores exactos (no difusos)

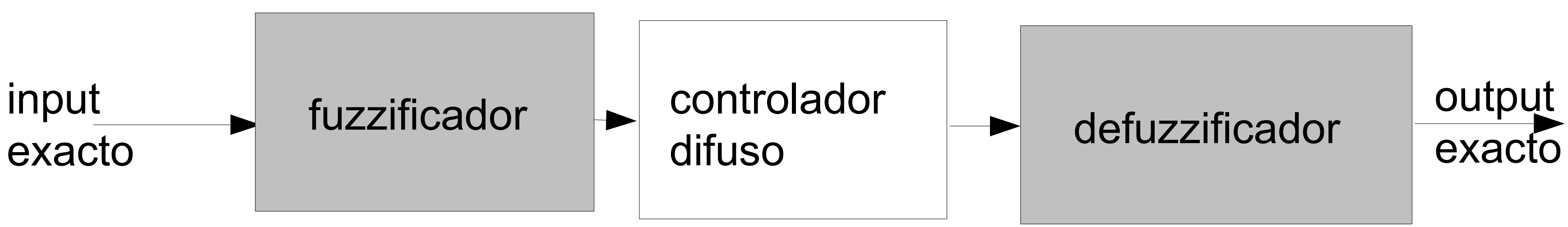


- Si el controlador usa logica difusa va a ser necesario alguna conversion

Introducción a la lógica difusa

Sistemas de inferencia usando lógica difusa (cont):

- Esto se denomina fuzzificacion y defuzzificacion.

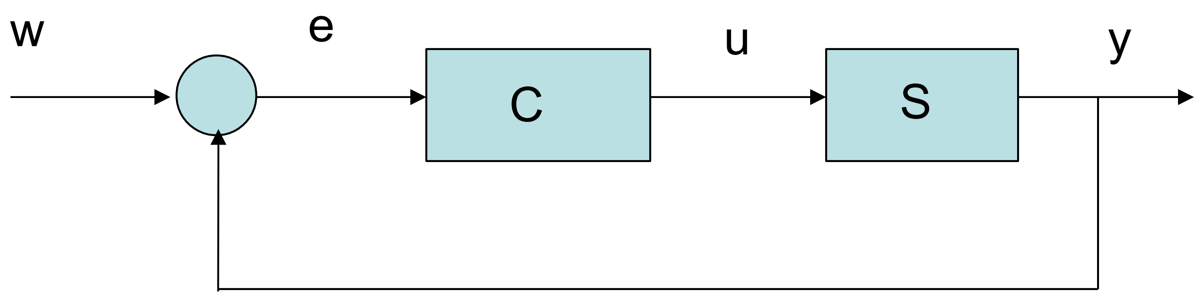


Introducción a la lógica difusa

Ejemplo: Controlador Mamdani usando lógica difusa

- Usando la lógica difusa y la teoría de razonamiento aproximada introducida por Zadeh es posible crear un controlador basado en esta logica
- La forma tradicional de las leyes de control con autorregulación (feedback) es:

  $u(k) = f(e(k), e(k-1),...,e(k-v), u(k-1), u(k-2), ..., u(k-v))$
- e es el error entre el punto de control w y el output y
- C es el controlador y S es el sistema siendo controlado
- La idea es diseñar C que minimiza el error (e=w-y) en el tiempo



Introducción a la lógica difusa

Controlador de lógica difusa (cont):

- El controlador de lógica difuso (Fuzzy Logic Controler) utiliza leyes de control consistentes en reglas lógicas IF...THEN en conjunto con funciones de pertenencia difusas para controlar un proceso y minimizar el error

- Los conjuntos y los operadores difusos son los sujetos y predicados de la lógica difusa.

- Las reglas lógicas IF-THEN son usadas para formular las expresiones condicionales que usan la lógica difusa

Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) :

El Mamdani FLC fue propuesto por Mamdani y Assilian en 1974, este FLC utiliza el error $e(k)$ y el cambio de error $\Delta e(k)$ para producir cambios en la función de output del controlador (puede ser $\mu(k)$ o $\Delta\mu(k)$)

- $e(k) = w(k) - y(k)$
- $\Delta e(k) = e(k) - e(k - 1)$
- $u(k) = F(e(k), \Delta e(k))$ o
- $\Delta u(k) = F(e(k), \Delta e(k))$

$e(k)$ se define como el punto de control menos el output:

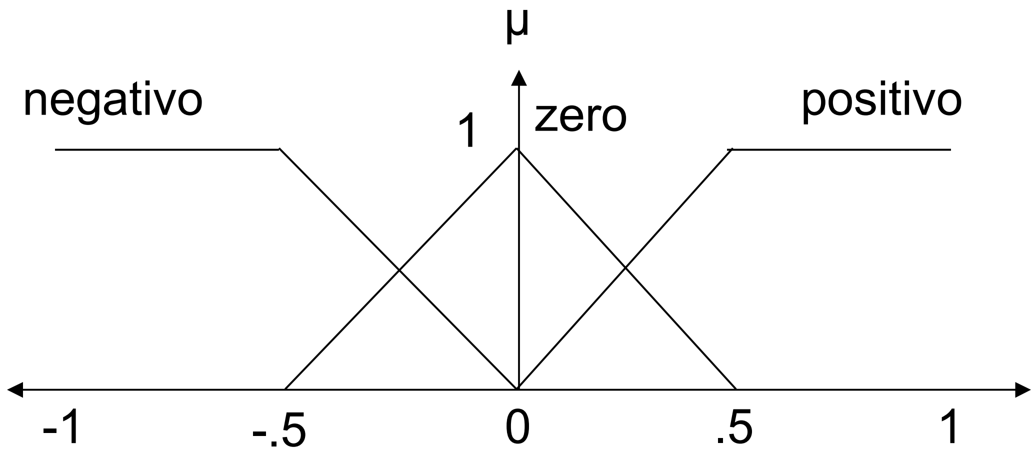
- Si $e(k) > 0$ entonces $w(k) > y(k)$
- Si $\Delta e(k) > 0$ entonces $e(k) > e(k-1)$

Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont) :

0. If e = positivo and Δe = aprox zero then Δu = positivo
1. If e = negativo and Δe = aprox zero then Δu = negative
2. If e = aprox zero and Δe = aprox zero then Δu = aprox zero
3. If e = aprox zero and Δe = positivo then Δu = positivo
4. If e = aprox zero and Δe = negativo then Δu = negativo

Funciónes de pertenencia μ(e), μ(Δe), μ(u):



Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont) :

- Otra manera de definir las reglas del controlador es usando una matriz:

e(k)

Valores de la función de pertenencia de input e(k)

Δe(k)	**N**	**Z**	**P**
N	*N*	*N*	*Z*
Z	*N*	*Z*	*P*
P	*Z*	*P*	*P*

Valores de la función de pertenencia de output Δu(k)

Valores de la función de pertenencia de input Δe(k)

Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont) :

Algoritmo del Mamdani FLC:

1. Usando el valor del antecedente de cada una de las reglas (IF...)
2. Determinar la consecuencia (THEN ...) de cada una de las reglas
3. Agregar todos los outputs de las reglas para obtener el output de todo el sistema (este es una o mas funciónes de pertenencia difusa), también se llama determinar el grado de disparo de todas las reglas (degree of firing)
4. Defuzificar el output para obtener un valor exacto, se pueden usar varios métodos como el COA (centroide) o el MOM

Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont) :

Defuzificacion usando el centroide:

$$Centroide = \frac{\int f(x)xdx}{\int f(x)dx}$$

En forma discreta:

$$Centroide = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x)_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} f(x)_i}$$

Introducción a la lógica difusa

Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont) :

Ejemplo de defuzificacion usando el centroide:

$$Cg = \frac{\int_{0}^{4.1} 0.5x\,dx + \int_{4.1}^{6.1} \frac{x}{10} x\,dx + \int_{6.1}^{10} .8x\,dx}{\int_{0}^{4.1} 0.5\,dx + \int_{4.1}^{6.1} \frac{x}{10}\,dx + \int_{6.1}^{10} .8\,dx}$$

En forma discreta con 10 muestras:

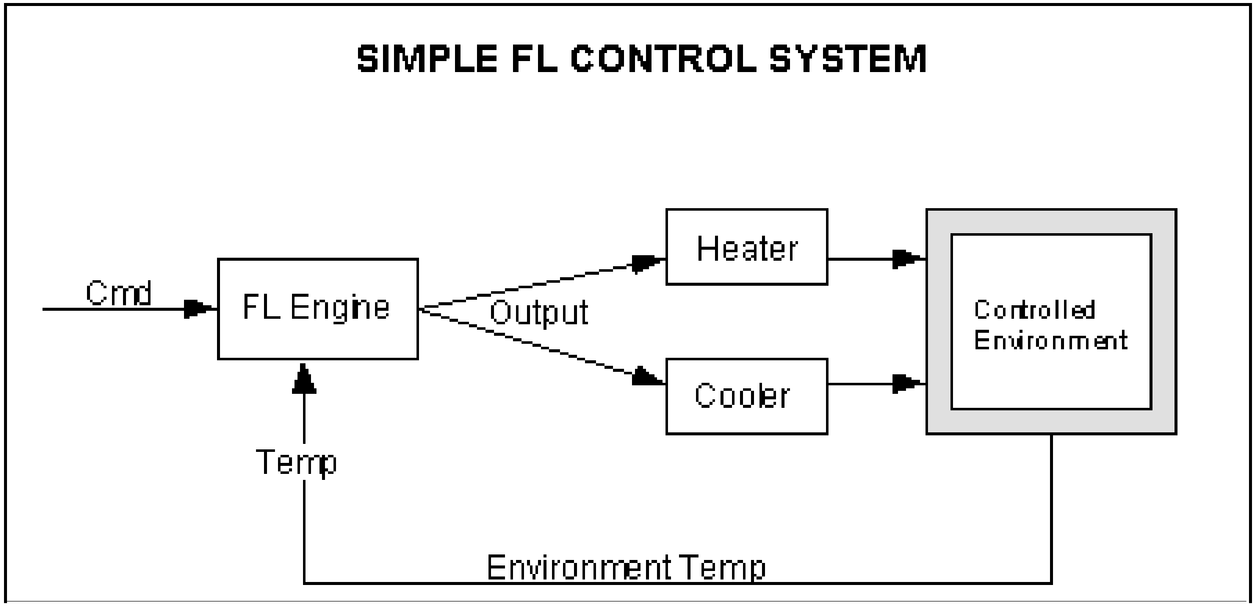
$$Cg = \frac{0\times.5 + 1\times.5 + 2\times.5 + 3\times.5 + 4\times.5 + 5\times(5/10) + 6\times(6/10) + 7\times.8 + 8\times.8 + 9\times.8}{.5 + .5 + .5 + .5 + .5 + (5/10) + (6/10) + .8 + .8 + .8}$$

Introducción a la lógica difusa

Ejemplo Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler):

(El siguiente ejemplo proviene del sitio web de la Seattle Robotics Society)

- Este ejemplo es un sistema de control de temperatura...



Introducción a la lógica difusa

Ejemplo Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont):

En el ejemplo se quiere minimizar el error entre el Cmd y Temp

- Error: Cmd - Temp (+ cold, - hot)
- dE/dT: (+ cooling, - heating)
- Out: Heat, NO CHANGE or COOL

Variables linguisticas usadas en el ejemplo:

- "N" = "negative" error or error-dot input level (input negativo)
- "Z" = "zero" error or error-dot input level (input zero)
- "P" = "positive" error or error-dot input level (input positivo)
- "H" = "Heat" output response (output es calentar o “Heat”)
- "-" = "No Change" to current output (output es ningun cambio o “No Change”)
- "C" = "Cool" output response (output es enfriar o “Cool”

Introducción a la lógica difusa

Ejemplo (cont): e(k)= -1.0F (Hot), Δe(k) = +2.5 F (Cooling)

Función de pertenencia del input e (error):

e(k)= -1.0 F (HOT)

$\rightarrow e_{neg}(-1) = 0.5$, $e_{zero}(-1) = 0.5$

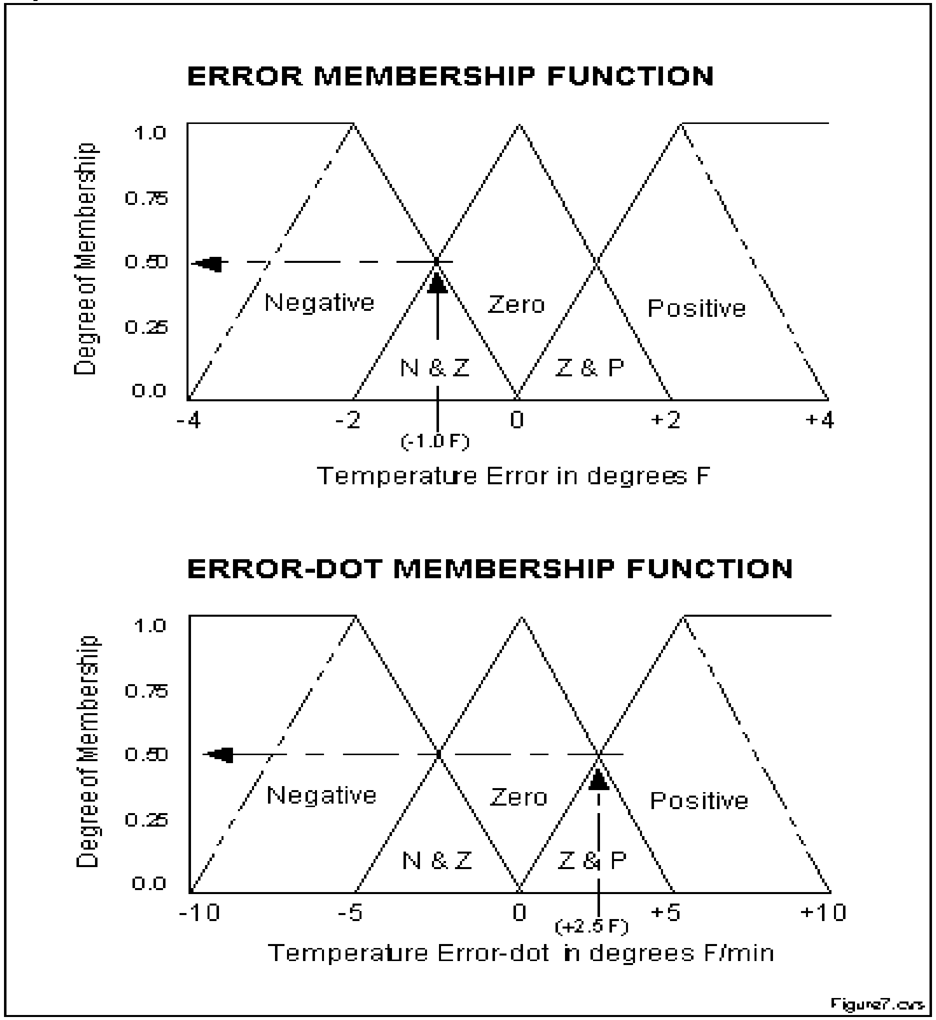
y $e_{positive}(-1) = 0$

Función de pertenencia de input Δe:

Δe(k) = +2.5 F (COOLING)

$\rightarrow \Delta e_{negative}(2.5) = 0$,

$\Delta e_{zero}(2.5) = 0.5$ y $\Delta e_{pos}(2.5) = 0.5$



Introducción a la lógica difusa

Ejemplo Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont):

Pasos 1 y 2: Encontrar nivel de disparo y output en todas las reglas e y Δe

Paso 3: Obtener funciones del pertenencia del output:

"Error" selecciona reglas 1,2,4,5,7,8, "error-dot" reglas 4 a 9.

Agregar outputs usando producto lógico (AND) para obtener las reglas que se activan (intersección $\cap$ en rojo)... se activaron 4, 5, 7, 8 (grado de disparo o degree of firing)

1. If $(e < 0)$ AND $(\Delta e < 0)$ then $u(k)$=Cool (0.5 & 0.0 = 0.0)
2. If $(e = 0)$ AND $(\Delta e < 0)$ then $u(k)$=Cool (0.5 & 0.0 = 0.0)
3. If $(e > 0)$ AND $(\Delta e < 0)$ then $u(k)$=Heat (0.0 & 0.0 = 0.0)
4. If $(e < 0)$ AND $(\Delta e = 0)$ then $u(k)$=Cool (0.5 & 0.5 = 0.5)
5. If $(e = 0)$ AND $(\Delta e = 0)$ then $u(k)$=No_Chng (0.5 & 0.5 = 0.5)
6. If $(e > 0)$ AND $(\Delta e = 0)$ then $u(k)$=Heat (0.0 & 0.5 = 0.0)
7. If $(e < 0)$ AND $(\Delta e > 0)$ then $u(k)$=Cool (0.5 & 0.5 = 0.5)
8. If $(e = 0)$ AND $(\Delta e > 0)$ then $u(k)$=Heat (0.5 & 0.5 = 0.5)
9. If $(e > 0)$ AND $(\Delta e > 0)$ then $u(k)$=Heat (0.0 & 0.5 = 0.0)

Introducción a la lógica difusa

Ejemplo Mamdani FLC (Fuzzy Logic Controler) (cont):

Paso 4: Defuzificar usando algoritmo de Centroide para obtener un valor exacto que es el próximo output para calentar o enfriar el ambiente controlado...

$$Centroide = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x)_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} f(x)_i}$$

Calcular fuerza (strength) de las reglas usando Root Sum Squared (RSS):

"Heat" = $(R_3^{\ 2} + R_6^{\ 2} + R_8^{\ 2} + R_9^{\ 2})^{1/2}$

$= (0^2 + 0^2 + 0.5^2 + 0^2)^{1/2} = 0.5$ (Heat)

"No-Chg" = $(R_5^{\ 2})^{1/2} = (0.5^2)^{1/2} = 0.5$ (No Change)

"Cool" = $(R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2} + R_4^{\ 2} + R_7^{\ 2})^{1/2} = (0^2 + 0^2 + 0.5^2 + 0.5^2)^{1/2} = 0.707$ (Cool)

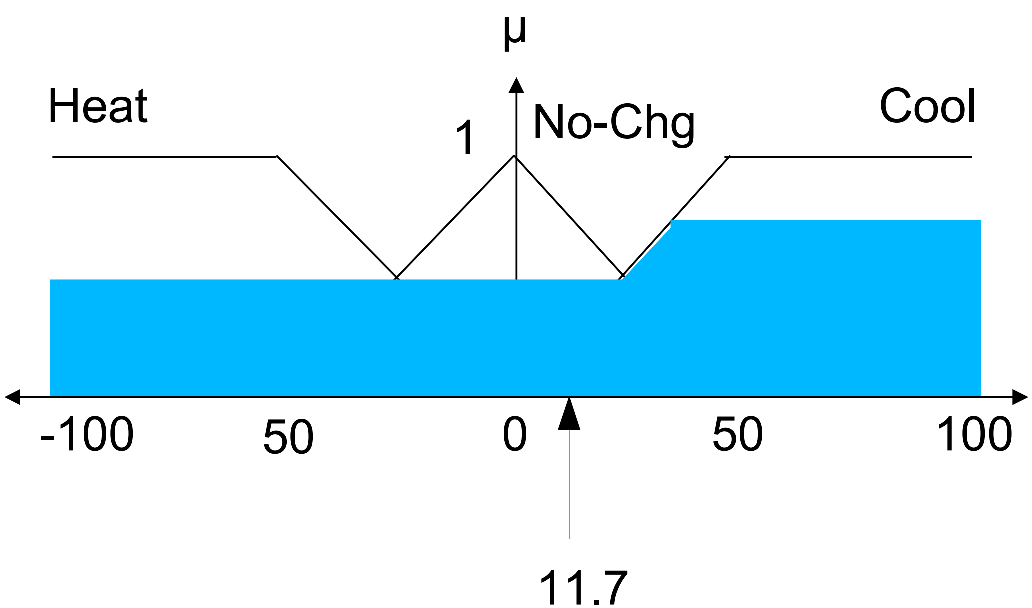
Usando RSS-Centroide:

OUTPUT = (heat_center * heat_strength + zero_center * zero_strength + cool_center * cool_strength) / (heat_strength + zero_strength + cool_strength)

(-100 * 0.5 + 0 * 0.5 + 100 * 0.707)/ (0.5 + 0.5 + 0.707) = **11.7%**

Introducción a la lógica difusa

Ejemplo (cont):



La coordenada horizontal se toma como el valor exacto. En este ejemplo el valor de 11.7% (Enfriando) parece lógico ya que el e = -1 F de input indica que todavia esta HOT a pesar de que ya se estaba enfriando ($\Delta e(k)$ = +2.5 F, COOLING).

Introducción a la lógica difusa

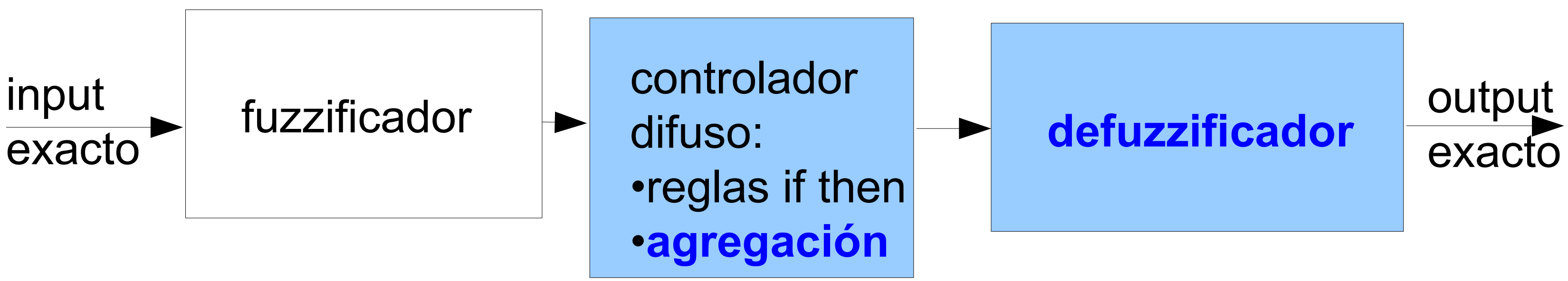
Sistemas de inferencia usando lógica difusa (cont):

- El ejemplo anterior es basado en un modelo de inferencia difuso llamado el modelo Mamdani
- Otro modelo utilizado es el modelo Sugeno (también conocido como modelo Takagi, Sugeno, Kang o TSK)
- Un tercer modelo es el modelo Tsukamoto
- Cada modelo tiene características especificas que lo hacen mas ameno a ser usado en una implementación dependiendo del problema a resolver

Introducción a la lógica difusa

Sistemas de inferencia usando lógica difusa (cont):

- La principal diferencia entre los modelos es en las consecuencias de las reglas y en los métodos de agregación y defuzificacion



Introducción a la lógica difusa

El modelo Mamdani:

- Fue uno de los primeros métodos de control difuso obtenidos basados en la experiencia de operadores humanos
- En el modelo Mamdani se pueden usar diferentes operadores (siempre que sean T-norm o T-conorm)

Introducción a la lógica difusa

Variantes de T-norm y T-conorm en modelos Mamdani:

Para implementar un modelo Mamdani hay que asignar un operador basado en las operaciones seleccionadas:

- AND: (usualmente T-norm) para calcular la fuerza de disparo de una regla con antecedentes que usan AND
- OR: (usualmente T-conorm) para calcular la fuerza de disparo de una regla con antecedentes que usan OR
- Implicación: (usualmente T-norm) para calcular consecuentes
- Agregación: (usualmente T-conorm) para agregar consecuentes y generar una función de pertenencia del output
- Defuzificacion: para transformar la función de pertenencia (output difuso) a un output exacto

Introducción a la lógica difusa

Union e Intersección de lógica difusa ($A \cup B$, $A \cap B$) (cont) :

Cuatro posibles operadores T-norm:

- $T_{min}(a,b) = \min(a, b) = A \cap B$ (minimo)
- $T_{ap}(a,b) = ab$ (producto algebraico)
- $T_{bp}(a,b) = 0 \cup (a+ b-1)$ (producto limitado)
- $T_{dp}(a,b) = a$ if $b=1$, (producto drastico)

  $= b$ if $a=1$,

  $= 0$ if $a,b < 1$

Introducción a la lógica difusa

Union e Intersección de lógica difusa ($A \cup B$, $A \cap B$) (cont) :

Cuatro posibles operadores T-conorm:

- $S(a,b) = \max(a, b) = A \cup B$ (maximo)
- $S(a,b) = a+b-ab$ (suma algebraico)
- $S(a,b) = 1 \cap (a + b)$ (suma limitada)
- $S(a,b) = a$ if $b=0$, (suma drastica)

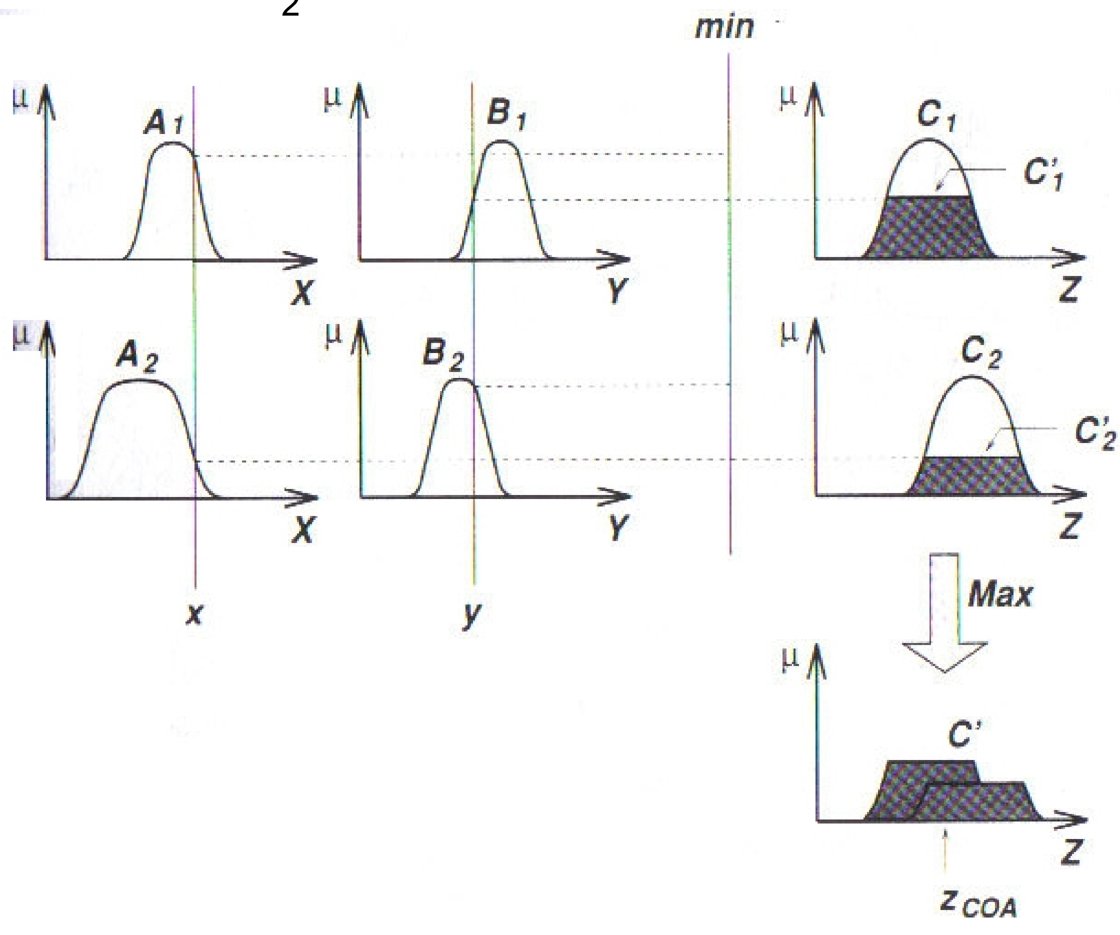
  $= b$ if $a=0$,

  $= 1$ if $a,b > 0$

Introducción a la lógica difusa

El modelo Mamdani (original):

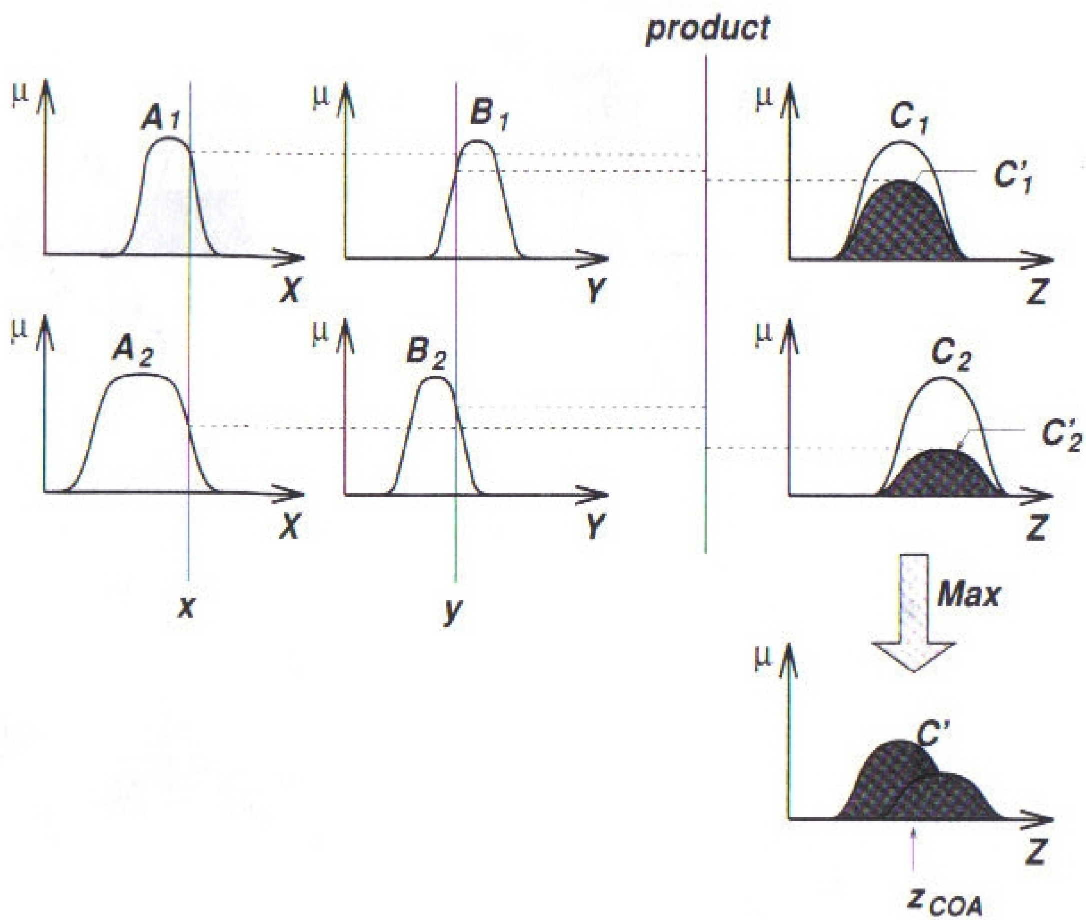
- If x is A_1 and y is B_1 then z is C_1
- If x is A_2 and y is B_2 then z is C_2
- T-norm = min
- T-conorm = max



Introducción a la lógica difusa

El modelo Mamdani II:

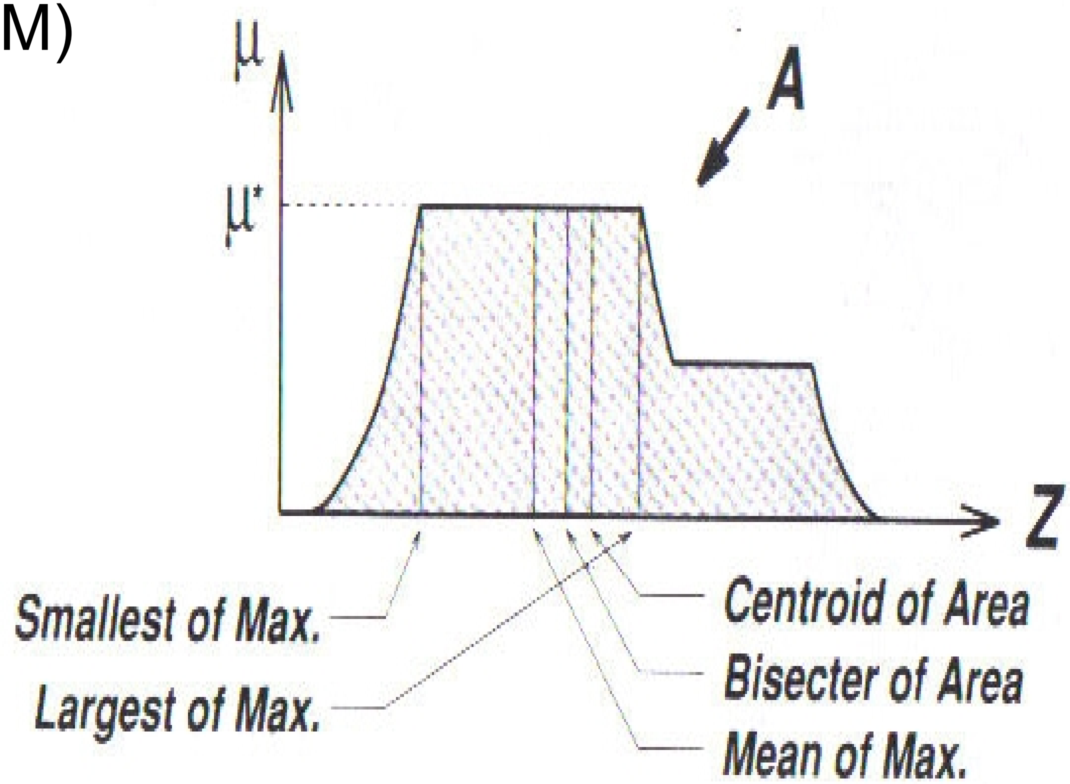
- If x is A_1 and y is B_1 then z is C_1
- If x is A_2 and y is B_2 then z is C_2
- T-norm = product
- T-conorm = max



Introducción a la lógica difusa

Métodos de defuzzificacion usados en Mamdani:

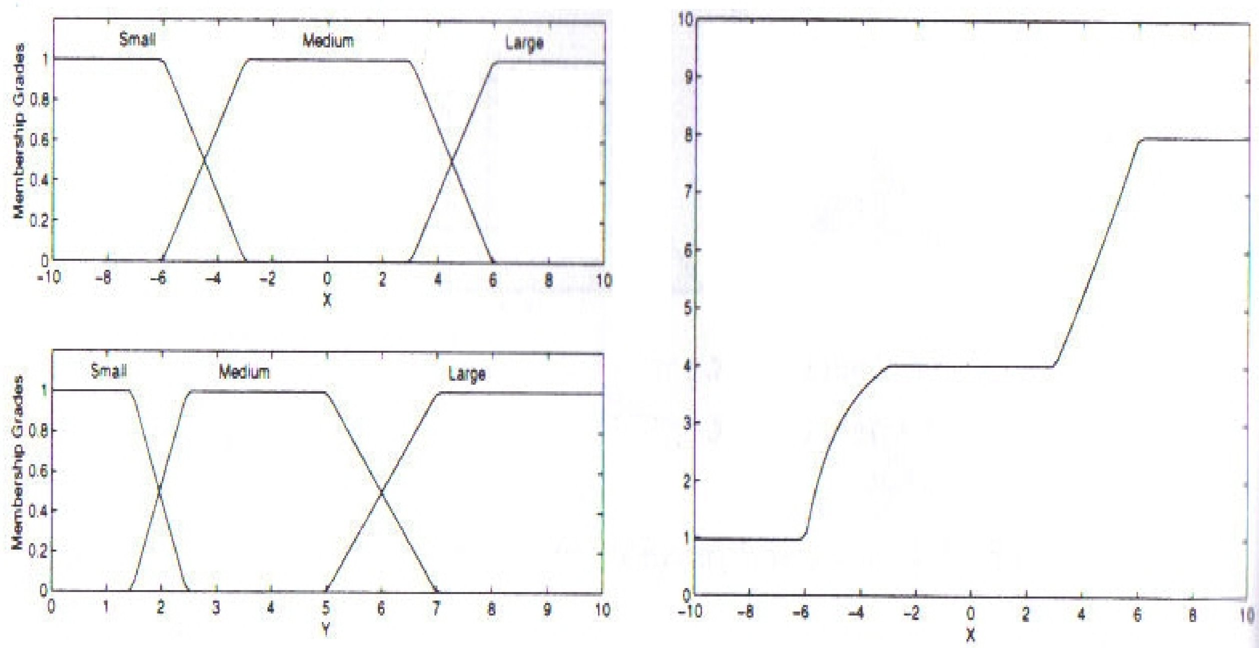
- Centroid (Centroid o COA)
- Bisector de un Area (BOA)
- Mas pequeño, medio, máximo de un máximo (SOM, MOM, LOM)



Introducción a la lógica difusa

Modelo Mamdani de tres reglas con un input y un output:

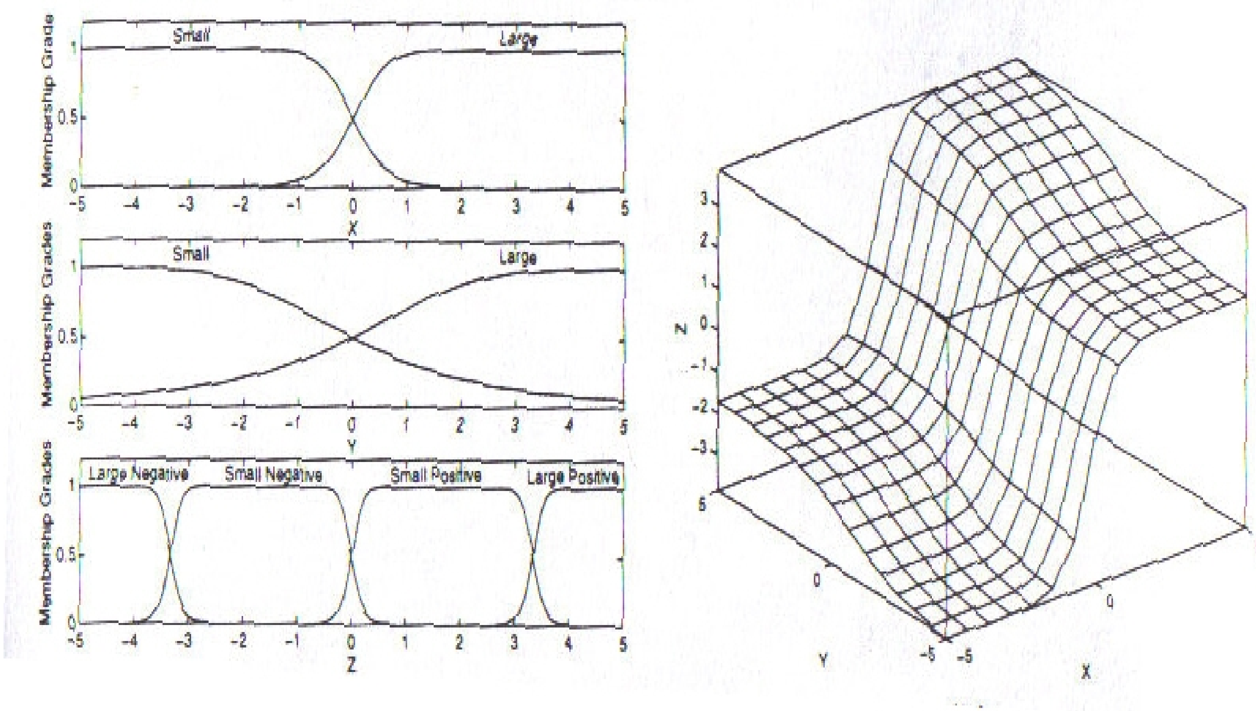
- Usando composición max-min, defuzificacion centroide
- If X is small then Y is small
- If X is medium then Y is medium
- If X is large then Y is large



Introducción a la lógica difusa

Mamdani de cuatro reglas con dos input y un output:

- Usando composición max-min, defuzificacion centroide
- If X is small and Y is small then Z is negative large
- If X is small and Y is large then Z is negative small
- If X is large and Y is small then Z is positive small
- If X is large and Y is large then Z is positive large



Introducción a la lógica difusa

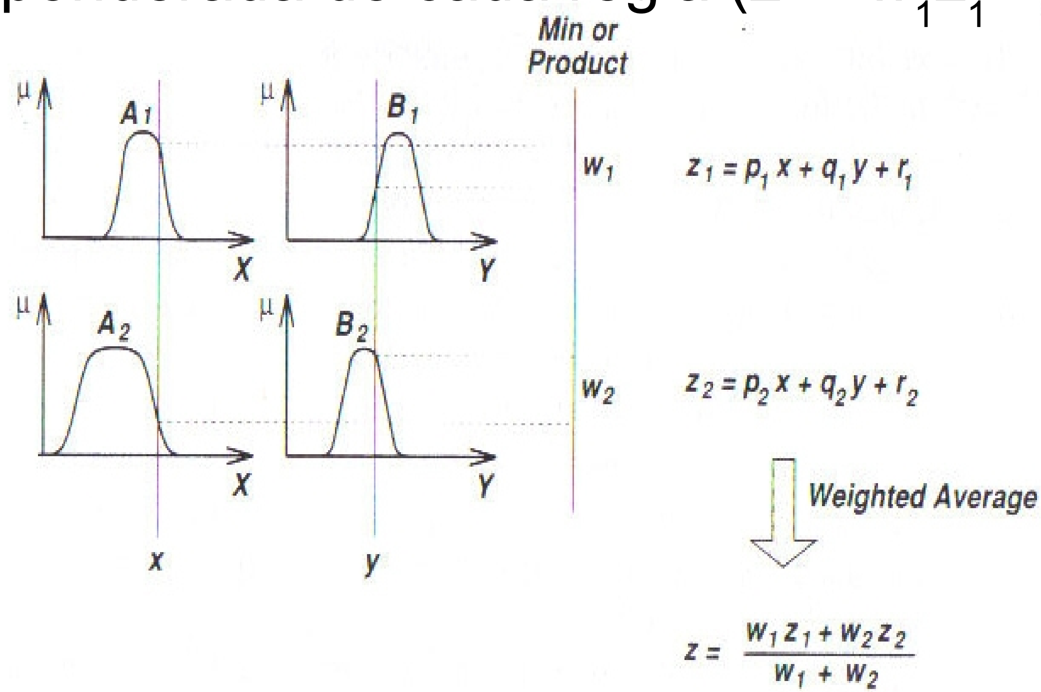
El modelo Sugeno:

- Otro modelo desarrollado para la inferencia difusa, utiliza una función como consecuente:
  - If x is A and y is B then z = f(x, y)

- Z = f(x, y) es una función exacta en el consecuente
- f(x, y) es un polinomio
  - Si f(x, y) es constante el modelo Sugeno es de orden zero
  - Si f(x, y) es de primer orden el modelo Sugeno es de orden uno

El modelo Sugeno (cont):

- En el modelo Sugeno no es necesaria la defuzificacion, ya que cada regla tiene un output exacto, alternativas son:
  - Promedio ponderada de cada regla
  - Suma ponderada de cada regla ($z' = w_1 z_1 + w_2 z_2$)



Introducción a la lógica difusa

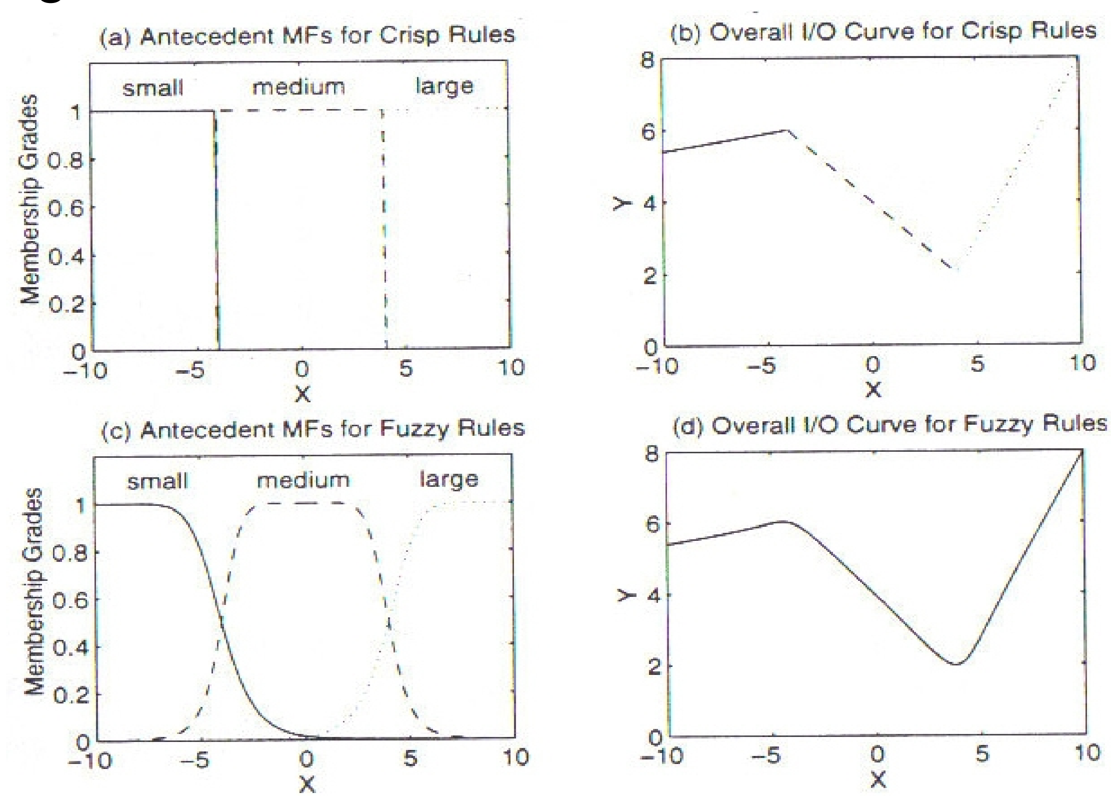
El modelo Sugeno (cont):

- El output continuo del modelo Sugeno de orden zero depende de que las funciones de pertenencia de los antecedentes estén suficientemente traslapados

Introducción a la lógica difusa

Modelo Sugeno con antecedentes exactos y difusos:

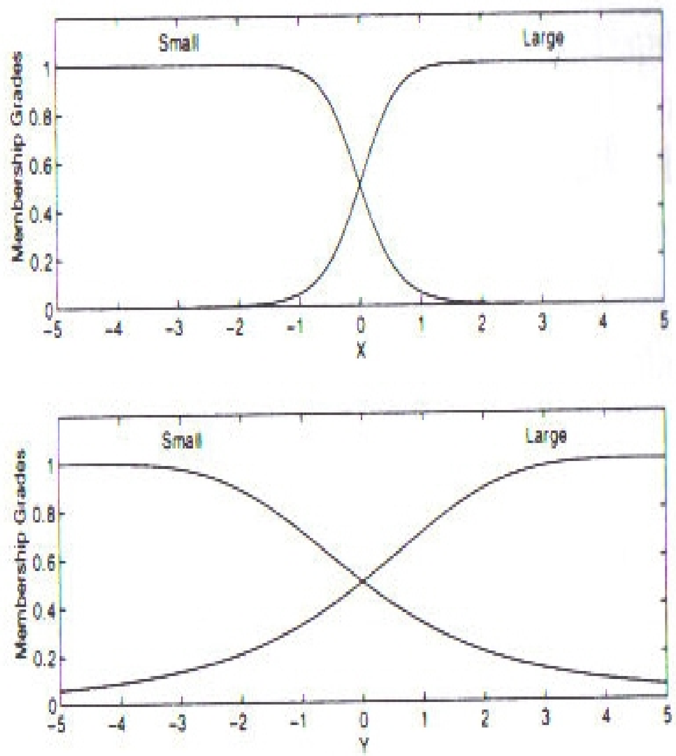
- Consideren un modelo Sugeno de un input:
  - If X is small then Y = 0.1x + 6.4
  - If X is medium then Y = -0.5x + 4
  - If X is large then Y = x - 4

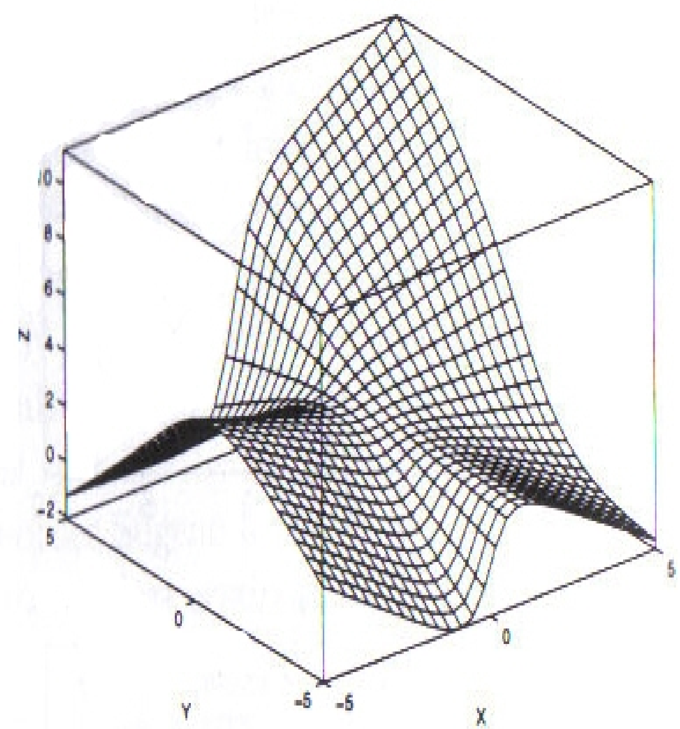


Introducción a la lógica difusa

Modelo Sugeno con cuatro reglas, dos inputs y un output:

- If X is small and Y is small then Z = -x + y + 1
- If X is small and Y is large then Z = -y + 3
- If X is large and Y is small then Z = -x + 3
- If X is large and Y is large then Z = x +y + 3





Introducción a la lógica difusa

Modelo Tsukamoto:

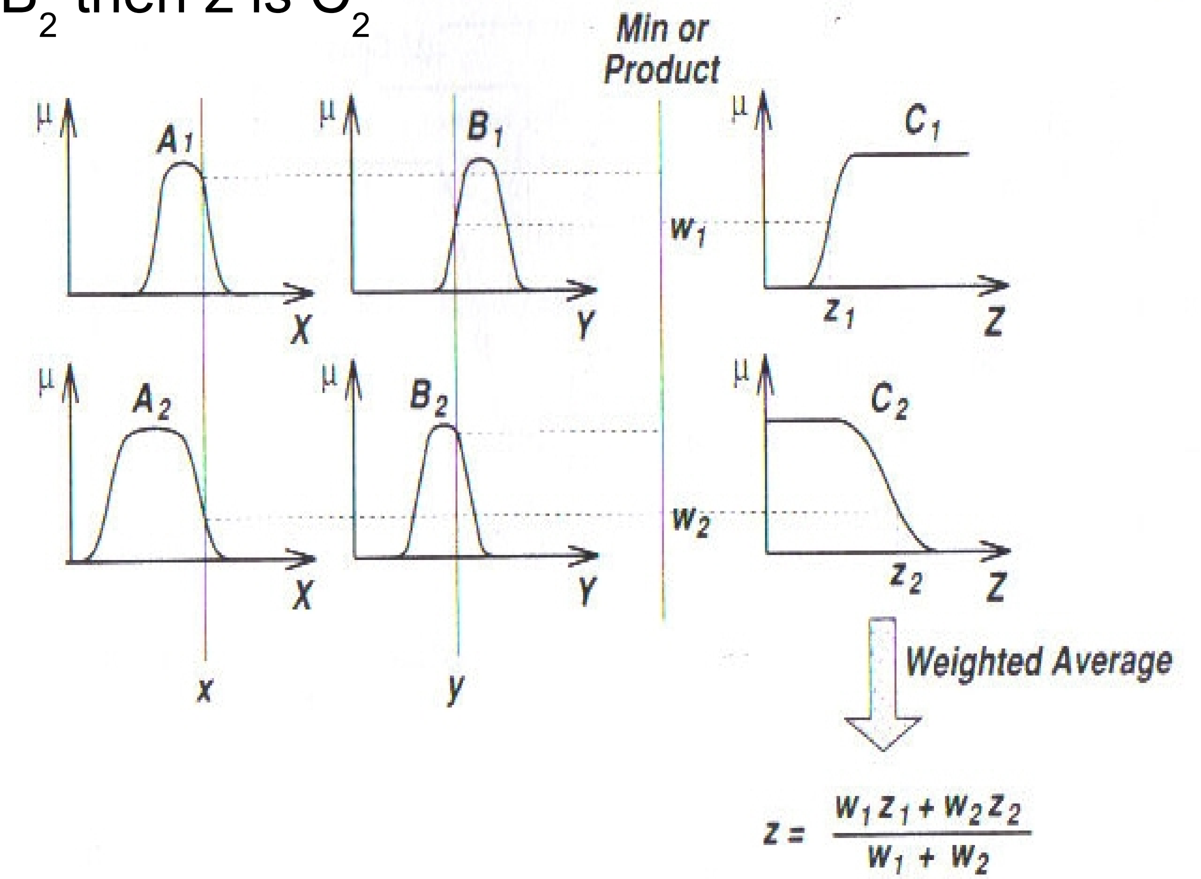
- En este modelo la función consecuente es un set difuso con una función monotonica:
  - If x is A and y is B then z is C

- El output de cada regla se define como un valor exacto inducido por la fuerza de disparo de cada regla
- Cada regla tiene un output exacto
- Este metodo no necesita defuzificacion ya que agrega los outputs exactos de cada regla usando el promedio ponderado

Introducción a la lógica difusa

Modelo Tsukamoto con dos reglas dos inputs y un output:

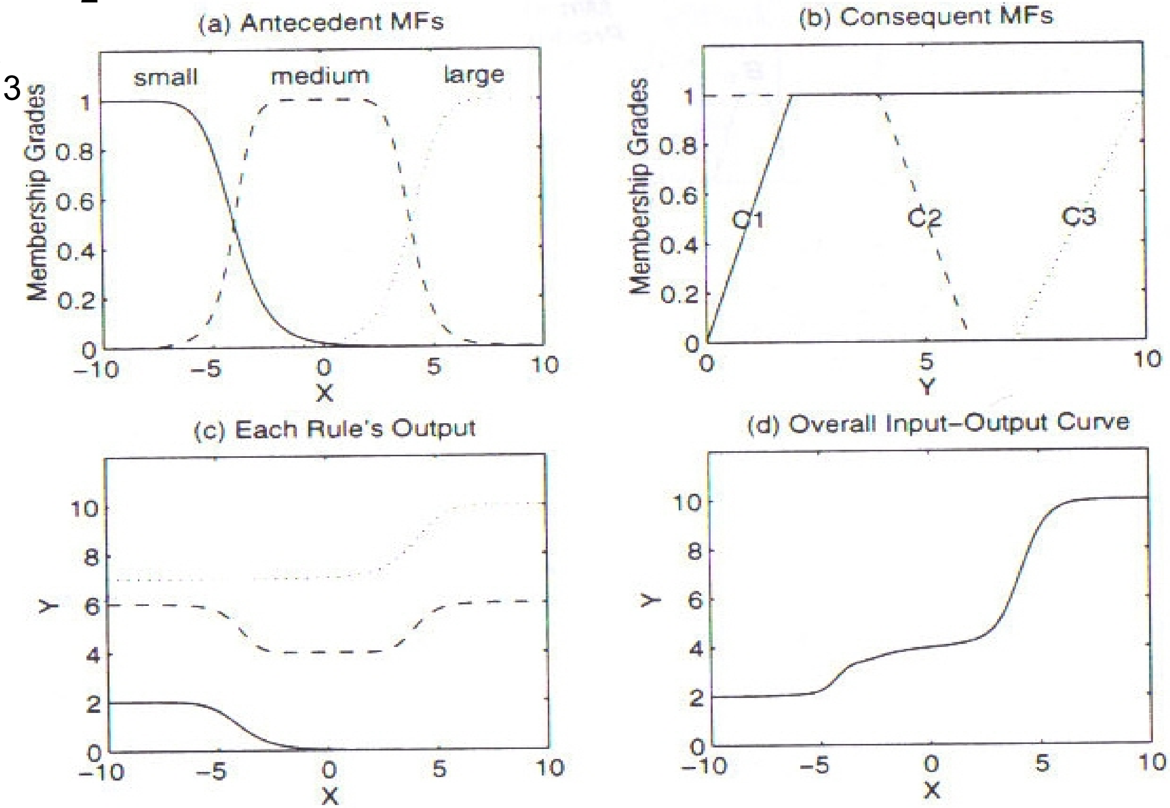
- If x is A_1 and y is B_1 then z is C_1
- If x is A_2 and y is B_2 then z is C_2



Introducción a la lógica difusa

Modelo Tsukamoto con tres reglas un input y un output (cont):

- If X is small then Y is C_1
- If X is medium then Y is C_2
- If X is large then Y is C_3



Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso:

- La idea del modelamiento difuso es dividir (partición) los posibles valores de input (antecedentes)
- Los consecuentes pueden ser funciones de pertenencia (Mamdani y Tsukamoto), valores constantes (Sugeno de orden zero) o funciones lineares (Sugeno)
- Los diferentes consecuentes resultan en diferentes sistemas de inferencia pero los antecedentes son los mismos

Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso: Métodos de partición del input:

a) Grid partition: dividir el espacio del input en celdas de igual tamaño e igual distribución

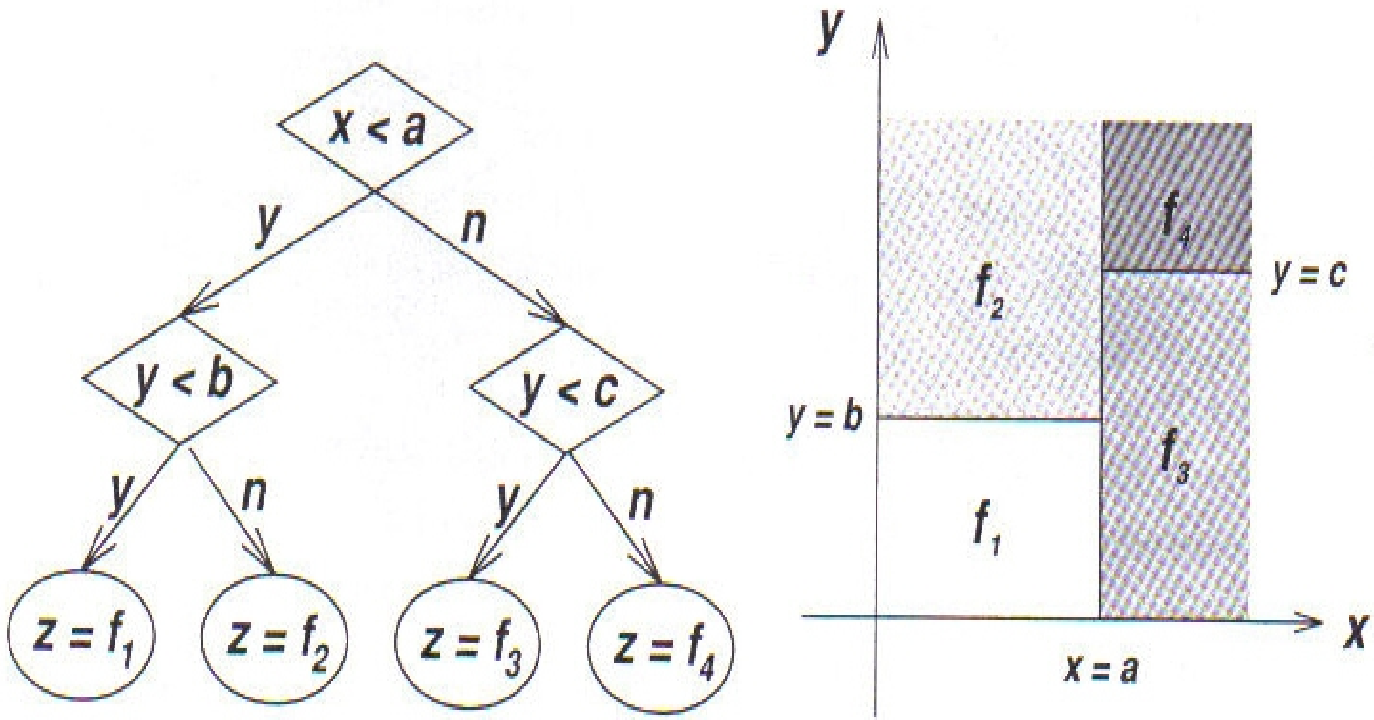
- Sufre de un problema de dimensionalidad
- Ej: Modelo con 3 inputs y 2 funciones (large, small) de pertenencia por input: A, B, C $\rightarrow 2^3 = 8$ reglas,
- Modelo con 4 inputs y 3 funciones de pertenencia (large, medium, small) por input:
- A, B, C, D $\rightarrow 3^4 = 81$ reglas, ...

Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso: Métodos de partición del input (cont)

b) Tree partition: dividir el espacio de búsqueda en celdas de diferente tamaño y basado en la lógica de un árbol

- No tiene el problema exponencial de grid partition
- Muchas veces el significado de las variables no es tan genérico lingüísticamente como en Grid (no es tan ortogonal)
- Usado en el algoritmo CART (Jang. Ch14)

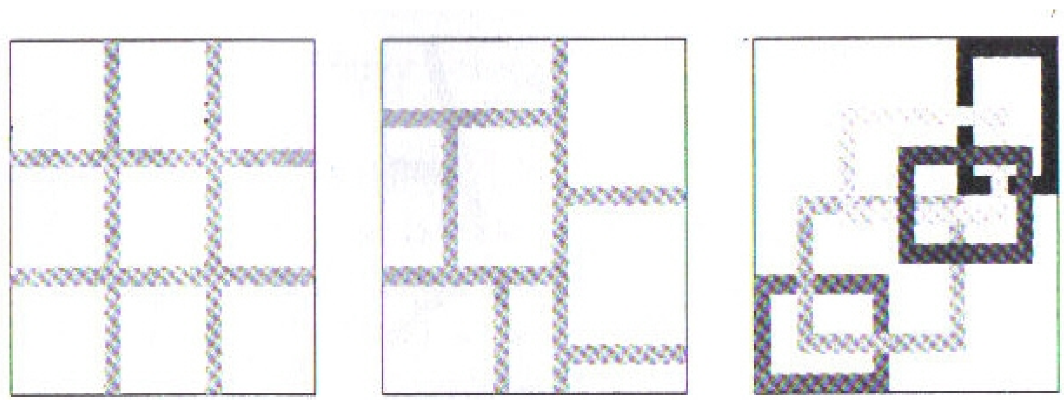


Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso: Métodos de partición del input (cont)

c) Scatter partition: no cubrir el espacio de búsqueda completo si no que solo un subconjunto de este

- La partición es decidida por específicos pares de datos de input-output
- El significado de las variables no es genérico linguisticamente
- No es ortogonal y hay traslapado posible



(a) (b) (c)

Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso: reglas generales

- Típicamente un sistema difuso tiene que replicar (o mejorar) el accionamiento de un sistema de control existente:
  - Un operador a cargo de un proceso en una planta química
  - Un operador a cargo de un tren del metro
  - Un operador a cargo de monitorear una linea del metro
  - Un medico especialista en cierto diagnostico
  - etc
- El sistema difuso se convierte en un sistema experto en el cual las reglas que utiliza son dictadas por la lógica que utiliza el experto original (reglas ↔ conocimiento del dominio del problema)
- Cuando solo se tienen pares de datos de input → output entonces se pueden usar métodos para identificar el sistema y modelarlo (datos numéricos ↔ conocimiento del dominio del problema)

Introducción a la lógica difusa

Modelamiento difuso: pasos

Pasos iniciales:

- Seleccionar variables relevantes de input y output
- Elegir un tipo especifico de sistema de inferencia
- Determinar el numero de términos lingüísticos (basados en variables)
- Diseñar una colección de reglas if-then difusas

Después de estos pasos iniciales típicamente se desea mejorar el modelo:

- Elegir funciones de pertenencia correctamente parametrizadas
- Mejorar las reglas y los parámetros de la funciones de pertenencia
- Refinar los parámetros de las funciones de pertenencia usando métodos de optimización (Ej. Gradiente, GA, GP,...)

Introducción a la lógica difusa

Referencias:

[1] Yager, R., Filev, D., Essentials of Fuzzy Modeling and Control, Wiley Interscience, NY, 1994

[2] Kartalopoulos, S., Understanding Neural Networks and Fuzzy Logic, IEEE PRESS, NY, 1994

[3] Jang, J., et al, Neuro-Fuzzy and Soft Computing, Prentice Hall,1997

[4] www.seattlerobotics.org