



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی مکانیک

عنوان:

پروژه کنترل غیر خطی-کواد کوپتر

نگارش:

ایمان شریفی

۹۸۲۱۰۱۸۴

استاد راهنما:

دکتر آریا الستی

تیر ۱۴۰۰

چکیده

در سال‌های اخیر، کوادکوپترها در بسیاری از حوزه‌ها، بخصوص در حوزه کشاورزی، جستجو و نجات و پشتیبانی، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. از مزایای آن‌ها می‌توان به کم هزینه بودن، ساختار مکانیکی ساده، نشست و برخاست عمودی و قابلیت مانورپذیری بالا اشاره کرد. همواره برای انجام کارهایی نظیر تعقیب مسیر و ایجاد مانور زیاد، کنترل وضعیت این نوع وسیله نیز از اهمیت به سزایی برخوردار است. با این حال، به دلیل اینکه مدل دینامیکی کوادکوپترها، چندورودی-چندخروجی، غیرخطی همراه با کوپلینگ شدید و زیرعملگر می‌باشد، کنترل این نوع وسیله پرنده خالی از چالش نیست و از عدم قطعیت مدل و نامعلوم بودن اغتشاش خارجی نیز در امان نیستند. برای کنترل این ربات از کنترل کننده های زیادی نظیر خطی، غیرخطی و تطبیقی، هم به صورت تئوری و هم به صورت عملی استفاده می شود. کنترل کننده های خطی ساختار ساده و پیاده سازی راحتی دارند ولی به مدلسازی دقیق وابسته اند و به صورت محلی پایداری را تضمین می کنند. از طرف دیگر، کنترل کننده های غیرخطی در عین حال که رفتار مقاوم تری دارند، به عملگرهای قوی برای پیاده سازی نیاز دارند، بعضاً به مدل دقیق نیاز دارند و ممکن است پدیده هایی مضر مانند چترینگ در این سیستم های کنترلی رخ دهد. هدف از این پژوهش، کنترل موقعیت و وضعیت کوادکوپتر به وسیله کنترل کننده های خطی نظیر PID، LQR و کنترل کننده های غیرخطی نظیر پسخوراند خطی ساز، مود لغزشی و تکنیک پسگام و همچنین کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع بر پایه تابع لیاپانوف می باشد. بعد از طراحی کنترلر به صورت تئوری، پیاده سازی در نرم افزار متلب انجام شده است و نتایج آنها نمایش داده شده است. نتایج برای ورودی های ثابت و متغیر با هم دیگر مقایسه شده است که به صورت کلی کنترل کننده های غیر خطی عملکرد بهتری دارند و درمیان کنترل کننده های غیرخطی، کنترل مود لغزشی عملکرد بهتری دارد. نتایج کنترل تطبیقی با ورودی مربعی نیز در پایان نشان داده شده و این سیستم کنترلی به خوبی توانسته سیستم مرجع را تعقیب کند.

فصل اول- مقدمه ۵

۱-۱- کوادکوپترها.....	۵
۱-۲- انواع کنترل کننده ها.....	۵
۱-۲-۱- کنترل کننده های خطی.....	۵
۱-۲-۲- انواع کنترل غیرخطی.....	۶
۱-۳- هدف پژوهش.....	۷
فصل دوم- مدلسازی دینامیکی کوادکوپتر.....	۸
۱-۲- مقدمه.....	۸
۲-۲- سینماتیک.....	۹
۳-۲- دینامیک.....	۹
۴-۲- فضای حالت.....	۱۱
۵-۲- نقطه تعادل سیستم کوادکوپتر.....	۱۲
۶-۲- خطی سازی سیستم حول نقطه تعادل.....	۱۴
۷-۲- پایداری سیستم کوادکوپتر حول نقطه تعادل به روش دوم لیپانوف.....	۱۵
فصل سوم- پایدار سازی و کنترل کوادکوپتر.....	۱۷
۱-۳- مقدمه.....	۱۷
۲-۳- کنترلر تناسبی-انتگرالگیر-مشتقگیر.....	۱۷
۱-۲-۳- مقدمه.....	۱۷
۲-۲-۳- کاربرد کنترل کننده PID در کوادکوپتر.....	۱۷
۳-۳- کنترلر خطی تنظیم کننده بهینه (LQR).....	۱۸
۴-۳- کنترلر پسخوراند خطی ساز.....	۲۰
۱-۴-۳- مقدمه.....	۲۰
۲-۴-۳- کنترلر پسخوراند خطی ساز در کوادکوپتر.....	۲۱
۵-۳- کنترلر مود لغزشی.....	۲۲
۱-۵-۳- مقدمه.....	۲۲
۲-۵-۳- کاربرد کنترل کننده مود لغزشی در کوادکوپتر.....	۲۴
۶-۳- کنترلر پسگام.....	۲۵
۱-۶-۳- مقدمه.....	۲۵
۲-۶-۳- کاربرد کنترلر پسگام در کوادکوپتر.....	۲۶

۲۷	۷-۳-کنترلر تطبیقی مدل مرجع بر پایه تابع لیپانوف.....
۲۷	۳-۷-۱- مقدمه.....
۲۹	۳-۷-۲- کنترلر تطبیقی مدل مرجع در کوادکوپتر.....
۳۰	فصل چهارم- نتایج شبیه سازی و نتیجه گیری کلی.....
۳۰	۴-۱-مقدمه.....
۳۰	۴-۲-نتایج ورودی ثابت.....
۳۰	۴-۲-۱- نتایج کنترل کننده PID به ورودی های ثابت.....
۳۱	۴-۲-۲- نتایج کنترل کننده LQR به ورودی های ثابت.....
۳۲	۴-۲-۳- نتایج کنترل کننده پسخوراند خطی ساز به ورودی های ثابت.....
۳۳	۴-۲-۴- نتایج کنترل کننده مود لغزشی به ورودی های ثابت.....
۳۵	۴-۲-۵- نتایج کنترل کننده پسگام به ورودی های ثابت.....
۳۶	۴-۲-۶- مقایسه نتایج موقعیت های خطی با استفاده از کنترلرهای خطی و غیرخطی.....
۳۷	۴-۳-نتایج ورودی متناوب.....
۳۹	۴-۴- نتایج کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع به ورودی های مربعی.....
۴۱	۴-۵- نتیجه گیری کلی.....

فصل اول- مقدمه

۱-۱- کوادکوپترها

کوادکوپترها ربات‌هایی هستند که دارای چهار موتور روی بدنه ضربدری شکل خود میباشند و با استفاده از نیروی پیشران تولید شده توسط موتورها توانایی پرواز دارند. از این رو، به آنها ربات پرنده نیز گفته میشود. در سال‌های اخیر، کوادکوپترها در بسیاری از حوزه‌ها، بخصوص در حوزه کشاورزی، جستجو و نجات و فیلم برداری و پشتیبانی، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. نمونه ای از کوادکوپترها در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱. نمونه ای از کوادکوپترها

از مزایای آن‌ها می‌توان به کم هزینه بودن، ساختار مکانیکی ساده، نشست و برخاست عمودی و قابلیت مانورپذیری بالا اشاره کرد. همواره برای انجام کارهایی نظیر تعقیب مسیر و ایجاد مانور زیاد، کنترل وضعیت این نوع وسیله از اهمیت به سزایی برخوردار است. با این حال، به دلیل اینکه مدل دینامیکی کوادکوپترها، چندورودی-چندخروجی، غیرخطی همراه با کوپلینگ شدید و زیرعملگر^۱ می‌باشد، کنترل این نوع وسیله پرنده خالی از چالش نیست و از عدم قطعیت مدل و نامعلوم بودن اغتشاش خارجی نیز در امان نیستند.

برای کنترل این نوع وسیله پرنده از کنترل کننده های زیادی اعم از خطی و غیرخطی، تطبیقی و غیره استفاده می شود که هر کدام دارای مزایا و معایب خاص خود می باشند. در زیر به مهم ترین این کنترلر ها پرداخته خواهد شد.

۱-۲- انواع کنترل کننده ها

۱-۲-۱- کنترل کننده های خطی

۱- کنترل کننده تناسبی-انتگرالگیر-مشتقگیر^۲ (PID)

¹ Under actuates

² Proportional-Integrator-Derivative

یک کنترلر خطی است که در صنعت استفاده زیادی دارد و دارای ساختاری ساده و پیاده سازی راحت می باشد. ولی از طرفی این نوع کنترلر در مقابل عدم قطعیت های مدل و اغتشاش خارجی رفتار مقاومی از خود نشان نمی دهد و تمامی حالات سیستم باید در دسترس باشند [۱].

۲- کنترل کننده پسخوراند حالت^۳ (SF)

این نوع کنترلر نیز یک روش کنترلی خطی مرسوم می باشد که عملکرد آن برای سیستم با تعداد حالات زیاد نسبت به کنترل PID بهتر می باشد و طراحی این نوع کنترلر نیز آسان و سیستماتیک می باشد. از طرفی برای کنترل نیاز به تمامی حالات می باشد و در غیر این صورت باید مشاهده گر نیز همانند کنترلر طراحی نمود. یکی از روش های پرکاربرد در این حوزه، روش کنترلی بهینه LQR می باشد [۲].

بنابراین برای ایجاد یک محیط کنترلی مقاوم، نیاز به کنترلرهای سطح بالاتر نظیر کنترلرها غیرخطی می باشد که در زیر به برخی از آنها اشاره می شوند.

۱-۲-۲- انواع کنترل غیرخطی

۱- کنترل پسخوراند خطی ساز^۴ (FLC)

این نوع کنترل کننده سیستم غیر خطی را با استفاده از روش های خاصی به سیستم خطی تبدیل می کند و با استفاده از روش های کنترل خطی مانند پسخوراند حالت سیستم را به حالت مطلوب نزدیک می کند. در این روش تمامی حالات باید مشخص و فاقد عدم قطعیت باشند و طراحی این نوع کنترل کننده به صورت کلی امری دشوار است [۳].

۲- کنترل مود لغزشی^۵ (SMC)

این نوع کنترل کننده از کنترلرهای خطی مقاوم می باشد که در مقابل عدم قطعیت های مدل رفتار کاملاً مقاومی از خود نشان می دهد ولی به دلیل استفاده از توابع ناپیوسته در ساختار خود، ورودی کنترلی طراحی شده توسط آن ناپیوسته است که در واقعیت به سیستم کنترلی یا عملگرها آسیب جدی وارد می کند. البته راههایی مانند تقریب توابع پیوسته با توابع ناپیوسته، برای کاهش این اثر در واقعیت وجود دارد [۴].

³ State Feedback

⁴ Feedback Linearization

⁵ Sliding Mode Control

۳- کنترل با استفاده از تکنیک گام به عقب یا پسگام^۶(BSC)

در این نوع تکنیک، با استفاده از توابع لیاپانوف های پی در پی، با طراحی ورودی کنترلی مناسب، به صورت گام به گام پایداری مجانبی سراسری ایجاد می شود. به صورت کلی این تکنیک از زیر شاخه های کنترل پسخوراند خطی ساز می باشد[۵].

۴- کنترل تطبیقی مدل مرجع^۷(MRAC)

این نوع کنترل کننده از سری کنترل کننده های غیرخطی تطبیقی است که هدف آن تعقیب رفتار یک سیستم مرجع کاملاً پایدار می باشد. در واقع با تعریف یک تابع لیاپانوف برحسب خطای سیستم نسبت به سیستم مرجع و اعمال پایداری لیاپانوف و انتخاب ورودی کنترلی مناسب، سیستم اصلی نیز پایدار مجانبی سراسری می شود. این روش قادر به پاسخ گویی در برابر عدم قطعیت و حذف اثر اغتشاش خارجی می باشد[۶].

به صورت کلی روش های کنترل غیرخطی، نیاز به عملگر های قدرتمند و سنسورهای زیادی در واقعیت دارند و طراحی آنها نیز دارای چالش زیادی است.

۱-۳-هدف پژوهش

هدف این پژوهش، مدل سازی، طراحی کنترلر و شبیه سازی سیستم کوادکوپتر می باشد. مدل سازی با استفاده روابط نیوتن اوایلر انجام می شود. طراحی کنترلرهای خطی (کنترلر تناسبی-انتگرالی-مشتقگیر (PID) و پسخوراند حالت بر پایه LQR) و غیرخطی (کنترلر پسخوراند خطی ساز، مود لغزشی، تکنیک پسگام و کنترل تطبیقی مدل مرجع بر پایه تابع لیاپانوف) مد نظر می باشد. شبیه سازی در محیط متلب همراه با نتایج آن ها به صورت کامل نیز ارائه خواهد شد.

^۶ Back Stepping Control

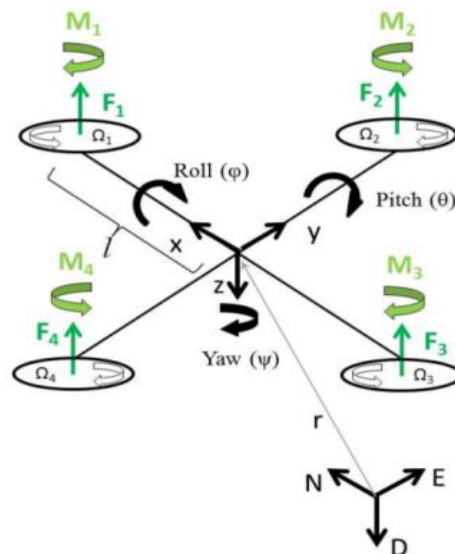
^۷ Model Reference Adaptive Control

فصل دوم- مدلسازی دینامیکی کوادکوپتر

۲-۱-مقدمه

برای طراحی کنترلر خوب همواره به مدل ریاضی مناسبی از سیستم، شامل معادلات سینماتیکی و دینامیکی نیاز است. مدل ریاضی کوادکوپتر با استفاده از روش نیوتن-اوایلر با در نظر گرفتن فرضیات زیر ارائه خواهد شد:

- ساختار کوادکوپتر به صورت صلب و متقارن است.
- مرکز جرم کوادکوپتر منطبق بر مرکز هندسی بدنه است.
- ملخ ها صلب هستند.
- نیروی جلوبرنده و گشتاورها متناسب با مجذور سرعتهای ملخ ها هستند.



شکل ۲. دستگاه بدنی و اینرسی در سیستم کوادکوپتر

برای دستیابی به مدل مناسب، ابتدا مختصات های لازم برای توصیف حرکت تعریف میشوند. شکل ۲ نشان می دهد که مختصات دستگاه اینرسی با N, E, D و مختصات بدنی با x, y, z نشان داده شده است. مختصه اینرسی بر روی نقطه خاصی بر روی زمین و مختصات وسیله نیز بر مرکز جرم بدنه ثابت شده است. در کنار این دو مختصات، به سه دستگاه مختصات دیگر برای ایجاد ارتباط بین دستگاه وسیله و بدنی نیاز است، که به ترتیب برای تنظیم زوایای سمت، فراز و غلت مورد استفاده قرار می گیرند. برای انتقال از مختصات وسیله به دستگاه بدنی، باید ابتدا حول محور z دستگاه وسیله به اندازه زاویه سمت چرخید (دستگاه کمکی ۱)، سپس به اندازه زاویه فراز حول محور y دستگاه کمکی ۱ چرخید (دستگاه کمکی ۲) و در نهایت به اندازه زاویه غلت حول محور دستگاه کمکی ۲ چرخید و به دستگاه بدنی انتقال یافته است. بنابراین، برای انتقال از دستگاه وسیله به دستگاه بدنی از ماتریس دوران زیر می توان استفاده نمود.

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = R_p^b(\phi) R_y^p(\theta) R_v^y(\psi) \\ = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

where $s \triangleq \sin$ and $c \triangleq \cos$.

ماتریس R_p^b ماتریس انتقال از دستگاه کمکی ۲ به دستگاه بدنی است.، ماتریس R_p^y نیز ماتریس انتقال از دستگاه کمکی ۱ به دستگاه کمکی ۲ است و R_y^v ماتریس انتقال از دستگاه اولیه به دستگاه کمکی ۱ است. ماتریس های انتقال برای ارتباط بین پارامترهای مختلف کمک میکنند. (u, ϕ, p) سرعت خطی، میزان چرخش و سرعت زاویه ای در جهت محور غلت می باشد. (v, θ, q) سرعت خطی، میزان چرخش و سرعت زاویه ای در جهت محور فراز می باشد. (w, ψ, r) سرعت خطی، میزان چرخش و سرعت زاویه ای در جهت محور سمت می باشد. (x, y, z) موقعیت های کوادکوپتر در جهات محورهای E, N و D در دستگاه اینرسی هستند.

۲-۲- سینماتیک

مشتق موقعیت ها $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ در دستگاه اینرسی هستند و سرعتهای (u, v, w) در دستگاه بدنی هستند. ارتباط بین این دو را میتوان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

سرعت های زاویه ای (p, q, r) و نرخ تغییر زوایای اولیه $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ نیز به صورت زیر با هم در ارتباط هستند.

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

۲-۳- دینامیک

با اعمال قانون دوم نیوتن به سیستم داریم:

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \omega_{\mathbf{b}} \times \mathbf{v} \right)$$

$$\text{where } \mathbf{v} = (u, v, w)^T \text{ and } \omega_{\mathbf{b}} = (p, q, r)^T. \quad (2-4)$$

با در نظر گرفتن معدلات کریولیس، مشتقات زمانی سرعت ها در دستگاه بدنی به دست می آیند. با جایگزینی در رابطه مربوطه داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

با فرض اینکه اغتشاشات خارجی حضور ندارند، داریم:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = R_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

f همان مجموع نیروهای تراست بالابرنده و mg همان وزن کوادکوپتر است. حال با اعمال قانون دوم نیوتن به حرکت چرخشی، داریم:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega_{\mathbf{b}} \times \mathbf{L} \right) \quad (2-7)$$

که $L = J\omega_b$ همان ممتموم زاویه ای است و τ گشتاور اعمالی است. با استفاده از معادله کریولیس برای محاسبه مشتقات زمانی ممتموم زاویه ای در دستگاه بدنی، معادله میتواند به صورت زیر ساده شود:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qr \frac{J_y - J_z}{J_x} \\ pr \frac{J_z - J_x}{J_y} \\ pq \frac{J_x - J_y}{J_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

که $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$ و J_x, J_y, J_z المان های قطری ماتریس اینرسی J هستند.

حال، معادلات (2-5) تا (2-8) مدل 6 درجه آزادی کوادکوپتر را بیان می کنند. با صرفنظر از ترم های کریولیس و ترم های مشتق زمانی معادلات به صورت زیر ساده تر می شوند:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{J_y - J_z}{J_x}\right) + \frac{l}{J_x}U_2 \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{J_z - J_x}{J_y}\right) + \frac{l}{J_y}U_3 \\
\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{J_x - J_y}{J_z}\right) + \frac{U_4}{J_z} \\
\ddot{z} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \cos \theta) - g \\
\ddot{x} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\
\ddot{y} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)
\end{aligned} \tag{۲-۹}$$

جایی که ورودی های کنترلی U_1 تا U_4 به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}
U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\
U_2 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\
U_3 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\
U_4 &= d(\Omega_4^2 + \Omega_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)
\end{aligned} \tag{۲-۱۰}$$

۲-۴- فضای حالت

برای یافتن نقطه تعادل سیستم، ابتدا معادلات به فضای حالت انتقال داده می شوند. به دلیل وجود ۶ درجه آزادی در سیستم، ۱۲ حالت در سیستم وجود دارد که با $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}\}$ نشان داده می شوند.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T = \begin{pmatrix} x_1 = \phi \\ x_2 = \dot{\phi} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \\ x_5 = \psi \\ x_6 = \dot{\psi} \\ x_7 = z \\ x_8 = \dot{z} \\ x_9 = x \\ x_{10} = \dot{x} \\ x_{11} = y \\ x_{12} = \dot{y} \end{pmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

بنابراین معادلات سیستم در فضای حالت به صورت زیر بازنویسی می شوند.

$$\dot{X} = f(X, U) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 x_6 a_1 + U_2 b_1 \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_2 + U_3 b_2 \\ x_6 \\ x_2 x_4 a_3 + U_4 b_3 \\ x_8 \\ \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) - g \\ x_{10} \\ \frac{U_1}{m} U_x \\ x_{12} \\ \frac{U_1}{m} U_y \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

که

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 + \sin x_1 \sin x_5 \\ U_y &= \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5 - \sin x_1 \cos x_5 \\ a_1 &= \frac{J_y - J_z}{J_x}, b_1 = \frac{l}{J_x} \\ a_2 &= \frac{J_z - J_x}{J_y}, b_2 = \frac{l}{J_y} \\ a_3 &= \frac{J_x - J_y}{J_z}, b_3 = \frac{1}{J_z} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

۲-۵- نقطه تعادل سیستم کوادکوپتر

با توجه به اینکه در نقطه تعادل مشتق کلیه حالات برابر صفر می‌باشند، بنابراین تمامی حالات زوج صفر می‌باشند. پس نقطه تعادل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} 0 = x_2 & 0 = x_8 \\ 0 = x_4 x_6 a_1 + U_2 b_1 & 0 = \frac{U_1}{m} (\cos x_7 \cos x_9) - g \\ 0 = x_4 & 0 = x_{10} \\ 0 = x_2 x_6 a_2 + U_3 b_2 & 0 = \frac{U_1}{m} U_x \\ 0 = x_6 & 0 = x_{12} \\ 0 = x_2 x_4 a_3 + U_4 b_3 & 0 = \frac{U_1}{m} U_y \end{array}$$

$$(۲-۱۴)$$

با توجه به معادلات بالا حالات زوج در مبدا به تعادل می رسند و از معادلات $U_x = 0$ و $U_y = 0$ روابط زیر قابل استنباط می باشند:

$$\begin{aligned} tg x_5 &= -\cotg x_1 \sin x_3 \\ tg x_5 &= tg x_1 / \sin x_3 \end{aligned} \quad (۲-۱۵)$$

بنابراین با برابر قرار دادن طرف راست معادلات (۲-۱۵) داریم:

$$tg^2 x_1 + \sin^2 x_3 = 0 \quad (۲-۱۶)$$

میدانیم که در صورتی معادله (۲-۱۶) برقرار است که هردو ترم برابر صفر باشند، بنابراین:

$$\begin{aligned} tg x_1 &= 0 \\ \sin x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۱۷)$$

از آنجایی که زوایای φ و θ نمی توانند از محدوده $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ خارج شوند، پس مقادیر زاویه تعادل φ و θ به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0 \\ x_3^* &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۱۸)$$

با قرار دادن این دونقطه در رابطه (۲-۱۵) مقدار زاویه Ψ ، مبهم به دست می آید. البته با توجه به فیزیک مسئله میتوان تشخیص داد که در هر زاویه Ψ سیستم در تعادل است.

بنابراین میتوان گفت برای اینکه بدنه کوادکوپتر در حالت تعادل قرار گیرد کفایت مشتقات تمامی حالات، زوایای φ و θ برابر صفر شوند و ورودی اول برابر وزن کل بدنه باشد و مابقی ورودی ها برابر صفر در نظر گرفته می شوند و در نهایت نقطه تعادل به صورت زیر می باشد:

$$x_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\psi} \ 0 \ \bar{z} \ 0 \ \bar{x} \ 0 \ \bar{y} \ 0]^T \in \mathbb{R}^{12} \quad (۲-۱۹)$$

ورودیهای تعادلی نیز به صورت زیر می باشند:

$$u_{eq} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (۲-۲۰)$$

لازم به ذکر است که نقطه تعادل در سیستم کوادکوپتر همان نقطه کاری است.

۶-۲- خطی سازی سیستم حول نقطه تعادل

روش اول- برای خطی سازی کافیت در ترم های غیر خطی از فرض های زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1\end{aligned}\quad (۲۱-۲)$$

بنابراین معادلات خطی سازی شده به صورت زیر می باشند:

$$\begin{array}{l|l} \dot{x}_1 = x_2 & \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_2 = U_2 b_1 & \dot{x}_8 = \frac{U_1}{m} - g \\ \dot{x}_3 = x_4 & \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_4 = U_3 b_2 & \dot{x}_{10} = \frac{U_1}{m} x_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 & \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_6 = U_4 b_3 & \dot{x}_{12} = -\frac{U_1}{m} x_1 \end{array} \quad (۲۲-۲)$$

روش دوم - با فرض اینکه فرم کلی معادلات غیر خطی به صورت زیر باشند:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (۲۳-۲)$$

راه دیگر برای خطی سازی استفاده از ماتریس ژاکوبین معادلات غیر خطی در نقطه تعادل می باشد: (۲۴-۲)

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و فرم نهایی معادلات خطی در فضای حالت به صورت زیر است:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-25)$$

حال با استفاده از ریشه های معادله مشخصه فضای حالت سیستم به بررسی پایداری سیستم می پردازیم:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2-26)$$

بنابراین ریشه های معادله مشخصه سیستم خطی یا مقادیر ویژه به صورت زیر است:

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (2-26)$$

با توجه به اینکه تمامی ریشه های معادله مشخصه سیستم خطی در صفر واقع شده اند، سیستم خطی نوسانی است ولی در مورد پایداری سیستم غیرخطی به صورت تئوری نمی توان اظهار نظر نمود. ولی به صورت کلی با استفاده از فیزیک سیستم می توان تشخیص داد که نقطه تعادل ناپایدار است: چون که اگر زاویه φ و θ را به اندازه کمی تغییر دهیم، تمامی حالات سیستم از حالت اولیه دور می شوند و به حالت اولیه بر نمیگردند.

۷-۲- پایداری سیستم کوادکوپتر حول نقطه تعادل به روش دوم لیپانوف

در سیستم های مکانیکی، اگر انرژی کل سیستم، همواره در حال کاهش باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم پایدار است. روش دوم لیپانوف بر این اصل استوار است. بنابراین اگر تابع لیپانوف برای انرژی کل سیستم باشد، در صورتی نرخ تغییرات انرژی منفی باشد یا انرژی کاهش باشد، آنگاه نقطه تعادل پایدار است.

انرژی کل سیستم کوادکوپتر، شامل یک بخش انرژی جنبشی ناشی از تغییرات سرعت های خطی و زاویه ای است و بخش دیگر نیز انرژی پتانسیل ناشی از تغییر ارتفاع آن است.

$$K_{translational} = \frac{1}{2} \{v\}^T [M] \{v\} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2-27)$$

$$K_{rotational} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I] \{\omega\} = \frac{1}{2} (J_x \dot{\phi}^2 + J_y \dot{\theta}^2 + J_z \dot{\psi}^2)$$

و انرژی جنبشی کل برابر مجموع انرژی جنبشی انتقالی و زاویه ای است.

$$K_{total} = K_{translational} + K_{rotational} \quad (2-28)$$

انرژی پتانسیل نیز به صورت زیر است:

$$U = mgz \quad (2-29)$$

بنابراین انرژی کل برابر است با:

$$\begin{aligned} E &= K_{total} + U \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(J_x\dot{\phi}^2 + J_y\dot{\theta}^2 + J_z\dot{\psi}^2) + mgz \end{aligned} \quad (2-30)$$

حال تابع لیپانوف برابر تابع انرژی در نظر گرفته می شود.

$$V = E \geq 0 \quad (2-31)$$

در گام بعد، از این تابع مشتق گرفته می شود و با تعیین علامت مشتق تابع لیپانوف در مورد پایداری آن بحث می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) + (J_x\dot{\phi}\ddot{\phi} + J_y\dot{\theta}\ddot{\theta} + J_z\dot{\psi}\ddot{\psi}) + mg\dot{z} \\ &= mg\{\dot{x}(\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + \dot{y}(\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\ &\quad + \dot{z}(\cos\varphi\cos\theta)\} + \{a_1J_x + a_2J_y + a_3J_z\}\dot{\phi}\dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned} \quad (2-32)$$

به صورت کلی \dot{V} حول مبدا منفی نیست و حتی می تواند مثبت باشد و بستگی تمامی حالات سیستم دارد. بنابراین میتوان گفت که این سیستم حول نقطه تعادل خود پایدار نیست.

فصل سوم- پایدار سازی و کنترل کوادکوپتر

۳-۱- مقدمه

در این فصل به تئوری کنترل کوادکوپتر پرداخته می شود. در هر قسمت یک کنترلر مجزا ابتدا در یک سیستم مرتبه ۲ استاندارد شرح داده شده است، سپس به سیستم کوادکوپتر تعمیم داده شده است. به ترتیب کنترلر PID، کنترلر پسخوراند حالت، کنترلر پسخوراند خطی ساز، کنترلر مود لغزشی، پسگام و در نهایت کنترلر تطبیقی مدل مرجع شرح داده خواهد شد.

۳-۲- کنترلر تناسبی-انتگرالگیر-مشتقگیر

۳-۲-۱- مقدمه

این نوع کنترلر که معروفترین کنترل کننده خطی و کاربردی ترین کنترلر موجود در صنعت می باشد، از سه ترم تناسبی، انتگرالگیر و مشتق گیر تشکیل شده است. تغییرات ضریب تناسبی، باعث تغییر در اندازه فرجهش و یا فروجهش سیستم می شود و تغییرات ضریب انتگرالگیر، باعث تغییر خطای حالت ماندگار سیستم می شود و ضریب مشتقگیر نیز می تواند سرعت سیستم را افزایش یا کاهش دهد. ورودی حاصل از کنترل کننده PID به صورت زیر می باشد:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \dot{e}(t) \quad (3-1)$$

۳-۲-۲- کاربرد کنترل کننده PID در کوادکوپتر

در سیستم کوادکوپتر، ۴ ورودی کنترلی و ۶ حالت وجود دارد، بنابراین با ۴ کنترل کننده PID نیز، نمیتوان کلیه حالات سیستم را کنترل نمود و فقط می توان ۴ حالت را کنترل نمود که این حالات عبارتند از:

$$\varphi, \theta, \psi, Z$$

که با کنترل این حالات، حالت پایداری (Hovering) ایجاد می گردد. ولی حالت های x, y را نمی توان کنترل نمود. برای کنترل حالت های x, y باید مقدار زوایای مرجع φ, θ را تنظیم نمود که تعقیب مسیر صورت گیرد، که به صورت زیر می توان عمل نمود:

$$\begin{aligned} \theta_d(t) &= K_{p,x} e_x(t) + K_{i,x} \int_0^t e_x(t) dt + K_{d,x} \dot{e}_x(t) \\ \varphi_d(t) &= K_{p,y} e_y(t) + K_{i,y} \int_0^t e_y(t) dt + K_{d,y} \dot{e}_y(t) \end{aligned} \quad (3-2)$$

و بنابراین ۴ کنترل کننده PID بعدی به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned}
U_1 &= K_{p,z}e_z(t) + K_{i,z}\int_0^t e_z(t) dt + K_{d,z}\dot{e}_z(t) \\
U_2 &= K_{p,\phi}e_\phi(t) + K_{i,\phi}\int_0^t e_\phi(t) dt + K_{d,\phi}\dot{e}_\phi(t) \\
U_3 &= K_{p,\theta}e_\theta(t) + K_{i,\theta}\int_0^t e_\theta(t) dt + K_{d,\theta}\dot{e}_\theta(t) \\
U_4 &= K_{p,\psi}e_\psi(t) + K_{i,\psi}\int_0^t e_\psi(t) dt + K_{d,\psi}\dot{e}_\psi(t)
\end{aligned} \tag{۳-۳}$$

که خطای حالات مختلف به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}
e_x(t) &= x_d(t) - x(t) \\
e_y(t) &= y_d(t) - y(t) \\
e_z(t) &= z_d(t) - z(t) \\
e_\phi(t) &= -\phi_d(t) - \phi(t) \\
e_\theta(t) &= \theta_d(t) - \theta(t) \\
e_\psi(t) &= \psi_d(t) - \psi(t)
\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

۳-۳- کنترلر خطی تنظیم کننده بهینه (LQR)

نوعی کنترل کننده خطی است که هدف آن کمینه کردن یک تابع هزینه بر حسب حالات سیستم و ورودی های آن می باشد. فرض کنید سیستم نهایی خطی سازی شده به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A_{n \times n}x_{n \times 1} + B_{n \times m}u_{m \times 1} \\
y &= C_{1 \times n}x_{n \times 1}
\end{aligned} \tag{۳-۵}$$

بنابر روش پسخوراند حالت (State Feedback) می توان ورودی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u = -K_{m \times n}x_{n \times 1} \tag{۳-۶}$$

که با روش هایی مانند باسگیورا (Bass & Gura)، آکرمن (Ackerman) و LQR می توان K را تعیین نمود به گونه ای که قطب های سیستم حلقه بسته در محل های از پیش تعیین شده قرار گیرند. معادله سیستم حلقه بسته نیز به صورت زیر می باشد:

$$A_{cl} = A - BK \tag{۳-۷}$$

در این قسمت هدف به دست آوردن K با استفاده از روش LQR می باشد. در این روش ابتدا تابع هزینه ای مطابق زیر تعیین می گردد:

$$J = \int_0^t (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt \quad (3-8)$$

سپس برای کمینه کردن این تابع هزینه، از آن مشتق گرفته می شود که در نهایت به معادله زیر منتهی می شود که به معادله ریکاتی معروف می باشد:

$$A^T P + PA - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + Q = 0 \quad (3-9)$$

با حل این معادله، K بهینه بدست می آید:

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3-10)$$

در سیستم کوادکوپتر نیز به همین صورت ضریب K تعیین می شوند. مقدار n (تعداد حالات سیستم)، برابر ۱۲ و m (تعداد ورودی ها) نیز برابر ۴ می باشد. بنابراین ماتریس K یک ماتریس 12×4 می باشد.

ضرایب طراحی شده فقط جهت پایدارسازی مورد استفاده قرار می گیرند ولی قادر به تعقیب مسیر (سروو کنترلر) دلخواه نیستند. به صورت کلی در سیستم های خطی، برای کنترل کردن و تعقیب مسیر با استفاده از روش های پسخوراند حالت، از دو روش استفاده می شود:

۱- استفاده از کنترل پیشخور (Feedforward Gain)

در این نوع از بهره زیر به عنوان پیشخور ورودی استفاده می شود:

$$K_I = \frac{B}{A - BK} \quad (3-11)$$

۲- استفاده از انتگرالگیر (Integrator)

در این روش نیز با افزودن یک دینامیک که متشکل از خطای خروجی در هر لحظه می باشد، به سیستم اصلی و پایدار سازی آن، سیستم را وادار به تعقیب مسیر دلخواه می کنند. دینامیک خطا به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\sigma = \int_0^t (y - y_r) dt \quad (3-12)$$

که y خروجی سیستم و y_r خروجی مطلوب می باشد. و در این صورت مرتبه K برابر $n + 1$ می باشد که آخرین درایه K برابر K_I می باشد:

$$K_I = K_{end} \quad (3-13)$$

در هر صورت پس از تعیین K_I برای تکمیل فرآیند تعقیب مسیر، ورودی کنترلی به صورت زیر تعیین می گردد:

$$u(t) = -Kx(t) - K_I r(t) \quad (3-14)$$

که $r(t)$ همان ورودی مرجع است که قرار است تعقیب شود.

۳-۴- کنترل پسخوراند خطی ساز

۳-۴-۱- مقدمه

این نوع کنترلر نوعی کنترل کننده غیرخطی است که هدف آن حذف ترم های غیرخطی از سیستم، با استفاده از ورودی است، به گونه ای که در نهایت با کنترل کننده خطی نیز بتوان سیستم را کنترل نمود. به صورت کلی فرض کنید سیستم مرتبه دو به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3-15)$$

آنگاه u را به گونه ای انتخاب می کنیم که تمامی ترم های غیرخطی حذف شوند. همانند زیر:

$$u = g(x_1, x_2)^{-1}(v - f(x_1, x_2)) \quad (3-16)$$

پس از ساده سازی روابط، معادلات به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v \end{aligned} \quad (3-17)$$

همان طور که مشاهده می کنید روابط کاملاً خطی شده اند و اکنون با استفاده از روش های کنترل خطی می توان v را به گونه طراحی نمود که خروجی، خروجی مطلوب را تعقیب نماید:

$$v = \ddot{y}_d - K_2 \dot{e} - K_1 e \quad (3-18)$$

با قرار دادن v در معادلات، معادله خطای سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$\ddot{e} + K_2 \dot{e} + K_1 e = 0 \quad (3-19)$$

که خطای سیستم و مشتقات آن به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} e &= y_d - y \\ \dot{e} &= \dot{y}_d - \dot{y} \\ \ddot{e} &= \ddot{y}_d - \ddot{y} \end{aligned} \quad (3-20)$$

حال می توان ضرایب K_1 و K_2 را به گونه ای انتخاب نمود که قطب های معادله مشخصه خطای سیستم در محل قطب های مطلوب قرار گیرند و باید مثبت باشند.

۳-۴-۲- کنترل پسخوراند خطی ساز در کوادکوپتر

بنابراین در سیستم کوادکوپتر نیز می توان از این روش برای تمامی حالات به صورت کاملاً جدا استفاده نمود. معادلات (۲-۱۲) را در نظر بگیرید. ورودی های کنترلی U_1 تا U_4 را به گونه ای تعیین می شوند که تمامی ترم های غیرخطی سیستم حذف می شوند و ورودی های v_1 تا v_4 جایگزین می شوند. معادلات ورودی های اصلی سیستم را در زیر مشاهده می کنید:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \{v_1 + g\} \\ U_2 &= \frac{1}{b_1} \{v_2 - a_1 x_4 x_6\} \\ U_3 &= \frac{1}{b_2} \{v_3 - a_2 x_2 x_6\} \\ U_4 &= \frac{1}{b_3} \{v_4 - a_3 x_2 x_4\} \end{aligned} \quad (3-21)$$

ورودی های کنترلی مورد نیاز برای کنترل موقعیت های x, y نیز به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{m}{U_1} v_x \\ U_y &= \frac{m}{U_1} v_y \end{aligned} \quad (3-22)$$

ورودی های خطی v_1 تا v_4 به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \ddot{z}_d - K_{2,z} \dot{e}_z - K_{1,z} e_z \\
v_2 &= \ddot{\varphi}_d - K_{2,\varphi} \dot{e}_\varphi - K_{1,\varphi} e_\varphi \\
v_3 &= \ddot{\theta}_d - K_{2,\theta} \dot{e}_\theta - K_{1,\theta} e_\theta \\
v_4 &= \ddot{\psi}_d - K_{2,\psi} \dot{e}_\psi - K_{1,\psi} e_\psi \\
v_x &= \ddot{x}_d - K_{2,x} \dot{e}_x - K_{1,x} e_x \\
v_y &= \ddot{y}_d - K_{2,y} \dot{e}_y - K_{1,y} e_y
\end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

که خطاهای موجود در ورودی های خطی به صورت زیر می باشند: (۷)

$$\begin{aligned}
e_x(t) &= x_d(t) - x(t) \\
e_y(t) &= y_d(t) - y(t) \\
e_z(t) &= z_d(t) - z(t) \\
e_\varphi(t) &= -U_y(t) - \varphi(t) \\
e_\theta(t) &= U_x(t) - \theta(t) \\
e_\psi(t) &= \psi_d(t) - \psi(t)
\end{aligned} \tag{۳-۲۴}$$

۵-۳- کنترلر مود لغزشی

۳-۵-۱- مقدمه

این نوع کنترلر نوعی کنترل کننده غیرخطی است که با اعمال ورودی ناپیوسته، سیستم دینامیکی را وادار می کند که بر روی یک سطح لغزش حرکت کند و به طرف حالت مطلوب حرکت کند. نوعی کنترل مقاوم غیرخطی است که در مقابل تغییرات پارامترهای مدل غیرخطی، اغتشاشات خارجی و نامعینی های مدل رفتار کاملاً پایداری از خود نشان می دهد.

دینامیک سطح جاذب به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e \tag{۳-۲۵}$$

که n مرتبه سیستم است. برای مثال سطح جاذب در دینامیک مرتبه ۲ و ۳ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
S &= \dot{e} + \lambda e, & n &= 2 \\
S &= \ddot{e} + 2\lambda \dot{e} + \lambda^2 e, & n &= 3
\end{aligned} \tag{۳-۲۶}$$

پس از تعریف سطح لغزش، با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب که بر حسب دینامیک سطح لغزش تعریف می شود و ارضا نمودن شرایط پایداری لیاپانوف، سیستم وادار به نزدیک شدن به حالت مطلوب می شود. معمول ترین تابع لیاپانوف برای طراحی کنترل کننده مود لغزشی که مثبت معین می باشد، به صورت زیر است:

$$V(S) = \frac{1}{2} S^2 \quad (3-27)$$

که

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \dot{V}(S) &= S\dot{S} \end{aligned} \quad (3-28)$$

برای اینکه مشتق تابع لیپانوف منفی نیمه معین باشد، بهتر است شرط زیر که به شرط رسیدن در زمان محدود^۸ نام دارد، برقرار باشد:

$$S\dot{S} \leq -\eta |S| \quad (3-29)$$

حال فرض کنید یک سیستم مرتبه دو غیر خطی در فرم نرمال به صورت (۳-۱۵) موجود می باشد، بنابراین چون مرتبه سیستم برابر ۲ است، مرتبه دینامیک سطح لغزش برابر ۱ (یکی کمتر) است:

$$\begin{aligned} S &= \dot{e} + \lambda e \\ \dot{S} &= \ddot{e} + \lambda \dot{e} \end{aligned} \quad (3-30)$$

که

$$\begin{aligned} e &= x_1 - x_{1d} \\ \dot{e} &= x_2 - \dot{x}_{1d} \\ \ddot{e} &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (3-31)$$

بنابراین با جایگذاری در معادله (۳-۲۹) داریم:

$$S(f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u - \ddot{x}_{1d} + \lambda \dot{e}) \leq -\eta |S| \quad (3-32)$$

حال باید ورودی کنترلی u را به گونه ای یافت که شرط رسیدن در زمان محدود ارضا گردد. فرم کلی ورودی به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{g(x_1, x_2)} (-f(x_1, x_2) + \ddot{x}_{1d} - \lambda \dot{e} - K \text{sign}(S)) \quad (3-33)$$

که تابع $\text{sign}(\cdot)$ همان تابع علامت و ضریب K نیز پارامتر طراحی است و به گونه ای طراحی می شود که شرط رسیدن در زمان محدود برقرار گردد. طراحی ضریب K به عواملی نظیر پارامترهای درونی سیستم، عدم قطعیت های پارامترها، اغتشاش خارجی، مسیر مطلوب و غیره، وابسته است. در شرایطی که پارامترهای سیستم کاملاً شناخته شده باشند (یعنی f, g کاملاً معلوم باشند)، K به صورت زیر قابل مقدار دهی است:

⁸ Reaching condition

$$K > \eta \quad (3-34)$$

بنابراین با انتخاب K مناسب میتوان پایداری سیستم را تضمین نمود.

۳-۵-۲- کاربرد کنترل کننده مود لغزشی در کوادکوپتر

از آنجایی که سیستم کوادکوپتر دارای ۴ ورودی و ۶ حالت می باشد بنابراین به دو صورت میتوان آنرا کنترل نمود:

۱- به صورت کنترل چند ورودی-چندخروجی (MIMO):

در این صورت ماتریس G باید مربعی، معکوس پذیر و حتی الامکان کاملاً معلوم باشد. البته در سیستم کوادکوپتر این ماتریس مربعی نیست چون تعداد ورودی های و حالات با هم مساوی نیست. ولی با استفاده از روش های خاصی میتوان این ماتریس را مربعی کرد. که در مقالات مربوط به این حوزه موجود می باشد.

۲- تبدیل سیستم مرتبه n به چند زیر سیستم مرتبه ۱:

در این صورت همانند روش ذکر شده در مقدمه این بخش به کنترل تمامی زیر سیستم ها پرداخته می شود. معمولاً در سیستم کوادکوپتر از این روش استفاده می گردد. در ادامه جزئیات این روش بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته می شود.

معادلات (۱۲-۲) را در نظر بگیرید. با توجه به این که معادلات تمامی حالات مرتبه دو هستند بنابراین تمامی زیر سیستم ها مرتبه دو هستند و بالتبع دینامیک سطوح لغزش مرتبه یک می باشد. سطوح لغزش اصلی مورد نیاز برای پایداری وضعیت و ارتفاع کوادکوپتر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_\varphi + \lambda_1 e_\varphi \\ S_2 &= \dot{e}_\theta + \lambda_2 e_\theta \\ S_3 &= \dot{e}_\psi + \lambda_3 e_\psi \\ S_4 &= \dot{e}_z + \lambda_4 e_z \end{aligned} \quad (3-35)$$

سطوح لغزش جانبی مورد نیاز برای تعقیب موقعیت در سطح افقی نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} S_5 &= \dot{e}_x + \lambda_5 e_x \\ S_6 &= \dot{e}_y + \lambda_6 e_y \end{aligned} \quad (3-36)$$

خطاهای موجود در معادلات سطوح لغزش همانند رابطه (۲۴-۳) تعریف می شوند. ورودی های کنترلی نیز به گونه ای تعریف می شوند که روابط رسیدن در زمان محدود برای هر سطح لغزش، ارضا شوند.

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{b_1} (-a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} + \ddot{\phi}_d + \lambda_1 \dot{e}_\phi + k_1 \text{sign}(S_2) + k_2 S_2) \\
U_3 &= \frac{1}{b_2} (-a_2 \dot{\phi} \dot{\psi} + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 \dot{e}_\theta + k_3 \text{sign}(S_3) + k_4 S_3) \\
U_4 &= \frac{1}{b_3} (-a_4 \dot{\phi} \dot{\theta} + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 \dot{e}_\psi + k_5 \text{sign}(S_4) + k_6 S_4) \\
U_1 &= \frac{m}{\cos \varphi \cos \theta} (g + \ddot{z}_d + \lambda_4 \dot{e}_z + k_7 \text{sign}(S_4) + k_8 S_4) \\
U_x &= \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_d + \lambda_5 \dot{e}_x + k_9 \text{sign}(S_5) + k_{10} S_5) \\
U_y &= \frac{m}{U_1} (\ddot{y}_d + \lambda_6 \dot{e}_y + k_{11} \text{sign}(S_6) + k_{12} S_6)
\end{aligned} \tag{۳-۳۷}$$

که ضرایب k_i , $i = 1, 2, \dots, 12$ پارامترهای طراحی هستند و میتوان آنها را با سعی و خطا نیز انتخاب نمود. نکته ای که حائز اهمیت است این است که ورودی های کنترلی با فرض معلوم بودن تمامی پارامترهای مدل، نبود عدم قطعیت و اغتشاش خارجی طراحی شده اند.

۳-۶- کنترلر پسگام

۳-۶-۱- مقدمه

این نوع کنترلر در واقع یک تکنیک کنترل غیرخطی به گام زنی به عقب می باشد که در ساختار آن معمولاً از بیش از یک تابع لیاپانوف نرمال استفاده می شود که این توابع به هم دیگر کاملاً مرتبط می باشند. برای تفهیم بیشتر فرض کنید معادلات یک سیستم به صورت (۳-۱۵) تعریف شده باشد و هدف تعقیب مسیر مطلوب x_{1d} توسط x با استفاده از ورودی u باشد. بنابراین با تعریف خطای زیر:

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \tag{۳-۳۸}$$

تابع لیاپانوف مثبت معین زیر بر حسب این خطا تعریف می گردد:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \tag{۳-۳۹}$$

بنابراین با مشتق گیری از این تابع و ایجاد شرایطی برای منفی نیمه معین بودن آن می توان پایداری مجانبی را تضمین نمود:

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (\dot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \leq -c_1 e_1^2 \tag{۳-۴۰}$$

در نامساوی بالا، اگر x_2 مجازی همانند زیر در نظر بگیریم که شرایط پایداری برقرار گردد:

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + c_1 e_1 \quad (3-41)$$

حال خطای دوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$e_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - c_1 e_1 \quad (3-42)$$

بنابراین رابطه (3-40) به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\dot{V}_1 = -e_1 e_2 - c_1 e_1^2 \quad (3-43)$$

در گام بعدی یک تابع لیاپانوف جامع تر، به گونه ای تعریف می گردد که هم e_1 و هم e_2 به صورت مجانبی به سمت صفر میل بکنند.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (3-44)$$

با مشتقگیری از این تابع، داریم:

$$\dot{V}_2 = -e_1 e_2 - c_1 e_1^2 + e_2 (\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - c_1 \dot{e}_1) \quad (3-45)$$

با جایگذاری \dot{x}_2 از معادله (3-15) معادله زیر حاصل می گردد:

$$\dot{V}_2 = -e_1 e_2 - c_1 e_1^2 + e_2 (f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u - \ddot{x}_{1d} - c_1 \dot{e}_1) \quad (3-46)$$

ورودی کنترلی u به گونه ای طراحی می شود که رابطه زیر ارضا گردد:

$$\dot{V}_2 = -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2 \leq 0 \quad (3-47)$$

بنابراین ورودی کنترلی u به صورت زیر تعریف می گردد:

$$u = \frac{1}{g(x_1, x_2)} (e_1 - f(x_1, x_2) + \ddot{x}_{1d} + c_1 \dot{e}_1 - c_2 e_2) \quad (3-48)$$

۳-۶-۲- کاربرد کنترلر پسگام در کوادکوپتر

در سیستم کوادکوپتر نیز همانند بخش قبل سیستم را به چند زیر سیستم مرتبه دو تبدیل نموده و برای هر زیر سیستم یک خطای تعریف نموده و ورودی کنترلی موردنیاز طراحی می گردد. بنابراین ورودیهای کنترلی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{b_1}(e_1 - a_1 x_4 x_6 + \ddot{x}_{1d} - c_2 e_2 + c_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) \\
U_3 &= \frac{1}{b_2}(e_3 - a_2 x_2 x_6 + \ddot{x}_{3d} - c_4 e_4 + c_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) \\
U_4 &= \frac{1}{b_3}(e_5 - a_3 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - c_6 e_6 + c_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) \\
U_1 &= \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3}(g + e_7 + \ddot{x}_{7d} - c_8 e_8 + c_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) \\
U_x &= \frac{m}{U_1}(e_9 + \ddot{x}_{9d} - c_{10} e_{10} + c_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) \\
U_y &= \frac{m}{U_1}(e_{11} + \ddot{x}_{11d} - c_{12} e_{12} + c_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}))
\end{aligned} \tag{۳-۴۹}$$

که خطاهای زیرسیستم ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_{1d} - x_1, e_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - c_1 e_1 \\
e_3 &= x_{3d} - x_3, e_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - c_3 e_3 \\
e_5 &= x_{5d} - x_5, e_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - c_5 e_5 \\
e_7 &= x_{7d} - x_7, e_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - c_7 e_7 \\
e_9 &= x_{9d} - x_9, e_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - c_9 e_9 \\
e_{11} &= x_{11d} - x_{11}, e_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - c_{11} e_{11}
\end{aligned} \tag{۳-۵۰}$$

که در این معادلات برای کامل شدن تعقیب مسیر در راستای x و y از دستورهای U_x و U_y استفاده می شود که در واقع به عنوان حالات مطلوب برای زوایای φ, θ در نظر گرفته می شوند. به صورت زیر:

$$x_{1d} = -U_y(t), \quad x_{3d} = U_x(t) \tag{۳-۶۰}$$

۳-۷-کنترلر تطبیقی مدل مرجع بر پایه تابع لیاپانوف

۳-۷-۱- مقدمه

این نوع کنترلر، نوعی کنترلر تطبیقی است که در ساختار از یک مدل مرجع استفاده می کند و هدف آن به صورت کلی این است که ورودی کنترلی سیستم اصلی با ضرایب متغیر با زمان به گونه ای تعیین گردد که رفتار سیستم مرجع تقلید گردد. برای مثال فرض کنید که سیستم اصلی خطی سازی شده به صورت زیر می باشد:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p \tag{۳-۶۱}$$

بنابراین سیستمی کاملاً دارای ابعاد مشابه مدل اصلی و دارای پایداری مجانبی یا نمایی به عنوان مدل مرجع در نظر گرفته می شوند:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (3-62)$$

در مدل مرجع u_m به گونه ای طراحی می گردد که x_m حالت مطلوبی مانند x_d را دنبال کند. نکته جالب توجه این است که ماتریس A_m باید یک ماتریس هرویتز باشد یعنی تمامی مقادیر ویژه آن سمت چپ محور موهومی باشد یا به عبارت دیگر سیستم دارای پایداری نمایی حول نقطه تعادل (یا مبدا) باشد.

حال ورودی سیستم اصلی u_p به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$u_p(t) = K_x^T(t)x_p(t) + K_r^T(t)u_m(t) \quad (3-63)$$

که $K_x^T(t)$ و $K_r^T(t)$ ضرایب طراحی هستند که باید به صورت متغیر با زمان تعیین گردند. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب در فرم نرمال میتوان این ضرایب را به گونه ای تعیین نمود که مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین و در نتیجه سیستم پایدار مجانبی سراسری باشد. دینامیک ضرایب به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{K}_x^T(t) &= -\Gamma_x x_p(t)e(t)PB_p \\ \dot{K}_r^T(t) &= -\Gamma_r x_p(t)e(t)PB_p \end{aligned} \quad (3-64)$$

که

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \quad (3-65)$$

خطای سیستم و ماتریس P نیز به گونه ای انتخاب می گردد که مثبت معین باشد و رابطه زیر را ارضا کند:

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (3-66)$$

که در این معادله ماتریس Q نیز یک ماتریس مثبت معین می باشد.

نکته: میدانیم که مقادیر ویژه ماتریس A_m باید در سمت چپ محور موهومی باشند. یکی از روش های تعیین این ماتریس در مدل مرجع استفاده از پسخوراند حالت می باشد:

$$A_m = A_p - K^T x(t) \quad (3-67)$$

که روش های مختلفی برای تعیین ماتریس K وجود دارد که در بخش های قبل توضیح داده شده است. در این قسمت از روش LQR برای تعیین بهره کنترلی استفاده می شود. بهتر است که ضرایب کنترلی اولیه برابر بهره های طراحی شده با استفاده از LQR برابر باشد که سیستم در زمانهای کم دچار ناپایداری نشود. یعنی:

$$K_x^T(0) = K^T$$

$$K_r^T(0) = 0$$

بنابراین طبق روش شرح داده شده می توان ضرایب را به صورت متغیر با زمان (تطبیقی) استخراج نمود.

۳-۷-۲- کنترلر تطبیقی مدل مرجع در کوادکوپتر

در سیستم کوادکوپتر همانند بالا باید عمل نمود. در این سیستم ابعاد ماتریس ها به صورت زیر است:

$$A_p, A_m \in \mathbb{R}_{12 \times 12}$$

$$B_p, B_r \in \mathbb{R}_{12 \times 4}$$

$$K_x \in \mathbb{R}_{4 \times 12}$$

$$K_r \in \mathbb{R}_{4 \times 4}$$

فصل چهارم- نتایج شبیه سازی و نتیجه گیری کلی

۴-۱-مقدمه

در این فصل هدف این است که نتایج شبیه سازی در نرم افزار متلب نشان داده شود. برای شبیه سازی باید حالت مطلوبی در نظر گرفته شود. ابتدا برای حالت مطلوب به صورت ثابت و با ورودی استاندارد پله واحد برای حالتی که قرار است تعقیب مسیر صورت گیرد، در نظر گرفته می شود. سپس برای به چالش کشیدن کنترلرها از ورودی های غیر ثابت و متناوب (سینوسی) به منظور تعقیب مسیر استفاده می گردد. در ادامه به جزئیات این مهم بیشتر پرداخته خواهد شد.

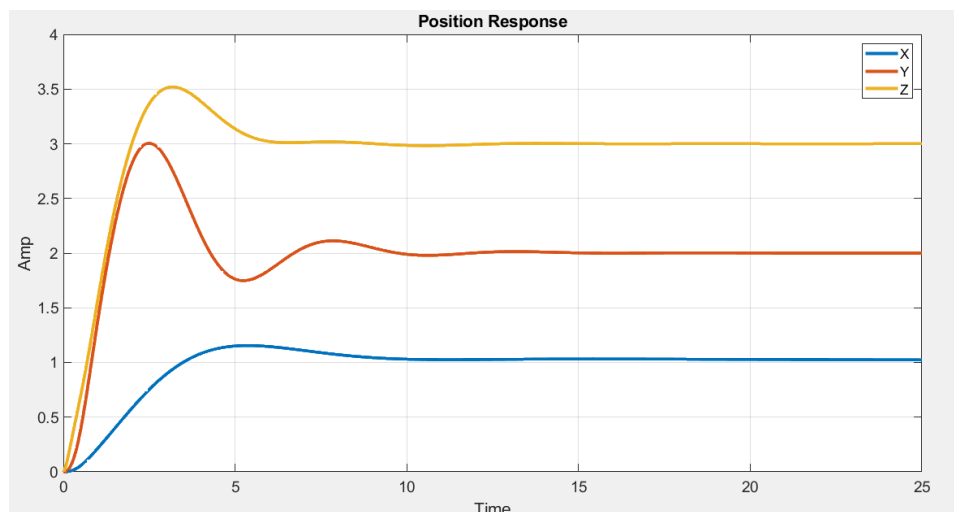
۴-۲-نتایج ورودی ثابت

در این قسمت حالت مطلوب ثابت به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

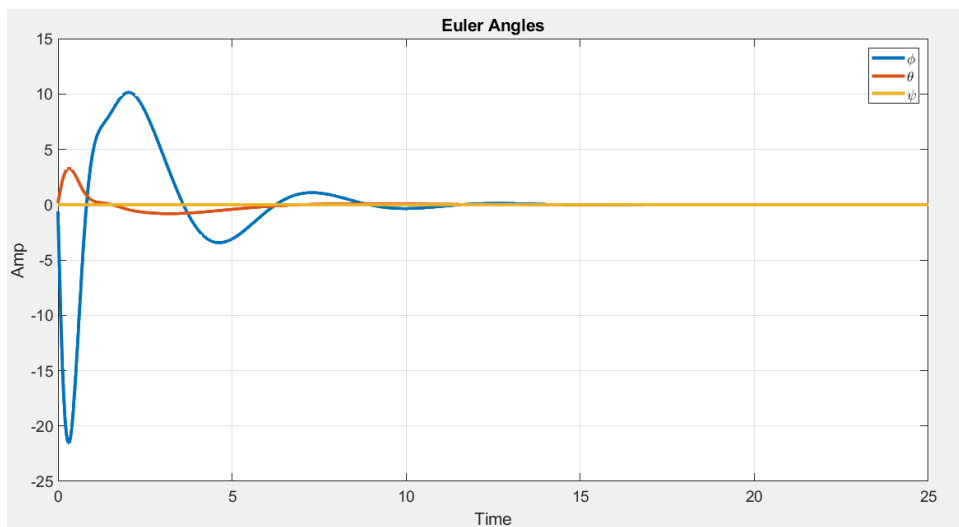
$$x_d = 1, y_d = 2, z_d = 1, \varphi_d = \theta_d = \psi_d = 0$$

از آنجایی که حالات مطلوب ثابت می باشند، بنابراین تمامی مشتقات آنها برابر صفر است. حال بعد از تعریف حالات مطلوب خروجی های کنترلرها یک به یک نمایش داده می شود.

۴-۲-۱- نتایج کنترل کننده PID به ورودی های ثابت

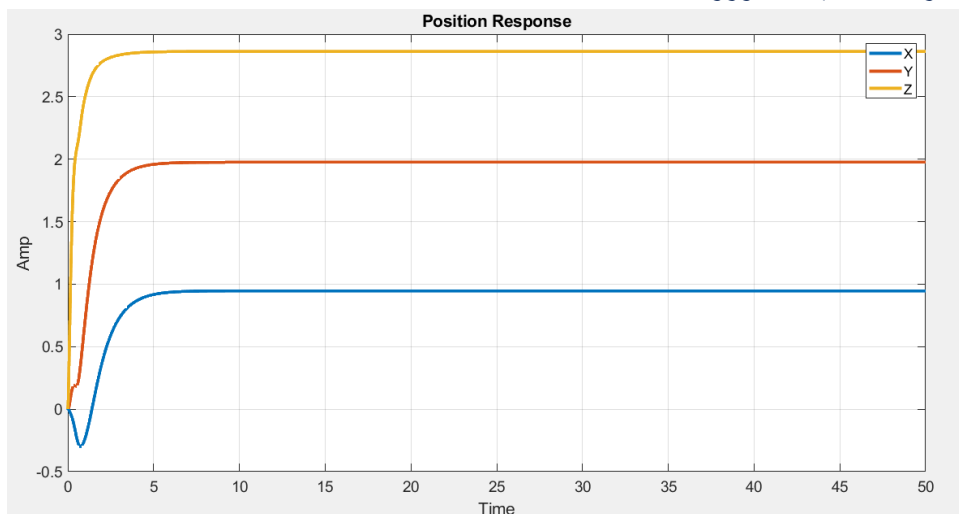


شکل ۳. تعقیب موقعیت های ثابت کوادکوپتر با کنترل کننده خطی PID

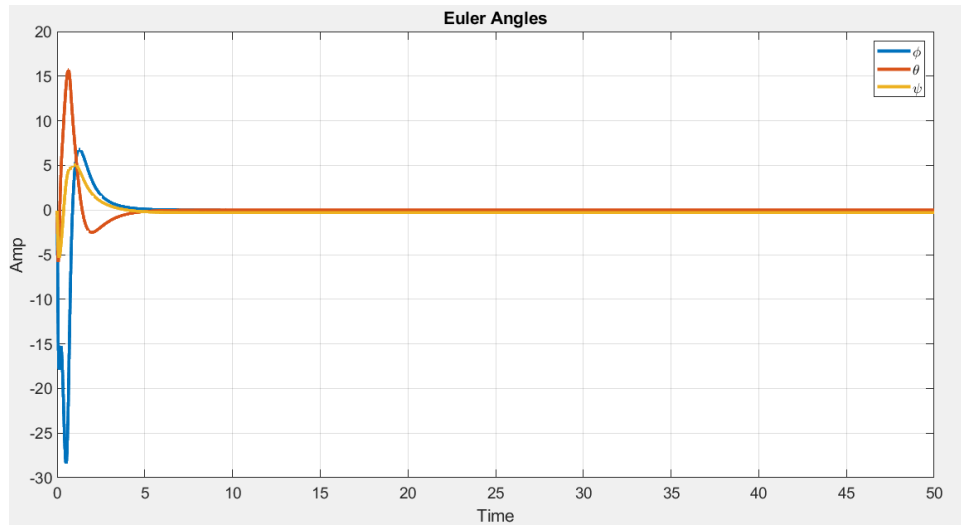


شکل ۴. پایداری وضعیت کوادکوپتر با کنترل کننده خطی PID

۲-۲-۴. نتایج کنترل کننده LQR به ورودی های ثابت

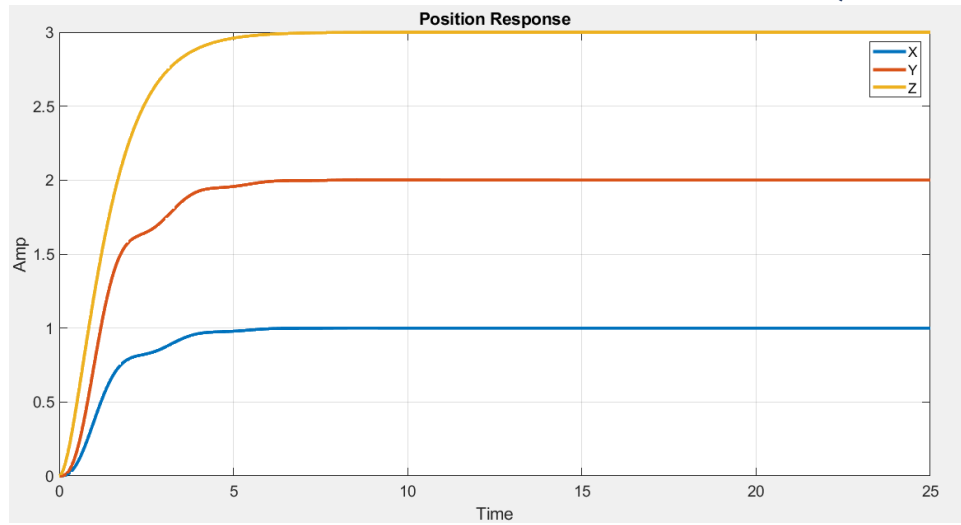


شکل ۵. تعقیب موقعیت های ثابت کوادکوپتر با کنترل کننده خطی LQR

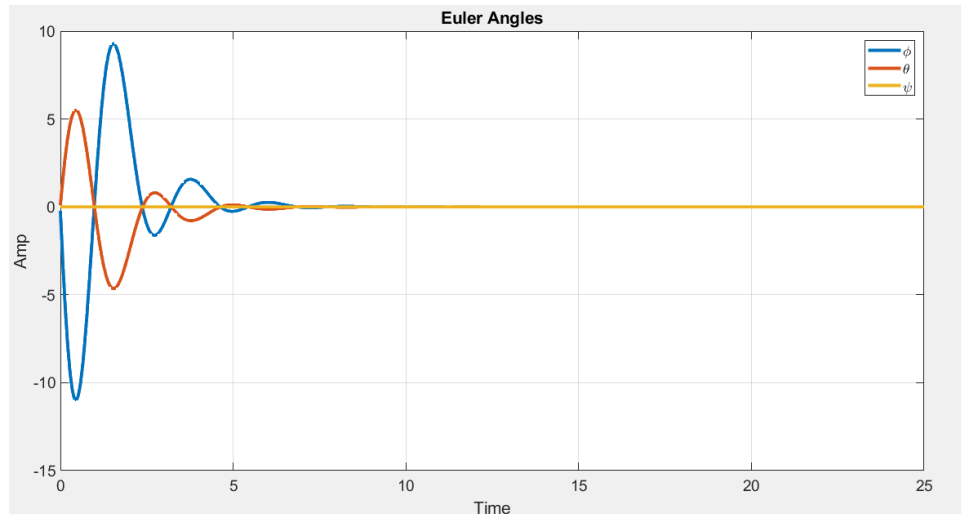


شکل ۶. پایداری وضعیت کوادکوپتر با کنترل کننده خطی LQR

۳-۲-۴. نتایج کنترل کننده پسخوراند خطی ساز به ورودی های ثابت

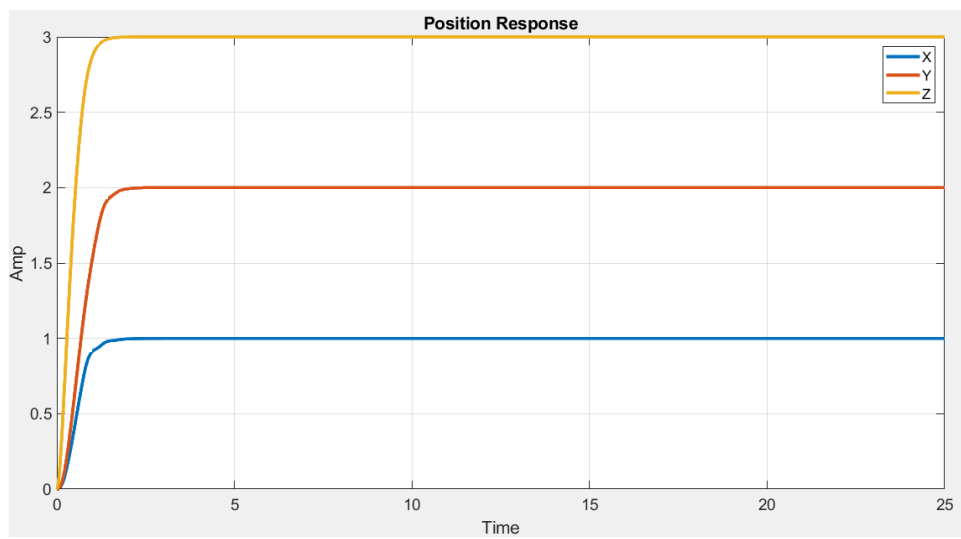


شکل ۷. تعقیب موقعیت های ثابت کوادکوپتر با کنترل کننده غیرخطی پسخوراند خطی ساز

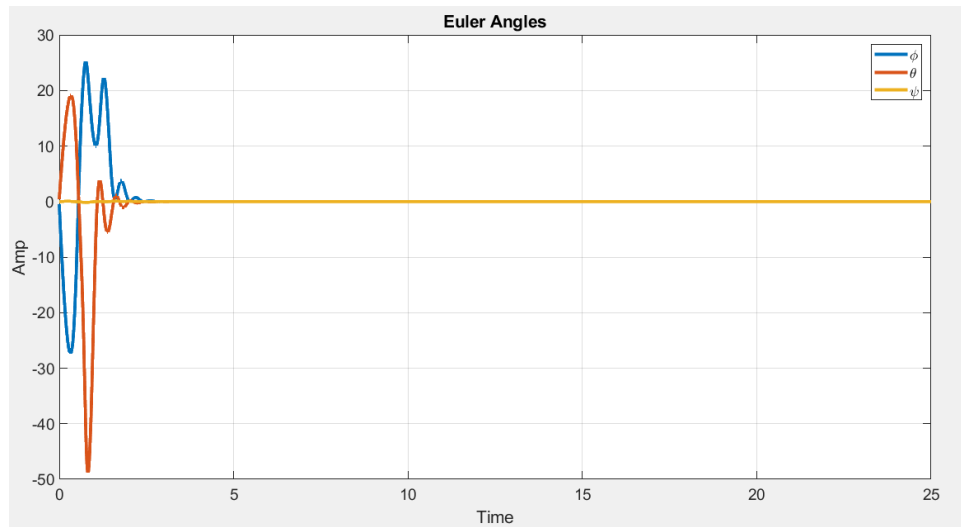


شکل ۸. پایداری وضعیت کواندومپتر با کنترل کننده غیرخطی پسخوراند خطی ساز

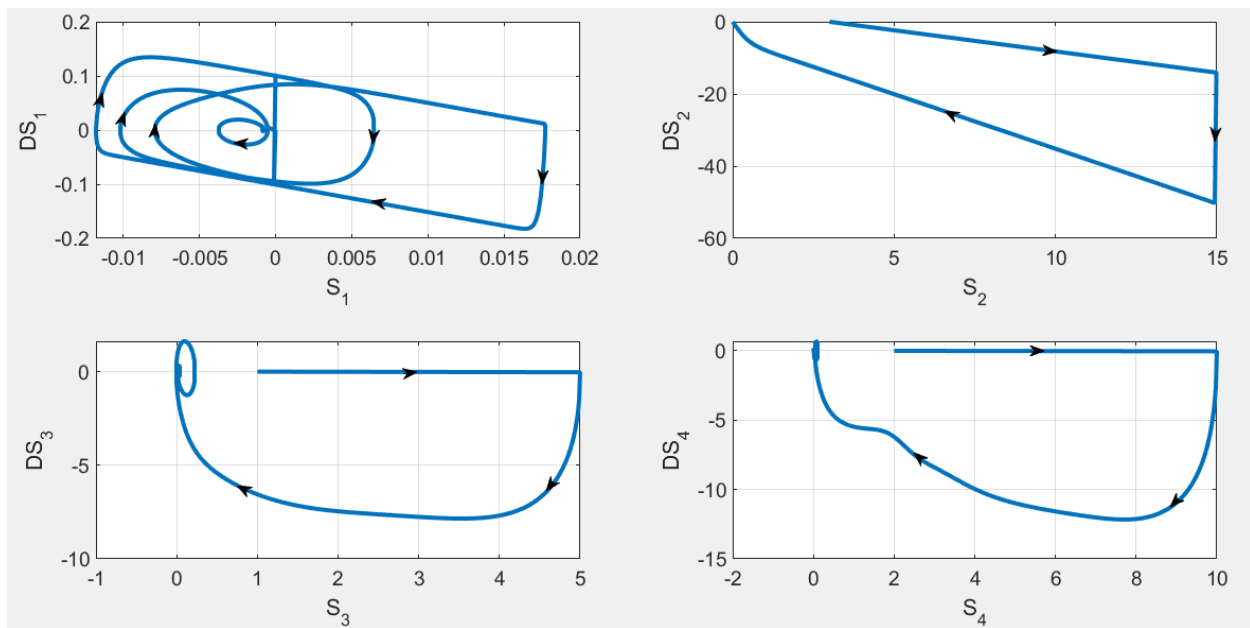
۴-۲-۴- نتایج کنترل کننده مود لغزشی به ورودی های ثابت



شکل ۹. تعقیب موقعیت های ثابت با کنترل کننده غیرخطی مودلغزشی

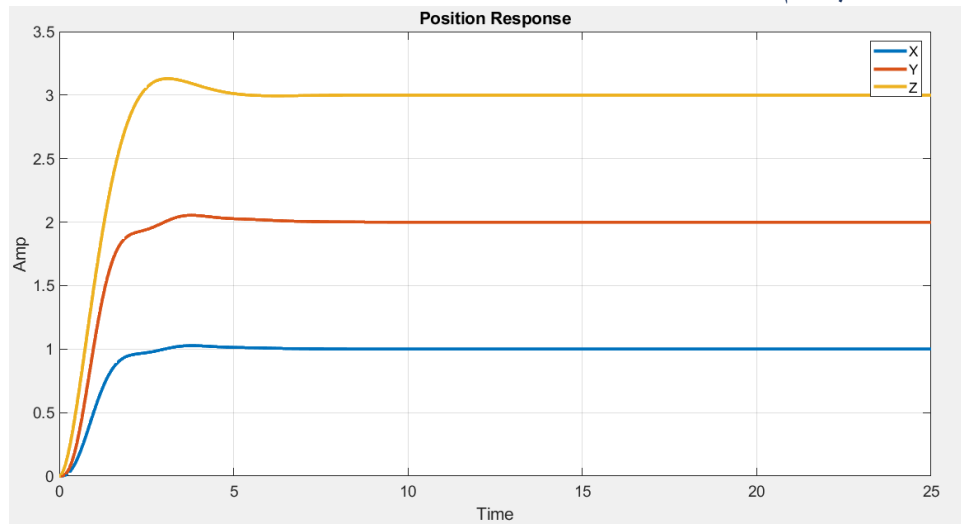


شکل ۱۰. پایداری وضعیت کوادکوپتر با کنترل کننده مدلغزشی

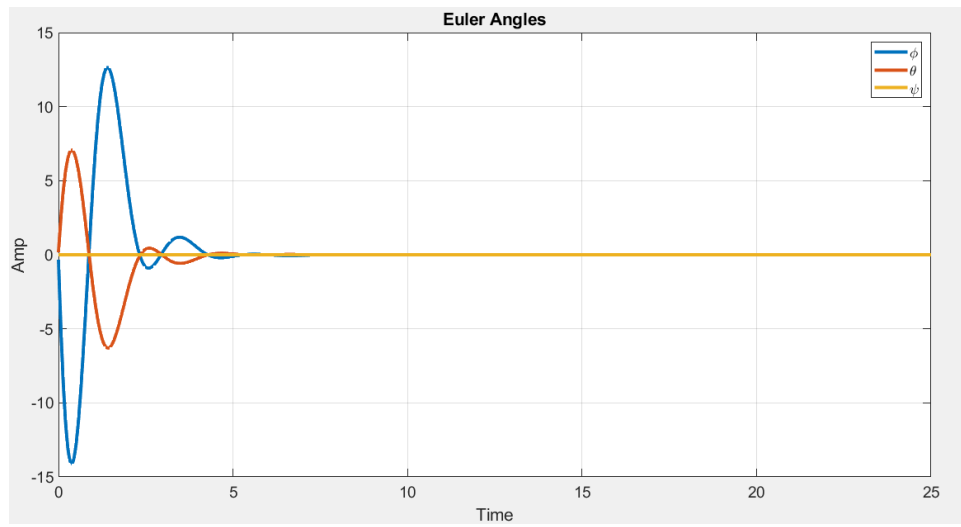


شکل ۱۱. ترسیمه فازی سطوح لغزش مختلف در کنترل مود لغزشی

۴-۲-۵. نتایج کنترل کننده پسگام به ورودی های ثابت

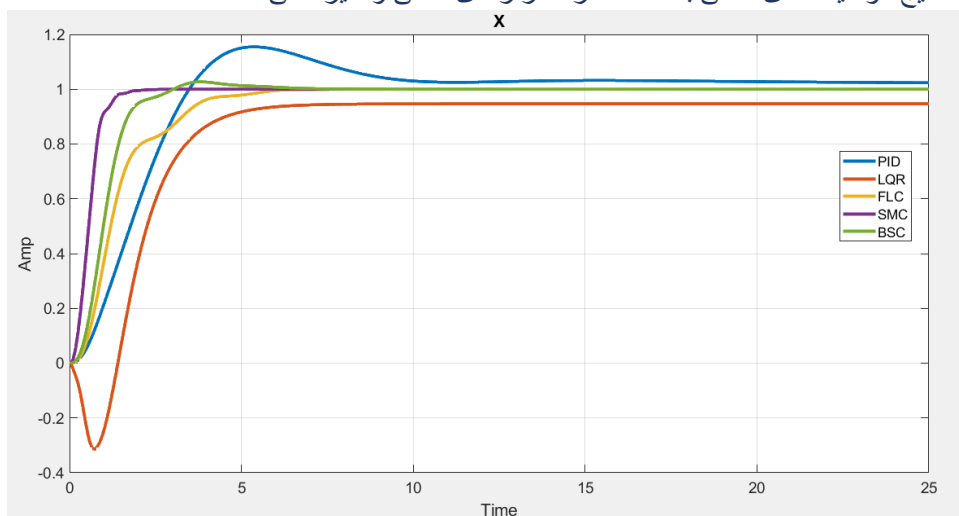


شکل ۱۲. تعقیب موقعیت های ثابت توسط کوادکوپتر با تکنیک پسگام

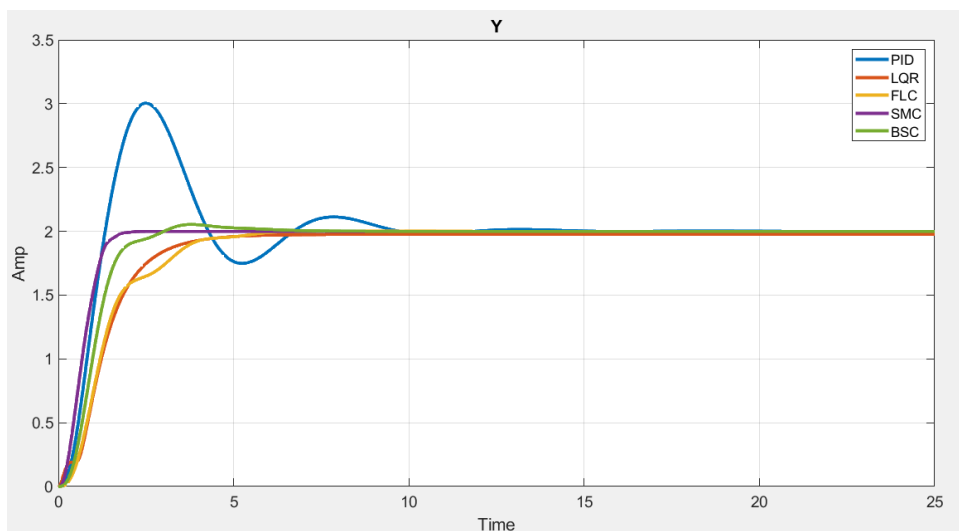


شکل ۱۳. پایداری وضعیت کوادکوپتر با تکنیک پسگام

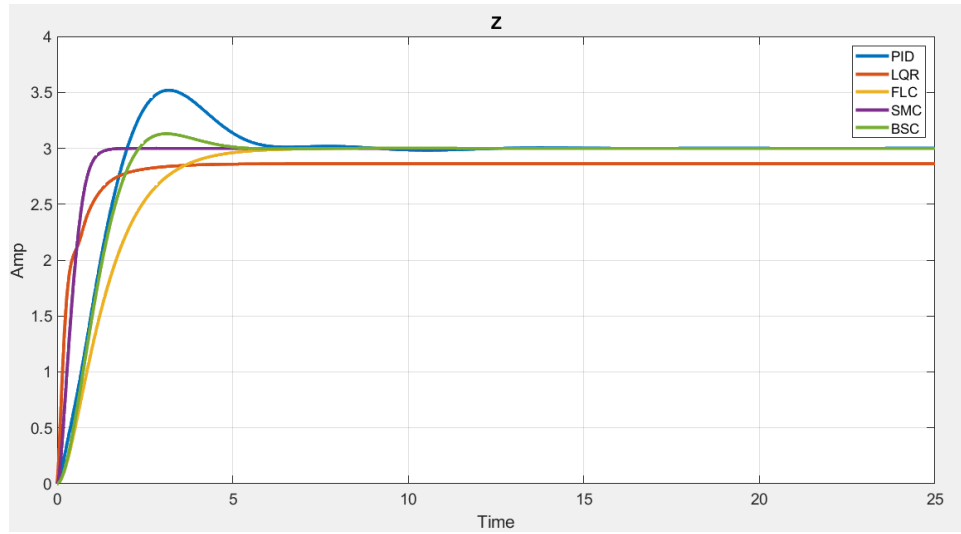
۴-۲-۶- مقایسه نتایج موقعیت های خطی با استفاده از کنترلرهای خطی و غیرخطی



شکل ۱۴. تعقیب موقعیت ثابت X توسط کنترل کننده های خطی و غیرخطی مختلف



شکل ۱۵. تعقیب موقعیت ثابت Y توسط کنترل کننده های خطی و غیرخطی مختلف



شکل ۱۶. تعقیب موقعیت ثابت Z توسط کنترل کننده های خطی و غیرخطی مختلف

۳-۴- نتایج ورودی متناوب

در این قسمت حالت مطلوب متناوب به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$x_d = r.\cos(\omega t), \quad y_d = r.\sin(\omega t), \quad z_d = at$$

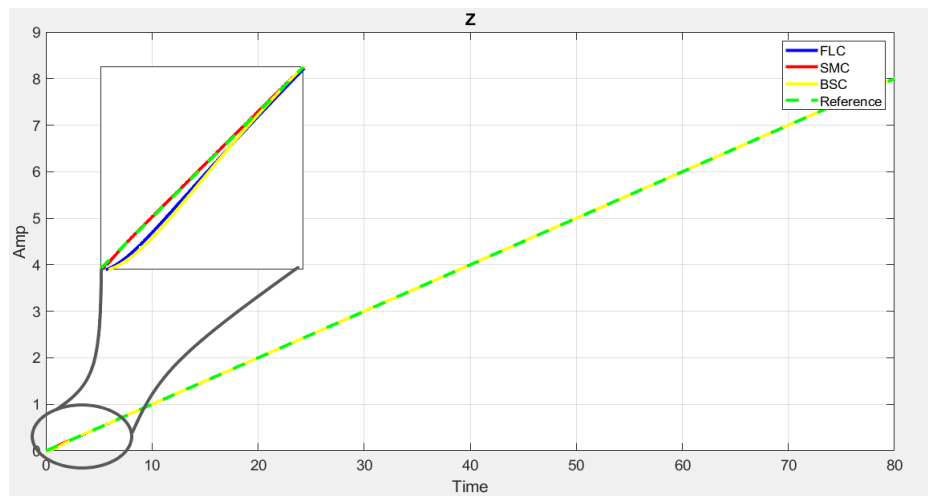
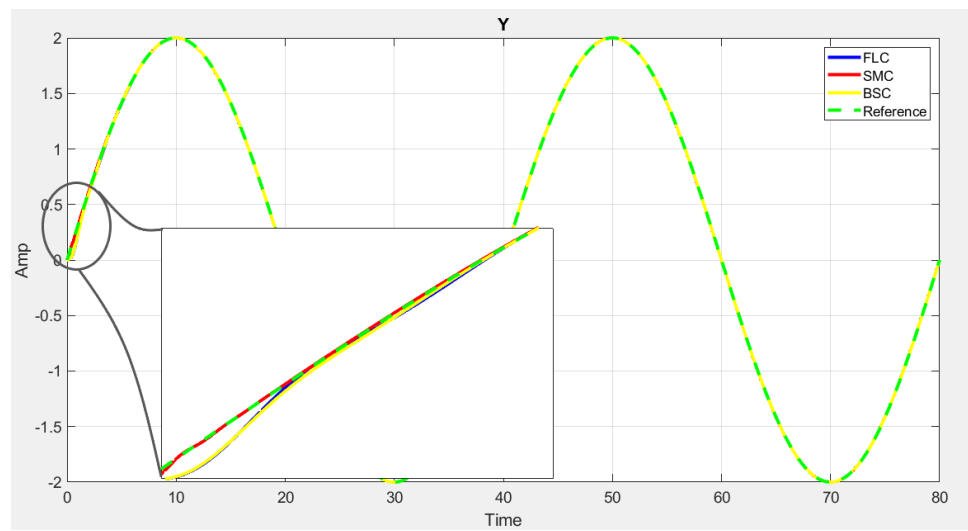
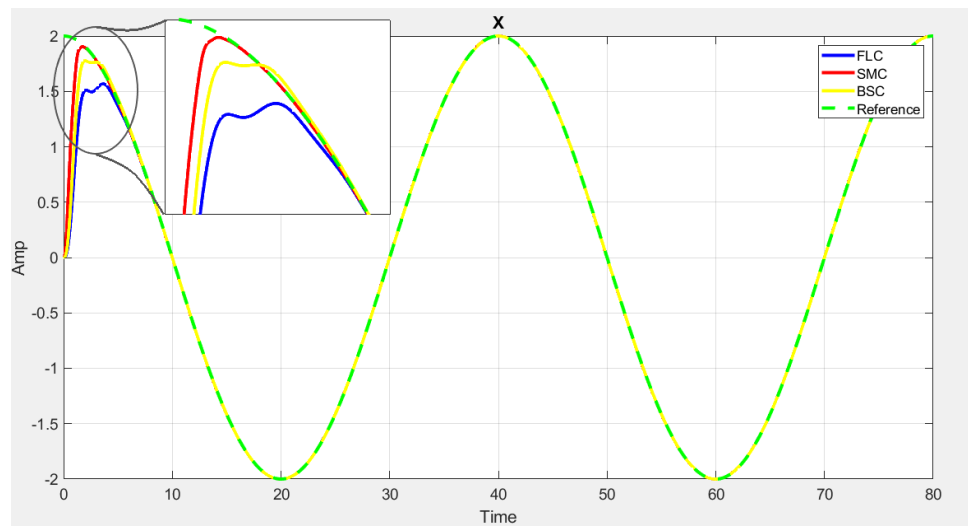
$$\varphi_d = \theta_d = 0, \quad \psi_d = b \sin(\omega t)$$

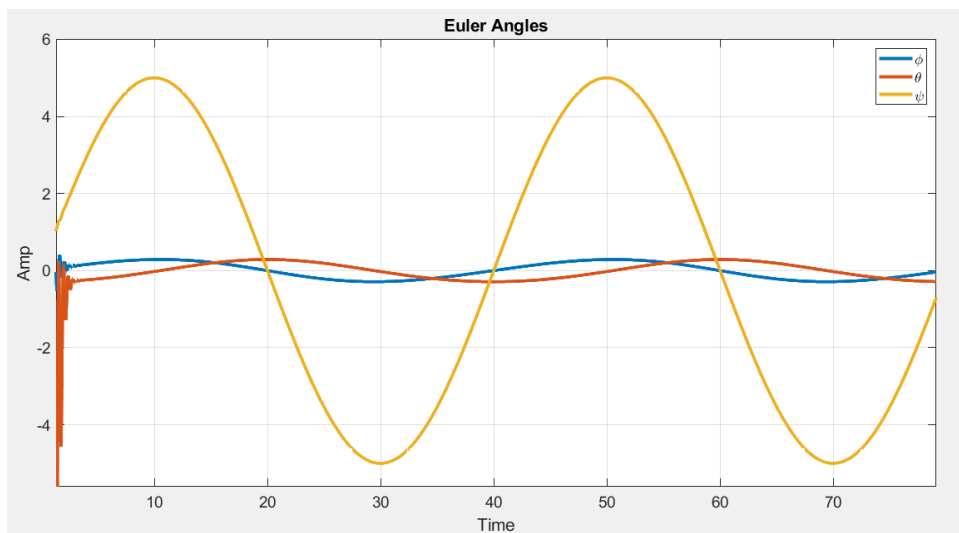
که

$$r = 2, \quad \omega = \frac{2\pi}{40}, \quad a = 0.1, \quad b = 5^\circ$$

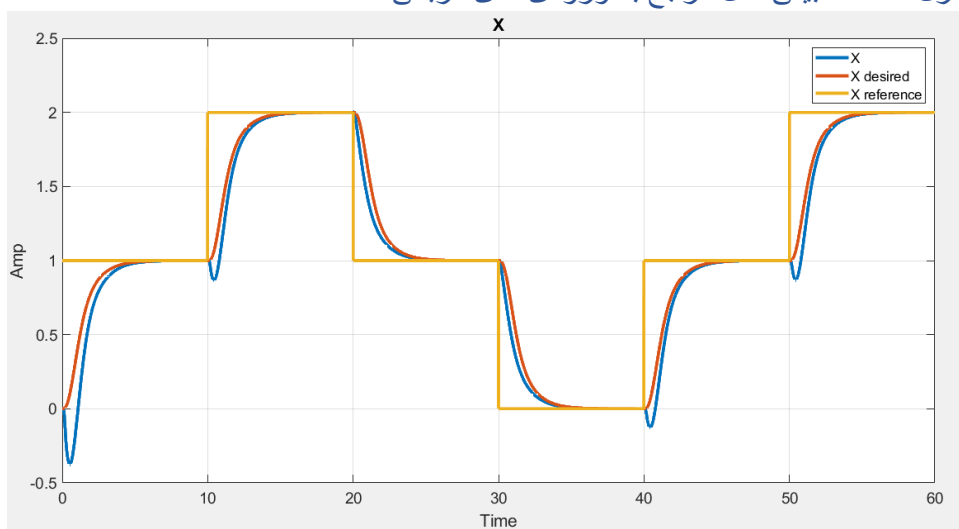
حال بعد از تعریف حالات مطلوب خروجی های کنترلرها یک به یک نمایش داده می شود.

نتایج کنترل کننده های غیرخطی به ورودی های متناوب

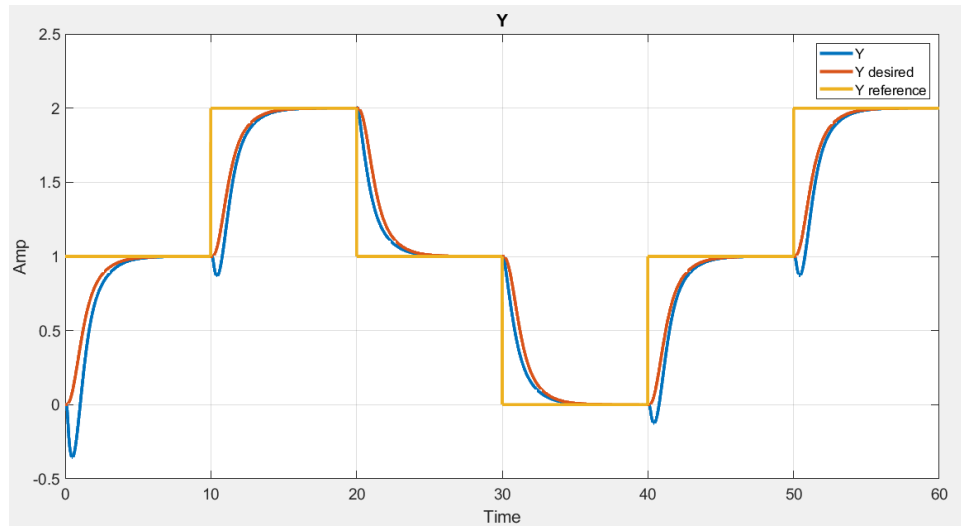




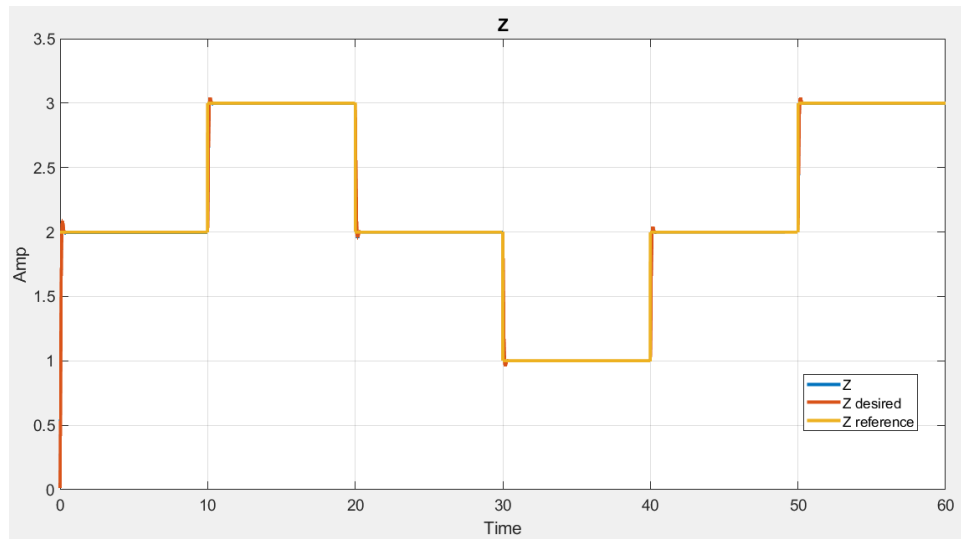
۴-۴- نتایج کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع به ورودی های مربعی



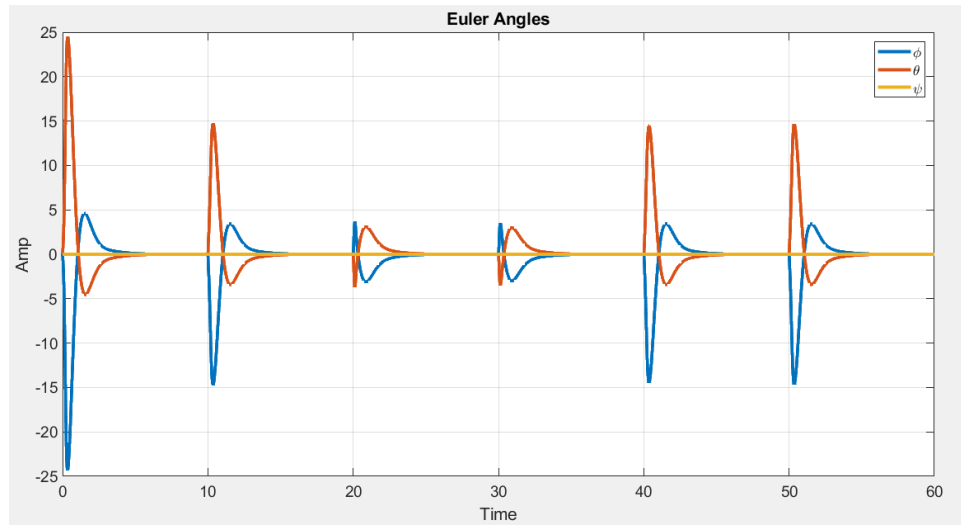
شکل ۱۷. تعقیب ورودی مربعی موقعیت X توسط کواکوپتر با کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع



شکل ۱۸. تعقیب ورودی مربعی موقعیت Y توسط کواکوپتر با کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع



شکل ۱۹. تعقیب ورودی مربعی موقعیت Z توسط کواکوپتر با کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع



شکل ۲۰. پایداری وضعیت کوادکوپتر با کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع

۴-۵. نتیجه گیری کلی

- [1] L. E. Romero , D. F. Pozo , J. A. Rosales, ” *Quadcopter stabilization by using PID controllers*”
- [2] L. M. Argentim, W. C. Rezende, P. E. Santos, R. A. Aguiar, ” *PID, LQR and LQR-PID on a Quadcopter Platform*”
- [3] D. Lee, H. J. Kim, and S. Sastry, ” *Feedback Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for a Quadrotor Helicopter*”
- [4] A. Ma'arif, A. I. Cahyadi, O. Wahyunggoro, ” *CDM Based Servo State Feedback Controller with Feedback Linearization for Magnetic Levitation Ball System*”
- [5] V. K. Tripathi, L. Behera, N. Verma, ” *Design of Sliding mode and Backstepping Controllers for a Quadcopter*”
- [6] Alfredo M. Garo M., Tianyang Cao, Al Chandeck, ” *Quadcopter Drone: Adaptive Control Laws*”