بسمه تعالی

تمرین پنجم کنترل پیشرفته

"طراحی کنترلر و مشاهده گر برای دو پاندول معکوس"

(MIMO)

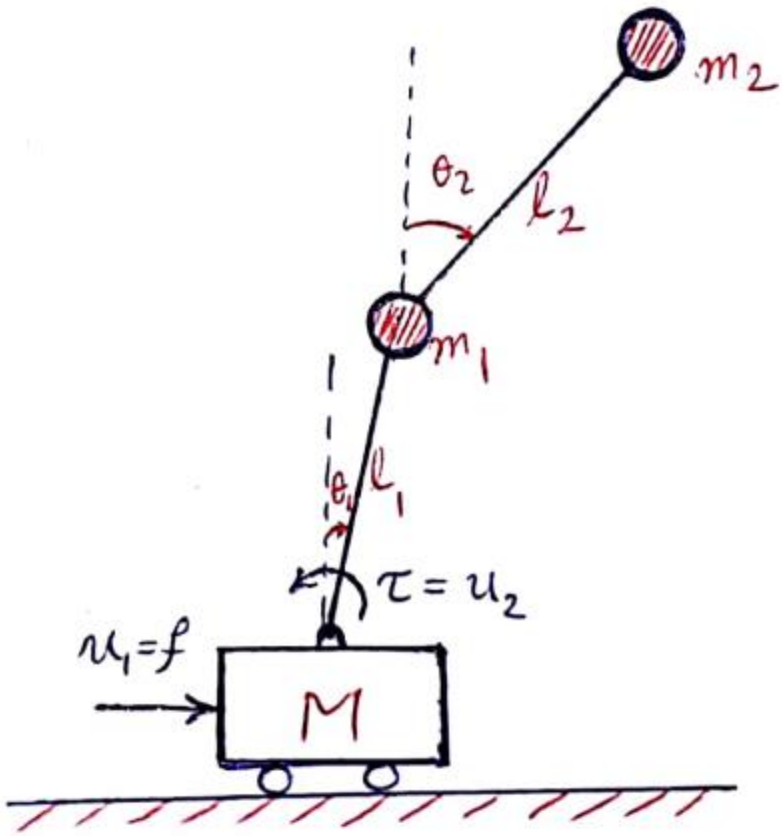
نام و نام خانوادگی:

ایمان شریفی

۹۸۲۱۰۱۸۴

استاد درس:

دکتر سالاریه



شکل ۱ : شماتیک کلی پاندول معکوس

۱-معادلات حاکم را استخراج کنید و حول نقطه تعادل خطی سازی کنید.

معادلات غیرخطی:

برای بدست آوردن معادلات حاکم از معادلات لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\frac{d}{dt}q(t) = \dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\theta_1(t) = \dot{\theta}_1, \quad \frac{d}{dt}\theta_2(t) = \dot{\theta}_2.$$

$$q_0 := \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad q_1 := \begin{bmatrix} q + l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \text{ and } \qquad q_2 := \begin{bmatrix} q + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

انرژی جنبشی سیستم:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\left\{m\|\dot{q}_0\|^2 + m_1\|\dot{q}_1\|^2 + m_2\|\dot{q}_2\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{m\dot{q}^2 + m_1\left[\left(\dot{q} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2 + \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)^2\right] + \right. \\
&\quad \left. m_2\left[\left(\dot{q} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)^2 + \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

انرژی پتانسیل سیستم:

$$
P = g\left\{m_1 l_1\cos\theta_1 + m_2\left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right)\right\}.
$$

معادلات لاگرانژ:

$$
\begin{aligned}
u + w_1 - d_1\dot{q} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{m\dot{q} + m_1\left(\dot{q} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right) + m_2\left(\dot{q} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\right\} - \{0\} \\
&= (m + m_1 + m_2)\,\ddot{q} + l_1(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 - l_1(m_1 + m_2)(\dot{\theta}_1)^2\sin\theta_1 \\
&\quad + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - m_2 l_2(\dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2 \\
&= (m + m_1 + m_2)\,\ddot{q} + l_1(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 \\
&\quad - l_1(m_1 + m_2)(\dot{\theta}_1)^2\sin\theta_1 - m_2 l_2(\dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 - d_2\dot{\theta}_1 &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right\} \\
&=.\star.= \left\{l_1(m_1 + m_2)\dot{q}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_1 l_2 m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1\sin\theta_1\right\} \\
&\quad + \frac{d}{dt}\left\{l_1(m_1 + m_2)\dot{q}\cos\theta_1 + l_1^2(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right\} \\
&= \left\{l_1(m_1 + m_2)\dot{q}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_1 l_2 m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1\sin\theta_1\right\} \\
&\quad + \left\{l_1(m_1 + m_2)\ddot{q}\cos\theta_1 + l_1^2(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right. \\
&\qquad \left. - l_1(m_1 + m_2)\dot{q}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l_1 l_2 m_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\} \\
&= l_1(m_1 + m_2)\ddot{q}\cos\theta_1 + l_1^2(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + l_1 l_2 m_2(\dot{\theta}_2)^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1\sin\theta_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 - d_3\dot{\theta}_2 \quad &= \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right\} \\
=.\overset{\star}{.}= \quad & \Big\{-l_2 m_2 g \sin\theta_2 + l_2 m_2 \dot{q}\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\Big\} \\
& + \frac{d}{dt}\Big\{l_2^2 m_2 \dot{\theta}_2 + l_2 m_2 \dot{q} \cos\theta_2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\Big\} \\
= \quad & \Big\{-l_2 m_2 g \sin\theta_2 + l_2 m_2 \dot{q}\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\Big\} \\
& + \Big\{l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 + l_2 m_2 \ddot{q} \cos\theta_2 + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& \qquad - l_2 m_2 \dot{q}\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)\Big\} \\
= \quad & l_2 m_2 \ddot{q} \cos\theta_2 + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 \\
& - l_1 l_2 m_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \sin\theta_2,
\end{aligned}
$$

صورت ماتریسی معادلات:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} m + m_1 + m_2 & l_1(m_1 + m_2)\cos\theta_1 & m_2 l_2 \cos\theta_2 \\ l_1(m_1 + m_2)\cos\theta_1 & l_1^2(m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_2 m_2 \cos\theta_2 & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}}_{=:M(y)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{=\ddot{y}}
$$

$$
= \underbrace{\begin{bmatrix} l_1(m_1 + m_2)(\dot{\theta}_1)^2 \sin\theta_1 + m_2 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin\theta_2 \\ -l_1 l_2 m_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 l_2 m_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g l_2 m_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \dot{q} \\ d_2 \dot{\theta}_1 \\ d_3 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}}_{=:w}}_{=:f(y,\dot{y},u,w)}
$$

فرم کلی معادلات:

$$
M(y)\ddot{y} = f(y, \dot{y}, u, w).
$$

متغیرهای حالت سیستم:

$$
x := \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}
$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y} \\ M^{-1}(y) f(y, \dot{y}, u, w) \end{bmatrix}}_{=:F(x,u,w)}$$

$$\dot{x} = F(x, u, w).$$

متغیر های حالت:

$$x_۱ = x = q$$

$$x_۲ = \dot{x} = \dot{q}$$

$$x_۳ = \theta_۱$$

$$x_٤ = \dot{\theta}_۱$$

$$x_٥ = \theta_۲$$

$$x_٦ = \dot{\theta}_۲$$

معادلات حاکم:

$$M\ddot{x} = B \rightarrow \ddot{x} = M\backslash B$$

خطی سازی معادلات:

برای خطی سازی از دستور”jacobian“ در نرم افزار MATLAB استفاده می کنیم.

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

$$x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_۱}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_۱}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_۱}{\partial u_۱} \\ \vdots \\ \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial u_۱} \end{bmatrix}$$

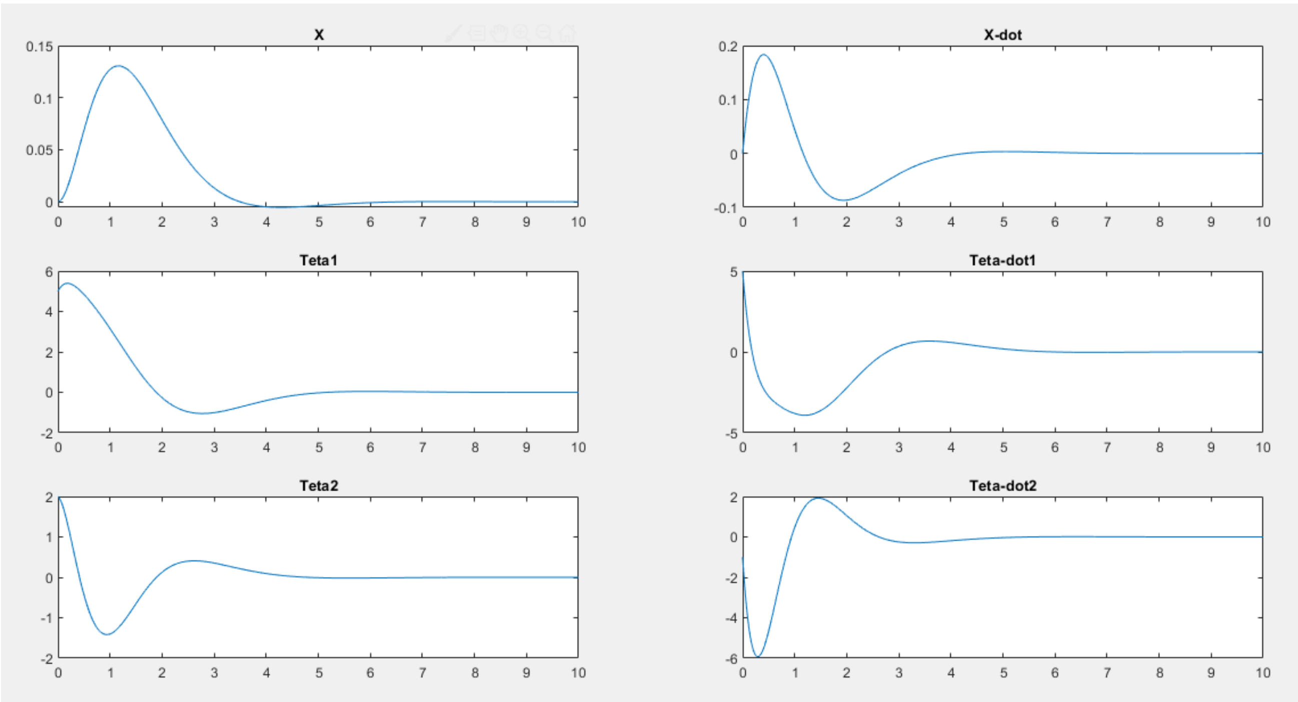
۲-اگر مقادیر ویژه سیستم مدار بسته خطی سازی شده به صورت زیر باشد.

$$desired\ poles =$$

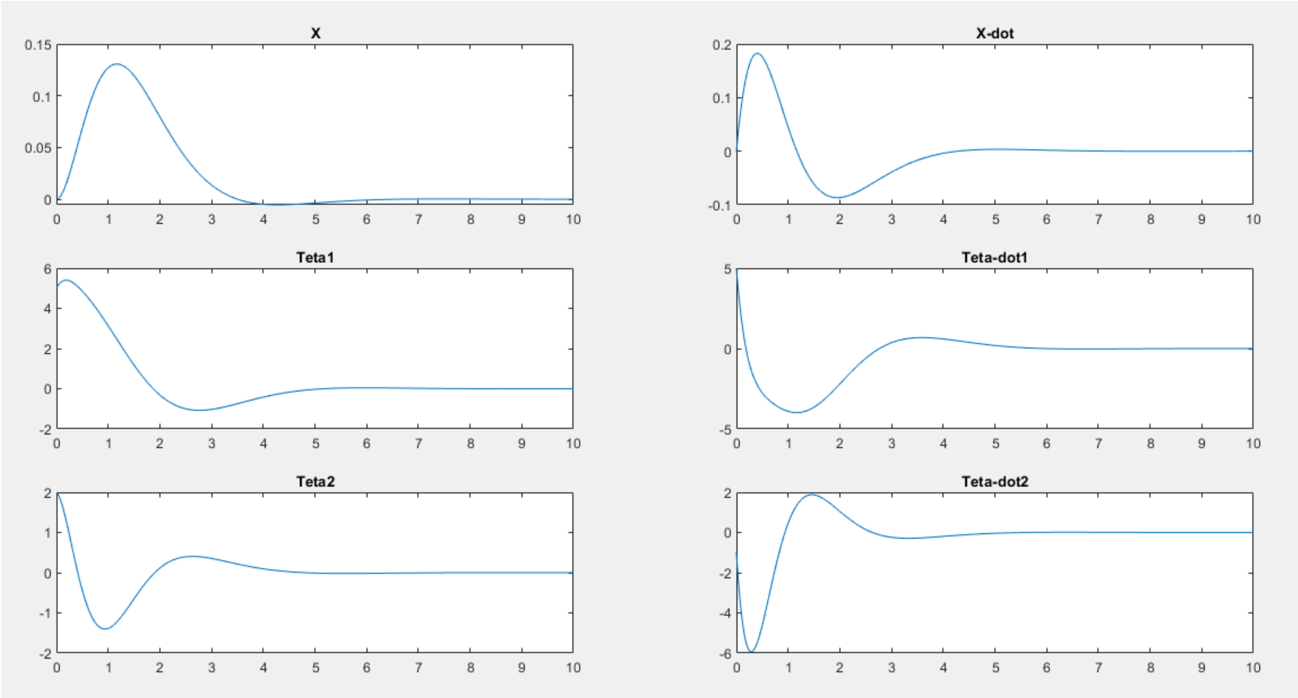
$$[-۲ + ۲j \quad -۲ - ۲j \quad -۲ \quad -۲ \quad -۱ + j \quad -۱ - j]$$

یک رگولاتور خطی طراحی کنید و عملکرد آنرا با اعمال به سیستم غیرخطی چک کنید با دو شرط اولیه زیر:

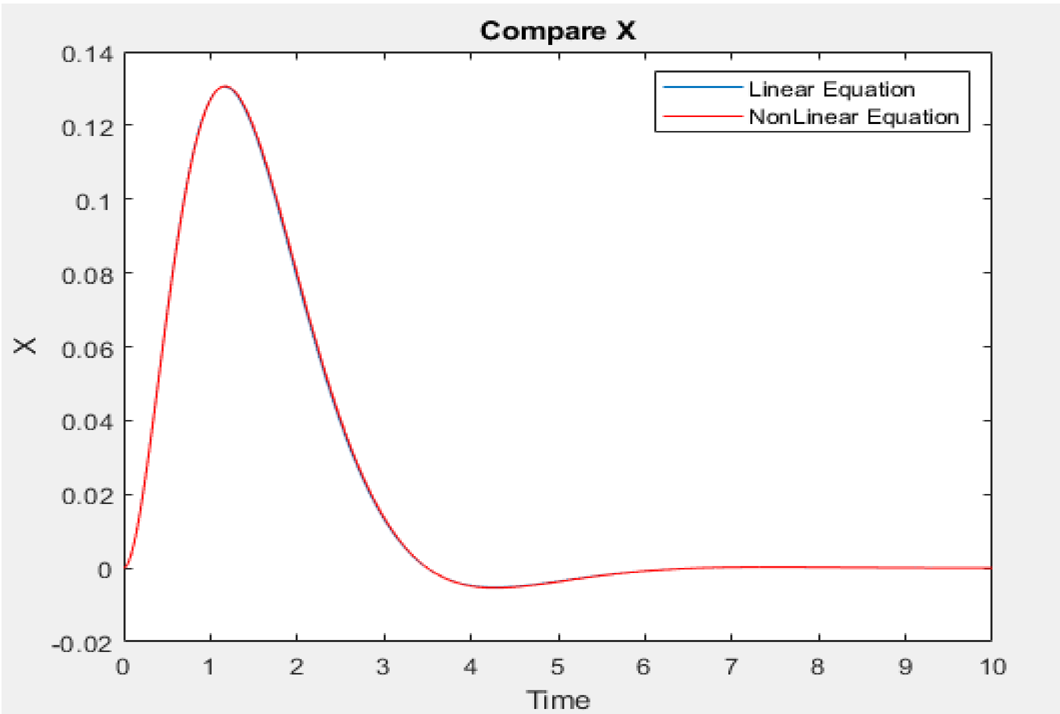
الف- $x_{.} = [۰ \;\; ۰ \;\; ۵ \;\; ۵ \;\; ۲ \;\; -۱]^T$



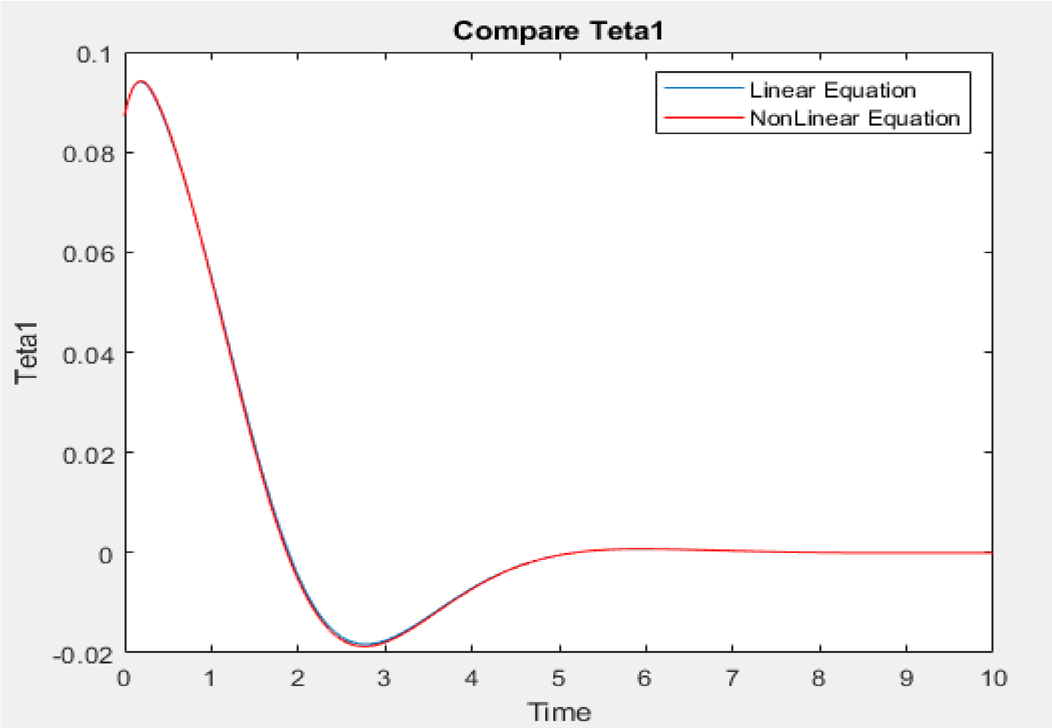
شکل ۲ : پاسخ سیستم خطی به ازای ورودی مذکور



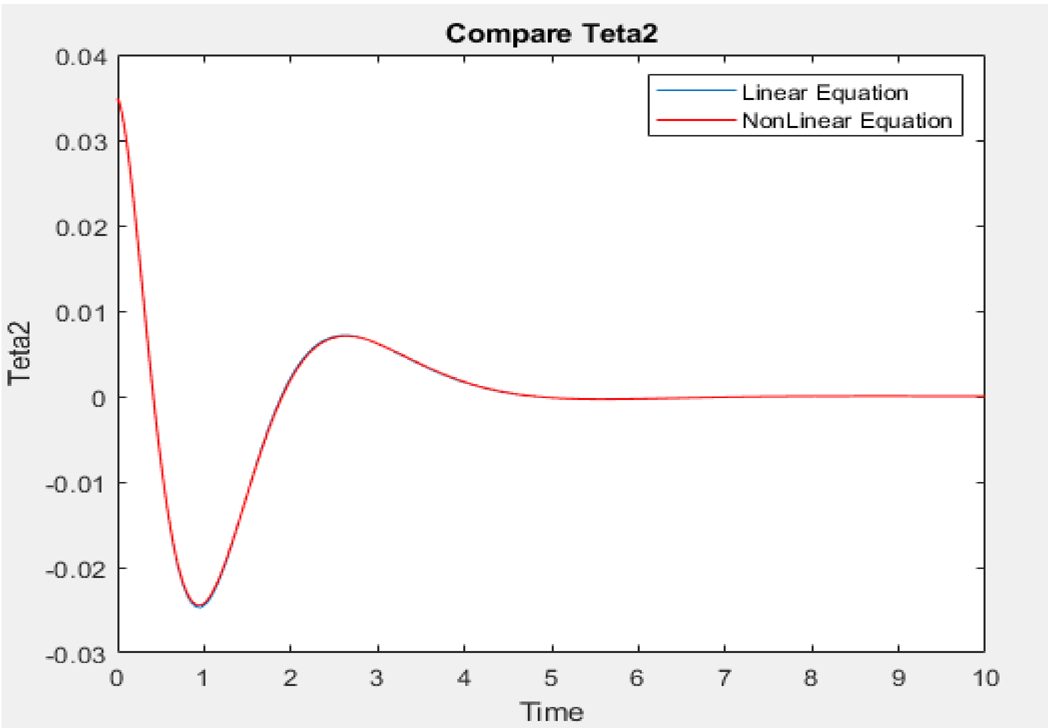
شکل ۳ : پاسخ سیستم غیرخطی به ازای ورودی مذکور



شکل ۴ : مقایسه جابجایی CART در سیستم خطی وغیرخطی به ازای ورودی مذکور

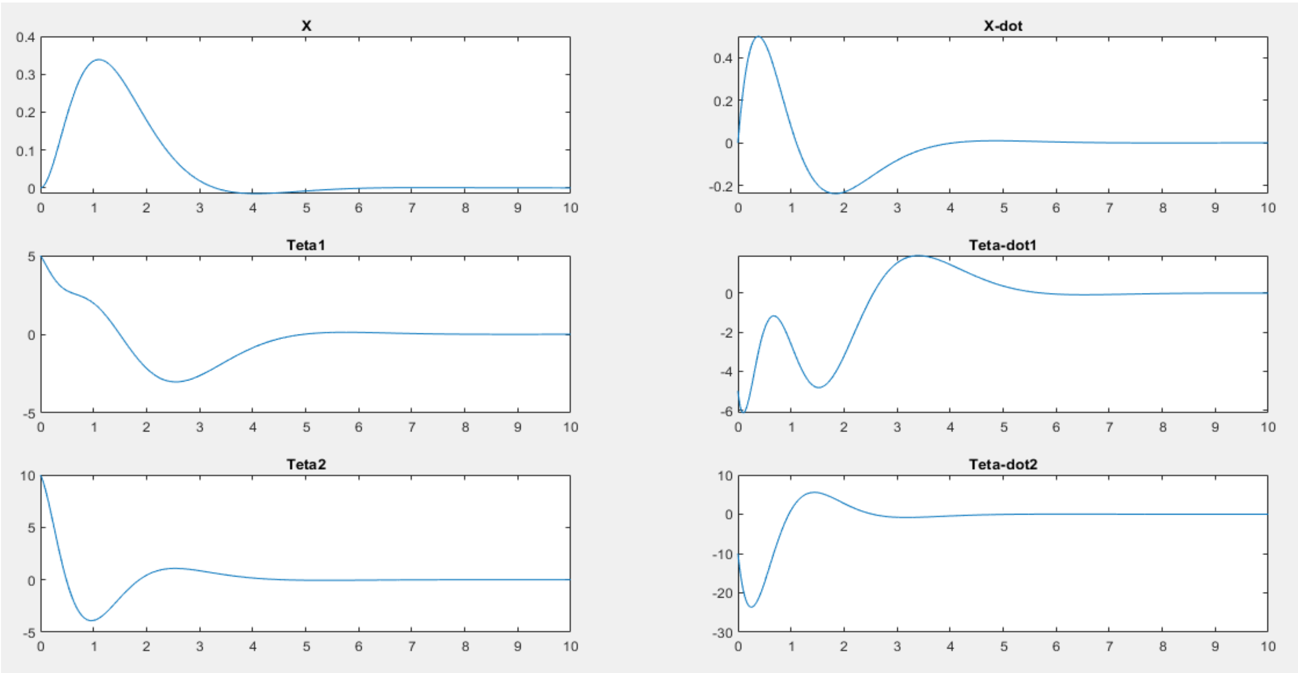


شکل ۵: مقایسه زاویه میله۱ در سیستم خطی وغیرخطی به ازای ورودی مذکور

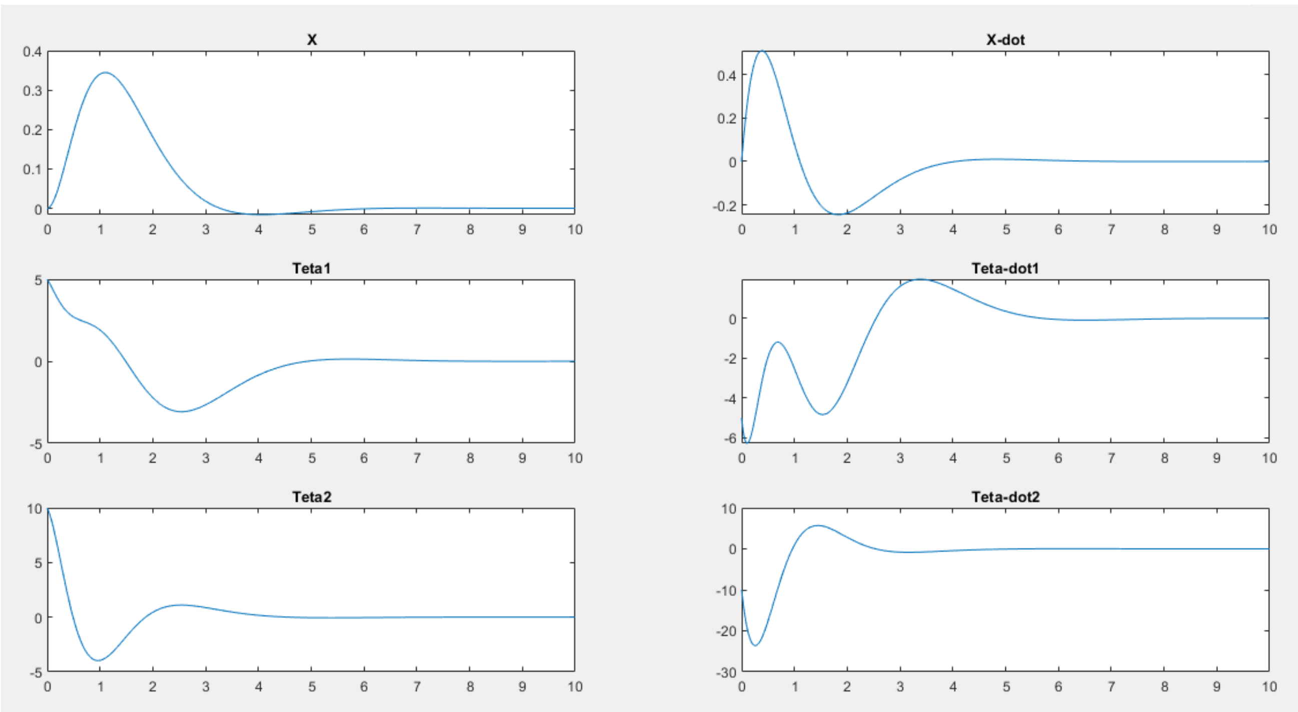


شکل ۶: مقایسه زاویه میله۲ در سیستم خطی وغیرخطی به ازای ورودی مذکور

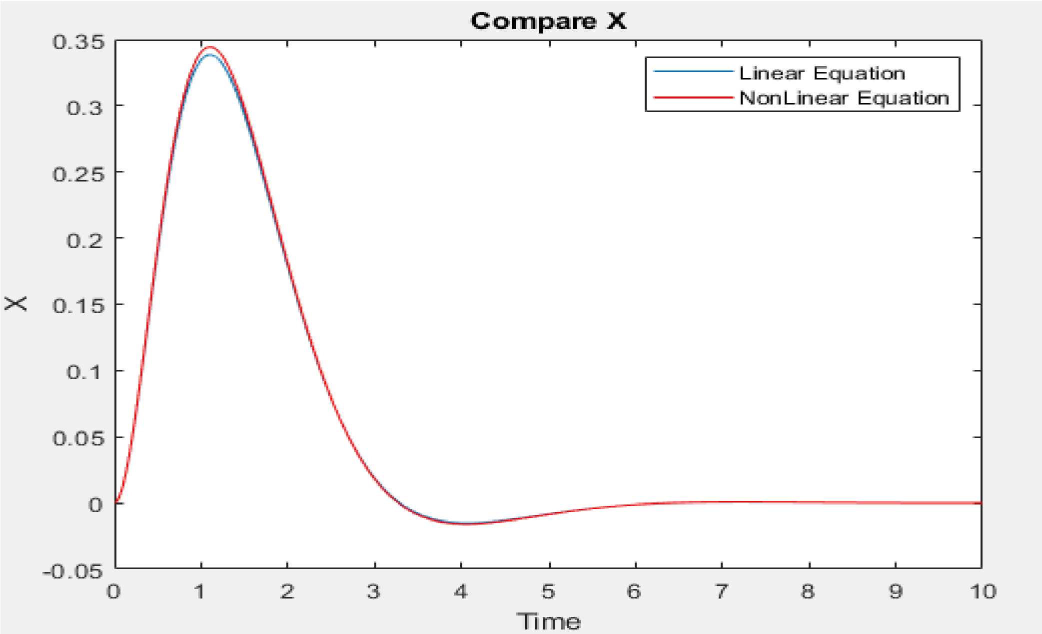
ب- $x_{۰} = [۰\ \ ۰\ \ ۵\ \ -۵\ \ ۱۰\ \ -۱۰]^T$



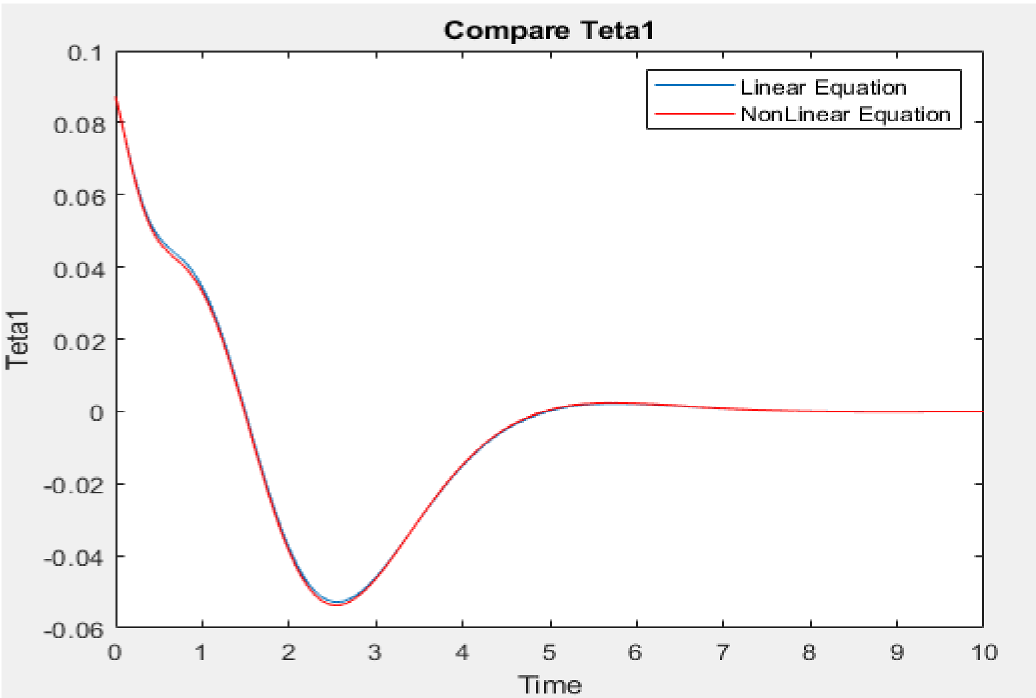
شکل ۷: پاسخ سیستم خطی به ازای ورودی مذکور



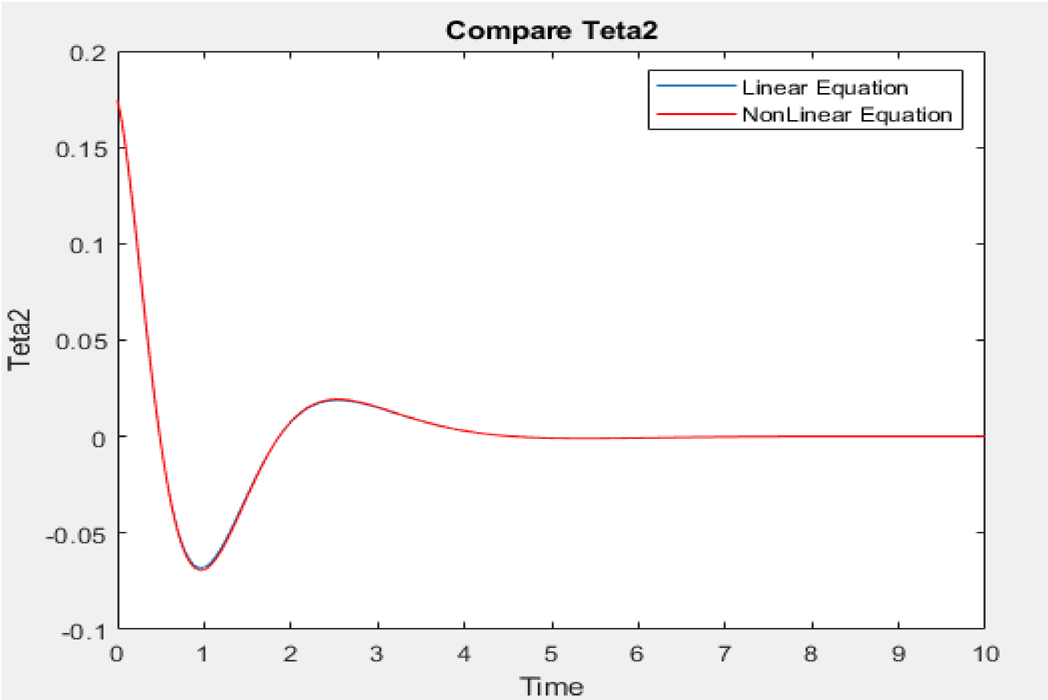
شکل ۸: پاسخ سیستم غیر خطی به ازای ورودی مذکور



شکل ۹ : مقایسه جابجایی CART در سیستم خطی وغیر خطی به ازای ورودی مذکور



شکل ۱۰ : مقایسه زاویه میله۱ در سیستم خطی وغیر خطی به ازای ورودی مذکور

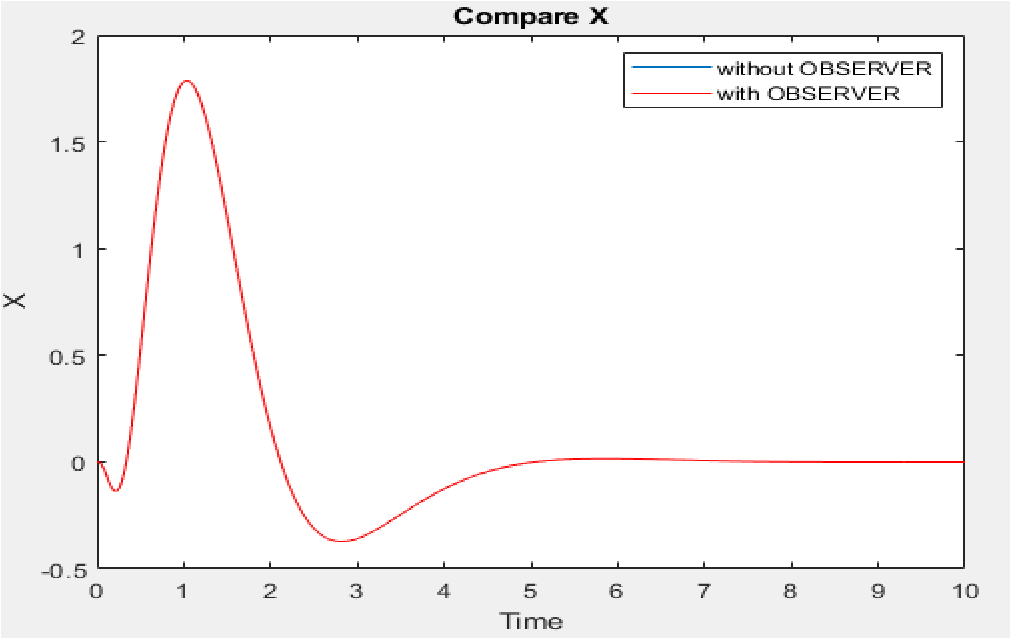


شکل ۱۱: مقایسه زاویه میله۲ در سیستم خطی وغیرخطی به ازای ورودی مذکور

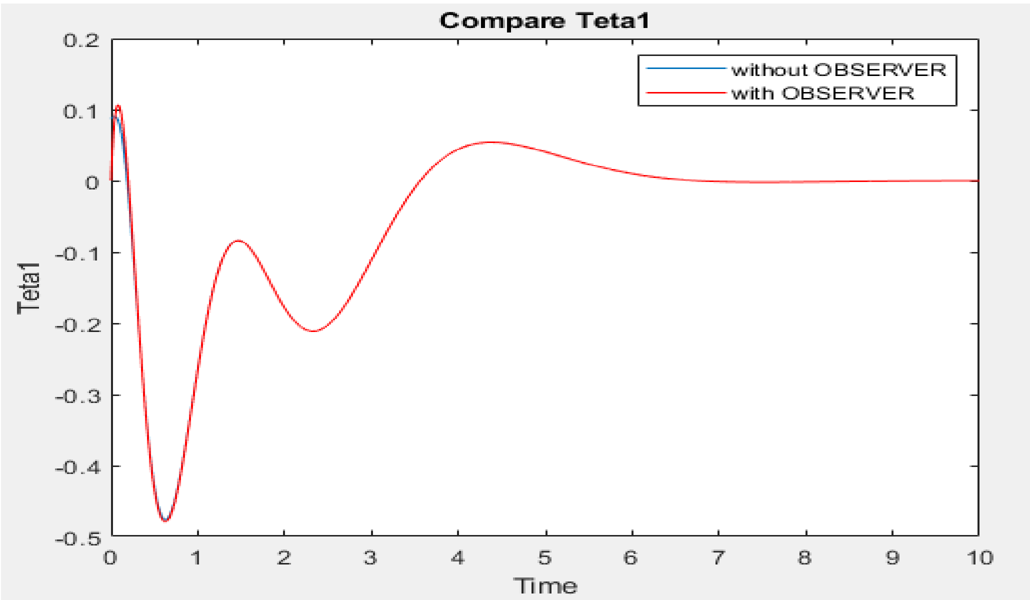
۳- فرض کنید فقط x قابل اندازه گیری باشد یک مشاهده گر حالت با مقادیر ویژه $[-۵ \quad -۵ \quad -۱۰ \quad -۱۰ \quad -۱۵ \quad -۱۵]$ برای سیستم خطی سازی شده طراحی کنید طوری که $\hat{x}$ بتواند x را تخمین بزند و این کنترلر را به همان شرایط اولیه بخش ۲ به سیستم غیر خطی اعمال کنید و نتیجه را نشان دهید.

۴-۱- سیستم خطی:

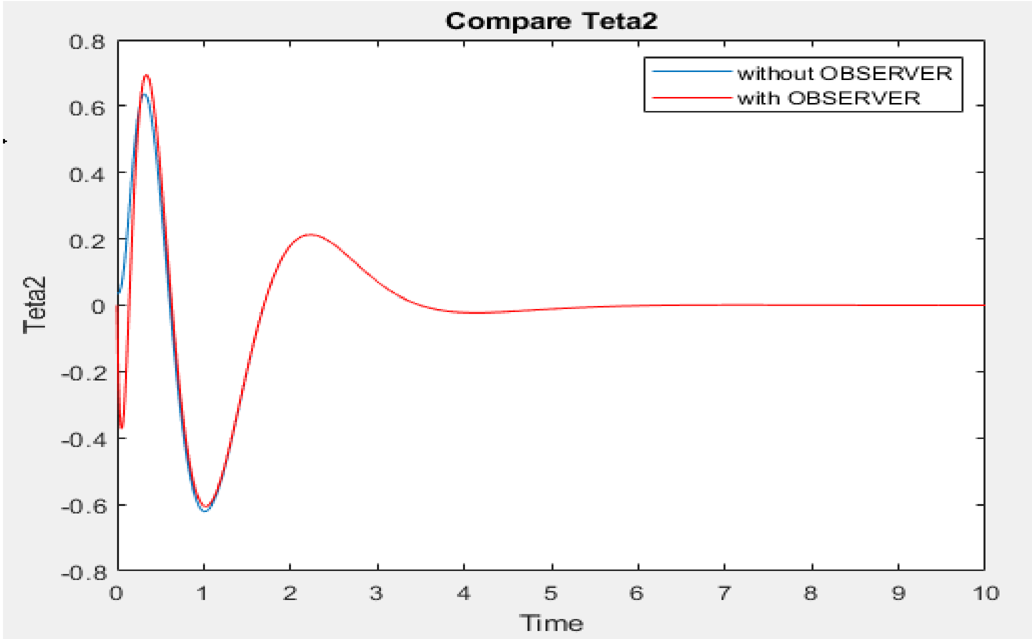
الف- $x_{\cdot} = [۰ \quad ۰ \quad ۵ \quad ۵ \quad ۲ \quad -۱]^T$



شکل ۱۲:مقایسه جابجایی CART در حالت با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

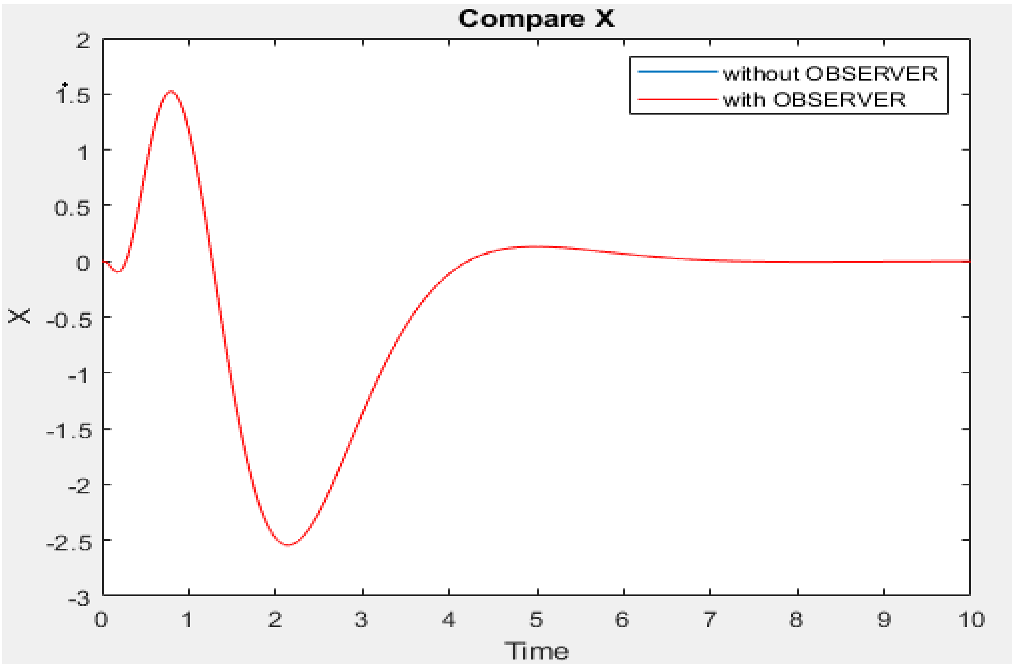


شکل ۱۳:مقایسه زاویه میله ۱ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

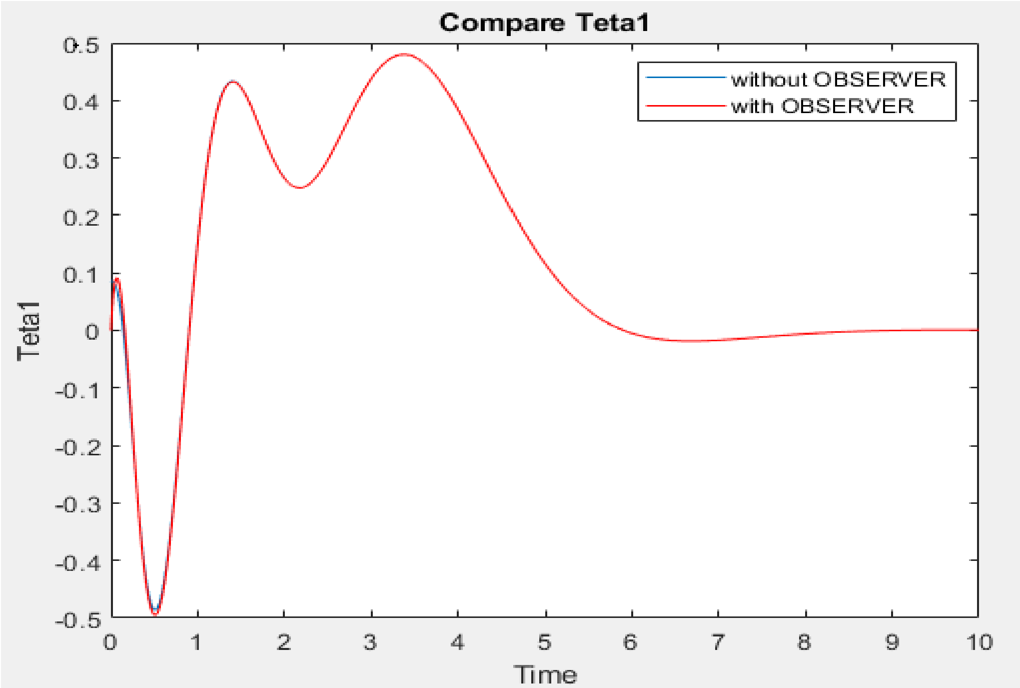


شکل ۱۴: مقایسه زاویه میله ۲ با مشاهده گر و بدون مشاهده گربرحسب زمان

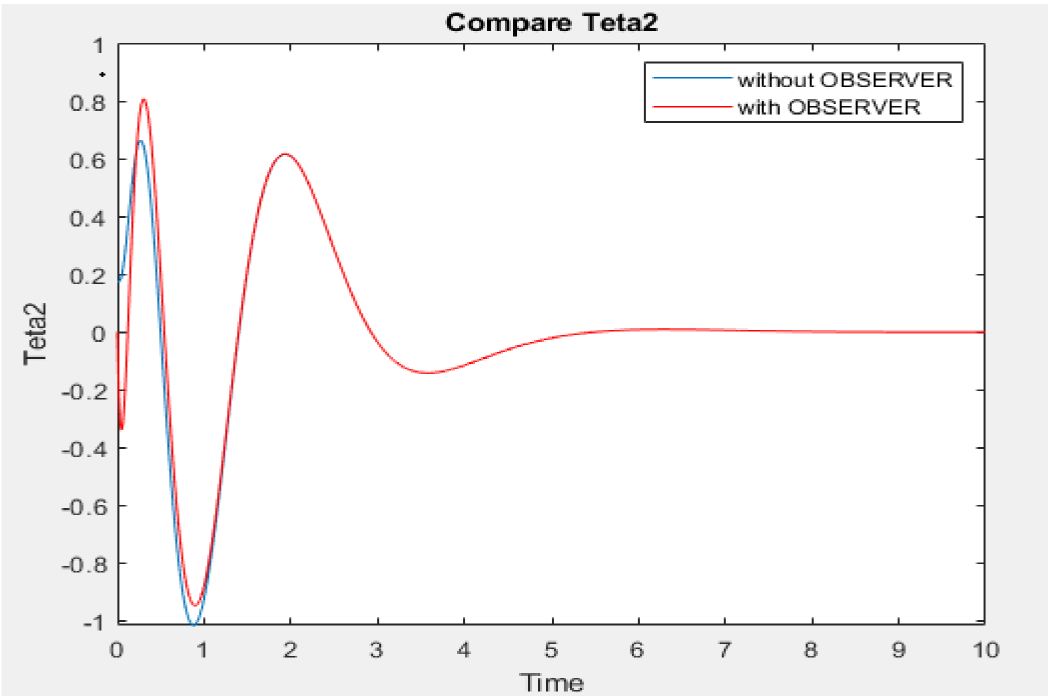
ب- $x_{.} = [\cdot \;\; \cdot \;\; ۵ \;\; -۵ \;\; ۱\cdot \;\; -۱\cdot]^T$



شکل ۱۵: مقایسه جابجایی CART در حالت با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان



شکل ۱۶: مقایسه زاویه میله۱ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر برحسب زمان

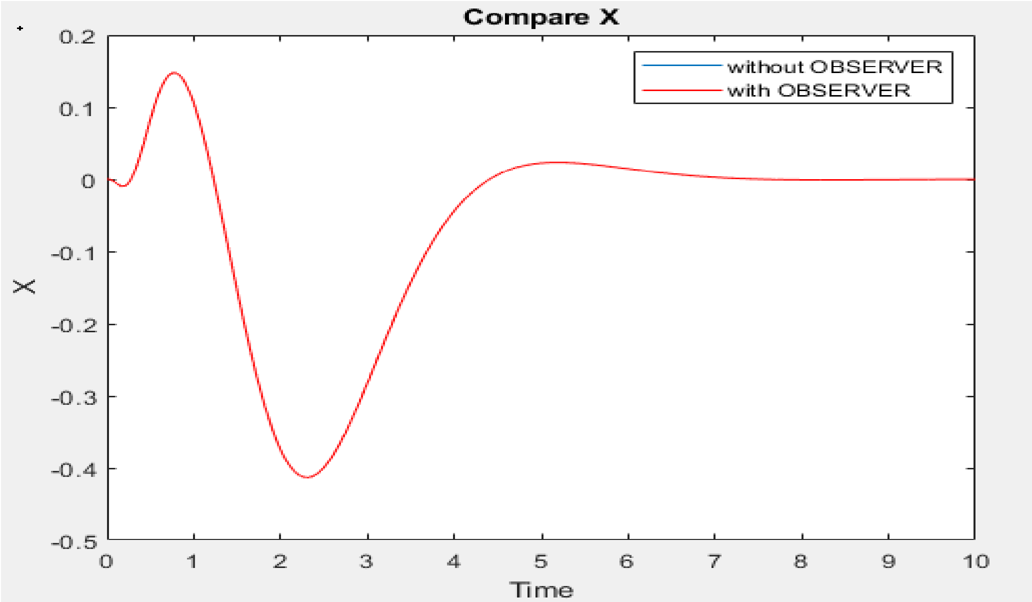


شکل ۱۷: مقایسه زاویه میله۲ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

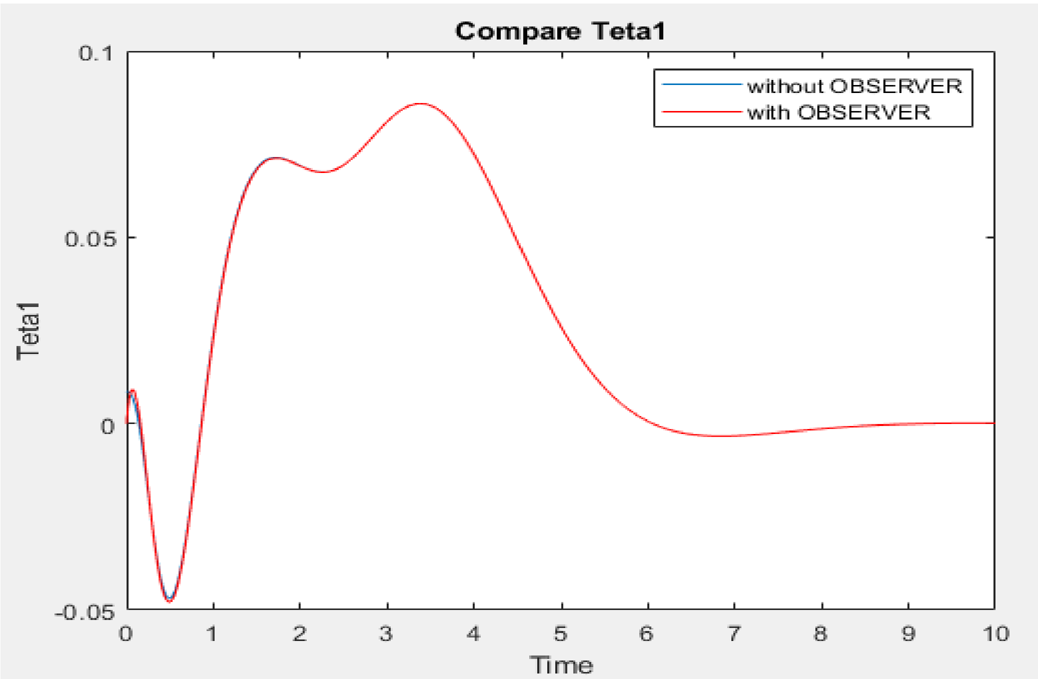
۲-سیستم غیرخطی:

به دلیل ترم های غیر خطی زیاد موجود در سیستم به مقدار اولیه حساسیت زیادی نشان می دهد و موجب ناپایداری سیستم می شود بنابراین مقادیر اولیه در ضریب ۰.۱ ضرب شده است.

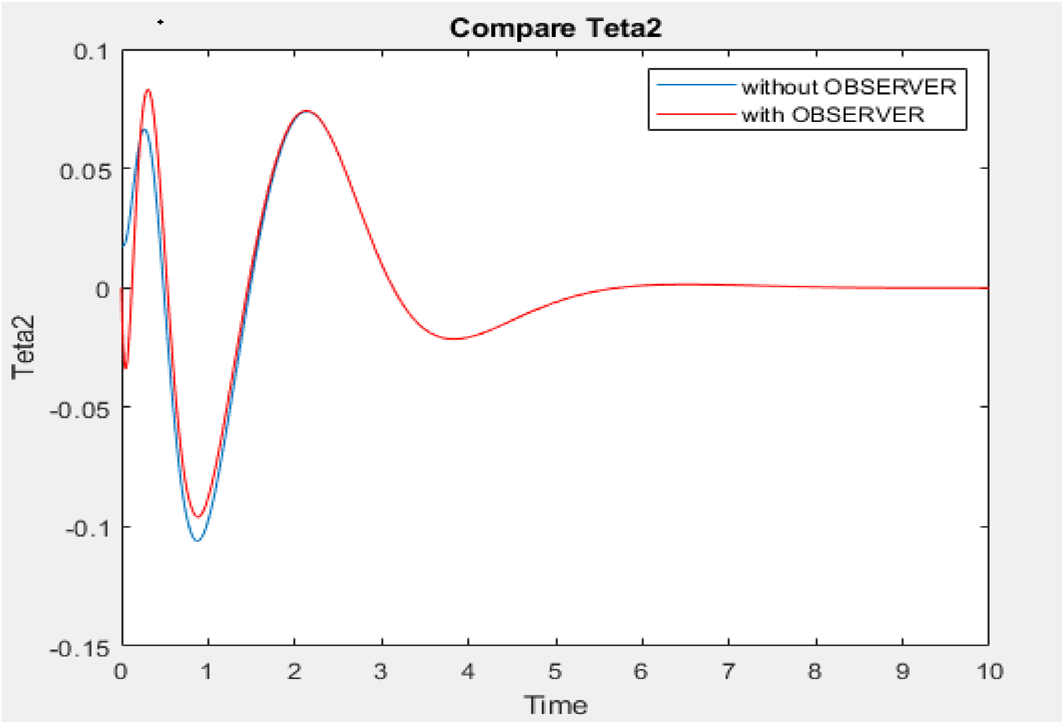
الف- $x_{۰} = ۰.۱[۰ \quad ۰ \quad ۵ \quad -۵ \quad ۱۰ \quad -۱۰]^T$



شکل ۱۸: مقایسه جابجایی CART در حالت با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

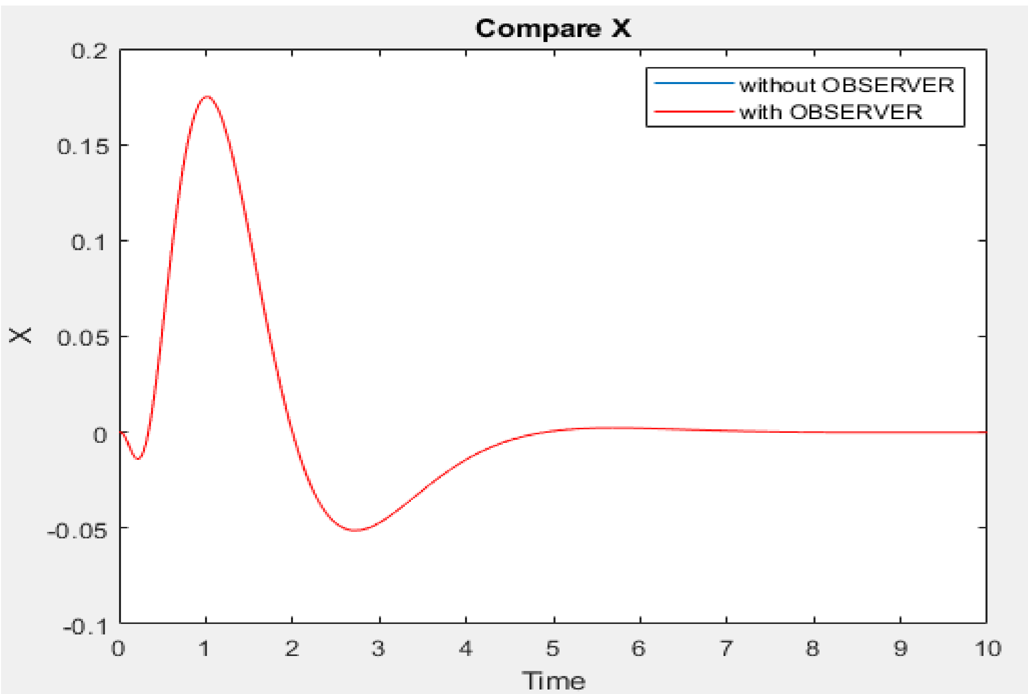


شکل ۱۹: مقایسه زاویه میله۱ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر برحسب زمان

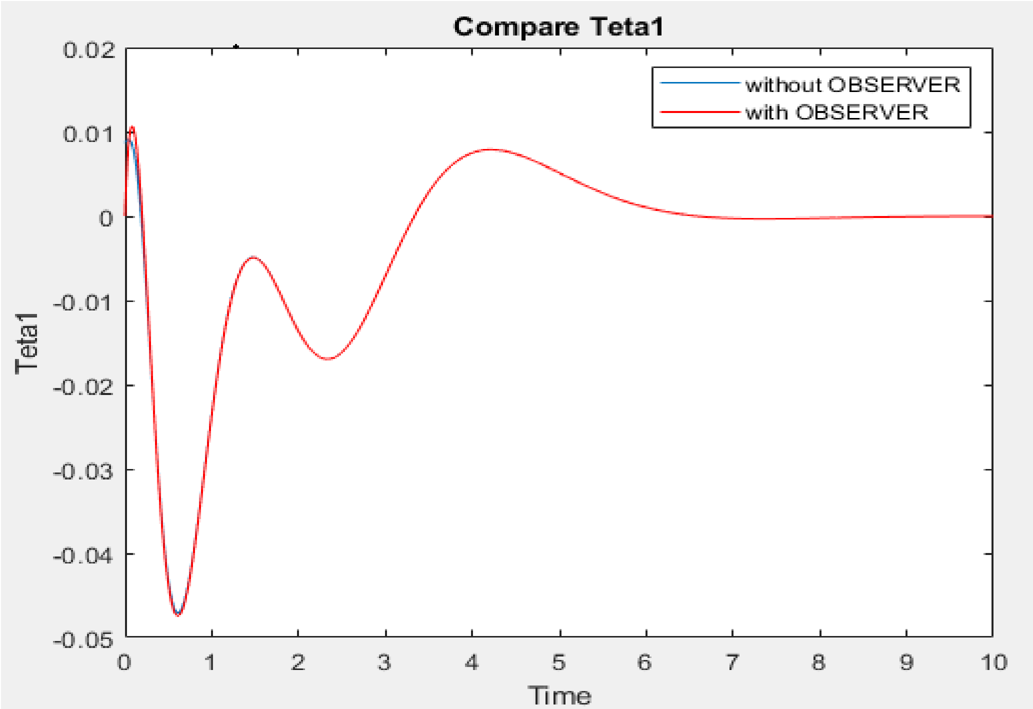


شکل ۲۰: مقایسه زاویه میله۲ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

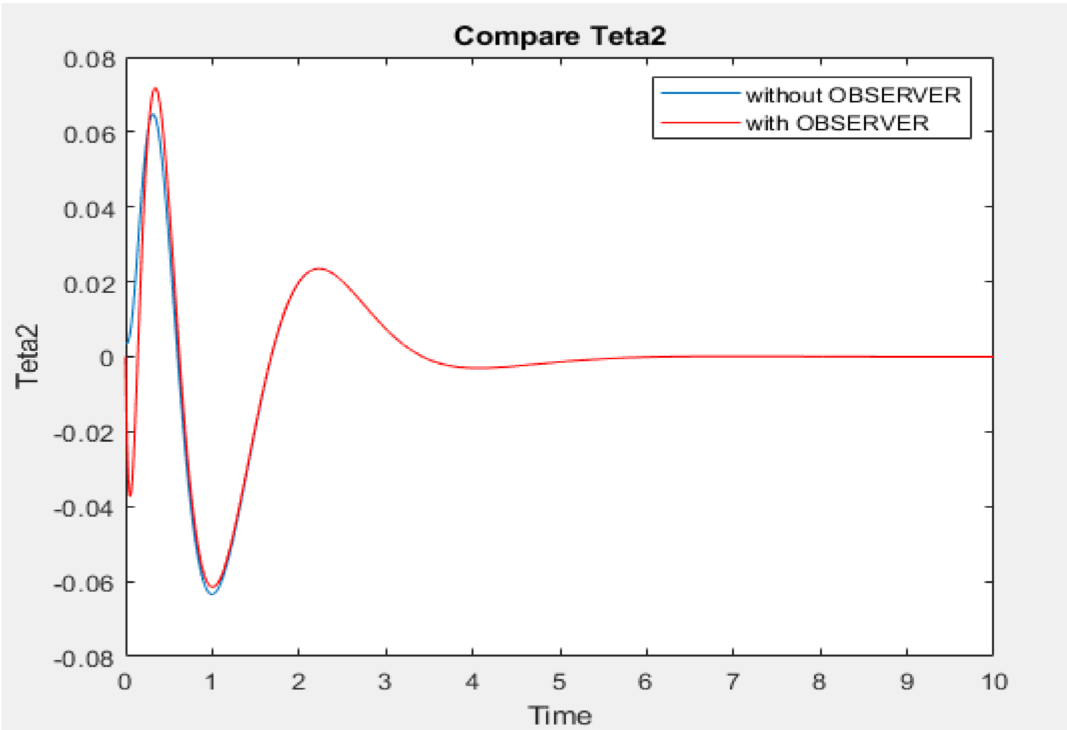
ب- $x_{.} = ۰.۱[۰ \quad ۰ \quad ۵ \quad ۵ \quad ۲ \quad -۱]^T$



شکل ۲۱: مقایسه جابجایی CART در حالت با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان



شکل ۲۲: مقایسه زاویه میله۱ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر برحسب زمان



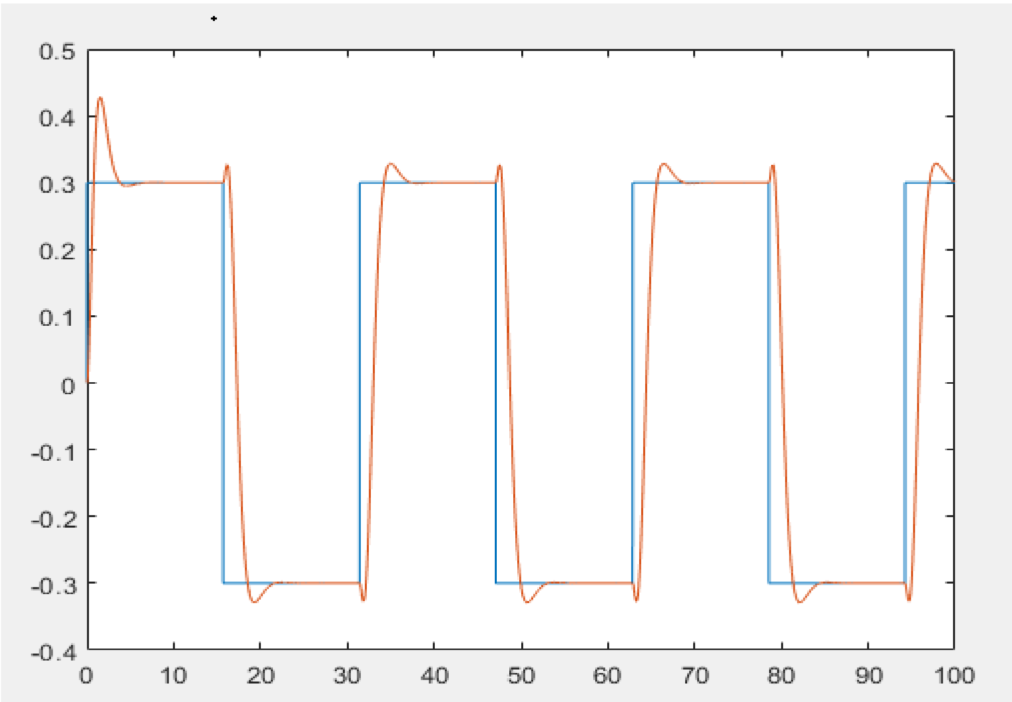
شکل ۲۳: مقایسه زاویه میله۲ با مشاهده گر و بدون مشاهده گر بر حسب زمان

۴-با همان خروجی x با فرض اینکه همه حالات قابل اندازه گیری باشند می خواهیم یک کنترلر سروو طراحی کنیم

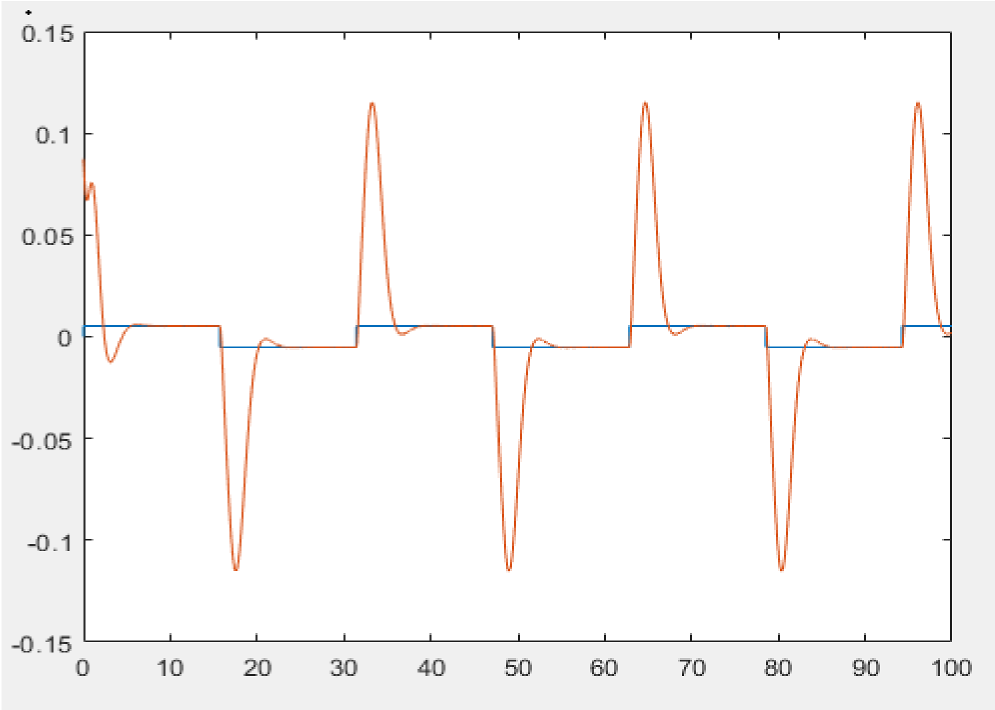
طـــــوری کـــــه $y_{ref} = ۰.۳sign(\sin(۰.۵t))$ ثابـــــت را تعقیـــب کنـــد.(این قســـمت را هـــم بـــرای وقتـــی کـــه انتگرالگیـــر بگذاریم و هـــم بـــرای وقتـــی کـــه از ســـیگنال پیشـــخور اســـتفاده شـــود تکرار کنید)

۱-۴ جبران ساز استاتیکی:

۱-۱-۴سیستم خطی:

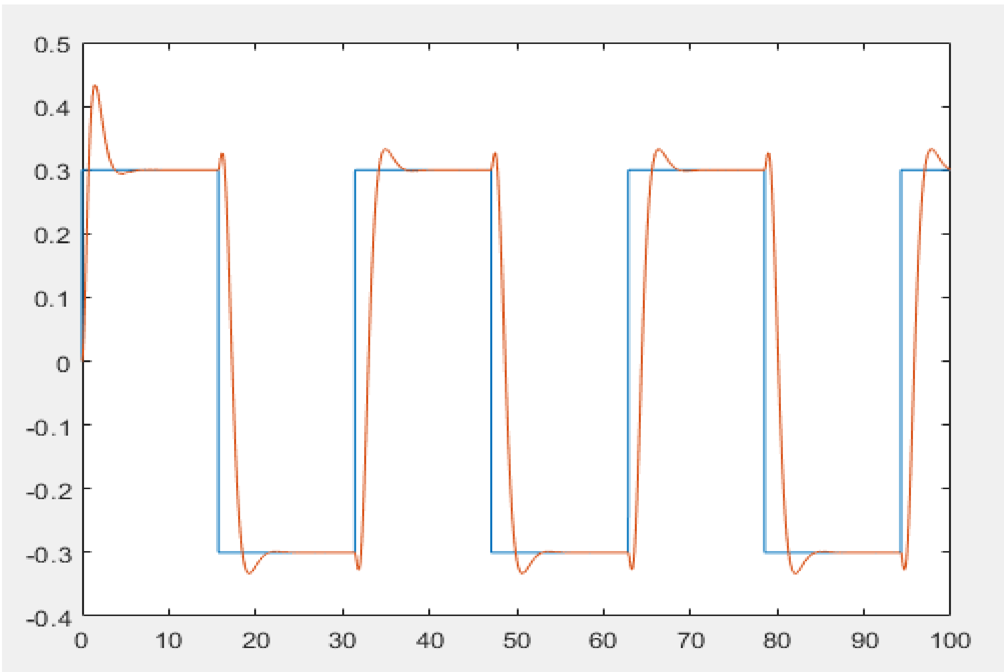


شکل ۲۴:جابجایی CART با کنترلر جبران ساز در سیستم خطی

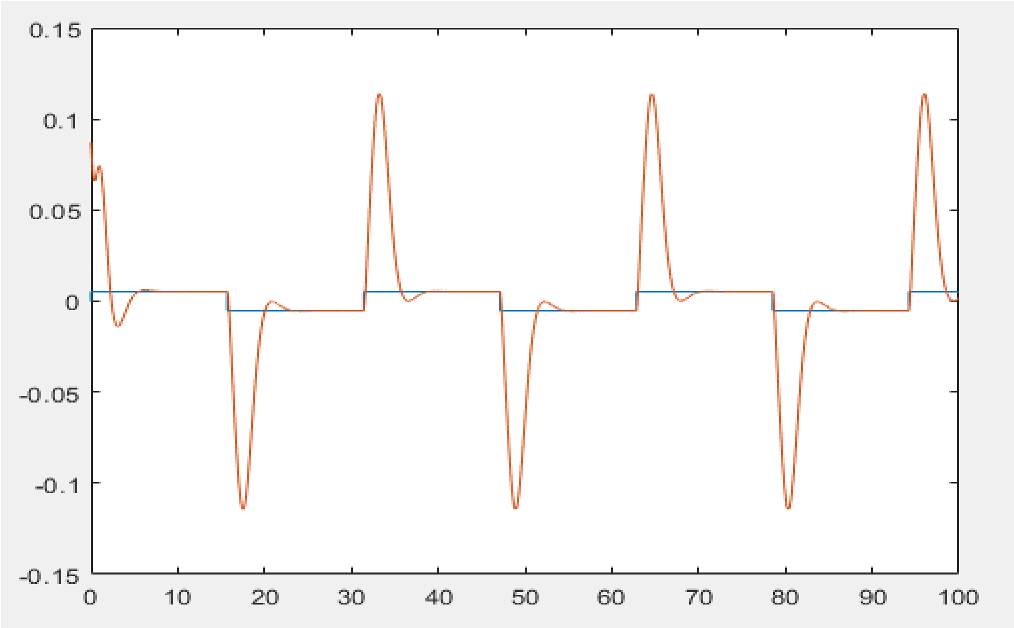


شکل ۲۵: زاویه میله ۱ با کنترلر جبران ساز در سیستم خطی

۲-۱-۴ سیستم غیرخطی:



شکل ۲۶: جابجایی پاندول با کنترلر جبران ساز در سیستم غیرخطی

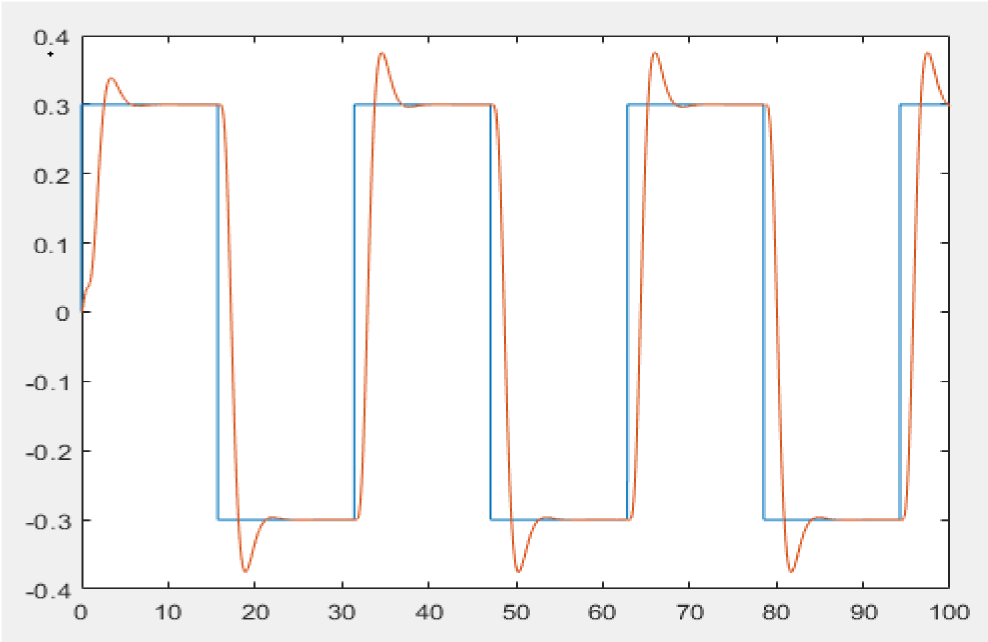


شکل ۲۷: زاویه میله ۱ با کنترلر جبران ساز در سیستم غیرخطی

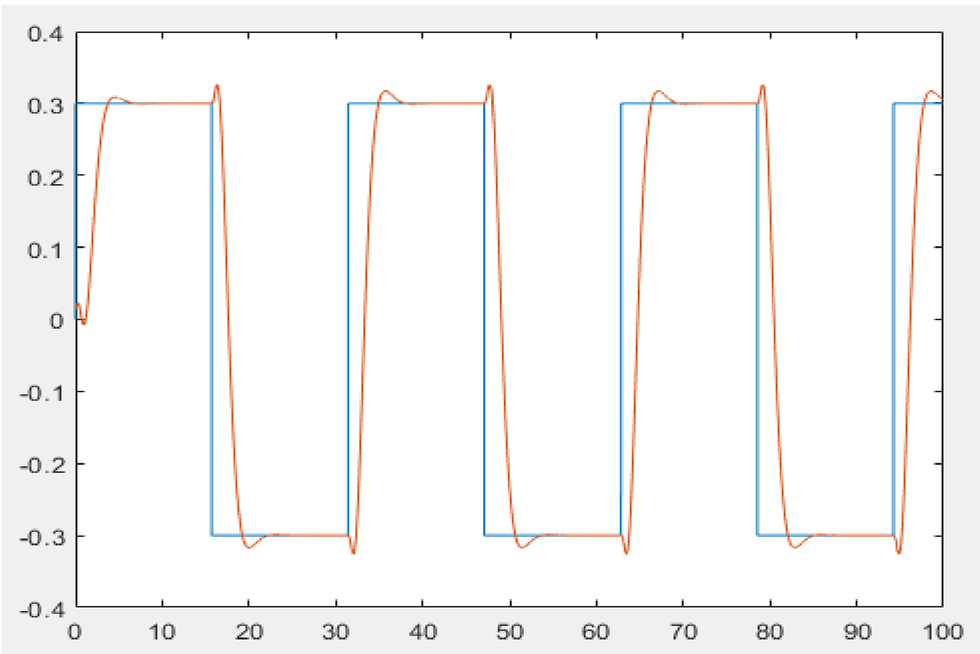
همان طور که مشاهده می کنید پاسخ سیستم خطی و غیر خطی در برابر ورودی ثابت با استفاده از جبران ساز پیش خور دارای شباهت زیادی بوده و در سیستم غیرخطی سیستم فرا جهش زیادی دارا می باشد که امری طبیعی است و بنابراین مدلسازی سیستم و خطی سازی آن عاری از مشکل است.

۲-٤ انتگرال گیر:

۱-۲-٤ سیستم خطی:

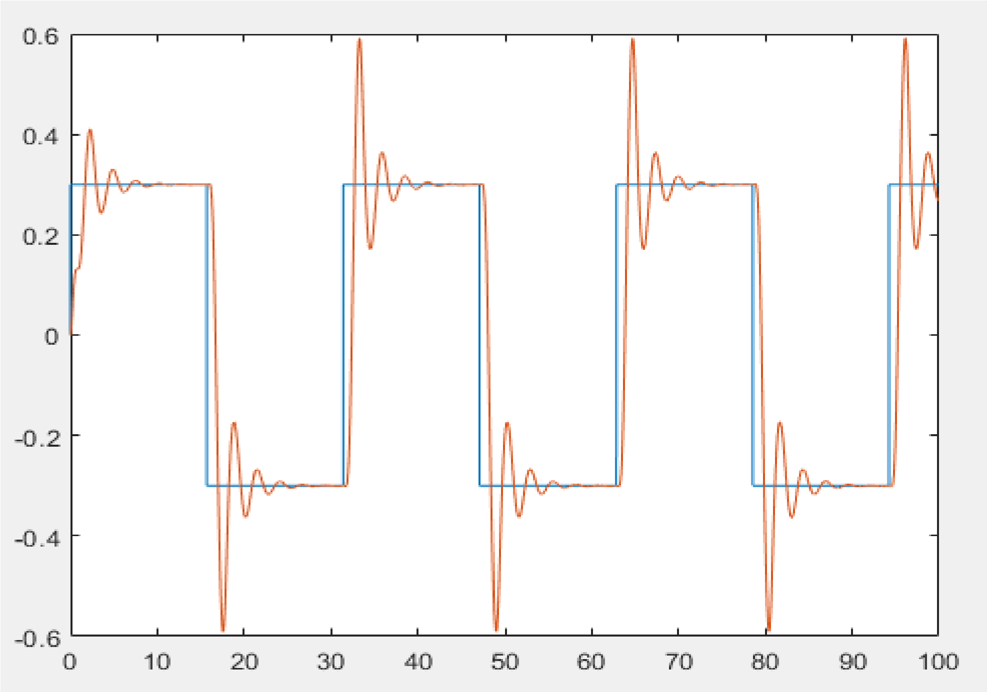


شکل ۲۸: جابجایی پاندول با کنترلر انتگرال گیر در سیستم خطی

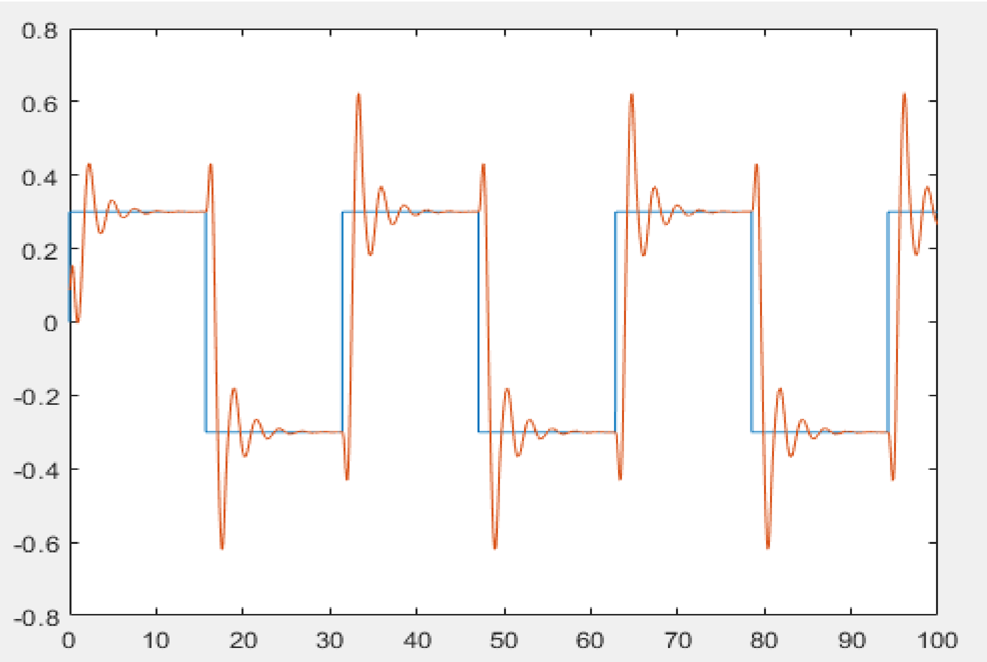


شکل ۲۹: زاویه میله ۱ با کنترلر جبران ساز در سیستم خطی

۲-۲-٤ سیستم غیرخطی:



شکل ۳۰: جابجایی پاندول با کنترلر انتگرال گیر در سیستم غیرخطی



شکل ۳۱: زاویه میله ۱ با کنترلر جبران ساز در سیستم خطی

همانند بخش قبل ، همان طور که مشاهده می کنید پاسخ سیستم خطی و غیر خطی در برابر ورودی ثابت با استفاده از کنترلر انتگرال گیر دارای شباهت زیادی بوده و بنابراین مدلسازی سیستم و خطی سازی آن عاری از مشکل است.